ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ОБ ОЦЕНКЕ ХАУСДОРФОВА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ И ЕГО ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

В. Н. Ушаков, А. А. Ершов

В работе выводятся оценки хаусдорфова расстояния между множествами и их выпуклыми оболочками в конечномерных евклидовых пространствах со стандартным скалярным произведением и соответствующей нормой. В первой части работы данные оценки рассматриваются для α-множеств. Под α-множеством понимается произвольный компакт, у которого параметр, характеризующий степень невыпуклости и вычисляемый определенным образом, равен α. В большинстве случаев упомянутый параметр α представляет собой максимальный возможный угол, под которым видны из точек, не принадлежащих рассматриваемому множеству, их проекции на это множество. α-множества были введены В. Н. Ушаковым для классификации невыпуклых множеств по степени их невыпуклости. Они используются для описания волновых фронтов и других задач, возникающих в теории управления. В работе рассмотрены α-множества только в двумерном пространстве. Доказано, что если α мало, то соответствующие α-множества близки к выпуклым множествам в хаусдорфовой метрике. Это позволяет пренебрегать их невыпуклостью и считать их выпуклыми, если известно, что параметр α мал. Отметим, что таким же образом часто применяется известная теорема Шепли — Фолкмана. Во второй части работы получены некоторое улучшение к оценке из самой теоремы Шепли — Фолкмана. В оригинальной теореме Шепли — Фолкмана утверждается, что сумма Минковского большого количества множеств близка в хаусдорфовой метрике к ее выпуклой оболочке по отношению к величине чебышёвского радиуса суммы. В данной работе рассмотрен частный случай, когда эта сумма состоит из одинаковых слагаемых, т. е. мы складываем некоторое множество M само с собой. Для данного частного случая получено улучшение оценки, которое существенно для множеств в пространствах малой размерности. Кроме того, как и в известном следствии Старра, новая оценка допускает следующее улучшение: мы можем заменить чебышёвский радиус $R(M)$ в правой части оценки на внутренний радиус $r(M)$ множества M. Однако, отметим, что при неограниченном увеличении размерности пространства наша новая оценка асимптотически стремится к оценке, непосредственно вытекающей из теоремы Шепли — Фолкмана.

Ключевые слова: α-множество, сумма Минковского, выпуклая оболочка, хаусдорфово расстояние.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov. An estimate of the Hausdorff distance between a set and its convex hull in Euclidean spaces of small dimension.

We derive estimates for the Hausdorff distance between sets and their convex hulls in finite-dimensional Euclidean spaces with the standard scalar product and the corresponding norm. In the first part of the paper, we consider estimates for α-sets. By an α-set we mean an arbitrary compact set for which the parameter characterizing the degree of nonconvexity and computed in a certain way equals α. In most cases, the parameter α is the maximum possible angle under which the projections to this set are visible from points not belonging to the set. Note that α-sets were introduced by V. N. Ushakov for the classification of nonconvex sets according to the degree of their nonconvexity; α-sets are used for the description of wavefronts and for the solution of other problems in control theory. We consider α-sets only in a two-dimensional space. It is proved that, if α is small, then the corresponding α-sets are close to convex sets in the Hausdorff metric. This allows to neglect their nonconvexity and consider such sets convex if it is known that the parameter α is small. The known Shapley–Folkman theorem is often applied in the same way. In the second part of the paper we present some improvements of the estimates from the Shapley–Folkman theorem. The original Shapley–Folkman theorem states that the Minkowski sum of a large number of sets is close in the Hausdorff metric to the convex hull of this sum with respect to the value of the Chebyshev radius of the sum. We consider a particular case when the sum consists of identical terms; i.e., we add some set M to itself. For this case we derive an improved estimate, which is essential for sets in spaces of small dimension. In addition, as in Starr's known corollary, the new estimate admits the following improvement: the Chebyshev radius $R(M)$ on the right-hand side can be replaced by the inner radius $r(M)$ of the set M. However, as the dimension of the space grows, the new estimate tends asymptotically to the estimate following immediately from the Shapley–Folkman theorem.

Keywords: α-set, Minkowski sum, convex hull, Hausdorff distance.

MSC: 52A27, 52A30

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-223-235

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00018 мол_а).

Введение

В первой части данной статьи в частном случае получена оценка хаусдорфова расстояния между α-множеством и его выпуклой оболочкой. Понятие α-множества было введено в начале 2000-х годов в [1], оно сформировалось при рассмотрении некоторых задач управления, относящихся к изучению множеств достижимости управляемых систем. Множества достижимости, как правило, невыпуклы. Для одних систем эти множества мало отличаются от выпуклых, для других — весьма ощутимо. В связи с этим возникла естественная потребность в наведении определенной классификации этих множеств по степеням их невыпуклости. Так появилось понятие α-множества в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [2]). При его формулировке мы будем использовать обозначения из [3].

В данной работе введены следующие обозначения:

$\operatorname{co} M$ — выпуклая линейная оболочка множества M;

$\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение h_* и h^* из $\mathbb{R}^n$;

$||h_*|| = \langle h_*, h_* \rangle^{1/2}$ — стандартная норма (порожденная скалярным произведением) в евклидовом пространстве;

$\angle(h_*, h^*) = \arccos \dfrac{\langle h_*, h^* \rangle}{||h_*|| \cdot ||h^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^*;

$\operatorname{con} M = \{h = \lambda(x - x^*) : \lambda \geqslant 0, x \in M\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество M и с вершиной в точке x^*.

Под проекцией p^* точки x^* на множество M мы понимаем ближайшую к x^* точку из M.

Определение 1. Пусть A — компакт в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Через $\Omega_A(z^*)$ мы обозначим множество всех проекций точки z^* на A, через $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ — конус, натянутый на множество $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$.

Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$.

Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Тогда если $\alpha_A = \alpha$, то множество A назовем *α-множеством*.

Отметим, что 0-множество является обычным выпуклым компактом. Примерами π-множеств являются кольцо или множество, состоящее из двух точек.

В работе рассмотрены оценки хаусдорфова расстояния между множествами и их выпуклыми оболочками в пространствах малой размерности. Заметим, что в двумерных и трехмерных пространствах имеется значительная часть приложений такого рода оценок (например, теоремы Шепли — Фолкмана): приближенное описание волнового фронта, невыпуклых экономик, приближенная минимизация суммы нескольких функций и др.

Обозначим:

через $\rho(x, Y) = \sup\limits_{y \in Y} ||x - y||$ расстояние от точки до множества;

через $h(X, Y) = \sup\limits_{x \in X} \rho(x, Y)$ хаусдорфово отклонение множества X от множества Y;

через $d(X, Y) = \max\{h(X, Y), h(Y, X)\}$ хаусдорфово расстояние между множествами X и Y;

через $\lambda(X) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in X} ||x_1 - x_2||$ будем обозначать диаметр множества.

Пусть α-множество $M_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ и имеет достаточно гладкую границу конечной длины. В работе показано, что для такого множества имеет место следующее неравенство:

$$d(M_\alpha, \operatorname{co} M_\alpha) \leqslant \lambda(M_\alpha)\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Из этой оценки следует, что если α мало, то соответствующие α-множества близки к выпуклым множествам, а именно, это свойство дает возможность считать такие α-множества естественным обобщением выпуклых множеств.

Однако, из теоремы Каратеодори вытекает, что для произвольного множества M хаусдорфово расстояние $d(M, \operatorname{co} M)$ не превосходит его чебышёвского радиуса $R(M)$. В свою очередь, чебышёвский радиус $R(M) \leqslant \lambda(M)/\sqrt{3}$ для любых ограниченных множеств M в $\mathbb{R}^2$ [4, задача 67, с. 75]. То есть в двумерном евклидовом пространстве

$$d(M, \operatorname{co} M) \leqslant \frac{\lambda(M)}{\sqrt{3}},$$

и наша новая оценка может быть полезна только лишь при $\alpha < \pi/3$.

Вторая часть работы посвящена вопросу о том, насколько близка к $\operatorname{co} M$ сумма вида $\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}})$, где M — произвольное множество. Как известно, ответ на данный вопрос в несколько более общем случае дает теорема Шепли — Фолкмана (см., например, [5]), из которой вытекает, что

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant R(M)\frac{\sqrt{\min(n,k)}}{k},$$

где n — размерность пространства, $R(M)$ — чебышёвский радиус [6] множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Нами была получена следующая улучшенная оценка:

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant R(M)\frac{\sqrt{\min(n-1,k)}}{k}.$$

Отметим, что наше улучшение существенно лишь при малых n.

1. Оценка $d(M_\alpha, \operatorname{co} M_\alpha)$ для α-множества M_α в $\mathbb{R}^2$ с границей конечной длины

Введем некоторые вспомогательные определения и утверждения.

Определение 2. Пусть кривая γ — ориентированная непрерывная кусочно-гладкая кривая конечной длины в $\mathbb{R}^2$ с ориентацией от точки A к точке B. Проекцию p^* точки $z^* \notin \gamma$ на кривую γ назовем правой, если z^* остается справа при движении по кривой γ от A к B в момент прохождения через точку p^*. Аналогично проекцию p^* точки $z^* \notin \gamma$ на γ назовем левой, если z^* остается слева при движении по кривой γ от A к B через p^*. Если p^* совпадает с точкой A или B, то тип проекции будем считать нейтральным.

Замечание 1. Определение 2 использует идеологию ориентации замкнутых кривых при вычислении интегралов второго рода. В частности, если замкнутая кривая положительно ориентирована, то говорят, что при движении по ней по направлению ее ориентации все точки внутренности остаются слева. Определение непрерывной кусочно-гладкой кривой сформулировано в [7, гл. 3, §3.1]. В дальнейшем мы будем называть такие кривые *достаточно гладкими*, поскольку мы бы не хотели сосредотачиваться на вопросе минимально допустимой гладкости в данной работе.

Определение 3. Будем говорить, что любая ориентированная кривая γ достаточной гладкости разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на три множества точек: L_γ, R_γ и N_γ. Точка $z^* \in L_\gamma$, если у нее есть хотя бы одна левая проекция на кривую γ и ни одной правой; точка $z^* \in R_\gamma$, если у нее есть хотя бы одна правая проекция на γ и ни одной левой; точка $z^* \in N$ во всех остальных случаях, в частности $\gamma \subset N_\gamma$.

В качестве примера рассмотрим положительно ориентированную замкнутую кривую $C = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$. В таком случае $L_C = \{x : ||x|| < 1\}$, $R_C = \{x : ||x|| > 1\}$, $N_C = \{x : ||x|| = 1\}$. В случае, если ориентированная кривая γ незамкнута, множества L_γ, R_γ и N_γ могут обладать более сложной геометрией.

Определение 4. Назовем ориентированную достаточно гладкую кривую γ левосторонней α-кривой, если

$$\alpha_\gamma^+ = \sup_{z^* \in L_\gamma \cup N_\gamma \setminus \gamma} \alpha_A(z^*) = \alpha.$$

Назовем γ правосторонней α-кривой, если

$$\alpha_\gamma^- = \sup_{z^* \in R_\gamma \cup N_\gamma \setminus \gamma} \alpha_A(z^*) = \alpha.$$

Назовем γ односторонней α-кривой, если она является левосторонней α-кривой или правосторонней α-кривой. Примером односторонней α-кривой может служить ориентированная граница C единичного круга. Ясно, что C является односторонней 0-кривой с внешней стороны (т. е. правосторонней 0-кривой при положительной ориентации C и левосторонней 0-кривой при отрицательной ориентации C) и односторонней π-кривой — с внутренней (то есть левосторонней π-кривой при положительной ориентации C и правосторонней π-кривой при отрицательной ориентации C).

По аналогии с работой [2] будем называть γ левосторонней β_α-кривой, если $\alpha_\gamma^+ \leqslant \alpha$, и правосторонней β_α-кривой, если $\alpha_\gamma^- \leqslant \alpha$.

Определение 5. Односторонними овыпуклениями ориентированной достаточно гладкой кривой γ назовем множества $\operatorname{co}_+\gamma = \operatorname{co}\gamma \cap \operatorname{cl} L_\gamma$ и $\operatorname{co}_-\gamma = \operatorname{co}\gamma \cap \operatorname{cl} R_\gamma$.

Определение 6. Пусть M — односвязное множество в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей ∂M. Назовем *лакуной* участок границы $\gamma \subset \partial M$ с крайними точками A и B такой, что отрезок $AB \subset \partial \operatorname{co} M$, $\gamma \cap AB = \{A, B\}$ и при этом область, ограниченная γ и AB, не содержит во внутренности точек из M.

Замечание 2. В монографии [8, §4.1.4] область, ограниченная лакуной γ и крышкой AB, называется *карманом* множества M.

Лемма 1. *Лакуна α-множества является односторонней β_α-кривой.*

Доказательство. Возьмем произвольное α-множество M_α с границей ∂M_α, часть которой является лакуной Γ. Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует некоторая точка $O \in \mathbb{R}^2 \setminus M_\alpha$, имеющая две проекции A_1 и A_2 на Γ таких, что

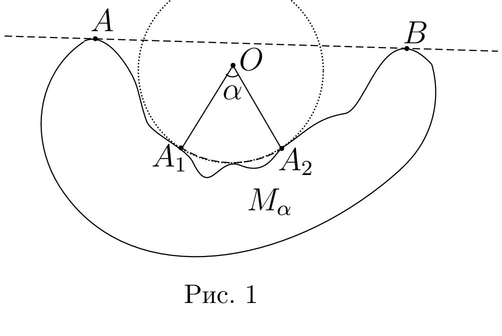

Рис. 1

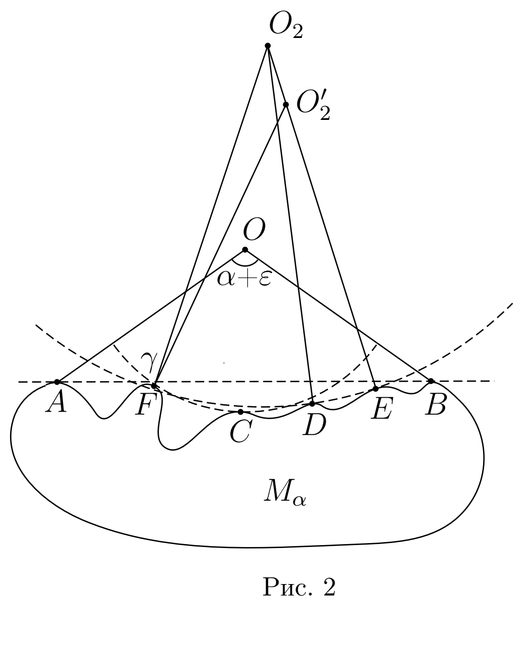

Рис. 2

$\angle A_1OA_2 > \alpha$ (рис. 1). Это возможно только в том случае, если точки A_1 и A_2 не являются в то же время проекциями O на M_α. Следовательно, часть границы $\partial M_\alpha \backslash \Gamma$ должна попадать внутрь круга $\mathbb{B}(O, |OA_1|)$ с центром в точке O и радиуса $|OA_1|$. Покажем, что это невозможно. Действительно, рассмотрим кривую L состоящую из прямой AB, в которой отрезок AB заменен лакуной Γ. Кривая L разделяет плоскость $\mathbb{R}^2$ на две части. В одной из них находится круг $\mathbb{B}(O, |OA_1|)$, а другой — множество M. Следовательно, попадание точек из множества M_α во внутрь круга $\mathbb{B}(O, |OA_1|)$ невозможно.

Лемма 2. *Пусть Γ — лакуна α-множества M_α с концами в точках A и B. Точка O построена на серединном перпендикуляре к отрезку A и B так, что $\angle AOB = \alpha+\varepsilon$ и точка O лежит по другую сторону от отрезка AB от множества M_α (рис. 2), где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi - \alpha$. Точка C — одна из ближайших к O точек из Γ, она делит Γ на две части — Γ_1 и Γ_2. Тогда участки границы Γ_1 и Γ_2 являются односторонними β_α-кривыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности достаточно доказать, что $\alpha^+_{\Gamma_2} \leqslant \alpha^+_\Gamma$. Для этого покажем, что для каждой точки $O_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma_2$ можно найти такую точку $O_2' \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, что $\alpha_\Gamma(O_2') \geqslant \alpha_{\Gamma_2}(O_2)$.

Итак, возьмем произвольную точку $O_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma_2$. Если $\alpha^+_{\Gamma_2}(O_2) = 0$, то в качестве $O_2' \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ подойдет любая точка из $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$.

Пусть оказалось, что $\alpha^+_{\Gamma_2}(O_2) > 0$. Тогда рассмотрим два случая.

Первый случай. Проекции точки O_2 на Γ_2 также являются проекциями точки O_2 на Γ. В таком случае в качестве точки O_2' можно взять саму точку O_2.

Второй случай. Предположим, что это не так (см. рис. 2). Пусть точки D и E — проекции точки O_2 на Γ_2, $\mathbb{B}(O_2, |O_2E|)$ — круг с центром в точке O_2 и радиусом $|O_2E|$. В таком случае пересечение $\mathbb{B}(O_2, |O_2E|) \cap \Gamma_1 = \gamma \neq \varnothing$. При этом расстояние $\rho(O_2, \gamma) < |O_2E|$.

Возьмем точку $O_2' = O_2$ и будем сдвигать ее по направлению к точке E. Заметим, что круг $\mathbb{B}(O_2', |O_2'E|)$ с центром в точке O' и радиусом $|O'A_1|$ всегда будет лежать внутри круга $\mathbb{B}(O_2, |O_2E|)$. Кроме того, в некоторый момент $\rho(O_2', \gamma) = |O_2'E|$. При этом должна существовать хотя бы одна точка $F \in \gamma$ такая, что $\rho(O_2', \gamma) = |O_2'E|$. Очевидно, что $\angle FO_2'E \geqslant \angle DO_2E$. Отсюда следует, что $\alpha^+_\Gamma(O_2') \geqslant \alpha^+_{\Gamma_2}(O_2)$.

Лемма 3. *Пусть Γ — лакуна конечной длины некоторого α-множества с концами в точках A_1 и B_1. Тогда хаусдорфово отклонение Γ от отрезка A_1B_1 удовлетворяет неравенству*

$$h(\Gamma, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \mathrm{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где A_1B_1 — отрезок, соединяющий точки A_1 и B_1 (рис. 3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу леммы 1 лакуна Γ — односторонняя β_α-кривая. Докажем сначала более слабую оценку

$$h(\Gamma, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \mathrm{tg} \frac{\alpha+\varepsilon}{2}, \tag{1.1}$$

где ε — произвольное положительное число такое, что $\alpha + \varepsilon \leqslant \pi$.

Для доказательства (1.1) возьмем произвольную точку $X \in \Gamma$ и покажем, что

$$\rho(X, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \mathrm{tg} \frac{\alpha+\varepsilon}{2}. \tag{1.2}$$

На серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1 построим точку O_1 так, чтобы $\angle A_1O_1B_1 = \alpha + \varepsilon$. Из пересечения $\Gamma \cap \mathbb{B}(O_1, |O_1A_1|)$ выберем точку C_1, ближайшую к точке O_1. Ясно, что точка C_1 не совпадает с A_1 и B_1, иначе бы γ не была бы односторонней β_α-кривой. В силу леммы 2 участки $\gamma_1 \subset \Gamma$ с концами в точках A_1 и C_1 и $\gamma_2 \subset \Gamma$ с концами в точках C_1 и B_1 являются односторонними β_α-кривыми. Пусть для определенности $X \in \gamma_1$. Построим

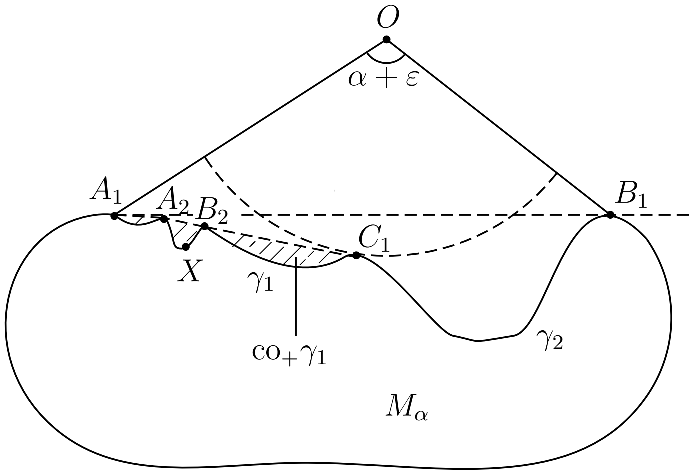

Рис. 3

одностороннее овыпукление $\mathrm{co}_+\gamma_1$ кривой γ_1. Если $X \in \partial\mathrm{co}_+\gamma_1 \cap \gamma_1$, то X попадет внутрь $\mathbb{B}(O_1, |O_1A_1|)$, и тогда оценка (1.2) будет выполняться. Предположим, что X лежит внутри одной из лакун с концами A_2B_2. Заметим, что для отрезка A_2B_2, как и для любого отрезка внутри треугольника $\Delta A_1B_1C_1$, выполняется оценка

$$|A_1B_1| - |A_2B_2| \geqslant h(A_2B_2, A_1B_1)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Продолжая действовать тем же образом, получим последовательность отрезков $\{A_nB_n\}$, которая в худшем случае бесконечна.

При этом

$$|A_{k-1}B_{k-1}| - |A_kB_k| \geqslant h(A_kB_k, A_{k-1}B_{k-1})\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}, \quad k = \overline{3,n}. \tag{1.4}$$

Складывая оценки (1.3), (1.4) получим, что

$$|A_1B_1| - |A_nB_n| \geqslant \Big(h(A_2B_2, A_1B_1) + \ldots + h(A_nB_n, A_{n-1}B_{n-1})\Big)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}$$

$$\geqslant h(A_nB_n, A_1B_1)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любого n справедливо неравенство

$$h(A_nB_n, A_1B_1) \leqslant (|A_1B_1| - |A_nB_n|)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Как известно, монотонная ограниченная числовая последовательность всегда сходится. В данном случае, с некоторой аналогией, каждая новая новая точка A_n по способу построения смещается в одну сторону по кривой Γ и при этом длина Γ конечна. Следовательно, $A_n \to A_0 \in \Gamma$. Аналогично, $B_n \to B_0 \in \Gamma$. Но тогда в силу непрерывной зависимости точки O_n от точек A_n и B_n последовательность $O_n \to O_0$. Кроме того, в силу способа построения точек A_n и B_n расстояние $\rho(C_n, \{A_0, B_0\}) \to 0$. Действительно, одна из длин кривой между точками A_n и A_{n+1} либо B_n и B_{n+1} всегда больше, чем длина кривой между точками C_n и одной из A_n и B_n. Следовательно, $|C_nO_n| \to |A_0O_0| = |B_0O_0|$. Отметим, что, вообще говоря, отсюда не следует, что последовательность C_n сходится. Возможен случай, когда C_n “прыгает” между точками A_n и B_n, постепенно сокращая расстояние до них.

Предположим, что $|A_0B_0| \neq 0$. Тогда на серединном перпендикуляре к A_0B_0 постороим точку O_0 такую, чтобы $\angle A_0O_0B_0 = \alpha+\varepsilon$ (и чтобы она оставалась слева при движении по Γ от

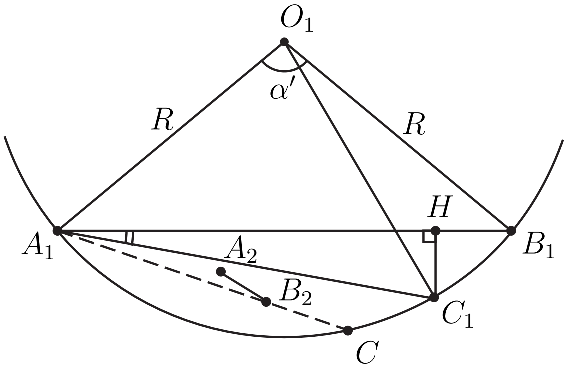

Рис. 4

точки A_0 к B_0). Найдем точку $C_0 \in \mathbb{B}(O_0, |O_0A_0|)$, ближайшую к точке O_0. Однако, поскольку $|C_0O_0| < |A_0O_0|$, $|C_nO_n| \to |A_0O_0|$, $O_n \to O_0$, получим противоречие: $|C_0O_N| < |C_NO_N|$ для достаточно большого N, хотя C_N — ближайшая на участке, включающем участок между точками A_0 и B_0. Следовательно, $|A_0B_0| = 0$. Но тогда по теореме о двух милиционерах $X = A_0 = B_0$, и, значит, для него выполняется оценка

$$\rho(X, A_1B_1) = h(X, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \operatorname{tg} \frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Поскольку X — произвольная точка из Γ, то этой оценки вытекает (1.1). Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 3. Опишем более подробно доказательство оценки (1.3). Итак, пусть описанный угол $\angle A_1O_1B_1 = \alpha + \varepsilon$ (рис. 4).

Докажем, что любой отрезок A_2B_2, лежащих между дугой $\smile A_1B_1$ и хордой A_1B_1, удовлетворяет соотношению (1.3). Прежде всего, докажем, что

$$|A_1B_1| - |A_1C_1| \geqslant h(A_1C_1, A_1B_1) \operatorname{ctg} \frac{\alpha+\varepsilon}{2}, \tag{1.5}$$

где C_1 для нас будет произвольной точкой на дуге $\smile A_1B_1$.

Введем обозначения: $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, $R = |O_1A_1| = |O_1B_1|$, величину угла $\angle B_1A_1C_1$ обозначим через β, точка H — проекция точки C_1 на отрезок A_1B_1.

Ясно, что $|A_1B_1| = 2R\sin\dfrac{\alpha'}{2}$. Поскольку $\angle C_1O_1B_1$ — описанный угол, опирающийся на ту жу дугу, что и вписанный угол $\angle B_1A_1C_1$, то $\angle C_1O_1B_1 = 2\angle B_1A_1C_1 = 2\beta$. Следовательно, $0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{\alpha'}{2}$, $\angle A_1O_1C_1 = \alpha' - 2\beta$, $|A_1C_1| = 2R\sin\Big(\dfrac{\alpha'}{2} - \beta\Big)$.

Заметим, что $h(A_1C_1, A_1B_1) = |HC_1|$. Из прямоугольного треугольника A_1HC_1 получаем, что

$$|HC_1| = |A_1C_1|\sin\beta = 2R\sin\Big(\frac{\alpha'}{2} - \beta\Big)\sin\beta.$$

Вычислим

$$|A_1B_1| - |A_1C_1| = 2R\Big(\sin\frac{\alpha'}{2} - \sin\Big(\frac{\alpha'}{2} - \beta\Big)\Big) = 2R\Big(\sin\frac{\alpha'}{2} - \sin\frac{\alpha'}{2}\cos\beta + \cos\frac{\alpha'}{2}\sin\beta\Big)$$

$$= 2R\Big(\sin\frac{\alpha'}{2}(1-\cos\beta) + \cos\frac{\alpha'}{2}\sin\beta\Big)$$

$$= 2R\Big(2\sin\frac{\alpha'}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\Big) = 4R\sin\frac{\beta}{2}\cos\Big(\frac{\alpha'-\beta}{2}\Big).$$

Отсюда

$$\frac{|A_1B_1| - |A_1C_1|}{|HC_1|} = \frac{2\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha'-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha'}{2}-\beta\right)\sin\beta} = \frac{\cos\left(\dfrac{\alpha'-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha'}{2}-\beta\right)\cos\dfrac{\beta}{2}} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (1.5).

Рассмотрим теперь произвольный отрезок A_2B_2, лежащий внутри фигуры, образованной хордой A_1B_1 и дугой $\smile A_1B_1$. Без ограничения общности (и за исключением некоторых вырожденных случаев) предположим, что $\rho(B_2, A_1B_1) > \rho(A_2, A_1B_1)$, $|A_1B_2| > |A_1A_2|$. Но тогда

$$\frac{|A_1B_1| - |A_2B_2|}{h(A_2B_2, A_1B_1)} \geqslant \frac{|A_1B_1| - |A_1B_2|}{h(A_1B_2, A_1B_1)}, \quad h(A_2B_2, A_1B_1) = h(A_1B_2, A_1B_1). \tag{1.6}$$

Продолжим отрезок A_1B_2 до пересечения с дугой $\smile A_1B_1$ в точке C. При этом

$$\frac{|A_1B_2|}{h(A_1B_2, A_1B_1)} = \frac{|A_1C|}{h(A_1C, A_1B_1)},$$

отсюда

$$\frac{|A_1B_1| - |A_1B_2|}{h(A_1B_2, A_1B_1)} \geqslant \frac{|A_1B_1| - |A_1C|}{h(A_1C, A_1B_1)} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}. \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что

$$|A_1B_1| - |A_2B_2| \geqslant h(A_2B_2, A_1B_1)\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Теорема 1. *Пусть M_α — α-множество в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей конечной длины, $\alpha < \pi$. Тогда имеет место следующая оценка*:

$$d(M_\alpha, \operatorname{co} M_\alpha) \leqslant \lambda(M_\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Рассмотрим множества M_α и $\operatorname{co} M_\alpha$. Заметим, что M_α — односвязное множество, так как $\alpha < \pi$. Следовательно, ∂M_α состоит из совокупности участков, на которых она совпадает с $\partial \operatorname{co} M_\alpha$, и так называемых лакун. Именно на лакунах возможно отдаление множеств M_α и $\operatorname{co} M_\alpha$ в хаусдорфовой метрике. Пусть участок границы Γ между точками P_1 и P_2 — одна из таких лакун. При этом длина $|P_1P_2| \leqslant \lambda(M_\alpha)$ для любых $P_1, P_2 \in \partial M_\alpha$.

В силу леммы 3 выполняется следующая оценка для прогиба границы на участке между точками P_1 и P_2:

$$h(\Gamma, P_1P_2) \leqslant |P_1P_2|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку данная оценка верна для всех лакун, то

$$h(\partial M_\alpha, \partial \operatorname{co} M_\alpha) \leqslant \lambda(M_\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Гипотеза. В одном частном разговоре проф. Ю.С. Ледяев высказал предположение, что оценку (1.8) можно улучшить следующей

$$d(M_\alpha, \operatorname{co} M_\alpha) \leqslant \lambda(M_\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. Оценка расстояния между усреднением множества с помощью суммирования по Минковскому и его выпуклой оболочкой

2.1. Вспомогательные утверждения

В работе [6] чебышёвский радиус множества определен следующим образом.

Определение 7. Пусть Q — ограниченное множество вещественного банахова пространства B. Элемент $x_0 \in B$ называется чебышёвским центром множества Q, если

$$\sup_{x\in Q} ||x - x_0|| = R_Q = \inf_{y\in B} \sup_{x\in Q} ||x - y||.$$

Величину R_Q мы называем чебышёвским радиусом множества Q. Таким образом, чебышёвский центр множества есть центр шара наименьшего возможного радиуса, содержащего это множество.

Напомним, что вследствие теоремы Каратеодори $d(M, \mathrm{co}M) \leqslant R(M)$.

Из определения хаусдорфова расстояния вытекает следующее его свойство.

Утверждение 1. $d(\bigcup \mathcal{M}_i, \bigcup \Omega_i) \leqslant \sup\limits_i d(\mathcal{M}_i, \Omega_i)$ *для любого набора* $\mathcal{M}_i, \Omega_i \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Здесь через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ обозначено множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$.

2.2. Оценки в пространстве размерности $n = 2$

Теорема 2. *Пусть* $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \mathrm{co}\, M\Big) \leqslant \frac{R(M)}{k} \leqslant \frac{\lambda(M)}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{k} \text{ для } k = 2, 3, \ldots .$$

Доказательство. Докажем оценку при $k = 3$. Для остальных k доказательство аналогичное.

Заметим:

1) $\dfrac{M + M + M}{3} = \bigcup\limits_{\{A,B,C\}\subset M} \dfrac{\{A, B, C\} + \{A, B, C\} + \{A, B, C\}}{3}$;

2) вследствие теоремы Каратеодори $\mathrm{co}\, M = \bigcup\limits_{\{A,B,C\}\subset M} \mathrm{co}\{A, B, C\}$;

3) для любых трех точек A, B, C из M выполняется неравенство

$$d\Big(\frac{\{A, B, C\} + \{A, B, C\} + \{A, B, C\}}{3}, \mathrm{co}\{A, B, C\}\Big) \leqslant \frac{R(M)}{3},$$

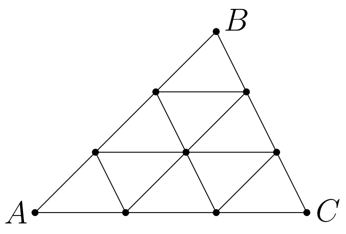

Рис. 5. Множества $\{A, B, C\}$ и $\dfrac{\{A, B, C\} + \{A, B, C\} + \{A, B, C\}}{3}$.

вследствие того что $d\big(\{A,B,C\},\mathrm{co}\{A,B,C\}\big) \leqslant R(\{A,B,C\}) \leqslant R(M)$ и вследствие подобия треугольников с вершинами из $\dfrac{\{A,B,C\}+\{A,B,C\}+\{A,B,C\}}{3}$ треугольнику ΔABC с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{3}$ (см. рис. 5).

Отсюда в силу утверждения 1 следует справедливость теоремы.

З а м е ч а н и е 4. Оценку теоремы 2 можно улучшить, если использовать так называемый внутренний радиус множества (см., например, [5]). Для произвольного множества M из евклидова пространства он определяется следующим образом:

$$r(M) \stackrel{def.}{=} \sup_{x\in M} \inf_{\substack{T\subset M,\\ x\in \mathrm{co}\, T}} R(T).$$

Пусть $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$. Тогда поскольку

$$\frac{1}{k}\big(\underbrace{M+\ldots+M}_{k\ \text{раз}}\big) = \bigcup_{\substack{\{A,B,C\}\subset M,\\ R(\{A,B,C\})\leqslant r(M)}} \frac{1}{k}\big(\underbrace{\{A,B,C\}+\ldots+\{A,B,C\}}_{k\ \text{раз}}\big),$$

$$\mathrm{co}\, M = \bigcup_{\substack{\{A,B,C\}\subset M,\\ R(\{A,B,C\})\leqslant r(M)}} \mathrm{co}\{A,B,C\},$$

$$d\Big(\frac{1}{k}\big(\underbrace{\{A,B,C\}+\ldots+\{A,B,C\}}_{k\ \text{раз}}\big),\mathrm{co}\{A,B,C\}\Big) \leqslant \frac{R(\{A,B,C\})}{k},$$

то вследствие утверждения 1

$$d\Big(\frac{1}{k}\big(\underbrace{M+\ldots+M}_{k\ \text{раз}}\big),\mathrm{co}\, M\Big) \leqslant \frac{r(M)}{k}\ \text{для}\ k=2,3,\ldots$$

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что $r(M) \geqslant \sup\limits_{x\in\partial \mathrm{co}\, M} \inf\limits_{\substack{T\subset M,\\ x\in \mathrm{co}\, T}} R(T)$. То есть максимальное расстояние между концами лакун не превосходит $2r(M)$. Отсюда следует, что оценку из теоремы 1 можно улучшить следующим образом:

$$d(M,\mathrm{co}\, M) \leqslant 2r(M)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \leqslant \lambda(M)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

2.3. Оценки в пространстве размерности $n = 3$

Теорема 3. *Пусть* $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^3)$. *Тогда*

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M+\ldots+M}_{k\ \textit{раз}}),\mathrm{co}\, M\Big) \leqslant R(M)\,\frac{\sqrt{2}}{k} \quad \textit{при} \quad k=2,3,\ldots. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если следовать схеме доказательства теоремы 2, то достаточно доказать оценку (2.1) только для всех четырехточечных множеств M.

Неравенство (2.1) при $k = 2$ непосредственно следует из теоремы Шепли — Фолкмана.

Докажем неравенство (2.1) при $k = 3$. Рассмотрим наше произвольное четырехточечное множество $M = \{A,B,C,D\}$ и множество $\dfrac{M+M+M}{3} = \{A,\ A_2,\ A_3,\ B,\ B_2,\ B_3,\ C,\ C_2,\ C_3,\ D,$ $M_1,\ M_2,\ M_3,\ N_1,\ N_2,\ N_3,\ K_1,\ K_2,\ K_3,\ H\}$ (рис. 6).

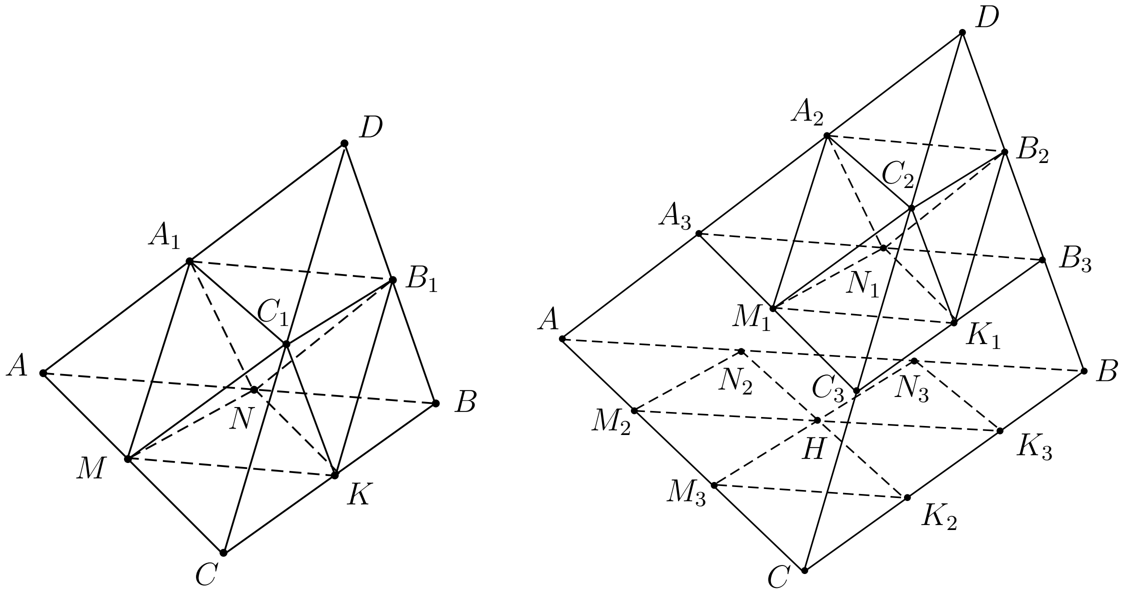

Рис. 6. Множества $M = \{A, B, C, D\}$, $\dfrac{M+M}{2}$ и $\dfrac{M+M+M}{3}$.

Рассмотрим (в некотором смысле вырожденный) многогранник $DA_2A_3B_2B_3C_2C_3M_1N_1K_1$. Он подобен многограннику $ABCDA_1B_1C_1MNK$ на рис. 6 с коэффициентом подобия $\dfrac{2}{3}$. Следовательно,

$$d(\{D, A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3, M_1, N_1, K_1\}, \operatorname{co}\{D, A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3, M_1, N_1, K_1\}) \leqslant \frac{2}{3}\,\frac{R(M)\sqrt{2}}{2} = R(M)\,\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Тоже самое верно для многогранников $AA_2A_3M_1M_2M_3N_1N_2N_3H$, $BB_2B_3K_1K_2K_3N_1N_2N_3H$ и $CC_2C_3M_1M_2M_3K_1K_2K_3H$. Заметим, что объединение этих многогранников целиком накрывает тетраэдр $ABCD$ (при этом тетраэдр $M_1N_1K_1H$ является общим для всех многогранников). Таким образом, оценка (2.1) для $k = 3$ доказана.

Докажем теперь неравенство (2.1) для произвольного k по индукции. Для $k = 2$ и $k = 3$ мы уже доказали. Предположим, что для $k = m$ неравенство (2.1) доказано. Докажем его для $k = m+1$. Пусть $M = \{A, B, C, D\}$. Тогда множество $\dfrac{1}{m}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}}) = \{P_1, P_2, \ldots, P_N\}$, где $N = \overline{C}_m^4$ — число сочетаний с повторениями по 4 из m точек. Множество $\dfrac{1}{m+1}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m+1\text{ раз}})$ можно представить в виде объединения четырех множеств $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, где $M_1 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{A\} + (\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}})\big)$, $M_2 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{B\} + (\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}})\big)$, $M_3 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{C\} + (\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}})\big)$, $M_4 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{D\} + (\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}})\big)$.

Заметим, что многогранники с вершинами из множеств M_j, $j = \overline{1,4}$, подобны многограннику с вершинами из множества $\dfrac{1}{m}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}})\big)$ с коэффициентом подобия $\dfrac{m}{m+1}$. Следовательно,

$$d(M_j, \operatorname{co} M_j) = \frac{m}{m+1}\, d\Big(\frac{1}{m}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}}), \operatorname{co}\frac{1}{m}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m\text{ раз}})\Big)$$

$$\leqslant \frac{m}{m+1}\frac{R(M)\sqrt{2}}{m} = R(M)\frac{\sqrt{2}}{m+1}.$$

Однако эти четыре многогранника с вершинами из M_j, $j = \overline{1,4}$, полностью покрывают множество $\frac{1}{m+1}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m+1 \text{ раз}})$. Следовательно, аналогично случаю $k = 3$

$$d\Big(\frac{1}{m+1}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m+1 \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant R(M)\,\frac{\sqrt{2}}{m+1}\,.$$

З а м е ч а н и е 6. Также, как и в случае $n = 2$, мы можем заменить чебышёвский радиус на внутренний и тем самым получить улучшенную оценку для произвольного $M \subset \operatorname{comp}(\mathbb{R}^3)$:

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant r(M)\,\frac{\sqrt{2}}{k}\,.$$

З а м е ч а н и е 7. Действуя аналогично как в случае $n = 3$, можно доказать, что в пространстве произвольной размерности $n \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant r(M)\,\frac{\sqrt{n-1}}{k} \leqslant R(M)\,\frac{\sqrt{n-1}}{k}\,.$$

3. Заключение

Нами были получены некоторые оценки расстояний между множествами и их выпуклыми оболочками. Для улучшения оценок мы использовали дополнительную информацию о структуре множеств. Данные оценки могут найти применение в экономике, теории управления и других областях, использующих теорему Шепли — Фолкмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н.** α-множества и их свойства / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с.
2. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 95–120. doi: 10.20537/vm160109 .
3. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 438 с.
4. **Яглом И.М., Болтянский В.Г.** Выпуклые фигуры. М.: ГТТИ, 1951. 344 с.
5. **Starr R.M.** Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences // Econometrica. 1969. Vol. 37, iss. 1. P. 25–38. doi: 10.2307/1909201 .
6. **Гаркави А.Л.** О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 6. С. 139–145.
7. **Бугров Я.С., Никольский С.М.** Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3 т. Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Дрофа, 2004. 512 с.
8. **Препарата Ф., Феймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 478 с.

Ушаков Владимир Николаевич
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 10.09.2017

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
доцент
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: ale10919@yandex.ru

REFERENCES

1. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Fomin A.N. *α-mnojestva i ih svoistva.* [α-sets and their properties]. Yekaterinburg, Russia: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2004, 62 p. (in Russian).
2. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. α-sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, iss. 1, pp. 95–120. doi: 10.20537/vm160109.
3. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza.* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 438 p.
4. Yaglom I.M., Boltyanskii V.G. *Vypuklye figury.* [Convex figures]. Moscow: GTTI Publ., 1951, 344 p.
5. Starr R.M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. *Econometrica*, 1969, vol. 37, iss. 1, pp. 25–38. doi: 10.2307/1909201 .
6. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and the convex hull of the set. *Uspehi Mat. Nauk*, 1964, vol. 14, no. 6, pp. 139–145 (in Russian).
7. Bugrov Ja.S. *Nikol'skii Higher mathematics: Vysshaya matematika: Uchebnik dlya vuzov. Vol. 3: Differentsial'nyye uravneniya. Kratnyye integraly. Ryady. Funktsii kompleksnogo peremennogo.* [Textbook for high schools: 3 volums. Vol. 3: Differential equations. Multiple integrals. Rows. Functions of a complex variable.] Moscow, Dropha Publ., 2004, 512 p. (in Russian).
8. Preparata F., Shamos M. Computational Geometry: An Introduction. N Y, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1985, 398 p. Translated to Russian under the title *Vychislitel'naja geometrija: Vvedenie.*, Moscow, Mir Publ., 1989, 478 p.

The paper was received by the Editorial Office on September 10, 2017.

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: ushak@imm.uran.ru .

Aleksandr Alekseevich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru .