ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 515.126.83

ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЗАМКНУТЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

А. А. Толстоногов

Рассматривается пространство непрерывных многозначных отображений, определенных на локально компактном пространстве $\mathcal{T}$ со счетной базой. Значениями этих отображений являются замкнутые, не обязательно ограниченные множества из метрического пространства $(X, d(\cdot))$, в котором замкнутые шары являются компактами. Пространство $(X, d(\cdot))$ локально компактно и сепарабельно. Пусть Y — счетное плотное множество из X. Расстояние $\rho(A, B)$ между множествами A, B из семейства $CL(X)$ всех непустых, замкнутых подмножеств из X определяется как

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|d(y_i, A) - d(y_i, B)|}{1 + |d(y_i, A) - d(y_i, B)|},$$

где $d(y_i, A)$ — расстояние от точки $y_i \in Y$ до множества A. Это расстояние не зависит от выбора множества Y, и функция $\rho(A, B)$ является метрикой на пространстве $CL(X)$. Сходимость последовательности множеств $A_n, n \geq 1$, из метрического пространства $(CL(X), \rho(\cdot))$ эквивалентна сходимости последовательности $A_n, n \geq 1$, по Куратовскому. Доказаны полнота и сепарабельность метрического пространства $(CL(X), \rho(\cdot))$ и даны необходимые и достаточные условия компактности множеств в этом пространстве. Пространство $C(\mathcal{T}, CL(X))$ всех непрерывных отображений из $\mathcal{T}$ в $(CL(X), \rho(\cdot))$ наделено топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathcal{T}$. Доказаны полнота, сепарабельность пространства $C(\mathcal{T}, CL(X))$ и даны необходимые и достаточные условия компактности множеств в пространстве $C(\mathcal{T}, CL(X))$. Эти результаты переформулированы для пространства $C(T, CCL(X))$, где $T = [0, 1]$, X — конечномерное евклидово пространство и $CCL(X)$ — пространство всех непустых, замкнутых выпуклых множеств из X с метрикой $\rho(\cdot)$. Это пространство играет большую роль при изучении процессов выметания. Приведен контрпример, показывающий существенность предположения компактности замкнутых шаров из X.

Ключевые слова: неграниченные множества, сходимость по Куратовскому, компактность.

A. A. Tolstonogov. Space of continuous set-valued mappings with closed unbounded values.

We consider a space of continuous multivalued mappings defined on a locally compact space $\mathcal{T}$ with countable base. Values of these mappings are closed not necessarily bounded sets from a metric space $(X, d(\cdot))$ in which closed balls are compact. The space $(X, d(\cdot))$ is locally compact and separable. Let Y be a dense countable set from X. The distance $\rho(A, B)$ between sets A and B from the family $CL(X)$ of all nonempty closed subsets of X is defined as

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|d(y_i, A) - d(y_i, B)|}{1 + |d(y_i, A) - d(y_i, B)|},$$

where $d(y_i, A)$ is the distance from a point $y_i \in Y$ to the set A. This distance is independent of the choice of the set Y, and the function $\rho(A, B)$ is a metric on the space $CL(X)$. The convergence of a sequence of sets A_n, $n \geq 1$, from the metric space $(CL(X), \rho(\cdot))$ is equivalent to the Kuratowski convergence of this sequence. We prove the completeness and separability of the space $(CL(X), \rho(\cdot))$ and give necessary and sufficient conditions for the compactness of sets in this space. The space $C(\mathcal{T}, CL(X))$ of all continuous mappings from $\mathcal{T}$ to $(CL(X), \rho(\cdot))$ is endowed with the topology of uniform convergence on compact sets from $\mathcal{T}$. We prove the completeness and separability of the space $C(\mathcal{T}, CL(X))$ and give necessary and sufficient conditions for the compactness of sets in this space. These results are reformulated for the space $C(T, CCL(X))$, where $T = [0, 1]$, X is a finite-dimensional Euclidean space, and $CCL(X)$ is the space of all nonempty closed convex sets from X with the metric $\rho(\cdot)$. This space plays a crucial role in the study of sweeping processes. A counterexample showing the significance of the assumption of the compactness of closed balls from X is given.

Keywords: unbounded sets, Kuratowski convergence, compactness.

MSC: 58C06

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-200-208

1. Введение

Пусть $(X, d(\cdot))$ — метрическое пространство, в котором замкнутые шары компактны. Очевидно, что X является локально компактным и сепарабельным. Примером пространства X является конечномерное пространство. Обозначим через $CL(X)$ совокупность всех непустых, замкнутых множеств из X. Пусть $\{y_i, i \geq 1\} \subset X$ — счетное плотное множество. Для $A, B \in CL(X)$ положим

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|d(y_i, A) - d(y_i, B)|}{1 + |d(y_i, A) - d(y_i, B)|}, \tag{1.1}$$

где $d(y_i, A)$ — расстояние от точки y_i до множества A. Функция $\rho(\cdot, \cdot)$, определенная равенством (1.1), является метрикой на пространстве $CL(X)$. В дальнейшем считаем, что пространство $CL(X)$ наделено метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$. Мы доказываем полноту, сепарабельность пространства $CL(X)$ и даем необходимые и достаточные условия компактности множеств в этом пространстве.

Пусть T — локально компактное пространство со счетной базой. Примером такого пространства является числовая прямая $\mathbb{R}$. Обозначим через $C_c(T, CL(X))$ пространство всех непрерывных отображений из T в $CL(X)$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из T. Для этого пространства мы доказываем полноту, сепарабельность и формулируем необходимые и достаточные условия компактности множеств в $C_c(T, CL(X))$.

Дана конкретизация полученных результатов к пространствам $CL(E)$, $CCL(E)$ и $C_c(T, CL(E))$, $C_c(T, CCL(E))$, где E — конечномерное евклидово пространство, $CCL(E)$ — совокупность всех непустых, выпуклых и замкнутых подмножеств из E, а $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой.

Изучение вопросов, затронутых в статье, не только представляет самостоятельный интерес, но и вызвано потребностями исследования управляемых процессов выметания (sweeping process) [1; 2].

Пространству всех замкнутых подмножеств 2^X, включая пустое множество, топологического пространства X и различным топологиям на нем посвящено огромное количество работ. Наиболее распространенные топологии на этом пространстве и его свойства приведены в [3]. Пространство непустых замкнутых подмножеств $CL(X)$ топологического пространства X обычно рассматривают как подмножество пространства 2^X с индуцированной топологией. Но, как правило, пространство $CL(X)$ не наследует, кроме, быть может, сепарабельности, основных свойств пространства 2^X. Пространству $CL(X)$ подмножеств из метрического пространства X посвящено ограниченное число исследований. Среди последних следует отметить работы [4; 5], в которых изучались вопросы полноты и сепарабельности этого пространства при наделении его соответствующей метрикой. В настоящей работе дается полное изложение результатов, анонсированных в публикации [6].

2. Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты

В этом разделе, если не оговорено противное, $(X, d(\cdot))$ — сепарабельное метрическое пространство, $X_s \subset X$ — счетное плотное множество с элементами y_i, $i \geq 1$, $CL(X)$ — совокупность всех непустых замкнутых множеств из X. Пространство $CL(X)$ наделено метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, определенной по формуле (1.1).

Пусть $C(X)$ — пространство непрерывных числовых функций. Через $C_p(X)$, $C_{ps}(X)$ и $C_c(X)$ мы обозначаем пространство $C(X)$, наделенное топологией поточечной сходимости, топологией поточечной сходимости на счетном плотном множестве X_s и топологией равномерной сходимости на компактах из X. Функцию $f \in C(X)$ будем называть *функцией расстояния*, если существует элемент $A \in CL(X)$ такой, что $f(x) = d(x, A)$, $x \in X$, где $d(x, A)$ —

расстояние от точки x до множества A. Совокупность всех функций расстояния мы будем обозначать через $Cd(X)$. Если T — локально компактное пространство со счетной базой, то через $C(T, CL(X))$ мы будем обозначать пространство всех непрерывных функций из T в $CL(X)$. Это пространство, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из T, мы обозначаем через $C_c(T, CL(X))$. Если T — компакт, то для пространства $C_c(T, CL(X))$ мы используем обозначение $C(T, CL(X))$. Так как для любых $u, v \in X$ и любого $A \in CL(X)$ имеет место неравенство

$$|d(v, A) - d(u, A)| \leq d(v, u), \tag{2.1}$$

то множество $Cd(X)$ функций расстояния является равностепенно непрерывным подмножеством пространства $C(X)$. Поскольку на каждом равностепенно непрерывном множестве топологии пространств $C_p(X)$, $C_{ps}(X)$ и $C_c(X)$ совпадают [7, гл. X, § 2, п. 4], то на множестве $Cd(X)$, не оговаривая специально, мы будем рассматривать любую из этих топологий. Поэтому отображение Γ из T в $CL(X)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда функция $t \to d(x, \Gamma(t))$ непрерывна для любого $x \in X$.

Через $\operatorname{comp} X$ мы будем обозначать пространство всех непустых, компактных подмножеств из X, наделенное метрикой Хаусдорфа $\operatorname{Dist}(\cdot, \cdot)$.

Если X — нормированное пространство, то $\operatorname{conv} X$ — совокупность всех непустых, выпуклых, компактных подмножеств из X с метрикой Хаусдорфа. Пространство всех непрерывных отображений из T в $\operatorname{comp} X$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из T, мы обозначаем как $C_c(T, \operatorname{comp} X)$.

Нижний $\underset{n\to\infty}{Li} A_n$ и верхний $\underset{n\to\infty}{Ls} A_n$ пределы последовательности множеств $A_n \subset X$, $n \geq 1$, определяются следующим образом [8]:

$$\underset{n\to\infty}{Li} A_n = \{x \in X;\ x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n \in A_n,\ n \geq 1\},$$

$$\underset{n\to\infty}{Ls} A_n = \{x \in X;\ x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k},\ x_{n_k} \in A_{n_k},\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}.$$

Ясно, что $\underset{n\to\infty}{Li} A_n \subset \underset{n\to\infty}{Ls} A_n$. Если $\underset{n\to\infty}{Li} A_n = \underset{n\to\infty}{Ls} A_n = A$, то говорят, что последовательность множеств $A_n \subset X$, $n \geq 1$, сходится к множеству A в смысле Куратовского. Известно, что A является замкнутым множеством [8].

3. Пространство непустых замкнутых множеств

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, X — метрическое пространство, в котором замкнутые шары являются компактами. Пусть $\theta \in X$ — фиксированный элемент. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\theta \in X_s$.

Теорема 3.1. *Для пространства $CL(X)$, наделенного метрикой* (1.1)*, справедливы следующие утверждения*:

1) *последовательность $A_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, сходится к $A \in CL(X)$ в метрике* (1.1) *тогда и только тогда, когда последовательность A_n, $n \geq 1$, сходится к A по Куратовскому*;

2) *пространство $CL(X)$ является полным*;

3) *пространство $CL(X)$ является сепарабельным*;

4) *множество $\mathcal{H} \subset CL(X)$ является относительно компактным тогда и только тогда, когда*

$$\sup\{d(\theta, \Gamma);\ \Gamma \in \mathcal{H}\} < \infty. \tag{3.1}$$

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из теоремы 2.3 в [9]. Докажем полноту пространства $CL(X)$. Пусть $\Gamma_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, — фундаментальная последовательность. Тогда из (1.1) вытекает, что последовательность $d(y_i, \Gamma_n)$, $n \geq 1$, фундаментальна для каждого y_i, $i \geq 1$, из счетного плотного множества $X_s \subset X$. Поэтому последовательность функций

$f_n(x) = d(x, \Gamma_n),\ n \geq 1$, будет фундаментальной для каждого $x \in X$ и, следовательно, сходится в топологии пространства $C_c(X)$ к некоторой функции $f \in C(X)$. Покажем, что $f \in Cd(X)$. Пусть точка $x \in X$ фиксирована и точки $z_n \in \Gamma_n,\ n \geq 1$, удовлетворяют равенству

$$f_n(x) = d(x, \Gamma_n) = d(x, z_n), \quad n \geq 1. \tag{3.2}$$

Из сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ и (3.2) вытекает, что последовательность $z_n,\ n \geq 1$, принадлежит некоторому замкнутому шару с центром в точке x. Поэтому последовательность $z_n,\ n \geq 1$, относительно компактна в X. Не нарушая общности, мы можем считать, что $z_n \to z,\ n \to \infty$. Так как $f_n(z_n) = 0,\ n \geq 1$, и $f_n(z_n) \to f(z)$, то $f(z) = 0$.

Положим

$$\Gamma = \{v \in X;\ f(v) = 0\}.$$

Так как $f(z) = 0$ и функция $f \in C(X)$, то множество $\Gamma \in CL(X)$. Покажем, что

$$f(x) = d(x, \Gamma). \tag{3.3}$$

Из (3.2) вытекает, что $f(x) = d(x, z)$. Так как $z \in \Gamma$, то

$$d(x, \Gamma) \leq f(x). \tag{3.4}$$

Пусть $v \in \Gamma,\ d(x, \Gamma) = d(x, v)$ и $v_n \in \Gamma_n,\ n \geq 1$, таковы, что $d(v, \Gamma_n) = d(v, v_n)$. Тогда

$$f_n(x) = d(x, \Gamma_n) \leq d(x, v_n) \leq d(x, v) + d(v, v_n) = d(x, \Gamma) + f_n(v).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $f(v) = 0$, мы получим

$$f(x) \leq d(x, \Gamma).$$

Из этого неравенства и (3.4) вытекает равенство (3.3). Следовательно, последовательность $d(x, \Gamma_n),\ n \geq 1$, сходится к $d(x, \Gamma)$ в топологии пространства $C_c(X)$. Поэтому последовательность $\Gamma_n \in CL(X),\ n \geq 1$, сходится к $\Gamma \in CL(X)$ в пространстве $CL(X)$. Тем самым утверждение 2) теоремы доказано.

Пусть $\operatorname{comp} X_s$ — совокупность всех непустых, конечных подмножеств из X_s. Хорошо известно, что $\operatorname{comp} X_s$ является счетным плотным подмножеством пространства $\operatorname{comp} X$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $A \in CL(X)$. Пусть номер $k \geq 1$ такой, что $\sum_{i=k+1}^{\infty} 1/2^i \leq \varepsilon/2$. Выберем точки $v_i \in A,\ i = 1, \ldots, k$, так, чтобы имело место равенство

$$d(y_i, v_i) = d(y_i, A), \quad y_i \in X_s, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Положим $V = \{v_i;\ i = 1, \ldots, k\}$. Очевидно, что $d(y_i, A) = d(y_i, V),\ i = 1, \ldots, k$. Тогда

$$\rho(A, V) \leq \varepsilon/2. \tag{3.5}$$

Поскольку $V \in \operatorname{comp} X$, то существует элемент $W \in \operatorname{comp} X_s$ такой, что

$$\operatorname{Dist}(V, W) \leq \varepsilon/2. \tag{3.6}$$

Воспользовавшись хорошо известным равенством $\operatorname{Dist}(V, W) = \sup\limits_{x \in X} |d(x, V) - d(x, W)|$ и неравенствами (3.5), (3.6), мы получим

$$\rho(A, W) \leq \rho(A, V) + \rho(V, W) \leq \rho(A, V) + \operatorname{Dist}(V, W) \leq \varepsilon.$$

Тем самым утверждение 3) теоремы доказано.

Из утверждения 2) нашей теоремы вытекает, что $Cd(X)$ является замкнутым подмножеством пространства $C_c(X)$. Так как любое подмножество пространства $Cd(X)$ является равностепенно непрерывным, то согласно следствию 3 [7, гл. X, § 2, п. 5] множество функций $\{d(x,\Gamma); \Gamma \in \mathcal{H}\} \subset C_c(X)$ является относительно компактным подмножеством пространства $C_c(X)$ тогда и только тогда, когда $\sup\{d(x,\Gamma);\ \Gamma \in \mathcal{H}\} < \infty\ \forall x \in X$. Так как $d(\theta,\Gamma) \le d(x,\Gamma) + d(\theta,x)\ \forall x \in X$ и пространство $CL(X)$ гомеоморфно пространству $Cd(X)$, наделенному топологией поточечной сходимости на счетном плотном множестве X_s, то утверждение 4) доказано. Тем самым теорема доказана.

Следствие 3.1. *Множество $\mathcal{H} \subset CL(X)$ является компактом тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (3.1) *и для любого $i \ge 1$ множество*

$$R_i = \{r_i;\ r_i = d(y_i,\Gamma),\ \Gamma \in \mathcal{H}\}, \quad y_i \in X_s,$$

замкнуто в $\mathbb{R}$.

Так как множество $\mathcal{F} \subset Cd(X)$ замкнуто в $Cd(X)$ с топологией равномерной сходимости на компактах из X тогда и только тогда, когда множество $\{f(y_i);\ f \in \mathcal{F}\}$, $y_i \in X_s$ замкнуто в $\mathbb{R}$, то следствие вытекает из теоремы 3.1.

4. Пространство непрерывных многозначных отображений с замкнутыми значениями

В этом разделе T — локально компактное пространство со счетной базой. Пусть $G \subset C(T, CL(X))$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{R}_i = \{d(y_i,\Gamma)(\cdot),\ \Gamma \in G\} \subset C(T,\mathbb{R}), \quad y_i \in X_s, \tag{4.1}$$

где $d(y_i,\Gamma)(t) = d(y_i,\Gamma(t))$.

Лемма 4.1. *Множество $G \subset C(T, CL(X))$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $i \ge 1$ семейство* (4.1) *числовых функций равностепенно непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $i \ge 1$ и $\delta > 0$. Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2^i\varepsilon/(1 - 2^i\varepsilon) = 0$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$2^i\varepsilon/(1 - 2^i\varepsilon) < \delta. \tag{4.2}$$

Пусть $G \subset C(T, CL(X))$ равностепенно непрерывно и $t \in T$. Тогда существует окрестность $V(t)$ точки t такая, что для любого $\Gamma \in G$

$$\rho(\Gamma(t),\Gamma(\tau)) < \varepsilon, \quad \tau \in V(t).$$

Из этого неравенства, (1.1) и (4.2) вытекает, что для любого $\Gamma \in G$

$$|d(y_i,\Gamma(t)) - d(y_i,\Gamma(\tau))| \le 2^i\varepsilon/(1 - 2^i\varepsilon) < \delta,$$

$\tau \in V(t)$. Тем самым семейство $\mathcal{R}_i$ (4.1) равностепенно непрерывно в точке $t \in T$. Поскольку точка $t \in T$ произвольна, то семейство $\mathcal{R}_i$ равностепенно непрерывно.

Докажем обратное. Пусть $t \in T$, $\varepsilon > 0$ произвольны и для любого $i \ge 1$ семейство $\mathcal{R}_i$ равностепенно непрерывно. Выберем $k \ge 1$ так, чтобы

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3}$$

Так как семейство $\mathcal{R}_i,\ i \geq 1$, равностепенно непрерывно, то существует окрестность $V(t)$ точки t такая, что для любых $\Gamma \in G,\ i = 1, \dots, k$, будет иметь место неравенство

$$|d(y_i, \Gamma(t)) - d(y_i, \Gamma(\tau))| \leq \varepsilon/2, \quad \tau \in V(t). \tag{4.4}$$

Теперь из (1.1) и (4.3), (4.4) непосредственно вытекает, что

$$\rho(\Gamma(t), \Gamma(\tau)) < \varepsilon, \quad \Gamma \in G, \quad \tau \in V(t).$$

Так как $t \in T$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то это неравенство означает, что семейство $G \subset C(T, CL(X))$ равностепенно непрерывно. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пространство $C_c(T, CL(X))$ является метризуемым, полным и сепарабельным. Множество $G \subset C_c(T, CL(X))$ относительно компактно тогда и только тогда, когда*

1) *для каждого $i \geq 1$ семейство $\mathcal{R}_i$* (4.1) *равностепенно непрерывно*;
2) *для каждого $t \in T$*

$$\sup\{d(\theta, \Gamma(t));\ \Gamma \in G\} < \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Из следствия к предложению 16 [7, гл. IX, § 2] вытекает, что пространство T метризуемо и счетно в бесконечности [10], т. е. является счетным объединением компактных множеств. Поскольку метризуемый компакт является сепарабельным, то пространство T сепарабельно. Согласно предложению 15 [10, гл. 1, § 9] существует последовательность $K_n,\ n \geq 1$, относительно компактных открытых множеств, образующих покрытие пространства T и таких, что $\overline{K}_n \subset K_{n+1},\ n \geq 1$, где $\overline{K}_n$ означает замыкание K_n. Более того, для любого компактного множества $K \subset T$ существует $n \geq 1$ такое, что $K \subset K_n$. Поэтому топология пространства $C_c(T, CL(X))$ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах $\overline{K}_n,\ n \geq 1$. Последняя в соответствии с теоремой 1 [11, § 44, VII] метризуема с помощью метрики

$$\operatorname{dist}(\Gamma, F) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\operatorname{dist}_i(\Gamma, F)}{1 + \operatorname{dist}_i(\Gamma, F)},$$

где $\operatorname{dist}_i(\Gamma, F) = \sup_{t \in \overline{K}_i} \rho(F(t), \Gamma(t)),\ F, \Gamma \in C(T, CL(X))$. Так как пространство $CL(X)$ является полным и сепарабельным, то полнота и сепарабельность пространства $C_c(T, CL(X))$ вытекает из теоремы 3 [11, § 44, VII].

Критерий относительной компактности множества $G \subset C_c(T, CL(X))$ вытекает из утверждения 4) теоремы 3.1, леммы 4.1 нашей работы и следствия 3 в [7, гл. X, § 2, п. 5]. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Множество $G \subset C_c(T, CL(X))$ компактно тогда и только тогда, когда*

1) *для каждого $i \geq 1$ семейство $\mathcal{R}_i$* (4.1) *равностепенно непрерывно*;
2) *имеет место неравенство* (4.5);
3) *для любого $i \geq 1$ множество*

$$\mathcal{R}_i(t) = \{d(y_i, \Gamma(t));\quad \Gamma \in G\}, \quad t \in T, \quad y_i \in X_s, \tag{4.6}$$

замкнуто в $\mathbb{R}$.

Так как на каждом равностепенно непрерывном множестве $G \subset C_c(T, CL(X))$ топология равномерной сходимости на компактах из T совпадает с топологией поточечной сходимости на T, то следствие вытекает из следствия 3.1 и теоремы 4.1.

Если пространство T дополнительно является связным, то критерий относительной компактности множества $G \subset C_c(T, CL(X))$ допускает уточнение.

Теорема 4.2. *Пусть T — локально компактное, связное пространство со счетной базой. Множество $G \subset C_c(T, CL(X))$ является относительно компактным тогда и только тогда, когда*

1) *для каждого $i \geq 1$ семейство $\mathcal{R}_i$ равностепенно непрерывно*;

2) *для фиксированного $s \in T$*

$$\sup\{d(\theta, \Gamma(s));\ \Gamma \in G\} < \infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что из (4.7) следует (4.5). Так как $\theta \in X_s$, то существуют открытые окрестности $V(t)$ точек $t \in T$ такие, что

$$|d(\theta, \Gamma(t)) - d(\theta, \Gamma(\tau))| < 1, \quad \Gamma \in G, \quad \tau \in V(t). \tag{4.8}$$

Поскольку $\{V_i(t),\ t \in T\}$ — открытое покрытие пространства T, то согласно теореме 8 [11, § 46, II] каждую пару точек (s, t), $t \in T$, можно соединить цепью со звеньями, принадлежащими этому покрытию, т. е. каждой паре (s, t) соответствует конечное число точек $t_1, \ldots, t_n$ таких, что

$$s \in V(t_1), \quad V(t_k) \cap V(t_{k+1}) \neq \emptyset, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad t \in V(t_n). \tag{4.9}$$

Теперь неравенство (4.5) вытекает из (4.7)–(4.9). Теорема доказана.

Если E — конечномерное евклидово пространство, то мы можем рассмотреть пространства $CCL(E)$ и $C(T, CCL(E))$. Так как $CCL(E)$ является замкнутым подмножеством пространства $CL(E)$ с метрикой (1.1), то все утверждения данного раздела, касающиеся пространств $CL(X)$ и $C_c(T, CL(X))$, сохраняют свою силу для пространств $CCL(E)$ и $C_c(T, CCL(E))$. В частности, счетным плотным подмножеством пространства $CCL(E)$ будут выпуклые оболочки элементов из счетного плотного множества пространства $CL(E)$. Если $T = \mathbb{R}$, то для пространств $CL(E)$, $CCL(E)$ в качестве θ мы можем взять нулевой элемент пространства E, а в качестве элемента $s \in T$ в (4.7) — элемент $s = 0$.

Комментарии. Как уже говорилось, метрическое пространство, в котором замкнутые шары компактны, является локально компактным и сепарабельным. Пусть X — локально компактное, сепарабельное, метрическое пространство, $C, C_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, и для каждого $x \in X$ последовательность $d(x, C_n)$, $n \geq 1$, сходится к $d(x, C)$. Тогда последовательность C_n, $n \geq 1$, сходится к C в смысле Куратовского [9]. Отметим, что для произвольного локально компактного, сепарабельного, метрического пространства X обратное утверждение неверно.

Пример [12]. Пусть $X = (0, 2)$ — интервал числовой прямой $\mathbb{R}$, рассматриваемый как самостоятельное пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$. Тогда X — локально компактное, сепарабельное, метрическое пространство, в котором не всякий замкнутый шар является компактом.

Пусть $C_n = (0, 1] \cup \{2 - 1/n\}$. Ясно, что последовательность множеств $C_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, сходится в смысле Куратовского к множеству $C = (0, 1]$ из пространства $CL(X)$. Однако для точки $x = 7/4 \in X$ мы имеем

$$\lim_{n \to \infty} d(7/4, C_n) = 1/4 < 3/4 = d(7/4, C).$$

Этот пример показывает, что предложение 1.2.5 в [13] неверно. В нем утверждается, что для произвольного локально компактного, сепарабельного, метрического пространства X для сходимости последовательности $C_n \in 2^X$, $n \geq 1$, в смысле Куратовского, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ последовательность $d(x, C_n)$ сходилась в $\overline{R}_+ = [0, +\infty]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Толстоногов А.А.** Исследование нового класса управляемых систем // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 1. С. 26–28.
2. **Tolstonogov A.A.** Control sweeping processes // J. Convex Analysis. 2016. Vol. 23, no. 4. P. 1099–1123.
3. **Shouchuan Hu, Papageorgiou N.S.** Handbook of multivalued analysis. Theory. Vol. 1. Dordrecht; Boston; London: Kluwer, 1997. 968 p. (Math. Its Appl., vol. 149).
4. **Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л.** Пространство clcv (R^n) с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и дифференциальные включения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 162–177.
5. **Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.** On multivalued maps with images in the space of closed subset of a metric space // Fixed Point Theory. Appl. 2013. Vol. 10. 21 p. doi: 10.1186/1687-1812-2013-10.
6. **Толстоногов А.А.** Компактность в пространстве многозначных отображений с замкнутыми значениями // Докл. АН. 2014. Т. 456, № 2. С. 146–149.
7. **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975. 408 p.
8. **Куратовский К.** Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
9. **Beer G.** Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets // Bull. Australian Math. Soc. 1987. Vol. 35, № 1. P. 81–96.
10. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 275 с.
11. **Куратовский К.** Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969. 624 с.
12. **Beer G.** On convergence of closed sets in a metric space and distance functions // Bull. Australian Math. Soc. 1985. Vol. 31. P. 421–432. doi: 10.1017/S0004972700009370.
13. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир. 1978. 320 с.

Толстоногов Александр Александрович

Поступила 25.09.2017

чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН),
г. Иркутск
e-mail: aatol@icc.ru

REFERENCES

1. Tolstonogov A.A. Investigation of a new class of control systems. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 178–180. doi: 10.1134/S1064562412020056.
2. Tolstonogov A.A. Control sweeping processes. *J. Convex Analysis*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 1099–1123.
3. Shouchuan Hu, Papageorgiou N.S. *Handbook of multivalued analysis. Theory. Vol. 1.* Ser. Math. Its Appl., vol. 149, Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 1997, 964 p. ISBN: 0792346823.
4. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space clcv(R^n) with the Hausdorff-Bebutov metric and differential inclusions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136. doi: 10.1134/S0081543811090094.
5. Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On multivalued maps with images in the space of closed subset of a metric space. *Fixed Point Theory. Appl.*, 2013, no. 10, 21 p. doi: 10.1186/1687-1812-2013-10.
6. Tolstonogov A.A. Compactness in the space of set-valued mappings with closed values. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 89, no. 3, pp. 293–295. doi: 10.1134/S1064562414030120.
7. Bourbaki N. *Éléments de Mathématique, Premièr partie, Livre III, volume Topologie Générale.* Paris: Hermann, 1960, 366 p. ISBN: 2903684002X. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Ispol'zovanie veshchestvennykh chisel v obshchei topologii. Funktsional'nye prostranstva. Svodka rezul'tatov.* Moscow, Nauka Publ., 1975, 408 p.
8. Kuratowski K. *Topology. Vol. I.* N Y, London: Acad. Press, 1966, 560 p. ISBN: 978-0-12-429201-7. Translated to Russian under the title *Topologiya. T. 1.* Moscow, Mir Publ., 1966, 594 p.
9. Beer G. Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bull. Australian Math. Soc.*, 1987, vol. 35, no. 1, pp. 81–96. doi: 10.1017/S000497270001306X.

10. Bourbaki N. *Eléments de mathématique, Fascicule II, Livre III, Topologie générale, Chap. 1, Structures topologiques, Chap. 2, structures uniformes*. Paris: Hermann, 1965, 255 p. ISBN(1971 ed.): 3-540-33936-1 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury.* Moscow, Nauka Publ., 1968, 275 p.
11. Kuratowski K. *Topology. Vol. II.* N Y, London: Acad. Press, 1968, 608 p. ISBN: 978-0-12-429202-4 . Translated to Russian under the title *Topologiya. T. 2.* Moscow, Mir Publ., 1969, 624 p.
12. Beer G. On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bull. Australian Math. Soc.*, 1985, vol. 31, pp. 421–432. doi: 10.1017/S0004972700009370 .
13. Matheron G. *Random sets and integral geometry.* New York: Wiley, 1975, 261 p. ISBN: 978-0-471-57621-1 . Translated to Russian under the title *Sluchainye mnozhestva i integral'naya geometriya.* Moscow, Mir Publ., 1978, 318 p.

The paper was received by the Editorial Office on September 25, 2017.

Aleksandr Aleksandrovich Tolstonogov, RAS Corresponding Member, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: aatol@icc.ru .