ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 519.857

ИМПУЛЬСНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СО СМЕШАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВЫБОР УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА[1]

В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев

Рассматривается линейная дифференциальная игра, в которой первый игрок имеет как импульсное управление, так и управление, стесненное геометрическим ограничением. Возможности первого игрока определяются запасом ресурсов, который он может использовать при формировании своего импульсного управления. В отдельные моменты времени возможно отделение части запаса ресурсов, что может привести к “мгновенному” изменению фазового вектора; это усложняет задачу. Управление второго игрока стеснено геометрическим ограничением. Вектограммы игроков описываются одним и тем же шаром с разными радиусами, зависящими от времени. Терминальным множеством в игре является шар с заданным радиусом. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна. Найдены необходимые и достаточные условия встречи с терминальным множеством в заданный момент времени. Построены соответствующие управления игроков, которые гарантируют достижение поставленных перед ними целей. Приведено решение примера, иллюстрирующего теорию.

Ключевые слова: дифференциальная игра, управление, импульсное управление, поимка.

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest’ev. Impulse differential game with a mixed constraint on the choice of the control of the first player.

We consider a linear differential game in which the first player can choose both an impulse control and a control subject to a geometric constraint. The first player can use a prescribed amount of resource to form the impulse control. Portions of this amount can be separated at certain times, thus producing “instantaneous” changes of the state vector and complicating the problem. The control of the second player is subject to a geometric constraint. The vectograms of the players are described by the same ball with different time-dependent radii. The terminal set is a ball with fixed radius. The aim of the first player is to bring the state vector to the terminal set at a given time. The aim of the second player is opposite. Necessary and sufficient conditions for meeting the terminal set at the given time are found, and the corresponding controls of the players guaranteeing the achievement of their goals are constructed. A solution of an example illustrating the theory is given.

Keywords: differential game, control, impulse control, capture.

MSC: 49N70, 49N75, 91A23, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-209-222

Введение

К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы [1]. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы, о которых известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории дифференциальных игр.

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектории управляемой системы могут быть разрывными.

Н. Н. Красовским (см. [2]) предложен метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. Возможность применения этого метода к задачам импульсного управления рассматривалась, например, в работах [3; 4]. В статье [4] приводится пример импульсной “мягкой” встречи двух управляемых материальных точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости, а

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00264_а).

также обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. В публикации [5] этот метод применяется при решении конкретных задач импульсной встречи.

В работе [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно. В [7;8] исследуются задачи импульсного управления в условиях неполной информации о фазовом состоянии, в [9;10] — задачи группового преследования при импульсных ограничениях на управления. В статьях [11–13] рассматриваются линейные дифференциальные игры преследования, в которых используемые импульсные управления выражаются при помощи дельта-функции Дирака. В работах [14–16] при построении импульсного управления игроков применяются процедуры корректировки управлений, причем в каждый момент коррекции управление строится как решение некоторой проблемы моментов. В работе [17] импульсные дифференциальные игры изучаются в рамках теории выживаемости (viability theory).

Важным классом дифференциальных игр являются такие задачи, когда в правой части уравнений стоит только сумма управлений первого и второго игроков, значения которых принадлежат шарам с радиусами, зависящими от времени. Для таких однотипных игр в случае, если терминальное множество является шаром заданного радиуса, в работе [18] построен альтернированный интеграл, а в [19] построены оптимальные позиционные стратегии игроков.

В [20] рассматривается дифференциальная игра этого класса, в которой на управление первого игрока наложено импульсное ограничение.

В настоящей статье рассмотрена однотипная дифференциальная игра, в которой первый игрок обладает как импульсным управлением, так и управлением, стесненным геометрическим ограничением.

1. Постановка задачи

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = -c(t)\dot{\phi}(t)w - a(t)u + b(t)v, \quad t \le p, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь $c : (-\infty, p] \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция; $a : (-\infty, p] \to \mathbb{R}_+$ и $b : (-\infty, p] \to \mathbb{R}_+$ — суммируемые на каждом отрезке из полуоси $(-\infty, p]$ функции. Посредством $\mathbb{R}_+$ обозначено множество неотрицательных чисел.

Управлением первого игрока является тройка функций [15, с. 74] $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $w(t,z) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,z) \in \mathbb{R}^n$. На выбор функции $\phi(t)$ накладывается импульсное ограничение [1]

$$\mu(t) = \mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} |d\phi(r)| \ge 0,$$

где $t_0 < p$ — начальный момент времени, $\mu(t_0) \ge 0$ — начальный запас ресурсов, который первый игрок сможет использовать при формировании функции $\phi(t)$. Произвольные функции $w : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют геометрическим ограничениям

$$\|w(t,z)\| = 1, \quad \|u(t,z)\| \le 1. \tag{1.2}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Управлением второго игрока является произвольная функция $v : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению

$$\|v(t,z)\| \le 1. \tag{1.3}$$

При выборе функции $\phi(t)$ первый игрок может в отдельные моменты времени осуществлять ее коррекцию [15, с. 74], которая производится следующим образом. Он выбирает моменты коррекций $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = p$. В момент времени τ_i, зная реализовавшиеся $z(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ и $\mu(\tau_i) \geq 0$, он выбирает абсолютно–непрерывную неубывающую функцию $\phi_i : [\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int\limits_{t_i}^{t} \dot{\phi}_i(r)dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}. \tag{1.4}$$

Движение системы (1.1), порожденное выбранными управлениями (1.2) и (1.3), определяется на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega : \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}, \quad d(\omega) = \max_{0\leq j\leq k}(t^{(j+1)} - t^{(j)}). \tag{1.5}$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t^{(0)}) = z(\tau_i) - \Delta_i c(\tau_i) w(\tau_i, z(\tau_i)) = z(\tau_i + 0),$$

$$z_\omega(t) = z_\omega(t^{(j)}) - \left(\int\limits_{t^{(j)}}^{t} c(r)\dot{\phi}_i(r)dr \right) w(t^{(j)}, z(t^{(j)}))$$

$$- \left(\int\limits_{t^{(j)}}^{t} a(r)dr \right) u(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})) + \left(\int\limits_{t^{(j)}}^{t} b(r)dr \right) v(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})) \tag{1.6}$$

при $t^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}$, $j = \overline{0, k}$.

Семейство ломаных (1.6) на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ является [15, с. 46] равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [21, с. 236]. Под движением $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения (1.5) стремится к нулю. Изменение запаса ресурсов $\mu(t)$ определяется формулой (1.4).

Отметим, что так определенное движение $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ может быть не единственным. Стало быть, множество значений $z(\tau_s)$ в каждый момент коррекции τ_s может содержать несколько точек. Считаем, что первый игрок по своему усмотрению выбирает в момент коррекции τ_s точку $z(\tau_s)$ и о своем выборе сообщает второму игроку.

В ходе коррекций ϕ первый игрок не меняет остальные свои управления $w(t, z)$ и $u(t, z)$. Второй игрок также не может корректировать свое управление $v(t, z)$.

Задано число $\varepsilon \geq 0$. Цель первого игрока заключается в том, чтобы вектор

$$z(p + 0) = z(p) - \Delta c(p) w$$

при некотором числе $\Delta \in [0, \mu(p)]$ и векторе $w \in \mathbb{R}^n$ с $\|w\| = 1$ удовлетворял неравенству $\|z(p + 0)\| \leq \varepsilon$. Цель второго игрока противоположна.

Сформулированную цель первого игрока можно записать в виде неравенства

$$\|z(p)\| \leq \varepsilon + \mu(p)c(p). \tag{1.7}$$

2. Предположения и формулировка основных результатов

Введем в рассмотрение функцию

$$m(t) = \max_{t\leq\tau\leq p} c(\tau), \quad t \leq p. \tag{2.1}$$

Эта функция является непрерывной и удовлетворяет условию монотонности $m(t_1) \leq m(t_2)$ при $t_2 \leq t_1 \leq p$.

Обозначим

$$q_0 = \inf\left\{t < p \colon \varepsilon \geq \max_{t \leq \tau \leq p} \int\limits_{\tau}^{p} (b(r) - a(r))dr\right\}. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Для начального момента времени* $t_0 = \theta$, $q_0 \leq \theta < p$ *из начального состояния* $z(t_0) = z \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) = \mu \geq 0$ *первый игрок может гарантировать выполнение неравенства* (1.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\|z\| \leq m(\theta)\mu + \varepsilon - \int\limits_{\theta}^{p} (b(r) - a(r))dr. \tag{2.3}$$

Рассмотрим случай, когда $q_0 > -\infty$. Тогда из (2.2) следует равенство

$$\varepsilon = \int\limits_{q_0}^{p} (b(r) - a(r))dr. \tag{2.4}$$

Далее, существует последовательность чисел $\nu_k < q_0$, $\nu_k \to q_0$ такая, что

$$\int\limits_{\nu_k}^{p} (b(r) - a(r))dr > 0, \quad k \geq 1. \tag{2.5}$$

Предположение 1. *Существует набор чисел* $\theta_0 = q_0$, $\theta_{i+1} < \theta_i$, $i \geq 0$ *такой, что объединение промежутков* $(\theta_{i+1}, \theta_i]$ *при* $i \geq 0$ *совпадает с полуосью* $(-\infty, q_0]$ *и для каждого* $i \geq 0$ *для почти всех* $r \in (\theta_{i+1}, \theta_i)$ *выполнено одно из условий*: $b(r) \geq a(r)$, *либо* $a(r) > b(r)$.

Из этого предположения и из формул (2.4) и (2.5) следует, что $a(r) \leq b(r)$ для почти всех $r \in [\theta_1, q_0]$. Обозначим $q_1 = \theta_1$ и

$$q_2 = \inf\left\{t < q_1 : \min_{t \leq \tau \leq q_1} \int\limits_{\tau}^{q_1} (a(r) - b(r))dr \geq 0\right\}. \tag{2.6}$$

Если $q_2 > -\infty$, то

$$\int\limits_{q_2}^{q_1} (a(r) - b(r))dr = 0 \tag{2.7}$$

и существует последовательность чисел $\nu_k < q_2$, $\nu_k \to q_2$ такая, что

$$\int\limits_{\nu_k}^{q_1} (a(r) - b(r))dr < 0. \tag{2.8}$$

Из предположения 1 и из формул (2.7) и (2.8) следует, что $a(r) \leq b(r)$ для почти всех $r \in [\theta_s, q_2]$ при некотором $s > 1$. Положим $q_3 = \theta_s$.

Продолжая эти рассуждения, определим индукцией по $i \geq 1$ конечный или бесконечный набор чисел q_i следующим образом. Пусть $i = 2j - 1$ и $q_i > -\infty$, $j \geq 1$. Определим число q_{i+1} формулой (2.6) с заменой в ней q_1 на q_i. Если $q_{i+1} > -\infty$, то выполнены формулы (2.7) и (2.8) с заменой в них q_1 на q_i и q_2 на q_{i+1}. Поэтому $a(r) \leq b(r)$ для почти всех $r \in [\theta_s, q_{i+1}]$ при некотором $s > 1$. Положим $q_{i+2} = \theta_s$.

Таким образом, построен набор чисел q_i, $i \geq 0$ такой, что

$$a(r) \leq b(r) \text{ для почти всех } r \in [q_{2j+1}, q_{2j}], \quad j \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{\tau}^{q_{2j+1}} (a(r) - b(r))dr \geq 0 \text{ при } q_{2j+2} \leq \tau \leq q_{2j+1} \text{ и } \int\limits_{q_{2j+2}}^{q_{2j+1}} (a(r) - b(r))dr = 0, \quad j \geq 0. \tag{2.10}$$

Предположение 2. *При всех $t < q_0$ выполнено неравенство $m(t) > 0$.*

Предположение 3. *Существует набор чисел $\nu_0 = q_0$, $\nu_{i+1} < \nu_i$, $i \geq 0$ такой, что объединение промежутков $(\nu_{i+1}, \nu_i]$ при $i \geq 0$ совпадает с полуосью $(-\infty, q_0]$ и для каждого $i \geq 0$ выполнено одно из условий: $m(t) = c(t)$ при всех $t \in [\nu_{i+1}, \nu_i]$ либо $m(t) = m(\nu_i)$ для любого $t \in [\nu_{i+1}, \nu_i]$.*

Обозначим

$$\eta(t) = \frac{b(t) - a(t)}{m(t)}, \quad \xi(t) = 0 \text{ при } q_{2j+1} \leq t < q_{2j}, \quad j \geq 0; \tag{2.11}$$

$$\eta(t) = 0, \quad \xi(t) = a(t) - b(t) \text{ при } q_{2j+2} \leq t < q_{2j+1}, \quad j \geq 0. \tag{2.12}$$

Из формул (2.10) и (2.11) следует, что

$$\int\limits_{q_{i+1}}^{q_i} \xi(r)dr = 0 \text{ при всех } i \geq 0. \tag{2.13}$$

Теорема 2. *Для начального момента времени $t_0 = \theta < q_0$ из начального состояния $z(t_0) = z \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) = \mu \geq 0$ первый игрок может гарантировать выполнение неравенства* (1.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\|z\| \leq m(\theta)\Bigg(\mu - \int\limits_{\theta}^{q_0} \eta(r)dr\Bigg) + \int\limits_{\theta}^{q_0} \xi(r)dr, \quad \mu \geq \int\limits_{\theta}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{2.14}$$

Из (2.4) следует, что при $\theta = q_0$ неравенства (2.3) и (2.14) принимают следующий вид:

$$\|z\| \leq m(q_0)\mu. \tag{2.15}$$

3. Вспомогательные результаты

Обозначим

$$\psi(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } z \neq 0 \quad \text{и} \quad \psi(0) \text{ – любое с } \|\psi(0)\| = 1. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Пусть заданы $t_* < \nu \leq p$, $\mu(t_*) \geq 0$ и $z(t_*) \in \mathbb{R}^n$. Управление второго игрока $v(t, z) = \psi(z)$, определяемое при $t_* \leq t \leq \nu$ и $z \in \mathbb{R}^n$ формулой* (3.1), *из начального состояния $z(t_*) \in \mathbb{R}^n$ и $\mu(t_*) \geq 0$ при любом управлении первого игрока, удовлетворяющем ограничениям* (1.2) *и* (1.4), *обеспечивает для любого реализовавшегося состояния $z(\nu)$ и $\mu(\nu)$ выполнение неравенства*

$$\|z(\nu)\| \geq \|z(t_*)\| - (\mu(t_*) - \mu(\nu))m(t_*) + \int\limits_{t_*}^{\nu} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о приведено в [15, лемма 10.1]. □

Рассмотрим игру (1.1), в которой функция $c(t) = 0$, а именно

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v. \tag{3.3}$$

Лемма 2. *Пусть заданы $t_* < \nu \le p$, $\varepsilon_* \ge 0$ и $z_* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\|z_*\| \le \varepsilon_* - \int\limits_{t_*}^{\nu} (b(r) - a(r))dr, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_* \ge \max_{t_* \le \tau \le \nu} \int\limits_{\tau}^{\nu} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.5}$$

Тогда управление первого игрока $u(t, z) = \psi(z)$, определяемое при $t_* \le t \le \nu$ и $z \in \mathbb{R}^n$ формулой (3.1), из начального состояния $z(t_*) = z_*$ при любом управлении (1.3) второго игрока обеспечивает для любого реализовавшегося движения $z(t)$ системы (3.3) выполнение неравенства $\|z(\nu)\| \le \varepsilon_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В работе [15, теорема 8.1] показано, что управление $u(t, z) = \psi(z)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\|z(\nu)\| \le \max\left\{ \max_{t_* \le \tau \le \nu} \int\limits_{\tau}^{\nu} (b(r) - a(r))dr; \|z_*\| + \int\limits_{t_*}^{\nu} (b(r) - a(r))dr \right\}.$$

Отсюда и из неравенства (3.4) и (3.5) следует, что $\|z(\nu)\| \le \varepsilon_*$. □

Лемма 3. *Пусть заданы $t^* < q \le p$, $\varepsilon^* \ge 0$, $\mu^* \ge 0$, $\delta \ge 0$ и $z^* \in \mathbb{R}^n$ такие, что*

$$\|z^*\| \le m(t^*)(\mu^* - \delta) + \varepsilon^* - \int\limits_{t^*}^{q} (b(r) - a(r))dr, \quad \mu^* \ge \delta, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon^* \ge \max_{t^* \le \tau \le q} \int\limits_{\tau}^{q} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.7}$$

Тогда первый игрок, выбирая функции $w(t, z) = u(t, z) = \psi(z)$, определяемые при $t^* \le t \le q$ и $z \in \mathbb{R}^n$ формулой (3.1), и используя не более трех моментов коррекций $t^* = \tau_0 \le \tau_1 \le \tau_2 = q$, может обеспечить при любом управлении (1.3) второго игрока выполнение неравенств

$$\|z(q)\| \le m(q)(\mu(q) - \delta) + \varepsilon^*, \quad \mu(q) \ge \delta. \tag{3.8}$$

Здесь $z(t)$ и $\mu(t)$ —любая реализация движения системы (1.1) с начальными условиями $z(t^*) = z^*$, $\mu(t^*) = \mu^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m(t^*) = m(q)$. Первый игрок выбирает моменты коррекции $\tau_0 = t^*$, $\tau_1 = q$, функцию $\phi(t) = 0$ при $t^* \le t \le q$ и число $\Delta_0 = 0$. Тогда согласно формуле (1.4) $\mu(q) = \mu^* \ge \delta$. Из неравенств (3.6) и (3.7) следуют неравенства (3.4) и (3.5) при

$$t_* = t^*, \quad \nu = q, \quad \varepsilon_* = m(q)(\mu(q) - \delta) + \varepsilon^*.$$

Согласно лемме 2 будет выполнено первое неравенство в (3.8).

Пусть $m(t^*) > m(q)$. Тогда из (2.1) следует, что $m(t^*) = c(\theta)$ при некотором $t^* \le \theta < q$.

Рассмотрим случай, когда $\theta = t^*$. Первый игрок выбирает $\tau_0 = t^*$, $\tau_1 = q$, $\phi(t) = 0$ при $t^* \le t \le q$.

Пусть

$$\|z^*\| \le \varepsilon^* - \int\limits_{t^*}^{q} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.9}$$

Первый игрок берет $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(q) = \mu^* \geq \delta$. Из неравенств (3.7) и (3.9) следуют неравенства (3.4) и (3.5) при $t_* = t^*$, $\nu = q$, $\varepsilon_* = \varepsilon^*$. Применяя лемму 2, получим неравенство $\|z(q)\| \leq \varepsilon^*$, из которого следует требуемое неравенство (3.8).

Пусть неравенство (3.9) не выполнено. Первый игрок берет

$$0 \leq \Delta_0 = \frac{1}{c(t^*)}\left(\|z^*\| - \varepsilon^* + \int\limits_{t^*}^{q}(b(r) - a(r))dr\right) \leq \mu^* - \delta.$$

Тогда $\mu(q) = \mu^* - \Delta_0 \geq \delta$ и

$$\|z(t^* + 0)\| = \|z^* - \Delta_0 c(t^*)\psi(z^*)\| = \varepsilon^* - \int\limits_{t^*}^{q}(b(r) - a(r))dr.$$

Стало быть, при $t_* = t^*$, $\nu = q$, $\varepsilon_* = \varepsilon^*$ и $z^* = z(t^* + 0)$ выполнены неравенства (3.4) и (3.5). Применяя лемму 2, получим неравенство $\|z(q)\| \leq \varepsilon^*$, из которого следует неравенство (3.8).

Рассмотрим теперь случай, когда $t^* < \theta < q$. Первый игрок выбирает $\tau_0 = t^*$, $\tau_1 = \theta$, $\tau_2 = q$, $\phi(t) = 0$ при $t^* \leq t \leq \theta$ и $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(\theta) = \mu^* \geq \delta$. Из неравенства (3.6) следует неравенство (3.4) при

$$t_* = t^*, \quad \|z(t_*)\| = \|z^*\|, \quad \nu = \theta, \quad \varepsilon_* = c(\theta)(\mu^* - \delta) + \varepsilon^* - \int\limits_{\theta}^{q}(b(r) - a(r))dr.$$

Покажем, что выполнено неравенство (3.5). Возьмем любое число $t_* \leq \tau \leq \theta$. Тогда, используя неравенство (3.7), будем иметь, что

$$\varepsilon_* \geq \varepsilon^* - \int\limits_{\theta}^{q}(b(r) - a(r))dr \geq \int\limits_{\tau}^{\theta}(b(r) - a(r))dr.$$

Применяя лемму 2, получим, что

$$\|z(\theta)\| \leq c(\theta)(\mu(\theta) - \delta) + \varepsilon^* - \int\limits_{\theta}^{q}(b(r) - a(r))dr, \quad \mu(\theta) \geq \delta.$$

Далее управление первого игрока строится так же, как и в разобранном выше случае $\theta = t^*$.$\square$

4. Доказательство теорем 1 и 2

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть начальное состояние $q_0 \leq t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) \geq 0$ таково, что при $\theta = t_0$, $z = z(t_0)$ и $\mu = \mu(t_0)$ выполнено неравенство (2.3). Тогда, учитывая определение числа q_0 (2.2), получим неравенства (3.6) и (3.7) при $z^* = z(t_0)$, $t^* = t_0$, $q = p$, $\varepsilon^* = \varepsilon$, $\mu^* = \mu(t_0)$ и $\delta = 0$. Применяя лемму 3, получим, что первый игрок сможет осуществить неравенства (3.8). Из этих неравенств, учитывая, что $m(p) = c(p)$, получим требуемое неравенство (1.7).

Пусть неравенство (2.3) не выполнено. Второй игрок выбирает управление $v(t, z) = \psi(z)$, которое определяется формулой (3.1) при $t_0 \leq t \leq p$ и $z \in \mathbb{R}^n$. Применим лемму 1 при $t_* = t_0$ и $\nu = p$. Из неравенства (3.2) получим, что

$$\|z(p)\| \geq \|z(t_0)\| - (\mu(t_0) - \mu(p))m(p) + \int\limits_{t_0}^{p}(b(r) - a(r))dr.$$

Отсюда, учитывая, что $m(p) = c(p)$, получим неравенство $\|z(p)\| > \varepsilon + \mu(p)c(p)$. □

Доказательство теоремы 2. Возьмем число $q_{i+1} \le \theta < q_i$ при $i \ge 0$, вектор $z \in \mathbb{R}^n$ и число $\mu \ge 0$, которые удовлетворяют неравенствам (2.14). Покажем, что первый игрок сможет построить свое управление, стесненное ограничениями (1.2) и (1.4), таким образом, чтобы при любом управлении (1.3) второго игрока любое реализовавшееся на отрезке $[\theta, q_i]$ движение с начальным условием $z(\theta) = z$, $\mu(\theta) = \mu$ в момент времени q_i удовлетворяло неравенству (2.14).

Из формул (2.11)–(2.13) получим, что если $q_{i+1} \le \theta < q_i$ и $i = 2j + 1$ при $j \ge 0$, то неравенства (2.14) принимают следующий вид:

$$\|z\| \le m(\theta)\Bigg(\mu - \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr\Bigg) - \int\limits_{\theta}^{q_i} (b(r) - a(r))dr, \tag{4.1}$$

$$\mu \ge \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.2}$$

Если $q_{i+1} \le \theta < q_i$ и $i = 2j$ при $j \ge 0$, то неравенство (2.14) записывается одним неравенством

$$\|z\| \le m(\theta)\Bigg(\mu - \int\limits_{\theta}^{q_0} \eta(r)dr\Bigg). \tag{4.3}$$

Из неравенств (4.1)–(4.3), используя равенства (2.10), получим, что при $\theta = q_i$ для любого $i \ge 0$ неравенства (2.14) записываются одним неравенством

$$\|z\| \le m(q_i)\Bigg(\mu - \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr\Bigg). \tag{4.4}$$

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$ и $i = 2j+1$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ удовлетворяют неравенствам (4.1), (4.2). Тогда при

$$t^* = \theta, \quad q = q_i, \quad \mu^* = \mu, \quad \varepsilon^* = 0, \quad \delta = \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr$$

выполнены неравенства (3.6). Из первого неравенства в (2.10) следует неравенство (3.7). Применяя лемму 3, получим, что первый игрок сможет обеспечить выполнение неравенств (3.8). Стало быть, для $z = z(q_i)$, $\mu = \mu(q_i)$ будет выполнено неравенство (4.4).

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$, $i = 2j$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ удовлетворяют неравенству (4.3). Из формулы (2.9) следует, что $b(r) \ge a(r)$ для почти всех $\theta \le r \le q_i$. Далее, из формул (2.11) и (2.12) получим равенство

$$\int\limits_{\theta_1}^{q_0} \eta(r)dr = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b(r) - a(r)}{m(r)}dr + \int\limits_{\theta_2}^{q_0} \eta(r)dr \quad \text{при} \ \ \theta \le \theta_1 < \theta_2 \le q_i. \tag{4.5}$$

Используя предположение 3, построим числа $\theta = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_f = q_i$ такие, что для каждого $s = \overline{0, f-1}$ верно одно из утверждений: $m(\tau_s) = m(\tau_{s+1})$ или $m(r) = c(r)$ при всех $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Первый игрок выбирает эти числа в качестве моментов коррекций и берет управления $w(t,z) = u(t,z) = \psi(z)$.

Опишем правило, по которому выбираются числа $\Delta_s \ge 0$ и функции $\phi_s : [\tau_s, \tau_{s+1}] \to \mathbb{R}$ в момент коррекции τ_s.

Из неравенства (4.3) следует, что при $s = 0$ выполнено неравенство

$$\|z(\tau_s)\| \le m(\tau_s)\left(\mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_s}^{q_0} \eta(r)dr\right). \tag{4.6}$$

Допустим, что неравенство (4.6) выполнено при $s = \overline{0, f-1}$.

Пусть $m(\tau_s) = m(\tau_{s+1})$. Тогда согласно формуле (2.1) $m(r) = m(\tau_{s+1})$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Из (4.5) и (4.6) получим, что

$$\|z(\tau_s)\| \le m(\tau_{s+1})\left(\mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr\right) - \int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (b(r) - a(r))dr, \quad \mu(\tau_s) \ge \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.7}$$

Из этих неравенств следует неравенство (3.4) при

$$t_* = \tau_s, \quad \nu = \tau_{s+1}, \quad \varepsilon_* = m(\tau_{s+1})\left(\mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr\right), \quad z_* = z(\tau_s).$$

Поскольку $b(r) \ge a(r)$ для почти всех $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$, то неравенство (3.5) принимает следующий вид:

$$\varepsilon_* - \int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (b(r) - a(r))dr \ge 0.$$

Это неравенство следует из (4.7).

Первый игрок берет число $\Delta_s = 0$ и функцию $\phi_s(r) = 0$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Тогда $\mu(\tau_{s+1}) = \mu(\tau_s)$. Применяя лемму 2, получим, что неравенство (4.6) выполнено при $s + 1$.

Пусть $m(r) = c(r)$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Первый игрок выбирает

$$\Delta_s = \frac{\|z(\tau_s)\|}{c(\tau_s)}, \quad \phi_s(t) = \int\limits_{\tau_s}^{t} \frac{b(r) - a(r)}{m(r)} dr. \tag{4.8}$$

Из неравенства (4.6) и из первой формулы в (4.8) следует, что

$$\Delta_s \le \mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_s}^{q_0} \eta(r)dr \le \mu(\tau_s).$$

Отсюда и из формул (1.4), (4.5) и (4.8) имеем, что

$$\mu(\tau_{s+1}) = \mu(\tau_s) - \Delta_s - \int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \frac{b(r) - a(r)}{m(r)} dr \ge \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.9}$$

Далее, из формул (3.1) и (4.8) следует, что

$$\|z(\tau_s + 0)\| = \|z(\tau_s) - \Delta_s c(\tau_s)\psi(z(\tau_s))\| = 0.$$

Подставим функцию $\phi_s(t)$ (4.8) в уравнение движения (1.1) при $w = u = \psi(z)$. Получим

$$\dot{z} = -b(t)\psi(z) + b(t)v.$$

Применим лемму 2 при $t_* = \tau_s$, $\nu = \tau_{s+1}$, $\|z_*\| = \|z(\tau_s + 0)\| = 0$, $\varepsilon_* = 0$ и $a(r) = b(r)$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Получим $\|z(\tau_{s+1})\| = 0$. Отсюда и из неравенства (4.9) следует, что при $s+1$ неравенство (4.6) выполнено.

Положим в (4.6) $s = f$. Получим, что для $z = z(q_i)$, $\mu = \mu(q_i)$ требуемое неравенство (4.4) выполнено.

Принимая $\theta = q_i$ и проводя предыдущие рассуждения, получим, что неравенство (4.4) будет выполнено для q_{i-1}, $z(q_{i-1})$ и $\mu(q_{i-1})$. Стало быть, при $i = 0$ для $z = z(q_0)$, $\mu = \mu(q_0)$ будет выполнено неравенство (2.15). Согласно теореме 1 первый игрок сможет осуществить выполнение неравенства (1.7).

Рассмотрим теперь задачу о построении управления второго игрока. Возьмем число $q_{i+1} \le \theta < q_i$ при $i \ge 0$, вектор $z \in \mathbb{R}^n$ и число $\mu \ge 0$, для которых хотя бы одно из неравенств (2.14) не выполнено. Покажем, что управление $v(t,z) = \psi(z)$ гарантирует второму игроку то, что при любом управлении первого игрока, стесненном ограничениями (1.2) и (1.4), любое реализовавшееся на отрезке $[\theta, q_i]$ движение с начальным условием $z(\theta) = z$, $\mu(\theta) = \mu$ в момент времени q_i не удовлетворяет неравенству (4.4).

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$, $i = 2j+1$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ таковы, что хотя бы одно из неравенств (4.1) и (4.2) не выполнено. Если не выполнено второе неравенство, то не выполнено неравенство

$$\mu(q_i) \ge \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.10}$$

Поэтому неравенство (4.4) при $z = z(q_i)$ и $\mu = \mu(q_i)$ не будет выполнено.

Пусть не выполнено неравенство (4.1). Тогда, применяя лемму 1, получим неравенство

$$\|z(q_i)\| > m(\theta)\Big(\mu(q_i) - \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr\Big).$$

Отсюда и из неравенства $m(\theta) \ge m(q_i)$ следует, что если неравенство (4.10) выполнено, то неравенство (4.4) при $z = z(q_i)$ и $\mu = \mu(q_i)$ не выполнено.

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$, $i = 2j$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ таковы, что неравенство (4.4) не выполнено. В работе [15, лемма 7.3, с. 39–41] показано, что

$$\int\limits_{\theta}^{q_i} \frac{b(r) - a(r)}{m(r)} dr = \sup_{\omega} \sum_{s=0}^{l} \frac{1}{m(t_s)} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (b(r) - a(r))dr,$$

где ω — произвольный набор чисел $\theta = t_0 < t_1 < \ldots < t_{l+1} = q_i$. Поэтому существует такой набор чисел, что при $f = 0$ выполнено неравенство

$$\|z(t_f)\| > m(t_f)(\mu(t_f) - B_f). \tag{4.11}$$

Здесь при $f = \overline{0, l}$ обозначено

$$B_f = \sum_{s=f}^{l} \frac{1}{m(t_s)} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} (b(r) - a(r))dr + \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.12}$$

Пусть неравенство (4.11) выполнено при некотором $0 \le f \le l$. Покажем, что оно выполнено при $f+1$. Если $\mu(t_{f+1}) < B_{f+1}$, то неравенство (4.11) выполнено при $f+1$.

Пусть $\mu(t_{f+1}) \ge B_{f+1}$. Применяя лемму 1, из неравенств (3.2) и (4.11) получим, что

$$\|z(t_{f+1})\| > m(t_f)(\mu(t_{f+1}) - B_f) + \int\limits_{t_f}^{t_{f+1}} (b(r) - a(r))dr.$$

Отсюда и из формулы (4.12) следует, что

$$\|z(t_{f+1})\| > m(t_f)(\mu(t_{f+1}) - B_{f+1}) \geq m(t_{f+1})(\mu(t_{f+1} - B_{f+1}).$$

Положим в (4.11) $f = l + 1$. Получим, что неравенство (4.4) при $z = z(q_i)$ и $\mu = \mu(q_i)$ не выполнено.

При $i = 0$ получим неравенство $\|z(q_0)\| > \mu(q_0)m(q_0)$. Согласно теореме 1 управление $v(t, z) = \psi(z)$ гарантирует невыполнение неравенства (1.7). □

5. Пример

Группа из N точек переменного состава преследует точку переменного состава. Их движение описывается уравнением Мещерского [1, с. 28]

$$\ddot{x}_i = g + \frac{\dot{m}_i(t)}{m_i(t)} u_i, \quad i = \overline{1, N+1}.$$

Здесь $x_i \in \mathbb{R}^n$; u_i — вектор относительной скорости отделяющихся частиц; $m_i(t)$ — масса в момент времени t; $g \in \mathbb{R}^n$ —постоянный вектор.

Ситуация, когда на i-ю точку переменного состава наряду с управляемой реактивной силой действует постоянная сила, равная $m_i(t)g$, возникает при рассмотрении ее движения, например, вблизи поверхности Луны, где отсутствует атмосферное сопротивление.

Заданы числа $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, N}$. Цель первого игрока, который управляет точками x_i, $i = \overline{1, N}$, заключается в том, чтобы осуществить неравенство

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i(p) - x_{N+1}(p) \Big\| \leq \varepsilon. \tag{5.1}$$

Здесь $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ — заданные числа. Цель второго игрока, который управляет точкой x_{N+1}, противоположна.

Считаем, что законы изменения реактивных масс $m_i(t)$ для $i = \overline{2, N+1}$ заданы. Управлениями являются относительные скорости u_i, ограниченные по норме. Для этих точек уравнения движения примут вид

$$\ddot{x}_i = g - f_i(t) u_i, \quad \|u_i\| \leq \beta_i, \quad i = \overline{2, N+1}. \tag{5.2}$$

Здесь функции $f_i(t) \geq 0$ и числа $\beta_i > 0$ —заданы.

Обозначим через M неизменяемую часть массы точки x_1. Положим $\phi(t) = \ln(M/m_1(t))$. Тогда $\dot{\phi}(t) = -\dot{m}_1(t)/m_1(t)$. Поскольку $m_1(t)$ убывает, то $\dot{\phi}(t) \geq 0$. Уравнение движения точки x_1 принимает вид

$$\ddot{x}_1 = g - \dot{\phi}(t) u_1. \tag{5.3}$$

Условие неперерасхода топлива $m_1(t) \geq M$ запишем неравенством

$$\mu(t) = \ln \frac{m_1(t)}{M} \geq 0. \tag{5.4}$$

Считаем, что наряду с непрерывным изменением массы $m_1(t)$ в отдельные моменты времени τ может происходить мгновенное отделение конечного количества массы $0 \leq m_1(\tau) - m_1(\tau + 0)$. Это приводит к мгновенному изменению скорости [1, с. 85–87]

$$\dot{x}_1(\tau + 0) = \dot{x}_1(\tau) + \ln \frac{m_1(\tau + 0)}{m_1(\tau)} u_1(\tau).$$

Учитывая обозначение (5.4), перепишем это равенство:

$$\dot{x}_1(\tau+0)=\dot{x}_1(\tau)-\Delta u_1(\tau),\quad \Delta=\mu(\tau)-\mu(\tau+0)\geq 0. \tag{5.5}$$

Считаем, что $\|u_1\|=\beta_1=\mathrm{const}$.

Введем новую переменную

$$z=(p-t)^2\Big(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i-1\Big)\frac{g}{2}-x_{N+1}-(p-t)\dot{x}_{N+1}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x_i+(p-t)\dot{x}_i). \tag{5.6}$$

Неравенство (5.1) будет выполнено тогда и только тогда, когда $\|z(p)\|\leq\varepsilon$. Далее, из уравнений движения (5.2) и (5.3) и из формулы (5.6) получим, что выполнены уравнения (1.1), в которых

$$c(t)=(p-t)|\lambda_1|\beta_1,\quad w=\frac{\mathrm{sign}\,\lambda_1}{\beta_1}u_1;\quad b(t)=(p-t)\beta_{N+1}f_{N+1}(t),\quad v=\frac{1}{\beta_{N+1}}u_{N+1};$$

$$a(t)=(p-t)a^*(t),\quad u=\sum_{i=2}^{N}\frac{\lambda_i f_i(t)}{a^*(t)}u_i,\quad \text{где } a^*(t)=\sum_{i=2}^{N}|\lambda_i|\beta_i f_i(t). \tag{5.7}$$

Из соотношений (5.5) следует формула для определения $z(\tau_i+0)$ в (1.6).

Из формул (5.7) получим, что управления игроков, решающие поставленные перед ними задачу, определяются как

$$u_1(t,x_1,\ldots,x_{N+1})=\beta_1\psi(z)\mathrm{sign}\,\lambda_1,\quad u_{N+1}(t,x_1,\ldots,x_{N+1})=\beta_{N+1}\psi(z),$$

$$\sum_{i=2}^{N}\frac{\lambda_i f_i(t)}{a^*(t)}u_i(t,x_1,\ldots,x_{N+1})=\psi(z).$$

Рассмотрим случай, когда тяги $f_i(t)=\mathrm{const}$, $i=\overline{2,N+1}$. В этом случае из (5.7) получим, что

$$c(t)=(p-t)c,\quad b(t)=(p-t)b,\quad a(t)=(p-t)a, \tag{5.8}$$

где постоянные $c>0$, $b>0$, $a>0$. Будем считать, что $b>a$. Тогда из (2.1) и (2.2) получим, что

$$m(t)=(p-t)c,\quad q_0=p-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{b-a}}. \tag{5.9}$$

Отметим, что функции (5.8) и (5.9) удовлетворяют условиям, сформулированным в предположениях 1–3.

Считаем, что начальный момент $t_0=0$. Тогда если $p\leq\sqrt{2\varepsilon/(b-a)}$, то $q_0\leq t_0$. В этом случае условия (2.3) примут вид $\|z(0)\|\leq pc\mu(0)+\varepsilon-(b-a)p^2/2$. Если $\|z(0)\|\leq\varepsilon-(b-a)p^2/2$, то первый игрок выбирает $\Delta_0=0$ и $\phi_0(t)=0$ при $0\leq t\leq p$. Если $\|z(0)\|>\varepsilon-(b-a)p^2/2$, то первый игрок выбирает

$$\Delta_0=\frac{\|z(0)\|-\varepsilon+(b-a)p^2/2}{pc}\quad \text{и}\quad \phi_0(t)=0 \text{ при } 0\leq t\leq p.$$

Пусть $p>\sqrt{2\varepsilon/(b-a)}$. Тогда из формул (2.11), (5.8) и (5.9) получим, что

$$\eta(t)=\frac{b-a}{c},\quad \xi(t)=0 \text{ при } t<p-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{b-a}}.$$

Поэтому условия (2.14) примут вид

$$\|z(0)\|\leq pc\Big(\mu(0)-\frac{(b-a)p-\sqrt{2\varepsilon(b-a)}}{c}\Big),\quad \mu(0)\geq\frac{(b-a)p-\sqrt{2\varepsilon(b-a)}}{c}.$$

Из формул (4.8) следует, что первый игрок выбирает

$$\Delta_0=\frac{\|z(0)\|}{pc} \text{ и } \dot{\phi}(t)=\frac{b-a}{c} \text{ при } 0\leq t\leq p-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{b-a}}.$$

Стало быть, первая точка движется с постоянной тягой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. **Красовский Н.Н.** Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
3. **Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е.** О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т 2, № 5. С. 587–599.
5. **Пожарицкий Г.К.** Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 579–589.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Серов В.П., Ченцов А.Г.** О программной линейной игровой задаче наведения при ограничении на импульс управляемой силы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 61–74.
8. **Кумков С.И., Пацко В.С.** Информационное множество в задаче импульсного управления // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 195–206.
9. **Петров Н.Н.** Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Изв-я РАН, Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
10. **Котлячкова Е.В.** К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий // Изв-я Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 1, № 45. С. 106–113.
11. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 212–224.
12. **Белоусов А.А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Докл. НАН Украины. 2013. № 11. С. 37–42.
13. **Тухтасинов М.** Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 273–282.
14. **Ухоботов В.И.** Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 355–362.
15. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
16. **Ухоботов В.И., Зайцева О.В.** Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16, № 1. С. 186–198.
17. **Aubin J.-P., Seube N.** Conditional viability for impulse differential games // Annals of Operations Research. 2005. Vol. 137, no. 1. P. 269–297. doi: 10.1109/CDC.2002.1184364.
18. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
19. **Ухоботов В.И.** Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным временем // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. Математика, механика. 1996. Вып. 1. С. 178–184.
20. **Ухоботов В.И.** Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 4. С. 590–598.
21. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Поступила 31.08.2017

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

Изместьев Игорь Вячеславович
младший науч. сотрудник
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: j748e8@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem.* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
2. Krasovskii N.N. On a problem of tracing. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 1, pp. 363–377.
3. Krasovskii N.N., Repin Yu.M., Tret'yakov V.E. Some game situations in theory of control systems. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1965, no. 4, pp. 3–23 (in Russian)
4. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. On a pursuit problem in the case of restrictions on the impulses of control forces. *Diff. Uravn.*, 1966, vol. 2, pp. 587–599 (in Russian).
5. Pozharitskii G.K. Game problem of impulse encounter with an opponent limited in energy. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 4, pp. 555–565.
6. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter–evasion differential game with constraints on the momenta of players' controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 376–385. doi: 10.1016/0021-8928(75)90002-7 .
7. Serov V.P., Chentsov A.G. On a programmed linear game-theoretic guidance problem with constraints on the control force impulse. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 5, part 1, pp. 755–768.
8. Kumkov S.I., Patsko V.S. Information sets in the pulse control problem. *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 7, part 2, pp. 1224–1234.
9. Petrov N.N. A problem of group pursuit in the class of impulse strategies of pursuers. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, no. 2, pp. 199–205. doi: 10.1134/S106423070902004X .
10. Kotlyachkova E.V. About non-stationary problem of simple pursuit in the class of impulse strategies. *Izv. IMI UdGU*, 2015, no. 1(45), pp. 106–113.
11. Chikrii A.A., Matichin I.I. Linear differential games with impulse control of players. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, suppl. 1, pp. S68–S81.
12. Belousov A.A. Differential games under integral constraints with impulse controls. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2013, no. 11, pp. 37–42.
13. Tukhtasinov M. A linear differential game of pursuit with impulse and integrally constrained controls of the players. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 273–282 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282 .
14. Ukhobotov V.I. A linear differential game with constraints imposed on the control impulses. *J. Appl. Math. Mech.*, 1988, vol. 52, no. 3, pp. 277–283. doi: 10.1016/0021-8928(88)90078-0 .
15. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami.* [Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University Publ., 2005, 124 p. ISBN: 5-7271-0725-3 .
16. Ukhobotov V.I., Zaitseva O.V. A linear problem of pulse encounter at a given time under interference. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 215–228. doi: 10.1134/S0081543811020167 .
17. Aubin J.-P., Seube N. Conditional viability for impulse differential games. *Annals of Operations Research*, 2005, vol. 137, no. 1, pp. 269–297. doi: 10.1109/CDC.2002.1184364 .
18. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815 .
19. Ukhobotov V.I. Synthesis of a control in differential games of one type with fixed time. *Vestnik Chelyabinsk. Univ. Ser. 3 Mat. Mekh.*, 1996, no. 1(3), pp. 178–184 (in Russian).
20. Ukhobotov V.I. On a class of linear differential games with impulse controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1974, vol. 38, no. 4, pp. 550–557.
21. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis* (*International monographs on advanced mathematics and physics*). Delhi, Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501 . Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza.* Moscow, Nauka Publ., 1965, 520 p.

The paper was received by the Editorial Office on August 31, 2017.

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

Igor' Vyacheslavovich Izmest'ev, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: j748e8@gmail.com .