ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

Н. Н. Петров

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)} z_i = az_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

где $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (1,2)$ функции f. Множество допустимых управлений V — строго выпуклый компакт, a — вещественное число. Целью группы преследователей является поимка убегающего не менее чем m различными преследователями, при этом моменты поимки могут не совпадать. Терминальные множества — начало координат. Преследователи используют квазистратегии. В терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, многократная поимка, преследователь, убегающий.

N. N. Petrov. A multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives.

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider a problem of pursuing one evader by a group of pursuers with equal capabilities of all participants. The dynamics of the problem is described by the system

$$D^{(\alpha)} z_i = az_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

where $D^{(\alpha)} f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (1,2)$ of the function f. The set of admissible controls V is a strictly convex compact set and a is a real number. The aim of the group of pursuers is to catch the evader by at least m different pursuers, possibly at different times. The terminal sets are the origin. The pursuers use quasi-strategies. We obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. The investigation is based on the method of resolving functions, which allows us to obtain sufficient conditions for the termination of the approach problem in some guaranteed time.

Keywords: differential game, group pursuit, multiple capture, pursuer, evader.

MSC: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-156-164

Введение

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–4], причем, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [5–7] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В настоящей работе рассматривается одна задача о многократной поимке группой преследователей одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а движение игроков описывается уравнениями с дробными по Капуто производными.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки(проект 1.5211.2017/8.9).

Получены достаточные условия поимки. Н. Л. Григоренко [8] получил необходимые и достаточные условия многократной поимки для задачи простого преследования. Условия одновременной многократной поимки для задачи простого преследования с равными возможностями всех участников получены А. И. Благодатских [9]. Задача о многократной поимке убегающего в примере Л.С. Понтрягина представлена в работах [10–13]. Многократная поимка в линейных дифференциальных играх рассматривалась в [2; 14–16]. Задача группового преследования с фазовыми ограничениями и дробными производными порядка $\alpha \in (0,1)$ рассматривалась в [17].

1. Постановка задачи

О п р е д е л е н и е 1 [18]. Пусть $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — функция такая, что f' — абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$, $\alpha \in (1,2)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$\big(D^{(\alpha)}f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f''(s)}{(t-s)^{\alpha-1}}\,ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1,\ldots,P_n$ и один убегающий E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = x_i^1, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $\alpha \in (1,2)$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$D^{(\alpha)}z_i = az_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad \dot{z}_i(0) = z_i^1 = x_i^1 - y^1, \quad u_i, v \in V. \tag{1.3}$$

Здесь и всюду далее $i \in I = \{1,\ldots,n\}$. Обозначим $z^0 = \{z_i^0, z_i^1\}$ — вектор начальных позиций. Считаем, что $z_i^1 \neq 0$ для всех i.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что задана квазистратегия U_i преследователя P_i, если определено отображение U_i, ставящее в соответствие начальным позициям z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

О п р е д е л е н и е 3. В игре происходит m-кратная поимка (при $m = 1$ — поимка), если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1,\ldots,U_n$ преследователей $P_1,\ldots,P_n$ такие, что для всякой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V, t \in [0, T(z^0)]$, существуют моменты $\tau_1,\ldots\tau_m \in [0, T(z^0)]$, попарно различные индексы $i_1,\ldots,i_m \in I$, что $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1,\ldots,m$.

Введем следующие обозначения.

$E_\rho(z,\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)}$ — обобщенная функция Миттаг — Лефлера [20, с. 17],

$$f_i(t)=\begin{cases}t^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)z_i^0+t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,2)z_i^1, \text{ если } a<0,\\ \dfrac{z_i^0}{t}+z_i^1, \text{ если } a=0,\end{cases}$$

$$\lambda(z,v)=\sup\{\lambda\geqslant 0\big|\ -\lambda z\in V-v\},\ \gamma=-a\Gamma(2-\alpha),$$

$$\Omega(l)=\{(i_1,\dots,i_l)\big|\ i_1,\dots,i_l\in I \text{ и попарно различны}\},$$

$$\delta_0^+=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(z_j^1,v),\quad \delta_0^-=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(-z_j^1,v),$$

$$\delta_t^+=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(f_j(t),v),\quad \delta_t^-=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(-f_j(t),v),$$

$$\delta_0=\min\{\delta_0^+,\delta_0^-\},\quad \delta_t=\min\{\delta_t^+,\delta_t^-\},$$

$$r(t,s)=\begin{cases}1, \text{ если } E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\geqslant 0,\\ -1, \text{ если } E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)<0,\end{cases}$$

$$\overline{E}(t,s)=(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left(a(t-s)^\alpha,\alpha\right).$$

2. Достаточные условия поимки

2.1. Достаточные условия поимки при $a<0$

Лемма 1. *Пусть $a<0,\delta_0>0$. Тогда существует $T>0$ такой, что для всех $t>T$ справедливо неравенство $\delta_t>0.5\gamma\delta_0$.*

Доказательство. При $t\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [19, формула (1.2.4)]:

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)}+O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),$$
$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,2)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(2-\alpha)}+O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),$$

где под $O(g)$ при $t\to+\infty$ понимается конкретная функция G такая, что функция G/g является ограниченной на $(A,+\infty)$ при некотором $A>0$. Следовательно, функции f_i представимы в виде

$$f_i(t)=-\frac{z_i^0}{at\Gamma(1-\alpha)}+\frac{z_i^1}{\gamma}+O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)$$

и поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty}f_i(t)=\dfrac{z_i^1}{\gamma}$. Так как функция λ непрерывна [2, лемма 1.3.13], для всех $v\in V$ верно $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(f_i(t),v)=\lambda\Big(\dfrac{z_i^1}{\gamma},v\Big)$. Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\delta_t^+=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda\Big(\frac{z_j^1}{\gamma},v\Big)=\gamma\delta_0^+.$$

Аналогично $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta_t^-=\gamma\delta_0^-$. Отсюда существует $T>0$ такой, что для всех $t>T$ справедливо неравенство $\delta_t>0.5\gamma\delta_0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $a < 0, \delta_0 > 0$. *Тогда существует* $T_0 > 0$ *такой, что для любой измеримой функции* $v(\cdot), v(t) \in V$ *найдется множество* $\Lambda \in \Omega(m)$ *такое, что для всех* $j \in \Lambda$ *справедливо неравенство*

$$T_0^{\alpha-1} \int\limits_0^{T_0} \left|\overline{E}(T_0, s)\right| \lambda(f_j(T_0) r(T_0, s), v(s))\, ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что существует момент $T_1 > 0$ такой, что для всех $t > T_1$ справедливо неравенство $\delta_t > 0.5\gamma\delta_0$. Пусть $T > T_1$. Рассмотрим функции $(t \in [0, T])$

$$h_i(t) = t^{\alpha-1} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \lambda(f_i(T) r(T, s), v(s))\, ds.$$

Тогда

$$\max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} h_j(t) \geqslant \max_{\Lambda \in \Omega(m)} t^{\alpha-1} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \min_{j \in \Lambda} \lambda(f_j(T) r(T, s), v(s)) ds. \tag{2.1}$$

Так как для любых неотрицательных чисел $\{a_\Lambda\}_{\Lambda \in \Omega(m)}$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega(m)} a_\Lambda \geqslant \frac{1}{C_n^m} \sum_{\Lambda \in \Omega(m)} a_\Lambda,$$

то из (2.1) следует неравенство

$$\begin{aligned} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} h_j(t) &\geqslant \frac{t^{\alpha-1}}{C_n^m} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \sum_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(f_j(T) r(T, s), v(s)) ds \\ &\geqslant \frac{t^{\alpha-1}}{C_n^m} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \lambda(f_j(T) r(T, s), v(s))\, ds \\ &\geqslant \frac{\delta_0 \gamma t^{\alpha-1}}{2C_n^m} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| ds \geqslant \frac{\delta_0 \gamma}{2C_n^m} t^{\alpha-1} \int\limits_0^t \overline{E}(t, s)\, ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В силу [20, формула (1.15)]

$$\int\limits_0^t \overline{E}(t, s)\, ds = t^\alpha E_{1/\alpha}\left(a t^\alpha, \alpha + 1\right).$$

Поэтому из (2.2) получаем

$$\max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} h_j(T) \geqslant \frac{\delta_0 \gamma}{2C_n^m} T^{\alpha-1} T^\alpha E_{1/\alpha}(a T^\alpha, \alpha + 1) = \frac{\delta_0 \gamma}{2C_n^m} T^{2\alpha-1} E_{1/\alpha}(a T^\alpha, \alpha + 1).$$

Из [19, формула (1.2.4)] следует, что при $t \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$E_{1/\alpha}(a t^\alpha, \alpha + 1) = -\frac{1}{a t^\alpha} + O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big).$$

Поэтому при $T \to +\infty$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} h_j(T) \geqslant \frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m}\Big(-\frac{T^{\alpha-1}}{a} + O\Big(\frac{1}{T}\Big)\Big).$$

Так как $a < 0,\ \alpha - 1 > 0$, то существует $T_0 > T_1$ такой, что

$$\frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m}\Big(-\frac{T^{\alpha-1}}{a} + O\Big(\frac{1}{T}\Big)\Big) \geqslant 1.$$

Получили, что существует $T_0 > 0$ такой, что $\max\limits_{\Lambda\in\Omega(m)} \min\limits_{j\in\Lambda} h_j(T_0) \geqslant 1$. Следовательно, существует $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $h_j(T_0) \geqslant 1$ для всех $j \in \Lambda_0$. Что и требовалось доказать. □

Определим число

$$\hat{T} = \inf\Big\{t \ \Big|\ \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} t^{\alpha-1}\int_0^t |\overline{E}(t,s)|\lambda(f_j(t)r(t,s),v(s))\,ds \geqslant 1\Big\}.$$

В силу леммы 2 число $\hat{T} < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $a < 0,\ \delta_0 > 0$. Тогда в игре происходит m-кратная поимка.*

Доказательство. Пусть $v(s),\ s \in [0,\hat{T}]$, — произвольное управление убегающего. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \hat{T}^{\alpha-1}\int_0^t |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_j(\hat{T})r(\hat{T},s),v(s))\,ds.$$

Обозначим через $T_0 > 0$ первый корень данной функции. Отметим, что T_0 существует в силу леммы 2 и определения $\hat{T}$. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что для всех $j \in \Lambda_0$

$$1 - \hat{T}^{\alpha-1}\int_0^{T_0} |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_j(\hat{T})r(\hat{T},s),v(s))\,ds \leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $t_j \leqslant T_0, j \in \Lambda_0$, для которых

$$1 - \hat{T}^{\alpha-1}\int_0^{t_j} |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_j(\hat{T})r(\hat{T},s),v(s))\,ds = 0. \tag{2.3}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ обозначим через t_j моменты времени, для которых выполнено условие (2.3), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, полагая

$$u_i(s) = \begin{cases} v(s) - \lambda(f_i(\hat{T})r(\hat{T},s),v(s))f_i(\hat{T})r(\hat{T},s),\ s \in [0,\min\{t_i,\hat{T}\}], \\ v(s),\ s \in [\min\{t_i,\hat{T}\},\hat{T}]. \end{cases}$$

Тогда решение системы (1.3) представимо в виде [21, формула (19)]

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)z_i^0 + tE_{1/\alpha}(at^\alpha,2)z_i^1 + \int_0^t \overline{E}(t,s)(u_i(s)-v(s))ds.$$

Отсюда

$$\hat{T}^{\alpha-1} z_i(\hat{T}) = f_i(\hat{T}) + \hat{T}^{\alpha-1} \int\limits_0^{\hat{T}} \overline{E}(\hat{T}, s)(u_i(s) - v(s))\, ds$$

$$= f_i(\hat{T}) - \hat{T}^{\alpha-1} \int\limits_0^{\hat{T}} |\overline{E}(\hat{T}, s)| \lambda(f_i(\hat{T}) r(\hat{T}, s), v(s)) f_i(\hat{T})\, ds$$

$$= f_i(\hat{T}) \left(1 - \hat{T}^{\alpha-1} \int\limits_0^{t_i} |\overline{E}(\hat{T}, s)| \lambda(f_i(\hat{T}) r(\hat{T}, s), v(s)) \right) ds = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Следовательно, $z_i(\hat{T}) = 0$ для всех $i \in \Lambda_0$. $\square$

2.2. Достаточные условия поимки при $a = 0$

Лемма 3. *Пусть $a = 0$, $\delta_0^+ > 0$. Тогда существует $T > 0$ такой, что для всех $t > T$ справедливо неравенство $\delta_t^+ > 0.5\delta_0^+$.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{t \to +\infty} f_i(t) = z_i^1$, а функция λ непрерывна [2, лемма 1.3.13], то для всех $v \in V$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda(f_i(t), v) = \lambda(z_i^1, v)$. Поэтому $\lim\limits_{t \to +\infty} \delta_t^+ = \delta_0^+$, откуда получаем требуемое. $\square$

Лемма 4. *Пусть $a = 0$, $\delta_0^+ > 0$. Тогда существует $T_0 > 0$ такой, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V$ найдется множество $\Lambda \in \Omega(m)$ такое, что для всех $j \in \Lambda$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} \overline{E}(T_0, s) \lambda(f_j(T_0), v(s)) ds \geqslant 1.$$

Доказательство данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 2 с опорой на лемму 3. $\square$

Определим число

$$\hat{T} = \inf \left\{ t > 0 \mid \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \overline{E}(t, s) \lambda(f_j(t), v(s)) ds \geqslant 1 \right\}.$$

В силу леммы 4 число $\hat{T} < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $a = 0$, $\delta_0^+ > 0$. Тогда в игре происходит m-кратная поимка.*

Доказательство. Рассмотрим функции

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(m)} \min_{j \in \Lambda} \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^t \overline{E}(\hat{T}, s) \lambda(f_j(\hat{T}), v(s)) ds.$$

Обозначим через T_0 первый корень данной функции. Тогда существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что для всех $j \in \Lambda_0$

$$1 - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{T_0} \overline{E}(\hat{T}, s) \lambda(f_j(\hat{T}), v(s)) ds \leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $t_j \leqslant T_0, j \in \Lambda_0$, для которых

$$1 - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{t_j} \overline{E}(\hat{T}, s) \lambda(f_j(\hat{T}), v(s))\, ds = 0. \tag{2.4}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ обозначим через t_j моменты времени, для которых выполнено условие (2.4), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, полагая

$$u_i(s) = \begin{cases} v(s) - \lambda(f_i(\hat{T}), v(s)) f_i(\hat{T}), & s \in [0, \min\{t_i, \hat{T}\}], \\ v(s), \ s \in [\min\{t_i, \hat{T}\}, \hat{T}]. \end{cases}$$

Тогда решение системы (1.3) представимо в виде [21, формула (19)]

$$z_i(t) = z_i^0 + t z_i^1 + \int\limits_0^t \overline{E}(t, s)(u_i(s) - v(s)) ds.$$

Отсюда

$$\frac{z_i(\hat{T})}{\hat{T}} = f_i(\hat{T}) + \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{\hat{T}} \overline{E}(\hat{T}, s)(u_i(s) - v(s)) ds = f_i(\hat{T}) - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{\hat{T}} \overline{E}(\hat{T}, s) \lambda(f_i(\hat{T}), v(s)) ds \cdot f_i(\hat{T})$$

$$= f_i(\hat{T}) \Big(1 - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{t_i} \overline{E}(\hat{T}, s) \lambda(f_i(\hat{T}), v(s)) ds \Big) = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Следовательно, $z_i(\hat{T}) = 0$ для всех $i \in \Lambda_0$. □

Обозначим через $\mathrm{Int}A, \mathrm{co}A$ внутренность и выпуклую оболочку множества A.

Лемма 5 [3, утверждение 1.3]. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega(n-m+1)} \mathrm{Intco}\{z_j^1, j \in \Lambda\}. \tag{2.5}$$

Тогда $\delta_0 > 0$.

Теорема 3. *Пусть $a \leqslant 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и выполнено условие* (2.5). *Тогда в игре происходит m-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данной теоремы следует из леммы 5 и теорем 1, 2. □

Следствие. *Пусть $a \leqslant 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^1, \ldots, z_n^1\}.$$

Тогда в игре происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (2.5) $m = 1$, получаем утверждение следствия. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
3. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
4. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
5. **Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.** Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 11. С. 1566–1583.
6. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.
7. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** О линейных конфликтно-управляемых процессах с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 256–270.
8. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
9. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
10. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
11. **Благодатских А.И.** Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 2. С. 3–12.
12. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 178–186.
13. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.
14. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 3. С. 433–440.
15. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218.
16. **Благодатских А.И.** Многократная поимка жестко соединенных убегающих// Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46—57.
17. **Петров Н.Н.** Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54—59.
18. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. № 13. P. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x .
19. **Попов А.Ю., Седлецкий А.М.** Распределение корней функции Миттаг — Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
20. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
21. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді Національноі академіі наук Украіни. 2007. № 1. С. 50–55.

Поступила 25.09.2017

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор ИМИТИФ
Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск
e-mail: kma3@list.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston, London, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1997, 403 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy.* Kiev, Naukova Dumka, 1992, 384 p.
3. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami.* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow, Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 197 p. ISBN: 5-211-00954-1 .
4. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov.* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk, Udmurt State University Publ., 2009, 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
5. Eidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukr. Math. J.*, 2000, vol. 52, no. 11, pp. 1787–1806. doi: 10.1023/A:1010439422856 .
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 54–70. doi: 10.1134/S0081543810050056 .
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 256–270 (in Russian).
8. Grigorenko N.L. A game of simple pursuit – evasion for a group of pursuers and one evader. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. XV*, 1983, no. 1, pp. 41-47 (in Russian).
9. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol 73, no. 1, pp. 36–40. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010 .
10. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6 .
11. Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, no. 2, pp. 3–12.
12. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, no. 1, suppl. 1, pp. 174–182. doi: 10.1134/S0081543816050163 .
13. Petrov N. N., Solov'eva N.A. Multiple Capture in Pontryagin's Recurrent Example. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 855–861. doi: 10.1134/S0005117916050088 .
14. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007 .
15. Petrov N.N., Solov'eva N.A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218 .
16. Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 46–57 (in Russian).
17. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 54–59. doi: 10.20537/vm170105 .
18. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x .
19. Popov A.Y., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 190, no. 3, pp. 209–409. doi: 10.1007/s10958-013-1255-3 .
20. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 672 p.
21. Chikrii A.A., Matichin I.I. An analog of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2007, no. 1, pp. 50–55.

The paper was received by the Editorial Office on September 25, 2017.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics, Information Technology and Physics Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .