ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.935

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Л. И. Родина

Рассматриваются дифференциальные уравнения и управляемые системы с импульсным воздействием, зависящие от случайных параметров. Стохастическое поведение данных объектов выражается в том, что длины интервалов θ_k между моментами импульсов τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, являются случайными величинами и размеры импульсов также зависят от случайных воздействий. Основным объектом исследования выступает управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x, w_k, v_k),$$

зависящая от случайных параметров $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ и v_k, $k = 0, 1, \ldots$. На множестве Σ всех возможных последовательностей $\big((\theta_0, v_0), \ldots, (\theta_k, v_k), \ldots\big)$ определена вероятностная мера μ. В качестве допустимых управлений $u = u(t)$ берем всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^m$; вектор w_k также является управлением, влияющим на поведение системы в моменты времени τ_k. Рассматривается множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) : t \in [0, +\infty),\ x \in M(t)\big\}$, заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа. Основными результатами работы являются достаточные условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$, выполненные с вероятностью единица. Показано, что исследование устойчивости множества с помощью метода функций Ляпунова можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения соответствующего дифференциального уравнения. Также изучается асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, зависящих от случайных параметров. Получены условия, при которых решения уравнений обладают свойствами устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости, выполненными для всех значений случайного параметра и выполненными с вероятностью единица. Результаты работы проиллюстрированы на примерах вероятностной модели популяции, подверженной промыслу и модели конкуренции двух видов с импульсным воздействием.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения и управляемые системы со случайными параметрами, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.

L. I. Rodina. On asymptotic properties of solutions of control systems with random parameters.

Differential equations and control systems with impulse action and random parameters are studied. These objects are characterized by stochastic behavior: the lengths θ_k of the intervals between the times of the impulses τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, are random variables and the magnitudes of the impulses also depend on random actions. The basic object of research is the control system

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x, w_k, v_k),$$

which depends on random parameters $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ and v_k, $k = 0, 1, \ldots$. A probability measure μ is defined on the set Σ of all possible sequences $\big((\theta_0, v_0), \ldots, (\theta_k, v_k), \ldots\big)$. Admissible controls $u = u(t)$ are bounded measurable functions with values in a compact set $U \subset R^m$, and the vector w_k is also a control affecting the behavior of the system at the times τ_k. We consider the set $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) : t \in [0, +\infty),\ x \in M(t)\big\}$ defined by the function $t \mapsto M(t)$, which is continuous in the Hausdorff metric. The main result of the paper is sufficient conditions for the Lyapunov stability and asymptotic stability of the set $\mathfrak{M}$ with probability one. It is shown that the stability analysis of a set by means of the method of Lyapunov functions can be reduced to studying the stability of the zero solution of the corresponding differential equation. We also study the asymptotic behavior of solutions of differential equations with impulse action and random parameters. Conditions are obtained under which the solutions possess the Lyapunov stability and asymptotic stability for all values of the random parameter and with probability one. The results are illustrated by a probability model of a population subject to harvesting and by a model of competition of two kinds with impulse action.

Keywords: differential equations and control systems with random parameters, Lyapunov stability, asymptotic stability.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-189-199

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-а).

Введение

Исследуются дифференциальные уравнения и управляемые системы с импульсным воздействием, зависящие от случайных параметров. Стохастический характер данных оъектов проявляется в том, что длины интервалов между моментами импульсов τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, и размеры импульсного воздействия суть независимые случайные величины с заданными функциями распределения. Один из примеров таких объектов — уравнение с импульсами, моделирующее динамику популяции, подверженной промыслу; здесь предполагаем, что изменение размера популяции (равное размеру промысловых заготовок) в моменты τ_k, а также и сами эти моменты зависят от различных воздействий внешней среды, поэтому динамика популяции описывается уравнением со случайными параметрами. Другой пример — вероятностная модель, описывающая динамику популяций с типовой или возрастной структурой, в которой предполагается, что переход из одного типа или класса в другой носит скачкообразный характер и осуществляется в случайные моменты времени τ_k. Кроме моделей популяционной динамики, данными уравнениями и системами можно описать различные экономические модели; здесь случайными величинами могут являться размеры и моменты продаж товара; управляющее воздействие — это рекламное воздействие на покупателей. Отметим, что в детерминированном случае, когда моменты τ_k и величины импульсов фиксированы, данные модели описаны в работах [1–5], исследование вероятностных моделей начато в [6; 7].

В данной статье изучается асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений и управляемых систем со случайными параметрами, рассматриваются различные динамические режимы данных объектов. Получены условия, при которых решение дифференциального уравнения является устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым и устойчивым с вероятностью единица. Показано, что для управляемых систем при определенных условиях возникает ситуация, когда заданное множество $\mathfrak{M}$ устойчиво с вероятностью единица, но не является устойчивым в классическом смысле. Результаты работы проиллюстрированы на примерах вероятностной модели популяции, подверженной промыслу и модели конкуренции двух видов с импульсным воздействием.

1. Описание вероятностной модели

Рассматривается вероятностная модель, заданная управляемой системой со случайными параметрами
$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x, w_k, v_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{1.1}$$
где $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v_k \in \Omega_1$. В качестве допустимых управлений $u = u(t)$ берем всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^m$; вектор w_k также является управляющим воздействием, влияющим на поведение системы в моменты времени $t = \tau_k$ и принимает значения в компактном множестве $W \subset \mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функция $(t, x, u) \to f(t, x, u)$ непрерывна, для каждого $v_k \in \Omega_1$ функция $(x, w_k) \to g(x, w_k, v_k)$ также непрерывна и решения системы (1.1) непрерывны слева.

В модели (1.1) моменты τ_k, $k = 0, 1, \ldots$ являются моментами скачков для системы с импульсным воздействием; это могут быть моменты появления новой генерации для изолированной популяции или моменты промысловых заготовок для популяции, подверженной промыслу. Предполагаем, что длины $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ интервалов (τ_k, τ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$, являются независимыми случайными величинами со значениями в множестве $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0]$, где $0 < \alpha_0 \leqslant \beta_0 < +\infty$, и величина скачка g в момент τ_k зависит от случайного параметра $v_k \in \Omega_1$, поэтому все параметры принадлежат множеству $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$, причем любое из множеств Ω_0 или Ω_1 может содержать только один элемент. В частном случае, когда все множество Ω состоит из одного элемента, вероятностная модель совпадает с детерминированной, поэтому она является обобщением детерминированной модели. Дополнительно можно предполагать, что при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ функция f зависит от случайного параметра $\gamma_k \in \Omega_2$, тогда $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \Omega_2$; этот случай здесь не будем рассматривать, чтобы не усложнять обозначения.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ как прямое произведение вероятностных пространств $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ и $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$. Здесь Σ_0 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, где $\theta_k \in \Omega_0$, система множеств $\mathfrak{A}_0$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_0 \colon \theta_0 \in I_0, \dots, \theta_k \in I_k\}, \quad \text{где} \ \ I_i \doteq (t_i, s_i], \ \ i = 0, 1, \dots, k,$$

а вероятностная мера μ_0 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i, $i = 0, 1, \dots$, определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_0(I_i) = F(s_i) - F(t_i)$ с помощью функций распределения $F(t)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde{\mu}_0(E_k) = \widetilde{\mu}_0(I_0) \cdot \widetilde{\mu}_0(I_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}_0(I_k),$$

тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [8, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0)$ существует единственная вероятностная мера μ_0, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_0$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_0$.

Далее, пусть задано множество Ω_1 с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}_1$. Обозначим через Σ_1 множество последовательностей

$$\Sigma_1 \doteq \{v \colon v = (v_0, \dots, v_k, \dots),\ v_k \in \Omega_1\},$$

через $\mathfrak{A}_1$ обозначим наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{v \in \Sigma_1 \colon v_0 \in A_0, \dots, v_k \in A_k\}, \quad \text{где} \quad A_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1, \ i = 0, 1, \dots, k,$$

определим меру $\widetilde{\mu}_1(D_k) = \widetilde{\mu}_1(A_0)\widetilde{\mu}_1(A_1)\ldots\widetilde{\mu}_1(A_k)$ и меру μ_1 как продолжение меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$.

Отметим, что $\Sigma = \Sigma_0 \times \Sigma_1 = \{\sigma \colon \sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k, \dots)\}$, где $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega$. Зададим сигма-алгебру $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$ и меру $\mu = \mu_0 \times \mu_1$, которая является прямым произведением вероятностных мер μ_0 и μ_1. Это означает, что $\mu(A \times B) = \mu_0(A)\mu_1(B)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_0$, $B \in \mathfrak{A}_1$.

2. Асимптотические свойства решений уравнения со случайными параметрами

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, построенное в предыдущем разделе, и дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(t, z), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta z\big|_{t=\tau_k} &= \ell(z, v_k), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $(t, z, v_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega_1$. Предполагаем, что функция $(t, z) \to q(t, z)$ определена и непрерывна вместе с производной $q'_z(t, z)$ на множестве $(0, \infty) \times \mathbb{R}$; для каждого $v \in \Omega_1$ функция $z \to \ell(z, v)$ непрерывно дифференцируемая и функция $z \to \ell(z, v) + z$ неубывающая. Решения уравнения (2.2) предполагаем непрерывными слева.

Исследуются условия, при которых решения (2.2) обладают свойствами устойчивости по Ляпунову и асиптотической устойчивости, выполненными для всех значений случайного параметра и выполненными с вероятностью единица. Полученные результаты представляют самостоятельный интерес, а также служат для исследования поведения решений управляемой системы со случайными параметрами.

Уравнению (2.2) поставим в соответствие вспомогательное детерминированное уравнение

$$\begin{aligned} \dot z &= q(t,z), \quad t \neq k\theta, \\ \Delta z\big|_{t=k\theta} &= \ell(z,v), \quad k=0,1,\ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $(\theta,v) \in \Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$. Отметим, что уравнение (2.3) можно рассматривать как частный случай уравнения со случайными параметрами (2.2) при фиксированном значении $\sigma = ((\theta,v),(\theta,v),\ldots) \in \Sigma$.

Обозначим через $\varphi(t,z_0)$ решение уравнения $\dot z = q(t,z)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,z_0) = z_0$. Пусть $\omega = (\theta,v) \in \Omega$. Введем в рассмотрение функцию

$$H(\omega,z) = H(\theta,v,z) \doteq \ell\big(\varphi(\theta,z),v\big) + \varphi(\theta,z).$$

Отметим, что если для любого $z \in \mathbb{R}$ решение $\varphi(t,z)$ продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$, то для каждого $\omega \in \Omega$ функция $z \to H(\omega,z)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $H'_z(\omega,z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$; это следует из непрерывной дифференцируемости функции $z \to \ell(z,v)$ и теоремы о дифференцируемости решений уравнения $\dot z = q(t,z)$ по начальным условиям.

Пусть $z(t,\sigma,z_0)$ является решением уравнения (2.2), удовлетворяющим начальному условию $z(0,\sigma,z_0) = z_0$.

Определение 1. Решение $z(t,\sigma,z_*)$ уравнения (2.2) назовем *устойчивым по Ляпунову равномерно относительно множества* $\widetilde\Sigma \subseteq \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon,\widetilde\Sigma) > 0$, что для всякого $\sigma \in \widetilde\Sigma$ решение $z(t,\sigma,z_0)$ уравнения (2.2) такое, что $|z_0 - z_*| < \delta$, удовлетворяет неравенству $|z(t,\sigma,z_0) - z(t,\sigma,z_*)| < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2. Решение $z(t,\sigma,z_*)$ уравнения (2.2) назовем *асимптотически устойчивым равномерно относительно множества* $\widetilde\Sigma$, если оно устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $\widetilde\Sigma$ и существует $\Delta > 0$ такое, что для всякого $\sigma \in \widetilde\Sigma$ решение $z(t,\sigma,z_0)$ уравнения (2.2) такое, что $|z_0 - z_*| < \Delta$, удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} |z(t,\sigma,z_0) - z(t,\sigma,z_*)| = 0$.

Обозначим через $O_\Delta(z_*) = (z_* - \Delta, z_* + \Delta)$ окрестность точки z_* радиусом $\Delta > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что существует $z_* \in \mathbb{R}$ такое, что $q(t,z_*) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\ell(z_*,v) = 0$ для всех $v \in \Omega_1$. Тогда*

1. *Если найдется $\Delta > 0$ такое, что $\sup\limits_{\omega\in\Omega}\big|H'_z(\omega,z)\big| \leqslant 1$ для всех $z \in O_\Delta(z_*)$, то решение $z(t,\sigma,z_*) \equiv z_*$ уравнения (2.2) устойчиво по Ляпунову равномерно относительно Σ.*

2. *Если $\varlimsup\limits_{z\to z_*} \sup\limits_{\omega\in\Omega}\big|H'_z(\omega,z)\big| < 1$, то решение $z(t,\sigma,z_*) \equiv z_*$ асимптотически устойчиво равномерно относительно множества Σ.*

Доказательство. Если $q(t,z_*) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то уравнение $\dot z = q(t,z)$ имеет решение $\varphi(t,z_*) \equiv z_*$. Далее, поскольку $\ell(z_*,v) = 0$ для всех $v \in \Omega_1$, то $z(t,\sigma,z_*) \equiv z_*$ является решением уравнения (2.2) для любого $\sigma \in \Sigma$. Для каждого $\omega \in \Omega$ найдем

$$H(\omega,z_*) = H(\theta,v,z_*) \doteq \ell\big(\varphi(\theta,z_*),v\big) + \varphi(\theta,z_*) = z_*.$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$z_{k+1} = H(\omega_k,z_k), \quad (\omega_k,z_k) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{2.4}$$

где $\omega_k = (\theta_k,v_k)$. Обозначим через $z_k(\sigma,z_0)$ решение уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $z_0(\sigma,z_0) = z_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$z(\tau_k,\sigma,z_0) = z_k(\sigma,z_0) \quad \text{для всех } \ \sigma \in \Sigma, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{2.5}$$

Действительно, $z(\tau_0,\sigma,z_0)=z_0(\sigma,z_0)=z_0$ для всех $\sigma\in\Sigma$. Пусть равенство (2.5) верно при некотором $k\in\mathbb{N}$, тогда

$$\begin{aligned} z(\tau_{k+1},\sigma,z_0)&=\varphi\big(\theta_k,z(\tau_k,\sigma,z_0)\big)+\ell\big(\varphi(\theta_k,z(\tau_k,\sigma,z_0)),v_k\big)\\ &=\varphi\big(\theta_k,z_k(\sigma,z_0)\big)+\ell\big(\varphi(\theta_k,z_k(\sigma,z_0)),v_k\big)=H(\omega_k,z_k(\sigma,z_0))=z_{k+1}(\sigma,z_0). \end{aligned}$$

В силу леммы 1 работы [9] из первого условия теоремы следует, что положение равновесия z_* уравнения (2.4) является устойчивым по Ляпунову равномерно относительно множества Σ. Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всякого $\sigma\in\Sigma$ решение $z_k(\sigma,z_0)$ уравнения (2.4) такое, что $|z_0-z_*|<\delta$, удовлетворяет неравенству $|z_k(\sigma,z_0)-z_*|<\varepsilon$ для всех $k=0,1,\ldots$. Следовательно, $|z(\tau_k,\sigma,z_0)-z_*|<\varepsilon$ для любого $\sigma\in\Sigma$ при всех $k=0,1,\ldots$. Поскольку $\Omega_0=[\alpha_0,\beta_0]$ и $0<\alpha_0\leqslant\beta_0<\infty$, то устойчивость по Ляпунову решения $z(t,\sigma,z_*)\equiv z_*$ уравнения (2.2), равномерная относительно множества Σ, следует из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения $\dot z=q(t,z)$ от начальных условий.

Второе утверждение теоремы получаем аналогично, при помощи теоремы 1 работы [9]. $\square$

О п р е д е л е н и е 3. Решение $z(t,\sigma,z_*)$ уравнения (2.2) назовем *устойчивым по Ляпунову с вероятностью единица* (*асимптотически устойчивым с вероятностью единица*), если существует множество $\widetilde\Sigma\subseteq\Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde\Sigma)=1$ и $z(t,\sigma,z_*)$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) равномерно относительно множества Σ_0.

У с л о в и е 1. Пусть $\Omega_0=[\alpha_0,\beta_0]$, где $0\leqslant\alpha_0\leqslant\beta_0<+\infty$. Кроме того, если $\alpha_0=0$, то существуют постоянные $a>0$, $b>0$ и $c>0$ такие, что для функции распределения $F(t)$ случайных величин $\theta_0,\theta_1,\ldots$ имеет место неравенство

$$F(t)\leqslant bt^a \quad \text{при} \;\; t\in(0,c). \tag{2.6}$$

Если $\alpha_0=0$ и выполнено (2.6), то найдется множество $\widetilde\Sigma_0\subset\Sigma_0$ такое, что $\mu(\widetilde\Sigma_0)=1$ и для любого $\sigma\in\widetilde\Sigma_0$ точки $\tau_k=\tau_k(\sigma)$, $k=0,1,\ldots$, изолированы (см. лемму 19.1 работы [10]). Понятно, что если $\alpha_0>0$, то точки $\tau_k(\sigma)$ изолированы при любом $\sigma\in\Sigma_0$.

Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины. Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 1 и использует теорему 2 работы [9].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1 *и существует $z_*\in\mathbb{R}$ такое, что $q(t,z_*)=0$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$ и $\ell(z_*,v)=0$ для всех $v\in\Omega_1$. Если найдется $\Delta>0$ такое, что*

$$M\Big(\ln\sup_{z\in O_\Delta(z_*)}\big|H'_z(\omega,z)\big|\Big)<0,$$

то решение $z(t,\sigma,z_*)\equiv z_*$ уравнения (2.2) *асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

3. О существовании асимптотически устойчивых решений в вероятностной модели популяции, подверженной промыслу

Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок и размеры этих заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot z=z(1-z)$ и в случайные моменты времени τ_k некоторая доля биомассы v_k изымается из популяции. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{gathered} \dot z=z(1-z), \quad t\neq\tau_k,\\ \Delta z\big|_{t=\tau_k}=-v_kz, \quad k=0,1,\ldots, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где $(z, v_k) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega_1$. Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ между моментами заготовок τ_k и доли заготовок v_k, $k = 0, 1, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, все $\theta_0, \theta_1, \ldots$ принимают значения в множестве $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset (0, \infty)$ и имеют одинаковое распределение F; $v_0, v_1, \ldots$ принадлежат отрезку $\Omega_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subset (0, 1)$ и имеют одинаковое распределение G. Таким образом, $\Omega = [\alpha_0, \beta_0] \times [\alpha_1, \beta_1]$, $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega$, $k = 0, 1, \ldots$. Вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ определим так же, как в первом разделе.

Пусть начальный объем биомассы популяции равен z_0, найдем $\varphi(t, z_0)$ — решение уравнения $\dot{z} = z(1 - z)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, z_0) = z_0$:

$$\varphi(t, z_0) = \frac{z_0 e^t}{z_0(e^t - 1) + 1}.$$

Выпишем функцию $H(\omega, z)$, заданную равенством (2):

$$H(\omega, z) = H(\theta, v, z) \doteq \ell\big(\varphi(\theta, z), v\big) + \varphi(\theta, z) = \frac{z e^{\theta}(1 - v)}{z(e^{\theta} - 1) + 1}.$$

Обозначим через Θ и Ψ независимые случайные величины с распределениями F и G соответственно.

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения*:

1. *Если* $e^{\beta_0}(1 - \alpha_1) \leqslant 1$, *то решение* $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ *уравнения* (3.7) *устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества* Σ.

2. *Если* $e^{\beta_0}(1 - \alpha_1) < 1$, *то решение* $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ *уравнения* (3.7) *асимптотически устойчиво равномерно относительно* Σ.

3. *Если* $e^{\beta_0}(1 - \alpha_1) \geqslant 1$, *но* $M\Theta + M\ln(1 - \Psi) < 0$, *то* $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ *асимптотически устойчиво с вероятностью единица* (*при этом* $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$, *но* $\widetilde{\Sigma} \neq \Sigma$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что для всех $z \geqslant 0$ выполнены равенства

$$\sup_{\omega \in \Omega} \big|H'_z(\omega, z)\big| = \sup_{\omega \in \Omega} \big|H'_z(\omega, 0)\big| = \sup_{\omega \in \Omega} \big(e^{\theta}(1 - v)\big) = e^{\beta_0}(1 - \alpha_1),$$

поэтому первое и второе утверждения следуют из теоремы 1. Далее, так как

$$M\Big(\ln \sup_{z \geqslant 0} \big|H'_z(\omega, z)\big|\Big) = M \ln\big(e^{\Theta}(1 - \Psi)\big) = M\Theta + M\ln(1 - \Psi), \tag{3.8}$$

то третье утверждение является следствием теоремы 2. □

4. Устойчивые по Ляпунову и асимптотически устойчивые множества управляемой системы со случайными параметрами

Рассмотрим управляемую систему с импульсным воздействием (1.1). Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{4.9}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f\big(t_i, x_i, U\big)$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Предполагаем, что при фиксированных (t, x) множество $F(t, x)$ непусто, выпукло и компактно и функция $(t, x) \to F(t, x)$ полунепрерывна сверху.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) \colon t \in \mathbb{R}_+, \, x \in M(t)\big\}$, заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа. Введем следующие обозначения:

$$O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leqslant r\}, \quad M^r(t) = M(t) + O_r(0), \quad N^r(t) = M^r(t) \setminus M(t);$$

построим множество $\mathfrak{N}^r = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+,\, x \in N^r(t)\}$.

О п р е д е л е н и е 4 (см. [11]). Скалярная функция $V(t,x)$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если функция $(t,x) \to V(t,x)$ локально липшицева и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(t,x) = 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t,x) > 0$ для некоторого $r > 0$ и всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция Ляпунова $V(t,x)$ называется *определенно положительной*, если для любого $\varepsilon \in (0,r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t,x) > \delta$ для всех

$$(t,x) \notin \mathfrak{M}^\varepsilon \doteq \bigl\{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+,\, x \in M^\varepsilon(t)\bigr\}.$$

О п р е д е л е н и е 5. Для локально липшицевой функции $V(t,x)$ *обобщенной производной* в точке $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $d = (1,p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка [12, с. 17]) называется предел

$$V^o(t,x;p) \doteq \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0+0,x)} \frac{V(t+\varepsilon, y+\varepsilon p) - V(t,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t,x) \doteq \inf\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$, $V^o_{\max}(t,x) \doteq \sup\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$ называются *нижней* и *верхней производными* функции V в силу дифференциального включения (4.9).

О п р е д е л е н и е 6. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *устойчивым по Ляпунову* равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \widetilde{\Sigma}) > 0$, что для любого решения $\varphi(t,\sigma,x_0)$ системы (1.1) из условия $x_0 \in N^\delta(0)$ следует, что $(t, \varphi(t,\sigma,x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $\sigma \in \Sigma_0$.

Пусть $\varrho(x,M) \doteq \inf\limits_{y\in M} |x-y|$ — расстояние от точки x до множества M в $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 7. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *асимптотически устойчивым* равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$, если оно устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $\widetilde{\Sigma}$ и существует такое число $r > 0$, что для каждого решения $\varphi(t,\sigma,x_0)$, $\sigma \in \widetilde{\Sigma}$, системы (1.1), удовлетворяющего условию $x_0 \in N^r(0)$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\bigl(\varphi(t,\sigma,x_0), M(t)\bigr) = 0$.

Условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$ относительно систем с импульсным воздействием приведены в работах [13;14]. Далее мы исследуем свойства устойчивости, выполненные с вероятностью единица.

О п р е д е л е н и е 8. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *устойчивым по Ляпунову с вероятностью единица* (*асимптотически устойчивым с вероятностью единица*), если существует множество $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$ и $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma}$.

Теорема 3. *Предположим, что существуют определенно положительная функция Ляпунова $V(t,x)$ и функции $q(t,z)$, $\ell(z,v)$ такие, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, $v \in \Omega_1$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t,x) \leqslant q\bigl(t, V(t,x)\bigr), \tag{4.10}$$

$$\sup_{w\in W} V\bigl(t, x + g(x,w,v)\bigr) \leqslant \ell\bigl(V(t,x), v\bigr) + V(t,x). \tag{4.11}$$

Тогда если уравнение (2.2) *имеет решение $z(t,\sigma,0) \equiv 0$, устойчивое по Ляпунову с вероятностью единица, то множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированного $\sigma \in \Sigma$ исследуем решение $\varphi(t,\sigma,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0) = x_0$, где $x_0 \in N^\delta(0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, \varphi(t,\sigma,x_0))$. Функция $v(t)$ является липшицевой на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$, в силу леммы 3 работы [11]; тогда по теореме Радемахера (см.

[15, с. 234]), она дифференцируема при почти всех t. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ имеют место следующие неравенства (см. [11]): $\dot{v}(t) \leqslant V^{o}_{\max}\big(t, \varphi(t,\sigma,x_0)\big)$; поэтому из (4.10) получаем, что $\dot{v}(t) \leqslant q(t, v(t))$ на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$.

Пусть $z(t) = z(t,\sigma,z_0)$ является решением уравнения (2.2), удовлетворяющим начальному условию $z(0,\sigma,z_0) = v(0)$. В силу (4.11) для любых $w_0 \in W$ и $v_0 \in \Omega_1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v(0+0) &= V\big(0+0, \varphi(0+0,\sigma,x_0)\big) = V\big(0, \varphi(0,\sigma,x_0) + g(\varphi(0,\sigma,x_0), w_0, v_0)\big) \\ &\leqslant \ell\big(V(0,\varphi(0,\sigma,x_0)), v_0\big) + V(0,\varphi(0,\sigma,x_0)) = \ell\big(v(0), v_0\big) + v(0) \\ &= \ell\big(z(0), v_0\big) + z(0) = z(0+0). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Отметим, что $\dot{z}(t) = q(t, z(t))$ при $t \in (\tau_0, \tau_1)$, где $\tau_0 = 0$, тогда $\dot{v}(t) \leqslant \dot{z}(t)$ при $t \in (\tau_0, \tau_1)$. Из этого неравенства, учитывая (4.12), в силу теоремы С. А. Чаплыгина [16] получаем, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$; следовательно, $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$.

Далее аналогично (4.12), для любого $v_1 \in \Omega_1$ выполнено неравенство

$$v(\tau_1 + 0) \leqslant \ell\big(v(\tau_1), v_1\big) + v(\tau_1).$$

Поскольку для каждого $v \in \Omega_1$ функция $z \to \ell(z, v) + z$ неубывающая, то из $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$ следует, что $\ell\big(v(\tau_1), v_1\big) + v(\tau_1) \leqslant \ell\big(z(\tau_1), v_1\big) + z(\tau_1) = z(\tau_1 + 0)$. Таким образом, $v(\tau_1 + 0) \leqslant z(\tau_1 + 0)$. Применяя далее теорему Чаплыгина на каждом из отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Решение $z(t,\sigma,0) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица, поэтому существует множество $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$ и $z(t,\sigma,0)$ устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $\widetilde{\Sigma}$. Аналогично доказательству теоремы 2 работы [17] получаем, что $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma}$, т. е. устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица. □

Теорема 4. *Предположим, что существуют определенно положительная функция Ляпунова $V(t,x)$ и функции $q(t,z)$, $\ell(z,v)$ такие, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, $v \in \Omega_1$ выполнены неравенства* (4.10), (4.11). *Тогда если уравнение* (2.2) *имеет решение $z(t,\sigma,0) \equiv 0$, асимптотически устойчивое с вероятностью единица, то множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t,\sigma,x_0)$ является решением системы (1.1), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0) = x_0$, где $x_0 \in N^r(0)$; $v(t) = V(t, \varphi(t,\sigma,x_0))$. Из доказательства теоремы 3 следует, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица в силу теоремы 3. Докажем, что $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво с вероятностью единица. Пусть $\widetilde{\Sigma}$ является подмножеством Σ таким, что $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$, и решение $z(t,\sigma,0) \equiv 0$ уравнения (2.2) асимптотически устойчиво равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma}$. Если $z(t) = z(t,\sigma,z_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\sigma \in \widetilde{\Sigma}$, то из неравенства $0 \leqslant v(t) \leqslant z(t)$, $t \in [0, +\infty)$, следует, что $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Покажем, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \varrho\big(\varphi(t,\sigma,x_0), M(t)\big) = 0$. Предположим, что это не так, тогда существуют постоянная $\varepsilon \in (0, r)$ и последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $t_k \to +\infty$ и $\varrho\big(\varphi(t_k,\sigma,x_0), M(t_k)\big) > \varepsilon$. Следовательно, $(t_k, \varphi(t_k,\sigma,x_0)) \notin \mathfrak{M}^{\varepsilon}$, и, поскольку функция V определенно положительная, найдется такое $\delta > 0$, что $V(t_k, \varphi(t_k,\sigma,x_0)) \geqslant \delta$. Это противоречит тому, что для всех $\sigma \in \widetilde{\Sigma}$ выполнено равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t, \varphi(t,\sigma,x_0)) = \lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$. □

5. Асимптотическое поведение решений в вероятностной модели конкуренции двух видов с импульсным воздействием

Отметим, что в детерминированном случае данная модель исследуется в работе [18]. Рассмотрим систему, представляющую собой конкуренцию двух видов, численности которых равны x_1, x_2. Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при встрече численность как одного, так и другого вида уменьшается. В случайные моменты времени τ_k на систему оказывается внешнее воздействие, в результате которого численности обоих видов сокращаются. Предполагаем, что данная модель задана следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, & t \neq \tau_k, \\ \dot{x_2} = x_2 - x_2^2 - bx_1x_2, & t \neq \tau_k, \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_k} = -w_k^1 x_1, \quad \Delta x_2|_{t=\tau_k} = -w_k^2 x_2, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{5.14}$$

Здесь $a > 0$, $b > 0$ — коэффициенты межпопуляционного взаимодействия видов, причем оба вида могут сосуществовать, если произведение этих коэффициентов $ab < 1$.

Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ между моментами импульсного воздействия и доли заготовок w_k^1, w_k^2, $k = 0, 1, \ldots$, являются независимыми случайными величинами, все $\theta_0, \theta_1, \ldots$ принимают значения в множестве $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset (0, \infty)$ и имеют распределение F; $w_k^1 \in [w_{11}, w_{12}] \subset (0, 1)$, $w_k^2 \in [w_{21}, w_{22}] \subset (0, 1)$. Пусть $\Omega_1 = [w_{11}, w_{12}] \times [w_{21}, w_{22}]$, тогда $\Omega = [\alpha_0, \beta_0] \times \Omega_1$, $\omega_k = (\theta_k, w_k^1, w_k^2) \in \Omega$.

Исследуем условия, при которых множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}_+, x = 0\}$ является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым относительно системы (5.13), (5.14). Обозначим через Θ и Ψ независимые случайные величины такие, что Θ имеет распределение F, распределение Ψ совпадает с распределением случайных величин $v_k = \min(w_k^1, w_k^2)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Предложение 2. *Выполнены следующие утверждения*:

1. *Если* $e^{\beta_0}\big(1 - \min(w_{11}, w_{21})\big) \leqslant 1$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества* Σ.

2. *Если* $e^{\beta_0}\big(1 - \min(w_{11}, w_{21})\big) < 1$, *то* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво равномерно относительно множества* Σ.

3. *Если* $M\Theta + M\ln(1 - \Psi) < 0$, *то* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

Доказательство. В работе [18] показано, что решения системы (5.13), (5.14) неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях (x_1^0, x_2^0); поэтому для исследования устойчивости множества $\mathfrak{M}$ можно воспользоваться функцией Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, определенной на множестве $\mathbb{R}_+^2 \doteq [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Найдем производную функции V в силу системы (5.13) при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$: $V^o(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - (a + b)x_1x_2$. Пусть $c = \min(a, b)$, $d = \max(a, b)$, тогда $c^2 \leqslant cd = ab < 1$, поэтому $c \in (0, 1)$. Далее,

$$\begin{aligned} V^o(x_1, x_2) \leqslant x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2cx_1x_2 \leqslant x_1 + x_2 - \frac{c+1}{2}(x_1 + x_2)^2 \\ = V(x_1, x_2) - \frac{c+1}{2}V^2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Оценим значение функции $V(x + g(x, w))$:

$$V(x + g(x, w)) = x_1 - w^1x_1 + x_2 - w^2x_2 \leqslant x_1 + x_2 - \min(w^1, w^2)(x_1 + x_2) = V(x_1, x_2) - vV(x_1, x_2),$$

где $v = \min(w^1, w^2)$. Таким образом, $q(t, z) = z - \dfrac{c+1}{2}z^2$, $\ell(z, v) = -vz$.

Решением уравнения $\dot{z} = z - \dfrac{c+1}{2}z^2$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, z_0) = z_0$, является функция $\varphi(t, z_0) = \dfrac{z_0e^t}{\frac{c+1}{2}z_0(e^t - 1) + 1}$, следовательно,

$$H(\omega, z) = H(\theta, v, z) \doteq \ell\big(\varphi(\theta, z), v\big) + \varphi(\theta, z) = \frac{ze^\theta(1 - v)}{\frac{c+1}{2}z(e^\theta - 1) + 1}.$$

В силу теоремы 1 нужно найти

$$\sup_{\omega\in\Omega}\bigl|H'_z(\omega,z)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|H'_z(\omega,0)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl(e^{\theta}(1-v)\bigr) = e^{\beta_0}\bigl(1-\min(w_{11},w_{21})\bigr),$$

откуда получаем первое и второе утверждения предложения. Третье утверждение следует из равенства (3.8). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Недорезов Л.В.** Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. 161 с.
2. **Недорезов Л.В., Назаров И.Н.** Непрерывно-дискретные модели динамики изолированной популяции и двух конкурирующих видов // Мат. структуры и моделирование. 1998. Вып. 2. С. 77–91.
3. **Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В.** Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 650–659.
4. **Bainov D.D.** Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population // Appl. Math. Comp. 1990. Vol. 39, № 1. P. 37–48.
5. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
6. **Родина Л.И.** О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные. науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124. doi: 10.20537/vm130411 .
7. **Родина Л.И.** Об инвариантных множествах управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные. науки. 2014. Вып. 4. С. 109–121. doi: 10.20537/vm140409 .
8. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
9. **Родина Л.И., Тютеев И.И.** Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные. науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 79–86. doi: 10.20537/vm160107 .
10. **Родина Л.И.** Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Изв. ИМИ УдГУ. 2012. Вып. 2(40). С. 3–164.
11. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 202–221.
12. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
13. **Ларина Я.Ю.** Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 1. С. 51–59. doi: 10.20537/vm150106 .
14. **Ларина Я.Ю., Родина Л.И.** Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 4. С. 490–502. doi: 10.20537/vm160404 .
15. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.
16. **Чаплыгин С.А.** Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1950. 102 с.
17. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 185–201.
18. **Ларина Я.Ю.** О слабой асимптотической устойчивости управляемых систем с импульсным воздействием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 68–78. doi: 10.20537/vm160106 .

Родина Людмила Ивановна
Поступила 30.09.2017
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры
функционального анализа и его приложений
Владимирский государственного университета
им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых,
г. Владимир
e-mail: LRodina67@mail.ru

REFERENCES

1. Nedorezov L.V. *Kurs lektsii po matematicheskoi ekologii.* [Course of lectures on ecological modeling]. Novosibirsk, Sibirskii Khronograf Publ., 1997, 161 p. ISBN: 5-87550-031-X.
2. Nedorezov L.V., Nazarov I.N. Continuous-discrete models of the dynamics of an isolated population and of two competitive species. Guts A.K. (ed.), *Mathematical structures and modelling. Vol. 2. Collection of scientific works.* Omsk, Omskij Gosudarstvennyj Universitet Publ., 1998, pp. 77–91 (in Russian).
3. Nedorezov L.V., Utyupin Yu.V. A discrete-continuous model for bisexual population dynamics. *Sib. Math. J.*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 511–518. doi: 10.1023/A:1023821016511.
4. Bainov D.D. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population. *Appl. Math. Comp.*, 1990, vol. 39, no. 1, pp. 37–48.
5. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami.* [Optimal impulse equation with applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. ISBN: 5-9221-0097-1.
6. Rodina L.I. On some probability models of dynamics of population growth. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 109–124 (in Russian). doi: 10.20537/vm130411.
7. Rodina L.I. On the invariant sets of control systems with random coefficients. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 109–121. doi: 10.20537/vm140409 (in Russian).
8. Shiryaev A.N. *Probability.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 95. N Y etc.: Springer-Verlag,1995, 624 p. ISBN: 0387945490. Original Russian text published in Shiryaev A.N. *Veroyatnost'.* Moscow, Nauka Publ., 1989, 580 p.
9. Rodina L.I., Tyuteev I.I. On the asymptotic properties of the solutions of difference equations with random parameters. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 79–86. doi: 10.20537/vm160107. (in Russian)
10. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems. *Izv. IMI UdGU*, 2012, no. 2(40), pp. 3–164 (in Russian).
11. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, no. 1, 194–212. doi: 10.1134/S0081543808030164.
12. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis.* N Y, Wiley, 1983, 308 p. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
13. Larina Ya.Yu. Lyapunov functions and comparison theorems for control systems with impulsive actions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 51–59 (in Russian). doi: 10.20537/vm150106.
14. Larina Ya.Yu., Rodina L.I. Asymptotically stable sets of control systems with impulse action. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 490–502 (in Russian). doi: 10.20537/vm160404.
15. Federer H. *Geometric measure theory.* Berlin: Heidelberg, Springer, 1969, 677 p. ISBN: 3540045058. Translated to Russian under the title *Geometricheskaya teoriya mery*, Moscow, Nauka Publ., 1987, 761 p.
16. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii.* [A new method of approximate integration of differential equations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950, 102 p.
17. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221. doi: 10.1134/S0081543810050159.
18. Larina Ya.Yu. On the weak asymptotic stability of control systems with impulse action. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 68–78 (in Russian). doi: 10.20537/vm160106.

The paper was received by the Editorial Office on September 30, 2017.

Lyudmila Ivanovna Rodina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vladimir State University, Vladimir, 600000 Russia, e-mail: LRodina67@mail.ru.