ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 533.911.5

МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

И. А. Финогенко

Исследуются функционально-дифференциальные уравнения $\dot{x} = f(t, \phi(\cdot))$ с кусочно-непрерывными правыми частями. Предполагается, что множества M точек разрыва правых частей обладают свойством граничности, а не является множествами нулевой меры, как для дифференциальных уравнений без запаздывания. Такое предположение связано прежде всего с бесконечномерностью области определения функции f. Решения исследуемых уравнений понимаются в смысле А.Ф. Филиппова. Основные результаты относятся к теоремам об асимптотическом поведении решений. Они формулируются с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова со знакопостоянными производными. Трудности исследований неавтономных систем связаны с тем, что ω-предельные множества их решений не обладают свойствами типа инвариантности и множества нулей производных функционалов Ляпунова могут зависеть от переменной t и выходить за рамки пространства переменных $\phi(\cdot)$. Для разрывных неавтономных систем возникает еще проблема построения предельных дифференциальных уравнений с использованием сдвигов $f^\tau(t+\tau, \phi(\cdot))$ функции f. В данной статье вводятся понятия предельных дифференциальных включений без использования предельных переходов на последовательностях сдвигов разрывных или многозначных отображений. Изучаются их свойства с учетом специфики построения. Устанавливаются свойства типа инвариантности ω-предельных множеств решений и аналоги принципа инвариантности Ж. Ла-Салля.

Ключевые слова: предельное функционально-дифференциальное включение, асимптотическое поведение решений, функционал Ляпунова, принцип инвариантности.

I. A. Finogenko. Method of limiting differential inclusions for nonautonomous discontinuous systems with delay.

Functional–differential equations $\dot{x} = f(t, \phi(\cdot))$ with piecewise continuous right-hand sides are studied. It is assumed that the sets M of discontinuity points of the right-hand sides possess the boundedness property in contrast to being zero-measure sets, as in the case of differential equations without delay. This assumption is made largely because the domain of the function f is infinite-dimensional. Solutions to the equations under consideration are understood in Filippov's sense. The main results are theorems on the asymptotic behavior of solutions formulated with the use of invariantly differentiable Lyapunov functionals with fixed-sign derivatives. Nonautonomous systems are difficult to deal with because ω-limiting sets of their solutions do not possess invariance-type properties, whereas sets of zeros of derivatives of Lyapunov functionals may depend on the variable t and extend beyond the space of variables $\phi(\cdot)$. For discontinuous nonautonomous systems, there arises the issue of constructing the limiting differential equations with the use of shifts $f^\tau(t+\tau, \phi(\cdot))$ of the function f. We introduce the notion of limiting differential inclusion without employing limit passages on sequences of shifts of discontinuous or multivalued mappings. The properties of such inclusions are studied. Invariance-type properties of ω-limiting sets of solutions and analogs of LaSalle's invariance principle are established.

Keywords: limiting functional–differential inclusion, asymptotic behavior of solutions, Lyapunov's functional, invariance principle.

MSC: 34D05, 34K09

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-236-246

Введение

Впервые функции Ляпунова со знакопостоянной производной применялись в работах А. М. Ляпунова, Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского [1] при исследовании асимптотической устойчивости положения равновесия автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x), \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00505) и в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

где $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область. Впоследствии основные свойства решений, которые вытекают лишь из знакопостоянства производной функции Ляпунова, были аккумулированы в теореме Ла-Салля (см. [2, с. 190]), известной в настоящее время как принцип инвариантности.

Теорема 1 (J. P. LaSalle). *Пусть $x(t)$ — решение уравнения* (0.1) *с непрерывной функцией $f(x)$ в правой части, $V(x)$ — локально липшицевая функция, такая что $D^+V(x) \leq 0$. Тогда пересечение ω-предельного множества $\Lambda^+(x)$ решения $x(t)$ с областью Ω определения функции $f(x)$ содержится в объединении всех непродолжимых орбит из множества $E = \{x \in \Omega\colon D^+V(x) = 0)\}$.*

Принцип инвариантности в том или ином виде распространен и на другие классы автономных систем, таких как функционально-дифференциальные уравнения [3, с. 110; 4, с. 147], функционально-дифференциальные включения [5] и ряд других.

При рассмотрении неавтономных систем

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{0.2}$$

возникают трудности, связанные с отсутствием свойств типа инвариантности у ω-предельных множеств решений и с описанием множества нулей производной функции Ляпунова. Один из возможных путей преодоления этих трудностей основан на рассмотрении сдвигов $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функции $f(t, x)$. При условии, что существуют в том или ином смысле пределы $f'(t, x)$ последовательностей вида $f(t + t_k, x)$, аналоги принципа инвариантности и условия устойчивости исходных систем (0.2) могут быть получены в терминах предельных уравнений

$$\dot{x} = f'(t, x).$$

Этот подход в настоящее время известен как метод предельных уравнений [6], начало которому положили работы Дж. Селла [7] и З. Артштейна [8] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений. В статье [9] метод предельных уравнений распространяется на неавтономные функционально-дифференциальные уравнения. Но при рассмотрении неавтономных дифференциальных включений или неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью возникают еще проблемы, связанные с построением предельных дифференциальных соотношений на основе последовательностей сдвигов многозначных отображений, так как нет подходящих теорем математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости возникающих функциональных последовательностей [10; 11]. В особенности это касается разрывных систем с решениями в смысле А. Ф. Филиппова, которые приводят к дифференциальным включениям [12].

В данной статье предлагается метод предельных дифференциальных включений для изучения асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \tag{0.3}$$

где $f : \mathbb{R}^1 \times C_\tau \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная по совокупности переменных функция, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, C_τ — пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ с обычной sup-нормой $\|\phi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \|\phi(\theta)\|$, $\tau \geq 0$ — произвольное вещественное число. Полученные результаты, обобщающие теорему Ла-Салля на уравнение (0.3), носят форму аналогов принципа инвариантности. Отметим, что здесь возникает предварительная задача об определении и существовании решения уравнения (0.3). Предельные дифференциальные включения будут строиться на основе теоремы Дэви [13] о сходимости последовательностей абсолютно непрерывных функций $y_k(t)$, что позволит избежать проблем, связанных со сходимостью последовательностей многозначных отображений.

Теорема 2 (J.L. Davy). *Пусть последовательность $\{y_k(\cdot)\}$ абсолютно непрерывных функций $y_k : I \to \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$, удовлетворяет следующим условиям:*

1) $y_k(t) \to y(t)$ при любом фиксированном $t \in I$;

2) $\|\dot{y}_k(t)\| \leq g(t)$ для почти всех $t \in I$, где $g : I \to \mathbb{R}^1$ — суммируемая по Лебегу функция.

Тогда $y(t)$ — абсолютно непрерывная функция, такая что

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\geq 1} \overline{co} \cup_{k\geq n} \dot{y}_k(t) \tag{0.4}$$

для почти всех $t \in I$, где $\overline{co}$ — символ выпуклой замкнутой оболочки множества.

Применение теоремы Дэви приводит, вообще говоря, к предельным дифференциальным включениям даже в случае функционально-дифференциальных уравнений (0.3) с непрерывной правой частью. Но тем не менее предлагаемый метод хорошо согласуется с известными подходами, обобщает их и может использоваться в тех ситуациях, когда известные методы предельных уравнений неприменимы. (Детальный сравнительный анализ см. в [10–12].)

1. Функционально-дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывными правыми частями

Определение 1. Функцию $f(t, \phi(\cdot))$ будем называть *кусочно-непрерывной* в пространстве $D = \mathbb{R}^1 \times C_\tau$, если его можно представить в виде объединения конечного числа областей D_j, $j = 1, \ldots, m$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M, состоящего из точек границ этих областей. Функция $f(t, \phi(\cdot))$ называется *непрерывной вплоть до границы*, если в каждой точке $(t, \phi(\cdot)) \in M$ она имеет конечные пределы по каждому из множеств D_j, для которых точка $(t, \phi(\cdot))$ является граничной. Величина $\tilde{f}_j$ называется пределом функции $f(t', \psi'(\cdot))$ в точке $(t, \psi(\cdot)) \in M$ по множеству D_j, если для любой последовательности $(t_k, \psi_k(\cdot)) \to (t, \psi(\cdot))$ такой, что $(t_k, \psi_k(\cdot)) \in D_j$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, выполняется $\lim_{k\to\infty} f(t_k, \psi_k(\cdot)) = \tilde{f}_j$.

Отметим, что в областях D_j функция f непрерывна и область — открытое связное множество.

Определение 2. Решением уравнения (0.3) с начальной функцией $x_{t_0}(\cdot) = \phi_0(\cdot)$ называется непрерывная функция $x(t)$, определенная на некотором отрезке $[t_0 - \tau, t_1]$, $t_1 > t_0$, абсолютно непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ и для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяющая дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t(\,\cdot\,)), \tag{1.1}$$

где $F(t, \phi(\cdot))$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t', \phi'(\cdot))$ в каждой фиксированной точке $(t, \phi(\cdot))$ при условии, что $(t', \phi'(\cdot)) \to (t, \phi(\cdot))$.

Определение 2 решения уравнения (0.3) соответствует определению решения уравнения (0.2) в смысле А. Ф. Филиппова для разрывных уравнений без запаздывания [14]. Но имеются и существенные отличия. Остановимся на некоторых из них.

Для систем без запаздывания множество M — это множество нулевой меры в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$, как правило, состоящее из конечного числа гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$. В пространстве D структура множества M может оказаться гораздо более сложной. Но в общем случае оно должно обладать свойством граничности, т. е. дополнение к M должно быть всюду плотным в пространстве D (или, эквивалентно, M должно иметь пустую внутренность). Тогда множество $F(t, \phi(\cdot))$ будет определено в каждой фиксированной точке $(t, \phi(\cdot)) \in D$. Множество M будем называть *множеством точек разрыва функции* f, в которых она может быть не определена. В точках из M множество $F(t, \phi(\cdot))$ в общем случае — многогранник, а в точках непрерывности функции f — одноточечное множество, состоящее из значения функции $f(t, \phi(\cdot))$. При этом многозначное отображение $F(t, \phi(\cdot))$ имеет замкнутый график и является локально ограниченным. Поэтому оно полунепрерывно сверху (см. [15]), т. е.

в каждой точке $(t,\phi(\cdot))$ для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, t, \phi(\cdot)) > 0$ такое, что для всех $(t', \phi'(\cdot))$, удовлетворяющих неравенствам $|t'-t| < \delta$, $\|\psi'(\cdot) - \psi(\,\cdot\,)\|_C < \delta$, выполняется $F(t', \phi'(\,\cdot\,)) \subset F^{\epsilon}(t, \phi(\cdot))$, где $F^{\epsilon}(t, \phi(\,\cdot\,))$ — ϵ- окрестность множества $F(t, \phi(\,\cdot\,))$.

Для произвольной функции $\psi(\cdot) \in C_\tau$ и произвольного числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\psi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Psi(\cdot)$ функции $\psi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$. Для каждой функции $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ и числа $\xi \in [0, \Delta)$ через $\Psi_\xi(\theta)$ обозначим $\Psi_\xi(\theta) = \Psi(\xi + \theta)$, где $-\tau \le \theta \le 0$.

Введем в рассмотрение определения (см. [16]).

О п р е д е л е н и е 3. Функционал $W\colon C_\tau \to \mathbb{R}^1$ имеет *инвариантную производную* $\partial_\psi W$ в точке $\psi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\xi) = W(\Psi_\xi(\cdot))$ имеет в нуле конечную правую производную $\partial Y_\Psi/\partial\xi\big|_{\xi=+0}$, инвариантную относительно функций $\Psi(\cdot)$. Последнее означает, что значение правой производной в нуле одно для всех $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$.

О п р е д е л е н и е 4. Функционал $W : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau \to R$ *инвариантно дифференцируем* в точке $p = (t, x, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\partial W/\partial t, \nabla_x W, \partial_\psi W$ и для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ выполняется равенство

$$W(t+\zeta, x+z, \Psi_\xi(\cdot)) - W(t, x, \psi(\cdot))$$

$$= \frac{\partial W[p]}{\partial t}\,\zeta + \langle \nabla_x W[p], z\rangle + \partial_\psi W[p]\,\xi + o\left(\sqrt{\|z\|^2 + \zeta^2 + \xi^2}\right)$$

при каждых $z \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in [0, \Delta]$, $\zeta \ge 0$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x W$ — градиент функционала W по переменной x, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения).

О п р е д е л е н и е 5. Функционал $W : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau \to \mathbb{R}$ *инвариантно непрерывен в точке* $p = (t, x, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau$, если для каждой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\zeta, z, \xi) = W(t+\zeta, x+z, \Psi_\xi(\cdot))$ непрерывна в нуле (непрерывность по ζ и ξ справа) и предельное значение $Y_\Psi(0,0,0)$ инвариантно относительно $\Psi(\cdot)$.

Для того чтобы функционал W был инвариантно дифференцируем в точке $p = (t, x, \psi(\cdot))$, необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\partial W/\partial t$, $\nabla_x W$, $\partial_\psi W$, и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p (см. [16, с. 44]).

З а м е ч а н и е 1. Многие задачи общей и качественной теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом требуют вычисления производных функционалов Ляпунова вдоль решений исследуемых систем, что предполагает (по крайней мере в рамках формальных теорий) знание самих решений. В общем случае это невозможно. Аппарат инвариантно дифференцируемых функционалов, развитый в книге [16], удобен для описания производных функционалов Ляпунова. Но инвариантно дифференцируемые функционалы могут применяться и для описания множества точек разрыва функции $f(t, \phi(\cdot))$ в виде объединения $M = \cup_i^k M_i$ конечного числа многообразий вида $M_i = \{(t, \psi(\cdot))\colon W_i(t, \psi(0), \psi(\cdot)) = 0\}$, где W_i — непрерывные, инвариантно дифференцируемые функционалы. При условии, что $\nabla_x W_i \neq 0$ в каждой точке $(t, \psi(0), \psi(\cdot))$ для всех обратившихся в этой точке в нуль функционалов W_i, множество M будет обладать свойством граничности. Но при этом выявляются и другие важные факты.

Пусть $W(t, x, \psi(\cdot))$ — непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал. Обозначим через

$$M = \{(t, \psi(\cdot))\colon W(t, \psi(o), \psi(\cdot)) = 0\} \tag{1.2}$$

множество точек разрыва кусочно-непрерывной функции $f(t, \phi(\cdot))$ с областями непрерывности $D^+ = \{(t, \psi(\cdot))\colon W(t, x, \psi(\cdot)) > 0\}$ и $D^- = \{(t, \psi(\cdot))\colon W(t, x, \psi(\cdot)) < 0\}$. Тогда для любой точки $(t, \psi(\cdot)) \in M$ справедливо равенство

$$W(t+h, \psi(0) + hz, y_h(\cdot)) = \frac{\partial W}{\partial t}h + \langle \nabla_x W, z\rangle h + \partial_\psi W h + o(h) \tag{1.3}$$

для любых фиксированных векторов $z \in \mathbb{R}^n$ и функций $y(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$, продолженных из точек $\psi(0)$ линейно в направлении вектора z (т. е. $y(t) = \psi(0)+tz$ при $t \in [0,\Delta]$) при достаточно малых $h > 0$.

Предположим, что $\nabla_x W \neq 0$, и обозначим

$$\sigma = \partial W/\partial t + \partial_\psi W.$$

Тогда, очевидно, найдутся такие векторы z^1 и z^2, что

$$\langle \nabla_x W, z^1\rangle + \sigma > 0, \quad \langle \nabla_x W, z^2\rangle + \sigma < 0$$

соответственно. Из (1.3) вытекает, что в любой достаточно малой окрестности точки $(t,\psi(\cdot))$ найдутся такие точки $(t',\psi'(\cdot))$, для которых значения функционала $W(t',\psi'(0),\psi'(\cdot))$ будут как больше так и меньше нуля. Следовательно, множество M обладает свойством граничности и точка $(t,\psi(\cdot))$ – граничная точка для множеств D^+ и D^-. Тогда существуют пределы функции $f(t',\psi'(\cdot))$ в точке $(t,\psi(\cdot))$ по множествам D^+ и D^-, которые обозначим f^+ и f^- соответственно. Но справедлива также формула

$$W(t,\psi(0)+hz,y_h(\cdot)) = \langle \nabla_x W, z\rangle h + \partial_\psi W h + o(h)$$

при фиксированном t, из которой вытекает, что в любой достаточно малой окрестности точки $(t,\psi(\cdot))$ найдутся точки $(t,\psi'(\cdot))$, для которых значения функционала $W(t,\psi'(\cdot))$ будут соответственно больше и меньше нуля. Тогда в силу кусочной непрерывности функции f и единственности ее пределов по областям D^+ и D^- заключаем, что пределы функции $f(t,\psi'(\cdot)$ (т. е. при фиксированном t) по областям D^+ и D^- существуют и совпадают с пределами f^+ и f^- соответственно.

Из всего изложенного выше вытекает, что справедлива

Лемма 1. *Пусть множество M точек разрыва кусочно-непрерывной функции $f(t,\psi(\cdot))$ определяется конечным набором многообразий M_i вида* (1.2), *в свою очередь определяемых инвариантно дифференцируемыми функционалами $W_i(t,x,\psi(\cdot))$, $1 \le i \le k$. Обозначим*

$$I(t,x,\psi(\cdot)) = \{i \in (1,\dots,k)\colon W_i(t,x,\psi(\cdot)) = 0\}$$

и предположим, что для каждого $i \in I(t,x,\psi(\cdot))$ выполняется $\nabla W_i(t,x,\psi(\cdot)) \neq 0$. Тогда $F_0(t,\psi(\cdot)) = F(t,\psi(\cdot))$ во всех точках рассматриваемой области переменных $(t,\psi(\cdot))$, где $F_0(t,\psi(\cdot))$ — выпуклая оболочка пределов функции $f(t,\psi'(\cdot))$ по областям D_j при $\psi'(\cdot) \to \psi(\cdot)$ при фиксированном t, а $F(t,\psi(\cdot))$ — выпуклая оболочка пределов функции $f(t',\psi'(\cdot))$ по этим же областям D_j при $(t',\psi'(\cdot)) \to (t,\psi(\cdot))$.

Исследование устойчивости решений для включения

$$\dot{x} \in F_0(t,\psi(\cdot)) \tag{1.4}$$

удобней, чем для включения (1.1). Но изучение вопросов существования и общих свойств решений проще для включения (1.1). В дальнейшем мы предполагаем, что эти два включения равносильны, т. е. $F_0(t,\psi(\cdot)) = F(t,\psi(\cdot))$. В частности, это будет справедливо при выполнении условий леммы 1.

2. Предельные функционально-дифференциальные включения

Через $A^\epsilon = \{x : d(x,A) < \epsilon\}$ обозначается ϵ-окрестность множества A, $\overline{A}$ — замыкание множества A, $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ — совокупность всех непустых компактных выпуклых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot,\cdot)$, тогда отображение $G : X \to$

$\operatorname{comp}\mathbb{R}^n$ будем называть *полунепрерывным сверху* в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x, x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset (G(x_0))^\epsilon$.

Для отображения $F : \mathbb{R}^1 \times C_\tau \to \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение два вида многозначных отображений, которые будем называть предельными для многозначного отображения F:

$$F^*(t, \phi(\cdot)) = \cap_{b\geq 0}\overline{co}\cup_{a\geq b} F(t + a, \phi(\cdot)), \tag{2.1}$$

$$F'(t, \phi(\cdot)) = \cap_{n\geq 1}\overline{co}\cup_{k\geq n} F(t + t_k, \phi(\cdot)), \tag{2.2}$$

где $t_n \to +\infty$ — произвольная последовательность (одна и та же для любых $(t, \phi(\cdot))$).

Свойства предельных отображений, которые вытекают непосредственно из формул (2.1) и (2.2), приведены в лемме 1 из статьи [11]. Одно из этих свойств состоит в том, что отображение F^* не зависит от переменной t. Поэтому в дальнейшем переменную t не пишем, сохраняя прежнее обозначение F^*.

О п р е д е л е н и е 6. Функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(\phi(\cdot)) \tag{2.3}$$

называется *предельным* для включения (1.1), и функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, \phi(\cdot)) \tag{2.4}$$

называется *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ для включения (1.1).

Здесь мы вначале рассматриваем функционально-дифференциальное включение (1.1) при следующих общих условиях:

A1. *Для каждых фиксированных* $(t, \phi(\cdot))$ *множество* $F(t, \phi(\cdot))$ *непустое, выпуклое и компактное.*

A2. *Многозначное отображение* $F(t, \phi(\cdot))$ *полунепрерывно сверху по совокупности аргументов.*

A3. *Для любого ограниченного множества* $Q \subset C_\tau$ *существует константа* L *такая, что для любых* $(t, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times Q$ *и* $f \in F(t, \phi(\cdot))$ *выполняется неравенство* $\|f\| \leq L$.

При выполнении условий A1–A3 задача (1.1) для любой начальной функции имеет локальное решение (см., например, [11]). При этом любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0 - \tau, \omega)$ и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Предельные функционально-дифференциальные включения (2.3) и (2.4) изучаются при дополнительном условии:

A4. *Для любых* $\phi(\cdot)$ *и* $\epsilon > 0$ *существуют числа* $\delta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$F(t, \psi(\cdot)) \subset (F(t, \phi(\cdot)))^\epsilon \tag{2.5}$$

для всех $t > \gamma$ *и* $\|\psi(\cdot) - \phi(\cdot)\|_C < \delta$.

Отметим, что условие (2.5) выполняется, если отображение $F(t, \phi(\cdot))$ полунепрерывно сверху по $\phi(\cdot)$, равномерно относительно t.

Если для многозначного отображения F выполняются условия A1–A4, то для предельных многозначных отображений F^* и F' выполняются условия A1–A3 (см. [11, лемма 2]) и поэтому для предельных дифференциальных включений (2.3) и (2.4) справедлива теорема о существовании и продолжимости решений, аналогичная теореме для включения (1.1).

Многозначное отображение F из правой части дифференциального включения (1.1), порожденного функционально-дифференциальным уравнением (0.3), представим формулой

$$F(t, \psi(\cdot)) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\, f((t^\delta, \psi^\delta(\cdot))\backslash M), \tag{2.6}$$

где t^δ и $\psi^\delta(\cdot)$ — δ-окрестности точки t и функции $\psi(\cdot)$ соответственно. Опишем некоторую специфику предельных многозначных отображений (2.1) и (2.2) и соответствующих им предельных функционально-дифференциальных включений применительно к многозначному отображению (2.6).

Лемма 2. *Пусть функция $f(t,\psi(\cdot))$ является кусочно-непрерывной и для каждого ограниченного множества $Q \subset C_\tau$ существует константа L такая, что для любых $(t,\psi(\cdot)) \in (\mathbb{R}^1 \times Q)\backslash M$ выполняется*

$$\|f(t,\psi(\cdot))\| \le L. \tag{2.7}$$

Тогда для многозначного отображения $F(t,\psi(\cdot))$, определенного формулой (2.6)*, выполняются условия* A1–A3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство A1 вытекает непосредственно из определения множества $F(t,\psi(\cdot))$. Полунепрерывность сверху многозначного отображения F следует из его локальной ограниченности и замкнутости графика. Свойство A3 вытекает из условия (2.7) леммы, так как предельные переходы и переход к выпуклой оболочке не меняют константы L. □

Через $Z(t,\psi(\cdot))$ обозначим множество все предельных значений функции $f(t',\psi'(\cdot))$ в каждой точке $(t,\psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times C_\tau$ при условии, что $(t',\psi'(\cdot)) \to (t,\psi(\cdot))$, $(t',\psi'(\cdot)) \notin M$. Тогда

$$Z(t,\psi(\cdot)) = \bigcap_{\delta>0} \overline{f((t^\delta,\psi^\delta(\cdot))\backslash M)}. \tag{2.8}$$

Лемма 3. *Пусть множество областей непрерывности D_j, $j = 1,\dots,m$, кусочно-непрерывной функции $f(t,\psi(\cdot))$ конечно и функция $f(t,\psi(\cdot))$ непрерывна вплоть до границы равномерно относительно достаточно больших значений переменной t. Это означает следующее: при любом фиксированном $\psi(\cdot)$ для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ и $\gamma = \gamma(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ такие, что*

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{f((t,\psi^\delta(\cdot))\backslash M)} \subset Z^\epsilon(t,\psi(\cdot)) \tag{2.9}$$

для всех $t > \gamma$. Тогда для многозначного отбражения $F(t,\psi(\cdot))$ выполняется свойство A4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы вытекает, что в каждой точке $\psi(\cdot)$ для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ и $\gamma = \gamma(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ такие, что

$$\overline{f((t,\psi^\delta(\cdot))\backslash M)} \subset Z^\epsilon(t,\psi(\cdot)) \tag{2.10}$$

для всех $t > \gamma$.

Отметим, что при выполнении неравенства $\|\psi'(\cdot) - \psi(\cdot)\|_C < \delta$ справедливо включение

$$F(t,\psi'(\cdot)) \subset \overline{co}\,\overline{f((t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)}. \tag{2.11}$$

Действительно, множество $\overline{co}\,\overline{f((t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)}$ содержит выпуклую оболочку всех пределов функции f по любому множеству D_j в каждой точке $(t',\psi'(\cdot)) \in (t,\psi(\cdot))^\delta$ независимо от того, принадлежит точка $(t'\psi'(\cdot))$ множеству M или нет. Тогда (2.11) выполняется в силу определения множества $F(t,\psi'(\cdot))$. Так как $\overline{co}\,\overline{f((t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)} = co\,\overline{f(t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)}$, то из (2.11) и (2.10) вытекает, что

$$F(t,\psi'(\cdot)) \subset co\,Z^\epsilon(t,\psi(\cdot)) = (co\,Z(t,\psi(\cdot)))^\epsilon. \tag{2.12}$$

Непосредственно из определений следует, что для многозначного отображения, определенного равенством (2.6), выполняется $F(t,\psi(\cdot)) = co\,Z(t,\psi(\cdot))$, и теперь утверждение леммы вытекает из (2.12). □

Отметим, что включение (2.9) выполняется, если каждая функция $f_j(t,\psi(\cdot))$ удовлетворяет на множестве $\overline{D}_j$ условию Липшица по переменной $\psi(\cdot)$ с постоянной константой Липшица.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция f является кусочно-непрерывной с конечным множеством областей непрерывности и для нее справедливо условие* (2.7)*. Тогда для любых начальных данных существует решение уравнения* (0.3)*, любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования и любое ограниченное непродолжимое решение определено на бесконечном промежутке* $[t_0-\tau,+\infty)$*. Если дополнительно выполняется условие* (2.9)*, то этими же свойствами обладают включения* (2.1) *и* (2.2)*.*

3. Принцип инвариантности

Определение 7. Будем говорить, что множество $D\subset C_\tau$ *полуинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot)\in D$ существует решение $y(t)$ включения (2.3) такое, что $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot)\in D$ для всех $t\geq 0$. Множество $D\subset C_\tau$ *квазиинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot)\in D$ существует решение $y(t)$ включения (2.4) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t,\phi(\cdot))$ в правой части такое, что $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot)\in D$ для всех $t\geq 0$.

Как обычно, функцию $\psi(\cdot)$ назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (1.1), определенного на промежутке $[t_0-\tau,+\infty)$, если существует последовательность $t_n\to+\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot)\to\psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим через $\Lambda^+(x)$.

Из [11, теорема 3] вытекает, что при выполнении условий лемм 2 и 3 для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения (0.3) с кусочно-непрерывной функцией f в правой части множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d(x_t(\cdot),\Lambda^+(x))\to 0$ при $t\to+\infty$, где d означает расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.

Замечание 2. Определение предельных отображений по формуле (2.2) очевидным образом связано с формулой (0.4) из теоремы 2. Эта связь лежит в основе доказательства свойства квазиинвариантности решений уравнения (0.3). Если последовательность сдвигов $F(t+t_k,\phi(\cdot))$ сходится хотя бы поточечно к некоторому отображению $f'(t,\phi(\cdot))$, то $F'(t,\phi(\cdot))=f'(t,\phi(\cdot))$ и, таким образом, предлагаемый подход обобщает известный метод предельных дифференциальных уравнений.

Верхнюю производную $\dot V^+(t,\phi(\cdot))$ инвариантно дифференцируемого функционала $V(t,x,\phi(\cdot))$ в точке $(t,\phi(0),\phi(\cdot))$ в силу дифференциального включения (1.1) определим следующим равенством: $\dot V^+(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F(t,\phi(\cdot))}(\langle\nabla_xV,y\rangle+\partial_\phi V+\partial_tV)\Big|_{x=\phi(0)}$.

Непосредственно из результатов статьи [11] (теоремы 4–6) и лемм 2, 3 вытекают следующие основные теоремы, обобщающие принцип инвариантности на уравнение (0.3) с кусочно-непрерывной правой частью.

Теорема 4. *Пусть f — кусочно-непрерывная функция, выполняются условие* (2.9) *и неравенство* (2.7) *и существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал $V(t,x,\phi(\cdot))$, ограниченный снизу на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1\times K[0]\times K$, где $K\subset C_\tau$ — компактное множество, $K[0]=\{\phi[0]\colon \phi(\cdot)\in K\}$ такой, что для всех $\phi(\cdot)$ и почти всех t выполняется неравенство*

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot))\leq -w(t,\phi(\cdot)),$$

где $w(t,\phi(\cdot))\geq 0$ — измеримый по t, непрерывный по $\phi(\cdot)$ и ограниченный на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1\times K$ функционал, удовлетворяющий равенству

$$\lim_{t\to+\infty,\phi'(\cdot)\to\phi(\cdot)}\|w(t,\phi'(\cdot))-w(t,\phi(\cdot))\|=0.$$

Тогда ω-предельное множество $\Lambda^+(x)$ любого ограниченного решения уравнения (0.3) *принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w=\{\phi(\cdot)\colon \alpha(\phi(\cdot))=0\}, \tag{3.1}$$

где $\alpha=\lim\limits_{b\to+\infty}\inf_{t\in(b,+\infty)}w(t,\phi(\cdot))$.

Отметим, что так как $w(t,\psi(\cdot))\geq 0$, то формуле (3.1) можно придать другой вид, а именно

$$E_w=\{\phi(\cdot):\exists t_k\to+\infty,\ \lim_{k\to+\infty}w(t_k,\phi(\cdot))=0\}.$$

Пусть функционал $V=V(x,\phi(\cdot))$ не зависит от t. Введем обозначения:

$$\dot V^*(\phi(\cdot))=\sup_{y\in F^*(\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V(x,\phi(\cdot)),y\rangle+\partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))|_{\ x=\phi(0)},$$

$$\dot V'(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F'(t,\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V(x,\phi(\cdot)),y\rangle+\partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))|_{\ x=\phi(0)}.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условие* (2.9) *и неравенство* (2.7) *и* $x(t)$ *— ограниченное решение уравнения* (0.3) *с* ω*-предельным множеством* $\Lambda^+(x)$. *Предположим, что существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал* $V(x,\phi(\cdot))$ *такой, что для всех* $\phi(\cdot)$ *и почти всех* t *выполняется неравенство*

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F(t,\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V(x,\phi(\cdot)),y\rangle+\partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))|_{\ x=\phi(0)}\leq 0.$$

Тогда справедливы утверждения:

1. *Для любой функции* $\psi(\cdot)\in\Lambda^+(x)$ *существуют предельное относительно некоторой последовательности* $\{t_k\}$ *отображение* $F'(t,\phi(\cdot))$ *и решение* $y(t)$ *включения* (2.4) *с начальной функцией* $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ *такое, что выполняется*

$$\dot V'(t,y_t(\cdot))=0,\quad \dot V^*(y_t(\cdot))=0$$

для почти всех $t\geq 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E(\dot V^*=0)\stackrel{\Delta}{=}\{\psi(\cdot)\colon \dot V^*(\psi(\cdot))=0\}. \tag{3.2}$$

Теоремы 4 и 5 позволяют утверждать, что множества (3.2) и (3.1) соответственно являются притягивающими для ограниченных решений уравнения (0.3) и дают некоторую оценку для ω-предельных множеств. Для более точных оценок, а также для выявления структуры этих множеств нужна дополнительная информация. При дополнительных условиях на функционалы Ляпунова или на множества (3.2) и (3.1) теоремы 4 и 5 могут использоваться для изучения асимптотической устойчивости решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. **Руш Н., Абетс М., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
3. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. **Сурков А.В.** Об устойчивости функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, №8. С. 1055–1063.
6. **Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.** Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.
7. **Sell G.R.** Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 22. P. 241–283.
8. **Artstein Z.** The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. Vol. 25. P. 184–202.

9. **Андреев А.С.** Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
10. **Финогенко И.А.** Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–284.
11. **Финогенко И.А.** Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–284.
12. **Финогенко И.А.** Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 4. С. 913–927.
13. **Davy J.L.** Properties of solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 379–398.
14. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
15. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
16. **Ким А.В.** i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. 233 с.

Финогенко Иван Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
старший науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск
e-mail: fin@icc.ru

Поступила 10.10.2017

REFERENCES

1. Barbashin E.A. *Funktsii Lyapunova.* [The Lyapunov functions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 240 p.
2. Rouche N., Habets P., Laloy M. *Stability theory by Lyapunov's direct method.* N Y, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977, 412 p. Translated to Russian under the title *Pryamoi metod Lyapunova v teorii ustoichivosti*, M.: Mir Publ., 1980, 300 p.
3. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Ustoichivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeistviem.* [Stability and periodic regimes of controlled systems with aftereffect]. M.: Nauka Publ., 1981, 448 p.
4. Hale J. *Theory of functional differential equations.* 366 p., N Y: Springer-Verlag, 1977. doi: 10.1007/978-1-4612-9892-2 . Translated to Russian under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, M., Mir, 1984, 421 p.
5. Surkov A.V. On the stability of functional-differential inclusions using invariantly differentiable Lyapunov functionals. *Differ. Equ.*, 2007, vol. 43, no. 8, pp. 1079–1087.
6. Martynyuk A.A. Kato D., Shestakov A.A. *Ustoichivost' dvizheniya: metod predel'nykh uravnenii.* [Stability of motion: method of limiting equations]. Kiev, Naukova Dumka, 1990, 256 p.
7. Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 22, pp. 241–283.
8. Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations. *J. Differ. Equations*, 1977, vol. 25, pp. 184–202.
9. Andreev A.S. The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 9, pp. 1438–1486.
10. Finogenko I.A. Limit differential inclusions and the invariance principle for nonautonomous systems. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 372–386. doi: 10.1134/S0037446614020190 .
11. Finogenko I.A. The invariance principle for nonautonomous functional differential inclusions. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 271–284.
12. Finogenko I.A. The invariance principle for nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand side. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 715–725. doi: 10.1134/S0037446616040133 .
13. Davy J.L. Properties of solution set of a generalized differential equation. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1972, vol. 6, pp. 379–398.

14. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p.
15. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii.* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions]. Moscow, KomKniga, 2005, 215 p.
16. Kim A.V. i-*gladkii analiz i funktsional'no-differentsial'nye uravneniya.* [i-smooth analysis and functional-differential equations]. Ekaterinburg, 1996. 233 p.

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Ivan Anatol'evich Finogenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: fin@icc.ru .