ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 519.6

# БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ[1]

**А. Г. Ченцов**

Исследуются вопросы структуры пространств ультрафильтров и максимальных сцепленных систем. Рассматривается широко понимаемое измеримое пространство: фиксируются непустое семейство подмножеств заданного множества — "единицы", замкнутое относительно конечных пересечений и содержащее данную "единицу", а также пустое множество ($\pi$-система с "нулем" и "единицей"). На данном пространстве конструируются ультрафильтры (максимальные фильтры) и максимальные сцепленные системы. Возникающие при этом пространства оснащаются каждое парой сравнимых топологий. Получающиеся при этом битопологические пространства оказываются согласованными в следующем смысле: пространство ультрафильтров является всякий раз подпространством соответствующего пространства максимальных сцепленных систем. При этом пространство максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа суперкомпактно и, в частности, компактно. Возможными вариантами $\pi$-системы являются решетки, полуалгебры и алгебры множеств, топологии и семейства замкнутых множеств топологических пространств.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, топологическое пространство, ультрафильтр.

**A. G. Chentsov. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems.**

Issues of the structure of spaces of ultrafilters and maximal linked systems are studied. We consider a widely understood measurable space (a $\pi$-system with zero and one) defined as follows: we fix a nonempty family of subsets of a given set closed under finite intersections and containing the set itself ("one") and the nonempty set ("zero"). Ultrafilters (maximal filters) and maximal linked systems are constructed on this space. Each of the obtained spaces is equipped with a pair of comparable topologies. The resulting bitopological spaces turn out to be consistent in the following sense: each space of ultrafilters is a subspace of the corresponding space of maximal linked systems. Moreover, the space of maximal linked systems with Wallman-type topology is supercompact and, in particular, compact. Possible variants of the $\pi$-systems are lattices, semialgebras and algebras of sets, topologies, and families of closed sets of topological spaces.

Keywords: maximal linked system, topological space, ultrafilter.

**MSC:** 54A09, 54A10, 54B05

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272

## 1. Введение

Статья продолжает работы [1–3] и посвящена изучению некоторых абстрактных аналогов суперрасширений топологических пространств (ТП); см. [4–7] и др. Рассматривается $\pi$-система [8, с. 14] с "нулем" и "единицей", т. е. семейство, состоящее из подмножеств фиксированного множества, играющего роль упомянутой "единицы". Данная $\pi$-система используется в качестве основной измеримой структуры (итак, исследуется более общий случай в сравнении с [1–3], где применялись решетки множеств). Предметом исследования являются пространства ультрафильтров (у/ф) и максимальных сцепленных систем (МСС) данной $\pi$-системы. Каждое из этих пространств рассматривается как битопологическое: естественная (и понимаемая расширительно) топология волмэновского типа дополняется топологией, которая в идейном отношении подобна используемой при построении пространства Стоуна (семейство у/ф алгебры множеств). В статье показано, что упомянутые топологии сравнимы: топология волмэновского типа, именуемая далее для краткости волмэновской, всегда слабее топологии,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-01-00410).

являющейся, по смыслу, стоуновской. При этом каждое из получающихся пространств у/ф является подпространством соответствующего пространства МСС. Определяя естественным образом битопологические пространства (БТП) у/ф и МСС, получаем, что первое БТП (т. е. БТП с “единицей” в виде множества всех у/ф исходной $\pi$-системы) может рассматриваться как подпространство БТП, “составленного” из МСС. Пространство МСС с волмэновской топологией оказывается суперкомпактным (обладает замкнутой предбазой со свойством непустого пересечения всякой своей сцепленной подсистемы) и может рассматриваться в качестве абстрактной версии суперрасширения топологического пространства (ТП). Заметим, что в [2] традиционный вариант суперрасширения также рассматривался в оснащении двумя топологиями. В связи с битопологическими пространствами см. монографию [9].

Среди работ [4–7] по суперрасширениям и суперкомпактным пространствам особо отметим [6], где установлено свойство суперкомпактности метризуемых компактов (т. е. компактных $T_2$-пространств). Систематическое исследование вопросов, связанных с суперкомпактностью и суперрасширениями ТП, содержится в [7, гл. VII, § 4]. В связи с вопросами теории у/ф, и в частности, пространств Стоуна, отметим исследования А. А. Грызлова и его учеников; см. [10–12].

В настоящей статье исследуется, таким образом, постановка, существенно отличающаяся как от работ [4–7], связанных с суперрасширениями ТП (как правило, $T_1$-пространств), так и от предыдущих исследований автора (см. [1–3]), где рассматривались у/ф и МСС на решетке множеств; $\pi$-система является, по сути дела, “полурешеткой” (постулируется замкнутость семейства множеств только относительно одной решеточной операции). Последнее обстоятельство повлияло на способ изложения и конструкции доказательств. Среди $\pi$-систем, не являющихся решетками, можно отметить полуалгебры множеств, играющие важную роль в теории меры и теории вероятностей.

## 2. Общие определения и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество; def заменяет фразу “по определению”, $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. *Семейством* называется множество, все элементы которого сами являются множествами. Если $x$ — какой-либо объект, то через $\{x\}$ обозначаем синглетон со свойством $x \in \{x\}$. Если же $z$ — упорядоченная пара, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы $z$, однозначно определяемые равенством $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$.

Если $X$ — множество, то $\mathcal{P}(X)$ — это def семейство всех п/м $X$ и $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; кроме того, $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м $X$. В качестве $X$ может использоваться семейство. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то полагаем

$$\{\textstyle\bigcup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcup_{X\in\mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X}) \Big\}, \qquad \{\textstyle\bigcap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcap_{X\in\mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X}) \Big\},$$
$$\{\textstyle\bigcup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcup_{X\in\mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X}) \Big\}, \quad \{\textstyle\bigcap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{ \bigcap_{X\in\mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X}) \Big\},$$

получая четыре семейства п/м объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$; ясно, что каждое из этих семейств содержит $\mathfrak{X}$. Для всякого множества $\mathbb{M}$ и семейства $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть двойственное по отношению к $\mathcal{M}$ семейство п/м $\mathbb{M}$. Если $S$ — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$, то $\mathbf{C}_S[\mathbf{C}_S[\mathcal{S}]] = \mathcal{S}$. Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества $B$

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{2.1}$$

есть след семейства $\mathcal{A}$ на множество $B$. Если $U$ и $V$ — множества, то $V^U$ есть def множество всех отображений из $U$ в $V$. При $f \in V^U$ и $W \in \mathcal{P}(U)$ в виде $f^1(W) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in W\} \in \mathcal{P}(V)$ имеем образ множества $W$ при действии $f$; $f^1(W) \neq \varnothing$ при $W \neq \varnothing$. Отметим еще одно соглашение: если $\mathcal{H}$ — семейство и $S$ — множество, то $[\mathcal{H}](S) \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{H} | S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Как обычно, $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ (натуральный ряд); при $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1,n} \overset{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$. Полагаем также, что натуральные числа не являются множествами. С учетом этого для всяких множества $S$ и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $S^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение $S^n$, что (при нашем соглашении) не приводит к двусмысленности.

**Специальные семейства.** До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Элементы $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$ суть непустые семейства п/м $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \,\&\, (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \,\&\, (A \cap B \in \mathcal{I} \;\; \forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{2.2}$$

имеем непустое семейство всех $\pi$-систем [8, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с “нулем” и “единицей”; $\pi$-системы из семейства $\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I} \;\; \forall x \in \mathbf{I} \setminus L \;\; \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda) \,\&\, (\Lambda \cap L = \varnothing)\}$ называем *отделимыми*. Кроме того, пусть

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \bigl\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \bigm| \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\bigr\} \quad \forall \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \tag{2.3}$$

((2.3) — семейство всех непустых центрированных подсемейств соответствующей $\pi$-системы). Частными случаями $\pi$-систем (см. (2.2)) являются алгебры и полуалгебры п/м $\mathbf{I}$, топологии на $\mathbf{I}$, семейства замкнутых множеств в ТП (иначе, замкнутые топологии). Отметим простой пример $\pi$-системы, не являющийся ни одним из вышеупомянутых семейств.

Итак, пусть в пределах данного примера $\mathbf{I} = ]0,1[$ (открытый единичный интервал), а $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ есть def семейство всех интервалов $]a,b[ \overset{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} \mid (a < \xi) \,\&\, (\xi < b)\},\ a \in [0,1],\ b \in [0,1]$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), т. е. $\mathcal{I} = \{\, ]\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [0,1] \times [0,1]\}$, где пустое множество также рассматривается как интервал: в частности, $\varnothing = ]1,0[$.

**Элементы топологии.** Через $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]\colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$. Пусть

$$(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \bigl\{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \bigm| \bigl(\mathbf{I} = \bigcup_{B \in \beta} B\bigr) \,\&$$

$$(\forall B_1 \in \beta \;\; \forall B_2 \in \beta \;\; \forall x \in B_1 \cap B_2 \;\; \exists B_3 \in \beta\colon (x \in B_3) \,\&\, (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\bigr\}; \tag{2.4}$$

ясно, что $\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \;\; \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Семейства — элементы (2.4) — (открытые) базы топологий на $\mathbf{I}$; при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\beta)\}$ имеем семейство всех баз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Через $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех (открытых) предбаз топологий на $\mathbf{I}$; $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ есть семейство всех $\kappa \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$ таких, что объединение всех множеств из $\kappa$ совпадает с $\mathbf{I}$. Последнее условие исчерпывающим образом характеризует предбазы (открытых) топологий. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \overset{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\}$ есть семейство всех (открытых) предбаз ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Соответственно,

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \bigl\{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \bigm| (\mathbf{I} \in \beta) \,\&\, \bigl(\bigcap_{B \in \beta} B = \varnothing\bigr) \,\&$$

$$(\forall B_1 \in \beta \;\; \forall B_2 \in \beta \;\; \forall x \in \mathbf{I} \setminus (B_1 \cup B_2) \;\; \exists B_3 \in \beta\colon (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \,\&\, (x \notin B_3))\bigr\}$$

есть семейство всех замкнутых баз; при этом $\{\cap\}(\mathfrak{B}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \; \forall B \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то в виде элементов семейства

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \overset{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] = \{\cap\}(\beta)\}$$

имеем замкнутые базы конкретного ТП $(\mathbf{I},\tau)$. Семейство $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cup\}_{\sharp}(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\}$ определяет совокупность замкнутых предбаз топологий на $\mathbf{I}$; если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \mid \{\cup\}_{\sharp}(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]\}$$

есть семейство всех замкнутых предбаз ТП $(\mathbf{I},\tau)$. При $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ через $\mathrm{cl}(A,\tau)$ обозначаем замыкание множества $A$ в ТП $(\mathbf{I},\tau)$. Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$, то $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и, кроме того, $N_\tau(x) \triangleq \{\, H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in N^0_\tau(x)\colon G \subset H\}$.

## 3. Фильтры и ультрафильтры $\pi$-систем

В дальнейшем фиксируем непустое множество $E$ и $\pi$-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (по мере надобности на $\mathcal{L}$ могут накладываться те или иные дополнительные условия). Через $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ обозначаем соответственно семейства всех фильтров и всех у/ф $\pi$-системы $\mathcal{L}$:

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \triangleq \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}) \mid (A\cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \ \forall B \in \mathcal{F})\,\& \\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F})\big\}, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \triangleq \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\big\}$$
$$= \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L\cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\big\}$$
$$= \big\{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\big\};$$

$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Введем тривиальные (фиксированные) фильтры $\pi$-системы $\mathcal{L}$: $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E$. Известно [13, (5.9)], что

$$((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E) \Longleftrightarrow (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]).$$

Если $L \in \mathcal{L}$, то $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\}$. При этом $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$, и, в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$. Топология $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$ превращает $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ в нульмерное [14, 6.2] $T_2$-пространство

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \tag{3.2}$$

(если $\mathcal{L}$ является алгеброй п/м $E$, то (3.2) есть нульмерный компакт — пространство Стоуна). При этом [15, (1.10)]

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{3.3}$$

В случае, когда $(E,\mathcal{L})$ есть измеримое пространство (ИП) с алгеброй множеств, последнее вложение превращается в равенство (см. [16, замечание 3.3]).

Заметим, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $A \in \mathcal{P}(E)$ определены $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ и $\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$, причем (см. [13, предложение 1])

$$\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid A\cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathcal{U}\};$$

если же $A \in \mathcal{L}$, то определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$ и при этом $\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(A)$. Наконец, в данном случае (при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$) $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$ (реализуется вложение $E$ в $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ в виде всюду плотного п/м).

Вернемся к общему случаю $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Полагаем, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} \colon U \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \tag{3.4}$$

Тогда, в частности, $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|E \setminus L] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)$ $\forall L \in \mathcal{L}$. Как следствие (см. (3.4)), получаем по двойственности, что

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]].$$

Таким образом, имеем следующее очевидное равенство:

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]] = \{\cap\}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]). \tag{3.5}$$

Ясно, что $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|E] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$ и $\varnothing = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\varnothing] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$. Рассмотрим некоторые следствия (3.5), учитывая, что

$$\mathbf{F} = \bigcap_{\mathbb{F} \in [\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]](\mathbf{F})} \mathbb{F} \qquad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{3.6}$$

С учетом (3.3) и (3.6) получаем, что при $L \in \mathcal{L}$ множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ совпадает с пересечением всех множеств из $[\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]](\Phi_{\mathcal{L}}(L))$. При этом, как легко видеть, $\forall L \in \mathcal{L}$ $\forall \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$

$$(L \subset \Lambda) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda]). \tag{3.7}$$

Отметим также, что при $L \in \mathcal{L}$ в виде $[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)$ имеем непустое семейство.

**Предложение 3.1.** *Если $L \in \mathcal{L}$ и $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, то $(L \subset \Lambda) \Longleftrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda])$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda]$. Допустим, однако, что $L \setminus \Lambda \neq \varnothing$. Пусть $x_* \in L \setminus \Lambda$. При этом $\Lambda = E \setminus N$, где $N \in \mathcal{L}$. Рассмотрим фильтр $\mathcal{V} \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; тогда для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ имеем вложение $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Ясно, что $L \in \mathcal{W}$, а потому $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$. Следовательно, $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda]$. С учетом (3.4) имеем для некоторого $W \in \mathcal{W}$ свойство $W \subset \Lambda$.

Кроме того, $N = E \setminus \Lambda$, а тогда $x_* \in N$, что доставляет включение $N \in \mathcal{V}$ и, стало быть, $N \in \mathcal{W}$. Тогда $(W \in \mathcal{W})\&(N \in \mathcal{W})$, а потому $W \cap N \neq \varnothing$ по аксиомам фильтра. Но $W \cap N \subset \Lambda \cap N = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что свойство $L \setminus \Lambda \neq \varnothing$ невозможно и, стало быть, $L \subset \Lambda$. Установлена импликация, противоположная (3.7), что и требовалось доказать. □

В качестве следствия предложения 3.1 получаем весьма очевидное свойство: если $L \in \mathcal{L}$, то

$$[\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]](\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda] : \ \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)\}. \tag{3.8}$$

**Предложение 3.2.** *Если $L \in \mathcal{L}$, то справедливо равенство* $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \bigcap\limits_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|\Lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (3.6), (3.8).

Заметим, что (3.7) допускает обобщение: при $L \in \mathcal{L}$ и $H \in \mathcal{P}(E)$

$$(L \subset H) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H]). \tag{3.9}$$

Отображение $H \longmapsto \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] \colon \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ является изотонным. С учетом данного свойства, а также (3.8) и (3.9) проверяется (см. предложение 3.2)

**Предложение 3.3.** *Если $L \in \mathcal{L}$, то множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ таково, что*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}\big[\mathcal{L} \,\big|\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda\big].$$

Из предложения 3.3 вытекает в свою очередь, что при $L \in \mathcal{L}$

$$\Big(\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\Big) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]).$$

**Частный случай: открытые ультрафильтры.** До конца настоящего раздела полагаем, что $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Тогда, как легко видеть (см. предложение 3.3), $\Phi_\tau(G) = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\tau|\mathrm{cl}(G,\tau)] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\tau]\ \ \forall G \in \tau$. С учетом [17, (8.5)] имеем свойство

$$\mathbb{F}^*_0(\tau) \setminus \Phi_\tau(G) = \Phi_\tau(E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)) \quad \forall G \in \tau. \tag{3.10}$$

В свою очередь с учетом (3.10) устанавливается следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}^*_0(\tau) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\tau) \mid \forall G \in \tau\ \ (G \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \mathcal{U})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение множество

$$\Omega \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\tau) \mid \forall G \in \tau\ \ (G \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \mathcal{U})\}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) легко следует, что $\mathbb{F}^*_0(\tau) \subset \Omega$ (см. определения в начале раздела). Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$ и, в частности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\tau)$. Покажем, что, в действительности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathcal{V} \notin \mathbb{F}^*_0(\tau)$. Тогда для некоторого фильтра $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*(\tau)$

$$(\mathcal{V} \subset \mathcal{W})\,\&\,(\mathcal{V} \neq \mathcal{W}). \tag{3.12}$$

Отсюда $\mathcal{W} \in \mathcal{P}'(\tau)$. Согласно (3.12) $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем множество

$$W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}. \tag{3.13}$$

Поскольку $W \in \tau$, получаем согласно (3.11), что по выбору $\mathcal{V}$

$$(W \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau) \in \mathcal{V}). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) вытекает, что на самом деле $E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau) \in \mathcal{V}$, а тогда согласно (3.12) $E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau) \in \mathcal{W}$. Поскольку $W \in \mathcal{W}$ (см. (3.13)), то в силу (3.1)

$$W \cap (E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau)) \neq \varnothing,$$

что невозможно, так как $W \subset \mathrm{cl}(W,\tau)$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)$, чем и завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbb{F}^*_0(\tau)$, а, стало быть, и требуемого равенства $\mathbb{F}^*_0(\tau) = \Omega$. □

Заметим, что характеристическое свойство открытых у/ф, указанное в теореме, подобно в логическом отношении следующему: если $\mathcal{A}$ — алгебра п/м $E$, то $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A}\ \ (A \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus A \in \mathcal{U})\}$.

## 4. Максимальные сцепленные подсемейства $\pi$-систем

Напомним определение сцепленности (см. [4–7]): семейство $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ называется *сцепленным*, если $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing\ \ \forall H_1 \in \mathcal{H}\ \ \forall H_2 \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(\mathrm{link})[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\} \tag{4.1}$$

есть семейство всех непустых сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Ясно, что $\varnothing \notin \mathcal{E}\ \ \forall \mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E]$. Всюду в дальнейшем фиксируем произвольную $\pi$-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и полагаем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{L}\}; \tag{4.2}$$

ясно, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. Имеем, кроме того, в виде

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] &\overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\big\}\\ &= \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\big\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

множество всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, именуемых ниже МСС. При этом $(E, \mathcal{L})$ рассматривается как широко понимаемое измеримое пространство (ИП);

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \quad \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing. \tag{4.4}$$

С использованием леммы Цорна проверяется, что

$$\forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \exists \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \colon \mathcal{S} \subset \mathcal{E}. \tag{4.5}$$

Свойства (4.4), (4.5) дополняются очевидным следствием (4.3):

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (\Sigma \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}).$$

Кроме того, (4.4) допускает следующее уточнение: $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall A \in \mathcal{U}\ \ \forall B \in \mathcal{U}\}$. При этом $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. В частности, $\{E\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ и, как следствие, $\mathcal{E} \cup \{E\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. С учетом (4.3) имеем теперь, что

$$E \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{4.6}$$

Если $L \in \mathcal{L}$, то полагаем, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\}$. Тогда (см. (4.1), (4.6))

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\varnothing] = \varnothing)\,\&\,(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]). \tag{4.7}$$

Ясно, что зависимость $L \longmapsto \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])$ изотонна. Введем, кроме того, $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset H\}\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E)$. Тогда получаем следующие два простых свойства:

$$\begin{gathered}(\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E))\,\&\\ (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E \setminus L] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]\ \ \forall L \in \mathcal{L}).\end{gathered} \tag{4.8}$$

Введем в рассмотрение семейства

$$\begin{gathered}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \colon L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])))\,\&\\ (\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]))).\end{gathered} \tag{4.9}$$

Как следствие (см. (4.8)), получаем равенство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]]; \tag{4.10}$$

итак, семейства (4.9) находятся в естественной двойственности. Ясно также, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\varnothing] = \varnothing$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. Заметим, наконец, с учетом последнего равенства, что $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$. Как следствие, определена база $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, порождающая топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]. \tag{4.11}$$

Семейство $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ есть предбаза получающегося ТП

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle), \tag{4.12}$$

т. е. реализуется следующее свойство:

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]. \tag{4.13}$$

В свою очередь, из (4.10)–(4.13) по двойственности получаем

**Предложение 4.1.** *Семейство $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ является замкнутой предбазой ТП* (4.12):

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

## 5. Суперкомпактность пространства максимальных сцепленных систем

Напомним ряд общих положений [4–7], связанных с суперкомпактными ТП, фиксируя непустое множество $\mathbb{X}$. Полагаем, что

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \,\Big|\, \mathbb{X} = \bigcup_{X\in\chi} X\Big\} \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X})),$$

получая всякий раз соответствующее семейство покрытий множества $\mathbb{X}$. По аналогии с (4.1) конструируем семейство $(\mathrm{link})[\mathbb{X}]$ всех сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ (используемое здесь обозначение повторяет (4.1) при замене $E$ на $\mathbb{X}$). Подобным образом по аналогии с (4.2) вводим семейство $\langle\mathfrak{X}-\mathrm{LINK}\rangle[\mathbb{X}] \stackrel{\triangle}{=} \{\kappa \in (\mathrm{link})[\mathbb{X}] \mid \kappa \subset \mathfrak{X}\}$ всех сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{X})$, содержащихся в $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$. Тогда полагаем

$$((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[\mathbb{X};\tau] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathfrak{X} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{X};\tau] \,\Big|\, \bigcap_{X\in\chi} X \neq \varnothing \ \forall \chi \in \langle\mathfrak{X}-\mathrm{LINK}\rangle[\mathbb{X}]\Big\} \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}]. \tag{5.1}$$

В (5.1) введено семейство замкнутых бинарных предбаз соответствующего ТП с “единицей” $\mathbb{X}$. Тогда (см. [7, гл. VII, §4]) с учетом соотношений двойственности имеем в виде

$$\begin{aligned} ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{X}] &\stackrel{\triangle}{=} \big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}] \mid ((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[\mathbb{X};\tau] \neq \varnothing\big\} \\ &= \big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}] \mid \\ \exists \mathcal{S} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{X};\tau] \ \forall \mathcal{G} &\in (\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{S}] \ \exists \mathbb{G}_1 \in \mathcal{G} \ \exists \mathbb{G}_2 \in \mathcal{G} \colon \mathbb{X} = \mathbb{G}_1 \cup \mathbb{G}_2\big\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

семейство всех топологий, превращающих $\mathbb{X}$ в суперкомпактное пространство. Вернемся к построениям, связанным с (4.3) для общего случая $\mathcal{L} \in \pi[E]$.

**Предложение 5.1.** *Семейство $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ есть замкнутая бинарная предбаза ТП* (4.12):

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \in ((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Схема доказательства в значительной степени подобна рассуждению в [7, 4.13], но мы все же ее приведем, поскольку здесь рассматривается существенно более общий случай.

Учтем предложение 4.1. Пусть $\mathfrak{A} \in \langle\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] - \mathrm{LINK})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$. Тогда $\mathfrak{A}$ сцеплено и при этом $\mathfrak{A} \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$. Для $\mathfrak{V} \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \in \mathfrak{A}\}$ имеем $\mathfrak{V} \neq \varnothing$; при этом

$$\mathfrak{U} \stackrel{\triangle}{=} \{\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]\colon L \in \mathfrak{V}\} = \mathfrak{A} \tag{5.3}$$

(проверка подобна [1, предложение 4.1]). Для $V_1 \in \mathfrak{V}$ и $V_2 \in \mathfrak{V}$ имеем в силу (5.3) и сцепленности $\mathfrak{A}$, что $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Как следствие, $\mathfrak{V} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ и $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ для некоторого $\mathfrak{W} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ (см. (4.5)). Легко видеть, что

$$\mathfrak{W} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \quad \forall L \in \mathfrak{V}.$$

Тогда $\mathfrak{W} \in \chi\ \ \forall \chi \in \mathfrak{A}$. В итоге пересечение всех множеств из $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$ непусто. □

С учетом (5.2) получаем, что $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а ТП (4.12) суперкомпактно. Как следствие (см. (5.2)), имеем, что

$$\forall \mathfrak{C} \in (\mathrm{COV})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]]\ \exists \mathbb{C}_1 \in \mathfrak{C}\ \exists \mathbb{C}_2 \in \mathfrak{C}\colon \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2.$$

Последнее свойство означает, что $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}])$

$$(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|G]) \Longrightarrow$$
$$\big(\exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G}\colon \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|G_1] \cup \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|G_2]).$$

**Предложение 5.2.** *Если* $L_1 \in \mathcal{L}$ *и* $L_2 \in \mathcal{L}$, *то*

$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longleftrightarrow (\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2] = \varnothing).$$

Доказательство. Пусть $\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2] = \varnothing$. Покажем, что $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. В самом деле, допустим противное: $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Пусть $x_* \in L_1 \cap L_2$. Тогда $\mathcal{X} \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и для некоторого $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеем $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$. При этом $L_1 \in \mathcal{V}$ и $L_2 \in \mathcal{V}$, а потому в силу (4.4) $\mathcal{V} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2]$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает истинность импликации

$$(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2] = \varnothing) \Longrightarrow (L_1 \cap L_2 = \varnothing).$$

Противоположная импликация очевидна (см. (4.1)). □

Отметим очевидное дополнение предложения 5.2: если $\Lambda_1 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и $\Lambda_2 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, то

$$(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda_1] \cap \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda_2] = \varnothing).$$

Напомним, что $\{L\} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. Как следствие получаем, что $\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ совпадает с объединением всех семейств из $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]$, а также с объединением всех семейств из $\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$.

Возвращаясь к рассмотрению у/ф (см. разд. 3), отметим, что $\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Тогда $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и определена топология

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{5.4}$$

Ясно, что $\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]$, причем, как легко видеть,

$$\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{5.5}$$

В свою очередь, из (5.5) вытекает (см. (5.4)) следующее предложение.

**Предложение 5.3.** *В виде* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle)$ *имеем подпространство ТП* (4.12):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}.$$

В связи с общими свойствами ТП (4.12) отметим также, что

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\Sigma] = \{\mathcal{E}\} \quad \forall \mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{5.6}$$

В свою очередь, из предложения 4.1 и (5.6) получаем, что (4.12) является $T_1$-пространством (при $\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ синглетон $\{\mathcal{E}\}$ замкнут в ТП (4.12)). Итак, (4.12) есть суперкомпактное $T_1$-пространство.

В заключение раздела отметим ряд простых свойств, связываемых далее с $T_1$-отделимостью. Так, при $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$

$$(\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow ((\mathcal{E}_1\setminus\mathcal{E}_2\neq\varnothing)\,\&\,(\mathcal{E}_2\setminus\mathcal{E}_1\neq\varnothing));$$

кроме того, имеем следующую очевидную эквиваленцию:

$$(\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow (\exists\Sigma_1\in\mathcal{E}_1\ \exists\Sigma_2\in\mathcal{E}_2\colon \Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing).$$

Для любых двух непустых семейств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ полагаем $(\mathrm{Dis})[\mathcal{V};\mathcal{W}] \stackrel{\triangle}{=} \{z\in\mathcal{V}\times\mathcal{W} \mid \mathrm{pr}_1(z)\cap\mathrm{pr}_2(z)=\varnothing\}$; в частности, определено $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$, где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ суть МСС из $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$. Если $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$, то

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E\setminus\mathrm{pr}_2(z)]\in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_1)\colon \mathcal{E}_2\notin\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E\setminus\mathrm{pr}_2(z)]. \tag{5.7}$$

С учетом (5.6) получаем при $\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2$ свойство $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$, а тогда (5.7) реализует конкретный вариант $T_1$-отделимости в ТП (4.12).

## 6. Максимальные сцепленные системы как точки нульмерного $T_2$-пространства

Из (4.7) и (4.9) вытекает, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]\in(\mathrm{p-BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ (объединение всех множеств из $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ совпадает с $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, так как $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\in\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ в силу (4.7)). Как следствие, $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])\in(\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ и определена топология

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]))\in(\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]. \tag{6.1}$$

Разумеется, $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]\subset\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, что позволяет использовать множества первого из семейств в (4.9) для построения открытых окрестностей МСС. С учетом предложения 5.2 получаем, что при $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_1(z)]\cap\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_2(z)]=\varnothing. \tag{6.2}$$

Если при этом $\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2$, то $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$, что позволяет использовать (6.2) для установления $T_2$-отделимости ТП

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{6.3}$$

**Предложение 6.1.** *В виде* (6.3) *реализуется* $T_2$*-пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно: при $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\{\mathcal{E}_1\}$ применяем (6.2), учитывая получающееся при этом свойство $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$; при $z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_1(z)]\in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_1),\quad \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_2(z)]\in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_2),$$
$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_1(z)]\cap\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_2(z)]=\varnothing.$$

**Предложение 6.2.** *Если* $L \in \mathcal{L}$, *то справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\}. \tag{6.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega$ есть def множество в правой части (6.4). Требуется установить равенство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] = \Omega$. Если $\mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]$, то $L \in \mathcal{S}$ и (по свойству сцепленности $\mathcal{S}$) $L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{S}$. Итак, $\mathcal{S} \in \Omega$, чем завершается проверка вложения $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \subset \Omega$. Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$, т. е. $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ и при этом $L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{V}$. Тогда в силу (4.3) получаем, что $L \in \mathcal{V}$, а потому (см. разд. 4) $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]$. Тем самым установлено, что $\Omega \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]$, чем и завершается проверка равенства $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] = \ \Omega$. □

**Предложение 6.3.** *Если* $L \in \mathcal{L}$, *то* $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $L \in \mathcal{L}$ и полагаем, что $\mathbb{L} \triangleq \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]$. Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{L}$, тогда (см. разд. 4) $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ и при этом $L \cap V = \varnothing$ для некоторого $V \in \mathcal{V}$ (см. предложение 6.2). В частности, $V \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V]$. Пусть $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V]$, тогда $V \in \mathcal{W}$. Поэтому $\exists \Sigma \in \mathcal{W}\colon L \cap \Sigma = \varnothing$. В силу предложения 6.2 $\mathcal{W} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]$, а потому $\mathcal{W} \in \mathbb{L}$. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \subset \mathbb{L}$, где согласно (4.9) $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$, и в частности

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]).$$

Таким образом, установлено, что $\forall \mathcal{E} \in \mathbb{L} \ \exists \mathbb{B} \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])\colon (\mathcal{E} \in \mathbb{B})\,\&\,(\mathbb{B} \subset \mathbb{L})$. По свойствам (открытой) базы $\mathbb{L} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ (см. (6.1)), а потому $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{L} \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. □

Используя свойства замкнутых множеств, получаем

$$\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \cap \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle] \tag{6.5}$$

(см. (6.1)), где $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \in (\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle - \mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$. Итак (см. предложение 6.1), (6.3) есть $T_2$-пространство с базой открыто-замкнутых множеств, т. е. справедливо следующее предложение.

**Предложение 6.4.** *В виде* (6.3) *имеем нульмерное* $T_2$*-пространство.*

**Предложение 6.5.** *Посредством* (3.2) *реализуется подпространство ТП* (6.3):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{6.6}$$

Действительно, из определений разд. 2, 3 следует, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \quad \forall L \in \mathcal{L}, \tag{6.7}$$

см. также (4.4). С учетом (4.9) и (6.7) получаем (6.6) (см. (2.1) и определение $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ в разд. 3).

Пусть $\mathbb{G} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Тогда (см. [13, § 2]) $\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ и при этом

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{G} \quad \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{G}. \tag{6.8}$$

Ясно, что $(\mathbb{G} = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})})$ по аксиомам топологии. Пусть теперь $\mathbb{G} \neq \varnothing$. Введем в рассмотрение семейство

$$\mathfrak{C} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{C} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \mid \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C} \subset \mathbb{G}\}. \tag{6.9}$$

С учетом (6.8) и (6.9) получаем (см. (6.7)), что $\mathfrak{C} \neq \varnothing$, а тогда $\mathfrak{C} \in \mathcal{P}'(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$ и потому (см. (6.1))

$$\tilde{\mathbb{G}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} \mathbb{C} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \tag{6.10}$$

(учитываем, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$). Из (6.9), (6.10) вытекает, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \tilde{\mathbb{G}} = \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}) \subset \mathbb{G}. \tag{6.11}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{G}$. Согласно (6.8) имеем для $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ следующее свойство: для некоторого $V \in \mathcal{V}$ реализуется вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{G}, \tag{6.12}$$

где $V \in \mathcal{L}$ и $\Phi_{\mathcal{L}}(V) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. При этом $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ согласно (4.9). Тогда в силу (6.12)

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \colon \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{G}.$$

С учетом (6.9) получаем, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \mathfrak{C}$. В этом случае из (6.11) следует

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}),$$

а потому имеем по выбору $\mathcal{V}$, что (поскольку $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(V)$)

$$\mathcal{V} \in \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}). \tag{6.13}$$

Итак (см. (6.13)), установлено, что

$$\mathbb{G} \subset \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \Big(\bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} \mathbb{C}\Big) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \tilde{\mathbb{G}}. \tag{6.14}$$

Из (6.11) и (6.14) следует, что $\mathbb{G} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \tilde{\mathbb{G}}$. Тогда в силу (2.1) и (6.10) $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ и в случае $\mathbb{G} \neq \varnothing$. Итак, имеем, что во всех возможных случаях $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{6.15}$$

Выберем произвольно $\Omega \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$. Тогда $\Omega = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \Gamma$, где $\Gamma \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$.

Пусть $\mathfrak{U} \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и вместе с тем $\mathfrak{U} \in \Gamma$. В силу (6.1) для некоторого $\mathbb{B} \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$ имеем

$$(\mathfrak{U} \in \mathbb{B})\,\&\,(\mathbb{B} \subset \Gamma).$$

При этом для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{B}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]^n$ имеем равенство $\mathbb{B} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathbb{B}_i$. Как следствие получаем очевидное равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_i), \tag{6.16}$$

где согласно (6.6) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_j \in (\mathbb{UF}[E;\mathcal{L}]\ \forall j \in \overline{1,n}$. В частности (см. разд. 2), $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_j \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ при $j \in \overline{1,n}$. С учетом (6.16) и аксиом топологии

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{6.17}$$

По выбору $\mathbb{B}$ имеем, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}$, откуда с учетом (6.17) следует, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} \in N^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathfrak{U})$, причем $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} \subset \Omega$. Это означает, что $\Omega \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathfrak{U})$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что $\Omega \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathcal{U})\ \forall \mathcal{U} \in \Omega$. Это означает, что $\Omega \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ (см. [18, с. 19]). Итак, установлено, что $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. С учетом (6.15) получаем требуемое утверждение: (3.2) есть подпространство ТП (6.3). $\square$

## 7. Битопологическое пространство максимальных сцепленных систем

Согласно (4.11) и (6.1) определены две топологии непустого множества $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$. Каждое из получающихся при этом ТП (см. (4.12) и (6.3)) определяет соответствующее подпространство у/ф $\pi$-системы $\mathcal{L}$. Сейчас рассмотрим вопрос о сравнимости топологий (4.11) и (6.1).

**Предложение 7.1.** *Топологии* $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ *сравнимы, и при этом*

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что (см. предложение 4.1) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ есть замкнутая предбаза ТП (4.12), а тогда

$$\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Как следствие (см. разд. 3), получаем равенство

$$\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle] = \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])). \tag{7.1}$$

Пусть $\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. Тогда согласно (7.1) для некоторого $\kappa \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]))$ имеем равенство

$$\mathbb{F} = \bigcap_{\mathbb{X}\in\kappa} \mathbb{X}. \tag{7.2}$$

Итак, $\kappa \neq \varnothing$ и $\kappa \subset \{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$. Заметим, что согласно (6.5)

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]. \tag{7.3}$$

Заметим также, что из (7.3) вытекает (по свойствам замкнутых множеств), что

$$\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Поэтому $\kappa \subset \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$, а тогда в силу (7.2) $\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. Тем самым установлено вложение

$$\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle] \subset \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]. \tag{7.4}$$

Как следствие, из (7.4) вытекает, что

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]] \subset \mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle.$$

Предложение доказано. □

Таким образом, в виде триплета

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{7.5}$$

реализуется БТП. В силу предложений 5.3, 6.5 и 7.1 имеем вложение $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. Как следствие, получаем в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \tag{7.6}$$

индуцированное из (7.5) БТП. Точнее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.1.** *Для БТП* (7.5) *и* (7.6) *имеет место свойство*: (7.6) *есть подпространство БТП* (7.5):

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} = \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E].$$

## 8. Частный случай: $\pi$-система является решеткой множеств

Коснемся случая, исследуемого в [1;3], когда $\pi$-система $\mathcal{L}$ обладает дополнительным свойством $A \cup B \in \mathcal{L}\ \forall A \in \mathcal{L}\ \forall B \in \mathcal{L}$. Итак, полагаем, что $\mathcal{L}$ является решеткой п/м $E$ с "нулем" и "единицей" (имеется в виду оснащение $\mathcal{P}(E)$ упорядоченностью по включению, в смысле которой и понимаются решеточные операции). В обозначениях [1, (3.1), (3.6)] имеем (см. (4.9)) равенства $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}_0^*[E;\mathcal{L}]$ и $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}]$. Тогда согласно (4.11) в терминах [1, (3.8)] получаем цепочку равенств

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}])) = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}])) = \mathbb{T}_0(E|\mathcal{L}). \tag{8.1}$$

Аналогичным образом, используя [1, (6.2)], получаем следующую цепочку равенств:

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^*[E;\mathcal{L}])) = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^*[E;\mathcal{L}])) = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}). \tag{8.2}$$

В результате БТП (7.5) сводится к БТП [1, (6.20)]; мы учитываем здесь же, что согласно (4.3) и [1, (2.9)] в рассматриваемом сейчас случае решетки множеств $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = (\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E]$. Итак, получаем совпадение БТП:

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) = ((\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E], \mathbb{T}_0(E|\mathcal{L}), \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})). \tag{8.3}$$

Из предложения 5.3, (8.1) и [1, предложение 5.4] вытекает, что (см. [1, (2.5)])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]. \tag{8.4}$$

Аналогичным образом из предложения 6.5 и [1, предложение 6.4] следует, что (см. (8.2))

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}.$$

С учетом (8.4) получаем, что БТП (7.6) сводится к БТП [1, (2.7)]:

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \tag{8.5}$$

Построения разд. 2–7 являются (см. (8.3), (8.5)) существенным обобщением аналогичных построений [1]. В этой связи совсем кратко коснемся положений [1–3]. Прежде всего, в [1;3] были исследованы случаи, когда БТП (8.3), (8.5) оказываются вырожденными, что приводит, в частности, к реализации суперкомпакта на основе (8.3). Имеются в виду случаи, когда $\mathcal{L}$ является алгеброй п/м $E$ или топологией на $E$. Точнее, в каждом из упомянутых двух случаев

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E], \quad \mathbb{T}_0(E|\mathcal{L}) = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}).$$

Второе из упомянутых равенств соответствует реализации суперкомпакта, так как

$$((\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E], \mathbb{T}_0(E, \mathcal{L})) = ((\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E], \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}))$$

(см. [1, §§ 8, 9]); см. также (8.1) и (8.2), а также положения разд. 5 и 6 о суперкомпактности и $T_2$-отделимости.

В то же время (см. [1, § 7]) в случае, когда $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ порождает $T_1$-пространство, при $\tau \neq \mathcal{P}(E)$ (т. е. в случае, когда ТП $(E, \tau)$ не является дискретным) каждое из БТП (8.3), (8.5) является невырожденным; в [3] приведен целый ряд содержательных примеров такого рода. Кроме того, в упомянутом случае замкнутых у/ф в $T_1$-пространстве, не являющимся дискретным, $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ также различны (см. [1, следствие 7.1]); в частности, упомянутое различие имеет место в случае, когда $E = [0,1]$, а $\tau$ есть обычная $|\cdot|$-топология $E$. Итак, решетка замкнутых множеств в $T_1$-пространстве типично приводит к ситуации невырожденности упомянутых БТП.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 3. С. 365–388. doi: 10.20537/vm170307 .
2. **Ченцов А. Г.** Суперрасширение как битопологическое пространство // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 49. С. 55–79. doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03 .
3. **Chentsov A. G.** Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 100–121. doi: 10.15826/umj.2017.2.012 .
4. **de Groot. J.** Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
5. **Mill J. van.** Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam, 1977. 238 p. (Amsterdam. Math. Center Tract; vol. 85).
6. **Strok M., Szymanski A.** Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. vol. 89, no. 1. P. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
7. **Федорчук В. В., Филиппов В. В.** Общая топология. Основные конструкции. М: Физматлит, 2006. 336 с.
8. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
9. **Dvalishvili B. P.** Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applicatiSer. Amsterdam; Boston; Heidelberg; London, N Y: Elsevier, 2005. 422 p. (Nort-Holland Mathematics Studies; vol. 199.) ISBN: 9780444517937 .
10. **Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А.** О точках одного бикомпактного расширения N // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. doi: 10.20537/vm100302 .
11. **Грызлов А. А., Головастов Р. А.** О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. doi: 10.20537/vm130102 .
12. **Головастов Р. А.** О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24. doi: 10.20537/vm120303 .
13. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101. doi: 10.20537/vm140108 .
14. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
15. **Ченцов А. Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 90–109. doi: 10.20537/vm140309 .
16. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
17. **Ченцов А. Г., Пыткеев Е. Г.** Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №4. С. 312–329.
18. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 11.01.2018

## REFERENCES

1. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365–388 (in Russian). doi: 10.20537/vm170307 .

2. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03 .
3. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100–121. doi: 10.15826/umj.2017.2.012 .
4. de Groot.J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications.* Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. pp. 89–90.
5. Mill J. van. *Supercompactness and Wallman spaces.* Amsterdam, 1977, Ser. Math. Centre Tracts, vol. 85, 238 p.
6. Strok M., Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
7. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii.* [General topology. Basic constructions.] Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. ISBN: 5-9221-0618-X .
8. Bulinskij A.V., Shirjaev A.N. *Teorija sluchajnyh processov* [Theory of random processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
9. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, N Y: Elsevier, 2005, Ser. Nort-Holland Mathematics Studies, vol. 199, 422 p. ISBN: 9780444517937 .
10. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian). doi: 10.20537/vm100302 .
11. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian). doi: 10.20537/vm130102 .
12. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 19–24 (in Russian). doi: 10.20537/vm120303 .
13. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian). doi: 10.20537/vm140108 .
14. Engelking R. *General topology.* Warszawa, Polish Scientific Publ., 1977, 626 p. ISBN: 0800202090 . Translated to Russian under the title *Obshhaja topologija.* Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
15. Chentsov A.G. To the validity of constraints in the class of generalized elements. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 90–109 (in Russian). doi: 10.20537/vm140309 .
16. Chentsov A.G.. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, Suppl. 1, pp. S12–S39. doi: 10.1134/S00815438110900021 .
17. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, Suppl. 1, pp. S36–S54. doi: 10.1134/S0081543816020048 .
18. Bourbaki N. *Eléments de mathématique, Fascicule II, Livre III, Topologie générale, Chapitre 1, Structures topologiques, Chapitre 2, structures uniformes.* Paris: Hermann, 1965, 255 p. ISBN(1971 ed.): 3-540-33936-1 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury.* Moscow, Nauka Publ., 1968, 272 p.

The paper was received by the Editorial Office on January 11, 2018.

*Alexander Georgievich Chentsov*, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .