

УДК 517.977

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ В МОМЕНТ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА В СЛУЧАЕ ОДНОСТОРОННЕГО ПОВОРОТА

В. С. Пацко, А. А. Федотов

Исследуется трехмерное множество достижимости “в момент” для нелинейной управляемой системы, которую часто называют машиной Дубинса. Управляемый объект движется на плоскости с постоянной линейной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Случай, когда повороты возможны в обе стороны, рассматривался ранее. В данной работе изучается случай, когда поворот возможен только в одну сторону. Если ограничение на управление допускает движение по прямой, то доказано утверждение о том, что в любую точку на границе множества достижимости ведет кусочно-постоянное управление, количество переключений которого не больше двух. Кроме того, двумерные сечения множества достижимости по угловой координате являются выпуклыми. Если движение по прямой исключено в силу заданных ограничений на управление (в каждый текущий момент объект находится в состоянии поворота, при помощи управления выбирается в оговоренных пределах радиус поворота), то количество переключений кусочно-постоянного управления, ведущего на границу множества достижимости в момент, растет с увеличением момента времени, для которого строится множество достижимости. Подробно рассматривается случай, когда такой момент не больше времени поворота на угол 2π с наименьшим возможным радиусом. Здесь любое кусочно-постоянное управление, ведущее на границу, имеет не более двух переключений и сечения множества достижимости по угловой координате являются строго выпуклыми.

Ключевые слова: машина Дубинса, односторонний поворот, трехмерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, кусочно-постоянные управления, выпуклость сечений множества достижимости.

V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Reachable set at a certain time for a Dubins car in the case of a one-sided turn.

We study a three-dimensional reachable set “at a time” for a nonlinear control system often called a Dubins car. The controlled object (a car) moves in a plane with a constant linear velocity and bounded turning radius. The case where the car can turn left and right was studied earlier. In this paper, we investigate the case where the car can turn only in one direction. In the case where the constraints imposed on the control permit a straight line motion, we prove that the system can be guided to any point of the boundary of the reachable set by means of a piecewise-constant control with at most two switchings. Moreover, two-dimensional sections of the reachable set with constant angular coordinate are convex. If the constraints on the control forbid a straight line motion (which means that the car is turning at each time and the turning radius is chosen within prescribed limits), then the number of switchings of a piecewise-constant control guiding the system to the boundary of the reachable set grows with the growth of the time for which the reachable set is constructed. We consider in detail the case where this time is not greater than the time needed for a 2π turn with the smallest possible turning radius. In this case, any piecewise-constant control guiding the system to the boundary has at most two switchings, and the sections of the reachable set with constant angular coordinate are strictly convex.

Keywords: Dubins car, one-sided turn, three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, piecewise-constant control, convexity of sections of a reachable set.

MSC: 93C15, 93B03, 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-143-155

Введение

Данная статья посвящена исследованию множества достижимости в момент для машины Дубинса — одной из самых популярных в задачах математической теории управления и в

прикладных работах моделей управляемого движения на плоскости. Динамика движения с постоянной по величине линейной скоростью и с оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости задается посредством нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение (декартовы координаты) объекта на плоскости, третья переменная есть угол направления вектора скорости. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего параметра принадлежат замкнутому отрезку.

В 1957 г. Л. Дубинс опубликовал работу [1] (относящуюся, скорее, к теории функций), из которой для указанной динамики с симметричным относительно нуля ограничением на управление вытекает решение задачи быстродействия. А именно им было установлено, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно-постоянного управления не более чем с двумя переключениями. Были выделены шесть возможных вариантов управления и показано, что при поиске оптимального программного управления можно ограничиться только ими.

Результаты, полученные Л. Дубинсом, оказались очень полезными для исследования движения объектов с ограничением на радиус поворота и с постоянной по величине линейной скоростью. Такие объекты стали называть “машина Дубинса”. Необходимо отметить, однако, что подобными задачами еще в 1889 г. занимался А.А. Марков [2], исследуя вопросы оптимальной прокладки железных дорог. Р. Айзекс в своих работах по дифференциальным играм [3; 4] при описании движения автомобиля также использовал такую динамику.

Для указанной системы в рамках задачи быстродействия построен [5; 6] синтез оптимального управления обратной связи при симметричном относительно нуля ограничении на управление и в случае несимметричного ограничения. В работе [7] рассмотрен вариант машины Дубинса, обладающей только односторонним поворотом. Предложены способы решения задач быстродействия, возникающих при исследовании некоторых авиационных проблем. В работе [8] для машины Дубинса изучена задача оптимального по времени обхода набора точек на плоскости.

Динамика машины Дубинса используется для построения управления автономными колесными роботами (см., например, [9; 10]), при расчете траекторий полета в системах управления гражданской авиации [11], а также в прикладных работах, посвященных прокладке траекторий беспилотных летательных аппаратов в горизонтальной плоскости [12].

Для машины Дубинса множеством достижимости $G(t_f)$ в момент t_f назовем совокупность всех точек *трехмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в момент времени t_f из заданного начального фазового состояния (не теряя общности, считаем его нулевым) при помощи некоторого допустимого управления. Исследуемые в настоящей работе множества достижимости *в момент* следует отличать от множеств достижимости *к моменту*. Множество достижимости “к моменту” t_f представляет собой объединение всех предшествующих до момента t_f множеств достижимости “в момент”. Построение множеств достижимости в момент для случая, когда возможны как левый, так и правый повороты, рассмотрено в статьях [13–15]. Множества достижимости к моменту исследованы в работах [9; 14; 16].

В этой статье мы рассматриваем построение множеств достижимости в момент для случая, когда поворот возможен только в одну сторону. А именно предполагается, что скалярное управление u принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, где $0 \leq u_1 < u_2 = 1$. При исследовании границы трехмерного множества достижимости в момент используем принцип максимума Понтрягина [17], который является необходимым условием приведения системы на границу множества достижимости [18]. Исследован вопрос о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. Показано, что при $u_1 = 0$ (т. е. когда допускается движение по прямой) сечения трехмерного множества достижимости в момент по угловой координате являются выпуклыми. Для случая $u_1 > 0$ аналогичный факт доказан в работе пока лишь при условии $t_f \leq 2\pi$.

1. Постановка задачи

Пусть динамика управляемого объекта (машина Дубинса) на плоскости x, y описывается следующей системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad 0 \leq u_1 < u_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости, φ — угол направления вектора скорости, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки (рис. 1), u — скалярный управляющий параметр. Величина линейной скорости постоянна и равна единице. Далее предполагаем, что $u_2 = 1$.

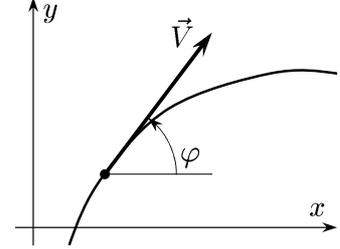


Рис. 1. Система координат, $\vec{V} = (\dot{x}, \dot{y})^T$.

К представлению (1.1) с $u_2 = 1$ может быть приведена произвольная управляемая система третьего порядка, описывающая движение с постоянной по величине линейной скоростью и заданным диапазоном одностороннего поворота. Для этого требуется перемасштабирование по геометрическим координатам и по времени. Без ограничения общности в начальный момент времени $t_0 = 0$ полагаем нулевым начальное фазовое состояние: $x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = 0$.

В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ рассматриваются измеримые функции времени со значениями $u(t)$ из отрезка $[u_1, u_2]$. Угловой параметр φ считается неограниченным (принимает значения в интервале $(-\infty, \infty)$).

Исследуются множества достижимости в момент для системы (1.1) для двух вариантов ограничений на управление: $u_1 = 0$ и $u_1 > 0$.

2. Принцип максимума Понтрягина

Известно [18], что управления, которые приводят систему на границу множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f , удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП). Запишем соотношения принципа максимума для системы (1.1).

Пусть $u^*(\cdot)$ — некоторое допустимое управление и $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ — вызываемое им движение системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения для сопряженной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 \sin \varphi^*(t) - \psi_2 \cos \varphi^*(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ПМП означает, что существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$ системы (2.1), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_f]$ выполнено условие

$$\begin{aligned} &\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u^*(t) \\ &= \max_{u \in [u_1, u_2]} [\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u]. \end{aligned}$$

Условие максимума имеет форму

$$\psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \psi_3^*(t) u, \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_f]. \tag{2.2}$$

Видно, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ являются постоянными величинами. Обозначим их через ψ_1^* и ψ_2^* .

Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ на всем промежутке $[t_0, t_f]$. Стало быть, в этом случае имеем п.в. $u^*(t) = u_1$ или п.в. $u^*(t) = u_2$.

Пусть, по крайней мере, одно из чисел ψ_1^* , ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на уравнения динамики (1.1) и на уравнения сопряженной системы (2.1), можем записать выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \quad (2.3)$$

Поскольку смена знака функции $\psi_3^*(\cdot)$ влечет переключение управляющего воздействия с одного крайнего значения на другое, то прямую (2.3) часто называют [7; 19; 20] *прямой переключения* (сокращенно ПП).

В силу соотношения (2.2) если $\psi_3^*(t) > 0$ на некотором промежутке, то $u^*(t) = u_2$ п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость x, y идет по дуге окружности радиусом $1/u_2$ против часовой стрелки. Если $\psi_3^*(t) < 0$, то $u^*(t) = u_1$. Движение идет по дуге окружности радиусом $1/u_1$ против часовой стрелки в случае $u_1 > 0$ и представляет собой движение по прямой, если $u_1 = 0$.

Часть движения, на котором п.в. $u^*(t) = u_2$ или п.в. $u^*(t) = u_1 \neq 0$ и угол $\varphi^*(t)$ изменяется на 2π , назовем *циклом*. Траектория движения в проекции на плоскость x, y представляет собой в этом случае полную окружность.

Если $\psi_3^*(t) = 0$ на некотором промежутке, то движение $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ на этом промежутке идет по прямой переключения (2.3). При этом п.в. $u^*(t) = 0$. Такой случай возможен лишь при $u_1 = 0$.

Таким образом, движение, удовлетворяющее ПМП, в проекции на плоскость x, y формируется из участков движения по дугам окружностей и прямолинейных участков. На каждом из них управление можно считать постоянным. Поэтому в дальнейшем при анализе управлений, удовлетворяющих ПМП, можем ограничиться *кусочно-постоянными* управлениями (предполагаем непрерывность справа в точках разрыва). Будет показана конечность числа переключений на промежутке $[t_0, t_f]$.

Если обе константы ψ_1^* , ψ_2^* равны нулю, то движение на всем промежутке $[t_0, t_f]$ идет либо с управлением u_1 , либо с управлением u_2 . Если хотя бы одна из констант не равна нулю, то возникает прямая переключения (2.3). Возможные варианты движений в этом случае показаны на рис. 2. Имеем $\psi_3^*(t) > 0$ в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$ и $\psi_3^*(t) < 0$ в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$.

Предложение 1. Пусть движение системы (1.1) удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Тогда соответствующая траектория на плоскости x, y состоит из конечного числа дуг окружностей и прямолинейных участков (последнее возможно лишь при $u_1 = 0$).

Доказательство. Воспользуемся условием максимума (2.2). Достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одна из констант ψ_1^* , ψ_2^* не равна нулю. Рассмотрим движение между первым и последним моментами переключения управления. В эти моменты точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ находится на ПП. Промежуточные участки траектории, расположенные вне ПП, являются дугами окружностей, которые пересекаются с ПП (включая случай касания) под одинаковым углом (см. рис. 2). Продолжительность таких участков является одинаковой с каждой стороны относительно прямой (2.3). Следовательно, число переключений конечно. Стало быть, конечно и число участков движения с постоянным управлением (включая участки прямолинейного движения) вдоль всей траектории на промежутке $[t_0, t_f]$. \square

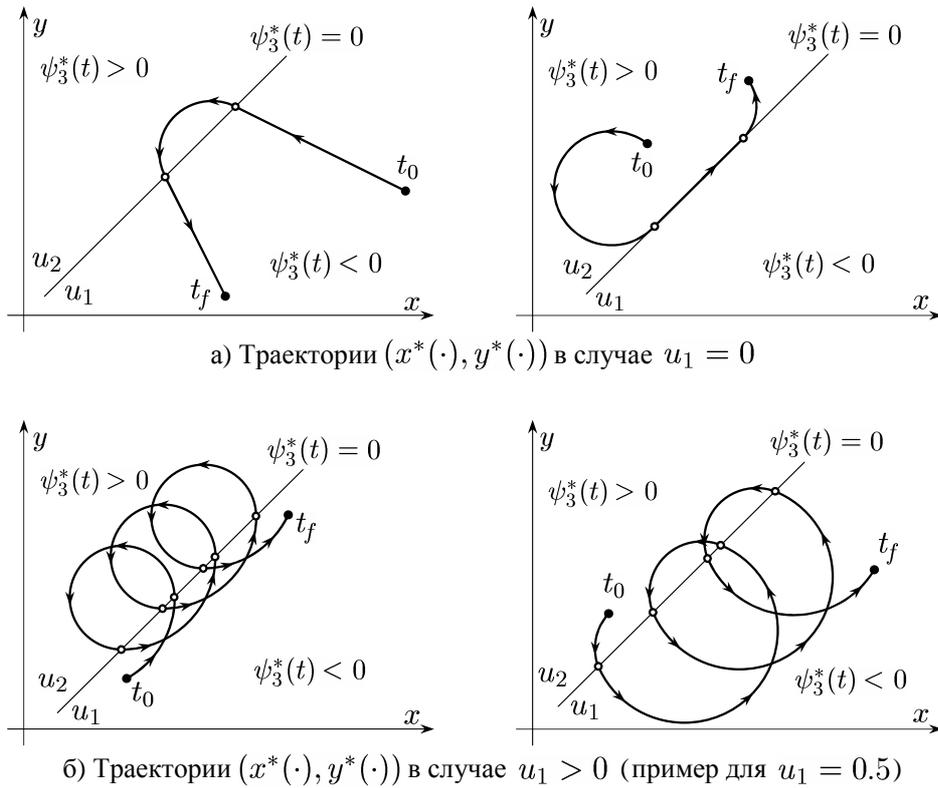


Рис. 2. Траектории принципа максимума и прямая переключения.

3. Случай $u_1 = 0$

В этом случае управления, удовлетворяющие условию максимума (2.2), принимают крайние значения $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$. Главная особенность заключается в том, что возможны два варианта прямолинейного движения (см. рис. 2):

- 1) на промежутках времени, когда $\psi_3^*(t) < 0$;
- 2) при движении по прямой переключения (на ней $\psi_3^*(t) = 0$).

3.1. Структура управлений, ведущих на границу множества достижимости

Предложение 2. Пусть $u_1 = 0$. Тогда в любую точку на границе множества достижимости $G(t_f)$ можно попасть при помощи кусочно-постоянного управления $u^*(\cdot)$, принимающего значения 0 и 1 не более чем с двумя переключениями. При этом для последовательности управлений 0, 1, 0 продолжительность второго участка траектории (где $u^*(t) = 1$) меньше 2π .

Доказательство. Случай $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$ очевиден. Рассмотрим случай, когда, по крайней мере, одна из констант ψ_1^*, ψ_2^* отлична от нуля. Для движения $t \rightarrow (x^*(t), y^*(t), \varphi^*(t))^T$, ведущего на границу множества $G(t_f)$ (и удовлетворяющего ПМП), исследуем возможные варианты расположения начального геометрического положения относительно ПП.

1. Если в начальный момент t_0 выполнено условие $\psi_3^*(t_0) < 0$, то движение $(x(\cdot), y(\cdot))$ либо идет по прямой (в направлении начального вектора скорости $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))^T$) на всем промежутке $[t_0, t_f]$, либо достигает ПП под ненулевым углом в некоторый момент времени (не превышающий t_f) с последующим движением в полуплоскости $\psi_3^*(t) > 0$ по дуге окружности единичного радиуса с направлением против часовой стрелки. При этом продолжительность

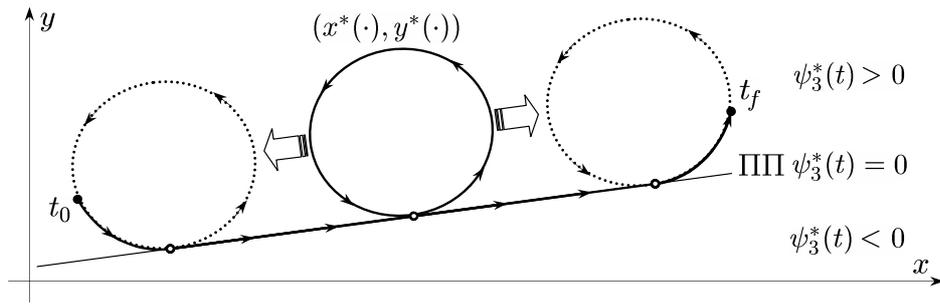


Рис. 3. Случай $u_1 = 0$. Перенос циклов в начало или в конец движения для варианта с касанием прямой переключения. Три движения приходят в одну и ту же точку множества $G(t_f)$.

движения по дуге окружности меньше, чем 2π . Если к моменту t_f траектория во второй раз приходит на ППП, то угол входа на нее остается тем же самым. Траектория переходит в полуплоскость $\psi_3^*(t) < 0$ и далее идет по прямой (см. рис. 2а). В результате имеем не более двух переключений. Средний участок (если он есть) имеет продолжительность меньше, чем 2π .

2. Пусть $\psi_3^*(t_0) > 0$. Тогда на некотором начальном участке времени движение идет по дуге окружности единичного радиуса против часовой стрелки. Возможны следующие подварианты.

2а) На всем промежутке $[t_0, t_f]$ движение идет с постоянным управлением $u^*(t) = u_2 = 1$ по дуге окружности (без переключений) в полуплоскости $\psi_3^*(t) > 0$.

2б) Движение системы (1.1) на плоскости x, y достигает ППП под ненулевым углом. В этом случае дальнейшее движение попадает в полуплоскость $\psi_3^*(t) < 0$, где продолжается по прямой линии.

2в) Траектория подходит к ППП по касательной (рис. 3). Тогда дальнейшее движение либо продолжается по дуге окружности, либо идет по ППП с возможностью схода в любой момент времени в полуплоскость $\psi_3^*(t) > 0$ по дуге окружности единичного радиуса. Если момент времени t_f достаточно большой, то могут возникать циклические движения. Однако такие циклы можно “перенести” к начальному или, наоборот, конечному участку движения с попаданием в момент t_f в ту же самую точку на границе множества $G(t_f)$. Т.е., сохранив общее количество циклов, можно добиться, чтобы они отсутствовали на среднем участке движения по ППП.

Таким образом, и в данном случае можно обойтись движениями не более чем с двумя переключениями.

3. Пусть $\psi_3^*(t_0) = 0$. В этом случае точка $(x(t_0), y(t_0))^T$ находится на ППП.

3а) Если начальное направление движения в момент t_0 составляет ненулевой угол с ППП, то получаемое движение переходит либо в полуплоскость $\psi_3^*(t_0) > 0$, либо в полуплоскость $\psi_3^*(t_0) < 0$. В первом случае (аналогично варианту 2а)) возникает движение по дуге окружности (его продолжительность меньше 2π) с возможным возвратом на ППП и переходом в полуплоскость $\psi_3^*(t_0) < 0$, где движение идет по прямой. В результате получаем не более одного переключения. Во втором случае переключений нет и движение является прямолинейным в полуплоскости $\psi_3^*(t_0) < 0$ (аналогично варианту 1).

3б) Если начальный вектор скорости на плоскости x, y направлен вдоль ППП, то возникает движение, аналогичное рассмотренному в п. 2в). Здесь также можно ограничиться не более чем двумя переключениями с последовательностью управлений $1, 0, 1$. В качестве подвариантов возможны движения $1, 0$ и $0, 1$. Может быть также случай, когда движение идет только по окружности или только по ППП. \square

3.2. Выпуклость φ -сечений множества достижимости

Покажем, что сечения множества $G(t_f)$ по угловой координате φ являются выпуклыми и имеют форму круга либо части круга, отрезанной по хорде. Будем называть такие фигуры круговыми сегментами.

Рассмотрим движение на промежутке $[t_0, t_f]$ с двумя моментами переключения t_1, t_2 и с тремя промежутками постоянства управления. Фазовую точку в начальный момент $t_0 = 0$, как и ранее, возьмем в начале координат. Управление постоянно на промежутках $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, t_f]$. Значения управления на первом и третьем интервалах совпадают.

Теорема 1. Пусть $u_1 = 0$. Тогда в любую точку на границе множества $G(t_f)$ ведет кусочно-постоянное управление не более чем с двумя переключениями. Каждое φ -сечение, $\varphi \in [0, t_f]$, множества $G(t_f)$ является выпуклым. Для крайних значений $\varphi = 0$ и $\varphi = t_f$ φ -сечение есть точка. При $\varphi \in (0, t_f)$ граница φ -сечения складывается из дуги окружности и отрезка прямой, если $\varphi < 2\pi$, и является окружностью, если $\varphi \geq 2\pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Выпишем формулы фазового состояния системы (1.1) в момент t_f для варианта с последовательностью управлений 0, 1, 0. Введем обозначения

$$T_{BL} = t_1 - t_0, \quad T_{u2} = t_2 - t_1, \quad T_{BR} = t_f - t_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} x(t_f) &= T_{BL} + \sin(T_{u2}) + T_{BR} \cdot \cos(T_{u2}), \\ y(t_f) &= (1 - \cos(T_{u2})) + T_{BR} \cdot \sin(T_{u2}), \\ \varphi(t_f) &= T_{u2}. \end{aligned}$$

Условимся, что $T_{BL} > 0$ и $T_{BR} > 0$.

При фиксированном значении $\varphi(t_f) \in [0, t_f]$ движения, идущие на границу множества достижимости, характеризуются постоянным значением величины T_{u2} . Принимая во внимание равенство

$$T_{BR} = t_f - T_{u2} - T_{BL},$$

делаем вывод, что значения $x(t_f)$ и $y(t_f)$ линейно зависят от параметра T_{BL} . Совокупность таких точек образует прямолинейный интервал на плоскости x, y , определяемый допустимым набором значений $T_{BL}: 0 < T_{BL} < (t_f - T_{u2})$.

Отметим, что вариант последовательности управлений 0, 1, 0 рассматривается лишь для $T_{u2} < 2\pi$, как это было отмечено в предложении 2.

2. Рассмотрим вариант с последовательностью управлений 1, 0, 1. На участке $[t_1, t_2]$ движение идет по III. Введем обозначения

$$T_{SL} = t_1 - t_0, \quad T_{u1} = t_2 - t_1, \quad T_{SR} = t_f - t_2.$$

Мы не будем исключать случаи, когда $T_{SL} = 0$ или $T_{SR} = 0$.

Интегрируя уравнения динамики (1.1), получим следующие соотношения, определяющие положение системы в момент t_f :

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \sin(T_{SL} + T_{SR}) + T_{u1} \cdot \cos(T_{SL}), \\ y(t_f) &= (1 - \cos(T_{SL} + T_{SR})) + T_{u1} \cdot \sin(T_{SL}), \\ \varphi(t_f) &= T_{SL} + T_{SR}. \end{aligned}$$

Здесь для фиксированного значения $\varphi(t_f)$ движения, идущие на границу множества достижимости, характеризуются постоянным значением суммы $T_{SL} + T_{SR}$. Величина $T_{u1} = t_f - T_{SL} - T_{SR}$ также является постоянной.

Совокупность таких точек $x(t_f), y(t_f)$ (получаемых для одного и того же значения $\varphi(t_f) \in (0, t_f)$) на плоскости x, y определяется изменением параметра T_{SL} в пределах от 0 до $t_f - T_{u1}$. Соответствующий годограф удовлетворяет уравнению окружности. Радиус окружности равен T_{u1} .

Рассмотрев возможный набор значений параметра T_{SL} , получаем либо дугу окружности, либо окружность целиком. Крайние точки дуги окружности соответствуют вариантам управлений $0, 1$ и $1, 0$ не более чем с одним переключением. Геометрическое положение системы (1.1) в момент t_f для данных управлений совпадает с предельными точками прямолинейного участка (на плоскости x, y), полученного ранее для варианта с последовательностью управлений $0, 1, 0$. Таким образом, имеем описание границы φ -сечений множества достижимости $G(t_f)$. Каждое сечение представляет собой либо круговой сегмент (для $\varphi < 2\pi$), либо целый круг (для $\varphi \geq 2\pi$). \square

4. Случай $u_1 > 0$. Число переключений управления, ведущего на границу множества достижимости

В данном случае движение по прямой невозможно, а движения, идущие на границу множества $G(t_f)$, представляют собой в проекции на плоскость x, y набор дуг окружностей с радиусами $1/u_1, 1/u_2$ и конечным числом переключений (предложение 1). Геометрические положения в моменты переключения управлений лежат на ПП. На любых двух соседних участках постоянства управления, не примыкающих к моментам t_0 и t_f , угол φ изменяется на постоянную величину, равную 2π (см. рис. 2). Постоянной является суммарная продолжительность движения по двум таким смежным участкам. Ее величина лежит в интервале $(2\pi/u_2, 2\pi/u_1)$.

Сказанное позволяет сформулировать следующее утверждение.

Предложение 3. Число переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости $G(t_f)$, оценивается сверху величиной

$$\begin{cases} \frac{t_f \cdot u_2}{\pi}, & \text{если } t_f \cdot u_2 \text{ кратно } 2\pi, \\ 2 \left[\frac{t_f \cdot u_2}{2\pi} \right] + 2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь квадратными скобками обозначена целая часть действительного числа. Видно, что с увеличением t_f растет также и возможное число переключений управления (в отличие от разобранных выше случая $u_1 = 0$ и исследованного ранее [13; 15] случая $u_1 < 0$).

5. Случай $u_1 > 0, t_f \leq 2\pi$. Выпуклость φ -сечений множества достижимости

Напомним, что $u_2 = 1$.

Теорема 2. Пусть $u_1 > 0$ и $t_f \leq 2\pi$. Тогда количество переключений управления, ведущего на границу множества достижимости $G(t_f)$, не больше двух. При двух переключениях реализуются лишь два варианта последовательности управлений: $(u_1, u_2, u_1), (u_2, u_1, u_2)$. Каждое φ -сечение, $\varphi \in [t_f \cdot u_1, t_f]$, множества $G(t_f)$ является выпуклым. Для крайних значений $\varphi = t_f \cdot u_1$ и $\varphi = t_f$ φ -сечения являются одноточечными. При $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ граница φ -сечения состоит из двух дуг окружностей.

Доказательство. Оценка сверху для количества переключений следует из формулы (4.1).

Перейдем к описанию φ -сечений множества $G(t_f)$. Используя последнее уравнение в записи динамики (1.1), получаем отрезок возможных значений φ в множестве $G(t_f)$: $[t_f \cdot u_1, t_f]$. Для крайних значений $\varphi = t_f \cdot u_1$ и $\varphi = t_f$ управление определяется однозначно ($u(t) \equiv u_1$ и $u(t) \equiv u_2 = 1$) и каждое из крайних φ -сечений состоит из одной точки:

$$\begin{cases} (\sin \varphi / u_1, (1 - \cos \varphi) / u_1)^\top, & \text{если } \varphi = t_f \cdot u_1, \\ (\sin \varphi, (1 - \cos \varphi))^\top, & \text{если } \varphi = t_f. \end{cases}$$

Ниже считаем, что значение $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ зафиксировано.

1. Рассмотрим движение с одним переключением. Пусть управление на первом участке равно u_1 , а на втором совпадает с $u_2 = 1$. Обозначим через T_{u1} длину первого участка постоянства управления, а через T_{u2} — второго. Имеем $T_{u1} < 2\pi$, $T_{u2} < 2\pi$. Справедливы соотношения

$$\varphi = T_{u1} \cdot u_1 + T_{u2}, \quad t_f = T_{u1} + T_{u2}.$$

Отсюда получаем, что при фиксированном значении φ величины T_{u1}, T_{u2} , а стало быть и момент переключения, определяются однозначно. Таким образом, в любом φ -сечении множества $G(t_f)$ при $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ для последовательности управлений u_1, u_2 имеем одну точку:

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi + (1/u_1 - 1) \sin(T_{u1} \cdot u_1) \\ 1/u_1 - \cos \varphi - (1/u_1 - 1) \cos(T_{u1} \cdot u_1) \end{pmatrix}.$$

Аналогично для последовательности управлений u_2, u_1 , используя обозначения T_{u2} и T_{u1} длин соответствующих участков управления, получаем координаты точки в рассматриваемом φ -сечении множества $G(t_f)$:

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi / u_1 - (1/u_1 - 1) \sin(T_{u2}) \\ 1 - \cos \varphi / u_1 + (1/u_1 - 1) \cos(T_{u2}) \end{pmatrix}.$$

2а) Рассмотрим вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_1, u_2, u_1 . Длину первого участка обозначим через T_{BL} , а последнего участка — через T_{BR} . Пусть T_{u2} — длина среднего участка. Имеем

$$\varphi = T_{BL} \cdot u_1 + T_{u2} + T_{BR} \cdot u_1, \quad t_f = T_{BL} + T_{u2} + T_{BR}.$$

Отсюда вытекает

$$T_{u2} = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1}, \quad T_{BL} + T_{BR} = \frac{t_f - \varphi}{1 - u_1}.$$

Следовательно, длительность среднего участка и суммарная длительность первого и последнего участков — постоянные величины при фиксированном значении φ . Полученное семейство допустимых управлений является однопараметрическим. В качестве параметра возьмем величину T_{BL} с интервалом возможных значений $T_{BL} \in (0, T_B)$, где $T_B = T_{BL} + T_{BR} = \text{const}$.

Соответствующие точки $(x_{BB}(T_{BL}), y_{BB}(T_{BL}))^T$ φ -сечений множества $G(t_f)$ в результате интегрирования уравнений (1.1) имеют вид

$$\frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin(T_{BL} \cdot u_1) \\ 1 - \cos(T_{BL} \cdot u_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(T_{BL} \cdot u_1 + T_{u2}) - \sin(T_{BL} \cdot u_1) \\ \cos(T_{BL} \cdot u_1) - \cos(T_{BL} \cdot u_1 + T_{u2}) \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin(T_{BL} \cdot u_1 + T_{u2}) \\ \cos(T_{BL} \cdot u_1 + T_{u2}) - \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} x_{BB}(T_{BL}) \\ y_{BB}(T_{BL}) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} - 2 \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \sin \left(\frac{T_{u2}}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(T_{BL} \cdot u_1 + \frac{T_{u2}}{2} \right) \\ \sin \left(T_{BL} \cdot u_1 + \frac{T_{u2}}{2} \right) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Найденный набор точек $(x_{BB}(T_{BL}), y_{BB}(T_{BL}))^T$, образуемый последовательностью управлений u_1, u_2, u_1 при фиксированных значениях $u_1, \varphi, t_f, T_{u2}$, представляет собой дугу окружности

с центром в точке $\begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$. Радиус окружности равен

$$2 \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \sin \left(\frac{T_{u2}}{2} \right),$$

а угловой растров дуги (5.1) определяется диапазоном изменения величины $T_{BL} \cdot u_1$ и составляет

$$\frac{u_1(t_f - \varphi)}{1 - u_1}.$$

2б) Рассмотрим второй вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_2, u_1, u_2 . Обозначим длительность соответствующих участков постоянства управления через T_{SL}, T_{u1}, T_{SR} . По аналогии с исследованным выше первым вариантом последовательности управлений имеем

$$T_s = T_{SL} + T_{SR} = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1}, \quad T_{u1} = \frac{t_f - \varphi}{1 - u_1}.$$

Получаемый набор точек определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x_{SS}(T_{SL}) \\ y_{SS}(T_{SL}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \sin \left(\frac{T_{u1} \cdot u_1}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(T_{SL} + \frac{T_{u1} \cdot u_1}{2} \right) \\ \sin \left(T_{SL} + \frac{T_{u1} \cdot u_1}{2} \right) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

и диапазоном возможных значений параметра $T_{SL} \in (0, T_s)$. Это тоже дуга окружности с центром в точке $\begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$ и радиусом $2 \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \sin \left(\frac{T_{u1} \cdot u_1}{2} \right)$. Угловой растров дуги определяется диапазоном изменения величины T_{SL} и вычисляется по формуле

$$T_s = \frac{(\varphi - t_f \cdot u_1)}{1 - u_1}.$$

3. Нетрудно установить, что построенные дуги (5.1) и (5.2) совпадают в крайних предельных точках. А именно

$$\begin{pmatrix} x_{BB}(0) \\ y_{BB}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{SS}(T_s) \\ y_{SS}(T_s) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{BB}(T_B) \\ y_{BB}(T_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{SS}(0) \\ y_{SS}(0) \end{pmatrix}.$$

Указанные предельные точки соответствуют рассмотренному выше управлению с одним переключением.

Итак, анализируя возможные варианты движения системы (1.1), удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, получаем совокупность положений на плоскости x, y в виде замкнутой кривой, образованной двумя дугами окружностей, состыкованными в крайних точках.

4. Рассмотрим перемещение точки по дуге (5.1), определяемое параметром T_{BL} . При увеличении параметра T_{BL} от 0 до T_B данное перемещение сопровождается поворотом касательного вектора по часовой стрелке. Аналогично перемещение по дуге (5.2) при уменьшении параметра T_{SL} от T_s до 0 также дает поворот по часовой стрелке. Суммарный угловой растров дуг (5.1) и (5.2) вычисляем по формуле

$$\frac{(\varphi - t_f \cdot u_1)}{1 - u_1} + \frac{u_1(t_f - \varphi)}{1 - u_1} = \varphi.$$

В соответствии с предположением $t_f \leq 2\pi$ и учитывая, что $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$, имеем $\varphi < 2\pi$.

Таким образом, полученная кривая представляет собой границу φ -сечения множества $G(t_f)$. Такое сечение при $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ является строго выпуклым, его граница составляется из двух дуг окружностей. Для крайних значений φ соответствующие сечения являются одноточечными. \square

З а м е ч а н и е 1. В формулировках предложений 2, 3 и теорем 1, 2 говорится об управлениях, ведущих на границу множества $G(t_f)$. Однако в доказательствах используется лишь

то, что такие движения удовлетворяют ПМП. Стало быть, итоговые формулы, представленные в доказательствах теорем 1, 2, дают полное описание кривых в каждом φ -сечении, куда приходят движения, удовлетворяющие ПМП. В силу установленного свойства выпуклости такие кривые лежат на границе соответствующего φ -сечения. Таким образом, для исследуемых задач ПМП есть не только необходимое, но и достаточное условие, характеризующее управления, ведущие на границу множества $G(t_f)$.

З а м е ч а н и е 2. Если $u_1 = 0$, то кусочно-постоянное управление, удовлетворяющее ПМП и ведущее в некоторую точку на границе множества $G(t_f)$, не обязательно является единственным. В случае $u_1 > 0$ для каждой точки на границе $G(t_f)$ существует только одно кусочно-постоянное управление, ведущее в эту точку.

6. Заключение

Работа содержит исследование множества достижимости в момент для машины Дубинса при ограничении на поворот, который по постановке задачи возможен лишь в одну сторону. При отсутствии запрета на движения по прямой доказано утверждение, определяющее число переключений (не более двух) и структуру управлений, порождающих границу множества достижимости. Такое утверждение дополняет результаты, полученные ранее при отсутствии запрета на правый и левый повороты. В случае запрета движения по прямой число переключения управлений, ведущих на границу множества достижимости, зависит от времени. Приведена соответствующая оценка сверху.

В рамках принятых предположений доказана выпуклость сечений множества достижимости по угловой координате. В дальнейшем для задачи с односторонним поворотом будет сделана попытка доказать выпуклость сечений и в более общем случае. В целом трехмерное множество достижимости в момент выпуклым не является. Это подтверждается результатами численных расчетов.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American J. Math. 1957. Vol. 79, no. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560.
2. **Марков А.А.** Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. мат. общ. 1889. 2-я сер. Т. 1, вып. 2. С. 250–276.
3. **Isaacs R.** Games of pursuit / Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
5. **Pecsvaradi T.** Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automatic Control. 1972. Vol. 17, no. 6. P. 763–772. doi: 10.1109/TAC.1972.1100160.
6. **Bakolas E., Tsiotras P.** Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov–Dubins problem // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 150, no. 2. P. 233–250. doi: 10.1007/s10957-011-9841-3.
7. **Choi H.** Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: Dissertation for the degree of doctor of philosophy / University of Michigan. Michigan, 2014. 134 p.
8. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с. ISBN: 978-5-8295-0381-9.
9. Robot motion planning and control / ed. J.-P. Laumond // Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). ISBN: 978-3-540-76219-5.
10. **Laumond J.-P., Mansard N., Lasserre J.-B.** Optimality in robot motion: Optimal versus optimized motion // Communications of the ACM. 2014. Vol. 57, no. 9. P. 82–89. doi: 10.1145/2629535.
11. Автоматизированные системы управления воздушным движением: уч. пос. / Р.М. Ахмедов [и др.]; под ред. С. Г. Пятко, А.И. Красов. СПб.: Политехника, 2004. 446 с. ISBN: 5-7325-0779-5.

12. Meyer Y., Shima T., Isaiah P. On Dubins paths to intercept a moving target // *Automatica*. 2015. Vol. 53. P. 256–263. doi: 10.1016/j.automatica.2014.12.039.
13. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // *Изв. РАН. ГиСУ*. 2003. № 3. С. 8–16.
14. Fedotov A., Patsko V., Turova V. Reachable sets for simple models of car motion // *Recent Advances in Mobile Robotics* / ed. A.V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. doi: 10.5772/26278. URL: http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf.
15. Симоненко А.С., Федотов А.А. Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление [e-resource] // *МРМА 2017 (SoProMat 2017), Modern Problems in Mathematics and its Applications: Proc. 48th International Youth School-Conf. (Yekaterinburg, February 5 – February 11, 2017)*. CEUR-WP, Vol. 1894. P. 79–87. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.
16. Takei R., Tsai R. Optimal trajectories of curvature constrained motion in the Hamilton–Jacobi formulation // *J. Sci. Comp.* 2013. Vol. 54, no. 2-3. P. 622–644. doi: 10.1007/s10915-012-9671-y.
17. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.] М.: Наука, 1969. 384 с.
18. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
19. Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В. Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // *Управление космическими аппаратами и кораблями (Вена, сентябрь 1967): Тр. Второго Междунар. симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства* / ред. Б.Н. Петрова, И.С. Уколова. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
20. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // *Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления: сб. науч. тр. / Институт математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1973. С. 91–101.*

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет,

г. Екатеринбург

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Федотов Андрей Анатольевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

e-mail: andreyfedotov@mail.ru

Поступила 31.01.2018

REFERENCES

1. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. doi: 10.2307/2372560.
2. Markoff A.A. Some examples of the solution of special problems on maxima and minima. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 1989, série 2, vol. 1, no. 2, pp. 250–276 (in Russian).
3. Isaacs R. *Games of pursuit*. Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. Isaacs R. *Differential games*. N Y, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604. Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry*. Moscow, Mir Publ., 1967, 479 p.
5. Pecsvaradi T. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, vol. 17, no. 6, pp. 763–772. doi: 10.1109/TAC.1972.1100160.

6. Bakolas E., Tsiotras P. Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov–Dubins problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, vol. 150, no. 2, pp. 233–250. doi: 10.1007/s10957-011-9841-3.
7. Choi H. *Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint*. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, Michigan, University of Michigan, 2014, 134 p.
8. Berdyshev Yu.I. *Nelineinye zadachi posledovatel'nogo upravleniya i ikh prilozhenie*. [Nonlinear Problems in Sequential Control and Their Application]. Ekaterinburg: IMM UB RAS, 2015, 193 p. ISBN: 978-5-8295-0381-9.
9. Laumond J.-P. (ed.) *Robot motion planning and control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, 354 p. ISBN: 978-3-540-76219-5.
10. Laumond J.-P., Mansard N., Lasserre J.-B. Optimality in robot motion: Optimal versus optimized motion. *Communications of the ACM*, 2014, vol. 57, no. 9, pp. 82–89. doi: 10.1145/2629535.
11. Pyatko S.G., Krasov A.I. et al. *Avtomatizirovannye sistemy upravleniya vozдушnym dvizheniem*. [Automated Air Traffic Control System]. Saint Petersburg, Polytechnic Publ., 2004, 446 p. ISBN: 5-7325-0779-5.
12. Meyer Y., Shima T., Isaiah P. On Dubins paths to intercept a moving target. *Automatica*, 2015, vol. 53, pp. 256–263. doi: 10.1016/j.automatica.2014.12.039.
13. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comp. Systems Sci. International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
14. Fedotov A., Patsko V., Turova V. Reachable sets for simple models of car motion. *Recent Advances in Mobile Robotics*, A.V. Topalov (ed.). Rijeka, Croatia: InTech, 2011, pp 147–172. doi: 10.5772/26278. Available at: http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf.
15. Simonenko A.S., Fedotov A.A. Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control [e-resource]. MPMA 2017 (SoProMat 2017), *Modern Problems in Mathematics and its Applications: Proc. 48th International Youth School-Conf.*, Yekaterinburg, 2017, CEUR-WP, vol. 1894, pp. 79–87 (in Russian). Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf> (date of access: 07.01.2018).
16. Takei R., Tsai R. Optimal trajectories of curvature constrained motion in the Hamilton-Jacobi formulation. *J. Sci. Comp.*, 2013, vol. 54, no. 2-3, pp. 622–644. doi: 10.1007/s10915-012-9671-y.
17. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, L.W. Neustadt (ed.), Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., N Y, London, 1962, 360 p. ISBN 2-88124-077-1. Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 384 p.
18. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N Y: Wiley & Sons, 1967, 589 p. ISBN: 0471522635. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*. Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
19. Hamza M.H., Kohlas I., Runggaldier W. Time-optimal trajectories in a pursuit problem. *Control by space vehicles and vessels*, Vien, 1967, Proc. of the 2-nd International IFAC Symposium on Automatic Control on Peace Using the Cosmic Space, B.N. Petrov, I.S. Ukolov (eds.), Moscow, Nauka, 1971, pp. 410–418 (in Russian).
20. Berdyshev Yu.I. Synthesis of optimal control for a third-order system. *Problems of Analysis of Nonlinear Automatic Control Systems*, Sverdlovsk: Inst. Mat. Mekh., UNTs AN USSR, 1973, pp. 91–101 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on January 31, 2018.

Valerii Semenovich Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru.

Andrei Anatol'evich Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: andreyfedotov@mail.ru.