ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. П. Максимов

Рассматривается линейная функционально-дифференциальная система управления с последействием общего вида. Исследуется задача оптимального управления с линейными ограничениями на фазовые и управляющие переменные. Управления реализуются линейным оператором общего вида. Охватываются случаи распределенного и сосредоточенного запаздывания в цепи управления, а также случай импульсных управляющих воздействий. Систематическое использование матрицы Коши позволяет свести исходную задачу к задаче, описываемой только в терминах управляющих переменных с участием вспомогательных переменных, связанных с определяющими соотношениями для матрицы Коши рассматриваемой системы. В случае, когда для управления используются только элементы конечномерного подпространства пространства управляющий воздействий, в явном виде записывается задача, допускающая эффективное решение стандартными программными средствами. Приводится пример прикладной задачи оптимального управления, возникающей в экономической динамике. Дается описание гибридных систем (систем с непрерывным и дискретным временем), допускающих сведение к рассмотренному классу систем.

Ключевые слова: линейные системы, управление, оптимизация.

V. P. Maksimov. On a class of optimal control problems for functional differential systems.

A linear functional differential control system of general form with aftereffect is considered. An optimal control problem with linear constraints on the state and control variables is studied. The control is realized by a linear operator of general form. The cases of distributed and lumped delay in the control loop, as well as the case of impulsive control, are covered. The Cauchy matrix is used to reduce the problem under consideration to a problem formulated only in terms of control variables with the use of some auxiliary variables linked with the defining relations for the Cauchy matrix of the system. In the case when the control is chosen from a finite-dimensional subspace of the control space, a problem effectively solvable by standard software tools is written explicitly. An example of an applied optimal control problem that arises in economic dynamics is presented. A class of hybrid systems (systems with continuous and discrete times) reducible to the system under consideration is described.

Keywords: linear systems, control, optimization.

MSC: 34H05, 34K10, 34K34, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-131-142

Введение

Конструктивному исследованию задач линейной оптимизации для различных конкретных классов систем с запаздыванием посвящена обширная литература (см., например, монографии [1;2] и приводимые в них списки литературы, а также работы [3–7]). Естественное стремление к расширению класса изучаемых задач приводит в рамках общепринятого подхода к необходимости доказательства новых вариантов принципа максимума, преодоления трудностей построения и интегрирования сопряженных систем, учету новых классов ограничений на фазовые переменные. Настоящая работа продолжает исследование [8], где рассматриваются задачи управления, обобщающие классическую задачу о переводе системы управления из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. При этом общность касается как класса рассматриваемых систем, так и постановки задачи и классов используемых управлений. Здесь мы сохраняем эту общность, включая возможность использования смешанных управлений, сочетающих классические и импульсные режимы управления, и исследуем задачу оптимального управления с общими линейными ограничениями на фазовые переменные и общим линейным целевым функционалом. В центре внимания по-прежнему находится та исключительная роль, которая принадлежит в этих вопросах оператору Коши (оператору Грина задачи Коши) рассматриваемой системы управления. Систематическое использование матрицы Коши позволяет свести исходную задачу к задаче, описываемой только в терминах управляющих переменных с участием вспомогательных переменных, связанных с определяющими соотношениями для матрицы Коши рассматриваемой системы. Это дает возможность предложить конечномерную аппроксимацию исходной задачи с использованием сочетания кусочно-постоянных и импульсных управлений. Кроме того, общность исходной постановки задачи позволяет использовать предлагаемый подход при рассмотрении широких классов гибридных систем (систем с непрерывным и дискретным временем) после их редукции к системам с непрерывным временем рассмотренного класса. Основные соотношения, полученные в настоящей работе, оказываются универсальными в рамках предлагаемого общего класса систем с последействием, при этом вся специфика конкретных систем учитывается за счет соответствующих свойств ядер интегральных операторов, входящих в описание рассматриваемой системы.

1. Предварительные сведения

Приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения из [9–11]. Обозначим через $L^n = L^n[0, T]$ пространство суммируемых по Лебегу функций $v\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|v\|_{L^n} = \int_0^T |v(s)|_n \, ds$, где $|\cdot|_n$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать; для любого элемента $a \in \mathbb{R}^n$ (n-вектор-столбца) запись $(a)_i$ означает его i-й элемент.

Зафиксируем отрезок $[0, T] \subset \mathbb{R}$ и конечное множество точек $\{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < T$, и, следуя [12], введем пространство $DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных функций $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$x(t) = \int_0^t v(s)\, ds + x(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[\tau_k,\, T]}(t) \Delta x(\tau_k), \quad t \in [0, T],$$

где $v \in L^n$, $\Delta x(\tau_k) = x(\tau_k) - x(\tau_k - 0)$, $\chi_{[\tau_k,\, T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_k, T]$.

Элементы пространства $DS^n(m)$ — это функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \ldots, [\tau_m, T]$ и непрерывные справа в точках $\tau_1, \ldots, \tau_m$. Производная $\dot{x}$ элемента $x \in DS^n(m)$ понимается как производная его абсолютно непрерывной составляющей $\dot{x}(t) = v(t)$, $t \in [0, T]$. Если норма в $DS^n(m)$ определяется равенством

$$\|x\|_{DS^n(m)} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|_n + \sum_{k=1}^{m} |\Delta x(\tau_k)|_n,$$

то $DS^n(m)$ — банахово пространство. Пространство $DS^n(m)$ является расширением пространства $AC^n = AC^n[0, T]$ абсолютно непрерывных функций $y\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_{AC^n} = \|\dot{y}\|_{L^n} + |y(0)|_n$.

Напомним, что стандартный подход к изучению дифференциальных уравнений с разрывными решениями связан с теорией так называемых “обобщенных дифференциальных уравнений”, предложенной Я. Курцвейлем [13]. К настоящему времени эта теория хорошо разработана (см., например, [14–16]). Согласно принятому подходу импульсные уравнения рассматриваются в классе функций ограниченной вариации. В этом случае под решением понимается функция ограниченной вариации, удовлетворяющая интегральному уравнению с интегралом Лебега — Стилтьеса или Перрона — Стилтьеса. Кусочно абсолютно непрерывные решения функционально-дифференциальных уравнений, рассматриваемые ниже, могут терпеть разрывы только в конечном числе заданных точек. Таким образом, в этом классе функций ограниченной вариации мы игнорируем только сингулярную компоненту. Предложенный в [12] подход не использует сложную теорию обобщенных функций и находит много приложений, где выбор пространства $DS^n(m)$ оказывается естественным.

Рассмотрим в пространстве $DS^n(m)$ уравнение [17]

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \int\limits_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A_0(t)x(0) + \sum_{k=1}^m A_k(t)\Delta x(\tau_k) = f(t), \quad t \in [0,\,T]. \qquad (1.1)$$

Здесь ядро $K(t,s)$ удовлетворяет *условию* $\mathcal{K}$: его элементы $k_{ij}(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s)\colon 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и имеют общую, суммируемую на $[0,\,T]$, мажоранту

$$|k_{ij}(t,s)| \leqslant \kappa(t), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad t \in [0,T], \quad s \in [0,t],$$

а $(n\times n)$-матрицы $A_0,\dots,A_m$ имеют суммируемые на $[0,\,T]$ элементы. Уравнение (1.1) охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. В частности, для оператора $(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t d_s\mathcal{R}(t,s)x(s)$ с распределенным запаздыванием, где без ограничения общности можно считать $R(t,t) = 0$, имеем $K(t,s) = \mathcal{R}(t,s)$, $A(t) = \mathcal{R}(t,0)$ [10, с. 54–59].

Напомним [9;10], что пространство $DS^n(m)$ изоморфно прямому произведению $L^n \times \mathbb{R}^{n+mn}$, изоморфизм $J = \{V,\Theta\}\colon L^n \times \mathbb{R}^{n+mn} \to DS^n(m)$ задается равенствами

$$J(z,\beta) = Vv + \Theta\beta, \quad (Vv)(t) = \int\limits_0^t v(s)\,ds, \quad (\Theta\beta)(t) = \Theta(t)\beta, \quad t \in [0,T],$$

где $\beta \in \mathbb{R}^{n+mn}$, $\Theta(t) = \big(E_n, E_n\cdot\chi_{[\tau_1,T]}(t),\dots,E_n\cdot\chi_{[\tau_m,T]}(t)\big)$, E_n — единичная $(n\times n)$-матрица. Обратный оператор $J^{-1} = [\delta,\,\sigma]\colon DS^n(m) \to L^n \times \mathbb{R}^{n+mn}$ определяется равенствами

$$J^{-1}x = (\delta x,\,\sigma x), \quad \delta x = \dot{x}, \quad \sigma x = \operatorname{col}(x(0),\Delta x(\tau_1),\dots,\Delta x(\tau_m)).$$

Тогда $x = V\delta x + \Theta\,\sigma x$. Оператор $Q = \mathcal{L}V\colon L^n \to L^n$ называют *главной частью оператора* $\mathcal{L}$, а $\tilde{A} = \mathcal{L}\Theta\colon \mathbb{R}^{n+mn} \to L^n$ — *конечномерной частью оператора* $\mathcal{L}$.

В уравнении (1.1) оператор Q является вольтерровым: $(Qv)(t) = v(t) - \int_0^t K(t,\,s)\,v(s)\,ds$ и обратимым. Обратный оператор Q^{-1} имеет представление $(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int_0^t R(t,\,s)\,f(s)\,ds$, где $R(t,\,s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,\,s)$. Оператор $\tilde{A}$ для уравнения (1.1) задается матрицей $\tilde{A} = (A_0,A_1,\dots,A_m)$.

Приведем представление решения уравнения (1.1). Для этого определим $(n\times(n+mn))$-матрицу $Y(t)$ как абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\dot{Y}(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\,\dot{Y}(s)\,ds - \tilde{A}(t), \quad Y(0) = 0, \quad t \in [0,\,T].$$

Однородное уравнение (1.1) ($f(t) = 0,\ t \in [0,\,T]$) имеет фундаментальную матрицу $X(t)$ размерности $n\times(n+mn)$:

$$X(t) = \Theta(t) + Y(t).$$

Решение уравнения (1.1) с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \Delta x(\tau_1) = 0,\ \dots \quad \Delta x(\tau_m) = 0$$

имеет представление

$$x(t) = \int_0^t \left(Q^{-1}f\right)(s)\,ds = (Cf)\,(t) = \int_0^t C(t,\,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,\,T],$$

где $C(t,\,s)$ — матрица Коши [18; 19, с. 52–58]. Эта матрица является решением матричного уравнения

$$C'_t(t,\,s) = \int_s^t K(t,\,\tau)\,C'_\tau(\tau,\,s)\,d\tau + K(t,\,s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

с условием $C(s,\,s) = E_n$ $\big($здесь и всюду ниже $C'_\tau(\tau,\,s) = \dfrac{\partial}{\partial\tau}C(\tau,\,s)\big)$ и уравнения

$$C(t,\,s) = E_n + \int_s^t C(t,\,\tau)K(\tau,\,s)\,d\tau, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Матрица $C(t,\,s)$ выражается через резольвентное ядро $R(t,\,s)$: $C(t,\,s) = E_n + \displaystyle\int_s^t R(\tau,\,s)\,d\tau$. Общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = X(t)\,\alpha + \int_0^t C(t,\,s)\,f(s)\,ds, \quad t \in [0,\,T],$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^{n+mn}$ — произвольный вектор.

В рассматриваемых далее задачах оптимального управления целевой функционал и ограничения задаются с помощью линейных ограниченных функционалов, определенных на пространстве $DS^n(m)$. Линейный ограниченный вектор-функционал $\ell\colon DS^n(m) \to \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ имеет представление

$$\ell x = \int_0^T \Phi(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k \Delta x(\tau_k), \tag{1.2}$$

где элементы $(\mathcal{N} \times n)$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном, $\Psi_0, \ldots, \Psi_m$ — постоянные $(\mathcal{N} \times n)$-матрицы.

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем задачи оптимального управления для системы управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f \tag{2.1}$$

с заданным начальным состоянием

$$x(0) = \alpha.$$

Здесь $F\colon L_2^r \to L^n$ — заданный линейный ограниченный оператор, $L_2^r = L_2^r[0,\,T]$ — пространство суммируемых с квадратом функций $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^r$, оснащенное скалярным произведением $(v,u) = \displaystyle\int_0^T v^\top(s)u(s)\,ds$ $\;((\cdot)^\top$ — символ транспонирования). Предполагается, что оператор F обладает свойством вольтерровости: для любого $\tau \in (0,T)$ $(Fu)(t) = 0$ на $[0,\tau]$ для всех таких $u \in L_2^r$, что $u(t) = 0$ на $[0,\tau]$. Подчеркнем сразу, что к числу управляющих воздействий мы относим не только управление u, входящее в правую часть уравнения (2.1), но и вектор скачков $\Delta x = \mathrm{col}(\Delta x(\tau_1), \ldots, \Delta x(\tau_m)) \in \mathbb{R}^{nm}$, интерпретируемых как результат импульсного воздействия на систему. В этом смысле можно говорить об использовании смешанного управления с бесконечномерной компонентой u и конечномерной компонентой Δx. Общая теорема о разрешимости задачи управления системой (2.1) при отсутствии ограничений на управление приведена с доказательством в [8]. Всюду ниже мы будем использовать сокращенное обозначение вектора Δx и его компонент, опуская x и ограничиваясь номером точки возможного разрыва для индексации компонент: $\Delta x = \Delta = \mathrm{col}(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$.

Целью управления в рассматриваемой задаче является минимизация целевого функционала $\Lambda(x, u)\colon DS^n(m) \times L_2^r$:

$$\Lambda(x,u) = \int_0^T \phi(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \psi_0 x(0) + \sum_{k=1}^m \psi_k \Delta_k \; + \int_0^T \lambda^\top(s)\,u(s)\,ds \;\to\; \min, \tag{2.2}$$

где $\phi(\cdot)$ — n-вектор-строка с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\,T]$ элементами, $\lambda(\cdot) \in L_2^r$, ψ_k $(k = 0, \ldots, m)$ — постоянные n-вектор-строки. При этом на фазовые и управляющие переменные накладываются следующие ограничения:

$$\ell_1 x \equiv \int_0^T \Phi^1(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0^1 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k^1 \Delta_k \;=\; \beta^1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.3}$$

$$\ell_2 x \equiv \int_0^T \Phi^2(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0^2 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k^2 \Delta_k \;\le\; \beta^2 \in \mathbb{R}^{n_2}; \tag{2.4}$$

$$Gu(t) \le \gamma \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,\,T]. \tag{2.5}$$

В ограничениях (2.3) и (2.4) порождающие элементы вектор-функционалов $\ell_1\colon DS^n(m) \to \mathbb{R}^{n_1}$ и $\ell_2\colon DS^n(m) \to \mathbb{R}^{n_2}$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и порождающие элементы вектор-функционала ℓ в представлении (1.2). В поточечном ограничении (2.5) на управление u $G = \{g_{ij}\}$ — постоянная $(N \times r)$-матрица.

3. Основная теорема

Для формулировки основной теоремы введем следующие обозначения. Для каждой $(\mathcal{N} \times n)$-матрицы $\mathcal{Z}$ с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\,T]$ элементами определим матрицы $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(s)$, $s \in [0,\,T]$, и $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}^k$, $k = 0, \ldots, m$, равенствами

$$\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(s) = \int_s^T \mathcal{Z}(\tau) C'_\tau(\tau,\,s)\,d\tau, \quad \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}^k \;=\; \int_0^T \mathcal{Z}(\tau)\,\dot{X}_k(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $X_0, \ldots, X_m$ — $(n \times n)$-матрицы, составляющие фундаментальную матрицу $X\colon X(t) = (X_0(t), X_1(t), \ldots, X_m(t))$. Далее положим

$$\vartheta_{\mathcal{Z}}(t) \;=\; \mathcal{Z}(t) \;+\; \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(t), \quad \vartheta^*_{\mathcal{Z}}(t) \;=\; (F^* \vartheta_{\mathcal{Z}})(t), \quad t \in [0,\,T].$$

В последнем равенстве каждая строка матрицы $\vartheta^*_{\mathcal{Z}}(t)$ является результатом применения сопряженного оператора $F^*\colon (L_1^n)^* \to (L_2^r)^*$ к соответствующей строке матрицы $\vartheta_{\mathcal{Z}}(t)$.

Теорема 1. *Задача* (2.1)–(2.5) *эквивалентна следующей задаче оптимизации в конечномерном расширении гильбертова пространства* L_2^r :

$$\mathcal{J}(u,\,\Delta) \;\equiv\; \int_0^T (\vartheta^*_\phi(t) \;+\; \lambda^\top(t))\,u(t)\,dt \;+\; \sum_{k=1}^m (\mathcal{V}_\phi^k \;+\; \psi_k)\Delta_k \;\to\; \min, \tag{3.1}$$

$$\int_0^T \vartheta^*_{\Phi^1}(t)\,u(t)\,dt\,+\,\sum_{k=1}^m(\mathcal{V}^k_{\Phi^1}\,+\,\Psi^1_k)\Delta_k\;=\;\beta^1\,-\,\Psi^1_0\alpha, \tag{3.2}$$

$$\int_0^T \vartheta^*_{\Phi^2}(t)\,u(t)\,dt\,+\,\sum_{k=1}^m(\mathcal{V}^k_{\Phi^2}\,+\,\Psi^2_k)\Delta_k\;\le\;\beta^2\,-\,\Psi^2_0\alpha, \tag{3.3}$$

$$Gu(t)\le\gamma,\quad t\in[0,\,T]. \tag{3.4}$$

Каждому решению $(u^0,\,\Delta^0)\in L^r_2\times\mathbb{R}^{mn}$ *задачи* (3.1)–(3.4) *соответствует решение* $(x^0,\,u^0)\in DS^n(m)\times L^r_2$ *задачи* (2.1)–(2.5), *где оптимальная траектория* x^0 *определяется равенством*

$$x^0(t)\,=\,\int_0^t C(t,s)(Fu^0)(s)\,ds\,+\,\int_0^t C(t,s)f(s)\,ds\,+\,X_0(t)\alpha\,+\,\sum_{k=1}^m\,X_k(t)\Delta^0_k,\quad t\in[0,\,T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится на основе использования представления общего решения уравнения (2.1) с использованием свойств матрицы Коши, необходимых для обоснования законности производимых преобразований (см. [8, с. 116]). Эти свойства подробно исследованы в [18;19, теоремы 2.4–2.10]. Ключевую роль при этом играет формула дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\int_0^t C(t,s)f(s)\,ds\,=\,\int_0^t C'_t(t,s)f(s)\,ds\,+\,f(t),$$

справедливая для любого $f\in L^n$.

З а м е ч а н и е 1. Центральное место в построении задачи (3.1)–(3.4) играют матрицы $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}$ при фиксированном выборе матрицы $\mathcal{Z}$. Определяющие уравнения для таких матриц и способ их построения с гарантированной оценкой точности описаны в работе [8, теорема 2.2]. Для системы (1.1) в случае абсолютно непрерывных траекторий и отсутствия ограничений на фазовые переменные необходимые и достаточные условия оптимальности управления сформулированы в виде принципа максимума в [20]. Там же для некоторых широко распространенных случаев оператора F, отвечающего за реализацию управлений, приведен вид сопряженного оператора F^*, входящего в конструкцию матрицы $\vartheta^*_{\mathcal{Z}}(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Гладкий случай с траекториями из пространства AC^n формально охватывается теоремой 1 при включении в число условий (2.3) равенств $\Delta_k\,=\,0,\ k\,=\,1,\ldots,m$. Вопрос о разумном выборе системы точек $\tau_1,\ldots,\tau_m$, и в частности вопрос об их количестве, обычно находит естественный ответ в прикладных задачах. В общей постановке дополнительная степень свободы, связанная с управляющими параметрами Δ, может рассматриваться как одна из возможностей ослабления ограничений. Отметим еще, что более точная регулировка количества управляющих конечномерных параметров может осуществляться за счет использования аналогов пространства $DS^n(m)$ с индивидуальным для каждой компоненты списком допустимых скачков траекторий. Детали можно найти в [17, с. 68].

Для формулировки следствия из теоремы 1 зафиксируем систему линейно независимых элементов $v_j,\ j=1,\ldots,\rho$, пространства L^r_2 и ввведем следующие обозначения:

$$W(t)\,=\,\{w_i(t)\}\,=\,\vartheta^*_\phi(t)\,+\,\lambda^\top(t);\quad c_{ij}\,=\,\int_0^T w_i(t)v_j(t)\,dt;\quad d_k\,=\,(\mathcal{V}^k_\phi\,+\,\psi_k);$$

$$W^1(t)\,=\,\{w^1_{ij}(t)\}\,=\,\vartheta^*_{\Phi^1}(t)\,+\,\lambda^\top(t);\quad a^{1l}_{ij}\,=\,\int_0^T w^1_{li}(t)v_j(t)\,dt;\quad D^1_k\,=\,(\mathcal{V}^k_{\Phi^1}\,+\,\Psi^1_k);$$

$$W^2(t) = \{w^2_{ij}(t)\} = \vartheta^*_{\Phi^2}(t) + \lambda^\top(t); \quad a^{2l}_{ij} = \int\limits_0^T w^2_{li}(t) v_j(t)\,dt; \quad D^2_k = (\mathcal{V}^k_{\Phi^2} + \Psi^2_k).$$

Следствие 1. *Пусть P — конечномерное подпространство пространства L^r_2 с базисными элементами v_j, $j = 1, \ldots, \rho$. В классе управлений $u \in P$ с компонентами $u_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{\rho} \omega^j_i\, v_j(t)$, $i = 1, \ldots, r$, задача* (3.1)–(3.4) *принимает вид*

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\, \omega^j_i + \sum_{k=1}^{m} d_k\, \Delta_k \to \min, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} a^{1l}_{ij}\, \omega^j_i + \sum_{k=1}^{m} (D^1_k\, \Delta_k)_l = (\beta^1)_l - (\Psi^1_0 \alpha)_l, \quad l = 1, \ldots, n_1, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} a^{2l}_{ij}\, \omega^j_i + \sum_{k=1}^{m} (D^2_k\, \Delta_k)_l \le (\beta^2)_l - (\Psi^2_0 \alpha)_l, \quad l = 1, \ldots, n_2, \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} g_{li}\, \omega^j_i\, v_j(t) \le (\gamma)_l, \quad t \in [0, T], \quad l = 1, \ldots, N. \tag{3.8}$$

Пусть $\{t^*_j\}$, $j = 1, \ldots, \rho$, — разбиение отрезка $[0, T]$: $0 < t^*_1 \le t^*_2 \le \ldots \le t^*_{\rho-1} < T = t_\rho$. Полагая $v_j(t) = \chi_{[t^*_{j-1}, t^*_j]}(t)$, запишем условие (3.8) в виде

$$\sum_{i=1}^{r} g_{li}\, \omega^j_i \le (\gamma)_l, \quad j = 1, \ldots, \rho, \quad l = 1, \ldots, N. \tag{3.9}$$

Следствие 2. *В классе управлений кусочно-постоянных функций u с компонентами $u_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{\rho} \omega^j_i\, \chi_{[t^*_{j-1}, t^*_j]}(t)$, $i = 1, \ldots, r$, задача* (3.1)–(3.4) *принимает вид задачи линейного программирования* (3.5)–(3.7), (3.9), *где*

$$c_{ij} = \int\limits_{t^*_{j-1}}^{t^*_j} w_i(t)\,dt, \quad a^{1l}_{ij} = \int\limits_{t^*_{j-1}}^{t^*_j} w^1_{li}(t)\,dt, \quad a^{2l}_{ij} = \int\limits_{t^*_{j-1}}^{t^*_j} w^2_{li}(t)\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствий 1 и 2 состоит в непосредственном вычислении параметров рассматриваемой задачи с учетом конкретной структуры управляющих воздействий.

З а м е ч а н и е 3. Разбиение $\{t^*_j\}$ не связано, вообще говоря, с “импульсным” разбиением $\{\tau_k\}$, введенным ранее. При необходимости эти разбиения могут быть согласованы; такая необходимость иногда возникает в прикладных задачах.

Приведем иллюстрирующий пример.

П р и м е р. Рассмотрим на промежутке $[0, 3]$ систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a\int\limits_0^t s\,\dot{x}_1(s)\,ds + b\,x_2(0) + c\int\limits_0^t \dot{x}_2(s)\,ds + A\,u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= d\int\limits_0^t \dot{x}_2(s)\,ds + h\,x_2(0) + B\,(u_2(t) - u_1(t)) \end{aligned} \tag{3.10}$$

с постоянными параметрами a, b, c, d, h, A, B и заданным начальным состоянием

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 6. \tag{3.11}$$

Зададим систему точек $\tau_k = k,\ k = 1, 2$ и будем рассматривать систему (3.10) в пространстве $DS^2(2)$. Функциональные ограничения-равенства (2.3) относительно фазовых переменных имеют вид

$$\int_0^3 x_1(t)\,dt = 2\int_0^3 x_2(t)\,dt, \tag{3.12}$$

а ограничения-неравенства (2.4) определены следующим образом:

$$\begin{gathered} x_1(3) \geq 1.2\,x_1(0), \quad x_2(3) \geq 1.5\,x_2(0), \\ \Delta_1^1 \geq 0, \quad \Delta_1^1 \leq 0.3\,x_2(1), \quad \Delta_1^2 = -\Delta_1^1, \quad \Delta_2^2 \geq 0, \quad \Delta_2^1 = -\Delta_2^2 \end{gathered} \tag{3.13}$$

(здесь $\Delta_k^i = (\Delta_k)_i$). Заданы поточечные ограничения (2.5) на управляющие воздействия

$$0 \leq u_1(t) \leq u_2(t), \quad t \in [0, 3].$$

Целевой функционал (2.2) задан равенством

$$\Lambda(x, u) = \int_0^3 u_2(t)\,dt + \Delta_1^1 + \Delta_2^2. \tag{3.14}$$

Задача решается в классе кусочно-постоянных управлений: $u_i(t) = \sum\limits_{k=1}^{3} u_i^k\,\chi_{[k-1,\,k)}(t),\ i = 1, 2.$

Приведем содержательную интерпретацию задачи. Система (3.10) описывает взаимодействие двух отраслей экономики, выпускающих два вида продукции в объеме x_1 и x_2 соответственно, u_1 — инвестиции в первую отрасль, u_2 — общий объем инвестиций (бюджет), $(u_2 - u_1)$ — инвестиции во вторую отрасль. В начальный момент времени вторая отрасль (скажем, добывающая) преобладает над первой (скажем, перерабатывающей): см. (3.11). Выделение бюджета происходит ежегодно в постоянном в фиксированный год объеме. Требуется найти минимальный суммарный за три года объем инвестиций, гарантирующий выполнение следующих условий. В интегральном выражении должно быть достигнуто двухкратное преобладание первой отрасли над второй: см. (3.12), при этом на конечный момент времени $t = 3$ должен гарантироваться рост выпуска продукции каждой отраслью по отношению к начальному показателю в указанной пропорции: см. (3.13). Скачки Δ_k^i компонент траектории означают мгновенную передачу части продукции одной отрасли для использования в другой (детали финансовых операций в рассматриваемой модели игнорируются).

Решение задачи (3.10)–(3.14) для значений параметров $a = 0.1,\ b = 0.3,\ c = -0.05,\ d = 0.2,\ A = 0.7,\ B = 0.5$ в рассматриваемом случае дает оптимальное управление, определяемое равенствами: $u_1^1 = 23.46,\ u_1^2 = 0,\ u_1^3 = 0,\ u_2^1 = 23.46,\ u_2^2 = 0,\ u_2^3 = 0,\ \Delta_1^1 = 2.60,\ \Delta_2^1 = -2.60,\ \Delta_1^2 = 0,\ \Delta_2^2 = 0$. Таким образом, минимальный трехлетний общий бюджет, достаточный для достижения поставленных целей с использованием передачи средств из одной отрасли в другую составляет 23.46 усл. ед. (все числовые значения приведены с точностью до 0.01). Отметим для сравнения, что вариант этой задачи в классе абсолютно непрерывных траекторий ($\Delta_k^i = 0,\ i, k = 1, 2$) требует минимальный трехлетний бюджет 31.89 усл. ед.

4. Один класс непрерывно-дискретных систем, допускающий приведение к системе с непрерывным временем

Степень общности оператора $\mathcal{L}$ в задаче (2.1)–(2.5) позволяет пользоваться теоремой 1 применительно и к формально более общим классам систем, например к непрерывно-дискретным (гибридным) функционально-дифференциальным системам [21;22]. Для описания непрерывно-дискретной системы зафиксируем множество $\mathcal{I} = \{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\mu = T$ и введем пространство $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \dots, t_\mu\}$ — пространство функций $z\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^\nu$ с нормой, определенной равенством

$$||z||_{FD^\nu(\mu)} = \sum_{i=0}^{\mu} |z(t_i)|_\nu.$$

Рассмотрим гибридную систему управления

$$\begin{gathered} \dot{x} = \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + Fu + f, \\ z = \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + g, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $f \in L^n,\ g \in FD^\nu(\mu)$, линейные операторы $\mathcal{T}_{ij},\ i,j = 1,2$, определены следующим образом.

Оператор $\mathcal{T}_{11}$ действует из пространства $DS^n(m)$ в пространство L^n:

$$(\mathcal{T}_{11}x)(t) = \int_0^t K^1(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A_0^1(t)x(0) + \sum_{k=1}^{m} A_k^1(t)\Delta x(\tau_k), \quad t \in [0,\, T].$$

Здесь ядро $K^1(t,s)$ с элементами $k_{ij}^1(t,s)$ удовлетворяет *условию* $\mathcal{K}$ с мажорантой ядра $\kappa^1(\cdot)$, элементы $(n \times n)$-матриц $A_k^1,\ k = 0, \dots, m$ суммируемы на $[0,T]$.

Оператор $\mathcal{T}_{12}$ действует из пространства $FD^\nu(\mu)$ в пространство L^n:

$$(\mathcal{T}_{12}z)(t) = \sum_{\{j: t_j \le t\}} B_j^1(t)z(t_j), \quad t \in [0,T],$$

элементы $(n \times \nu)$-матриц $B_j^1,\ j = 0, \dots, \mu$, суммируемы на $[0,T]$.

Оператор $\mathcal{T}_{21}$ действует из пространства $DS^n(m)$ в пространство $FD^\nu(\mu)$ по правилу

$$(\mathcal{T}_{21}x)(t_j) = \int_0^{t_j} K_j^2(s)\dot{x}(s)ds \ + \ A_j^2x(0) + \sum_{k=1}^{m} A_{jk}^2\Delta x(\tau_k), \quad j = 0,1,\dots,\mu,$$

с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,T]$ элементами $(\nu \times n)$-матриц K_j^2 и постоянными $(\nu \times n)$-матрицами $A_{jk}^2,\ j = 0,1,\dots,\mu,\ k = 1,\dots,m.$

Оператор $\mathcal{T}_{22}$ действует в пространстве $FD^\nu(\mu)$ и определен равенством

$$(\mathcal{T}_{22}z)(t_j) = \sum_{l=0}^{j-1} B_{jl}^2 z(t_l), \quad j = 1,\dots,\mu,$$

где B_{jl}^2 — постоянные $(\nu \times \nu)$-матрицы.

Воспользуемся результатами работы [23] об уравнении с дискретным временем

$$z = \mathcal{T}_{22}z + g.$$

Общее решение этого уравнения имеет представление

$$z(t_i) = Z(t_i)\beta + (C_2\, g)\,(t_i), \quad i = 1,\dots,\mu,$$

где $Z(\cdot)$ — фундаментальная матрица, β — произвольный вектор из $\mathbb{R}^\nu$, $C_2\colon FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$ — оператор Коши, порождаемый матрицей Коши $C_2(\cdot,\cdot)\colon (C_2g)(t_i) = \sum_{j=1}^{i} C_2(i,\, j)g(t_j),\ i = 1,\dots,\mu.$

Решим второе уравнение гибридной системы относительно фазовой переменной с дискретным временем:

$$z = C_2 \mathcal{T}_{21}x + C_2 g + Z\beta.$$

Подставляя правую часть последнего равенства в первое уравнение системы, получим уравнение только относительно фазовой переменной с непрерывным временем:

$$\dot{x} = \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12} C_2 \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{12} C_2 g + \mathcal{T}_{12} Z\beta + Fu + f.$$

Покажем, что это уравнение вида (2.1). Действительно, вопрос о слагаемых, содержащих $x(0)$ и переменные Δ в представлении $x(t) = (V\dot{x})(t) + x(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[\tau_k, T]}(t)\Delta_k$ произвольного элемента $x \in DS^n(m)$, решается тривиально. Получим явное представление для оператора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21}$, ограничиваясь его действием на абсолютно непрерывную составляющую $y(t) = \int_0^t \dot{x}(s)\,ds$ элемента $x \in DS^n(m)$.

Теорема 2. *Главная часть оператора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12}C_2\mathcal{T}_{21} \colon AC^n \to L^n$ — оператор $Q_{\mathcal{T}} = \mathcal{T}V \colon L^n \to L^n$ — является интегральным оператором Вольтерра с ядром*

$$K^2(t, s) = \sum_{j:t_j \le t} \sum_{l=1}^{j} B_j(t)\, \chi_{[0,t_j]}(s)\, \chi_{[0,t_l]}(s)\, C_2(j, l) K_l^2(s),$$

удовлетворяющим условию $\mathcal{K}$.

Доказательство этой теоремы состоит в последовательном вычислении образов операторов $\mathcal{T}_{21}$, C_2 и $\mathcal{T}_{12}$ и элементарных преобразованиях с учетом свойств порождающих элементов. При этом оператор $\mathcal{T}_{21}$ применяется только к абсолютно непрерывной составляющей элемента $x \in DS^n(m)$ с нулевым начальным значением. Вольтерровость оператора $Q_{\mathcal{T}}$ вытекает из вольтерровости входящих в его определение операторов. Выполнение *условия $\mathcal{K}$* вытекает из суммируемости на $[0, T]$ элементов матриц $B_j^1(t)$ и ограниченности в существенном на $[0, T]$ элементов матриц $K_j^2(s)$.

Таким образом, гибридная система (4.1) сводится к уравнению (2.1), в котором оператор $\mathcal{L}$ имеет вид (1.1) с ядром $K(t,s) = K^1(t,s) + K^2(t,s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 272 с. ISBN: 978-5-397-01746-6 .
2. **Kolmanovskiĭ V. B., Schaĭkhet L. E.** Control of systems with aftereffect. N Y: AMS, 1996. 336 p. (Trans. Math. Monographs; vol. 157.) ISBN: 0-8218-0374-3 .
3. **Шевченко Г. В.** Численный метод решения задачи минимизации расхода ресурсов для линейных систем с постоянным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10. С. 25–38.
4. **Шевченко Г. В.** Численное решение задачи оптимального быстродействия для линейных систем с постоянным запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. 2012. № 2. С. 100–105. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
5. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С.** Оптимальное дискретно-импульсное управление линейными системами // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 103–125.
6. **Короткий Д .А.** Решение задачи оптимального управления для систем с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. 2008. № 2. С. 61–62. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
7. **Габасов Р., Грушевич О. П., Кириллова Ф. М.** Оптимальное управление линейными системами с запаздыванием с учетом терминальных ограничений на их состояния // Автоматика и телемеханика. 2007. № 12. С. 3–20.

8. **Максимов В. П.** Некоторые вопросы теории управления функционально-дифференциальными системами // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2015. Т. 46, № 2. С. 112–119.
9. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
10. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.
11. **Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F.** Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. N Y; Cairo: Hindawi Publ. Corporation, 2007. 314 p. ISBN: 977-5945-49-6/hbk .
12. **Анохин А. В.** О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1037–1040.
13. **Kurzweil Ja.** Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Math. J. 1957. No. 7. P. 418–449.
14. **Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.** Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
15. **Schwabik Š.** Generalized ordinary differential equations. Singapore: World Scientific, 1992. 392 p. ISBN: 978-981-4505-04-8 .
16. **Ashordia M.** On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1995. Vol. 6. P. 1–57.
17. **Максимов В. П., Румянцев А. Н.** Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Изв. вузов. Математика. 1993. Т. 37, № 5. С. 56–71.
18. **Максимов В. П.** О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.
19. **Максимов В. П.** Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, Изд-во Прикам. социал. ин-та, Изд-во Перм. современ. социал.-гуманит. колледжа, 2003. 306 с.
20. **Максимов В. П.** Один вариант принципа максимума для линейных систем с последействием // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2015. Т. 20, № 5. С. 1284–1286.
21. **Максимов В. П., Чадов А. Л.** Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. 2011. № 2. С. 13–23.
22. **Chadov A. L., Maksimov V. P.** Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Funct. Differ. Equ. 2012. Vol. 19, no. 1–2. P. 49–62.
23. **Андрианов Д. Л.** Краевые задачи и задачи управления для линейный разностных систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 1993. Т. 37, № 5. С. 3–16.

Максимов Владимир Петрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
г. Пермь
e-mail: maksimov@econ.psu.ru

Поступила 28.08.2017

REFERENCES

1. Gabasov R.F., Kirillova F.M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in optimal control theory]. Moscow, Editorial URSS, 2011, 272 p. ISBN: 978-5-397-01746-6 .
2. Kolmanovskiĭ V.B., Shaĭkhet L.E. *Control of systems with aftereffect.* N Y: American Mathematical Society, 1996, Ser. Translations of mathematical monographs, vol. 157, 336 p. ISBN: 0-8218-0374-3 .
3. Shevchenko G.V. A numerical method to minimize resource consumption by linear systems with constant delay. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 10, pp. 1732–1742. doi: 10.1134/S0005117914100026 .

4. Shevchenko G.V. Computational solution of time-optimal control problem for linear systems with delay. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 100–105 (in Russian).
5. Gabasov R., Kirillova F.M., Pavlenok N.S. Optimal discrete impulse control of linear systems. *Autom. Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 3, pp. 443–462. doi: 10.1134/S0005117908030107 .
6. Korotkii D.A. Solution of the optimal control problem with delay. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 61–62 (in Russian).
7. Gabasov R., Grushevich O.P., Kirillova F.M. Optimal control of linear systems with delay taking into account terminal constraints on their states. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 12, pp. 2097–2112. doi: 10.1134/S0005117907120016 .
8. Maksimov V.P. Some questions of the control theory for functional differential systems. *Izv. IMI UdGU*, 2015, vol. 46, no. 2, pp. 112–119 (in Russian).
9. Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* Atlanta, GA: World Federation Publishers Company, 1995, Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3, 172 p. ISBN: 1-885978-02-2 . Original Russian text published in Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p.
10. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya* [Elements of the contemporary theory of functional differential equations. Methods and applications]. Moscow, Institute of Computer Science, 2002, 384 p. ISBN: 5-93972-112-5 .
11. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications.* N Y, Cairo, Hindawi Publishing Corporation, 2007, 314 p. ISBN: 977-5945-49-6/hbk .
12. Anokhin A.V. On linear impulse systems for functional-differential equations. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1986, vol. 33, no. 1, pp. 220–223.
13. Kurzweil Ja. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Math. J.*, 1957, vol. 7(82), no. 3, pp. 418–449.
14. Zavalishin S.T., Sesekin A.N. *Dynamic impulse systems: theory and applications.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1997, 256 p. ISBN: 0-7923-4394-8 . Original Russian text published in Zavalishin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye protsessy. Modeli i prilozheniya.* Moscow, Nauka Publ., 1991, 256 p.
15. Schwabik Š. *Generalized ordinary differential equations.* Singapore, World Scientific, 1992, 392 p. ISBN: 978-981-4505-04-8 .
16. Ashordia M. On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 1995, vol. 6, pp. 1–57.
17. Maksimov V.P., Rumyantsev A.N. Boundary value problems and problems of pulse control in economic dynamics. Constructive study. *Russian Mathematics* (*Izv. VUZ*), 1993, vol. 37, no. 5, pp. 48–62.
18. Maksimov V.P. The Cauchy formula for a functional-differential equation. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 405–409.
19. Maksimov V.P. *Voprosy obshchei teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [Questions of the general theory of functional differential equations]. Perm, Perm State University Publ., 2003, 306 p.
20. Maksimov V.P. A variant of the maximum principle for linear systems with aftereffect. *J. Tambov Univ. Rep. Ser. Nat. Tech. Sci.*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1284–1286 (in Russian).
21. Maksimov V.P., Chadov A.L. Hybrid models in economic dynamics models. *Perm University Herald. Economy*, 2011, no. 2, pp. 13–23 (in Russian).
22. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times. *Funct. Differ. Equ.*, 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 49–62.
23. Andrianov D.L. Boundary value problems and control problems for linear difference systems with aftereffect, *Russian Mathematics* (*Izv. VUZ*), 1993, vol. 37, no. 5. pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on August 28, 2017.

Vladimir Petrovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Perm State University, Perm, 614990 Russia, e-mail: maksimov@econ.psu.ru .