ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ ИНТЕГРАНТОМ[1]

С. М. Асеев

Рассматривается задача оптимального управления для автономного дифференциального включения со свободным временем и функционалом смешанного типа, содержащим в интегральном члене характеристическую функцию заданного открытого множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Постановка данной задачи ослабляет постановку классической задачи оптимального управления с фазовым ограничением на случай, когда нахождение допустимых траекторий системы в множестве M физически возможно, но нежелательно, например, исходя из соображений безопасности или неустойчивости системы. При помощи метода аппроксимаций получены необходимые условия оптимальности допустимой траектории в форме гамильтонова включения Кларка, содержащие нестандартное условие стационарности гамильтониана. Так же как и в случае задачи с фазовым ограничением, полученные необходимые условия оптимальности могут вырождаться. Приведены условия, гарантирующие их невырожденность и поточечную нетривиальность. Полученные результаты распространяют предыдущие результаты автора на случай задачи со свободным временем и более общим функционалом.

Ключевые слова: зона риска, фазовые ограничения, оптимальное управление, гамильтоново включение, принцип максимума Понтрягина, условия невырожденности.

S. M. Aseev. On an optimal control problem with discontinuous integrand.

We consider an optimal control problem for an autonomous differential inclusion with free terminal time and a mixed functional which contains the characteristic function of a given open set $M \subset \mathbb{R}^n$ in the integral term. The statement of the problem weakens the statement of the classical optimal control problem with state constraints to the case when the presence of admissible trajectories of the system in the set M is physically allowed but unfavorable due to safety or instability reasons. Using an approximation approach, necessary conditions for the optimality of an admissible trajectory are obtained in the form of Clarke's Hamiltonian inclusion. The result involves a nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian. As in the case of the problem with a state constraint, the obtained necessary optimality conditions may degenerate. Conditions guaranteeing their nondegeneracy and pointwise nontriviality are presented. The results obtained extend the author's previous results to the case of a problem with free terminal time and more general functional.

Keywords: risk zone, state constraints, optimal control, Hamiltonian inclusion, Pontryagin maximum principle, nondegeneracy conditions.

MSC: 49KXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-15-26

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P):

$$J(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + \int\limits_0^T \lambda(x(t))\delta_M(x(t))\, dt \to \min\,, \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{1.2}$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \tag{1.3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$, $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ — локально липшицевое многозначное отображение с непустыми выпуклыми компактными

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

значениями, $\varphi\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^1$ — локально липшицевая функция, $\lambda\colon\mathbb{R}^n\mapsto(0,\infty)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция, $\delta_M(\cdot)$ — характеристическая функция заданного открытого множества M из $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\delta_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M,\\ 0, & x\notin M.\end{cases}\tag{1.4}$$

Относительно множества M и его дополнения $G=\mathbb{R}^n\setminus M$ предполагается, что оба эти множества непусты и для любого $x\in G$ касательный конус Кларка $T_G(x)$ (см. [8]) имеет непустую внутренность, т. е. $\operatorname{int} T_G(x)\neq\varnothing$. Время $T>0$ окончания процесса управления считается свободным. В качестве допустимых траекторий в задаче (P) рассматриваются все абсолютно непрерывные решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (1.2), определенные на различных интервалах времени $[0,T]$, $T>0$, и удовлетворяющие концевым ограничениям (1.3). Допустимая траектория $x_*(\cdot)$, определенная на некотором интервале $[0,T_*]$, $T_*>0$, называется *оптимальной в задаче* (P), если функционал (1.1) принимает на паре $(T_*,x_*(\cdot))$ наименьшее возможное значение.

Основное отличие сформулированной задачи (P) от классической задачи оптимального управления [12] состоит в “штрафующем” интегральном члене с разрывным интегрантом в функционале (1.1). Наличие в интегранте характеристической функции $\delta_M(\cdot)$ означает, что нахождение траекторий системы в множестве M физически возможно, но нежелательно. Такие нежелательные множества M состояний управляемой системы (“зоны риска”) могут возникать в различных приложениях. Например, множество M может соответствовать состояниям перегрузки или неустойчивости технической системы. Положительная функция $\lambda(\cdot)$ в интегранте в функционале (1.1) определяет предпочтительность состояний $x\in M$.

В классической теории оптимального управления наличие нежелательного множества M состояний системы обычно моделируется при помощи дополнительного фазового ограничения вида (см. [12, гл. 6])

$$x(t)\in G=\mathbb{R}^n\setminus M,\quad t\in[0,T].$$

В этом случае фазовое ограничение G (“зона безопасности”) предполагается замкнутым (т. е. зона риска M — открытое множество). Заметим, что задачу оптимального управления с фазовым ограничением можно рассматривать как предельный случай задачи (P) с постоянной функцией $\lambda(x)\equiv\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, при $\lambda\to\infty$. В этом смысле постановка задачи (P) является ослаблением постановки задачи оптимального управления с фазовым ограничением.

Различные задачи оптимального управления, включающие характеристическую функцию заданного множества M, в случае когда M — замкнутое множество, рассматривались в работах [4; 5; 13–15] (подробнее см. [3]). Однако на случай открытого множества M используемые в этих работах методы напрямую не переносятся. При этом случай открытого множества M представляет наибольший интерес, поскольку подразумевает естественную связь задачи (P) с задачей оптимального управления с фазовым ограничением. Кроме того, в этом случае содержащий характеристическую функцию интегральный функционал полунепрерывен снизу, что влечет (при естественных предположениях) существование решения в задаче (P).

Впервые случай открытого множества M был рассмотрен в работе автора [3] для задачи на фиксированном отрезке времени $[0,T]$, $T>0$. В настоящей работе результаты, полученные в [3], распространяются на случай задачи (P) со свободным временем и более общим функционалом смешанного типа, что существенно расширяет область применения развитой теории. Кроме того, приведены условия, гарантирующие невырожденность и поточечную нетривиальность полученных необходимых условий оптимальности.

В дальнейшем через $N_A(a)=T_A^*(a)$ и $\hat{N}_A(a)$ будем обозначать нормальный конус Кларка [8] и конус обобщенных нормалей [10] соответственно к замкнутому множеству $A\subset\mathbb{R}^n$ в точке $a\in A$, а через ∂A — границу замкнутого множества A. Далее, через $H(F(x),\psi)=$

$\max_{f\in F(x)}\langle f,\psi\rangle$ будем обозначать значения гамильтониана $H(F(\cdot),\cdot)$ дифференциального включения (1.2) в точке $(x,\psi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, а через $\partial H(F(x),\psi)$ — субдифференциал Кларка локально липшицевой функции $H(F(\cdot),\cdot)$ в точке $(x,\psi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ [8]. Наконец, через $\partial\hat{\varphi}(T,x_1,x_2)$ будем обозначать обобщенный градиент локально липшицевой функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке $(T,x_1,x_2)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ (см. [10]).

Для произвольного $x\in\mathbb{R}^n$ и $i\in\mathbb{N}$ и положим $\tilde{\delta}_i(x)=\min\{i\rho(x,G),\delta_M(x)\}$, где $\rho(x,G)=\min\{\|x-\xi\|:\xi\in G\}$ — расстояние от точки x до непустого замкнутого множества $G=\mathbb{R}^n\setminus M$, а функция $\delta_M(\cdot)$ определена равенством (1.4). Для $i\in\mathbb{N}$ определим функцию $\delta_i\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^1$ равенством

$$\delta_i(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde{\delta}_i(x+y)\omega_i(y)\,dy, \tag{1.5}$$

где $\omega_i(\cdot)$ — гладкая ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$) вероятностная плотность с носителем $\operatorname{supp}\omega_i(\cdot)\subset 1/2^iB$. Здесь B — замкнутый единичный шар из $\mathbb{R}^n$ с центром в 0. Тогда для любого $i\in\mathbb{N}$ функция $\delta_i(\cdot)$ является гладкой, как конволюция с гладкой функцией $\omega_i(\cdot)$.

Следующие два вспомогательных результата несложно вытекают из определения характеристической функции $\delta_M(\cdot)$, непрерывности положительной функции $\lambda(\cdot)$ и леммы Фату (см. доказательства аналогичных лемм 1 и 2 в [3]).

Лемма 1. *Для любого $x\in\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\delta_i(x)\le\delta_M(x)+\frac{i}{2^i},\quad i\in\mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ непрерывных функций сходится равномерно на некотором интервале $[0,T]$, $T>0$, к непрерывной функции $\tilde{x}\colon[0,T]\mapsto\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\liminf_{i\to\infty}\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt\ge\int\limits_0^T\lambda(x(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt.$$

Из лемм 1 и 2 получаем следующий результат о полунепрерывности снизу интегрального функционала, содержащего характеристическую функцию множества M.

Теорема 1. *Для любого $T>0$ интегральный функционал $J_M\colon C([0,T],\mathbb{R}^n)\mapsto\mathbb{R}^1$, определенный равенством*

$$J_M(x(\cdot))=\int\limits_0^T\lambda(x(t))\delta_M(x(t))\,dt,$$

полунепрерывен снизу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T>0$ задано и последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ непрерывных функций $x_i\colon[0,T]\mapsto\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots$, сходится к непрерывной функции $\tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$J_M(x_i(\cdot))=\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_M(x_i(t))\,dt\ge\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt-\frac{i}{2^i}\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\,dt,\quad i\in\mathbb{N}.$$

Откуда в силу непрерывности функции $\lambda(\cdot)$ и леммы 2, переходя к пределу при $i\to\infty$, получаем

$$\liminf_{i\to\infty}J_M(x_i(\cdot))\ge\liminf_{i\to\infty}\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt\ge\int\limits_0^T\lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt=J_M(\tilde{x}(\cdot)).\qquad\square$$

Следствие 1. *Пусть множество допустимых траекторий в задаче* (P) *непусто,* $M_0 \cap M_1 = \varnothing$ *и существует такое компактное множество* $A \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$*, что для любой допустимой траектории* $x(\cdot)$ *для всех* $t \in [0,T]$*, где* $[0,T]$ *— интервал определения* $x(\cdot)$*, выполняется включение* $(t, x(t)) \in A$*. Тогда в задаче* (P) *существует оптимальная допустимая траектория.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса [6, § 0.1] и теоремы 1 минимум функционала (1.1) достигается (см. также [18, Theorem 9.3.i]). □

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть* $x_*(\cdot)$ *— оптимальная допустимая траектория в задаче* (P) *и* $T_* > 0$ *— соответствующее оптимальное время. Тогда существуют постоянная* $\psi^0 \geq 0$*, абсолютно непрерывная функция* $\psi\colon [0,T_*] \mapsto \mathbb{R}^n$ *и ограниченная регулярная борелевская векторная мера* η *на* $[0,T_*]$*, так что выполняются следующие условия*:

1) *мера* η *сосредоточена на множестве* $\mathfrak{M} = \{t \in [0,T_*]\colon x_*(t) \in \partial G\}$ *и неположительна на множестве непрерывных функций* $y\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ *со значениями* $y(t) \in T_G(x_*(t))$*,* $t \in \mathfrak{M}$*, т. е.*
$$\int\limits_{\mathfrak{M}} y(t)\, d\eta \leq 0;$$

2) *для п.в.* $t \in [0,T_*]$ *выполняется гамильтоново включение*
$$(-\dot{\psi}(t), \dot{x}_*(t)) \in \partial H\biggl(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int\limits_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr);$$

3) *для* $t = T_*$ *и любого* $t \in [0,T_*)$*, являющегося точкой правой аппроксимативной непрерывности*[2] *функции* $\delta_M(x_*(\cdot))$*, выполняется условие стационарности*
$$H\biggl(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int\limits_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr) - \psi^0 \lambda(x_*(t)) \delta_M(x_*(t))$$
$$= H\left(x_*(0), \psi(0)\right) - \psi^0 \lambda(x_*(0)) \delta_M(x_*(0))\,;$$

4) *выполняется условие трансверсальности*
$$\biggl(H\biggl(x_*(T_*), \psi(T_*) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int\limits_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr), \psi(0),$$
$$- \psi(T_*) - \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(s))\, d\eta - \psi^0 \int\limits_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr)$$
$$\in \psi^0 \hat{\partial} \phi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \{0\} \times \hat{N}_{\widetilde{M_0}} \times \hat{N}_{\widetilde{M_1}};$$

5) *выполняется условие нетривиальности* $\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0$.

[2]Напомним, что точка $t \in [0,T)$, $T > 0$, называется *точкой правой аппроксимативной непрерывности функции* $\xi : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^1$, если существует такое измеримое по Лебегу множество $E \subset [t,T]$, что точка t является его точкой плотности, а функция $\xi(\cdot)$ непрерывна справа в точке t вдоль множества E (см. [11, гл. 9, § 5]).

Здесь $\int_0^t \lambda(x_*(s))\,d\eta$ — *интеграл Лебега от функции* $\lambda(x_*(\cdot))$ *по мере* η *на интервале* $[0,t]$, $t \geq 0$, *а множества* $\widetilde{M_0}$ *и* $\widetilde{M_1}$ *определены равенствами*

$$\widetilde{M_0} = \begin{cases} M_0, & x_*(0) \in M, \\ M_0 \cap G, & x_*(0) \in G \end{cases} \quad \text{и} \quad \widetilde{M_1} = \begin{cases} M_1, & x_*(T_*) \in M, \\ M_1 \cap G, & x_*(T_*) \in G. \end{cases} \tag{1.7}$$

Приведенное в следующем разделе доказательство теоремы 2 основано на аппроксимации задачи (P) последовательностью $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ стандартных задач оптимального управления для дифференциального включения, для которых соответствующие необходимые условия оптимальности известны (см. [8, теорема 3.6.1]), с последующим в них предельным переходом при $i \to \infty$. Отметим, что аналогичные методы аппроксимаций использовались ранее для получения необходимых условий оптимальности в задачах с фазовыми ограничениями в работах [1; 2; 16; 17].

2. Построение последовательности аппроксимирующих задач и доказательство теоремы 2

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P), а $T_* > 0$ — соответствующее оптимальное время. В дальнейшем будем предполагать, что траектория $x_*(\cdot)$ доопределена на бесконечный интервал $[T_*, \infty)$ как постоянная, т. е. $x_*(t) \equiv x_*(T_*)$, $t \geq 0$.

Для $i \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P_i):

$$J_i(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + (T - T_*)^2 + \int_0^T \left[\lambda(x(t))\delta_i(x(t)) + \|x(t) - x_*(t)\|^2\right] dt \to \min\,, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{2.2}$$

$$|T - T_*| \leq \frac{T_*}{2}, \quad \|x(t) - x_*(t)\| \leq 1, \quad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

$$x(0) \in \widetilde{M_0}, \quad x(T) \in \widetilde{M_1}. \tag{2.4}$$

Здесь функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ и многозначное отображениие $F(\cdot)$ — те же самые, что и в задаче (P), а множества $\widetilde{M_0}$ и $\widetilde{M_1}$ определены равенствами (1.7). Как и в задаче (P), множество допустимых траекторий в (P_i) состоит из всех абсолютно непрерывных решений $x(\cdot)$ дифференциального включения (2.2), определенных на различных интервалах времени $[0,T]$, $T > 0$, удовлетворяющих ограничениям (2.3) и краевым ограничениям (2.4).

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ задача (P_i) является стандартной задачей оптимального управления со свободным временем для дифференциального включения с липшицевыми данными, фазовыми ограничениями и терминальными ограничениями (см. [8, § 3.6]). Поскольку траектория $x_*(\cdot)$ является допустимой в задаче (P_i), то в силу теоремы Филиппова [18, Theorem 9.3.i] для любого $i \in \mathbb{N}$ существует оптимальная допустимая траектория $x_i(\cdot)$ в задаче (P_i). Пусть $T_i > 0$ — соответствующее оптимальное время. Всегда будем предполагать, что траектория $x_i(\cdot)$ продолжена на бесконечный интервал $[T_i, \infty)$ как постоянная, т. е. $x_i(t) \equiv x_i(T_i))$, $t \geq T_i$.

Далее будем называть $\{(P_i)\}_{k=1}^{\infty}$ *последовательностью аппроксимирующих задач, соответствующей оптимальной траектории* $x_*(\cdot)$.

Следующий результат позволяет получить утверждения теоремы 2 посредством предельного перехода в необходимых условиях оптимальности для задачи (P_i) при $i \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория, T_* — соответствующее оптимальное время, а $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппроксимирующих задач. Пусть $x_i(\cdot)$, $T_i > 0$, — оптимальная допустимая траектория и соответствующее оптимальное время в задаче (P_i), $i \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} T_i = T_*, \tag{2.5}$$

$$\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = x_*(\cdot) \quad \text{в} \quad C([0,T_*],\mathbb{R}^n), \tag{2.6}$$

$$\lim_{i\to\infty} \dot{x}_i(\cdot) = \dot{x}_*(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L^1([0,T_*],\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{T_i} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt = \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_M(x_*(t))\,dt. \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как $x_i(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P_i), $i \in \mathbb{N}$, а $x_*(\cdot)$ — допустимая траектория в (P_i), то в силу леммы 1 имеем (см. (1.6) и (2.1))

$$\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) + (T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \left[\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right]\,dt$$

$$\le \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_i(x_*(t))\,dt$$

$$\le \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_M(x_*(t))\,dt + \frac{i}{2^i}\int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\,dt. \tag{2.9}$$

Так как $|T_i - T_*| \le T_*/2$, $i \in \mathbb{N}$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{i\to\infty} T_i = \tilde{T} > 0$. Далее, множество допустимых траекторий дифференциального включения (2.2), удовлетворяющих фазовому ограничению (2.3), является компактом в пространстве $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$. Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — некоторая предельная точка последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$. Тогда $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая траектория в задаче (P) и, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $x_*(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P), а $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая траектория в этой задаче, то

$$\varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_M(x_*(t))\,dt \le \varphi(\tilde{T}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(\tilde{T})) + \int\limits_0^{\tilde{T}} \lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt.$$

Откуда для $i \in \mathbb{N}$ в силу (2.9) получаем

$$\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) - \varphi(\tilde{T}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(\tilde{T})) + \int\limits_0^{T_i} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt - \int\limits_0^{\tilde{T}} \lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt$$

$$+\ (T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\,dt \le \frac{i}{2^i}\int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\,dt. \tag{2.10}$$

Так как $\lim_{i\to\infty} T_i = \tilde{T}$ и $\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$, то в силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число i_0, что для всех $i \geq i_0$ имеем

$$\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) - \varphi(\tilde{T}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(\tilde{T})) \geq -\varepsilon,$$

$$\int\limits_0^{T_i} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\, dt - \int\limits_0^{\tilde{T}} \lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\, dt \geq -\varepsilon.$$

Откуда в силу (2.10) для любого $i \geq i_0$ получаем

$$(T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\, dt \leq 2\varepsilon + \frac{i}{2^i} \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\, dt.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$, выводим

$$\limsup_{i\to\infty} \left[(T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\, dt \right] \leq 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство влечет равенства

$$\lim_{i\to\infty} T_i = T_*, \quad \lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{T_*} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\, dt = 0.$$

Таким образом, равенство (2.5) доказано. Поскольку $\lim_{i\to\infty} T_i = \tilde{T} = T_*$ и $\tilde{x}(\cdot)$ — произвольная предельная точка последовательности $\{x(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$, то выполняется условие (2.6). Далее, равенство (2.7) вытекает из (2.6) и того факта, что последовательность $\{\dot{x}_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена в $L^\infty([0,T_*],\mathbb{R}^n)$. Наконец, в силу леммы 2 равенство (2.8) вытекает из условий (2.5), (2.6) и неравенства (2.10). □

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 3*, переходя, если нужно, в последовательности* $\{\delta_i(x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *к подпоследовательности, можно считать, что*

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty} \delta_M(x_*(t)) \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [0,T_*]. \tag{2.11}$$

Доказательство. В силу открытости множества M для всех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in M$, из определения функций $\delta_M(\cdot)$ и $\delta_i(\cdot)$, $i = 1,2,\ldots$, (см. (1.4) и (1.5)) и условия (2.6) вытекает равенство $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty} \delta_M(x_*(t)) = 1$. Рассмотрим теперь множество тех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in G$. В этом случае $\delta_M(x_*(t)) = 0$ и в силу (2.8) выполняется равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{t\in[0,T_*]\colon x_*(t)\in G} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\ dt = 0.$$

Откуда в силу неотрицательности функций $\lambda(x_i(\cdot))\delta_i(x_i(\cdot))$, $i = 1,2,\ldots$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{meas}\{t \in [0,T_*]\colon x_*(t) \in G,\ \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t)) > \varepsilon\} = 0,$$

т. е. последовательность $\{\lambda(x_i(\cdot))\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 на множестве $\{t \in [0,T_*]\colon x_*(t) \in G\}$ по мере. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 при п.в. $t \in [0,T_*]$, для которых $x_*(t) \in G$, и, следовательно, для п.в. $t \in [0,T_*]$. Поскольку $\lim_{i\to\infty} \lambda(x_i(t)) = \lambda(x_*(t)) > 0$, $t \in [0,T_*]$, то отсюда вытекает условие (2.11). □

Заметим, что в силу следствия 2 и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [11, гл. VI, § 3]), не ограничивая общности, можно считать, что для любой непрерывной функции $\xi\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ для любого $t \in [0, T_*]$ справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^t \xi(x_i(s))\delta_i(x_i(s))\, ds = \int_0^t \xi(x_*(s))\delta_M(x_*(s))\, ds.$$

Перейдем теперь к доказательству непосредственно утверждений теоремы 2.

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P), $T_* > 0$ — соответствующее оптимальное время, а $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппоксимирующих задач (см. (2.1)–(2.4)). Тогда в силу условий (2.5) и (2.6) теоремы 3 для всех достаточно больших номеров i неравенства (2.3) выполняются как строгие. Следовательно, необходимые условия оптимальности в форме гамильтонова включения Кларка (см. [8, теорема 3.6.1])) для задач со свободным временем без фазовых ограничений и с негладкими концевыми ограничениями [9] выполняются для оптимальной траектории $x_i(\cdot)$ в задаче (P_i) для всех достаточно больших номеров i. Именно существуют такие число $\psi_i^0 \geq 0$ и абсолютно непрерывная функция $\tilde{\psi}_i\colon [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^n$, что

$$(-\dot{\tilde{\psi}}_i(t), \dot{x}_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0\Big(\lambda(x_i(t))\frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} + \delta_i(x_i(t))\frac{\partial \lambda(x_i(t))}{\partial x} + 2(x_i(t) - x_*(t), 0)\Big), \quad (2.12)$$

$$(h_i(T_i), \tilde{\psi}_i(0), -\tilde{\psi}_i(T_i)) \in \hat{\partial}\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) + \{0\} \times \hat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_i(0)) \times \hat{N}_{\widetilde{M}_2}(x_i(T_i)), \quad (2.13)$$

$$\dot{h}_i(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -2\psi_i^0\langle x_i(t) - x_*(t), \dot{x}_*(t)\rangle, \quad (2.14)$$

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| \neq 0. \quad (2.15)$$

Здесь абсолютно непрерывная функция $h_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, определяется равенством

$$h_i(t) = H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0\big(\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\big), \quad t \in [0, T_i]. \quad (2.16)$$

Домножив на положительный множитель сопряженные переменные ψ_i^0, $\tilde{\psi}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, в силу (2.15), не ограничивая общности, можно считать, что выполняется равенство

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| + \psi_i^0 \int_0^{T_i} \Big\|\frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x}\Big\|\, dt = 1. \quad (2.17)$$

Введем новые сопряженные переменные следующими равенствами:

$$\eta_i(t) = \psi_i^0 \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x}, \quad \psi_i(t) = \tilde{\psi}_i(t) - \int_0^t \lambda(x_i(s))\eta_i(s)\, ds - \psi^0 \int_0^t \delta_i(x_i(s))\frac{\partial \lambda(x_i(s))}{\partial x}\, ds, \quad t \in [0, T_i].$$

В терминах этих новых сопряженных переменных гамильтоново включение (2.12) запишется в виде

$$\big(-\dot{\psi}_i(t), \dot{x}_i(t)\big) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H\Big(x_i(t), \psi_i(t) + \int_0^t \lambda(x_i(s))\eta_i(s)\, ds + \psi_i^0 \int_0^t \delta_i(x_i(s))\frac{\partial \lambda(x_i(s))}{\partial x}\, ds\Big) - 2\psi_i^0(x_i(t) - x_*(t), 0). \quad (2.18)$$

В силу условия (2.17), переходя, если нужно к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i^0 \to \psi^0 \geq 0$, $\psi_i(0) = \tilde{\psi}_i(0) \to \psi_0$, $\|\psi_0\| \leq 1$, при $i \to \infty$, а в силу теоремы Хелли (см., например, [18, Theorem 15.1.i.]) последовательность $\{\eta_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится слабо при $i \to \infty$ к регулярной борелевской мере η на $[0, T_*]$.

В силу включения (2.18) и предложения 3.2.4 из [8] имеем $\|\dot{\psi}_i(t)\| \leq k(\|\psi_i(t)\|+1)$, $t \in [0, T_i]$, где $k \geq 0$ — некоторая постоянная. Следовательно, в силу леммы Гронуолла (см., например, [18, Lemma 18.1.i]), не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i(\cdot) \to \psi(\cdot)$ в $C([0, T_*], \mathbb{R}^n)$, $\dot{\psi}_i(\cdot) \to \dot{\psi}(\cdot)$ слабо в $L^1([0, T_*], \mathbb{R}^n)$ при $i \to \infty$, где $\psi\colon [0, T_*] \mapsto \mathbb{R}^n$ — липшицевая функция.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 носит технический характер и основывается на предельном переходе в необходимых условиях оптимальности (2.12)–(2.15) для задачи (P_i) при $i \to \infty$. С небольшими изменениями оно повторяет доказательство соответствующих необходимых условий оптимальности для задачи с фазовым ограничением в [16, Theorem 1] и [3, Theorem 1]. При этом используются теорема Мазура [6], дифференциальные свойства функции расстояния (см. определение функции $\delta_i(\cdot)$ равенством (1.5)), полунепрерывность сверху субдифференциала Кларка [8], полунепрерывность сверху нормального конуса Кларка $N_G(\cdot)$ (в случае $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$, $x \in G$), полунепрерывность сверху конуса обощенных нормалей $\hat{N}_{\widetilde{M}_i}(\cdot)$ к замкнутому множеству $\widetilde{M}_i$, $i = 1, 2$, полунепрерывность сверху обобщенного градиента $\hat{\partial}\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ локально липшицевой функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$, а также следствие 2. Подробное описание аналогичного предельного перехода в случае фиксированного момента времени $T > 0$ см. в [17, разд. 3]. Теорема 2 доказана.

3. Условия невырожденности и поточечной нетривиальности

Доказанная в предыдущем разделе теорема 2 по форме аналогична известным необходимым условиям оптимальности для задачи оптимального управления дифференциальным включением с фазовым ограничением (см. [16, Theorem 1]). При этом главное отличие теоремы 2 от теоремы 1 в [16] состоит в условии стационарности 3), которое играет ту же роль, что и условие (b) на скачок меры в [16, Theorem 1]. Оказывается, что в некоторых случаях условие стационарности 3) влечет условие (b) на скачок меры из [16, Theorem 1]. Данное обстоятельство позволяет получить достаточные условия невырожденности и поточечной нетривиальности для теоремы 2, аналогичные полученным в [16]. Другие результаты о невырожденности различных варинтов необходимых условий оптимальности для задач с фазовыми ограничениями см. в [1; 2; 7; 19; 20].

Аналогично [16] допустимую траекторию $x_*(\cdot)$ будем называть *управляемой в концевых точках* $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ (относительно множества G), если

$$H(x_*(0), -g_0) > 0 \quad \text{для любого} \quad g_0 \in N_G(x_*(0)) \cap \widehat{N}_{\widetilde{M}_0}, \quad g_0 \neq 0,$$

и

$$H(x_*(T_*), g_1) > 0 \quad \text{для любого} \quad g_1 \in N_G(x_*(T_*)) \cap \widehat{N}_{\widetilde{M}_1}, \quad g_1 \neq 0.$$

Теорема 4. *Пусть допустимая траектория $x_*(\cdot)$ управляема в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ и удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда выполняется следующее условие невырожденности:*

$$\psi^0 + \operatorname{meas}\Big\{t \in [0, T_*] \colon \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))d\eta + \psi^0 \int\limits_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds \neq 0\Big\} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда

$$\psi^0 = 0 \quad \text{и} \quad \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))d\eta = 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T_*].$$

Поскольку $\psi^0 = 0$, то условие стационарности 3) теоремы 2 в точке $t = T_*$ и во всех точках $t \in [0, T_*]$, являющихся точками правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, принимает вид

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta\right) = H\left(x_*(0), \psi(0)\right).$$

Далее, почти каждая точка $t \in [0, T_*]$ является точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, а функция $t \mapsto \int_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta$ непрерывна справа на $[0, T_*]$. Отсюда в силу предыдущего равенства для $t = T_*$ и п.в. $t \in [0, T)$ получаем тождество

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta\right) \equiv H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta - \lambda(x_*(t))\eta(t)\right), \quad t \in [0, T_*]. \tag{3.19}$$

Здесь $\eta(t)$ — атомарная составляющая меры η в точке $t \in [0, T_*]$. Данное тождество полностью аналогично условию на скачок меры (b) в [16, Theorem 1]. Оставшаяся часть доказательства теоремы 4 основана на использовании тождества (3.19), свойстве управляемости траектории $x_*(\cdot)$ в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$, определении меры η и почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 в [16, Theorem 2]. □

Теорема 5. *Пусть допустимая траектория $x_*(\cdot)$ управляема в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$, удовлетворяет условиям теоремы 2 и, кроме того,*

$$H(x_*(t), (-1)^i g) > 0 \quad \forall g \in N_G(x_*(t)), \quad t \in (0, T_*), \quad i = 1, 2. \tag{3.20}$$

Тогда

$$\psi^0 + \left\| \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int\limits_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds \right\| > 0, \quad t \in (0, T_*). \tag{3.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество

$$\Delta = \left\{ t \in (0, T_*) \colon \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta = 0 \right\}.$$

Предположим, что условие (3.21) не выполняется. Тогда $\psi^0 = 0$ и $\Delta \neq \varnothing$.

При $\psi^0 = 0$ условие стационарности 3) теоремы 2 в точке $t = T_*$ и во всех точках $t \in [0, T_*]$, являющихся точками правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, имеет вид

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta\right) = H\left(x_*(0), \psi(0)\right).$$

Так как почти каждая точка $t \in [0, T_*]$ является точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, а функция $t \mapsto \int_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta$ непрерывна справа на $[0, T_*]$, то отсюда, как и в доказательстве теоремы 4, вытекает тождество (3.19), которое полностью аналогично условию на скачок меры (b) в [16, Theorem 1]. Поэтому, полностью следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы 4 в [16], используя тождество (3.19), свойство управляемости траектории $x_*(\cdot)$ в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$, условие (3.20) и определение меры η, можно показать, что множество Δ является одновременно открытым и замкнутым относительно интервала $(0, T_*)$. Поэтому $\Delta = (0, T_*)$. Однако это противоречит утверждению теоремы 4. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнов А.В.** Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Мат. анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 27. С. 147–235. ISBN: 5-88688-015-1 .
2. **Арутюнов А.В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 254 p.
3. **Асеев С.М.**, Оптимизация динамики управляемой системы при наличии факторов риска // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, №. 1. С. 27–42. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42 .
4. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Докл. РАН, 2004. Т. 395, №. 5. С. 583–585.
5. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // Нелинейная динамика и управление: сб. статей. М.: Физматлит, 2004. Т. 4. С. 179–204.
6. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.**, Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
7. **Arutyunov, A.V., Karamzin, D.Yu., Pereira, F.L.** The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 149, iss. 3. P. 474–493.
8. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
9. **Мордухович Б.Ш.** Принцип макисмума в задачах оптимального быстродействия с негладкими ограничениями // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1014–1023.
10. **Мордухович Б.Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
11. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
12. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 393 p.
13. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника. 1993. Т. 99. С. 3–8.
14. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** Об одной специальной задаче оптимального быстродействия // Кибернетика и вычисл. техника. 1994. Т. 101. С. 11–15.
15. **Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 222–239.
16. **Arutyunov A.V., Aseev S.M.** Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 930–952. doi: 10.1137/S036301299426996X .
17. **Aseev S.M.** Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization // J. Math. Sci. 1999. Vol. 94, no. 3. P. 1366–1393. doi: 10.1007/BF02365018 .
18. **Cesari L.** Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations. N Y, Springer, 1983, 542 p. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5 .
19. **Ferreira, M.M.A., Vinter, R.B.** When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate? // J. Math. Anal. Appl. 1994. Vol. 187, no. 2. P. 438–467. doi: 10.1006/jmaa.1994.1366 .
20. **Fontes F.A.C.C., Frankowska H.** Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 166, iss. 1. P. 115–136. doi: 10.1007/s10957-015-0704-1 .

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом дифференциальных уранений
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила 10.10.2017

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions. *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 54, no. 6, pp. 1342–1400. doi: 10.1007/BF01373649 .

2. Arutyunov A.V. *Optimality conditions. Abnormal and degenerate problems.* Math. and its Appl. (Dordrecht), vol. 526, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000, 299 p. ISBN: 0-7923-6655-7. Original Russian text published in Arutyunov A.V. *Usloviya ekstremuma. Anormal'nye i vyrozhdennye zadachi.* Moscow, Faktorial Publ., 1997, 255 p. ISBN: 5-88688-015-1.
3. Aseev S.M. Optimization of dynamics of a control system in the presence of risk factors. *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 27–42 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42.
4. Aseev S.M., Smirnov A.I. The Pontryagin maximum principle for the problem of optimally crossing a given domain. *Dokl. Math.*, 2004, vol. 69, no. 2, pp. 243–245.
5. Aseev S.M., Smirnov A.I. Necessary first-order conditions for optimal crossing of a given region. *Comput. Math. Model.*, 2007, vol. 18, no. 4, pp. 397–419. doi: 10.1007/s10598-007-0034-8.
6. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Amsterdam, Elsevier North-Holland, 1979, 460 p. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.
7. Arutyunov, A.V., Karamzin, D.Yu., Pereira, F.L. The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited. *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, vol. 149, no. 3, pp. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5.
8. Clarke F.H. *Optimization and nonsmooth analysis.* N Y, Wiley, 1983, 308 p. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz.* Moscow, Nauka Publ. 1988. 280 p.
9. Mordukhovich B.Sh. Maximum principle in the problem of time optimal response with nonsmooth constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1976, vol. 40, no. 6, pp. 960–969. doi: 10.1016/0021-8928(76)90136-2.
10. Mordukhovich B.Sh. *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in problems of optimization and control]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 360 p.
11. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable.* N Y, Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p. (Translation of chapters I to IX of the author's *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi*, Moscow, Gostehizdat Publ., 1950).
12. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y, London, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 393 p.
13. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On the problem of the optimal passage through a given domain. *Kibernet. i Vychisl. Tekhn.* 1993, vol. 99, pp. 3–8 (in Russian).
14. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On a special time-optimality problem. *Kibernet. i Vychisl. Tekhn.*, 1994, vol. 101, pp. 11–15.
15. Smirnov A.I. Necessary optimality conditions for a class of optimal control problems with discontinuous integrand. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, no. 1, pp. 213–230. doi: 10.1134/S0081543808030176.
16. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 930–952. doi: 10.1137/S036301299426996X.
17. Aseev S.M. Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 94, no. 3, pp. 1366–1393. doi: 10.1007/BF02365018.
18. Cesari L. *Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations.* N Y, Springer, 1983, 542 p. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5.
19. Ferreira, M.M.A., Vinter, R.B. When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate? *J. Math. Anal. Appl.*, 1994, vol. 187, no. 2, pp. 438–467. doi: 10.1006/jmaa.1994.1366.
20. Fontes F.A.C.C., Frankowska H. Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 166, no. 1, pp. 115–136. doi: 10.1007/s10957-015-0704-1.

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Sergey Mironovich Aseev, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: aseev@mi.ras.ru.