ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

К ПРОБЛЕМЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В. И. Максимов

Исследуется задача восстановления неизвестных входных воздействий на систему, описываемую векторным нелинейным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием. Заранее как входное воздействие, так и решение (траектория) системы неизвестны. В ходе функционирования системы в дискретные моменты времени измеряются текущие фазовые состояния. Эти измерения, вообще говоря, неточны. Требуется указать правило приближенного восстановления входа, обладающее свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближений вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближения сколь угодно близки при достаточной точности наблюдений. В статье указывается алгоритм решения указанной задачи, позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять восстановление неизвестных воздействий. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений. В основе предлагаемого алгоритма лежит метод управляемых по принципу обратной связи моделей.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, динамическое восстановление, метод управляемых моделей.

V. I. Maksimov. On the problem of input reconstruction in a nonlinear system with constant delay.

We study the problem of reconstructing an unknown input acting on a system described by a nonlinear vector differential equation with constant delay. Both the input and the solution (trajectory) of the system are unknown. During the operation of the system, its phase states are measured at discrete times. The measurements, in general, are inaccurate. It is required to give a dynamic stable rule for the approximate reconstruction of the input, which means that the approximate values must be found in real time and the approximations must be arbitrarily accurate for sufficiently exact observations. For the solution of this problem, we propose an algorithm based on the method of models with feedback control. The algorithm reconstructs the unknown input simultaneously with the process. The algorithm is stable with respect to information noises and computational errors.

Keywords: delay systems, dynamic reconstruction, method of controlled models.

MSC: 49J35, 91A24, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-121-130

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1.1}$$

$$x(s) = x_0(s) \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n),$$

где $\tau = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$ — запаздывание, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u \in \mathbb{R}^r$ — возмущение, $B(x)$ — $(n \times r)$-мерная матричная функция, $f(t, x, y)$ — n-мерная вектор-функция, $F(t, x, y, u) = f(t, x, y) + B(x)u$ — липшицевая по совокупности переменных в области $\mathbb{R}^{2n+1} \times P$ функция. Начальное состояние системы $x_0(s),\ s \in [-\tau, 0]$ задано. Будем считать, что эта функция липшицева. Возмущение — r-мерная (измеримая по Лебегу) входная вектор-функция,

[1]Работа подготовлена при поддержке программы президиума РАН №30 “Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации”.

удовлетворяющая включению $u(t) \in P$, $t \in T$, — неизвестно. Здесь $P \subset \mathbb{R}^r$ — выпуклый компакт. Такова вся априорная информация о действующем на систему (1.1) возмущении. Цель работы состоит в построении алгоритма восстановления некоторого возмущения, порождающего решение $x(\cdot)$. Входными данными алгоритма являются результаты неточного измерения фазового состояния системы $x(t)$. Выход алгоритма — некоторая функция $v^h(\cdot)$.

Обсуждаемая задача относится к классу динамических обратных задач. Подобные задачи исследовались ранее. Один из подходов к их решению для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был развит в работах [1; 2]. (Здесь мы указываем только монографии, в которых можно найти соответствующие ссылки.) Подход основан на сочетании методов теории гарантированного управления [3] и известных в теории некорректных задач методов сглаживающего функционала (метод А. Н. Тихонова) и невязки [4].

Уточним постановку задачи и опишем содержательно метод ее решения. На промежутке времени T реализуется некоторая траектория системы (1.1), т. е. решение $x(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0(s), u(\cdot))$ дифференциального уравнения (1.1), зависящее от изменяющегося во времени входного воздействия $u(\cdot) \in P(\cdot) = \{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) \colon \tilde{u}(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$. Интервал T разбит на конечное число полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты времени τ_i, $i \in [0 : m-1]$, измеряются (приближенно) реализующиеся состояния системы $x(\tau_i)$, т. е. находятся векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h| \le h. \tag{1.2}$$

Здесь $h \in (0,1)$ — уровень информационной погрешности, символ $|\cdot|$ означает евклидову норму в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^r$. Решение уравнения (1.1) — функция $x(\cdot)$ — неизвестно. Задача состоит в построении алгоритма восстановления (в темпе “реального” времени) неизвестного входа на основе неточного измерения величин $x(\tau_i)$, $i \in [1 : m-1]$.

Для того чтобы приближенно вычислять неизвестный вход, мы воспользуемся методом позиционного управления с моделью [1;2]. В соответствии с этим методом задача восстановления неизвестного входа по результатам измерения величин ξ_i^h заменяется другой задачей, а именно задачей управления по принципу обратной связи некоторой вспомогательной системой. Таким образом, задача восстановления $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

(1) к задаче выбора вспомогательной системы, называемой *моделью*, которая функционирует “синхронно” с реальной системой, а также

(2) к задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

Для некоторых задач динамической реконструкции для систем с последействием описанная выше схема реализована в работах [5–11]. При этом в работах [10; 11] рассматривались линейные системы, а при выборе моделей использовались схемы аппроксимации дифференциальных уравнений с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями, аналогичные схеме из настоящей работы. Данную работу можно рассматривать в качестве продолжения работ [10; 11]. Следует отметить, что схема аппроксимации систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями широко используется при решении задач восстановления структурных характеристик систем с запаздыванием по измерениям фазовых траекторий (см., например, работы [12–14], в которых есть соответствующая библиография).

2. Вспомогательные построения

Прежде чем указать алгоритм решения задачи, приведем вспомогательные построения.

В качестве модели (при фиксированном $h \in (0,1)$) возьмем систему обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $n \times (q+1)$ ($q = q_h$, $q_h \to \infty$ при $h \to 0$) следующего вида:

$$\dot{y}(t) = F_q(t, y(t), v^h(t)), \tag{2.1}$$

где $y = \{y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(q)}\}$ — $((q+1)\times n)$–мерный вектор; $y^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j \in [0:q]$; $\omega_q = \tau/q$;

$$F_q(t,y,v) = \left\{ \begin{array}{c} F(t, y^{(0)}, y^{(q)}, v) \\ \omega_q^{-1}\{y^{(0)} - y^{(1)}\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_q^{-1}\{y^{(q-1)} - y^{(q)}\} \end{array} \right\}.$$

Начальное состояние модели: $y^{(j)}(0) = x_0(-j\omega_q)$, $j \in [0:q]$. Подобная система использовалась в работах [15–17] при исследовании дифференциально-разностных игр.

Ниже полагаем, что в моменты τ_i измеряется (с ошибкой) часть координат системы (2.1), а именно координаты $y^{(0)}(\tau_i)$. Результаты измерений — векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$|y^{(0)}(\tau_i) - \psi_i^h| \le h. \tag{2.2}$$

Итак, модель описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (см. (2.1)), в то время как заданная система — уравнением с запаздыванием (см. (1.1)).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [16]. *Каково бы ни было число $\varepsilon_1 > 0$ можно указать число $N_0 = N_0(\varepsilon_1, x_0(s))$ такое, что при всех $q > N_0$ равномерно по всем $v(\cdot) \in P(\cdot)$ выполняются неравенства*

$$\sup_{t\in T} |x(t - j\omega_q) - y^{(j)}(t)| \le \varepsilon_1, \quad j \in [0:q].$$

Здесь и всюду ниже символ $x(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot))$ означает решение системы (1.1) с начальным состоянием $x_0(s)$ и возмущением $u = v(\cdot) \in P(\cdot)$, а символ $y(\cdot) = y(\cdot; 0, y(0), v(\cdot))$ — решение системы (2.1) с начальным состоянием $y(0)$ и тем же самым возмущением, т. е. $v^h = v(\cdot)$.

Одно и то же решение уравнения (1.1) может вызываться не единственным возмущением. Пусть $U(x(\cdot))$ — множество всех возмущений из $P(\cdot)$, порождающих решение $x(\cdot)$ уравнения (1.1), т. е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) \colon \dot{x}(t) - f(t, x(t), x(t-\tau)) = B(x(t))u(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\}.$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T;\mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $P(\cdot)$, порождающее решение $x(\cdot)$ уравнения (1.1), т. е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot)\in U(x(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу [4], мы будем восстанавливать $u_*(\cdot)$.

Пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1. Для любого вектора $u \in P$ и любых n-мерных векторов x_1, x_2, y_1, y_2 при всех $t \in T$ справедливо неравенство

$$(F(t, x_1, y_1, u) - F(t, x_2, y_2, u), x_1 - x_2) \le \chi_1 |x_1 - x_2|^2 + \chi_2 |y_1 - y_2|^2,$$

где $\chi_1 < 0$, $\chi_2 > 0$ — постоянные, такие что $0 < \chi_2 < -\chi_1$.

Здесь символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В качестве примера можно привести систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 x(t-\tau) + B(x(t))u(t),$$

где A_1 — $(n\times n)$-мерная отрицательно определенная матрица. Тогда найдется число $c_1 < 0$ такое, что

$$(A_1(x_1 - x_2), x_1 - x_2) \le c_1 |x_1 - x_2|^2 \quad \forall x_1, x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что $B(x)$ — матричная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \le L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\|\cdot\|$ означает евклидову норму матрицы.

Как нетрудно видеть, условие 1 будет выполнено, если существует такое число $c_2 > 0$, что справедливо неравенство

$$\|A_2\|/(4c_2) + c_2 + Ld(P) \le -c_1,$$

где $d(P) = \sup_{u\in P} |u|$. Тогда $\chi_1 = c_1 + c_2 + Ld(P)$, $\chi_2 = \|A_2\|/(4c_2)$. Заметим, что число c_2 с указанными выше свойствами существует, например, в случае, когда

$$(c_1 + Ld(P))^2 > \|A_2\|.$$

Символом $\mathbb{R}^n_q$ обозначим пространство $(n \times (q+1))$-мерных векторов со скалярным произведением

$$(z, y)_q = (x_0, y_0) + c_q \sum_{j=1}^{q} (x_j, y_j)$$

и нормой $|\cdot|_q$. Здесь $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_q\}$, $y = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in [0 : q]$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$, q — натуральное число.

У с л о в и е 2. Число c_q таково, что выполняется неравенство

$$\chi_2 \le 0,5 c_q \omega_q \le -\chi_1.$$

3. Алгоритм решения

Фиксируем семейство разбиений Δ_h интервала T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) = \vartheta/m_h, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta.$$

Совокупность всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)\colon T \mapsto \mathbb{R}^n$, $\xi^h(t) = \xi^h_i$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \in [0 : m_h]$, удовлетворяющих ограничениям (1.2), будем обозначать символом $\Xi(x(\cdot), h)$.

Введем вспомогательную функцию $\alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h. Вместе с ней фиксируем числа $q = q(h) > N_0(h, x_0(s))$ и $\alpha = \alpha(h)$, а также разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m}$, $m = m_h$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $i \in [0 : m-1]$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i вычисляется вектор

$$v^h_i = \arg\min\bigl\{2(\psi^h_i - \xi^h_i)' B(\xi^h_i) v + \alpha|v|^2 \colon v \in P\bigr\}, \tag{3.1}$$

где штрих означает транспонирование. Затем на вход модели (2.1) в течение промежутка δ_i подается управление $v^h(t) = v^h_i$. В результате под действием этого управления модель (2.1) переходит из состояния $y(\tau_i)$ в состояние $y(\tau_{i+1})$. На следующем $(i+1)$-м шаге аналогичные действия повторяются.

Как видно из приведенной ниже теоремы 1, описанный выше метод позиционного управления моделью (2.1) генерирует вход модели $v^h(\cdot)$, который сколь угодно точно аппроксимирует вход $u_*(\cdot)$ системы (1.1), если только величина h (погрешность наблюдения) и шаг $\delta(h)$ разбиения Δ_h достаточно малы.

Наряду с системами (1.1) и (2.1) рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_q(t) = F_q(t, x_q(t), u_*(t)) \tag{3.2}$$

с начальным состоянием

$$x_q^{(j)}(0) = x_0(-j\omega_q), \quad j \in [0:q].$$

Здесь $x_q = \{x_q^{(0)}, \ldots, x_q^{(q)}\} \in \mathbb{R}^{n\times(q+1)}$. Таким образом, система (3.2) отличается от системы (2.1) возмущением. Введем величину

$$\varepsilon_q(t) = \nu_q(t) + \alpha \int\limits_0^t \{|v^h(\nu)|^2 - |u_*(\nu)|^2\}\, d\nu,$$

где $\alpha = \alpha(h)$; $\nu_q(t) = |y(t) - x_q(t)|_q^2$; $y(\cdot)$ — решение системы (2.1); $x_q(\cdot)$ — решение системы (3.2).

Лемма 2. *Пусть управление* $v^h(\cdot)$ *в модели* (2.1) *находится по формуле* (3.1). *Тогда равномерно по всем* $h \in (0,1)$, $i \in [0:m_h]$ *и* $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$ *верны неравенства*

$$\varepsilon_q(\tau_i) \le c_*(h + \delta(h)), \tag{3.3}$$

где $c_* = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, $h \in (0,1)$, $q = q(h) > N_0(h, x_0(s))$, *число* N_0 *определено в лемме* 1.

Доказательство. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_q(t)$. Продифференцировав $\varepsilon_q(t)$, получим

$$\dot\varepsilon_q(t) = I_t^{(1)} + I_t^{(2)} \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{3.4}$$

где

$$I_t^{(1)} = 2\big(y(t) - x_q(t), F_q(t, y(t), v^h(t)) - F_q(t, x_q(t), u_*(t))\big)_q; \quad I_t^{(2)} = \alpha\{|v^h(t)|^2 - |u_*(t)|^2\}.$$

Далее имеем

$$I_t^{(1)} = I_t^{(3)} + I_t^{(4)}. \tag{3.5}$$

Здесь

$$I_t^{(3)} = 2c_q\omega_q^{-1} \sum_{j=0}^{q-1} \big\{(y^{(j)}(t) - y^{(j+1)}(t)) - (x_q^{(j)}(t) - x_q^{(j+1)}(t))\big\}\big\{y^{(j+1)}(t) - x_q^{(j+1)}(t)\big\};$$

$$I_t^{(4)} = 2\Big(F(t, y^{(0)}(t), y^{(q)}(t), v^h(t)) - F(t, x_q^{(0)}(t), x_q^{(q)}(t), u_*(t)), y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)\Big).$$

Заметим, что верно неравенство

$$I_t^{(3)} \le c_q\omega_q^{-1}\big\{|y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 - |y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2\big\}. \tag{3.6}$$

Кроме того,

$$I_t^{(4)} = I_t^{(5)} + I_t^{(6)}, \tag{3.7}$$

где

$$I_t^{(5)} = 2\big(B(x_q^{(0)}(t))\{v^h(t) - u_*(t)\}, y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)\big);$$

$$I_t^{(6)} = 2\big(F(t, y^{(0)}(t), y^{(q)}(t), v^h(t)) - F(t, x_q^{(0)}(t), x_q^{(q)}(t), v^h(t)), y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)\big).$$

В свою очередь, в силу условия 1

$$I_t^{(6)} \le 2\chi_1|y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 + 2\chi_2|y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2. \tag{3.8}$$

В таком случае из (3.5)–(3.8) выводим оценку

$$I_t^{(1)} \le 2(c_q q/(2\tau) + \chi_1)|y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 + 2(\chi_2 - c_q q/(2\tau))|y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2 + I_t^{(5)}. \tag{3.9}$$

Учитывая условие 2, из (3.9) получаем

$$I_t^{(1)} \le I_t^{(5)}. \tag{3.10}$$

Значит, ввиду (3.10) из (3.4) следует при п.в. $t \in T$ справедливость неравенства

$$\dot{\varepsilon}_q(t) \le I_t^{(2)} + 2(B(x_q^{(0)}(t))\{v^h(t) - u_*(t)\}, y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)). \tag{3.11}$$

Нетрудно видеть, что можно указать (в явном виде) число $c_1 > 0$ такое, что равномерно по всем $v(\cdot) \in P(\cdot)$, $q > N_0(h, x_0(s))$ выполняются неравенства

$$|\dot{x}_q^{(0)}(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le c_1, \tag{3.12}$$

$$|\dot{y}^{(0)}(\cdot; 0, y(0), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le c_1. \tag{3.13}$$

Кроме того, ввиду леммы 1 при всех $q > N_0(h, x_0(s))$ и всех $v(\cdot) \in P(\cdot)$

$$|x(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot)) - x_q^{(0)}(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le h, \tag{3.14}$$

$$|y(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot)) - y^{(0)}(\cdot; 0, y(0), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le h. \tag{3.15}$$

Поэтому в силу (1.2), (2.2), (3.11)–(3.15) при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ и всех $i \in [0 : m-1]$ верно неравенство

$$\dot{\varepsilon}_q(t) \le I_t^{(2)} + 2(B(\xi_i^h)(v^h(t) - u_*(t)), \psi_i^h - \xi_i^h) + c_2(t - \tau_i) + c_3 h.$$

Из этого неравенства, учитывая правило определения управления $v^h(\cdot)$ (см. (3.1)), получаем (3.3). Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Следствие. *При $q = (h) > N_0(h, x_0(s))$ справедливы неравенства:*

$$\sup_{t\in T} |y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 \le c^{(1)}(h + \delta(h) + \alpha(h));$$

$$\sup_{t\in T} |y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2 \le c^{(2)}(h + \delta(h) + \alpha(h));$$

$$\int_0^{\vartheta} |v^h(\nu)|^2 d\nu \le \int_0^{\vartheta} |u_*(\nu)|^2\, d\nu + c^{(3)}(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h).$$

Здесь $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ — некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Лемма 3. *Пусть $q = q(h) > N_0(h, x_0(s))$. Пусть также $\alpha(h) \to 0$, $(h + \delta(h))/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда $v^h(\cdot) \to v_0(\cdot)$ слабо в $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ при $h \to 0$, где $v_0(\cdot)$ — некоторая функция из множества $U(x(\cdot))$.*

Доказательство. Предположим противное: существует последовательность $h_j \to 0$ при $j \to \infty$ такая, что

$$v^{h_j}(\cdot) \to v_0(\cdot) \notin U(x(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.16}$$

В силу следствия получаем

$$\sup_{t\in T} |y_{q_j}^{(0)}(t) - x_{q_j}^{(0)}(t)| \le c^{(1)}(h_i + \delta(h_j) + \alpha(h_j)) \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.17}$$

Здесь $q_j > N_0(h_j, x_0(s))$; $y_{q_j}(\cdot) = \{y_{q_j}^{(0)}(\cdot), \ldots, y_{q_j}^{(q_j)}(\cdot)\}$ — решение системы (2.1) при $q = q_j$ и управлении $v = v^{h_j}(\cdot)$, вычисляемым по формуле (3.1) при $h = h_j$; $x_{q_j}(\cdot) = \{x_{q_j}^{(0)}(\cdot), \ldots, x_{q_j}^{(q_j)}(\cdot)\}$ — решение системы (3.2) при $q = q_j$. Пусть $y^h(\cdot)$ — решение системы

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) + B(y(t))v^h(t)$$

с начальным условием

$$y(s) = x_0(s), \quad s \in [-\tau, 0].$$

В таком случае при $t \in T$ справедливы равенства

$$y^{h_j}(t) = x(0) + \int\limits_0^t \big\{ f(\nu, y^{h_j}(\nu), y^{h_j}(\nu - \tau)) + B(y^{h_j}(\nu))v^{h_j}(\nu) \big\}\, d\nu; \tag{3.18}$$

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t \big\{ f(\nu, x(\nu), x(\nu - \tau)) + B(x(\nu))u_*(\nu) \big\}\, d\nu. \tag{3.19}$$

Ввиду леммы 1 имеем

$$\begin{gathered} \sup_{t\in T} |x_{q_j}^{(0)}(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \\ \sup_{t\in T} |y_{q_j}^{(0)}(t) - y^{h_j}(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Отсюда и из (3.17), (3.20) вытекает сходимость

$$\sup_{t\in T} |y^{h_j}(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.21}$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.18), (3.19), получаем

$$|J_t^{h_j}| \le |y^{h_j}(t) - x(t)| + |I_t^{h_j}|, \tag{3.22}$$

где

$$I_t^{h_j} = \int\limits_0^t \big\{ f(\nu, y^{h_j}(\nu), y^{h_j}(\nu - \tau)) - f(\nu, x(\nu), x(\nu - \tau)) \big\}\, d\nu,$$

$$J_t^{h_j} = \int\limits_0^t \big\{ B(y^{h_j}(\nu))v^{h_j}(\nu) - B(x(\nu))u_*(\nu) \big\}\, d\nu.$$

В силу (3.21)) из (3.22) следует сходимость

$$\sup_{t\in T} |J_t^{h_j}| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.23}$$

Далее имеем

$$\begin{gathered} \sup_{\nu\in T} \Big| \int\limits_0^\nu B(x(t))\{v_j^h(t) - u_*(t)\}\, dt \Big| \le \sup_{\nu\in T} \Big| \int\limits_0^\nu \big\{ B(y^{h_j}(t))v^{h_j}(t) - B(x(t))u_*(t) \big\}\, dt \Big| \\ + \sup_{\nu\in T} \Big| \int\limits_0^\nu \{B(y^{h_j}(t)) - B(x(t))\} v^{h_j}(t)\, dt \Big|. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Первое слагаемое в правой части (3.24) стремится к нулю в силу (3.23), а второе — в силу (3.21). Значит,

$$\sup_{\nu\in T}\Big|\int\limits_0^\nu B(x(t))\{v^{h_j}(t)-u_*(t)\}\,dt\Big| \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Следовательно,

$$B(x(t))v_0(t)=B(x(t))u_*(t) \quad \text{при п.в.} \quad t\in T.$$

Поэтому

$$v^{h_j}(\cdot)\to v_0(\cdot)\in U(x(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;\mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{3.25}$$

Однако (3.25) противоречит (3.16).

Лемма доказана.

Из леммы 3 и следствия стандартным образом (см., например, [2, с. 25, 26]) устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть управление $v^h(\cdot)$ находится по формуле* (3.1). *Тогда равномерно по всем $\xi^h(\cdot)\in\Xi(x(\cdot),h)$ имеет место сходимость $v^h(\cdot)\to u_*(\cdot)$ в $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ при $h\to 0$, если $q=q(h)>N_0(h,x_0(s))$, $\alpha(h)\to 0$, $(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h)\to 0$ при $h\to 0$.*

4. Оценка скорости сходимости алгоритма

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. При ее обосновании нам понадобится

Лемма 4 [2, с. 29, 30]. *Пусть $u(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R}^r)$, $v(\cdot)$ — r-мерная функция ограниченной вариации и*

$$\Big|\int\limits_0^t u(\nu)\,d\nu\Big|\le\varepsilon, \quad |v(t)|\le K \quad \forall t\in T.$$

Тогда

$$\Big|\int\limits_0^t (u(\nu),v(\nu))\,d\nu\Big|\le\varepsilon(K+\mathrm{var}_T v(\cdot)) \quad \forall t\in T.$$

Здесь ε и K — постоянные, символ $var_T v(\cdot)$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T.

Теорема 2. *Пусть $n=r$, $B(x)=E$ — единичная матрица и $u_*(\cdot)$ — функция ограниченной вариации. Тогда справедлива оценка скорости сходимости алгоритма*

$$|u_*(\cdot)-v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}\le K_1\big[\{\alpha(h)+\delta(h)+h\}^{1/2}+(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h)\big]. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия (см. первые два неравенства) верно неравенство

$$\sup_{t\in T}\Big|\int\limits_0^t\{u_*(\tau)-v^h(\tau)\}\,d\tau\Big| = \sup_{t\in T}\Big|\int\limits_0^t \big\{f(\nu,x_q^{(0)}(\nu),x_q^{(q)}(\nu))-f(\nu,y^{(0)}(\nu),y^{(q)}(\nu))\big\}\,d\nu\Big|$$

$$\le C_0\{\alpha(h)+\delta(h)+h\}^{1/2}.$$

Здесь и ниже C_0 и C_1 — некоторые постоянные, которые могут быть выписаны явно. Отсюда, снова воспользовавшись следствием (см. третье неравенство), получаем

$$|u_*(\cdot)-v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}\le 2|u_*(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}-2\int\limits_0^\vartheta (u_*(\nu),v^h(\nu))\,d\nu$$

$$+\,c^{(3)}(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) = 2\int\limits_0^{\vartheta}(u_*(\nu), u_*(\nu)-v^h(\nu))\,d\nu + c^{(3)}(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h). \tag{4.2}$$

В силу леммы 4

$$\Big|\int\limits_0^{\vartheta}(u_*(\nu), u_*(\nu)-v^h(\nu))\,d\nu\Big| \le C_1(\alpha(h)+\delta(h)+h)^{1/2}. \tag{4.3}$$

Оценка (4.1) является следствием неравенств (4.2), (4.3).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
3. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. I. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
5. **Максимов В. И.** Метод функций Ляпунова в задачах реконструкции входов систем с последействием // Соврем. математика и ее приложения. 2005. Т. 26. С. 78–95.
6. **Близорукова М. С.** О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикл. математика и информатика: сб. Тр. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / М.: МАКС Пресс, 2000. № 28. С. 105–115.
7. **Васильева Е. В.** Динамический метод невязки для дифференциального уравнения с памятью // Проблемы мат. физики: сб. Тр. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 68–74.
8. **Кадиев А. М., Максимов В. И.** О реконструкции управлений в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1545–1552.
9. **Maksimov V., Pandolfi L.** On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag system // IMA J. Math. Control Inform. 2002. Vol. 19, no. 1/2. doi: 10.1093/imamci/19.1_and_2.173 . P. 173–184.
10. **Kappel F., Maksimov V. I., Skuratov E. N.** On dynamical reconstruction of control in a system with time delay. Finite-dimensional models // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2001. Vol. 9, no. 3. P. 269–282. doi: 10.1515/jiip.2001.9.3.269 .
11. **Максимов В. И.** О применении конечномерных управляемых моделей к задаче реконструкции входа в линейной системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 196–204.
12. **Banks H. T., Bihari K. L.** Modeling and estimating uncertainty in parameter estimation // Inverse Probl. 2001. Vol. 17, no. 1. P. 1–17. doi: 10.1088/0266-5611/17/1/308 .
13. **Banks H. T., Bortz D. M.** Inverse problems for a class of measure dependent dynamical systems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2005. Vol. 13, no. 1. P. 103–121. doi: 10.1515/1569394053978515 .
14. **Banks H. T., Rehm K., Sutton K.** Inverse problems for nonlinear delay systems // Methods Appl. Anal. 2010. Vol. 17, no. 3. P. 331–356. doi: 10.4310/MAA.2010.v17.n4.a2 .
15. **Кряжимский А. В., Максимов В. И.** Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, № 2. С. 202–209.
16. **Максимов В. И.** Аппроксимация нелинейных дифференциально-разностных игр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1979. Вып. 30. С. 49–65.
17. **Лукоянов Н. Ю., Плаксин А. Р.** Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 204–217.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 10.09.2017

REFERENCES

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions*. Basel, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 2-88124-944-2 .
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem*. [Methods of Dynamic Reconstruction of Inputs of Control Systems]. Ekaterinburg, Ural'sk. Otd. Ross. Akad. Nauk Publ., 2011, 292 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii. I.* [Optimization methods. I]. Moscow, MCCME Publ., 2011, 620 p. ISBN: 978-5-94057-707-2 .
5. Maksimov V.I. Lyapunov function method in input reconstruction problems of systems with aftereffect. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2007, vol. 140, no. 6, pp. 832–849. doi: 10.1007/s10958-007-0020-x .
6. Blizorukova M.S. Input modeling in time-delayed systems. *Comput. Math. Model.*, 2001, vol. 12, no. 2, pp. 174–185. doi: 10.1023/A:1012518317520 .
7. Vasil'eva E.V. The dynamic discrepancy method for a differential equation with memory. *Comput. Math. Model.*, 1999, vol. 10, no. 1, pp. 55–60. doi: 10.1007/BF02358922 .
8. Kadiyev A.M., Maksimov V.I. On the reconstruction of controls in a parabolic equation. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 11, pp. 1585–1593. doi: 10.1134/S0012266107110134 .
9. Maksimov V., Pandolfi L. On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag system. *IMA J. Math. Control and Information*, 2002, vol. 19, no. 1/2, pp. 173–184. doi: 10.1093/imamci/19.1_and_2.173 .
10. Kappel F., Maksimov V.I., Skuratov E.N. On dynamical reconstruction of control in a system with time delay. Finite-dimensional models. *J. Inverse and Ill-Posed Probl.*, 2001, vol. 9, no. 3, pp. 269–282. doi: 10.1515/jiip.2001.9.3.269 .
11. Maksimov V.I. On the application of finite-dimensional controllable models to the problem of input reconstruction in a linear system with delay. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 196–204 (in Russian).
12. Banks H.T., Bihari K.L. Modeling and estimating uncertainty in parameter estimation. *Inverse Probl.*, 2001, vol. 17, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1088/0266-5611/17/1/308 .
13. Banks H.T., Bortz D.M. Inverse problems for a class of measure dependent dynamical systems. *J. Inverse and Ill-Posed Probl.*, 2005, vol. 13, no. 1, pp. 103–121. doi: 10.1515/1569394053978515 .
14. Banks H.T., Rehm K., Sutton K. Inverse problems for nonlinear delay systems. *Methods Appl. Anal.*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 331–356. doi: 10.4310/MAA.2010.v17.n4.a2 .
15. Kriazhimskii A.V., Maksimov V.I. Approximation in linear differential-difference games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1978, vol. 42, no. 2, pp. 212–219. doi: 10.1016/0021-8928(78)90136-3 .
16. Maksimov V.I. Approximation on nonlinear differential-difference games. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 1979, vol. 30, pp. 49–65 (in Russian).
17. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On the approximation of nonlinear conflict-controlled systems of neutral type. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 182–196. doi: 10.1134/S0081543816020152 .

The paper was received by Editorial Office on September 10, 2017.

Maksimov V.I. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .