ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

А. И. Короткий, А. Л. Литвиненко

Исследуется разрешимость неоднородной смешанной краевой задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Такие модели часто используются в науке и технике при описании и исследовании различных процессов тепломассопереноса. Основное внимание уделяется вопросам разрешимости краевой задачи в различных функциональных пространствах, вопросам устойчивости и непрерывной зависимости решения задачи от исходных данных задачи в естественных метриках. Особенность краевой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Такие граничные данные нельзя, вообще говоря, продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать известным способом для преобразования задачи к однородным граничным данным. Для доказательства разрешимости задач используется теорема Лакса—Мильграмма, из этой же теоремы следуют оценки норм решения. Установлены также варианты полной непрерывности оператора решения. Найденные свойства решений прямой задачи в дальнейшем будут использоваться при решении обратных задач.

Ключевые слова: прямая задача, смешанное граничное условие, слабое решение, обобщенное решение, сильное решение, устойчивость, полная непрерывность оператора.

A. I. Korotkii, A. L. Litvinenko. Solvability of a mixed boundary value problem for a stationary reaction–convection–diffusion model.

We study the solvability of an inhomogeneous mixed boundary value problem for a stationary reaction–convection–diffusion model. Such models are often used in science and engineering for the description and analysis of various processes of heat and mass transfer. We focus on the issues of solvability of the boundary value problem in various functional spaces and on the stability of the solution and its continuous dependence on the input data in natural metrics. The peculiarity of the problem consists in the inhomogeneity and irregularity of the mixed boundary data. These boundary data, in general, cannot be continued inside the domain so that the continuation is sufficiently smooth and can be used in the known way to transform the problem to homogeneous boundary data. To prove the solvability of the problem, we use the Lax–Milgram theorem. Estimates for the norms of the solution follow from the same theorem. The properties of the solution of the direct problem found in this study will be used in what follows to solve inverse problems.

Keywords: direct problem, mixed boundary condition, weak solution, generalized solution, strong solution, stability, completely continuous operator.

MSC: 35J25, 76D03, 76R10, 86A04

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-106-120

Введение

В работе изучаются краевые задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии с неоднородными смешанными граничными условиями. Такие модели часто используются при исследовании различных гидродинамических и тепловых процессов, в частности при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод, в микроэлектронике при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле [1; 2].

Основная задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на границе области изменения независимой пространственной переменной (области протекания процесса). Математическая постановка задачи приводит к смешанной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка. Такую задачу иногда называют прямой задачей. Особенность прямой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Такие граничные данные нельзя, вообще говоря, продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать для преобразования задачи к однородным граничным данным.

Для прямой задачи вводятся понятия решения в различных функциональных пространствах в зависимости от гладкости и согласованности граничных данных (слабые, обобщенные, сильные [3–9]). Доказаны теоремы о разрешимости задачи. Установлены априорные оценки на решения и непрерывная зависимость решений от исходных данных задачи. Получены оценки норм оператора решения и установлены некоторые варианты его полной непрерывности. Найденные свойства решений прямой задачи в дальнейшем будут использоваться при решении обратных задач.

В работе продолжаются исследования [10–12].

1. Постановка задачи

Охарактеризуем сначала содержательную сторону задачи. В прямоугольной области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов, рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды). Математическая модель распределения температуры (концентрации вещества) в области Ω представляет собой смешанную краевую задачу для уравнения реакции-конвекции-диффузии [1–8]:

$$\mathbb{L}\, T \equiv \operatorname{div}(\, k \nabla T) - \langle\, \boldsymbol{u}\, , \nabla T\, \rangle - q\, T = f\, , \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\, , \tag{1.1}$$

$$T = \xi\, , \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_1 = \{\, (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x_1 < l_1 \,\}\, , \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\, , \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 = \{\, (l_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x_2 < l_2 \,\}\, , \tag{1.3}$$

$$k\, \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = \varphi\, , \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3 = \{\, (x_1, l_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x_1 < l_1 \,\}\, , \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\, , \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_4 = \{\, (0, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 < x_2 < l_2 \,\}\, . \tag{1.5}$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ — точка пространства $\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}))$ — заданный вектор скорости движения среды в точках $\boldsymbol{x}$ области Ω, удовлетворяющий условию $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ в области Ω (условие несжимаемости среды) и условию $\boldsymbol{u} = 0$ на границе Γ области Ω (условие прилипания среды на неподвижной границе Γ); $T = T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — искомая температура (концентрация вещества) среды в области Ω; $k = k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент теплопроводности (диффузии) среды в области Ω; $q = q(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент реакции в точках области Ω, характеризующий скорость образования или стока тепла (вещества) в результате химических превращений; $f = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — заданная объемная плотность производства или стока тепла (вещества) в области Ω; $\xi = \xi(\boldsymbol{x})$ и $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_3 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω, с окружающей средой; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω; $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Задача состоит в нахождении распределения температуры (концентрации вещества) T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1)–(1.5). Эту задачу иногда будем называть *прямой задачей.*

Уточним постановку задачи.

Далее в тексте будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(\Gamma)$, $L_p(\Gamma_1)$, $L_p(\Gamma_3)$, $p \geqslant 1$, пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geqslant 1$, $l \geqslant 1$ [3–8; 13; 14], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_3)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, нормы в которых определяются обычным образом [4, с. 467; 5, с. 34]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [5, с. 41]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \colon \boldsymbol{u} = 0 \text{ на } \Gamma\,,\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega \right\},$$

$$G_1(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \colon g = 0 \text{ на } \Gamma_1 \right\},$$

$$G_2(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) \colon g = 0 \text{ на } \Gamma_1\,,\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \right\}.$$

В пространствах $\mathbf{H}(\Omega)$, $G_1(\Omega)$ и $G_2(\Omega)$ будут использоваться скалярные произведения и нормы пространств $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ соответственно или эквивалентные им нормы.

Пусть далее для определенности

$$k \in C^1(\overline{\Omega})\,, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\Omega)\,, \quad q \in L_\infty(\Omega)\,, \quad f \in L_2(\Omega)\,, \quad \xi \in L_2(\Gamma_1)\,, \quad \varphi \in L_2(\Gamma_3)\,;$$

$$\begin{array}{lll} 0 < \mu_1 \leqslant k(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_2\,, & \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega}\,, & \mu_1 = \mathrm{const} \leqslant \mu_2 = \mathrm{const}\,; \\ \|\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \,\|_{\mathbb{R}^2} \leqslant \mu_3\,, & \boldsymbol{x} \in \Omega\,, & \mu_3 = \mathrm{const} \geqslant 0\,; \\ 0 \leqslant q(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_4\,, & \boldsymbol{x} \in \Omega\,, & \mu_4 = \mathrm{const} \geqslant 0\,. \end{array}$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [3–8; 13; 14].

Далее исследуем разрешимость прямой задачи в различных функциональных пространствах. Интерес будут представлять также некоторые свойства оператора решения прямой задачи

$$\mathbb{A} \colon \psi = (\, f\,,\, \xi\,,\, \varphi\,) \to T_\psi\,.$$

2. Разрешимость прямой задачи в $L_2(\Omega)$

Понятие слабого решения краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $L_2(\Omega)$ введено согласно [9] и использовалось в [11; 12]. *Слабым решением* краевой задачи (1.1)–(1.5) называется функция $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному равенству (2.1) для любой функции $g \in G_2(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega T \Big(\operatorname{div}\,(\, k\, \nabla g\,) \,+\, \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla g \,\rangle \,-\, q\, g \Big)\, dx = \int\limits_{\Gamma_1} \xi\, k\, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma + \int\limits_\Omega f\, g\, dx\,. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Для любых $\xi \in L_2(\Gamma_1)$, $\varphi \in L_2(\Gamma_3)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\|\, T \,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1 \,\|\, f \,\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \,\|\, \xi \,\|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3 \,\|\, \varphi \,\|_{L_2(\Gamma_3)}\,,$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным краевой задачи и не зависящие от оцениваемой и оценивающих величин. Оператор решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как опрератор из $\Xi = L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$ в $L_2(\Omega)$, линеен и ограничен, причем

$$\|\, \mathbb{A} \,\|_{\mathcal{L}(\Xi; L_2(\Omega))} \leqslant \left(\, C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \,\right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы проводится по схеме [11; 12].

3. Разрешимость прямой задачи в $W_2^1(\Omega)$

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^1(\Omega)$, следуя [3–5]. В этом разделе можно считать, что $k \in C(\overline{\Omega})$, а относительно функции ξ будем предполагать, что она допускает продолжение в $W_2^1(\Omega)$. Это означает, что существует функция $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$ такая, что ее след на Γ_1 совпадает с функцией ξ. Не каждую функцию ξ из $L_2(\Omega)$ можно продолжить в область Ω до функции из $W_2^1(\Omega)$ [6, с. 200-204; 7, с. 309–311]. Любую функцию $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ можно продолжить в область Ω до некоторой функции $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$. Действительно, функция

$$P_\xi(x_1, x_2) = \xi(x_1)\,, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega\,,$$

является искомой. При этом для данного способа продолжения

$$\| P_\xi \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{l_2}\, \| \xi \|_{W_2^1(\Gamma_1)}\,. \tag{3.1}$$

Подмножество всех функций из пространства $L_2(\Omega)$, которые можно продолжить в область Ω до функции из $W_2^1(\Omega)$, представляет собой банахово пространство следов функций из $W_2^1(\Omega)$ на границе Γ_1 [6, с. 140, 197; 7, с. 45, 309; 8, с. 29; 13, с. 216]:

$$W_2^{1/2}(\Gamma_1) = \big\{ \xi = \eta|_{\Gamma_1} \colon\ \eta \in W_2^1(\Omega) \big\}\,.$$

Отметим, что имеют место вложения $W_2^1(\Gamma_1) \subset W_2^{1/2}(\Gamma_1) \subset L_2(\Gamma_1)$ [6, с. 140, 197; 7, с. 45, 309; 13, с. 95, 97, 112, 216]; операторы вложения линейны и непрерывны: существуют положительные постоянные $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ такие, что для любых $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ и $\eta \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ справедливы неравенства $\| \xi \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)} \leqslant \alpha_1 \| \xi \|_{W_2^1(\Gamma_1)}$ и $\| \eta \|_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \alpha_2 \| \eta \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)}$ [6, с. 140, 197; 7, с. 45, 309; 13, с. 95, 97, 112, 216]. Для рассматриваемой области Ω и ее грани Γ_1 существует линейный ограниченный оператор продолжения $\mathbb{P}\colon W_2^{1/2}(\Gamma_1) \to W_2^1(\Omega)$ такой, что для любой функции $\xi \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ выполняется неравенство

$$\| \mathbb{P}\, \xi \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta\, \| \xi \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)} \tag{3.2}$$

с постоянной β, не зависящей от $\xi \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ [6, с. 131, 197; 7, с. 309; 8, с. 30; 13, с. 217]. Если оператор $\mathbb{P}$ рассматривать как оператор на более узкой области определения $W_2^1(\Gamma_1)$, то отсюда получаем существование линейного ограниченного оператора продолжения $\mathbb{P}\colon W_2^1(\Gamma_1) \to W_2^1(\Omega)$ такого, что для любой функции $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ выполняется неравенство

$$\| \mathbb{P}\, \xi \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \tau\, \| \xi \|_{W_2^1(\Gamma_1)} \tag{3.3}$$

с постоянной τ ($\tau = \beta\, \alpha_1$), не зависящей от $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$. Заметим также, что искомое продолжение не однозначно. Если к какому-либо продолжению прибавить любую достаточно гладкую функцию с компактным носителем в Ω, то снова получим функцию из $W_2^1(\Omega)$ с теми же самыми следами на границе области Ω, какие имело исходное продолжение. Если какое-либо продолжение умножить на любую достаточно гладкую функцию, равную единице в какой-либо окрестности границы Γ, то снова получим функцию из $W_2^1(\Omega)$ с теми же самыми следами на границе области Ω, какие имело исходное продолжение.

Умножим равенство (1.1) на пробную функцию $g \in W_2^1(\Omega)$, результат проинтегрируем по области Ω. Применим формулу интегрирования по частям [3, с. 75; 4, с. 70] (первую формулу Грина), перебросив часть производных с функции T на функцию g, получим равенство

$$\int\limits_\Gamma k\, \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\, g\, d\Gamma - \int\limits_\Omega k\, \langle \nabla T\,, \nabla g \rangle\, dx - \int\limits_\Omega \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla T \,\rangle\, g\, dx - \int\limits_\Omega q\, T\, g\, dx = \int\limits_\Omega f\, g\, dx\,.$$

Учитывая граничные условия (1.3)–(1.5) и считая, что $g \in G_1(\Omega)$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} k\, \langle\, \nabla T\,, \nabla g\,\rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla T\,\rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\, T\, g\, dx = \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx\,.$$

Если T искать в виде $T = \Theta + P_\xi$, где Θ есть новая искомая функция из $G_1(\Omega)$, то для Θ получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} k\, \langle\, \nabla\Theta\,, \nabla g\,\rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla\Theta\,\rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\, \Theta\, g\, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx + \int\limits_{\Omega} k\, \langle\, \nabla P_\xi\,, \nabla g\,\rangle\, dx + \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla P_\xi\,\rangle\, g\, dx + \int\limits_{\Omega} q\, P_\xi\, g\, dx\,.$$

Перепишем данное равенство в виде

$$B(\,\Theta\,,\, g\,) = F(g)\,, \tag{3.4}$$

где

$$B(\,\Theta\,,\, g\,) = \int\limits_{\Omega} k\, \langle\, \nabla\Theta\,, \nabla g\,\rangle\, dx + \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla\Theta\,\rangle\, g\, dx + \int\limits_{\Omega} q\, \Theta\, g\, dx\,,$$

$$F(g) = \int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} k\, \langle\, \nabla P_\xi\,, \nabla g\,\rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla P_\xi\,\rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\, P_\xi\, g\, dx\,.$$

Все элементы в равенстве (3.4) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^1(\Omega)$ назовем функцию $T = \Theta + P_\xi$, где функция-продолжение $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$ определена выше, а функция $\Theta \in G_1(\Omega)$ удовлетворяет вариационному равенству (3.4) для любой функции $g \in G_1(\Omega)$.

Для формулировки следующего утверждения введем обозначения

$$P[\,\xi\,] = \big\{\eta \in W_2^1(\Omega)\colon\, \eta\,|_{\,\Gamma_1} = \xi\big\}\,;$$

для элементов $\xi \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ $(\,\xi \in W_2^1(\Gamma_1)\,)$, $P_\xi \in P[\,\xi\,]$, $\xi \neq 0$, определим числа

$$\beta_1 = \beta(\,\xi\,,\, P_\xi\,) = \inf\big\{\beta \geqslant 0\colon\, \|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta\,\|\,\xi\,\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)}\big\}\,, \tag{3.5}$$

$$\big(\,\beta_2 = \beta[\,\xi\,,\, P_\xi\,] = \inf\big\{\,\beta \geqslant 0\colon\, \|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta\,\|\,\xi\,\|_{W_2^1(\Gamma_1)}\,\big\}\,\big)\,, \tag{3.6}$$

при $\xi = 0$ положим $\beta_1 = \beta(\,0\,,\, P_\xi\,) = 0\,,\, \beta_2 = \beta[\,0\,,\, P_\xi\,] = 0\,.$

Теорема 3.1. *Для любых $\varphi \in L_2(\Gamma_3)$, $f \in L_2(\Omega)$ и любой функции $\xi \in L_2(\Gamma_1)$, допускающей продолжение в область Ω до функции $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$, краевая задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное обобщенное решение $T \in W_2^1(\Omega)$, для которого справедлива оценка*

$$\|\, T\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_4\,\|\, f\,\|_{L_2(\Omega)} + C_5\,\|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)} + C_6\,\|\,\varphi\,\|_{L_2(\Gamma_3)}\,, \tag{3.7}$$

где C_4, C_5, C_6 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным краевой задачи и не зависящие от оцениваемой и оценивающих величин. Оператор решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как оператор из $\Xi_1 = L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$ в $W_2^1(\Omega)$, линеен и ограничен, причем

$$\|\,\mathbb{A}\,\|_{\mathcal{L}(\Xi_1;\, W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(\, C_4^2 + \beta^2\, C_5^2 + C_6^2\,\big)^{1/2}\,. \tag{3.8}$$

Если $\mathbb{A}$ *рассматривать как оператор из* $\Xi_2 = L_2(\Omega) \times W_2^1(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$ *в* $W_2^1(\Omega)$, *то*

$$\| \mathbb{A} \|_{\mathcal{L}(\Xi_2; W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(C_4^2 + \tau^2 C_5^2 + C_6^2 \big)^{1/2} . \tag{3.9}$$

Наряду с оценками (3.8) *и* (3.9) *справедливы также оценки*

$$\| \mathbb{A} \|_{\mathcal{L}(\Xi_1; W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(C_4^2 + \beta_1^2 C_5^2 + C_6^2 \big)^{1/2} , \quad \| \mathbb{A} \|_{\mathcal{L}(\Xi_2; W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(C_4^2 + \beta_2^2 C_5^2 + C_6^2 \big)^{1/2} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем разрешимость вариационного равенства (3.4) в пространстве $G_1(\Omega)$. Для доказательства воспользуемся теоремой Лакса — Мильграма [15, с. 386]. Проверим условия этой теоремы.

Правая часть в (3.4) является линейным непрерывным функционалом над гильбертовым пространством $G_1(\Omega)$. Действительно, это следует из оценок

$$\begin{aligned} |F(g)| &\leqslant \Big| \int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega} k \, \langle \nabla P_\xi \,, \nabla g \,\rangle\, dx \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u} \,, \nabla P_\xi \,\rangle\, g\, dx \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega} q\, P_\xi\, g\, dx \Big| \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} \|g\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2 \int\limits_{\Omega} |\langle\, \nabla P_\xi \,, \nabla g \,\rangle|\, dx \\
&\quad + \|\langle\, \boldsymbol{u} \,, \nabla P_\xi \,\rangle\, \|_{L_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{L_2(\Omega)} + \|\, q\, P_\xi \|_{L_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)}\, \gamma_1 \,\|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_2 \,\|\nabla P_\xi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \\
&\quad + \mu_3 \,\|\nabla P_\xi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \,\|P_\xi\|_{L_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leqslant \Big[\gamma_1 \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_3 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_4 \,\|P_\xi\|_{L_2(\Omega)} \Big] \|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&= \gamma_2 \,\|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} , \end{aligned}$$

где γ_1 — константа из теоремы вложения [3, с. 72–77; 4, с. 79; 15, с. 340],

$$\|\, g \,\|_{L_2(\Gamma_3)} \leqslant \gamma_1 \,\|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} \quad \forall\, g \in G_1(\Omega) ,$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_3 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_4 \,\|P_\xi\|_{L_2(\Omega)} .$$

Левая часть в (3.4) есть билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $G_1(\Omega) \times G_1(\Omega)$. Проверим сначала непрерывность билинейной формы:

$$\begin{aligned} |\, B(\Theta, g) \,| &\leqslant \Big| \int\limits_{\Omega} k \,\langle\, \nabla\Theta, \nabla g \,\rangle\, dx \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega} \Theta \,\langle\, \boldsymbol{u}, \nabla g \,\rangle\, dx \Big| + \Big| \int\limits_{\Omega} q\, \Theta\, g\, dx \Big| \\
&\leqslant \mu_2 \int\limits_{\Omega} |\,\langle\, \nabla\Theta, \nabla g \,\rangle\,|\, dx + \|\Theta\|_{L_2(\Omega)} \|\langle\, \boldsymbol{u}, \nabla g \,\rangle\, \|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \,\|\Theta\|_{L_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leqslant \mu_2 \,\|\nabla\Theta\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\Theta\|_{L_2(\Omega)}\, \mu_3 \,\|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \mu_4 \,\|\Theta\|_{L_2(\Omega)} \|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leqslant \big(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \big) \,\|\Theta\|_{W_2^1(\Omega)} \|\, g \,\|_{W_2^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

Проверим теперь коэрцитивность билинейной формы. Предварительно заметим, что

$$\int\limits_{\Omega} \Theta \,\langle\, \boldsymbol{u}, \nabla\Theta \,\rangle\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \langle\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n} \,\rangle\, \Theta^2 \, d\,\Gamma = 0 .$$

Поэтому

$$B(\Theta, \Theta) = \int\limits_{\Omega} k \,\langle\, \nabla\Theta, \nabla\Theta \,\rangle\, dx + \int\limits_{\Omega} q\, \Theta^2\, dx$$

$$\geqslant \frac{\mu_1}{2}\int\limits_\Omega \langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle\, dx + \frac{\mu_1}{2}\int\limits_\Omega \langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle\, dx \geqslant \frac{\mu_1}{2}\int\limits_\Omega \langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle\, dx + \frac{\mu_1}{2}\gamma_3^{-2}\int\limits_\Omega \Theta^2\, dx$$

$$\geqslant \gamma_4 \,\|\Theta\|^2_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

где $\gamma_4 = \min\left\{ 2^{-1}\,\mu_1\,,\ 2^{-1}\,\mu_1\,\gamma_3^{-2} \right\}$, γ_3 — константа из неравенства Фридрихса [3, с. 62; 4, с. 71, 72; 15, с. 186, 344; 16, с. 374],

$$\|\, g\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \gamma_3 \|\,\nabla g\,\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, g \in G_1(\Omega)\,.$$

Итак, по теореме Лакса — Мильграма получаем существование единственного решения Θ вариационного равенства (3.4) из пространства $G_1(\Omega)$. Из теоремы Лакса — Мильграмма следует также оценка

$$\|\Theta\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \gamma_4^{-1} \|\, F\,\| \leqslant \gamma_4^{-1}\Big[\, \gamma_1 \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + (\,\mu_2 + \mu_3 + \mu_4\,)\, \|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)}\Big]\,.$$

Переходя к функции $T = \Theta + P_\xi$, получаем искомую оценку

$$\|T\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \|\Theta\|_{W_2^1(\Omega)} + \|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_4 \,\|\, f\,\|_{L_2(\Omega)} + C_5 \,\|\,\varphi\,\|_{L_2(\Gamma_3)} + C_6 \,\|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

где $C_4 = \gamma_4^{-1}$, $C_5 = \gamma_4^{-1}\gamma_1\,,\ C_6 = 1 + \gamma_4^{-1}(\,\mu_2 + \mu_3 + \mu_4\,)\,.$

Оценки норм оператора решения в заключительной части теоремы непосредственно следуют из неравенств (3.2), (3.3), (3.5)–(3.9). □

4. Разрешимость задачи в $W_2^2(\Omega)$

Введем понятие сильного решения краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^2(\Omega)$, следуя [3–5]. В этом разделе будем считать, что $k \in C^1(\overline{\Omega})$, а относительно функций ξ и φ будем предполагать, что они допускают продолжения в область Ω, являющиеся функциями из $W_2^2(\Omega)$ удовлетворяющими соответствующим граничным условиям. Точнее, существуют функции $U_\xi \in W_2^2(\Omega)$ и $V_\varphi \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3), (1.5), $\partial U_\xi\,/\partial\,\boldsymbol{n} = 0$ на Γ_3, и (1.3), (1.4), (1.5), $V_\varphi = 0$ на Γ_1, соответственно. Из теорем вложения следует [3, с. 83–87; 6, с. 155; 7, с. 49, 50, 51; 8, с. 32, 33], что не каждая функция $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ и $\varphi \in L_2(\Gamma_3)$ допускают искомые продолжения.

Любая функция $\xi \in W_2^2(\Gamma_1)$, удовлетворяющая граничным условиям $d\,\xi/d\,x_1(0) = 0 = d\,\xi/d\,x_1(l_1)$, допускает искомое продолжение. Действительно, продолжение $U_\xi(x_1, x_2) = \xi(x_1)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, является искомым. Обозначим

$$W = \left\{\, \xi \in W_2^2(\Gamma_1)\colon d\,\xi/d\,x_1(0) = 0 = d\,\xi/d\,x_1(l_1) \right\}.$$

Это множество является подпространством пространства $W_2^2(\Gamma_1)$, как таковое оно далее и будет рассматриваться.

Для любой функции $\varphi \in W_2^2(\Gamma_3)$, удовлетворяющей граничным условиям $d\,\varphi/d\,x_1(0) = 0 = d\,\varphi/d\,x_1(l_1)$, продолжение $V_\varphi(x_1, x_2) = x_2^2\,(2\,l_2)^{-1}\varphi(x_1)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, является искомым. Обозначим

$$Z = \left\{\, \varphi \in W_2^2(\Gamma_3)\colon d\,\varphi/d\,x_1(0) = 0 = d\,\varphi/d\,x_1(l_1) \right\}.$$

Это множество является подпространством пространства $W_2^2(\Gamma_3)$, как таковое оно далее и будет рассматриваться.

Подобных функций-продолжений U_ξ и V_φ существует бесконечно много. Если к функциям U_ξ и V_φ прибавить любую достаточно гладкую функцию с компактным носителем в Ω, то снова получим функции-продолжения, имеющие те же самые следы, что и функции U_ξ и V_φ соответственно. Если функции U_ξ и V_φ умножить на любую достаточно гладкую функцию, равную единице в некоторой окрестности границы Γ, то снова получим функции-продолжения, имеющие те же самые следы, что и функции U_ξ и V_φ соответственно.

Функции ξ и φ, допускающие искомые продолжения, образуют соответственно множества

$$U(\Gamma_1) = \big\{\eta|_{\Gamma_1}:\ \eta\in\mathfrak{A}\big\}, \quad \mathfrak{A} = \Big\{\eta\in W_2^2(\Omega):\ \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4\Big\},$$

$$V(\Gamma_3) = \Big\{\frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}}|_{\Gamma_3}:\ \eta\in\mathfrak{B}\Big\}, \quad \mathfrak{B} = \Big\{\eta\in W_2^2(\Omega):\ \eta|_{\Gamma_1}=0\,,\ \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2\cup\Gamma_4\Big\}.$$

Множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются подпространствами пространства $W_2^2(\Omega)$, на них далее будет рассматриваться норма пространства $W_2^2(\Omega)$. Из теорем вложения [8, с. 32; 13, с. 34] следует, что $U(\Gamma_1)$ есть замкнутое линейное многообразие (подпространство) в $W_2^{3/2}(\Gamma_1)$, а $V(\Gamma_3)$ есть замкнутое линейное многообразие (подпространство) в $W_2^{1/2}(\Gamma_3)$. Ясно, что для любой функции $\xi\in U(\Gamma_1)$, $\xi\neq 0$, и любого ее соответствующего продолжения $U_\xi\in W_2^2(\Omega)$ существует число $\sigma\geqslant 0$ такое, что $\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\sigma\|\xi\|_{W_2^{3/2}(\Gamma_1)}$; для любой функции $\varphi\in V(\Gamma_3)$, $\varphi\neq 0$, и любого ее соответствующего продолжения $V_\varphi\in W_2^2(\Omega)$ существует число $\lambda\geqslant 0$ такое, что $\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\lambda\|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_3)}$. Отметим также, что построенные выше конкретные операторы продолжения

$$\mathbb{P}\colon W_2^2(\Gamma_1)\supset W\ni\xi\to U_\xi\in\mathfrak{A}\subset W_2^2(\Omega)\,,$$
$$\mathbb{Q}\colon W_2^2(\Gamma_3)\supset Z\ni\varphi\to V_\varphi\in\mathfrak{B}\subset W_2^2(\Omega)\,,$$

линейны и непрерывны.

Сильным решением краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^2(\Omega)$ назовем функцию $T=\Phi+U_\xi+V_\varphi$, где функции-продолжения $U_\xi\in\mathfrak{A}$ и $V_\varphi\in\mathfrak{B}$ определены выше, а функция $\Phi\in G_2(\Omega)$ почти всюду в области Ω удовлетворяет равенству

$$\mathbb{L}\,\Phi = f-\mathbb{L}\,U_\xi-\mathbb{L}\,V_\varphi \quad \text{п. в. } \boldsymbol{x}\in\Omega\,. \tag{4.1}$$

Для формулировки следующего утверждения введем обозначения

$$U[\,\xi\,] = \Big\{\eta\in U(\Gamma_1)\colon \eta=\xi \text{ на } \Gamma_1\Big\}, \quad V[\,\varphi\,] = \Big\{\eta\in V(\Gamma_3)\colon \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}}=\varphi \text{ на } \Gamma_3\Big\};$$

для элементов $\xi\in W_2^{3/2}(\Gamma_1)$, $\xi\neq 0$, $U_\xi\in U[\,\xi\,]$, $\varphi\in W_2^{1/2}(\Gamma_3)$, $\varphi\neq 0$, $V_\varphi\in V[\,\varphi\,]$ определим числа

$$\sigma_* = \sigma(\,\xi\,,\,U_\xi\,) = \inf\big\{\sigma\geqslant 0\colon \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\sigma\|\xi\|_{W_2^{3/2}(\Gamma_1)}\big\}\,,$$
$$\lambda_* = \lambda(\,\varphi\,,\,V_\varphi) = \inf\big\{\lambda\geqslant 0\colon \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\lambda\|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_3)}\big\}\,,$$

при $\xi=0$ и $\varphi=0$ положим $\sigma_*=\sigma(\,0\,,\,U_\xi\,)=0$ и $\lambda_*=\lambda(\,0\,,\,V_\xi\,)=0$ соответственно.

Теорема 4.1. *Для любой функции $f\in L_2(\Omega)$, любых функций $\xi\in U(\Gamma_1)$ и $\varphi\in V(\Gamma_3)$, любых соответствующих продолжений $U_\xi\in\mathfrak{A}$ и $V_\varphi\in\mathfrak{B}$, краевая задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное сильное решение $T\in W_2^2(\Omega)$, для которого справедлива оценка*

$$\|T\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant C_7\|f\|_{L_2(\Omega)}+C_8\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}+C_9\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\,,$$

где C_7, C_8, C_9 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным краевой задачи и не зависящие от оцениваемой и оценивающих величин. Оператор решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как оператор из $\Xi_3=L_2(\Omega)\times U(\Gamma_1)\times V(\Gamma_3)$ в $W_2^2(\Omega)$, линеен и ограничен, причем если для функций ξ и φ выполняются неравенства $\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\sigma\|\xi\|_{W_2^{3/2}(\Gamma_1)}$ и $\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\lambda\|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_3)}$, то

$$\|\mathbb{A}\|_{\mathcal{L}(\Xi_3;W_2^2(\Omega))}\leqslant\big(\,C_7^2+\sigma^2\,C_8^2+\lambda^2\,C_9^2\,\big)^{1/2}\,.$$

Наряду с этой оценкой справедлива также оценка

$$\|\mathbb{A}\|_{\mathcal{L}(\Xi_3;W_2^2(\Omega))}\leqslant\big(\,C_7^2+\sigma_*^2\,C_8^2+\lambda_*^2\,C_9^2\,\big)^{1/2}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем произвольные функции $f \in L_2(\Omega)$, $\xi \in U(\Gamma_1)$, $\varphi \in V(\Gamma_3)$ и произвольные соответствующие продолжения $U_\xi \in \mathfrak{A}$, $V_\varphi \in \mathfrak{B}$. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой Лакса — Мильграма. Умножим равенство (4.1) на $\mathbb{L}\,Y$ и проинтегрируем по области Ω: $B(\,\Phi\,,\,Y\,) \equiv \langle \mathbb{L}\,\Phi\,,\,\mathbb{L}\,Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle\, f - \mathbb{L}\,U_\xi - \mathbb{L}\,V_\varphi\,,\mathbb{L}\,Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} \equiv F(\,Y\,)$.

Получаем вариационное равенство

$$B(\,\Phi\,,\,Y\,) = F(\,Y\,) \quad \forall\; Y \in G_2(\Omega) \tag{4.2}$$

с билинейной формой

$$B(\,\Phi\,,\,Y\,) = \int\limits_{\Omega} (\mathbb{L}\Phi)(\mathbb{L}\,Y)\,dx\,, \quad \Phi \in G_2(\Omega)\,, \quad Y \in G_2(\Omega)\,,$$

и линейной формой

$$F(\,Y\,) = \int\limits_{\Omega} (\,f - \mathbb{L}\,U_\xi - \mathbb{L}\,V_\varphi\,)\,\mathbb{L}\,Y\,dx\,, \quad Y \in G_2(\Omega)\,.$$

Прежде чем проверить условия теоремы Лакса — Мильграма, предварительно докажем, что линейный оператор $\mathbb{L} : W_2^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ограничен (непрерывен), т. е. существует положительная константа ω такая, что

$$\|\,\mathbb{L}\,g\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \omega\,\|\,g\,\|_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall\; g \in W_2^2(\Omega)\,. \tag{4.3}$$

Действительно, для любой функции $g \in W_2^2(\Omega)$ справедлива цепочка неравенств

$$(\,\mathbb{L}\,g\,)^2 = \big(\operatorname{div}(\,k\,\nabla g) - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla g\,\rangle - q\,g\,\big)^2$$

$$= \Big(\,\frac{\partial(\,k\,\partial\,g/\partial\,x_1)}{\partial\,x_1} + \frac{\partial(\,k\,\partial\,g/\partial\,x_2)}{\partial\,x_2} - u_1\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1} - u_2\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2} - q\,g\,\Big)^2$$

$$= \Big(\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1} + k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2} + \frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2} + k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2} - u_1\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1} - u_2\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2} - q\,g\,\Big)^2$$

$$\leqslant 7\,\Big[\,\Big(\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + \Big(\,k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + \Big(\,k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\Big)^2 + \Big(\,u_1\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + \Big(\,u_2\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + (\,q\,g\,)^2\,\Big]$$

$$\leqslant 7\,\Big[\,\Big\|\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\,\Big\|^2_{C(\overline{\Omega})}\Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + (\,\mu_2\,)^2\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\Big)^2 + \Big\|\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\,\Big\|^2_{C(\overline{\Omega})}\Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + (\,\mu_2\,)^2\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\Big)^2$$

$$+\,\mu_3^2\,\Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + \mu_3^2\,\Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + \mu_4^2\,g^2\,\Big]$$

$$\leqslant 14\max\Big\{\,\Big\|\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\,\Big\|^2_{C(\overline{\Omega})},\,\Big\|\,\frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\,\Big\|^2_{C(\overline{\Omega})},\,\mu_2^2\,,\,\mu_3^2\,,\,\mu_4^2\Big\}\,\Big(\,\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + g^2\Big)$$

$$\leqslant \omega^2\Big[\,\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\Big)^2 + 2\,\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + g^2\Big],$$

где

$$\omega^2 = 14\,\max\Big\{\,\|\,k\,\|^2_{C^1(\overline{\Omega})}\,,\,\mu_2^2\,,\,\mu_3^2\,,\,\mu_4^2\,\Big\}\,.$$

Выделяем из цепочки неравенств неравенство

$$(\,\mathbb{L}\,g\,)^2 \leqslant \omega^2\Big[\,\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\Big)^2 + 2\,\Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\Big)^2 + \Big(\,\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\Big)^2 + g^2\Big].$$

Проинтегрировав это неравенство по Ω и вычислив затем квадратный корень из обеих частей неравенства, получим (4.3).

Проверим теперь условия теоремы Лакса — Мильграма. Линейная форма $F(Y)$ является линейным непрерывным функционалом над гильбертовым пространством $G_2(\Omega)$. Действительно, воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского и оценкой (4.3), получим цепочку неравенств

$$
\begin{gathered}
|\langle f - \mathbb{L}\, U_\xi - \mathbb{L}\, V_\varphi\,,\, \mathbb{L} Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| \leqslant |\langle f\,,\, \mathbb{L} Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| + |\langle \mathbb{L}\, U_\xi\,,\, \mathbb{L} Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| + |\langle \mathbb{L}\, V_\varphi\,,\, \mathbb{L} Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| \\
\leqslant \|\, f\,\|_{L_2(\Omega)} \|\,\mathbb{L}\, Y\|_{L_2(\Omega)} + \|\,\mathbb{L}\, U_\xi\|_{L_2(\Omega)} \|\,\mathbb{L}\, Y\|_{L_2(\Omega)} + \|\,\mathbb{L}\, V_\varphi\|_{L_2(\Omega)} \|\mathbb{L}\, Y\|_{L_2(\Omega)} \\
\leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\, \omega\, \|Y\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega\, \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\, \omega\, \|Y\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega\, \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\, \omega\, \|\,\mathbb{L}\|_{W_2^2(\Omega)} \\
\leqslant \Big(\omega\, \|f\|_{L_2(\Omega)} + \omega^2\, \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega^2\, \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \Big)\, \|Y\|_{W_2^2(\Omega)} \\
\leqslant \varkappa\, \|Y\|_{W_2^2(\Omega)}\,, \\
\varkappa = \omega\, \|f\|_{L_2(\Omega)} + \omega^2\, \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega^2\, \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\,,
\end{gathered}
$$

из которой следует непрерывность линейной формы на $G_2(\Omega)$: $|\, F(\,Y\,)\,| \leqslant \varkappa\, \|Y\|_{W_2^2(\Omega)}$.

Билинейная форма $B(\,\Phi\,,\,Y\,)$ непрерывна и коэрцитивна на $G_2(\Omega) \times G_2(\Omega)$. Проверим сначала непрерывность билинейной формы. Используя неравенство Коши — Буняковского и оценку (4.3), получим цепочку неравенств

$$
|\, B(\,\Phi\,,\,Y\,)\,| \leqslant |\langle \mathbb{L}\,\Phi\,,\, \mathbb{L} Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| \leqslant \|\,\mathbb{L}\,\Phi\,\|_{L_2(\Omega)} \|\,\mathbb{L}\, Y\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \omega^2\, \|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)}\, \|\,Y\,\|_{W_2^2(\Omega)}\,,
$$

из которой следует непрерывность билинейной формы на $G_2(\Omega) \times G_2(\Omega)$:

$$
|\, B(\,\Phi\,,\,Y\,)\,| \leqslant \omega^2\, \|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)}\, \|\,Y\,\|_{W_2^2(\Omega)}\,.
$$

Проверим теперь коэрцитивность билинейной формы:

$$
B(\,Y\,,\,Y\,) = \langle \mathbb{L}\, Y\,,\, \mathbb{L}\, Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \varrho\, \|\,Y\,\|^2_{W_2^2(\Omega)}\,. \tag{4.4}
$$

Действительно, для любого элемента $Y \in G_2(\Omega)$ и любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ имеем

$$
\int\limits_\Omega (\,\mathbb{L}\, Y\,)^2 dx = \int\limits_\Omega \big(\,\mathrm{div}\,(\,k\,\nabla Y) - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2 dx = \int\limits_\Omega \big(\,k\,\Delta\,Y + \langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2 dx
$$

$$
\begin{gathered}
= \int\limits_\Omega \Big[\big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2 + 2\,\big(\,k\,\Delta\,Y\big)\,\big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big) + \big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2 \Big]\, dx \\
\geqslant (\,1 - \varepsilon\,) \int\limits_\Omega \big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2 dx + \Big(\,1 - \frac{1}{\varepsilon}\,\Big) \int\limits_\Omega \big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2 dx \\
\geqslant (\,1 - \varepsilon\,) \int\limits_\Omega \big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2 dx + \Big(\,1 - \frac{1}{\varepsilon}\,\Big)\; 3 \int\limits_\Omega \big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle^2 + \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle^2 + (\,q\,Y\,)^2\,\big)\, dx \\
\geqslant (\,1 - \varepsilon\,) \int\limits_\Omega \big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2 dx + \Big(\,1 - \frac{1}{\varepsilon}\,\Big)\; 3 \int\limits_\Omega \big(\,\|\,\nabla k\,\|^2_{\mathbb{R}^2}\, \|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2} + \|\,\boldsymbol{u}\,\|^2_{\mathbb{R}^2}\, \|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2} + q^2\, Y^2\,\big)\, dx \\
\geqslant (\,1 - \varepsilon\,) \int\limits_\Omega \big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2 dx + \Big(\,1 - \frac{1}{\varepsilon}\,\Big)\; c_1 \int\limits_\Omega \big(\,\|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2} + Y^2\,\big)\, dx\,, \\
c_1 = 3\,\max\big\{\,\|\,k\,\|^2_{C^1(\overline{\Omega})}\,,\, \mu_3^2\,,\, \mu_4^2\,\big\}\,.
\end{gathered}
$$

Далее, учитывая граничные условия для функций из $G_2(\Omega)$, с помощью двухкратного интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{\Omega}\big(k\,\Delta Y\big)^2 dx \geqslant \mu_1^2\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\Big)^2 dx = \mu_1^2\int\limits_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}+\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\Big)^2\Big]\,dx$$

$$= \mu_1^2\int\limits_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1\partial x_2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\Big)^2\Big]\,dx$$

$$+\,\mu_1^2\int\limits_{\Gamma}\Big[\,2\,\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\cos(\boldsymbol{n},x_1) - 2\,\frac{\partial Y}{\partial x_1}\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1\,\partial x_2}\cos(\boldsymbol{n},x_2)\Big]\,d\Gamma$$

$$= \mu_1^2\int\limits_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1\partial x_2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}\Big)^2\Big]\,dx \equiv \mu_1^2\,\|\,Y_{xx}\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Итак, получаем неравенство

$$(1-\varepsilon)\,\mu_1^2\,\|\,Y_{xx}\,\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega}(\mathbb{L}\,Y\,)^2 dx + \Big(\frac{1}{\varepsilon}-1\Big)\,c_1\int\limits_{\Omega}\big(\,\|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2}+Y^2\,\big)\,dx\,.$$

Прибавим к обеим частям неравенства выражение $(1-\varepsilon)\,\mu_1^2\,\|\,Y\,\|^2_{W_2^1(\Omega)}$, в результате имеем

$$(1-\varepsilon)\,\mu_1^2\,\|\,Y\,\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega}(\,\mathbb{L}\,Y\,)^2 dx + \Big[\,(1-\varepsilon)\,\mu_1^2+\Big(\frac{1}{\varepsilon}-1\Big)\,c_1\Big]\,\|\,Y\,\|^2_{W_2^1(\Omega)}\,. \tag{4.5}$$

Учитывая коэрцитивность билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ из предыдущего раздела, неравенство Коши — Буняковского, неравенство Фридрихса, для каждого элемента $Y\in G_2(\Omega)$ имеем цепочку неравенств

$$\gamma_4\,\|\,Y\,\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant B(\,Y\,,\,Y\,) = \langle\,\mathbb{L}\,Y\,,\,Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\,\mathbb{L}\,Y\,\|_{L_2(\Omega)}\,\|\,Y\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\,\mathbb{L}\,Y\,\|_{L_2(\Omega)}\,\gamma_3\,\|\,Y\,\|_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

из которой следует неравенство $\|\,Y\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \gamma_4^{-1}\,\gamma_3\,\|\,\mathbb{L}\,Y\,\|_{L_2(\Omega)}$. Используя это неравенство, оценим правую часть в (4.5):

$$(1-\varepsilon)\,\mu_1^2\,\|\,Y\,\|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \int\limits_{\Omega}(\,\mathbb{L}\,Y\,)^2 dx + \Big[\,(1-\varepsilon)\,\mu_1^2+\Big(\frac{1}{\varepsilon}-1\Big)\,c_1\Big]\,\gamma_4^{-2}\,\gamma_3^2\,\|\,\mathbb{L}\,Y\,\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\leqslant \Big[\,1+\Big(\,(1-\varepsilon)\,\mu_1^2+\Big(\frac{1}{\varepsilon}-1\Big)\,c_1\Big)\,\gamma_4^{-2}\,\gamma_3^2\Big]\,\|\,\mathbb{L}\,Y\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Отсюда следует неравенство коэрцитивности (4.4) с

$$\varrho = (1-\varepsilon)\,\mu_1^2\,\Big[\,1+\Big(\,(1-\varepsilon)\,\mu_1^2+\Big(\frac{1}{\varepsilon}-1\Big)\,c_1\Big)\,\gamma_4^{-2}\,\gamma_3^2\Big]^{-1}\,.$$

Итак, по теореме Лакса — Мильграма получаем существование единственного решения Φ вариационного равенства (4.2) из пространства $G_2(\Omega)$. Из теоремы Лакса — Мильграма следует также оценка

$$\|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \varrho^{-1}\,\big[\,\omega\,\|f\|_{L_2(\Omega)} + \omega^2\,\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega^2\,\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\,\big]\,.$$

Поскольку оператор $\mathbb{L}$ осуществляет отображение $G_2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$ [11 ; 12, § 1.2], то из того, что Φ есть решение вариационного равенства (4.2), следует, что Φ есть сильное решение краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^2(\Omega)$.

Переходя к функции $T = \Phi + U_\xi + V_\varphi$, получаем искомую оценку

$$\|T\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C_7 \, \| \, f \, \|_{L_2(\Omega)} + C_8 \, \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + C_9 \, \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \, ,$$

где $C_7 = \varrho^{-1} \, \omega$, $C_8 = 1 + \varrho^{-1} \, \omega^2$, $C_9 = 1 + \varrho^{-1} \, \omega^2$.

Оценки норм оператора решения из заключительной части теоремы непосредственно следуют из полученного основного неравенства аналогично доказательству теоремы 4.1. □

5. Полная непрерывность оператора решения

В этом разделе докажем, что оператор решения прямой задачи является вполне непрерывным [17, с. 222, 230]. Отсюда получим важное для наших дальнейших исследований следствие, что такой оператор не может иметь непрерывного (ограниченного [17, с. 209]) обратного оператора [17, с. 222, 228].

Теорема 5.1. *Оператор слабого решения прямой задачи* $\mathbb{A}\colon \Xi \to L_2(\Omega)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство теоремы проводится по схеме [11; 12].

Теорема 5.2. *Оператор обобщенного решения прямой задачи* $\mathbb{A}\colon H_s \to W_2^1(\Omega)$*, где* $H_s = L_2(\Omega) \times W_2^s(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$*,* $s > 1/2$*, вполне непрерывен.*

Доказательство. Пространство $W_2^s(\Gamma_1)$ непрерывно (и даже компактно) вкладывается в пространство $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ [13, гл. 6; 8, с. 33, 319], поэтому оператор обобщенного решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как оператор, действующий из H_s в $W_2^1(\Omega)$, будет также непрерывным. Поскольку H_s есть гильбертово пространство [8, с. 320] и поэтому является рефлексивным пространством [17, с. 181], то для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $\mathbb{A}$ переводит слабо сходящиеся последовательности из H_s в сильно сходящиеся последовательность из $W_2^1(\Omega)$ [17, с. 230; 18, с. 254]. Пусть задана произвольная слабо сходящаяся в H_s последовательность $\{ \psi_i = (f_i \, , \xi_i \, , \varphi_i)\} \subset H_s$, $\psi_i \rightharpoonup \psi_0 = (f_0 \, , \xi_0 \, , \varphi_0)$ слабо в H_s, т. е. $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, $\xi_i \rightharpoonup \xi_0$ слабо в $W_2^s(\Gamma_1)$, $\varphi_i \rightharpoonup \varphi_0$ слабо в $L_2(\Gamma_3)$. Всякий линейный непрерывный оператор, действующий в банаховых пространствах, переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся последовательности [18, с. 552], поэтому $T_i = \mathbb{A}\psi_i \rightharpoonup T_0 = \mathbb{A}\psi_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$. Из компактности вложения $W_2^s(\Gamma_1) \subset W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ имеем $\xi_i \to \xi_0$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$, а из ограниченности оператора продолжения $\mathbb{P}\colon W_2^{1/2}(\Gamma_1) \to W_2^1(\Omega)$ получаем, что $\mathbb{P}\xi_i \to \mathbb{P}\xi_0$ в $W_2^1(\Omega)$. Отсюда следует, что, по крайней мере, $\Theta_i = T_i - \mathbb{P}\xi_i \rightharpoonup \Theta_0 = T_0 - \mathbb{P}\xi_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$.

В равенстве (3.4), определяющем компоненту Θ_i обобщенного решения $T_i = \Theta_i + \mathbb{P}\xi_i$, положим $\Theta = \Theta_i$ и $g = \Theta_i$ и перепишем это равенство в виде

$$\int\limits_\Omega k \, \langle \, \nabla\Theta_i \, , \nabla\Theta_i \, \rangle \, dx + \int\limits_\Omega q \, \Theta_i^2 \, dx = F(\Theta_i) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_i \, \rangle \, \Theta_i \, dx \, .$$

В правой части этого равенства имеет место сходимость

$$F(\Theta_i) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_i \, \rangle \, \Theta_i \, dx \to F(\Theta_0) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_0 \, \rangle \, \Theta_0 \, dx \, .$$

Поскольку

$$F(\Theta_0) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_0 \, \rangle \, \Theta_0 \, dx = \int\limits_\Omega k \, \langle \, \nabla\Theta_0 \, , \nabla\Theta_0 \, \rangle \, dx + \int\limits_\Omega q \, \Theta_0^2 \, dx \, ,$$

то

$$\int\limits_{\Omega} k \,\langle\, \nabla\Theta_i \,, \nabla\Theta_i \,\rangle \, dx + \int\limits_{\Omega} q\, \Theta_i^2 \, dx \to \int\limits_{\Omega} k \,\langle\, \nabla\Theta_0 \,, \nabla\Theta_0 \,\rangle \, dx + \int\limits_{\Omega} q\, \Theta_0^2 \, dx \,.$$

В пространстве $W_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$[\, u \,,\, v \,]_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \big(\, k \,\langle\, \nabla u \,,\, \nabla v \,\rangle + q\, u\, v \,\big)\, dx \,,$$

порождающее норму, эквивалентную стандартной норме в $W_2^1(\Omega)$ [3, гл.2, § 3]. Таким образом, $\Theta_i \rightharpoonup \Theta_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и $\|\, \Theta_i \,\|_{W_2^1(\Omega)} \to \|\, \Theta_0 \,\|_{W_2^1(\Omega)}$. В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость [17, с. 185] $\Theta_i \to \Theta_0$ сильно в $W_2^1(\Omega)$. Поэтому

$$T_i \to T_0 \;\text{ сильно в } W_2^1(\Omega)\,. \qquad \square$$

Теорема 5.3. *Оператор сильного решения прямой задачи* $\mathbb{A}\colon \Lambda \to W_2^2(\Omega)$, *где* $\Lambda = W_2^1(\Omega)\times W \times Z$, *вполне непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что оператор $\mathbb{A}$ переводит слабо сходящуюся в Λ последовательность в сильно сходящуюся в $W_2^2(\Omega)$ последовательность. Предварительно отметим, что из теорем вложения следует непрерывность и компактность вложения Λ в Ξ_3. Кроме того, как установлено выше, существуют непрерывные операторы продолжения $\mathbb{P}\colon W \to \mathfrak{A} \subset W_2^2(\Omega)$, $\mathbb{Q}\colon Z \to \mathfrak{B} \subset W_2^2(\Omega)$, образы которых удовлетворяют соответствующим граничным условиям.

Пусть задана произвольная слабо сходящаяся в Λ последовательность $\{\, \psi_i = (\, f_i \,,\, \xi_i \,,\, \varphi_i \,)\} \subset \Lambda$, $\psi_i \rightharpoonup \psi_0 = (\, f_0 \,,\, \xi_0 \,,\, \varphi_0 \,)$ слабо в Λ, т.е. $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$, $\xi_i \rightharpoonup \xi_0$ слабо в W, $\varphi_i \rightharpoonup \varphi_0$ слабо в Z. Всякий линейный непрерывный оператор, действующий в банаховых пространствах, переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся последовательности, поэтому $T_i = \mathbb{A}\psi_i \rightharpoonup T_0 = \mathbb{A}\psi_0$ слабо в $W_2^2(\Omega)$. Из компактности вложения $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ имеем $f_i \to f_0$ сильно в $L_2(\Omega)$, а из ограниченности и компактности вложения $\Lambda \subset \Xi_3$, ограниченности операторов продолжения имеем $\mathbb{P}\,\xi_i \to \mathbb{P}\,\xi_0$ сильно в $W_2^2(\Omega)$, $\mathbb{Q}\,\varphi_i \to \mathbb{Q}\,\varphi_0$ сильно в $W_2^2(\Omega)$. Отсюда следует, что $\eta_i = f_i - \mathbb{L}\,(\mathbb{P}\,\xi_i) - \mathbb{L}\,(\mathbb{Q}\,\varphi_i) \to \eta_0 = f_0 - \mathbb{L}\,(\mathbb{P}\,\xi_0) - \mathbb{L}\,(\mathbb{Q}\,\varphi_0)$ сильно в $L_2(\Omega)$.

В ходе доказательства теоремы 4.1 установлено, что билинейная форма B порождает новое скалярное произведение в $W_2^2(\Omega)$, которому соответствует норма, эквивалентная классической норме в пространстве $W_2^2(\Omega)$. Имеет место сходимость $B(\,\Phi_i \,,\, \Phi_i\,) = \eta_i \to \eta_0 = B(\,\Phi_0 \,,\, \Phi_0\,)$, значит $\Phi_i \rightharpoonup \Phi_0$ слабо в $W_2^2(\Omega)$ и $\|\, \Phi_i \,\|_{W_2^2(\Omega)} \to \|\, \Phi_0 \,\|_{W_2^2(\Omega)}$.

В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость

$$T_i \to T_0 \;\text{ сильно в } W_2^2(\Omega)\,. \qquad \square$$

6. Заключение

В работе рассматривалась краевая задача с неоднородными смешанными граничными условиями для модели реакции-конвекции-диффузии, описывающая распределение тепла или концентрации какого-либо вещества в известной области изменения независимых пространственных переменных. На некоторых участках границы области, составляющих всю границу в целом, задавались неоднородные граничные условия первого или второго рода. Граничные данные предполагались нерегулярными в ряде случаев, что не позволяло продолжить эти данные внутрь области, чтобы известным способом можно было бы свести задачу к более простой задаче с однородными граничными условиями. Для рассматриваемой краевой задачи в зависимости от гладкости и согласованности граничных данных введены соответствующие понятия решения задачи, доказаны теоремы о разрешимости задачи, получены соответствующие априорные оценки на решения, установлены некоторые варианты полной непрерывности оператора решения.

Интерес представляет распространение полученных результатов на более общие классы моделей. Результаты этой работы можно рассматривать как необходимый подготовительный материал для правильной постановки и решения различных обратных граничных задач, связанных с процессами тепломассопереноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
3. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
4. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
5. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961. 203 с.
6. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
7. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
8. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
9. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
10. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
11. **Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.** Прямые и обратные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 98–113.
12. **Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.** Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.
13. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 268 p.
14. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
15. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
16. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
17. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
18. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.

Поступила 25.08.2017

Короткий Александр Илларионович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Литвиненко Анастасия Леонидовна
магистрантка
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: a.litvinenko114@yandex.ru

REFERENCES

1. Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchei sredy.* [Mathematical modelling in environmental problems]. Moscow: Nauka Publ., 1982, 319 p.
2. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha.* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS Publ., 2003, 784 p.
3. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics.* Berlin, Heidelberg, N Y: Springer-Verlag, 1985. 322 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3 . Original Russian text published in *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*, M.: Nauka Publ., 1973, 408 p.
4. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations.* N Y, London: Academic Press, 1968. 495 p. Original Russian text published in *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa*, M.: Nauka Publ., 1973, 576 p.
5. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti.* [Mathematical questions in the dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 203 p.
6. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh.* [Partial differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 392 p.
7. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh.* [Linear partial differential equations]. Moscow: Vishaisha Shkola, 1977, 431 p.
8. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti.* [Analysis and optimization in hydrodynamics of viscous fluids]. Vladivostok: Dal'nauka, 2008, 365 p.
9. Lions J.L. Controle Optimal de Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles. Paris: Dunod: Gauthier-Villars, 1968, 426 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi*, M.: Mir Publ., 1972, 416 p.
10. Korotkii A.I., Kovtunov D.A. Reconstruction of boundary regimes in an inverse problem of thermal convection of a high viscous fluid. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 88–97 (in Russian).
11. Korotkii A.I., Starodubtseva Yu.V. Direct and inverse boundary value problems for models of stationary reaction-convection-diffusion. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, Suppl. 1, pp. 96–112. doi: 10.1134/S0081543815090072.
12. Korotkii A.I., Starodubtseva Yu.V. *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modelei teplomassoperenosa.* [Modelling of direct and inverse problems for models of stationary heat and mass transfer]. Yekaterinburg: Izdatelstvo Uralskogo Universiteta, 2015, 168 p.
13. Adams R.A. Sobolev spaces. N Y: Acad. Press, 1975, 268 p.
14. Sobolev S.L. *Some application of functional analysis in mathematical physics.* Providence: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. Original Russian text published in *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike*, M.: Nauka Publ., 1988, 336 p.
15. Rektorys K. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike.* [Variational methods in mathematics, science and engineering]. Moscow: Mir Publ., 1985, 590 p.
16. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki.* [A course of higher mathematics], vol. 5. Moscow: Fizmatlit Publ., 1959, 657 p.
17. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1972, 496 p.
18. Dunford N., Schwartz J.T. [Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.] *Linear operators. General theory.* Moscow: URSS Publ. Publ., 2004, 896 p.

The paper was received by Editorial Office on August 25, 2017.

Aleksandr Illarionovich Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; e-mail: korotkii@imm.uran.ru.

Anastasia Leonidovna Litvinenko, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; e-mail: a.litvinenko114@yandex.ru.