ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР[1]

Л. А. Петросян, Я. Б. Панкратова

Ранее авторами (2002, 2017) были получены условия существования сильного равновесия по Нэшу в бесконечношаговых неантагонистических играх при дополнительном ограничении на возможные отклонения коалиций от выбранных наперед стратегий. Эти ограничения допускали лишь однократные единовременные отклонения всех игроков, входящих в коалицию. Однако очевидно, что в реальных задачах отклонения различных игроков могут происходить в различные моменты времени (на различных шагах игры). Поэтому конструкция стратегий наказания, предложенная авторами ранее, оказывается в общем случае неприменима. Принципиальная трудность заключается в том, что игроки, которым предписано осуществить наказание отклонившейся коалиции, в общем случае не знают ни состава отклонившейся коалиции, ни моментов времени, в которые происходят отклонения отдельных игроков. В данной работе мы предлагаем новую форму стратегий наказания, которая не требует информации о коалиции отклоняющихся игроков, а использует только факт отклонения хотя бы одного из игроков коалиции. Разумеется, реализация такой стратегии наказания возможна лишь при выполнении некоторых дополнительных ограничений на одновременные игры компоненты в бесконечношаговой игре. При выполнении этих дополнительных ограничений установлено, что наказание отклонившейся коалиции может быть действительно осуществлено, что позволило доказать существование сильного равновесия по Нэшу в игре.

Ключевые слова: сильное равновесие по Нэшу, характеристическая функция, многошаговая игра, повторяющаяся игра, дележ, ядро.

L. A. Petrosyan, Ya. B. Pankratova. Construction of a strong Nash equilibrium in a class of infinite non-zero-sum games.

In our previous papers (2002, 2017), we derived conditions for the existence of a strong Nash equilibrium in multistage non-zero-sum games under additional constraints on the possible deviations of coalitions from their agreed-upon strategies. These constraints allowed only one-time simultaneous deviations of all the players in a coalition. However, it is clear that in real-world problems the deviations of different members of a coalition may occur at different times (at different stages of the game), which makes the punishment strategy approach proposed by the authors earlier inapplicable in the general case. The fundamental difficulty is that in the general case the players who must punish the deviating coalition know neither the members of this coalition nor the times when each player performs the deviation. In this paper we propose a new punishment strategy, which does not require the full information about the deviating coalition but uses only the fact of deviation of at least one player of the coalition. Of course, this punishment strategy can be realized only under some additional constraints on simultaneous components of the game in an infinite-stage game. Under these additional constraints it was proved that the punishment of the deviating coalition can be effectively realized. As a result, the existence of a strong Nash equilibrium was established.

Keywords: strong Nash equilibrium, characteristic function, multistage game, repeated game, imputation, core.

MSC: 91A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-165-174

Введение

В теории игр хорошо известны так называемые народные теоремы [4;5], в которых доказывается существование равновесия по Нэшу в бесконечношаговых повторяющихся играх. Идея доказательства заключается в использовании “стратегий наказания”, которые включаются в случае, если один из игроков на каком-то шаге игры отклоняется от согласованного заранее

[1]Работа выполнена при поддержки Российского научного фонда (грант 17-11-01079).

поведения. Однако интересным является вопрос о доказательстве существования сильного равновесия по Нэшу в таких играх, т. е. о доказательстве существования равновесия, устойчивого относительно отклонения коалиции игроков. Для случая, когда допускается лишь однократное и единовременное отклонение всеми игроками коалиции, такой результат получен в [10;11] и там же распространен на случай произвольной бесконечношаговой игры.

Однако использованный там метод построения наказания неприменим к случаю, когда игроки, входящие в коалицию, отклоняются в различные моменты времени, поскольку после первого отклонения невозможно определить, какие игроки могут отклониться в будущем, и поэтому непонятно, против какой коалиции и когда должно быть наказание. Нами предложен новый подход, который не требует информации о всем множестве отклонившихся игроков, а использует информацию лишь об отклонении хотя бы одного игрока. Суть подхода заключается в том, что каждый игрок использует следующую стратегию наказания. Как только на некотором шаге k игрок впервые обнаруживает отклонение какого-то игрока или группы игроков, он на всех последующих шагах использует оптимальную стратегию (как минимизирующий игрок) в антагонистической игре между коалицией остальных игроков, действующих как один игрок, и собой. Разумеется, такой подход не может достаточно объективно наказать всю отклонившуюся коалицию игроков, но при определенных условиях можно сделать отклонение любой коалиции невыгодным для ее участников. Реализация такой стратегии наказания возможна лишь при выполнении некоторых дополнительных ограничений на одновременные игры компоненты в бесконечношаговой игре. При выполнении этих дополнительных ограничений установлено, что наказание отклонившейся коалиции может быть действительно осуществлено, что позволило доказать существование сильного равновесия по Нэшу в игре.

1. Бесконечно повторяющиеся игры

1.1. Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру G с конечной неантагонистической игрой Γ, разыгрываемой на каждом шаге. Введем обозначение

$$\Gamma = \langle N; U_1, \dots, U_i, \dots, U_n; K_1, \dots, K_i, \dots, K_n \rangle.$$

Здесь N — множество игроков, U_i — множество стратегий i-игрока, $K_i(u_1, \dots, u_n)$, $u_i \in U_i$, — функция выигрыша i-го игрока ($i \in N$). Если на шаге k ($1 \le k \le \infty$) выбран набор стратегий $u^k = (u_1^k, \dots, u_i^k, \dots, u_n^k)$, то выигрыш i-го игрока в игре G определяется следующим образом:

$$H_i(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(u_1^k, \dots, u_i^k, \dots, u_n^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(u^k) = H_i(u(\cdot)), \quad i \in N, \tag{1.1}$$

где $u_1(\cdot) = (u_1^1, \dots, u_1^k, \dots), \dots, u_i(\cdot) = (u_i^1, \dots, u_i^k, \dots), \dots, u_n(\cdot) = (u_n^1, \dots, u_n^k, \dots)$, $\delta \in (0,1)$.

Целью i-го игрока в игре G является максимизация своего выигрыша $H_i(u_1(\cdot), \dots, u_i(\cdot), \dots, u_n(\cdot))$.

В выражениях для $u_i(\cdot) = (u_i^1, \dots, u_i^k, \dots)$, $i \in N$, u_i^k — стратегия выбираемая игроком i в игре Γ, разыгрываемой на шаге k. При этом предполагается, что на шаге k при выборе стратегии u_i^k в игре Γ игрок i знает выборы других игроков на предыдущих шагах и помнит все свои выборы, т. е. u_i^k является функцией истории $h^k = (u_1^1, \dots, u_1^{k-1}; \dots; u_i^1, \dots, u_i^{k-1}; \dots; u_n^1, \dots, u_n^{k-1})$. Поэтому формально нужно писать $u_i^k(h^k)$, т. е. u_i^k зависит от предыстории h^k, $k = 1, \dots$. Однако будем подразумевать это по умолчанию, т. е. считать, что выбор u_i^k игрока i на шаге k в игре Γ делается с учетом информации о предыстории игры h^k.

Рассмотрим набор стратегий $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \ldots, \bar{u}_i(\cdot), \ldots, \bar{u}_n(\cdot))$ такой, что

$$\sum_{i \in N} H_i(\bar{u}) = \max_{u(\cdot)} \sum_{i \in N} H_i(u). \tag{1.2}$$

Очевидно, что подобный набор стратегий всегда существует.

Можно выбрать такой набор $\bar{u}_i(\cdot) = (\bar{u}_i^1, \ldots, \bar{u}_i^k, \ldots,)$, $i \in N$, что

$$\sum_{i \in N} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, \bar{u}_n) = \max_{u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n} \sum_{i \in N} K_i(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n), \tag{1.3}$$

и тогда реализуется игра G, в которой $\bar{u}_i^k = \bar{u}_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Из формул (1.1)–(1.3) получаем

$$\sum_{i \in N} H_i(\bar{u}) = \sum_{i \in N} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(\bar{u}_1^k, \ldots, \bar{u}_n^k) \Big)$$

$$= \sum_{i \in N} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) \Big) = \frac{1}{1-\delta} \sum_{i \in N} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n).$$

Стратегии $(\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n)$ будем называть *кооперативными стратегиями* в Γ.

Рассмотрим смешанное расширение игры Γ и обозначим через μ_i смешанную стратегию игрока i в игре Γ. Тогда по аналогии с введенными ранее стратегиями $u_i(\cdot)$ смешанная стратегия поведения [2] $\mu_i(\cdot)$ в G имеет вид $\mu_i(\cdot) = (\mu_i^1, \ldots, \mu_i^k, \ldots)$, где μ_i^k — смешанная стратегия i игрока, выбираемая им на шаге k в игре Γ. Как было отмечено раннее, предполагается, что на шаге k при выборе стратегии μ_i^k в игре Γ игрок i знает выборы других игроков на предыдущих шагах и помнит все свои выборы, т. е. μ_i^k является функцией истории $h^k = (\mu_1^1, \ldots, \mu_1^{k-1}; \ldots; \mu_i^1, \ldots, \mu_i^{k-1}; \ldots; \mu_n^1, \ldots, \mu_n^{k-1})$. Поэтому формально нужно писать $\mu_i^k(h^k)$, т. е. μ_i^k зависит от предыстории h^k, $k = 1, \ldots$. Однако, также как и в случае "чистых стратегий" $u_i(\cdot)$, будем подразумевать это по умолчанию, т. е. считать, что выбор μ_i^k игрока i на шаге k в игре Γ делается с учетом информации о предыстории игры h^k.

Введем характеристическую функцию $V(S)$, $S \subset N$, в игре Γ в классическом смысле [6], т. е. как значение антагонистической игры (математическое ожидание выигрыша в ситуации равновесия, которое всегда существует в классе смешанных стратегий) между игроками S (первый игрок) и $N \backslash S$ (второй игрок). При этом выигрыш первого игрока-коалиции S равен сумме выигрышей ее членов. Тогда мы получаем

$$V(N) = \sum_{i \in N} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n),$$

и легко можно показать, что характеристическая функция $W(S)$, $S \subset N$, в повторяющейся игре G будет иметь следующий вид:

$$W(S) = \frac{1}{1-\delta} V(S), \quad S \subset N. \tag{1.4}$$

Действительно, характеристическая функция $W(S)$ в игре G в классическом смысле (так же, как и в игре Γ) из-за повторяющегося характера игры будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} V(S)$, откуда и получаем формулу (1.4).

Напомним теперь определение сильного равновесия по Нэшу [8; 10].

О п р е д е л е н и е. Набор стратегий $(\hat{u}_1, \ldots \hat{u}_2, \ldots \hat{u}_n) = \hat{u}$ будем называть сильным равновесием по Нэшу, если для всех $S \subset N$, и всех $u_S = \{u_i, i \in S\}$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i \in S} K_i(\hat{u}) \geq \sum_{i \in S} K_i(\hat{u} || u_S),$$

где $(\hat{u}||u_S)$ представляет собой набор стратегий, в котором игроки из коалиции $N\backslash S$ используют стратегии $\hat{u}_i$, а игроки из коалиции S произвольные стратегии.

1.2. Ассоциированные антагонистические игры. Рассмотрим семейство антагонистических игр $\Gamma_{N\backslash i,i}$, построенных на основе игры Γ между коалицией $N\backslash i$, действующей как первый игрок, и коалицией, состоящей из одного игрока $\{i\}$, действующей как второй игрок [9]. Выигрыш игрока-коалиции $N\backslash i$ полагаем равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Пусть $(\bar{\mu}_{N\backslash i}, \bar{\mu}_i)$ — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_{N\backslash i,i}$.

Рассмотрим ситуацию

$$\bar{\mu} = (\bar{\mu_1}, \dots, \bar{\mu}_i, \dots, \bar{\mu}_n)$$

и определим

$$\bar{W}(S) = \max_{\mu_S} \sum_{i \in S} E_i(\mu_S; \bar{\mu}_{N\backslash S}),$$

где $\mu_S = \{\mu_i, i \in S\}$, $\bar{\mu}_{N\backslash S} = \{\bar{\mu}_i, i \in N\backslash S\}$ и $E_i(\mu_S; \bar{\mu}_{N\backslash S})$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в ситуации $(\mu_S; \bar{\mu}_{N\backslash S})$. $W(S)$ — это максимальный выигрыш, который может обеспечить себе коалиция S, если остальные игроки используют стратегии $\bar{\mu}_i$, $i \in N\backslash S$, представляющие собой оптимальные стратегии второго игрока в антагонистических играх $\Gamma_{N\backslash i,i}$.

Очевидно имеет место следующее утверждение.

Утверждение. $\bar{W}(S) \geq V(S), \quad S \subset N, \quad \bar{W}(N) = V(N).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для всех $\mu(S)$ имеем

$$\sum_{i \in S} E_i(\mu_S, \bar{\mu}_{N\backslash S}) \geq \min_{\mu_{N\backslash S}} \sum_{i \in S} E_i(\mu_S, \mu_{N\backslash S}).$$

Поскольку предыдущее неравенство имеет место для всех μ_S, то, беря максимум по μ_S слева и справа, получаем

$$\bar{W}(S) = \max_{\mu_S} \sum_{i \in S} E_i(\mu_S, \bar{\mu}_{N\backslash S}) \geq \max_{\mu_S} \min_{\mu_{N\backslash S}} \sum_{i \in S} E_i(\mu_S, \mu_{N\backslash S}) = V(S).$$

Равенство $\bar{W}(N) = V(N)$ очевидно. Утверждение доказано.

Предположим, что существует решение системы неравенств

$$\sum_{i \in S} \alpha_i > \bar{W}(S) \ \ \forall S \subset N, \quad S \neq N, \quad \sum_{i \in N} \alpha_i = \bar{W}(N) = V(N). \tag{1.5}$$

Построим модификацию G^α игры G. Разница между G^α и G состоит в выигрышах игр Γ, реализуемых на каждом шаге игры G. Если используются кооперативные стратегии $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$, то выигрыши игроков полагаем равными $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где α удовлетворяет (1.5). Для всех остальных выбираемых стратегий выигрыши такие же, как в Γ.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.5), *тогда найдется такое* $\delta \in (0,1)$, *что в игре* G^α *будет существовать сильное равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий поведения* [2] *с выигрышами, равными* $\alpha_i \dfrac{1}{1-\delta}$. *Эти выигрыши совпадают с выигрышами в* G^α *в случае кооперативного поведения игроков.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i$, и $|S|$ — число игроков в коалиции S. Если игроки из коалиции S придерживаются кооперативных стратегий и в качестве дележа выбрают дележ, удовлетворяющий условию (1.5), то выигрыш коалиции S в игре G^α будет равен $\dfrac{\alpha(S)}{1-\delta}$. Предположим, что игроки из S отклоняются от кооперации, и пусть m — номер последнего шага, на котором происходит отклонение хотя бы одного из игроков коалиции S. Поскольку коалиция S состоит из конечного числа игроков, такое число m всегда существует. Обозначим через M максимально возможный выигрыш игрока из коалиции S при отклонении от кооперации. Тогда очевидно, что при отклонении от кооперации максимальный гарантированный выигрыш отклонившейся коалиции не может превзойти величины

$$\sum_{l=0}^{m} \delta^l |S| M + \sum_{l=m+1}^{\infty} \delta^l \bar{W}(S) = |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \bar{W}(S) = |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \frac{\bar{W}(S)}{1-\delta}, \quad (1.6)$$

поскольку начиная с шага $m+1$ и до конца игры игроки, не входящие в S, получив информацию об отклонении хотя бы одним игроком из S на каком-то шаге, на всех последующих шагах могут использовать стратегии $\bar{\mu}_i$, оптимальные в описанной выше ассоциированной антагонистической игре $\Gamma_{N\setminus i,i}$.

В результате начиная с этого шага наибольшее, чего может добиться коалиция S в каждой последующей повторяющейся игре, совпадает с величиной $\bar{W}(S)$ (выигрыш коалиции S при наилучшем ответе игроков из S на стратегии $\bar{\mu}_i$, $i \in N\setminus S$).

В то же время при кооперации выигрыш коалиции S определяется как

$$\frac{\alpha(S)}{1-\delta} = \Big(\sum_{l=0}^{m} \delta^l\Big) \alpha(S) + \delta^{m+1} \frac{\alpha(S)}{1-\delta}. \quad (1.7)$$

Покажем, что существует δ', $0 < \delta' < 1$, такое, что при всех $\delta \in [\delta', 1)$ имеет место

$$\Big(\sum_{l=0}^{m} \delta^l\Big) \alpha(S) + \delta^{m+1} \frac{\alpha(S)}{1-\delta} > |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \frac{\bar{W}(S)}{1-\delta},$$

где слева стоит выигрыш коалиции S при кооперации (1.7), а справа оценка сверху выигрыша коалиции S при отклонении от кооперации (1.6), что дает нам

$$\sum_{l=0}^{m} \delta^l (\alpha(S) - |S| M) + \frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} (\alpha(S) - \bar{W}(S)) > 0.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} (\alpha(S) - \bar{W}(S)) > \sum_{l=0}^{m} \delta^l (|S| M - \alpha(S)). \quad (1.8)$$

Рассмотрим правую часть неравенства (1.8). Очевидно, что для любого δ, $0 < \delta < 1$, верно неравенство

$$\sum_{l=0}^{m} \delta^l (|S| M - \alpha(S)) < (m+1)(|S| M - \alpha(S)). \quad (1.9)$$

Поэтому если мы покажем, что найдется такое δ', $0 < \delta' < 1$, $\delta \in [\delta', 1)$, что имеет место

$$\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} (\alpha(S) - \bar{W}(S)) > (m+1)(|S| M - \alpha(S)),$$

то из (1.9) тем более будет следовать, что при таких δ справедливо неравенство (1.8).

Обозначим

$$(m+1) \frac{|S| M - \alpha(S)}{\alpha(S) - \bar{W}(S)} = A.$$

Очевидно, что константа A неотрицательна.

Покажем, что всегда найдется такое δ' сколь угодно близкое к 1, $0 < \delta' < 1$, что при любом $\delta \in [\delta', 1)$ и конечном заданном числе A неравенство $\dfrac{\delta^{m+1}}{1-\delta} > A$ выполнено.

Действительно, $\dfrac{\delta^{m+1}}{1-\delta} > 0$ и

$$\lim_{\delta \to 1-0} \frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} = +\infty.$$

Из последнего соотношения следует, что для любого конечного числа A всегда можно найти такое δ', близкое к 1, что для всех δ, $\delta \in [\delta', 1)$, неравенство $\dfrac{\delta^{m+1}}{1-\delta} > A$ справедливо, а следовательно, верно и (1.8). Теорема доказана.

2. Многошаговые игры

2.1. Задан бесконечный древовидный граф $\bar{G} = (Z, T)$, где $T_z \subset Z$, $|T_z| \leq n$. В каждой вершине $z \in Z$ задана одновременная конечная игра $\Gamma(z)$. Предположим, что число различных игр $\Gamma(z)$, $z \in Z$, конечно и множество игроков N одно и то же во всех играх $\Gamma(z)$. На первом шаге игры G в корне z_1 дерева $\bar{G}$ реализуется одновременная игра $\Gamma(z_1)$:

$$\Gamma(z_1) = \langle N; U_1^{z_1}, \ldots, U_i^{z_1}, \ldots, U_n^{z_1}; K_1^{z_1}, \ldots, K_i^{z_1}, \ldots, K_n^{z_1} \rangle.$$

Пусть в игре $\Gamma(z_1)$ игроки выбрали стратегии $(u_1(z_1), \ldots, u_n(z_1))$, $u_i(z_1) \in U_i^{z_1}$, $i \in N$, тогда игра $\Gamma(z_1)$ переходит в вершину $z_2 \in T(z_1)$, где $z_2 = T(z_1; u_1(z_1), \ldots, u_n(z_1))$, и в вершине z_2 разыгрывается одновременная игра $\Gamma(z_2)$. В общем случае на шаге $k-1$ в вершине z_{k-1} разыгрывается игра $\Gamma(z_{k-1})$. Пусть в игре $\Gamma(z_{k-1})$ игроки выбрали стратегии $(u_1(z_{k-1}), \ldots, u_n(z_{k-1}))$, $u_i(z_{k-1}) \in U_i^{z_{k-1}}$, $i \in N$, тогда игра переходит в вершину

$$z_k = T(z_{k-1}; u_1(z_{k-1}), \ldots, u_n(z_{k-1})),$$

и в этой вершине реализуется одновременная игра

$$\Gamma(z_k) = \Gamma(T(z_{k-1}; u_1(z_{k-1}), \ldots, u_n(z_{k-1})))$$

и т. д. В результате в G реализуется конечная последовательность одновременных игр

$$\Gamma(z_1), \ldots, \Gamma(z_k), \ldots .$$

Как и в предыдущем разделе, определим $u_i(\cdot)$ стратегию игрока i в G (как функцию, которая в каждой вершине графа (в каждой игре $\Gamma(z)$) диктует однозначный выбор $u_i(z)$, зависящий от предыстории), т. е. $u_i(\cdot) = u_i(z_k)$ (см. [5; 7; 12]).

Мы предполагаем существование такого набора стратегий $\hat{u}(\cdot) = (\hat{u}_1(\cdot), \ldots, \hat{u}_n(\cdot))$, который максимизирует сумму выигрышей игроков в G и называется *кооперативным набором стратегий*, а соответствующая последовательность реализованных одновременных игр (другими словами, последовательность позиций на дереве $\bar{G}$) — *кооперативной траекторией.*

Таким образом, кооперативное поведение порождает последовательность одновременных игр

$$\Gamma(\hat{z}_k) = \Gamma(T(\hat{z}_{k-1}; \hat{u}_1(\hat{z}_{k-1}), \ldots, \hat{u}_n(\hat{z}_{k-1}))),$$

где $\hat{u}_1(\hat{z}), \ldots, \hat{u}_n(\hat{z})$, $u_i(\hat{z}) \in U_i^{\hat{z}}$, $i = 1, \ldots, n$, — кооперативные стратегии игроков и $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_k, \ldots,$ — кооперативная траектория. При кооперативном поведении в каждой одновременной игре $\Gamma(\hat{z}_k)$ суммарный выигрыш игроков определяется как

$$L(\hat{z}_k) = \sum_{i \in N} K_i^{z_k}(\hat{u}_1(\hat{z}_k), \ldots, \hat{u}_n(\hat{z}_k)).$$

Пусть
$$L = \min_{k,\ k\in 1,2,\ldots} L(\hat{z}_k)\,.$$
Очевидно, что минимум достигается, поскольку число различных одновременных игр конечно.

2.2. Ассоциированные антагонистические игры. Рассмотрим семейство антагонистических игр $\Gamma_{N\setminus i,i}(z)$, построенных на основе игры $\Gamma(z)$ между коалицией $N\setminus i$, действующей как первый игрок, и коалицией, состоящей из одного игрока $\{i\}$, действующей как второй игрок. Выигрыш игрока коалиции $N\setminus i$ полагаем равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Пусть $(\bar{\mu}_{N\setminus i}(z), \bar{\mu}_i(z))$ — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_{N\setminus i,i}(z)$. Рассмотрим ситуацию
$$\bar{\mu}(z) = (\bar{\mu}_1(z), \ldots, \bar{\mu}_i(z), \ldots, \bar{\mu}_n(z))$$
и определим
$$\bar{W}(z,S) = \max_{\mu_S(z)} \sum_{i\in S} E_i(\mu_S(z); \bar{\mu}_{N\setminus S}(z)),$$
где $\mu_S(z) = \{\mu_i, i \in S\}$, $\bar{\mu}_{N\setminus S}(z) = \{\bar{\mu}_i(z), i \in N\setminus S\}$ и $E_i(\mu_S(z); \bar{\mu}_{N\setminus S}(z))$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в ситуации $(\mu_S, \bar{\mu}_{N\setminus S,S})$.

В каждой одновременной игре $\Gamma(z)$ определена функция $\bar{W}(z,S)$. Введем новую функцию множества
$$\bar{\bar{W}}(S) = \max_{z\in G} \bar{W}(z,S) \ \ \forall S \subset N, \ \ S \neq N. \tag{2.1}$$
Поскольку число различных игр $\Gamma(z)$, $z \in Z$, по предположению конечно, то максимум в (2.1) достигается для всех S. Назовем $\bar{\bar{W}}(S)$ *обобщенной характеристической функцией в* G. В общем случае $\bar{\bar{W}}(S)$ не будет супераддитивной, но будет монотонной по S. Очевидно, что $\bar{\bar{W}}(S) \geq \bar{W}(z,S)$ для всех S, и предположим, что $\bar{W}(z,N) \geq \bar{\bar{W}}(S)$ и $L > \bar{\bar{W}}(S)$ для всех $z \in Z$, S, $S \subset N$. Обозначим через D множество всех векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таких, что
$$\begin{aligned} &\sum_{i\in S} \alpha_i \geq \bar{\bar{W}}(S) \ \ \forall S \subset N, \ \ S \neq N, \\ &\sum_{i\in N} \alpha_i = L. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Предположим, что множество $D \neq \varnothing$ (2.2) и существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что
$$\begin{aligned} &\sum_{i\in S} \alpha_i > \bar{\bar{W}}(S) \ \ \forall S \subset N, \ \ S \neq N, \\ &\sum_{i\in N} \alpha_i = L. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для игр $\Gamma(\hat{z}_k)$ вдоль кооперативной траектории построим векторы $\hat{\alpha}^{\hat{z}_k} = (\hat{\alpha}_1^{\hat{z}_k}, \ldots, \hat{\alpha}_n^{\hat{z}_k})$. Здесь
$$\hat{\alpha}_i^{\hat{z}_k} = \alpha_i + \frac{L(\hat{z}_k) - \sum\limits_{i\in N} \alpha_i}{n},$$
где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ удовлетворяет (2.3).

По аналогии с разд. 1 построим модификацию G^α игры G. Игры G^α и G различаются лишь функциями выигрышей одновременных игр $\Gamma(\hat{z}_k)$, реализуемых вдоль кооперативной траектории. Если в G используются кооперативные стратегии $(\hat{u}_1(\cdot), \ldots, \hat{u}_n(\cdot))$ (следовательно, в играх $\Gamma(\hat{z}_k)$ — стратегии $(\hat{u}_1(\hat{z}_k), \ldots, \hat{u}_n(\hat{z}_k))$), то выигрыши при использовании этих стратегий (в ситуации $(\hat{u}_1(\hat{z}_k), \ldots, \hat{u}_n(\hat{z}_k))$) полагаем равными $\hat{\alpha}_i^{\hat{z}_k} = \alpha_i + \dfrac{L(\hat{z}_k) - \sum_{i\in N} \alpha_i}{n}$, $k = 1, \ldots, l, \ldots$, $i \in N$. Во всех остальных случаях выигрыши в игре $\Gamma(z)$ те же, что и в одновременных играх бесконечношаговой игры G.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2.3), *тогда найдется такое* $\delta \in (0, 1)$, *что в игре* G^α *будет существовать сильное равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий поведения* [2] *с выигрышами, равными*

$$\frac{\alpha_i}{1-\delta} + \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \sum\limits_{i\in N} \alpha_i}{n}.$$

Эти выигрыши совпадают с выигрышами в G^α *в случае кооперативного поведения игроков.*

Доказательство. Обозначим $\alpha(S) = \sum_{i\in S} \alpha_i$. Если игроки из коалиции S придерживаются кооперативных стратегий и в качестве выигрыша выбрали вектор, удовлетворяющий условию (2.3), то выигрыш коалиции S в игре G^α будет определяться как

$$\sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i\in S} \hat{\alpha}_i^{\hat{z}_{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i\in S} \left(\alpha_i + \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \sum\limits_{i\in N} \alpha_i}{n} \right).$$

Предположим, что игроки из S отклоняются от кооперации, и пусть m — номер последнего шага, на котором происходит отклонение хотя бы одного игрока из коалиции S. Поскольку коалиция S состоит из конечного числа игроков, такое число m всегда существует. Обозначим, через M максимально возможный выигрыш игрока из коалиции S при отклонении от кооперации. Тогда очевидно, что при отклонении от кооперации максимальный гарантированный выигрыш отклонившейся коалиции не может превзойти величины

$$\sum_{l=0}^{m} \delta^l |S| M + \sum_{l=m+1}^{\infty} \delta^l \bar{\bar{W}}(S) = |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \bar{\bar{W}}(S) = |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \frac{\bar{\bar{W}}(S)}{1-\delta}, \quad (2.4)$$

поскольку начиная с шага $m+1$ и до конца игры игроки, получив информацию об отклонении хотя бы одного игрока из S на каком-то шаге, на всех последующих шагах могут использовать стратегии $\bar{\mu}_i(z)$, оптимальные в описанной выше ассоциированной антагонистической игре $\Gamma_{N\backslash i,i}$. В результате начиная с этого шага наибольшее, чего может добиться коалиция S в каждой последующей одновременной игре, совпадает с величиной $\bar{\bar{W}}(S)$ (выигрыш коалиции S при наилучшем ответе игроков из S на стратегии $\bar{\mu}_i(z)$, $i \in N\backslash S$).

В то же время при кооперации выигрыш коалиции S можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i\in S} \alpha_i + \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i\in S} \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N)}{n} = \left(\sum_{k=0}^{m} \delta^l \right) \alpha(S) + \delta^{m+1} \frac{\alpha(S)}{1-\delta} + \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i\in S} \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N)}{n}. \quad (2.5)$$

Покажем, что существует δ', $0 < \delta' < 1$, такое, что при всех $\delta \in [\delta', 1)$ выражение в (2.4) меньше выражения (2.5).

Для этого достаточно показать, что

$$|S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \frac{\bar{\bar{W}}(S)}{1-\delta} < \left(\sum_{k=0}^{m} \delta^l \right) \alpha(S) + \delta^{m+1} \frac{\alpha(S)}{1-\delta}.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} (\alpha(S) - \bar{\bar{W}}(S)) > \sum_{l=0}^{m} \delta^l (|S| M - \alpha(S)). \quad (2.6)$$

Проводя рассуждения аналогично приведенным при доказательстве теоремы 1, несложно показать, что всегда найдется такое δ', $0 < \delta' < 1$, что при любом $\delta \in [\delta', 1)$ неравенство (2.6) верно. Следовательно, тем более выполняется неравенство

$$|S|M\sum_{l=0}^{m}\delta^l + \delta^{m+1}\frac{\bar{\bar{W}}(S)}{1-\delta} < \left(\sum_{k=0}^{m}\delta^l\right)\alpha(S) + \delta^{m+1}\frac{\alpha(S)}{1-\delta} + \sum_{l=0}^{\infty}\delta^l\sum_{i\in S}\frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N)}{n},$$

поскольку $L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N) \geq 0$. Теорема доказана.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

Заключение

В работе нами построено сильное равновесие по Нэшу (равновесие, устойчивое относительно отклонений групп игроков) как для неантагонистических повторяющихся игр, так и для общих многошаговых игр с бесконечной продолжительностью. Это удалось выполнить при определенных ограничениях на структуру одновременных игр, происходящих на каждом шаге основной динамической игры. Однако мы убеждены в том, что этот результат может быть получен и при менее жестких предположениях. Одним из основных требований является то, что в кооперативных вариантах одновременных игр ядра этих игр должны иметь непустое пересечение. Между тем, поскольку построенное сильное равновесие по Нэшу реализует выигрыши игроков при кооперации, это фактически означает, что в рассматриваемом классе динамических игр кооперативная траектория, или кооперативное решение, стратегически поддерживается сильным равновесием по Нэшу. Последнее обстоятельство является далеко не тривиальным. Предложенный в работе подход можно распространить и на дифференциальные игры. В этом случае для построения решений ассоциированных игр необходимо воспользоваться подходом, развитым в школе Н. Н. Красовского [1; 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
2. **Петросян Л.А.** Сигнальные стратегии и стратегии поведения в одном классе бесконечных позиционных игр // Позиционные игры: сб. ст. / ред. Н. Н. Воробьева и И. Н. Рублевской. М.: Наука, 1967. С. 221–230.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Aumann R.J., Maschler M.**. Repeated games with incomplete information. Cambridge: MIT Press, 1995. 360 p. ISBN: 9780262011471 .
5. **Fudenberg D., Maskin E.** The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information // Econometrica. 1986. Vol. 54, no. 3. P. 533–554. doi: 10.2307/1911307 .
6. **Maschler M., Solan E., Zamir S.** Game theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 1003 p. ISBN: 978-1-107-00548-8 .
7. **Myerson R.B.** Multistage games with communication // Econometrica. 1986. T. 54. P. 323–358. doi: 10.2307/1913154 .
8. **Nash J.** Non-cooperative games // Ann. Mathematics. 1951. Vol. 54, no. 2. P. 286–295. doi: 10.2307/1969529 .
9. **Neumann J., Morgenstern O.** Theory of games and economic behavior. Princeton, 1947. 641 p. doi: 10.1177/1468795X06065810 .
10. **Petrosjan L.A., Grauer L.V.** Strong Nash equilibrium in multistage games // International Game Theory Review. 2002. Vol. 4, no. 3. P. 255–264 . doi: 10.1142/S0219198902000689 .

11. **Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Ya.** Existence of strong Nash equilibrium in repeated and multistage games // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017; Saint-Petersburg, 2017. P. 255–257. doi: 10.1109/CNSA.2017.7974003 .
12. **Rubinstein A.** Equilibrium in supergames // Essays in Game Theory. 1994. P. 17–28. doi: 10.1007/978-1-4612-2648-2_ 2 .

Петросян Леон Аганесович Поступила 10.10.2017
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Панкратова Ярославна Борисовна
канд. физ.-мат. наук, ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: y.pankratova@spbu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Fizmatlit Publ., 1974, 456 p.
2. Petrosyan L.A. Signal strategies and behavior strategies in one class of infinite positional games. In: *Positional games, collection of articles*, Vorobyova N.N., Rublevskaya I.N. (eds.), Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 221–230 (in Russian).
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
4. Aumann R.J., Maschler M. *Repeated games with incomplete information.* Cambridge, MIT Press, 1995, 360 p. ISBN: 9780262011471 .
5. Fudenberg D., Maskin E. The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information. *Econometrica*, 1986, vol. 54, no. 3, pp. 533–554. doi: 10.2307/1911307 .
6. Maschler M., Solan E., Zamir S. *Game theory.* Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 1003 p. ISBN: 978-1-107-00548-8 .
7. Myerson R.B. Multistage games with communication. *Econometrica*, 1986, vol. 54, no. 2, pp. 323–358. doi: 10.2307/1913154 .
8. Nash J. Non-cooperative games. *Ann. Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. doi: 10.2307/1969529 .
9. Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton, 1947, 641 p. doi: 10.1177/1468795X06065810 .
10. Petrosjan L.A., Grauer L.V.. Strong Nash equilibrium in multistage games. *International Game Theory Review*, 2002, vol. 4, no. 3, pp. 255–264. doi: 10.1142/S0219198902000689 .
11. Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Ya. Existence of strong Nash equilibrium in repeated and multistage games. *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics* (*Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov*), *CNSA 2017, Saint-Petersburg*, p. 255–257. doi: 10.1109/CNSA.2017.7974003 .
12. Rubinstein A. Equilibrium in supergames. *Essays in Game Theory*, 1994, pp. 17–28. doi: 10.1007/978-1-4612-2648-2_2 .

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Leon Aganesovich Petrosyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg University, St Petersburg, 199034 Russia, e-mail: l.petrosyan@spbu.ru .

Yaroslavna Borisovna Pankratova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: y.pankratova@spbu.ru .