РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 24, № 1 2018

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 24 № 1 2018

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 24, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2018. 302 с.

ISSN 0134–4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-5-7

АЛЕКСАНДР ГЕОРГИЕВИЧ ЧЕНЦОВ

(к семидесятилетнему юбилею)

4 марта 2017 года отметил 70-летие замечательный российский математик, специалист в области динамической оптимизации, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Александр Георгиевич Ченцов.

Александр Георгиевич родился в Свердловске (ныне Екатеринбург) в семье военных. В 1964 году по окончании средней школы он поступает на радиотехнический факультета Уральского политехнического института им. С.М. Кирова (в настоящее время УрФУ им. Б.Н. Ельцина). Защитив диплом с отличием, Александр Георгиевич два года служит в войсках ПВО сначала командиром взвода, а потом начальником смены.

В 1972 году Александр Георгиевич начинает научную деятельность в математике в качестве инженера отдела динамических систем Института математики и механики. Его научный руководитель — директор ИММ, академик Николай Николаевич Красовский. К моменту прихода А.Г. Ченцова в институт в теории дифференциальных игр уже были получены ответы на ключевые вопросы: Н.Н. Красовским и его учениками установлено существование цены и описана структура оптимальных стратегий. На первый план выдвигались вопросы численной реализации этих объектов в огромном разнообразии приложений. Одним из основных инструментов здесь выступали программные конструкции, восходящие в идейном плане к работам Р. Беллмана и Л.С. Понтрягина. К сожалению, их применимость ограничивалась достаточно узким кругом так называемых регулярных задач.

Так, первой темой исследований Александра Георгиевича в теории управления стало ослабление условий регулярности посредством расширения класса программ, участвующих в программном максимине. Эти работы составили его кандидатскую диссертацию (1974).

Затем рассмотрение программного максимина как оператора, действующего в пространстве функции на расширенном фазовом пространстве системы, привело к идее суперпозиции (итерации). Эта внешне формальная операция имела важный содержательный аспект: повторное применение оператора уже описывало сценарий игры, в котором допускался один элементарный акт обратной связи — коррекция программы в ходе процесса управления. При этом конструкция оставалась относительно обозримой и вычислимой. С увеличением числа итераций росли возможности обратной связи в цепи управления. Вслед за ними расширялся класс задач (по сравнению с регулярным случаем), для которых такая конструкция давала цену игры (либо максимальный стабильный мост в смысле альтернативы Н.Н. Красовского и А.И. Субботина). Неограниченное повторение операции, как показано в работах Александра Георгиевича, приводило в пределе к цене игры либо к максимальному стабильному мосту во всех типичных постановках задачи конфликтного управления и как следствие к построению разрешающей стратегии того или иного типа в зависимости от свойств правой части системы. Таким образом, предложенная “программная” конструкция давала решение всюду за пределами регулярного случая. По результатам этих исследований Александру Георгиевичу была присуждена степень доктора физико-математических наук (1977).

Впоследствии итерационный подход как универсальный инструмент построения неподвижных точек неоднократно успешно применялся А.Г. Ченцовым, его коллегами и учениками в различных областях. Для отдельных задач, таких, например, как задачи с ограничением на число переключений или задача построения неупреждающего селектора, язык программных итераций является наилучшим (а порой единственным) средством описания решений.

Другой сферой научных интересов Александра Георгиевича является задача построения множеств притяжения — аналогов областей достижимости при ограничениях, имеющих асимптотический характер. Подобные ограничения могут быть вызваны ослаблением (релаксацией) точных ограничений или заданы изначально для описания абстрактных объектов, таких, например, как импульс управления с исчезающе малой длительностью. Отметим, что множества притяжения являются совершенно естественным концептуальным расширением областей достижимости: в «хороших» случаях получаются одинаковые объекты, а в «плохих» — множества притяжения лучше отвечают практической точке зрения. Оригинальная идея множеств притяжения потребовала новых инструментов для их описания и построения. Наибольшего прогресса на этом пути удалось достигнуть в линейных задачах управления с импульсными ограничениями, где А.Г. Ченцов предложил новую конструкцию расширения: погружение множества обычных управлений в соответствующие компактные множества конечно-аддитивных мер. В последнее время для решения более общих задач А.Г. Ченцов исследует расширения в пространствах ультрафильтров. Отметим, что в этой области Александр Георгиевич также привел в исчерпывающей по общности и строгости форме конструкцию исследуемого объекта и его свойства.

Мы не сможем сколько-нибудь подробно остановиться на многочисленных прикладных исследованиях, в которых активно участвует Александр Георгиевич. Но отметим одну тему, замечательную тем, что она дала существенное теоретическое продвижение в соответствующей математической дисциплине. Речь идет о маршрутных задачах в атомной энергетике и металлообработке. Здесь результаты А.Г. Ченцова в первую очередь связаны с развитием теории и алгоритмов точного решения осложненных маршрутных и распределительных задач. Так, целый ряд трудно формализуемых в терминах линейного программирования ограничений удалось использовать конструктивно в рамках парадигмы динамического программирования. Созданная А.Г. Ченцовым абстрактная теория позволила построить множество эффективных методов точного и эвристического решения нагруженных прикладными ограничениями оптимизационных инженерных задач малой размерности. Среди таких задач следует особо отметить задачу коммивояжера с различными комбинациями следующих особенностей: условия предшествования, зависимость стоимости перемещения от списка невыполненных заданий, групповой обход (наличие распределительной компоненты), в том числе в минимаксной форме, зависимость стоимости перемещения от неоднородного континуального поля, наличие кластерной структуры на множестве посещаемых пунктов с абстрактными функциями стоимости обработки кластера, вариация положения старта и финиша. Разработанные под руководством А.Г. Ченцова точные и эвристические алгоритмы востребованы в нескольких крупных инженерных центрах РФ (НИИ МВС ЮФУ, Волгодонская и Белоярская АЭС, Институт новых материалов и технологий УрФУ, Уральский энергетический институт УрФУ). Работы Александра Георгиевича Ченцова послужили фундаментом для самостоятельных исследований его учеников: так, например, была создана теория адаптивной устойчивости в абстрактных задачах комбинаторной оптимизации; разработан программный комплекс оптимизации движения режущего инструмента при фигурной листовой резке различных материалов; получены оценки временной и пространственной сложности динамического программирования для задачи коммивояжера с условиями предшествования, учитывающие теоретико-порядковые параметры последних.

Следствием интенсивной научной деятельности Александра Георгиевича является высочайшая публикационная активность — он автор 7 монографий и более 600 публикаций.

А.Г. Ченцов ведет огромную образовательную работу: им подготовлено 15 кандидатов и 3 доктора наук, он системачически преподает в УрФУ, создал серию современных математических учебников для технических специальностей.

Александр Геогриевич вовлечен в обширную научно-организационную работу: в течение многих лет он заведовал отделом оптимального управления и сегодня продолжает руководить научными проектами, участвует в работе нескольких советов по присуждению ученых степеней, программных и организационных комитетов множества конференций, является членом редколлегий известных журналов.

Заслуги Александра Георгиевича отмечены званиями и наградами: он профессор, член-корреспондент РАН, лауреат Государственной премии СССР и премии Губернатора Свердловской области, обладатель почетных дипломов им. А.И. Субботина и Европейской научно-технической палаты Евросоюза.

Особая строгость математического языка, безусловно, отвечает чертам характера А.Г. Ченцова, но также является и необходимым условием изучения проблем, существенно опирающихся на такие абстрактные области, как топология или теория множеств. Не будет преувеличением сказать, что А.Г. Ченцов производит совершенно особое впечатление на ученых, которым довелось работать и общаться с ним. Он удивительным образом расширяет наши представления о понятиях, связанных с математикой и с человеческой личностью: так, широта математического кругозора и эрудиция позволяют ему видеть общее в задачах из, казалось бы, далеких областей математики, стиль его статей открывает новый уровень математической строгости даже опытным ученым, а внимательность и открытость контрастируют с набирающими в обществе силу эгоцентричными тенденциями и с постоянной нехваткой времени. Теоретические исследования, строгий и точный язык как ничто другое подчеркивают совершенно особое стремление Александра Георгиевича Ченцова к идеальным математическим объектам и их безукоризненному описанию. В свою очередь подобное стремление расширяет наши представления о математике и о людях в ней.

Коллеги и ученики от всего сердца поздравляют Александра Георгиевича с юбилеем и желают ему стабильного здоровья, новых ярких научных результатов, успехов в образовательной деятельности и семейного благополучия!

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

О ПОРОЖДАЮЩИХ АЛГЕБРЫ МАТРИЦ И ЕЕ НЕКОТОРЫХ ПОДАЛГЕБР[1]

А. А. Азамов

Показывается, что полная алгебра матриц M_n допускает систему порождающих из двух нильпотентных матриц P, Q таким образом, что любая матрица $A = (a_{ij})$ выражается явно через P и Q в виде $A = \sum_{i \neq j} a_{ij} P^{i-1} Q P^{n-j}$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Приводится приложение этого представления к вычислению степеней матрицы коэффициентов A линейной системы $x_{n+1} = Ax_n + r_n$, моделирующей процесс теплообмена в регенеративных воздухоподогревателях. При этом получаются удобные рекуррентные формулы для элементов $A^k, k = 1, 2, \ldots,$. Рассматривается также задача построения простых систем порождающих для подалгебр диагональных и треугольных матриц. Отмечено, что порождающая матрица подалгебры диагональных матриц связана с интерполяционной формулой Лагранжа. Установлено, что подалгебра треугольных матриц T_n порождается диагональной матрицей с попарно различными элементами и первой косой диагональю. Показано, что треугольная матрица $A \in T_n$ с попарно различными диагональными элементами может быть приведена к жордановой форме в пределах самой подалгебры T_n, т. е. существует $L \in T_n$, такая, что $L^{-1}AL$ будет диагональной. В общем случае это свойство не имеет места для произвольных матриц из T_n.

Ключевые слова: алгебра матриц, система образующих, нильпотентная матрица, матричная единица, подалгебра, жорданова форма, интерполяционный многочлен, дискретная система, воздухонагреватель, теплообмен.

A. A. Azamov. On generators of a matrix algebra and some of its subalgebras.

It is shown that a full matrix algebra M_n admits a generator system consisting of two nilpotent matrices P and Q such that any matrix $A = (a_{ij})$ is expressed explicitly in terms of P and Q as $A = \sum_{i \neq j} a_{ij} P^{i-1} Q P^{n-j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. We show how this representation can be applied to calculate the powers of the coefficient matrix A of a linear system $x_{n+1} = Ax_n + r_n$ modeling heat exchange in a regenerative air preheater. More exactly, we obtain convenient recursive formulas for the elements of A^k, $k = 1, 2, \ldots$. We also consider the problem of constructing a simple system of generators for the subalgebras of diagonal and triangular matrices. We observe that a generating matrix of the subalgebra of diagonal matrices is related to the Lagrange interpolation formula and prove that the subalgebra of triangular matrices is generated by a diagonal matrix with pairwise different elements and first skew diagonal. It is shown that a triangular matrix $A \in T_n$ with pairwise different diagonal elements can be reduced to a Jordan form within the subalgebra T_n; i.e., there exists $L \in T_n$ such that $L^{-1}AL$ is diagonal. In the general case this property does not hold for arbitrary matrices from T_n.

Keywords: matrix algebra, system of generators, nilpotent matrix, matrix unit, subalgebra, Jordan form, interpolation polynomial, discrete system, air preheater, heat exchange.

MSC: 15A30, 15B99

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-8-14

1. Удобная система образующих алгебры матриц

Хорошо известно, что полная матричная алгебра M_n над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ порождается двумя матрицами [1–7]. Например, в качестве образующих можно взять жорданову форму J матрицы с характеристическим полиномом λ^n, т. е. первую(верхнюю) косую диагональ и ее транспонированную P. При этом, однако, дать явное выражение заданной матрицы A через J и P не просто, так как образующие алгебры M_n не могут быть взаимно перестановочными.

Существование системы из двух образующих можно вывести также из аналогичных результатов теории алгебр Ли. Например, если положить $P = x_1[1,1] + \cdots + x_n[n,n]$ и $Q =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по координации развития науки и технологий при Кабинете министров Республики Узбекистан (проект ОТ-Ф4-84).

$\sum_{i\neq j}[i,j]$ ($[i,j]$ обозначает матричную единицу, определение см. чуть ниже), то из результатов статьи [8] вытекает тождество

$$[P[P\dots[P,Q]\dots]] = \sum_{i\neq j} y_{i,j}^d [i,j],$$

где в левой части коммутатор $[A,B] = AB - BA$ применяется d раз; $y_{i,j} = x_i - x_j$. Это тождество, в принципе, позволяет выразить все матричные единицы через P и Q, что, в свою очередь, приведет к выражению произвольной матрицы с попарно различными диагональными элементами через матрицы P и Q. Следует при этом отметить, что такое представление может быть признано явным лишь условно, поскольку для определения коэффициентов $y_{i,j}$ представления придется обратиться к формуле Крамера, которое к тому же не применимо к матрицам, имеющим совпадающие диагональные элементы.

Оказывается, что существует явное, притом простое выражение для любой матрицы через пару специальных нильпотентных матриц.

В дальнейшем, если не оговорено другое, будем рассматривать алгебру M_n над произвольным полем характеристики больше 2.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матричная единица, у которой лишь один элемент равен 1, а все остальные равны 0 [9]. Если элемент, равный 1, расположен на пересечении k-й строки и l-го столбца, то соответствующую матричную единицу обозначим через $[k,l]$.

Матричные единицы составляют базис векторного пространства M_n, а между собой перемножаются по правилу

$$[i,j]\cdot[k,l] = [i,j] \;\text{ для } j = k; \quad [i,j]\cdot[k,l] = O \;\text{ при }\; j\neq k. \tag{1.1}$$

В частности, $[i,j]^2 = \mathtt{0}$ при $i\neq j$, а упомянутые выше матрицы через матричные единицы записываются следующим образом:

$$J = \sum_{j=1}^{n-1}[j,j+1],\quad P = \sum_{j=1}^{n-1}[j+1,j],\quad Q = [1,n]\,.$$

Они нильпотентны: $J^{n-1} = P^{n-1} = Q^2 = \mathtt{0}$.

Теорема 1. *Имеет место равенство* $P^{i-1}QP^{n-j} = [i,j]$, *так что*

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}P^{i-1}QP^{n-j} \tag{1.2}$$

для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n$.

Доказательство можно провести прямым вычислением произведений $P^{i-1}QP^{n-j}$, однако это сопровождается громоздкими записями матриц. Правило (1.1) позволяет упростить вычисления. В первую очередь заметим, что

$$PQ = [2,n],\quad QP = [1,n-1]. \tag{1.3}$$

В частности, при $n=2$ матрицы $P = [2,1]$, $Q = [1,2]$, $PQ = [2,2]$, $QP = [1,1]$ составляют базис векторного пространства M_2, поэтому (1.2) выполняется.

Далее будем предполагать $n\geq 3$. Тогда

$$P^\alpha = \sum_{j=1}^{n-\alpha}[j+\alpha,j] \quad\text{для}\quad \alpha = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Например,

$$P^2 = \sum_{i=1}^{n-1}[i+1,i] \cdot \sum_{j=1}^{n-1}[j+1,j] = \sum_{i=0}^{n-1}[i+1,i] \cdot [i,i-1] = \sum_{i=1}^{n-2}[i+2,i]. \tag{1.4}$$

Матрицы P, P^2, ..., P^{n-2} попарно различны и содержат соответственно $n-1$, $n-2$, ..., 2 элемента, равных 1, в то время как $P^{n-1} = [n,1]$. Из (1.3) вытекает, что в мультипликативной полугруппе, порожденной идемпотентами P и Q, не более $n-2+n^2$ элементов. Пользуясь правилами (1.1) и (1.4), сразу получаем

$$P^\alpha Q P^\beta = \left(\sum_{j=1}^{n-\alpha}[\alpha+j,j] \cdot [1,n]\right)P^\beta = [\alpha+1,n]\sum_{j=1}^{n-\beta}[\beta+j,j] = [\alpha+1,n-\beta].$$

Переобозначив $\alpha+1=i$, $n-\beta=j$, приходим к формуле $P^{i-1}QP^{n-j} = [i,j]$, что и требовалось доказать. □

Следствие. *Матрицы $P^{i-1}QP^{n-j}$, $i,j=1,2,\ldots,n$, образуют базис линейного пространства M_n, а матрицы P и Q — систему образующих алгебры M_n.*

Полезно заметить, что если $n \geq 3$ и F алгебраически замкнуто или $n \geq 4$ и F является подполем замкнутого поля G, такого, что $[G:F]=2$, то алгебра M_n над F не может быть порождена одной матрицей. В самом деле, пусть имеет место противоположное: найдется $P \in M_n$ такая, что для любой $A \in M_n$ имеет место представление

$$A = u_0E + u_1P + u_2P^2 + \ldots + u_mP^m \tag{1.5}$$

для каких-то целого неотрицательного m и набора элементов u_0, u_1, ..., u_m основного поля. Если $J = L^{-1}AL$ — жорданова форма A, то из (1.5) вытекает

$$L^{-1}AL = u_0E + u_1J + u_2J^2 + \ldots + u_mJ^m,$$

что приведет к противоречию — правая часть равенства будет блочно-треугольной матрицей, в то время как левая часть не обязательна будет таковой.

2. Системы образующих для подалгебр диагональных и треугольных матриц

Самые простые из подалгебр M_n — это алгебры циркулянтных и диагональных матриц. Первая из них порождается, например, матрицей перестановки [10;11] $I = \sum_{j=1}^n [j, j+1 (\mathrm{mod}\, n)]$.

Теорема 2. *Алгебра D_n диагональных матриц порождается матрицей $R \in D_n$ тогда и только тогда, когда все диагональные элементы R попарно различны.*

Доказательство. В самом деле, пусть $R = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ — матрица, удовлетворяющая условию теоремы, а $A = \mathrm{diag}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — произвольная матрица из D_n. Если f — интерполяционный многочлен Лагранжа, такой что $f(r_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то $A = f(R)$. Обратное очевидно. □

Рассмотрим теперь подалгебру верхне-треугольных матриц T_n.

Теорема 3. *Алгебра T_n порождается диагональной матрицей $R = \mathrm{diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ с попарно различными элементами и верхним косым рядом J.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. К сожалению, на этот раз не удается найти столь же простую пару порождающих, как в теореме 1. Здесь укажем на систему образующих R и J, позволяющую выразить любую матрицу в явном виде в каждом конкретном случае (см. (2.1)).

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная треугольная матрица. Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \Bigg(\sum_{j=1}^{n-i+1} x_{ij} R^{j-1} \Bigg) J^{i-1} = A \tag{2.1}$$

относительно набора неизвестных x_{ij} в количестве $\dfrac{n(n+1)}{2}$ – размерности T_n. Заметим, что в этом уравнении каждое неизвестное участвует лишь в одном слагаемом. Поскольку главная и косые диагонали E, J, J^2, …, J^{n-1} покрывают верхний треугольник матрицы $n \times n$ однократно, то уравнение (1.4) распадается на n независимых систем

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} x_{ij} R^{j-1} = A_i, \tag{2.2}$$

где A_i — соответствующая R^i косая диагональ матрицы A ($i = 0$ — главная диагональ).

Уравнение (2.2) представляет собой нормальную линейную систему относительно неизвестных x_{i1}, x_{i2}, …, $x_{i,n-i+1}$ с определителем Вандермонда, составленным из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, который не равен 0. Поэтому (2.2) имеет единственное решение и его можно выразить через элементы матрицы A посредством формул Крамера. □

В том случае, когда матрица $A \in T_n$ диагональная, представление (2.1) существенно упрощается. В связи с этим вспомним, что если у треугольной матрицы диагональные элементы попарно различны, то ее жорданова форма будет диагональной. Оказывается, это свойство может быть уточнено следующим образом.

Теорема 4. *Пусть у матрицы $A \in T_n$ диагональные элементы попарно различны. Тогда существует невырожденная матрица $L \in T_n$ такая, что $L^{-1}AL$ будет диагональной.*

Таким образом, треугольную матрицу с попарно различными диагональными элементами можно привести к жордановой (здесь диагональной) форме в пределах самой алгебры T_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем номер столбца k, $k = 2, 3, \ldots, n$, и рассмотрим матрицу $L_k = E + s_k[1,k]$, где $s_k = a_{1k}/(a_{11} - a_{kk})$.

Так как $(E + s_k[1,k])(E - s_k[1,k]) = E$ в силу $[1,k] \cdot [1,k] = \mathtt{0}$, то $L_k^{-1} = (E - s_k[1,k])$. Подвергнем матрицу A подобному преобразованию посредством L_k. Легко вычислить, что диагональные элементы и элементы ниже первой строки у матрицы $A' = L_k^{-1} A L_k$ совпадают с соответствующими элементами матрицы A, в то время как $a'_{1k} = 0$, а элементы a_{1j} переходят в $a'_{1j} = a_{1j}/(a_{11} - a_{kk})$, $j = k+1, k+2, \ldots, n$.

Таким образом, при подобии $L_2^{-1} P L_2$ элемент в позиции $(1,2)$ обнуляется, а элементы первой строки за этой позицией заменяются другими числами. Аналогично под действием $L_3^{-1}(L_2^{-1} P L_2) L_3$ элементы в позициях $(1,1)$ и $(1,2)$ не меняются, элемент в позиции $(1,3)$ обнуляется, а элементы, идущие за ним, как-то преобразуются. Окончательно в матрице $K = L^{-1} P L$, где $L = L_2 L_3 \ldots L_n$, первая строка, за исключением элемента $(1,1)$ на диагонали, состоит из нулей. Другими словами, матрица K окажется блочно-треугольной с блоками размеров 1×1 и $(n-1) \times (n-1)$. Поэтому доказательство можно завершить индукцией. □

П р и л о ж е н и е. Приведем одно приложение представления (1.2). К тепловым электростанциям обычно подключают специальные агрегаты — вращающиеся регенеративные воздухоподогреватели (ВРВП) — с целью повышения теплоотдачи топлива и одновременно уменьшения теплового загрязнения атмосферы. Моделирование процесса теплообмена между отработанным газом и атмосферным воздухом, с одной стороны, и металлическими насадками ВРВП — с другой, представляет собой достаточно сложную задачу [12; 13]. В работе [14] (см. также [15]) предложена упрощенная модель этого процесса, которая описывается дискретным уравнением

$$x_{n+1} = Ax_n + r_n, \tag{2.3}$$

где x, $r \in \mathbb{R}^m$, m — целое положительное число (будем предполагать $m \geq 2$), матрица $A = (a_{ij})$ принадлежит к типу мономиальных, конкретно

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, \quad i = 2,\, 3,\, \ldots,\, m+1, \quad j = i-1, \\ \beta, \quad i = m+2,\, m+3,\, \ldots,\, 2m, 2m+1, \quad j = i-1, \\ 0 \text{ для остальных значений } \quad i, j \end{cases}$$

(принято $a_{2m+1,2m} = a_{1,2m}$).

Решение уравнения (2.3) с начальным членом x_0 выражается аналогом формулы Коши [16]

$$\chi_n = A^n \chi_0 + \sum_{k=1}^{n} A^{n-k} r_{k-1},$$

применение которой требует вычисление степеней матрицы A. Если $\alpha = \beta$, то матрица A станет циркулянтом, пропорциональным к матрице перестановки и ее степени легко вычисляются в явном виде [10; 11]. Параметры α и β характеризуют процесс теплообмена между насадками барабана ВРВП, с одной стороны, и соответственно воздухом и газом — с другой, и поэтому следует считать их не равными между собой. В этом случае, несмотря на все еще очень простое строение A, не удается найти явное выражение для ее степеней (возможная причина указывается ниже). Покажем, что представление (1.2) позволяет вывести простое рекуррентное соотношение для вычисления степеней A. С этой целью заметим, что $A = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ \alpha Q & \beta P \end{pmatrix}$, и положим

$$A^n = \begin{pmatrix} A_{11}^{(n)} & A_{12}^{(n)} \\ A_{21}^{(n)} & A_{22}^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots\,,$$

$$A_{11}^{(n)} = \alpha^n P^n + \sum_{i,j} y_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j}, \qquad A_{12}^{(n)} = \sum_{i,j} z_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j},$$

$$A_{21}^{(n)} = \sum_{i,j} u_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j}, \qquad A_{22}^{(n)} = \beta^n P^n + \sum_{i,j} v_{ij}^{(n)} P^{i-1} Q P^{n-j}.$$

Тогда $A^{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha P & \beta Q \\ \alpha Q & \beta P \end{pmatrix} A^n$ равносильно соотношениям

$$\begin{aligned} A_{11}^{(n+1)} &= \alpha P A_{11}^{(n)} + \beta Q A_{21}^{(n)}, \qquad A_{12}^{(n+1)} = \alpha P A_{12}^{(n)} + \beta Q A_{22}^{(n)}, \\ A_{21}^{(n+1)} &= \alpha Q A_{11}^{(n)} + \beta P A_{21}^{(n)}, \qquad A_{12}^{(n+1)} = \alpha Q A_{12}^{(n)} + \beta P A_{22}^{(n)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Первое из них после сокращения $\alpha^n P^n$ примет вид

$$\sum_{i,j} y_{ij}^{(n+1)} P^{i-1} Q P^{m-j} = \sum_{i,j} \alpha y_{ij}^{(n)} P^{i} Q P^{m-j} + \sum_{i,j} \beta u_{ij}^{(n+1)} Q P^{i-1} Q P^{m-j}.$$

В первой сумме в левой части члены, соответствующие $i = m$, равны нулю (в силу $P^m = 0$), а во второй — отличен от нуля только член, соответствующий $i = m$ (в силу $QP^kQ = 0$ при $k \neq m-1$ и $QP^{m-1}Q = Q$).

Поскольку система матриц $P^{i-1}QP^{m-j}$ образует базис M_n, то

$$y_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} \beta u_{mj}^{(n)} & \text{для } \; i = 1, \\ \alpha y_{ij}^{(n)} & \text{для } \; i = 2,\, 3,\, \ldots,\, m. \end{cases} \tag{2.5}$$

Займемся вторым из соотношений (2.4). В развернутом виде оно выглядит следующим образом:

$$\sum_{i,j} z_{ij}^{(n+1)} P^{i-1} Q P^{m-j} = \sum_{i,j} \alpha z_{ij}^{(n)} P^i Q P^{m-j} + \beta^{n+1} Q P^n + \sum_{i,j} \beta v_{ij}^{(n)} Q P^{i-1} Q P^{m-j}.$$

Аналогично в первой сумме все члены, соответствующие $i = m$, равны нулю, а в последней сумме отличен от 0 только тот член, у которого $i = m$. Что касается среднего слагаемого, то оно отлично от 0 только при $n \le m-1$. Поэтому при $n \ge m$ имеет место

$$z_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} \beta v_{mj}^{(n)} & \text{для } \ i = 1, \\ \alpha z_{ij}^{(n)} & \text{для } \ i = 2,\, 3,\, \ldots,\, m. \end{cases} \tag{2.6}$$

При $n = 1, 2, \ldots, m-1$ слагаемое $\beta^{n+1} Q P^n$ по виду совпадает с членом $\beta v_{mj}^{(n)} Q P^{m-j}$ при $j = m-n$. Поэтому

$$z_{ij}^{(n+1)} = \begin{cases} \beta^{n+1} + \beta v_{m,m-n}^{(n)} & \text{для } \ i = 1,\ j = m-n, \\ \beta v_{m,j}^{(n)} & \text{для } \ i = 1,\ j \ne m-n, \\ \alpha z_{ij}^{(n)} & \text{для } \ i = 2,\, 3,\, \ldots,\, m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Аналогичные соотношения выводятся для коэффициентов $u_{ij}^{(n)}$ и $v_{ij}^{(n)}$ — для этого достаточно поменять в формулах (2.5)–(2.7) буквы y, z и α на v, u и β соответственно.

В силу (2.7) и аналогичного соотношения для $u_{1,m-n}^{(n+1)}$ при $n = 1, 2, \ldots, m-1$ выражение для A^n шаг за шагом будет усложняться, хотя начиная с шага $n = m$ наступит стабилизация в числе слагаемых.

Таким образом, выведенные рекуррентные соотношения решают задачу вычисления A^n без обращения к операциям над матрицами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kostov V.P.** The minimal number of generators of a matrix algebra // J. Dynamic. Control Systems. 1996. Vol. 2, no. 4. P. 549–555. doi: 10.1007/BF02254702 .
2. **Пирс Р.** Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.
3. **Laffey T.J.** Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity // Linear Algebra Appl. 1986. Vol. 84. P. 123–138. doi: 10.1016/0024-3795(86)90311-3 .
4. **Laffey T.J.** Algebras generating by two idempotetnts // Linear Algebra Appl. 1981. Vol. 37. P. 45–53. doi: 10.1016/0024-3795(81)90166-X .
5. **Rowen L., Segev Y.** Associated and Jordan algebras generated by two idempotetns [e-resource]. 2016. Available at: https://arxiv.org/abs/1609.04899 . 11 p.
6. **Vais I.** Algebras that are generated by two idempotents // Seminar Analysis (Berlin, 1987/1988). Berlin: Akademie-Verlag, 1988. P. 139–145.
7. **Aslaksen H., Sletsjøe Arne B.** Generators of matrix algebras in dimension 2 and 3 // Linear Algebra Appl. 2009. Vol. 430, no. 1. P. 1–6. doi: 10.1016/j.laa.2006.05.022 .
8. **Popov V.L.** An analogue of M. Artin's conjecture on invariants for nonassociative algebras // Lie Groups and Lie Algebras: E. B. Dynkin's Seminar. Providence: Amer. Math. Soc., 1995. P. 121–143. (American Math. Soc. Trans. Ser. 2, vol. 169.)
9. **Варден Б.Л.** Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.
10. **Тыртышников Е.Е.** Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2005. 358 с.
11. **Davis P.J.** Circulant matrices: Second edition. Providence: Amer. Math. Soc., 1994. 250 p.
12. **Кирсанов Ю.А.** Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях. М.: Физматлит, 2007. 240 с.
13. **Lee Chi-Liang** Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system // J. Chinese Inst. Eng. 2009. Vol. 77, iss. 5. pp. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552 .

14. **Azamov A.A., Bekimov M.A.** A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters // Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN. 2017. Vol 23, № 1. P. 12–19. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19 .
15. **Azamov A.A., Bekimov M.A.** Simplified model of the heatexchange process in rotary regenerative air pre-heaters // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
16. **Романко В.К.** Курс разностных уравнений. М.: Физматлит, 2012. 200 с.

Азамов Абдулла

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, г. Ташкент

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Поступила 18.10.2017

REFERENCES

1. Kostov V.P. The minimal number of generators of a matrix algebra. *J. Dynamic. Control Systems*, 1996, vol. 2, no. 4, pp. 549–555. doi: 10.1007/BF02254702 .
2. Pierce R.S. *Associative algebras.* N Y, Springer-Verlag, 1982, 436 p. doi: 10.1007/978-1-4757-0163-0 . Translated to Russian under the title *Assotsiativnye algebry,* Moscow, Mir Publ., 1986, 543 p.
3. Laffey Thomas J. Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity. *Linear Algebra Appl.*, 1986, vol. 84, pp. 123–138. doi: 10.1016/0024-3795(86)90311-3 .
4. Laffey Thomas J. Algebras generating by two idempotetnts. *Linear Algebra Appl.*, 1981, vol. 37, pp. 45–53. doi: 10.1016/0024-3795(81)90166-X .
5. Rowen L., Segev Y. Associated and Jordan algebras generated by two idempotetns [e-resource]. 2016. Available at: https://arxiv.org/abs/1609.04899 . 11 p.
6. Vais I. Algebras that are generated by two idempotents. *Seminar Analysis* (Berlin, 1987/1988). Berlin: Akademie-Verlag, 1988, pp. 139–145.
7. Aslaksen H., Sletsjøe Arne B. Generators of matrix algebras in dimension 2 and 3. *Linear Algebra Appl.*, 2009, vol. 430, no. 1, pp. 1–6. doi: 10.1016/j.laa.2006.05.022 .
8. Popov V.L. An analogue of M. Artin's conjecture on invariants for nonassociative algebras. *Lie Groups and Lie Algebras: E. B. Dynkin's Seminar*, American Math. Soc. Trans. Ser. 2, vol. 169, Providence: Amer. Math. Soc., 1995, pp. 121–143.
9. van der Waerden B.L. *Algebra I, II.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1971, 272 p. ISBN: 3540035613 , 1967, 300 p. Translated to Russian under the title van der Varden B.L. *Algebra*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 648 p.
10. Tyrtyshnikov E.E. *Matrichnyi analiz i lineinaya algebra.* [Matrix analysis and linear algebra]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 358 p.
11. Davis Philip J. *Circulant Matrices: Second edition.* Providence: American Math. Soc., 1994, 250 p. ISBN: 0828403384 .
12. Kirsanov Yu.A. *Tsiklicheskie teplovye protsessy i teoriya teploprovodnosti v regenerativnykh vozdukhopodogrevatelyakh.* [Cyclic thermal processes and the theory of thermal conductivity in regenerative air heaters]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 240 p. ISBN: 978-5-9221-0831-7 .
13. Lee Chi-Liang Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system. *J. Chinese Inst. Eng.*, 2009, vol. 77, no. 5, pp. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552 .
14. Azamov A.A., Bekimov M.A. A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 12–19. (in Russian) doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19 .
15. Azamov A.A., Bekimov M.A. Simplified model of the heatexchange process in rotary regenerative air pre-heaters. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2 pp. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
16. Romanko V.K. *Kurs raznostnykh uravnenii.* [Course of difference equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 200 p. ISBN: 978-5-9221-1387-8 .

The paper was received by the Editorial Office on October 18, 2017.

Abdulla Azamovich Azamov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Uzbekistan Academy of Sciences V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, 100041 Uzbekistan,

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ ИНТЕГРАНТОМ[1]

С. М. Асеев

Рассматривается задача оптимального управления для автономного дифференциального включения со свободным временем и функционалом смешанного типа, содержащим в интегральном члене характеристическую функцию заданного открытого множества $M \subset \mathbb{R}^n$. Постановка данной задачи ослабляет постановку классической задачи оптимального управления с фазовым ограничением на случай, когда нахождение допустимых траекторий системы в множестве M физически возможно, но нежелательно, например, исходя из соображений безопасности или неустойчивости системы. При помощи метода аппроксимаций получены необходимые условия оптимальности допустимой траектории в форме гамильтонова включения Кларка, содержащие нестандартное условие стационарности гамильтониана. Так же как и в случае задачи с фазовым ограничением, полученные необходимые условия оптимальности могут вырождаться. Приведены условия, гарантирующие их невырожденность и поточечную нетривиальность. Полученные результаты распространяют предыдущие результаты автора на случай задачи со свободным временем и более общим функционалом.

Ключевые слова: зона риска, фазовые ограничения, оптимальное управление, гамильтоново включение, принцип максимума Понтрягина, условия невырожденности.

S. M. Aseev. On an optimal control problem with discontinuous integrand.

We consider an optimal control problem for an autonomous differential inclusion with free terminal time and a mixed functional which contains the characteristic function of a given open set $M \subset \mathbb{R}^n$ in the integral term. The statement of the problem weakens the statement of the classical optimal control problem with state constraints to the case when the presence of admissible trajectories of the system in the set M is physically allowed but unfavorable due to safety or instability reasons. Using an approximation approach, necessary conditions for the optimality of an admissible trajectory are obtained in the form of Clarke's Hamiltonian inclusion. The result involves a nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian. As in the case of the problem with a state constraint, the obtained necessary optimality conditions may degenerate. Conditions guaranteeing their nondegeneracy and pointwise nontriviality are presented. The results obtained extend the author's previous results to the case of a problem with free terminal time and more general functional.

Keywords: risk zone, state constraints, optimal control, Hamiltonian inclusion, Pontryagin maximum principle, nondegeneracy conditions.

MSC: 49KXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-15-26

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P):

$$J(T,x(\cdot)) = \varphi(T,x(0),x(T)) + \int_0^T \lambda(x(t))\delta_M(x(t))\,dt \to \min\,, \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{1.2}$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \tag{1.3}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$, $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ — локально липшицевое многозначное отображение с непустыми выпуклыми компактными

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

значениями, $\varphi\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^1$ — локально липшицевая функция, $\lambda\colon\mathbb{R}^n\mapsto(0,\infty)$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция, $\delta_M(\cdot)$ — характеристическая функция заданного открытого множества M из $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\delta_M(x)=\begin{cases}1, & x\in M,\\ 0, & x\notin M.\end{cases}\tag{1.4}$$

Относительно множества M и его дополнения $G=\mathbb{R}^n\setminus M$ предполагается, что оба эти множества непусты и для любого $x\in G$ касательный конус Кларка $T_G(x)$ (см. [8]) имеет непустую внутренность, т. е. $\operatorname{int} T_G(x)\neq\varnothing$. Время $T>0$ окончания процесса управления считается свободным. В качестве допустимых траекторий в задаче (P) рассматриваются все абсолютно непрерывные решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (1.2), определенные на различных интервалах времени $[0,T]$, $T>0$, и удовлетворяющие концевым ограничениям (1.3). Допустимая траектория $x_*(\cdot)$, определенная на некотором интервале $[0,T_*]$, $T_*>0$, называется *оптимальной в задаче* (P), если функционал (1.1) принимает на паре $(T_*,x_*(\cdot))$ наименьшее возможное значение.

Основное отличие сформулированной задачи (P) от классической задачи оптимального управления [12] состоит в “штрафующем” интегральном члене с разрывным интегрантом в функционале (1.1). Наличие в интегранте характеристической функции $\delta_M(\cdot)$ означает, что нахождение траекторий системы в множестве M физически возможно, но нежелательно. Такие нежелательные множества M состояний управляемой системы (“зоны риска”) могут возникать в различных приложениях. Например, множество M может соответствовать состояниям перегрузки или неустойчивости технической системы. Положительная функция $\lambda(\cdot)$ в интегранте в функционале (1.1) определяет предпочтительность состояний $x\in M$.

В классической теории оптимального управления наличие нежелательного множества M состояний системы обычно моделируется при помощи дополнительного фазового ограничения вида (см. [12, гл. 6])

$$x(t)\in G=\mathbb{R}^n\setminus M,\quad t\in[0,T].$$

В этом случае фазовое ограничение G (“зона безопасности”) предполагается замкнутым (т. е. зона риска M — открытое множество). Заметим, что задачу оптимального управления с фазовым ограничением можно рассматривать как предельный случай задачи (P) с постоянной функцией $\lambda(x)\equiv\lambda>0$, $x\in\mathbb{R}^n$, при $\lambda\to\infty$. В этом смысле постановка задачи (P) является ослаблением постановки задачи оптимального управления с фазовым ограничением.

Различные задачи оптимального управления, включающие характеристическую функцию заданного множества M, в случае когда M — замкнутое множество, рассматривались в работах [4; 5; 13–15] (подробнее см. [3]). Однако на случай открытого множества M используемые в этих работах методы напрямую не переносятся. При этом случай открытого множества M представляет наибольший интерес, поскольку подразумевает естественную связь задачи (P) с задачей оптимального управления с фазовым ограничением. Кроме того, в этом случае содержащий характеристическую функцию интегральный функционал полунепрерывен снизу, что влечет (при естественных предположениях) существование решения в задаче (P).

Впервые случай открытого множества M был рассмотрен в работе автора [3] для задачи на фиксированном отрезке времени $[0,T]$, $T>0$. В настоящей работе результаты, полученные в [3], распространяются на случай задачи (P) со свободным временем и более общим функционалом смешанного типа, что существенно расширяет область применения развитой теории. Кроме того, приведены условия, гарантирующие невырожденность и поточечную нетривиальность полученных необходимых условий оптимальности.

В дальнейшем через $N_A(a)=T_A^*(a)$ и $\hat{N}_A(a)$ будем обозначать нормальный конус Кларка [8] и конус обобщенных нормалей [10] соответственно к замкнутому множеству $A\subset\mathbb{R}^n$ в точке $a\in A$, а через ∂A — границу замкнутого множества A. Далее, через $H(F(x),\psi)=$

$\max_{f\in F(x)}\langle f,\psi\rangle$ будем обозначать значения гамильтониана $H(F(\cdot),\cdot)$ дифференциального включения (1.2) в точке $(x,\psi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, а через $\partial H(F(x),\psi)$ — субдифференциал Кларка локально липшицевой функции $H(F(\cdot),\cdot)$ в точке $(x,\psi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ [8]. Наконец, через $\partial\hat{\varphi}(T,x_1,x_2)$ будем обозначать обобщенный градиент локально липшицевой функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ в точке $(T,x_1,x_2)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ (см. [10]).

Для произвольного $x\in\mathbb{R}^n$ и $i\in\mathbb{N}$ и положим $\tilde{\delta}_i(x)=\min\{i\rho(x,G),\delta_M(x)\}$, где $\rho(x,G)=\min\{\|x-\xi\|\colon \xi\in G\}$ — расстояние от точки x до непустого замкнутого множества $G=\mathbb{R}^n\setminus M$, а функция $\delta_M(\cdot)$ определена равенством (1.4). Для $i\in\mathbb{N}$ определим функцию $\delta_i\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^1$ равенством

$$\delta_i(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde{\delta}_i(x+y)\omega_i(y)\,dy, \tag{1.5}$$

где $\omega_i(\cdot)$ — гладкая ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$) вероятностная плотность с носителем $\operatorname{supp}\omega_i(\cdot)\subset 1/2^iB$. Здесь B — замкнутый единичный шар из $\mathbb{R}^n$ с центром в 0. Тогда для любого $i\in\mathbb{N}$ функция $\delta_i(\cdot)$ является гладкой, как конволюция с гладкой функцией $\omega_i(\cdot)$.

Следующие два вспомогательных результата несложно вытекают из определения характеристической функции $\delta_M(\cdot)$, непрерывности положительной функции $\lambda(\cdot)$ и леммы Фату (см. доказательства аналогичных лемм 1 и 2 в [3]).

Лемма 1. *Для любого $x\in\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\delta_i(x)\le\delta_M(x)+\frac{i}{2^i},\quad i\in\mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ непрерывных функций сходится равномерно на некотором интервале $[0,T]$, $T>0$, к непрерывной функции $\tilde{x}\colon[0,T]\mapsto\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\liminf_{i\to\infty}\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt\ge\int\limits_0^T\lambda(x(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt.$$

Из лемм 1 и 2 получаем следующий результат о полунепрерывности снизу интегрального функционала, содержащего характеристическую функцию множества M.

Теорема 1. *Для любого $T>0$ интегральный функционал $J_M\colon C([0,T],\mathbb{R}^n)\mapsto\mathbb{R}^1$, определенный равенством*

$$J_M(x(\cdot))=\int\limits_0^T\lambda(x(t))\delta_M(x(t))\,dt,$$

полунепрерывен снизу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T>0$ задано и последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ непрерывных функций $x_i\colon[0,T]\mapsto\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots$, сходится к непрерывной функции $\tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$J_M(x_i(\cdot))=\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_M(x_i(t))\,dt\ge\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt-\frac{i}{2^i}\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\,dt,\quad i\in\mathbb{N}.$$

Откуда в силу непрерывности функции $\lambda(\cdot)$ и леммы 2, переходя к пределу при $i\to\infty$, получаем

$$\liminf_{i\to\infty}J_M(x_i(\cdot))\ge\liminf_{i\to\infty}\int\limits_0^T\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt\ge\int\limits_0^T\lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt=J_M(\tilde{x}(\cdot)).\qquad\square$$

Следствие 1. *Пусть множество допустимых траекторий в задаче* (P) *непусто,* $M_0 \cap M_1 = \varnothing$ *и существует такое компактное множество* $A \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$*, что для любой допустимой траектории* $x(\cdot)$ *для всех* $t \in [0,T]$*, где* $[0,T]$ *— интервал определения* $x(\cdot)$*, выполняется включение* $(t, x(t)) \in A$*. Тогда в задаче* (P) *существует оптимальная допустимая траектория.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса [6, § 0.1] и теоремы 1 минимум функционала (1.1) достигается (см. также [18, Theorem 9.3.i]). $\square$

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть* $x_*(\cdot)$ *— оптимальная допустимая траектория в задаче* (P) *и* $T_* > 0$ *— соответствующее оптимальное время. Тогда существуют постоянная* $\psi^0 \geq 0$*, абсолютно непрерывная функция* $\psi\colon [0,T_*] \mapsto \mathbb{R}^n$ *и ограниченная регулярная борелевская векторная мера* η *на* $[0,T_*]$*, так что выполняются следующие условия:*

1) *мера* η *сосредоточена на множестве* $\mathfrak{M} = \{t \in [0,T_*]\colon x_*(t) \in \partial G\}$ *и неположительна на множестве непрерывных функций* $y\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ *со значениями* $y(t) \in T_G(x_*(t))$*,* $t \in \mathfrak{M}$*, т. е.*
$$\int_{\mathfrak{M}} y(t)\, d\eta \leq 0;$$

2) *для п.в.* $t \in [0,T_*]$ *выполняется гамильтоново включение*
$$(-\dot{\psi}(t), \dot{x}_*(t)) \in \partial H\biggl(x_*(t), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr);$$

3) *для* $t = T_*$ *и любого* $t \in [0,T_*)$*, являющегося точкой правой аппроксимативной непрерывности*[2] *функции* $\delta_M(x_*(\cdot))$*, выполняется условие стационарности*
$$H\biggl(x_*(t), \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr) - \psi^0 \lambda(x_*(t)) \delta_M(x_*(t))$$
$$= H\left(x_*(0), \psi(0)\right) - \psi^0 \lambda(x_*(0)) \delta_M(x_*(0))\,;$$

4) *выполняется условие трансверсальности*
$$\biggl(H\biggl(x_*(T_*), \psi(T_*) + \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr), \psi(0),$$
$$- \psi(T_*) - \int_0^{T_*} \lambda(x_*(s))\, d\eta - \psi^0 \int_0^{T_*} \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds\biggr)$$
$$\in \psi^0 \hat{\partial} \phi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \{0\} \times \hat{N}_{\widetilde{M}_0} \times \hat{N}_{\widetilde{M}_1};$$

5) *выполняется условие нетривиальности* $\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0$.

[2] Напомним, что точка $t \in [0,T)$, $T > 0$, называется *точкой правой аппроксимативной непрерывности функции* $\xi : [0,T] \mapsto \mathbb{R}^1$, если существует такое измеримое по Лебегу множество $E \subset [t,T]$, что точка t является его точкой плотности, а функция $\xi(\cdot)$ непрерывна справа в точке t вдоль множества E (см. [11, гл. 9, § 5]).

Здесь $\int_0^t \lambda(x_*(s))\,d\eta$ *— интеграл Лебега от функции* $\lambda(x_*(\cdot))$ *по мере* η *на интервале* $[0,t]$, $t \geq 0$*, а множества* $\widetilde{M_0}$ *и* $\widetilde{M_1}$ *определены равенствами*

$$\widetilde{M_0} = \begin{cases} M_0, & x_*(0) \in M, \\ M_0 \cap G, & x_*(0) \in G \end{cases} \quad и \quad \widetilde{M_1} = \begin{cases} M_1, & x_*(T_*) \in M, \\ M_1 \cap G, & x_*(T_*) \in G. \end{cases} \tag{1.7}$$

Приведенное в следующем разделе доказательство теоремы 2 основано на аппроксимации задачи (P) последовательностью $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ стандартных задач оптимального управления для дифференциального включения, для которых соответствующие необходимые условия оптимальности известны (см. [8, теорема 3.6.1]), с последующим в них предельным переходом при $i \to \infty$. Отметим, что аналогичные методы аппроксимаций использовались ранее для получения необходимых условий оптимальности в задачах с фазовыми ограничениями в работах [1; 2; 16; 17].

2. Построение последовательности аппроксимирующих задач и доказательство теоремы 2

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P), а $T_* > 0$ — соответствующее оптимальное время. В дальнейшем будем предполагать, что траектория $x_*(\cdot)$ доопределена на бесконечный интервал $[T_*, \infty)$ как постоянная, т. е. $x_*(t) \equiv x_*(T_*)$, $t \geq 0$.

Для $i \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P_i):

$$J_i(T, x(\cdot)) = \varphi(T, x(0), x(T)) + (T - T_*)^2 + \int_0^T \left[\lambda(x(t))\delta_i(x(t)) + \|x(t) - x_*(t)\|^2\right] dt \to \min, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{2.2}$$

$$|T - T_*| \leq \frac{T_*}{2}, \quad \|x(t) - x_*(t)\| \leq 1, \quad t \in [0, T], \tag{2.3}$$

$$x(0) \in \widetilde{M_0}, \quad x(T) \in \widetilde{M_1}. \tag{2.4}$$

Здесь функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ и многозначное отображениие $F(\cdot)$ — те же самые, что и в задаче (P), а множества $\widetilde{M_0}$ и $\widetilde{M_1}$ определены равенствами (1.7). Как и в задаче (P), множество допустимых траекторий в (P_i) состоит из всех абсолютно непрерывных решений $x(\cdot)$ дифференциального включения (2.2), определенных на различных интервалах времени $[0,T]$, $T > 0$, удовлетворяющих ограничениям (2.3) и краевым ограничениям (2.4).

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ задача (P_i) является стандартной задачей оптимального управления со свободным временем для дифференциального включения с липшицевыми данными, фазовыми ограничениями и терминальными ограничениями (см. [8, § 3.6]). Поскольку траектория $x_*(\cdot)$ является допустимой в задаче (P_i), то в силу теоремы Филиппова [18, Theorem 9.3.i] для любого $i \in \mathbb{N}$ существует оптимальная допустимая траектория $x_i(\cdot)$ в задаче (P_i). Пусть $T_i > 0$ — соответствующее оптимальное время. Всегда будем предполагать, что траектория $x_i(\cdot)$ продолжена на бесконечный интервал $[T_i, \infty)$ как постоянная, т. е. $x_i(t) \equiv x_i(T_i))$, $t \geq T_i$.

Далее будем называть $\{(P_i)\}_{k=1}^{\infty}$ *последовательностью аппроксимирующих задач, соответствующей оптимальной траектории* $x_*(\cdot)$.

Следующий результат позволяет получить утверждения теоремы 2 посредством предельного перехода в необходимых условиях оптимальности для задачи (P_i) при $i \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория, T_* — соответствующее оптимальное время, а $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппроксимирующих задач. Пусть $x_i(\cdot)$, $T_i > 0$, — оптимальная допустимая траектория и соответствующее оптимальное время в задаче (P_i), $i \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} T_i = T_*, \tag{2.5}$$

$$\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = x_*(\cdot) \quad \text{в} \quad C([0,T_*],\mathbb{R}^n), \tag{2.6}$$

$$\lim_{i\to\infty} \dot{x}_i(\cdot) = \dot{x}_*(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L^1([0,T_*],\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{T_i} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt = \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_M(x_*(t))\,dt. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_i(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P_i), $i \in \mathbb{N}$, а $x_*(\cdot)$ — допустимая траектория в (P_i), то в силу леммы 1 имеем (см. (1.6) и (2.1))

$$\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) + (T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \left[\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right]\,dt$$

$$\le \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_i(x_*(t))\,dt$$

$$\le \varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_M(x_*(t))\,dt + \frac{i}{2^i}\int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\,dt. \tag{2.9}$$

Так как $|T_i - T_*| \le T_*/2$, $i \in \mathbb{N}$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\lim_{i\to\infty} T_i = \tilde{T} > 0$. Далее, множество допустимых траекторий дифференциального включения (2.2), удовлетворяющих фазовому ограничению (2.3), является компактом в пространстве $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$. Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — некоторая предельная точка последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$. Тогда $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая траектория в задаче (P) и, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $x_*(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P), а $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая траектория в этой задаче, то

$$\varphi(T_*, x_*(0), x_*(T_*)) + \int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\delta_M(x_*(t))\,dt \le \varphi(\tilde{T}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(\tilde{T})) + \int\limits_0^{\tilde{T}} \lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt.$$

Откуда для $i \in \mathbb{N}$ в силу (2.9) получаем

$$\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) - \varphi(\tilde{T}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(\tilde{T})) + \int\limits_0^{T_i} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt - \int\limits_0^{\tilde{T}} \lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt$$

$$+\ (T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\,dt \le \frac{i}{2^i}\int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\,dt. \tag{2.10}$$

Так как $\lim_{i\to\infty} T_i = \tilde{T}$ и $\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$, то в силу леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число i_0, что для всех $i \geq i_0$ имеем

$$\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) - \varphi(\tilde{T}, \tilde{x}(0), \tilde{x}(\tilde{T})) \geq -\varepsilon,$$

$$\int\limits_0^{T_i} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\,dt - \int\limits_0^{\tilde{T}} \lambda(\tilde{x}(t))\delta_M(\tilde{x}(t))\,dt \geq -\varepsilon.$$

Откуда в силу (2.10) для любого $i \geq i_0$ получаем

$$(T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\,dt \leq 2\varepsilon + \frac{i}{2^i}\int\limits_0^{T_*} \lambda(x_*(t))\,dt.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $i \to \infty$, выводим

$$\limsup_{i\to\infty}\left[(T_i - T_*)^2 + \int\limits_0^{T_i} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\,dt\right] \leq 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство влечет равенства

$$\lim_{i\to\infty} T_i = T_*, \quad \lim_{i\to\infty}\int\limits_0^{T_*} \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\,dt = 0.$$

Таким образом, равенство (2.5) доказано. Поскольку $\lim_{i\to\infty} T_i = \tilde{T} = T_*$ и $\tilde{x}(\cdot)$ — произвольная предельная точка последовательности $\{x(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ в $C([0,\tilde{T}],\mathbb{R}^n)$, то выполняется условие (2.6). Далее, равенство (2.7) вытекает из (2.6) и того факта, что последовательность $\{\dot{x}_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена в $L^{\infty}([0,T_*],\mathbb{R}^n)$. Наконец, в силу леммы 2 равенство (2.8) вытекает из условий (2.5), (2.6) и неравенства (2.10). □

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 3, *переходя, если нужно, в последовательности* $\{\delta_i(x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *к подпоследовательности, можно считать, что*

$$\lim_{i\to\infty}\delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty}\delta_M(x_*(t)) \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [0,T_*]. \tag{2.11}$$

Доказательство. В силу открытости множества M для всех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in M$, из определения функций $\delta_M(\cdot)$ и $\delta_i(\cdot)$, $i = 1,2,\ldots$, (см. (1.4) и (1.5)) и условия (2.6) вытекает равенство $\lim_{i\to\infty}\delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty}\delta_M(x_*(t)) = 1$. Рассмотрим теперь множество тех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in G$. В этом случае $\delta_M(x_*(t)) = 0$ и в силу (2.8) выполняется равенство

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{t\in[0,T_*]\colon x_*(t)\in G} \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t))\;dt = 0.$$

Откуда в силу неотрицательности функций $\lambda(x_i(\cdot))\delta_i(x_i(\cdot))$, $i = 1,2,\ldots$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{i\to\infty}\operatorname{meas}\{t \in [0,T_*]\colon x_*(t) \in G,\ \lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t)) > \varepsilon\} = 0,$$

т. е. последовательность $\{\lambda(x_i(\cdot))\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 на множестве $\{t \in [0,T_*]\colon x_*(t) \in G\}$ по мере. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 при п.в. $t \in [0,T_*]$, для которых $x_*(t) \in G$, и, следовательно, для п.в. $t \in [0,T_*]$. Поскольку $\lim_{i\to\infty}\lambda(x_i(t)) = \lambda(x_*(t)) > 0$, $t \in [0,T_*]$, то отсюда вытекает условие (2.11). □

Заметим, что в силу следствия 2 и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [11, гл. VI, § 3]), не ограничивая общности, можно считать, что для любой непрерывной функции $\xi\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ для любого $t \in [0, T_*]$ справедливо равенство

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^t \xi(x_i(s))\delta_i(x_i(s))\, ds = \int_0^t \xi(x_*(s))\delta_M(x_*(s))\, ds.$$

Перейдем теперь к доказательству непосредственно утверждений теоремы 2.

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P), $T_* > 0$ — соответствующее оптимальное время, а $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппоксимирующих задач (см. (2.1)–(2.4)). Тогда в силу условий (2.5) и (2.6) теоремы 3 для всех достаточно больших номеров i неравенства (2.3) выполняются как строгие. Следовательно, необходимые условия оптимальности в форме гамильтонова включения Кларка (см. [8, теорема 3.6.1])) для задач со свободным временем без фазовых ограничений и с негладкими концевыми ограничениями [9] выполняются для оптимальной траектории $x_i(\cdot)$ в задаче (P_i) для всех достаточно больших номеров i. Именно существуют такие число $\psi_i^0 \geq 0$ и абсолютно непрерывная функция $\tilde{\psi}_i\colon [0, T_i] \mapsto \mathbb{R}^n$, что

$$(-\dot{\tilde{\psi}}_i(t), \dot{x}_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0\Big(\lambda(x_i(t))\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x} + \delta_i(x_i(t))\frac{\partial\lambda(x_i(t))}{\partial x} + 2(x_i(t) - x_*(t), 0)\Big), \quad (2.12)$$

$$(h_i(T_i), \tilde{\psi}_i(0), -\tilde{\psi}_i(T_i)) \in \hat{\partial}\varphi(T_i, x_i(0), x_i(T_i)) + \{0\} \times \hat{N}_{\widetilde{M}_1}(x_i(0)) \times \hat{N}_{\widetilde{M}_2}(x_i(T_i)), \quad (2.13)$$

$$\dot{h}_i(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -2\psi_i^0\langle x_i(t) - x_*(t), \dot{x}_*(t)\rangle, \quad (2.14)$$

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| \neq 0. \quad (2.15)$$

Здесь абсолютно непрерывная функция $h_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, определяется равенством

$$h_i(t) = H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0\big(\lambda(x_i(t))\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\big), \quad t \in [0, T_i]. \quad (2.16)$$

Домножив на положительный множитель сопряженные переменные ψ_i^0, $\tilde{\psi}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, в силу (2.15), не ограничивая общности, можно считать, что выполняется равенство

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| + \psi_i^0 \int_0^{T_i} \Big\|\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x}\Big\|\, dt = 1. \quad (2.17)$$

Введем новые сопряженные переменные следующими равенствами:

$$\eta_i(t) = \psi_i^0\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x}, \quad \psi_i(t) = \tilde{\psi}_i(t) - \int_0^t \lambda(x_i(s))\eta_i(s)\, ds - \psi^0 \int_0^t \delta_i(x_i(s))\frac{\partial\lambda(x_i(s))}{\partial x}\, ds, \quad t \in [0, T_i].$$

В терминах этих новых сопряженных переменных гамильтоново включение (2.12) запишется в виде

$$\big(-\dot{\psi}_i(t), \dot{x}_i(t)\big) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H\Big(x_i(t), \psi_i(t) + \int_0^t \lambda(x_i(s))\eta_i(s)\, ds + \psi_i^0 \int_0^t \delta_i(x_i(s))\frac{\partial\lambda(x_i(s))}{\partial x}\, ds\Big) - 2\psi_i^0(x_i(t) - x_*(t), 0). \quad (2.18)$$

В силу условия (2.17), переходя, если нужно к подпоследовательности, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i^0 \to \psi^0 \geq 0$, $\psi_i(0) = \tilde{\psi}_i(0) \to \psi_0$, $\|\psi_0\| \leq 1$, при $i \to \infty$, а в силу теоремы Хелли (см., например, [18, Theorem 15.1.i.]) последовательность $\{\eta_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится слабо при $i \to \infty$ к регулярной борелевской мере η на $[0, T_*]$.

В силу включения (2.18) и предложения 3.2.4 из [8] имеем $\|\dot{\psi}_i(t)\| \leq k(\|\psi_i(t)\|+1)$, $t \in [0, T_i]$, где $k \geq 0$ — некоторая постоянная. Следовательно, в силу леммы Гронуолла (см., например, [18, Lemma 18.1.i]), не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i(\cdot) \to \psi(\cdot)$ в $C([0, T_*], \mathbb{R}^n)$, $\dot{\psi}_i(\cdot) \to \dot{\psi}(\cdot)$ слабо в $L^1([0, T_*], \mathbb{R}^n)$ при $i \to \infty$, где $\psi\colon [0, T_*] \mapsto \mathbb{R}^n$ — липшицевая функция.

Оставшаяся часть доказательства теоремы 2 носит технический характер и основывается на предельном переходе в необходимых условиях оптимальности (2.12)–(2.15) для задачи (P_i) при $i \to \infty$. С небольшими изменениями оно повторяет доказательство соответствующих необходимых условий оптимальности для задачи с фазовым ограничением в [16, Theorem 1] и [3, Theorem 1]. При этом используются теорема Мазура [6], дифференциальные свойства функции расстояния (см. определение функции $\delta_i(\cdot)$ равенством (1.5)), полунепрерывность сверху субдифференциала Кларка [8], полунепрерывность сверху нормального конуса Кларка $N_G(\cdot)$ (в случае $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$, $x \in G$), полунепрерывность сверху конуса обощенных нормалей $\hat{N}_{\widetilde{M}_i}(\cdot)$ к замкнутому множеству $\widetilde{M}_i$, $i = 1, 2$, полунепрерывность сверху обобщенного градиента $\hat{\partial}\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ локально липшицевой функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$, а также следствие 2. Подробное описание аналогичного предельного перехода в случае фиксированного момента времени $T > 0$ см. в [17, разд. 3]. Теорема 2 доказана.

3. Условия невырожденности и поточечной нетривиальности

Доказанная в предыдущем разделе теорема 2 по форме аналогична известным необходимым условиям оптимальности для задачи оптимального управления дифференциальным включением с фазовым ограничением (см. [16, Theorem 1]). При этом главное отличие теоремы 2 от теоремы 1 в [16] состоит в условии стационарности 3), которое играет ту же роль, что и условие (b) на скачок меры в [16, Theorem 1]. Оказывается, что в некоторых случаях условие стационарности 3) влечет условие (b) на скачок меры из [16, Theorem 1]. Данное обстоятельство позволяет получить достаточные условия невырожденности и поточечной нетривиальности для теоремы 2, аналогичные полученным в [16]. Другие результаты о невырожденности различных варинтов необходимых условий оптимальности для задач с фазовыми ограничениями см. в [1; 2; 7; 19; 20].

Аналогично [16] допустимую траекторию $x_*(\cdot)$ будем называть *управляемой в концевых точках* $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ (относительно множества G), если

$$H(x_*(0), -g_0) > 0 \quad \text{для любого} \quad g_0 \in N_G(x_*(0)) \cap \widehat{N}_{\widetilde{M}_0}, \quad g_0 \neq 0,$$

и

$$H(x_*(T_*), g_1) > 0 \quad \text{для любого} \quad g_1 \in N_G(x_*(T_*)) \cap \widehat{N}_{\widetilde{M}_1}, \quad g_1 \neq 0.$$

Теорема 4. *Пусть допустимая траектория $x_*(\cdot)$ управляема в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$ и удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда выполняется следующее условие невырожденности:*

$$\psi^0 + \operatorname{meas}\{t \in [0, T_*] \colon \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s))d\eta + \psi^0 \int_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds \neq 0\} > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда

$$\psi^0 = 0 \quad \text{и} \quad \psi(t) + \int_0^t \lambda(x_*(s))d\eta = 0 \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T_*].$$

Поскольку $\psi^0 = 0$, то условие стационарности 3) теоремы 2 в точке $t = T_*$ и во всех точках $t \in [0, T_*]$, являющихся точками правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, принимает вид

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta\right) = H\left(x_*(0), \psi(0)\right).$$

Далее, почти каждая точка $t \in [0, T_*]$ является точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, а функция $t \mapsto \int_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta$ непрерывна справа на $[0, T_*]$. Отсюда в силу предыдущего равенства для $t = T_*$ и п.в. $t \in [0, T)$ получаем тождество

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta\right) \equiv H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s)) d\eta - \lambda(x_*(t))\eta(t)\right), \quad t \in [0, T_*]. \tag{3.19}$$

Здесь $\eta(t)$ — атомарная составляющая меры η в точке $t \in [0, T_*]$. Данное тождество полностью аналогично условию на скачок меры (b) в [16, Theorem 1]. Оставшаяся часть доказательства теоремы 4 основана на использовании тождества (3.19), свойстве управляемости траектории $x_*(\cdot)$ в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$, определении меры η и почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 в [16, Theorem 2]. $\square$

Теорема 5. *Пусть допустимая траектория $x_*(\cdot)$ управляема в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$, удовлетворяет условиям теоремы 2 и, кроме того,*

$$H(x_*(t), (-1)^i g) > 0 \quad \forall g \in N_G(x_*(t)), \quad t \in (0, T_*), \quad i = 1, 2. \tag{3.20}$$

Тогда

$$\psi^0 + \left\| \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta + \psi^0 \int\limits_0^t \delta_M(x_*(s)) \frac{\partial \lambda(x_*(s))}{\partial x}\, ds \right\| > 0, \quad t \in (0, T_*). \tag{3.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество

$$\Delta = \left\{ t \in (0, T_*) \colon \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta = 0 \right\}.$$

Предположим, что условие (3.21) не выполняется. Тогда $\psi^0 = 0$ и $\Delta \neq \varnothing$.

При $\psi^0 = 0$ условие стационарности 3) теоремы 2 в точке $t = T_*$ и во всех точках $t \in [0, T_*]$, являющихся точками правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, имеет вид

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \int\limits_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta\right) = H\left(x_*(0), \psi(0)\right).$$

Так как почти каждая точка $t \in [0, T_*]$ является точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, а функция $t \mapsto \int_0^t \lambda(x_*(s))\, d\eta$ непрерывна справа на $[0, T_*]$, то отсюда, как и в доказательстве теоремы 4, вытекает тождество (3.19), которое полностью аналогично условию на скачок меры (b) в [16, Theorem 1]. Поэтому, полностью следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве теоремы 4 в [16], используя тождество (3.19), свойство управляемости траектории $x_*(\cdot)$ в концевых точках $x_*(0)$ и $x_*(T_*)$, условие (3.20) и определение меры η, можно показать, что множество Δ является одновременно открытым и замкнутым относительно интервала $(0, T_*)$. Поэтому $\Delta = (0, T_*)$. Однако это противоречит утверждению теоремы 4. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнов А.В.** Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Мат. анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 27. С. 147–235. ISBN: 5-88688-015-1 .
2. **Арутюнов А.В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 254 p.
3. **Асеев С.М.**, Оптимизация динамики управляемой системы при наличии факторов риска // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, №. 1. С. 27–42. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42 .
4. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Докл. РАН, 2004. Т. 395, №. 5. С. 583–585.
5. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // Нелинейная динамика и управление: сб. статей. М.: Физматлит, 2004. Т. 4. С. 179–204.
6. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.**, Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
7. **Arutyunov, A.V., Karamzin, D.Yu., Pereira, F.L.** The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 149, iss. 3. P. 474–493.
8. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
9. **Мордухович Б.Ш.** Принцип макисмума в задачах оптимального быстродействия с негладкими ограничениями // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1014–1023.
10. **Мордухович Б.Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
11. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
12. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 393 p.
13. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника. 1993. Т. 99. С. 3–8.
14. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** Об одной специальной задаче оптимального быстродействия // Кибернетика и вычисл. техника. 1994. Т. 101. С. 11–15.
15. **Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 222–239.
16. **Arutyunov A.V., Aseev S.M.** Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 930–952. doi: 10.1137/S036301299426996X .
17. **Aseev S.M.** Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization // J. Math. Sci. 1999. Vol. 94, no. 3. P. 1366–1393. doi: 10.1007/BF02365018 .
18. **Cesari L.** Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations. N Y, Springer, 1983, 542 p. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5 .
19. **Ferreira, M.M.A., Vinter, R.B.** When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate? // J. Math. Anal. Appl. 1994. Vol. 187, no. 2. P. 438–467. doi: 10.1006/jmaa.1994.1366 .
20. **Fontes F.A.C.C., Frankowska H.** Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 166, iss. 1. P. 115–136. doi: 10.1007/s10957-015-0704-1 .

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом дифференциальных уранений
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила 10.10.2017

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions. *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 54, no. 6, pp. 1342–1400. doi: 10.1007/BF01373649 .

2. Arutyunov A.V. *Optimality conditions. Abnormal and degenerate problems.* Math. and its Appl. (Dordrecht), vol. 526, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000, 299 p. ISBN: 0-7923-6655-7 . Original Russian text published in Arutyunov A.V. *Usloviya ekstremuma. Anormal'nye i vyrozhdennye zadachi.* Moscow, Faktorial Publ., 1997, 255 p. ISBN: 5-88688-015-1 .
3. Aseev S.M. Optimization of dynamics of a control system in the presence of risk factors. *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 27–42 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42 .
4. Aseev S.M., Smirnov A.I. The Pontryagin maximum principle for the problem of optimally crossing a given domain. *Dokl. Math.*, 2004, vol. 69, no. 2, pp. 243–245.
5. Aseev S.M., Smirnov A.I. Necessary first-order conditions for optimal crossing of a given region. *Comput. Math. Model.*, 2007, vol. 18, no. 4, pp. 397–419. doi: 10.1007/s10598-007-0034-8 .
6. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Amsterdam, Elsevier North-Holland, 1979, 460 p. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.
7. Arutyunov, A.V., Karamzin, D.Yu., Pereira, F.L. The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited. *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, vol. 149, no. 3, pp. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5 .
8. Clarke F.H. *Optimization and nonsmooth analysis.* N Y, Wiley, 1983, 308 p. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz.* Moscow, Nauka Publ. 1988. 280 p.
9. Mordukhovich B.Sh. Maximum principle in the problem of time optimal response with nonsmooth constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1976, vol. 40, no. 6, pp. 960–969. doi: 10.1016/0021-8928(76)90136-2 .
10. Mordukhovich B.Sh. *Metody approksimatsii v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in problems of optimization and control]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 360 p.
11. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable.* N Y, Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p. (Translation of chapters I to IX of the author's *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi*, Moscow, Gostehizdat Publ., 1950).
12. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y, London, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 393 p.
13. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On the problem of the optimal passage through a given domain. *Kibernet. i Vychisl. Tekhn.* 1993, vol. 99, pp. 3–8 (in Russian).
14. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On a special time-optimality problem. *Kibernet. i Vychisl. Tekhn.*, 1994, vol. 101, pp. 11–15.
15. Smirnov A.I. Necessary optimality conditions for a class of optimal control problems with discontinuous integrand. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, no. 1, pp. 213–230. doi: 10.1134/S0081543808030176 .
16. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 930–952. doi: 10.1137/S036301299426996X .
17. Aseev S.M. Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 94, no. 3, pp. 1366–1393. doi: 10.1007/BF02365018 .
18. Cesari L. *Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations.* N Y, Springer, 1983, 542 p. doi: 10.1007/978-1-4613-8165-5 .
19. Ferreira, M.M.A., Vinter, R.B. When is the maximum principle for state constrained problems nondegenerate? *J. Math. Anal. Appl.*, 1994, vol. 187, no. 2, pp. 438–467. doi: 10.1006/jmaa.1994.1366 .
20. Fontes F.A.C.C., Frankowska H. Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 166, no. 1, pp. 115–136. doi: 10.1007/s10957-015-0704-1 .

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Sergey Mironovich Aseev, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: aseev@mi.ras.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ДИСКРЕТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ

А. Л. Багно, А. М. Тарасьев

В статье рассматривается задача оптимального управления на бесконечном горизонте с подынтегральным индексом, входящим в функционал качества с дисконтирующим множителем. Основной особенностью постановки задачи является неограниченность подынтегрального индекса. Это позволяет проводить анализ моделей экономического роста с линейными, степенными и логарифмическими функциями полезности. Исследуется дискретная аппроксимация уравнения Гамильтона — Якоби для построения функции цены исходной задачи. Показано выполнений условий Гёльдера и подлинейного роста для решения уравнения дискретной аппроксимации. Показана равномерная сходимость решений аппроксимационных уравнений к функции цены задачи оптимального управления. Полученные результаты могут быть использованы для построения сеточных методов аппроксимации функции цены задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени. Разрабатываемые методы являются эффективными средствами в моделировании процессов экономического роста.

Ключевые слова: дискретная аппроксимация, оптимальное управление, уравнение Гамильтона — Якоби, вязкостное решение, бесконечный горизонт, функция цены.

A. L. Bagno, A. M. Taras'ev. Discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation for the value function in an optimal control problem with infinite horizon.

An infinite horizon optimal control problem is considered in which the quality functional contains an index with discount factor under the integral sign. The main feature of the problem is the unbounded index, which allows to analyze economic growth models with linear, power, and logarithmic utility functions. A discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation is explored for constructing the value function of the original problem. The Hölder condition and the sublinear growth condition are derived for the solution of the discrete approximation equation. Uniform convergence of solutions of approximation equations to the value function of the optimal control problem is shown. The obtained results can be used to construct grid approximation methods for the value function of an optimal control problem on an infinite time interval. The proposed methods are effective tools in the modeling of economic growth processes.

Keywords: discrete approximation, optimal control, Hamilton–Jacobi equation, viscosity solution, infinite horizon, value function.

MSC: 49K15, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-27-39

Введение

Метод дискретной аппроксимации уравнения Гамильтона — Якоби рассматривался И. Капуццо Дольчетта в работе [3], где изучались свойства аппроксимационных решений уравнения и их связь с задачами оптимального управления. Исследование метода было продолжено в статье [4], в которой были получены оценки отклонения аппроксимационных решений и вязкостного решения уравнения Гамильтона — Якоби, конструкция которого введена в работе М. Дж. Крэндалла и П.–Л. Лионса [2]. В дальнейшем эти идеи были развиты в исследовании Р. А. Адиатулиной и А. М. Тарасьева [5] для аппроксимации функции цены задач оптимального управления и дифференциальных игр как обобщенного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби, предложенного А. И. Субботиным [10].

В упомянутых работах рассматривались управляемые системы на бесконечном горизонте с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель. При этом существенным условием, стесняющим постановку задачи, являлось условие ограниченности функции полезности — интегранда в функционале качества. Долгое время без внимания оставался вопрос, как соотносятся решения уравнений дискретной аппроксимации и функция цены задачи оптимального управления в случае, когда функция полезности не удовлетворяет, вообще говоря, условию ограниченности. Ответу на этот вопрос посвящена настоящая статья. Отметим, что в работах авторов [6;7] проведены исследования свойств функций цены в задачах оптимального управления с неограниченными функциями полезности на бесконечном интервале времени и получены оценки на рост и параметры непрерывности по Гёльдеру. Эти результаты играют существенную роль в получении аналогичных оценок для аппроксимационных решений уравнений Гамильтона — Якоби.

Следует отметить, что тематика аппроксимации уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана в последнее время приобретает важное значение при установлении связи конструкций теории устойчивости и принципа динамического программирования в теории оптимального управления (см., например, работу Д. П. Бертсекаса [1]). В статье А. А. Красовского и А. М. Тарасьева [8] предложено решение задачи оптимального управления на бесконечном горизонте в рамках принципа максимума Л. С. Понтрягина, а также проведено исследование свойств соответствующей гамильтоновой системы и рассмотрены возможности по ее стабилизации.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 дается постановка задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом, описывается уравнение дискретной аппроксимации и вводятся определения основных понятий, используемых в статье. В разд. 2 показывается, что решение уравнения дискретной аппроксимации удовлетворяет условию Гёльдера и условию подлинейного роста. Устанавливается, что решения аппроксимационных уравнений равномерно сходятся к функции цены задачи оптимального управления.

1. Постановка задачи и основные определения

В этой статье рассматривается следующая управляемая система:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ — управляющий параметр, P — компакт.

Функционал качества задается равенством

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия.

1. Функции f и h непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ при любом $p \in P$ справедливы соотношения Липшица по аргументу x:

$$\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.3}$$

$$|h(x_1, p) - h(x_2, p)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.4}$$

где L — константа Липшица, не зависящая от p.

3. Для любых x, p выполняется условие подлинейного роста по аргументу x:

$$\|f(x, p)\| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{1.5}$$

$$|h(x, p)| \leqslant \varkappa(1 + \|x\|), \tag{1.6}$$

где $\varkappa$ — положительная константа, не зависящая от p.

Ставится задача максимизации функционала (1.2) с бесконечным горизонтом на траекториях системы (1.1) на множестве U измеримых по Лебегу управлений $u(\cdot)$ со значениями в компакте P.

О п р е д е л е н и е 1. *Ценой в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной позиции (t_0, z_0), где $t_0 > 0$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется величина

$$\omega(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Big(\widetilde{y}_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau\Big). \tag{1.7}$$

Здесь $T > t_0$, $x(\cdot)$ удовлетворяет условию $\dot{x}(\tau) = f(x(\tau), u(\tau))$, τ пробегает значения внутри отрезка $[t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$.

О п р е д е л е н и е 2. *Функцией цены задачи с бесконечным горизонтом* называется функция, сопоставляющая каждой позиции цену по правилу (1.7).

Заметим, что для функции цены w_T в задаче с конечным горизонтом T справедливы соотношения [10]

$$\begin{aligned} w_T(t_0, z_0) &= -\inf_{u(\cdot)\in U} \Big(-\widetilde{y}_0 - \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau\Big) \\ &= \widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \Big(\int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau\Big), \end{aligned}$$

которыми удобно пользоваться при двойственных переходах в задачах оптимизации.

Введя обозначения $g(x,u) = -h(x,u)$, $y = -\widetilde{y}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, можно записать

$$w_T(t_0, z_0) = -\widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \Big(\int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau))\, d\tau\Big) =: -\omega_T(t_0, z_0)$$

и также считать функцию $\omega_T(t_0, z_0)$ функцией цены. Отметим, что функция h удовлетворяет свойствам (1.4) и (1.6), а для параметра y справедливо соотношение

$$y = -\widetilde{y} = -e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) = e^{-\lambda\tau} g(x(\tau), u(\tau)).$$

Аналогично для функции цены $w(t_0, z_0)$ введем ее аналог

$$w(t_0, z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Big(-\widetilde{y}_0 - \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau\Big)$$

$$= -y_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \Big(\int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (g(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau\Big) =: -\omega(t_0, z_0) =: -\omega(t_0, x_0, y_0).$$

В дальнейшем будем исследовать свойства именно функции $\omega(t_0, z_0)$.

Функция цены обладает свойствами, аналогичными свойствам 2 и 3 функций f и h, причем она удовлетворяет условию Гёльдера. Справедливость условия подлинейного роста для функции цены была показана в работе [7, теорема 1], а выполнение условия Гёльдера — в работе [6, теорема 2]. Приведем здесь формулировки упомянутых утверждений.

Утверждение 1. *Если $\lambda > \varkappa$, тогда для функции цены в задаче с бесконечным горизонтом справедлива оценка*

$$|\omega(t, z)| \leqslant A + B\|x\|, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad t \geq t_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

где

$$A = |y| + \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\lambda t}, \quad B = \frac{1}{\lambda - \varkappa} e^{-\lambda t}.$$

Для упрощения дальнейших выкладок нам будет удобнее взять величину $B = \varkappa/(\lambda - \varkappa)e^{-\lambda t}$.

Утверждение 2. *Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$|\omega(0, x_1, 0) - \omega(0, x_2, 0)| \leqslant C\|x_1 - x_2\|^{\gamma}, \tag{1.9}$$

где $C > 0$, $\gamma > 0$.

Значения констант C и γ в зависимости от соотношения между параметрами $\varkappa$, L и λ введены в [6, теорема 2].

Определим гамильтониан задачи управления соотношением

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u \in P} (\langle s, f(x, u)\rangle + g(x, u)). \tag{1.10}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать для функции $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ уравнение Гамильтона — Якоби вида

$$-\varphi(x) + H(x, \nabla\varphi(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

Здесь $\nabla\varphi(x)$ — вектор частных производных функции $\varphi(x)$.

Отметим, что, как правило, уравнение Гамильтона — Якоби не имеет гладких решений. Для введения определения минимаксного решения уравнения (1.11) дадим определения производных Дини по направлению.

О п р е д е л е н и е 3. *Нижней (верхней) производной Дини функции ω в точке x по направлению d* называется функция

$$\partial_-\omega(x)|(d) = \inf_{\varepsilon(\cdot)\in\Delta} \varliminf_{\delta\to 0} \frac{\omega(x + \delta d + \varepsilon(\delta)) - \omega(x)}{\delta}$$

$$\Big(\partial_+\omega(x)|(d) = \sup_{\varepsilon(\cdot)\in\Delta} \varlimsup_{\delta\to 0} \frac{\omega(x + \delta d + \varepsilon(\delta)) - \omega(x)}{\delta}\Big),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, Δ — класс функций $\varepsilon(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, таких что $\lim\limits_{\delta\to 0} \|\varepsilon(\delta)\|/\delta = 0$.

Рассмотрим вспомогательный гамильтониан

$$\overline{H}(t, x, s, m) = \begin{cases} e^{-t}|m| H\Big(x, \dfrac{s}{e^{-t}|m|}\Big), & m \neq 0, \\ \lim\limits_{m\to 0} e^{-t} m H\Big(x, \dfrac{s}{e^{-t} m}\Big), & m = 0, \end{cases}$$

где $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}$.

Символом S обозначим шар единичного радиуса $\overline{S} = \{\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon \|\bar{s}\| = 1\}$. Введем также следующие обозначения для множеств, определяющих динамические возможности системы:

$$A(x) := \{\bar{f} = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon \|\bar{f}\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x\|)\},$$

где $\bar{f} = \|f_1\| + |f_2|$. Ограничимся рассмотрением гамильтониана для момента времени $t = 0$:

$$A_{\text{в}}(x, q_1, q_2) := \{\bar{f} \in A(x) \colon \langle f_1, q_1 \rangle + \langle f_2, q_2 \rangle \geqslant \overline{H}(0, x, q_1, q_2)\}$$

$$A_{\text{н}}(x, p_1, p_2) := \{\bar{f} \in A(x) \colon \langle f_1, p_1 \rangle + \langle f_2, p_2 \rangle \leqslant \overline{H}(0, x, p_1, p_2)\},$$

где $q_1, p_1 \in \mathbb{R}^n$, $q_2, p_2 \in \mathbb{R}^n$.

Приведем определение минимаксного решения в терминах производных по направлению согласно работам [5;10] и в терминах сопряженных производных в соответствии со статьей [11].

О п р е д е л е н и е 4. *Минимаксным решением уравнения* (1.11) называется непрерывная функция $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Гёльдера (1.9) и подлинейного роста (1.8) при нулевой $(n+1)$-й координате, $y = 0$, для которой справедливы дифференциальные неравенства в терминах производных по направлению:

$$\min_{(d_1, d_2) \in A_{\text{в}}(x, q_1, q_2)} \{d_2 + \partial_- \varphi(x) \mid (d_1)\} - \varphi(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{q} = (q_1, q_2) \in \overline{S},$$

$$\max_{(d_1, d_2) \in A_{\text{н}}(x, p_1, p_2)} \{d_2 + \partial_+ \varphi(x) \mid (d_1)\} - \varphi(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{p} = (p_1, p_2) \in \overline{S},$$

или дифференциальные неравенства в терминах сопряженных производных:

$$\partial_-^* \varphi(x) := \sup_{d \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, d \rangle - \partial_- \varphi(x) \mid (d)\} \geqslant -\varphi(x) + H(x, s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\partial_+^* \varphi(x) := \inf_{d \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, d \rangle - \partial_+ \varphi(x) \mid (d)\} \leqslant -\varphi(x) + H(x, s) \quad \forall s \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

В статье [7, теорема 2] было показано, что некоторая функция является функцией цены задачи оптимального управления (1.1), (1.2) тогда и только тогда, когда она является минимаксным решением уравнения (1.11). Введем определение вязкостного решения уравнения (1.11) в смысле Крэндалла — Лионса [2].

О п р е д е л е н и е 5. Непрерывная по Гёльдеру (1.9) функция $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию подлинейного роста (1.8), называется *вязкостным решением уравнения* (1.11), если для каждой непрерывно-дифференцируемой функции $\omega \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполняются следующие неравенства:

$$H(x_1, \nabla \omega(x_1)) - \varphi(x_1) \leqslant 0,$$

если x_1 — точка локального максимума функции $(\varphi - \omega)(x)$;

$$H(x_2, \nabla \omega(x_2)) - \varphi(x_2) \geqslant 0,$$

если x_2 — точка локального минимума функции $(\varphi - \omega)(x)$.

По аналогии с работами [10; 12] можно показать, что вязкостное решение уравнения (1.11) совпадает с минимаксным решением этого уравнения, и, следовательно, можно говорить об эквивалентности понятий минимаксного решения, вязкостного решения и функции цены задачи (1.1), (1.2).

2. Свойства решений уравнений дискретной аппроксимации

Наше уравнение Гамильтона — Якоби содержит гамильтониан (1.10), который неограниченно растет при x, стремящемся к бесконечности. Поэтому для удобства дальнейшего исследования нам будет удобно сделать замену функции $\varphi(x)$ из (1.11):

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{M + N\|x\|}, \tag{2.1}$$

где M и N — некоторые положительные константы. Отметим, что функция $\varphi(x)/(M+N\|x\|)$ не является гладкой в точке $x=0$, но ее можно сгладить в окрестности нуля. В качестве сглаживающей для функции $\|x\|$ в ε-окрестности нуля, $\varepsilon>0$, введем функцию

$$r_\varepsilon(x)=\begin{cases}\|x\|, & \text{если} \quad \|x\|>\varepsilon,\\ \|x\|^2/(2\varepsilon)+\varepsilon/2, & \text{если} \quad \|x\|\leqslant\varepsilon.\end{cases}\tag{2.2}$$

Эта функция носит название функции Хубера (см., например, [9, с. 33]). Отметим некоторые ее свойства. Во-первых, очевидно, что

$$\|x\|\leqslant r_\varepsilon(x)\tag{2.3}$$

для всех $x\in\mathbb{R}^n$. Производная функции $r_\varepsilon(x)$ определяется как

$$r'_\varepsilon(x)=\begin{cases}x/\|x\|, & \text{если} \quad \|x\|>\varepsilon,\\ x/\varepsilon, & \text{если} \quad \|x\|\leqslant\varepsilon.\end{cases}$$

Отсюда следует, что производная ограничена, т. е.

$$r'_\varepsilon(x)\leqslant 1,\tag{2.4}$$

и что производная липшицева. Действительно, при $\|x_1\|\geqslant\varepsilon$, $\|x_2\|\geqslant\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned}|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|&=\left\|\frac{x_1}{\|x_1\|}-\frac{x_2}{\|x_2\|}\right\|=\left\|\frac{x_1\|x_2\|-x_2\|x_1\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\right\|\\
&=\left\|\frac{x_1\|x_2\|-x_2\|x_1\|+x_1\|x_1\|-x_1\|x_1\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\right\|=\frac{\|x_1(\|x_2\|-\|x_1\|)+\|x_1\|(x_1-x_2)\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\\
&\leqslant\frac{\|x_1\|(\|x_2\|-\|x_1\|)+\|x_1\|\|x_1-x_2\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\leqslant\frac{\|x_1\|\|x_2-x_1\|+\|x_1\|\|x_1-x_2\|}{\|x_1\|\|x_2\|}\\
&=\frac{2}{\|x_2\|}\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|.\end{aligned}$$

При $\|x_1\|\leqslant\varepsilon$, $\|x_2\|\leqslant\varepsilon$ имеем

$$|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|=\left\|\frac{\|x_1\|}{\varepsilon}-\frac{\|x_2\|}{\varepsilon}\right\|\leqslant\frac{\|x_1-x_2\|}{\varepsilon}<\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|.$$

В случае, когда $\|x_1\|<\varepsilon$, $\|x_2\|>\varepsilon$, выберем точку x_3 так, чтобы $\|x_3\|=\varepsilon$ и она лежала на отрезке, соединяющем точки x_1, x_2. Тогда

$$\begin{aligned}|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|&=|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_3)+r'_\varepsilon(x_3)-r'_\varepsilon(x_2)|\\
&\leqslant|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_3)|+|r'_\varepsilon(x_3)-r'_\varepsilon(x_2)|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_3\|+\frac{1}{\varepsilon}\|x_3-x_2\|\\
&<\frac{2}{\varepsilon}(\|x_1-x_3\|+\|x_3-x_2\|)=\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|,\end{aligned}$$

так как x_3 принадлежит отрезку, соединяющему точки x_1, x_2. Итак,

$$|r'_\varepsilon(x_1)-r'_\varepsilon(x_2)|\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\|x_1-x_2\|.\tag{2.5}$$

Вернемся к функции $\psi(x)$ (2.1), заменив $\|x\|$ на сглаживающую функцию $r_\varepsilon(x)$ (2.2). Можно показать, что она удовлетворяет условию подлинейного роста (1.8) и условию Гёльдера (1.9). Более того, из условия (1.8) следует, что функция $\psi(x)$ ограничена:

$$|\psi(x)|=\frac{\varphi(x)}{M+Nr_\varepsilon(x)}\leqslant\frac{A+Br_\varepsilon(x)}{M+Nr_\varepsilon(x)}\leqslant K,\tag{2.6}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $K = \max\left\{\dfrac{B}{N}, \dfrac{A + B\varepsilon/2}{M + N\varepsilon/2}\right\}$. Действительно, выражение $(A + Br_\varepsilon(x))/(M + Nr_\varepsilon(x))$ можно представить как монотонную функцию переменной $\|x\|$. На интервале $[0, +\infty)$ при $A/M < B/N$ эта функция монотонно возрастает и при $\|x\| \to +\infty$ стремится к пределу B/N. При $A/M > B/N$ картина обратная: функция монотонно убывает, максимум достигается в нуле и равен $(A + B\varepsilon/2)/(M + N\varepsilon/2)$.

Возьмем $M = N = \varkappa$ и подставим замену (2.1) в уравнение Гамильтона — Якоби (1.11). Тогда из соотношений (2.6) вытекают следующие соотношения:

$$\varphi(x) = \psi(x)(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))),$$
$$\nabla\varphi(x) = \nabla\psi(x)(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))) + \varkappa\,\psi(x)r'_\varepsilon(x).$$

Поэтому уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$-\psi(x)(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))) + \frac{1}{\lambda}\min_{u\in P}\big(\langle\nabla\psi(x)\big(\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))\big) + \varkappa\,\psi(x)r'_\varepsilon(x), f(x,u)\rangle + g(x,u)\big) = 0.$$

Эта запись эквивалентна уравнению Гамильтона — Якоби следующего вида:

$$\min_{u\in P}\Big(-\lambda\psi(x) + \langle\nabla\psi(x), f(x,u)\rangle + \varkappa\,\psi(x)\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big\rangle + \frac{g(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big) = 0, \tag{2.7}$$

в которое входит гамильтониан задачи управления (1.1)

$$\hat{H}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) = \min_{u\in P}\Big(\langle\nabla\psi(x), f(x,u)\rangle + \varkappa\psi(x)\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big\rangle + \frac{g(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big).$$

Уравнение (2.7) можно переписать в виде

$$-\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\psi(x)) = 0.$$

Для полученного уравнения Гамильтона — Якоби можно ввести определения обобщенных минимаксного и вязкостного решений аналогично определениям 4 и 5. Например, вязкостное решение определяется следующим образом.

Непрерывная по Гёльдеру (1.9) функция $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию ограниченности (2.6), называется *вязкостным решением уравнения* (2.7), если для каждой непрерывно-дифференцируемой функции $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выполняются следующие неравенства:

$$-\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\omega(x)) \leqslant 0 \tag{2.8}$$

в точке x_1, где x_1 — точка локального максимума функции $(\psi - \omega)(x)$;

$$-\lambda\psi(x) + \hat{H}(x, \psi(x), \nabla\omega(x)) \geqslant 0 \tag{2.9}$$

в точке x_2, где x_2 — точка локального минимума функции $(\psi - \omega)(x)$.

Теперь перейдем к дискретной аппроксимации полученного в результате замены переменных уравнения Гамильтона — Якоби (2.7) с непрерывными по Гёльдеру и ограниченными обобщенными (минимаксными, вязкостными) решениями. По формуле Тейлора функцию $\psi(x)$ можно приблизить функцией $\psi^h(x)$ следующим образом:

$$\psi^h(x + hf(x,u)) - \psi^h(x) \approx h\langle\nabla\psi(x), f(x,u)\rangle.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.7) и домножая его на h, получим

$$\min_{u\in P}\Big(-\lambda h\psi^h(x + hf(x,u)) + \psi^h(x + hf(x,u)) - \psi^h(x)$$
$$+ \varkappa h\psi^h(x + hf(x,u))\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big\rangle + \frac{hg(x,u)}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x))}\Big) = 0.$$

Или, что то же самое, имеем соотношение

$$\min_{u\in P}\Big(-\psi^h(x)+\Big(1-\lambda h+\varkappa h\Big\langle r'_\varepsilon(x),\frac{f(x,u)}{\varkappa\,(1+r_\varepsilon(x))}\Big\rangle\Big)\psi^h(x+hf(x,u))$$
$$+\frac{hg(x,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x))}\Big)=0; \tag{2.10}$$

здесь $x\in\mathbb{R}^n$, $h>0$.

О п р е д е л е н и е 6. Уравнение (2.10) будем называть *дискретной аппроксимацией* уравнения Гамильтона — Якоби (1.11). Функцию ψ^h будем называть *решением уравнения дискретной аппроксимации.*

Для удобства дальнейших рассуждений введем обозначения

$$p(x,u,h,\lambda,\varkappa)=1-\lambda h+\varkappa h\Big\langle r'_\varepsilon(x),\frac{f(x,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x))}\Big\rangle,\quad q(x,u,h,\varkappa)=\frac{hg(x,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x))}.$$

Покажем, что функции $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$ и $q(x,u,h,\varkappa)$ удовлетворяют условию Липшица.

Действительно,

$$|q(x_1,u,h,\varkappa)-q(x_2,u,h,\varkappa)|=\left|\frac{hg(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))}-\frac{hg(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{g(x_1,u)(1+r_\varepsilon(x_2))-g(x_2,u)(1+r_\varepsilon(x_1))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{(g(x_1,u)-g(x_2,u))+(g(x_1,u)r_\varepsilon(x_2)-g(x_1,u)r_\varepsilon(x_1))+(g(x_1,u)r_\varepsilon(x_1)-g(x_2,u)r_\varepsilon(x_1)}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{(g(x_1,u)-g(x_2,u))+g(x_1,u_1)(r_\varepsilon(x_1)-r_\varepsilon(x_2))+r_\varepsilon(x_1)(g(x_1,u)-g(x_2,u))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|$$
$$=\frac{h}{\varkappa}\left|\frac{(g(x_1,u)-g(x_2,u))(1+r_\varepsilon(x_1))+g(x_1,u)(r_\varepsilon(x_1)-r_\varepsilon(x_2))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\right|.$$

Так как для функции $g(x,u)$ выполняются соотношения Липшица (1.4) и подлинейного роста (1.6), а для функции $r_\varepsilon(x)$ — условие (2.3), имеем

$$|q(x_1,u,h,\varkappa)-q(x_2,u,h,\varkappa)|\leqslant\frac{h}{\varkappa}\Big(\frac{L(\|x_1-x_2\|)(1+r_\varepsilon(x_1))+\varkappa(1+\|x_1\|)(r_\varepsilon(x_1)-r_\varepsilon(x_2))}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\Big)$$
$$\leqslant\frac{h}{\varkappa}\Big(\frac{L(\|x_1-x_2\|)(1+r_\varepsilon(x_1))+\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))\|x_1-x_2\|}{(1+r_\varepsilon(x_1))(1+r_\varepsilon(x_2))}\Big)$$
$$=\frac{h(L+\varkappa)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))}\|x_1-x_2\|\leqslant\frac{h(L+\varkappa)}{\varkappa}\|x_1-x_2\|. \tag{2.11}$$

Таким образом, функция $q(x,u,h,\varkappa)$ является липшицевой по переменной x с константой

$$C_q=hC'_q,\quad C'_q=\frac{L+\varkappa}{\varkappa}. \tag{2.12}$$

Аналогичным образом можно выполнить рассуждения для функции $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$. Имеем

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa)-p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)|$$
$$=\left|\left(1-\lambda h+\varkappa h\left\langle r'_\varepsilon(x_1),\frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))}\right\rangle\right)-\left(1-\lambda h+\varkappa h\left\langle r'_\varepsilon(x_2),\frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))}\right\rangle\right)\right|$$

$$= \varkappa h \left| \left\langle r'_\varepsilon(x_1), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle - \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\rangle \right|$$

$$= \varkappa h \left| \left\langle r'_\varepsilon(x_1), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle - \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\rangle \right.$$

$$\left. + \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle - \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle \right|$$

$$= \varkappa h \left| \left\langle \left(r'_\varepsilon(x_1) - r'_\varepsilon(x_2)\right), \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\rangle + \left\langle r'_\varepsilon(x_2), \left(\frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} - \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right) \right\rangle \right|.$$

Воспользуемся неравенством Коши — Буняковского:

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)|$$

$$\leqslant \varkappa h \left(\|r'_\varepsilon(x_1) - r'_\varepsilon(x_2)\| \cdot \left\| \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} \right\| + \|r'_\varepsilon(x_2)\| \cdot \left\| \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} - \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\| \right).$$

Так как функция $f(x,u)$ удовлетворяет условию подлинейного роста (1.5), а функция $r_\varepsilon(x)$ — условиям (2.3) и (2.4), получаем

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)|$$

$$\leqslant \varkappa h \left(\|r'_\varepsilon(x_1) - r'_\varepsilon(x_2)\| + \left\| \frac{f(x_1,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_1))} - \frac{f(x_2,u)}{\varkappa(1+r_\varepsilon(x_2))} \right\| \right). \tag{2.13}$$

Оценку разности производных функции $r_\varepsilon(x)$ мы произвели выше (см. (2.5)). Второе слагаемое представляет собой в точности до обозначений разность $|q(x_1,u,h,\varkappa) - q(x_2,u,h,\varkappa)|$, оценку которой мы тоже получили в (2.11). Подставляя эти выражения в (2.13), имеем

$$|p(x_1,u,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u,h,\lambda,\varkappa)| \leqslant \varkappa h \Big(\frac{2}{\varepsilon}\|x_1 - x_2\| + \frac{(L+\varkappa)}{\varkappa}\|x_1 - x_2\| \Big)$$

$$= \Big(\frac{2\varkappa h}{\varepsilon} + h(L+\varkappa) \Big)\|x_1 - x_2\|. \tag{2.14}$$

Тем самым показано, что функция $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$ является липшицевой с константой

$$C_p = hC'_p, \quad C'_p = \frac{2\varkappa}{\varepsilon} + L + \varkappa. \tag{2.15}$$

Теорема 1. *Если $\lambda > \varkappa + \gamma L$, то решение уравнения дискретной аппроксимации ψ^h единственно для любого $h \in [0, 1/(\lambda - \varkappa))$, причем выполняются оценки*

$$|\psi^h(x_1) - \psi^h(x_2)| \leqslant C\|x_1 - x_2\|^\gamma, \tag{2.16}$$

где $C = \dfrac{C'_p K + C'_q}{\lambda - \varkappa - \gamma L}$, константы C'_p и C'_q определяются соотношениями (2.15) *и* (2.12),

$$|\psi^h(x)| \leqslant \frac{1}{\lambda - \varkappa}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Аппроксимационное уравнение (2.10) эквивалентно уравнению

$$\psi^h(x) = T\psi^h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь оператор T определяется следующим образом:

$$T\psi(x) = \min_{u \in P} \left(p(x,u,h,\lambda,\varkappa)\psi(x + hf(x,u)) + q(x,u,h,\varkappa) \right) \tag{2.18}$$

на функциях ψ, удовлетворяющих условию непрерывности по Гёльдеру и условию ограниченности.

Выберем управление u, на котором оператор T достигает минимума для функции ψ. Рассмотрим разность значений оператора T на функциях ψ, $\hat{\psi}$. Для любого управления $\hat{u}$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} T\psi(x) - T\hat{\psi}(x) \\ = p(x,u,h,\lambda,\varkappa)(\psi(x+f(x,u)h) - \hat{\psi}(x+f(x,\hat{u})h)) + (q(x,u,h,\varkappa) - q(x,\hat{u},h,\varkappa)) \\ \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa)(\psi(x+f(x,\hat{u})h) - \hat{\psi}(x+f(x,\hat{u})h)) \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\psi(x) - \hat{\psi}(x)|. \end{gathered}$$

Аналогично получаем неравенство

$$T\hat{\psi}(x) - T\psi(x) \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\psi(x) - \hat{\psi}(x)|.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |T\psi(x) - T\hat{\psi}(x)| \leqslant p(x,u,h,\lambda,\varkappa) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\psi(x) - \hat{\psi}(x)|.$$

Оценим функцию $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$. По неравенству Коши — Буняковского, свойству подлинейного роста для функции $f(x,u)$ (1.5) и ограниченности производной $r'_\varepsilon(x)$ (2.4) имеем

$$p(x,u,h,\lambda,\varkappa) = 1 + h\Big(-\lambda + \varkappa\Big\langle r'_\varepsilon(x), \frac{f(x,u)}{\varkappa(1+\|x\|)}\Big\rangle\Big) \leqslant 1 - \lambda h + \varkappa h. \tag{2.19}$$

Отметим, что так как по условию теоремы $\lambda > \varkappa + \gamma L$, в соответствии с выбором $h \in [0, 1/(\lambda-\varkappa))$ значения множителя $p(x,u,h,\lambda,\varkappa)$ лежат между 0 и 1, т. е. оператор T является сжимающим, и по принципу сжимающих отображений существует единственная функция $\psi^h(x)$, удовлетворяющая уравнению дискретной аппроксимации (2.10).

Перейдем к доказательству оценок (2.16), (2.17). По определению оператора T (2.18) имеем

$$\begin{gathered} |T\psi(x_1) - T\psi(x_2)| \\ = |(p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x + hf(x_1,u_1)) + q(x_1,u_1,h,\varkappa)) \\ - (p(x_2,u_2,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_2 + hf(x_2,u_2)) + q(x_2,u_2,h,\varkappa))|, \end{gathered}$$

где $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in P$ — управления, реализующие минимум определенного на функции $\psi(x)$ оператора T в точках x_1 и x_2 соответственно. При любом управлении, отличном от u_2, в точке x_2 значение оператора T больше, чем при управлении u_1. Следовательно

$$\begin{gathered} |T\psi(x_1) - T\psi(x_2)| \\ \leqslant |(p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_1 + hf(x_1,u_1)) + q(x_1,u_1,h,\varkappa)) \\ - (p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_2 + hf(x_2,u_1)) + q(x_2,u_1,h,\varkappa))| \\ \leqslant |p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x + hf(x_1,u_1)) - p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_2 + hf(x_2,u_1)) \\ + p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_1 + hf(x_1,u_1)) - p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)\psi(x_1 + hf(x_1,u_1))| \\ + |q(x_1,u_1,h,\varkappa) - q(x_2,u_1,h,\varkappa)| \\ \leqslant |p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)||\psi(x_1 + hf(x_1,u_1)) - \psi(x_2 + hf(x_2,u_1))| \\ + |p(x_1,u_1,h,\lambda,\varkappa) - p(x_2,u_1,h,\lambda,\varkappa)||\psi(x_1 + hf(x_1,u_1))| + |q(x_1,u_1,h,\varkappa) - q(x_2,u_1,h,\varkappa)|. \end{gathered}$$

Оценим разность точек

$$\|x_1 + f(x_1,u_1)h - x_2 - f(x_2,u_1)h\| \leqslant \|x_1 - x_2\| + h\|f(x_1,u_1) - f(x_2,u_1)\|$$
$$\leqslant \|x_1 - x_2\| + hL\|x_1 - x_2\| \leqslant (1+hL)\|x_1 - x_2\|. \tag{2.20}$$

Для удобства дальнейших выкладок введем функцию

$$\Omega(x_1,x_2) = \frac{|\psi(x_1) - \psi(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma}.$$

Используя (2.6), (2.11), (2.14), (2.19) и (2.20), имеем

$$|T\psi(x_1) - T\psi(x_2)|$$
$$\leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)\Omega(x_1 + hf(x_1,u_1), x_2 + hf(x_2,u_1))\|x_1 + hf(x_1,u_1) - x_2 - hf(x_2,u_1)\|^\gamma$$
$$+ hC'_pK\|x_1 - x_2\|^\gamma + hC'_q\|x_1 - x_2\|^\gamma$$
$$\leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)(1+hL)^\gamma\Omega(x_1 + hf(x_1,u_1), x_2 + hf(x_2,u_1))\|x_1 - x_2\|^\gamma$$
$$+ hC'_pK\|x_1 - x_2\|^\gamma + hC'_q\|x_1 - x_2\|^\gamma.$$

Очевидно, что

$$\frac{|T\psi(x_1) - T\psi(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)(1+hL)^\gamma\Omega(x_1 + hf(x_1,u_1), x_2 + hf(x_2,u_1)) + hC'_pK + hC'_q.$$

Так как $\lambda > \varkappa + \gamma L$, то число $D = \dfrac{hC'_pK + hC'_q}{1 - (1 - \lambda h + \varkappa h)(1+hL)^\gamma}$ положительно, и легко увидеть, что $\dfrac{|T\psi(x_1) - T\psi(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqslant D$ для любого $|\psi| \leqslant D$. Поэтому последовательность $T^n\psi_0$, начинающаяся с любого $|\psi_0| \leqslant D$, сходится к единственному решению ψ^h уравнения (2.10). Так как D убывает с ростом h, то выполняется оценка

$$\frac{|\psi^h(x_1) - \psi^h(x_2)|}{\|x_1 - x_2\|^\gamma} \leqslant \lim_{h\to 0}\frac{hC'_pK + hC'_q}{1 - (1 - \lambda h + \varkappa h)(1+hL)^\gamma} = \frac{C'_pK + C'_q}{\lambda - \varkappa - \gamma L}.$$

Неравенство (2.16) доказано.

Теперь покажем, что верно неравенство (2.17). Из (1.6) и (2.18) следует, что

$$|T\psi^h(x)| \leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)|\psi^h(x)| + \frac{h|g(x,u)|}{\varkappa(1+\|x\|)} \leqslant (1 - \lambda h + \varkappa h)|\psi^h(x)| + \frac{h\varkappa(1+\|x\|)}{\varkappa(1+\|x\|)}.$$

Так как оператор T сжимающий, то $(\lambda - \varkappa)h|\psi^h(x)| \leqslant h$. Переходя к пределу при $h \to 0$, получим $(\lambda - \varkappa)|\psi^h(x)| \leqslant 1$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *На любом ограниченном шаре из* $\mathbb{R}^{n+2}$ *решения* ψ^h *уравнений дискретной аппроксимации* (2.10) *сходятся равномерно к функции цены* ψ *задачи* (1.1) *при* $h \to 0$.

Доказательство. По теореме Асколи — Арцела и оценке (2.16) в условии теоремы 1 существуют подпоследовательность $h_p \to 0$ при $p \to +\infty$ и функция ψ такие, что $\psi^{h_p} \rightrightarrows \psi$ на любом ограниченном шаре из $\mathbb{R}^{n+2}$ при $p \to +\infty$.

Покажем, что ψ — вязкостное решение уравнения (1.11). Предположим, что существует замкнутый шар E с центром в точке x_0 такой, что

$$(\psi - \omega)(x_0) > (\psi - \omega)(x) \quad \forall x \in E.$$

Пусть в точке $x_0^{h_p}$ функция $\psi^{h_p} - \omega$ достигает максимальное значение в шаре E. Следовательно, последовательность $x_0^{h_p}$ сходится к x_0 при $p \to +\infty$. Так как функция f удовлетворяет условию Липшица (1.3), то верно соотношение $x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p \in E$ при достаточно больших p. Поэтому

$$\psi^{h_p}(x_0^{h_p}) - \omega^{h_p}(x_0^{h_p}) \geqslant \psi^{h_p}(x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p) - \omega^{h_p}(x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p).$$

Это дает соотношение

$$0 = \min_u \Big\{ \Big(1 - \lambda h_p + \varkappa h_p \Big\langle r'_\varepsilon(x_0^{h_p}), \frac{f(x_0^{h_p})}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x_0^{h_p}))} \Big\rangle \Big) \psi^{h_p}(x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p)$$

$$- \psi^{h_p}(x_0^{h_p}) + \frac{h_p g(x_0^{h_p})}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x_0^{h_p}))} \Big\} \leqslant \min_u \Big\{ \omega(x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p) - \omega(x_0^{h_p})$$

$$+ \Big(- \lambda h_p + \varkappa h_p \Big\langle r'_\varepsilon(x_0^{h_p}), \frac{f(x_0^{h_p})}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x_0^{h_p}))} \Big\rangle \Big) \psi^{h_p}(x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p) + \frac{h_p g(x_0^{h_p})}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x_0^{h_p}))} \Big\}$$

$$\leqslant \min_u \Big\{ h_p^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x_0^{h_p} + \beta_p f(x_0^{h_p})h_p) f_i(x_0^{h_p}) h_p$$

$$+ \Big(- \lambda + \varkappa \Big\langle r'_\varepsilon(x_0^{h_p}), \frac{f(x_0^{h_p})}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x_0^{h_p}))} \Big\rangle \Big) \psi^{h_p}(x_0^{h_p} + f(x_0^{h_p})h_p) + \frac{g(x_0^{h_p})}{\varkappa(1 + r_\varepsilon(x_0^{h_p}))} \Big\},$$

где $\beta_p \in [0, 1]$. Переходя к пределу при $p \to +\infty$, получаем второе неравенство определения вязкостного решения (2.9).

Аналогично можно показать справедливость первого неравенства (2.8). Так как вязкостное решение единственно [2], получаем, что функции цены ψ^h сходятся к ψ при $h \to 0$.

Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bertsekas D. P.** Dynamic programming and optimal control. Vol. I. Belmont: Athena Scientific, 2017. 576 p. ISBN: 1-886529-26-4.
2. **Crandall M. G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8.
3. **Dolcetta I. C.** On a discrete approximation of the Hamilton — Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optimiz. 1983. Vol. 10, no. 4. P. 367–377. doi: 10.1007/BF01448394.
4. **Dolcetta I. C., Ishii H.** Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11, no. 2. P. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176.
5. **Адиатулина Р. А., Тарасьев А. М.** Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 531–537.
6. **Багно А. Л., Тарасьев А. М.** Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 3–14. doi: 10.20537/vm160101.
7. **Багно А. Л., Тарасьев А. М.** Свойства стабильности функции цены в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 43–56. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56.
8. **Красовский А. А. Тарасьев А. М.** Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 38–52.
9. **Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А.** Эконометрика. Начальный курс: учеб. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2004. 576 с. ISBN: 5-7749-0055-X.

10. **Субботин А. И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
11. **Субботин А. И., Тарасьев А. М.** Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.
12. **Султанова Р. А.** Минимаксные решения уравнений в частных производных: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького. Екатеринбург, 1995. 192 с.

Багно Александр Леонидович
аспирант
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Поступила 1.12.2017

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: tam@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bertsekas D.P. *Dynamic programming and optimal control. Vol. I.* Belmont: Athena Scientific, 2017, 576 p. ISBN: 1-886529-26-4 .
2. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
3. Dolcetta I.C. On a discrete approximation of the Hamilton–Jacobi equation of dynamic programming. *Appl. Math. Optimiz.*, 1983, vol. 10, no. 4, pp. 367–377. doi: 10.1007/BF01448394 .
4. Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optimiz.*, 1984, vol. 11, no. 2, pp. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176 .
5. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M.. A differential game of unlimited duration. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 415–420. doi: 10.1016/0021-8928(87)90077-3 .
6. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3–14 (in Russian). doi: 10.20537/vm160101 .
7. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Stability properties of the value function in an infinite horizon optimal control problem. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 43–56. (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56 .
8. Krasovskii A.A., Tarasyev A.M. Dynamic optimization of investments in the economic growth models. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 10, pp. 1765–1777. doi: 10.1134/S0005117907100050 .
9. Magnus J.R., Katyshev P.K., Peresetsky A.A. *Econometrika. Nachalnyj kurs.* [Econometrics: A First Course]. Moscow, Delo Publ., 2004, 576 p. ISBN: 5-7749-0055-X .
10. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona – Yakobi.* (Minimax Inequalities and Hamilton – Jacobi Equations). Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p.
11. Subbotin A.I., Tarasyev A.M.. Conjugate derivatives of the value function of a differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1985, no. 32, pp. 162–166.
12. Sultanova R.A. *Minimaksnye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh.* [Minimax solutions of partial differential equations]. Can. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Ekaterinburg, 1995, 192 p.

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 1, 2017.

Aleksandr Leonidovich Bagno, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: bagno.alexander@gmail.com .

Aleksandr MIkhailovich Taras'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: tam@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 519.62

ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ В $\mathbb{R}^2$ В УСЛОВИЯХ НАБЛЮДЕНИЯ[1]

В. И. Бердышев, В. Б. Костоусов, А. А. Попов

Исследуется задача формирования траектории в заданном “коридоре” из $\mathbb{R}^2$, минимум расстояния которой от наблюдателей максимален. Каждый наблюдатель расположен вне коридора и имеет открытый выпуклый конус наблюдения, который перекрывает коридор. Положение наблюдателей и конусов фиксировано. Расстояние до движущегося по траектории объекта наблюдатель измеряет, когда объект находится внутри его конуса. В статье дано описание “оптимального коридора” — множества всех оптимальных траекторий с заданными начальной и конечной точками. Аналогичная задача решена в случае, когда движущийся объект — телесный — является замкнутым кругом. Для практических расчетов в работе предлагаются алгоритмы построения оптимального коридора и кратчайшей оптимальной траектории в дискретной постановке для телесного объекта. Исходные непрерывные условия задачи, такие как границы коридора и конусы наблюдения, проектируются на дискретную регулярную сетку, и на ней строятся дискретная реализация оптимального коридора, его границы в виде 8-связных последовательностей узлов сетки, а также с помощью алгоритма Дейкстры находится кратчайшая оптимальная траектория телесного объекта.

Ключевые слова: движущийся объект, наблюдатель, оптимальная траектория, кратчайший путь

V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov, A. A. Popov. Optimal trajectory in $\mathbb{R}^2$ under observation.

We study the problem of forming a trajectory in a given “corridor” from $\mathbb{R}^2$ such that the minimum distance from this trajectory to observers is maximal. Each observer is located outside the corridor and has an open convex observation cone overlapping the corridor. The positions of the observers and the cones are fixed. An observer can measure the distance to an object moving along the trajectory when the object is inside its cone. We describe an “optimal corridor,” i.e., the set of all optimal trajectories with given initial and terminal points. A similar problem is solved in the case when the moving object is a solid body, more exactly, a disk. For practical calculations, we propose algorithms that construct an optimal corridor and a shortest optimal trajectory for a solid object in a discrete statement. The initial continuous conditions of the problem, such as the boundaries of the corridor and the observation cones, are projected onto a discrete regular grid, and a discrete realization of the optimal corridor and its boundaries are constructed on the grid in the form of 8-connected sequences of grid nodes. The shortest optimal trajectory of the solid object is found using Dijkstra’s algorithm.

Keywords: moving object, observer, optimal trajectory, shortest path.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-40-52

Введение

В прикладных задачах, связанных с построением траекторий движения автономных движущихся объектов, иногда возникают требования максимальной удаленности траектории от нежелательных неподвижных объектов-наблюдателей. Нередко такие объекты имеют средство наблюдения, позволяющее фиксировать движущиеся объекты в некотором конусе наблюдения, а за пределами этого конуса наблюдатель объекта не видит.

Подобные ситуации приводят к постановкам задач построения оптимальных траекторий (см. [1;2]). В продолжение этих исследований в данной работе рассматривается задача формирования траектории, максимизирующей минимум расстояния от наблюдателей в их поле зрения. Для точечного объекта строится оптимальный коридор Y^* — такое связное множество, что любая непрерывная траектория, проходящая в этом коридоре и соединяющая заданные

[1]Результаты первого раздела установлены В. И. Бердышевым за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702). Остальные результаты получены В. Б. Костоусовым и А. А. Поповым при финансовой поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 18-1-1-14).

начальную и конечную точки, является оптимальной. Аналогичная задача решается и для случая, когда движущийся объект — телесный, а именно представляет собой круг.

Для практических расчетов в работе предлагаются алгоритмы построения оптимального коридора и кратчайшей оптимальной траектории в дискретной постановке для телесного объекта. Исходные непрерывные условия задачи, такие как границы ограничивающего коридора и конусов наблюдения, проектируются на дискретную регулярную сетку, и на ней строятся дискретная реализация оптимального коридора, его границ, а также находится с помощью алгоритма Дейкстры кратчайшая оптимальная траектория телесного объекта.

Пусть Y — замкнутая окрестность (коридор) некоторой траектории $\mathcal{T}$, соединяющей фиксированные точки $t_* \neq t^*$. При этом граница ∂Y коридора гомеоморфна окружности.

Совокупность таких траекторий, принадлежащих Y, обозначим через $\mathbb{T}$. Пусть задан набор $\mathbb{S} = \{S\}$ наблюдателей $S \notin Y$, каждый из которых имеет фиксированный выпуклый открытый конус наблюдения $K(S)$ с вершиной S такой, что $K(S) \cap \mathcal{T} \neq \varnothing$ для любой траектории $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Далее обозначим $K_Y(S) = K(S) \cap Y$ и используем уклонение

$$d(S,x) = \begin{cases} \|x - S\| & \text{при } \ x \in K(S), \\ +\infty & \text{при } \ x \notin K(S). \end{cases}$$

Рассматривается задача поиска величины

$$M = M(\mathbb{S}) = \sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min\{d(S,t)\colon t \in \mathcal{T}, \ S \in \mathbb{S}\} \tag{1}$$

и траекторий, реализующих указанную верхнюю грань.

В данной работе представлено описание множества всех оптимальных траекторий движения точечного (разд. 1) и телесного (разд. 2) объектов, приведен алгоритм поиска левой и правой границ этого множества, а также кратчайшей оптимальной траектории (разд. 3).

1. Траектория точечного объекта

Обозначим через $\partial_l Y$, $\partial_r Y$ левую и правую границы коридора Y по отношению к движущейся точке от t_* к t^* по кратчайшей траектории из $\mathbb{T}$. Для однозначности разбиения границы коридора Y на правую и левую части и без ограничения общности можно считать, что точки t_* и t^* принадлежат границе ∂Y. Будем говорить, что наблюдатель S находится слева (справа) от коридора Y, если уклонение S от $\partial_l Y$ (от $\partial_r Y$) меньше, чем уклонение от $\partial_r Y$ (от $\partial_l Y$). В общем случае множество наблюдателей $\mathbb{S}$ является объединением множеств $\mathbb{S}^* = \{S^i\}_1^{n^*}$, $\mathbb{S}_* = \{S_j\}_1^{n_*}$ наблюдателей, расположенных соответственно слева и справа от коридора Y. В дальнейшем потребуются следующие обозначения:

$$m(S^i) = \min\{d(S^i, x): \ x \in \partial_r Y\} \quad \text{и} \quad m(S_j) = \min\{d(S_j, x)\colon x \in \partial_l Y\},$$

$k(S)$ — множество точек из ∂Y, доставляющих указанный минимум. Пусть $m > 0$,

$$K(S,m) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K(S)\colon \|S - x\| < m\}.$$

Это множество открыто. Для пары наблюдателей S_1, S_2 таких, что $\overline{K}_Y(S_1) \cap \overline{K}_Y(S_2) \neq \varnothing$, обозначим

$$m(S_1,S_2) = \inf\big\{m : \overline{K}(S_1,m) \cap \overline{K}(S_2,m) \neq \varnothing\big\} = \sup\big\{m : \overline{K}(S_1,m) \cap \overline{K}(S_2,m) = \varnothing\big\}, \tag{2}$$

где $\overline{K}$ — замыкание множества K. Отметим, что

$$m(S_1,S_2) = \min_{x \in \overline{K}_Y(S_1) \cap \overline{K}_Y(S_2)} \max\big\{d(S_1,x), d(S_2,x)\big\}.$$

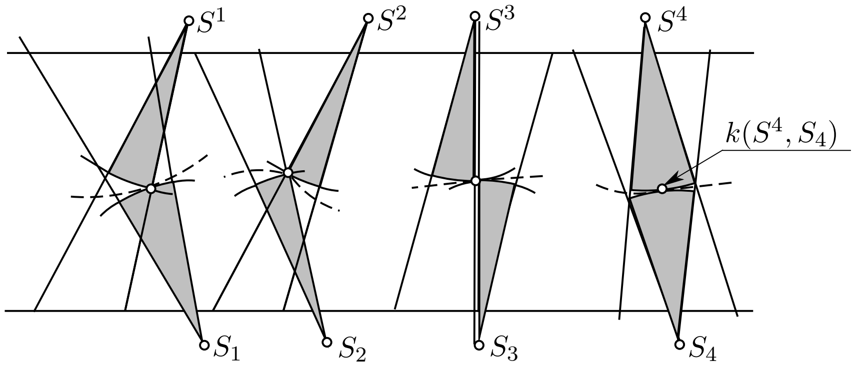


Рис. 1

Примем

$$k = k(S^i, S_j) = \overline{K}(S^i, m) \cap \overline{K}(S_j, m), \tag{3}$$

где $m = m(S^i, S_j)$ (см. (2)). Множество k является одноточечным. Возможные относительные положения усеченных конусов $K(S, m)$ показаны на на рис. 1, на котором также отмечены точки $k(S^i, S_j)$ касания конусов и штриховыми линиями обозначены участки оптимальных траекторий, проходящих через эти точки (подробности см. ниже). Множество $k(S)$ может быть многоточечным.

В данном разделе вычисляется величина $M(S)$ и указывается множество всех оптимальных траекторий задачи (1). Докажем равенство

$$M(\mathbb{S}) = \min\big\{m(S),\ m(S^i, S_j)\colon S \in \mathbb{S},\ S^i \in \mathbb{S}^*,\ S_j \in \mathbb{S}_*,\ \overline{K}_Y(S^i) \cap \overline{K}_Y(S_j) \neq \varnothing\big\}. \tag{4}$$

Для $S \in \mathbb{S}$ определим левую $\partial_l K(S)$ и правую $\partial_r K(S)$ границы множества $K_Y(S)$ следующим образом: для любой $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ точка, движущаяся от t_* к t^*, сперва пересекает левую границу и при выходе из $K_Y(S)$ — правую. Рассмотрим сначала случай двух "противоположных" наблюдателей S^1, S_1. Равенство (4) имеет вид

$$M(\mathbb{S}) = \min\big\{m(S^1),\ m(S_1),\ m(S^1, S_1)\big\}. \tag{5}$$

Возможные расположения усеченных конусов $K(S, m)$ изображены на рис. 1.

Пусть минимум в (5) достигается на $m(S^1)$ или на $m(S_1)$. На рис. 2 показана ситуация, когда минимум достигается на $m(S_1)$.

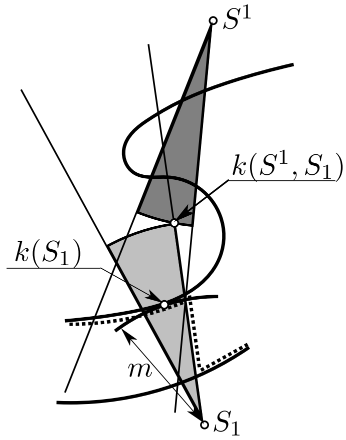


Рис. 2

Тогда оптимальные траектории будут проходить по точкам множества $K(S^1)$ правой границы $\partial_r Y$ или (как показано на рис. 2) по точкам множества $K(S_1)$ левой границы $\partial_l Y$, соответственно. При этом будет обеспечиваться максимум минимального уклонения траектории от наблюдателей S^1, S_1. Значит, в рассматриваемом случае утверждение (5) справедливо.

Теперь рассмотрим случай, когда минимум (5) достигается на $m(S^1, S_1)$. Ясно, что

$$K(S^1, m) \cap K(S_1, m) = \varnothing,$$

где $m = m(S^1, S_1)$. При этом $k \in Y$, поскольку иначе минимум в (5) достигался бы на $m(S^1)$ или на $m(S_1)$. Следовательно (см. рис. 1), любая оптимальная траектория $\mathcal{T}$ содержит точку k, пересекает конусы $K(S^1)$, $K(S_1)$, но не пересекается с $K(S^1, m)$, $K(S_1, m)$ и, значит,

$$\|S^1 - k\| = \|S_1 - k\| = m(S^1, S_1).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае равенство (4) справедливо.

Рассмотрим случай, когда $\mathbb{S}^* = \{S^1\}$ — одноточечное множество,

$$\mathbb{S}_* = \{S_j\}_1^{n_*},\ n_* > 1,\ \mathbb{S} = \mathbb{S}^* \cup \mathbb{S}_*, K_Y(S^1) \cap K_Y(S_j) \neq \varnothing \quad (j = 1, \dots, n_*). \tag{6}$$

Пусть

$$m = \min\{m(S^1, S_j), m(S^1), m(S_j), j = 1, \dots, n_*\}, \quad K = K(S^1, m). \tag{7}$$

Рассмотрим “крайнюю левую” траекторию $\mathcal{T}^*$, соединяющую точки t_*, t^*, проходящую по той части границы множества Y^*, которая содержит кривую $(\partial K) \cap Y$. Эта траектория составлена из частей

$$(\partial K) \cap Y, \quad (\partial Y_l) \backslash K$$

и является оптимальной. В самом деле, в случае достижения минимума в (7) на некотором $m(S^1, S_{j^*})$ для указанного m имеем (см. рис. 3)

$$d(S^1, \mathcal{T}^*) = m,$$

$$K(S^1, m) \subset K(S^1, m(S^1, S_j)),$$

$$K(S^1, m(S^1, S_j)) \cap K(S_j, m(S^1, S_j)) = \varnothing,$$

следовательно, $d(S_j, \mathcal{T}) \geq m$ $(j = 1, \dots, n_*)$, а для номера $j^* \in \{1, \dots, n_*\}$, реализующего минимум (7), будет

$$d(S_{j^*}, \mathcal{T}^*) = m = M(\mathbb{S}).$$

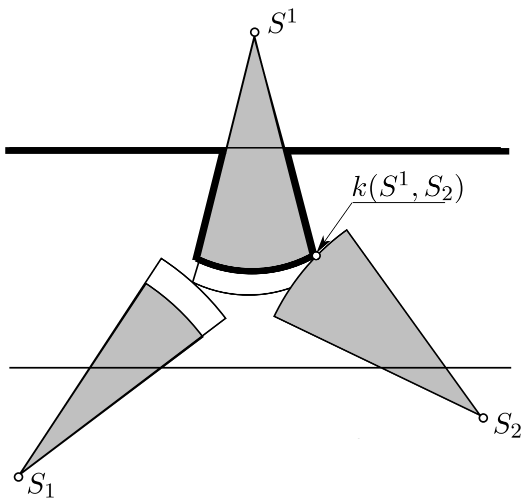


Рис. 3

Пусть минимум в (7) достигается на $m(S^1)$ или на некотором $m(S_j)$. Тогда траектория $\mathcal{T}^*$ будет проходить по точкам множества $K(S^1)$ правой границы $\partial_r Y$ или по точкам множества $K(S_j)$ левой границы $\partial_l Y$ соответственно. При этом будет обеспечиваться максимум минимального уклонения траектории от наблюдателей S^1, S_j. Уклонение траектории $\mathcal{T}^*$ от других наблюдателей будет не меньше, чем m. Итак, в случае (6) построена оптимальная траектория и установлено равенство (4).

Рассмотрим общий случай

$$\mathbb{S}^* = \{S^i,\ i = 1,\dots,n^*\},\quad \mathbb{S}_* = \{S_j\colon j = 1,\dots,n_*\},\quad n^* \geq 1,\quad n_* \geq 1,\quad \mathbb{S} = \mathbb{S}^* \cup \mathbb{S}_*.$$

Пусть $Z \in \mathbb{S}^*$ — максимальная по включению последовательность наблюдателей S^i такая, что при

$$m = \min\{m(S^i, S_j),\ m(S^i),\ m(S_j),\ K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \varnothing\colon i = 1,\dots,n^*,\ j = 1,\dots,n_*\}$$

множество

$$\mathcal{K}_Z = \bigcup_{S \in Z} K(S, m) \tag{8}$$

является связным. Построим траекторию $\mathcal{T}^*$ следующим образом. Включим в $\mathcal{T}^*$ для выделенного множества Z связный участок $\mathcal{T}_Z$ границы $(\partial\mathcal{K}_Z) \cap Y$, который пересекается с объединением дуг (рис. 4)

$$\{x \in K(S)\colon \|x - S\| = m\},\quad S \in Z.$$

В окрестности концевых точек построенного участка траекторию продолжим по границе $\partial_l Y$. Для каждого наблюдателя $S^i \in Z$ и для каждого номера $j = j(i)$ такого, что $K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \varnothing$, будем иметь

$$K(S^i, m) \subset K(S^i, m(S^i, S_j)),$$

$$K(S^i, m(S^i, S_j)) \cap K(S_j, m(S^i, S_j)) = \varnothing,$$

и справедливо неравенство (см. результат в случае (6))

$$d(S_j, \mathcal{T}) \geq \min\{m(S^i, S_j), m(S^i), m(S_j)\}.$$

Неравенство $d(S^i, \mathcal{T}_Z) \geq m$ очевидно. В целом оптимальная траектория $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$ составлена из частей $\mathcal{T}_Z$, $Z \subset \mathbb{S}^*$, построенных указанным способом по максимальным связным множествам (8). Части $\mathcal{T}_Z$ попарно не пересекаются, их концевые точки лежат на $\partial_l Y$ и соединяются фрагментами границы $\partial_l Y$.

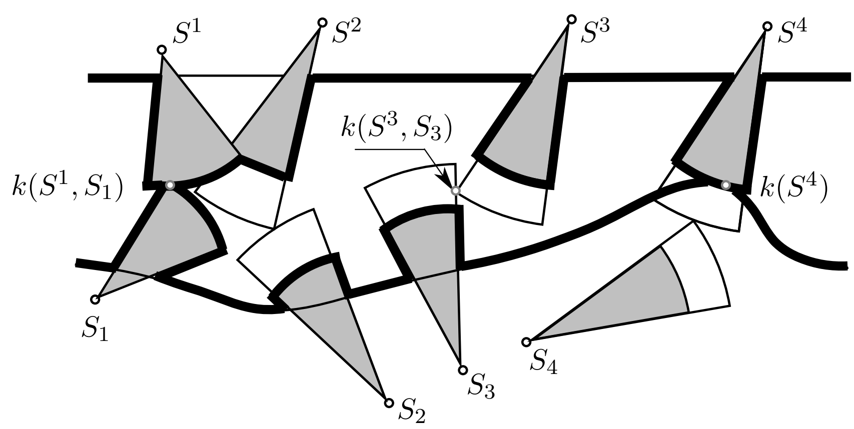


Рис. 4

Аналогично строится оптимальная траектория $\mathcal{T} = \mathcal{T}_*$ по максимальным наборам $Z \subset \mathbb{S}_*$, для каждого из которых множество $\bigcup_Z K(S, m)$ является связным. Любая траектория, расположенная одновременно правее $\mathcal{T}^*$ и левее $\mathcal{T}_*$, является оптимальной, и все они проходят через точки $k(S)$, $k(S^i, S_j)$ для тех наблюдателей S и пар наблюдателей $\{S^i, S_j\}$, которые реализуют минимум (4).

Доказана

Теорема 1. *Справедливо равенство* (4). *Траектория* $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ *является оптимальной тогда и только тогда, когда она расположена между* $\mathcal{T}_*$ *и* $\mathcal{T}^*$.

2. Траектория телесного объекта

В предыдущем разделе рассмотрен случай, когда объект представляет собой точку. Здесь рассматривается случай, когда объект является телесным и имеет вид круга радиуса h.

Центр объекта движется внутри коридора — замкнутого множества Y_h:

$$Y_h = Y \setminus \bigcup_{x \in \partial Y} V_h(x),$$

где $V_h(x)$ — открытый шар радиуса h с центром в x.

Рассмотрим подмножество $\mathbb{T}_h$ непрерывных траекторий $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, которые принадлежат коридору Y_h и соединяют точки t_* и t^*:

$$\mathcal{T} = \{t(\tau) \colon 0 \le \tau \le 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\} \subset Y_h.$$

Для простоты аналогично предыдущему рассмотрению считаем, что точки t_* и t^* лежат на границе ∂Y_h. В этом случае граница ∂Y_h разбивается точками t_* и t^* на две части, $\partial_l Y_h$, $\partial_r Y_h$, — левую и правую границы коридора Y_h по отношению к движущейся точке от t_* к t^* по кратчайшей траектории из $\mathbb{T}_h$.

Вместо уклонения $d(S, x)$ рассмотрим уклонение $d_h(S, x)$:

$$d_h(S, x) = \inf\{d(S, t) \colon t \in V_h(x)\}.$$

Далее для произвольного подмножества A из $\mathbb{R}^2$ будем обозначать через A^h его h-окрестность:

$$A^h = \bigcup_{x \in A} V_h(x).$$

Введем в рассмотрение h-окрестность $K^h(S)$ конуса наблюдения $K(S)$.

Задача (1) для телесного объекта формулируется следующим образом. Требуется найти траектории телесного объекта с максимально возможным уклонением от наблюдателей, т. е. траектории, реализующие верхнюю грань:

$$M^h = M^h(\mathbb{S}) = \sup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}_h} \min\{d_h(S, t) \colon t \in \mathcal{T},\ S \in \mathbb{S}\}. \tag{9}$$

Используем введенные выше обозначения $\mathbb{S}^* = \{S^i\}_1^{n^*}$ и $\mathbb{S}_* = \{S_j\}_1^{n_*}$ для множеств наблюдателей, расположенных соответственно слева и справа от коридора Y_h.

Рассмотрим величину $m^h(S)$ минимального отклонения наблюдателя S от границы:

$$m^h(S) = \begin{cases} \min\{d_h(S, x) \colon x \in \partial_r Y_h\}, & S \in \mathbb{S}^*, \\ \min\{d_h(S, x) \colon x \in \partial_l Y_h\}, & S \in \mathbb{S}_*. \end{cases}$$

Пусть $k^h(S)$ — множество точек из ∂Y_h, доставляющих указанный минимум.

Для $m > 0$ рассмотрим открытое множество $K^h(S,m)$, которое будем называть m-усечением $K^h(S)$:
$$K^h(S,m) = \{x\colon d_h(S,x) < m\}.$$

Для пары наблюдателей $S_1,\ S_2$ таких, что $\overline{K^h}(S_1) \cap \overline{K^h}(S_2) \neq \varnothing$, обозначим минимальную величину m, для которой пересечение m-усечений конусов наблюдения не пусто:
$$m^h(S_1,S_2) = \inf\bigl\{m : \overline{K^h}(S_1,m) \cap \overline{K^h}(S_2,m) \neq \varnothing\bigr\}$$
$$= \sup\bigl\{m : \overline{K^h}(S_1,m) \cap \overline{K^h}(S_2,m) = \varnothing\bigr\}. \tag{10}$$
Обозначим через $k^h = k^h(S^i,S_j)$ общую точку замыканий m-усечений конусов наблюдения:
$$k^h = k^h(S^i,S_j) = \overline{K^h}(S^i, m^h(S^i,S_j)) \cap \overline{K^h}(S_j, m^h(S^i,S_j)). \tag{11}$$
Множество $k^h(S^i,S_j)$ является одноточечным, поскольку образуется в результате касания строго выпуклых участков границ множеств $\overline{K^h}(S^i, m^h(S^i,S_j))$ и $\overline{K^h}(S_j, m^h(S^i,S_j))$, тогда как множество $k^h(S)$ может быть многоточечным.

Обозначим через Y_h^* связную компоненту множества $Y_h \setminus \bigcup\limits_{S\in\mathbb{S}^*} K^h(S,M^h)$, которая содержит точки t_* и t^*. Аналогично Y_{h*} обозначает связную компоненту множества $Y_h \setminus \bigcup\limits_{S\in\mathbb{S}_*} K^h(S,M^h)$, содержащую те же точки t_* и t^*. В теореме 2 описывается оптимальный коридор — множество Y_{opt}^h, обладающее свойством: любая траектория из $\mathbb{T}_h$, лежащая в этом коридоре, является оптимальной в смысле задачи (9).

Теорема 2. *Для верхней грани уклонения* (9) *справедливо равенство*
$$M^h = \min\Bigl\{m^h(S),\ m^h(S^i,S_j) \colon S\in\mathbb{S},\ S^i\in\mathbb{S}^*,\ S_j\in\mathbb{S}_*,\ \overline{K_Y^h}(S^i)\cap\overline{K_Y^h}(S_j)\neq\varnothing\Bigr\}. \tag{12}$$
Любая траектория из $\mathbb{T}_h$*, лежащая в множестве*
$$Y_{opt}^h = Y_h \setminus \bigcup_{S\in\mathbb{S}} K^h(S,M^h),$$
является оптимальной.

Левая $\mathcal{T}^{h*}$ *и правая* $\mathcal{T}_*^h$ *границы множества* Y_{opt}^h *являются оптимальными траекториями и определяются равенствами*
$$\mathcal{T}^{h*} = \partial(Y_h^*) \setminus \partial_r Y_h, \quad \mathcal{T}_*^h = \partial(Y_{h*}) \setminus \partial_l Y_h.$$
Любая оптимальная траектория проходит через точки $k^h(S),\ k^h(S^i,S_j)$ *для тех наблюдателей* S *и пар наблюдателей* $\{S^i,S_j\}$*, для которых реализуется минимум* (12).

Доказательство теоремы следует из того факта, что задача (9) оптимального прохождения телесного объекта радиуса h по коридору Y в условиях наблюдения посредством конусов $K_Y(S), S\in\mathbb{S}$ эквивалентна задаче (1) прохождения точечного объекта по h-*суженному* коридору Y_h в условиях наблюдения посредством h-*расширенных* конусов $K_Y^h(S)$. Рассуждения доказательства теоремы 1 справедливы в данном случае, если вместо коридора Y рассмотреть его сужение Y_h, класс траекторий $\mathbb{T}$ заменить на его подкласс $\mathbb{T}_h$, вместо уклонения $d(S,x)$ точки x от наблюдателя S в конусе наблюдения $K(S)$ использовать уклонение $d_h(S,x)$ от наблюдателя в h-окрестности $K^h(S)$. При этом оптимальное уклонение M заменяется на M^h, множество точек касания $k(S)$ границ коридора переходит в множество $k^h(S)$, усеченные конусы $K(S,m)$ заменяются на m-усечения $K^h(S,m)$, точки касания $k(S^i,S_j)$ усеченных конусов заменяются на точки $k^h(S^i,S_j)$. □

3. Дискретная реализация оптимального коридора и кратчайший путь

В теоремах 1,2 описана структура оптимального коридора путем определения левой и правой граничных оптимальных траекторий в непрерывном случае. В данном разделе для дискретного случая представлен алгоритм построения оптимального коридора и граничных траекторий. Также приведен алгоритм построения кратчайшей оптимальной траектории.

Обозначим через $C = C_x \times C_y$ регулярную прямоугольную сетку точек $\{t_k = (x_k, y_k)\}$ с шагом $\delta > 0$, $\delta \ll h$, покрывающую коридор Y. Траектории, которые формируются алгоритмами данного раздела, будут представлять собой ломаные линии с вершинами, лежащими в узлах этой сетки. Оптимальный коридор будет представлен 8-связным (см. ниже) подмножеством узлов сетки C, принадлежащим дополнению описываемой ниже "запретной" области $\widehat{C}$.

Понятия 8-связного и 4-связного множеств были введены (см. [3]) в компьютерной графике для алгоритмов, формирующих дискретные (растровые) компьютерные изображения. Связное множество на двумерной прямоугольной регулярной сетке с шагом δ — это множество, для любой пары элементов которого (a и b) существует последовательность $P = (p_0 = a, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n = b)$ элементов множества такая, что для любых двух соседних элементов этой последовательности p_i, p_{i+1} выполняются условия для 8-связного множества

$$|x(p_i) - x(p_{i+1})| \le \delta \quad \text{и} \quad |y(p_i) - y(p_{i+1})| \le \delta,$$

а также для 4-связного множества

$$|x(p_i) - x(p_{i+1})| + |y(p_i) - y(p_{i+1})| \le \delta.$$

Таким образом, 4-связная окрестность точки состоит из четырех соседей: слева, справа, сверху и снизу, а в 8-связную окрестность к этим соседям добавляются 4 диагональных узла.

Пусть граница ∂Y задана в виде Γ — простой ломаной линии без самопересечений, $\{p_i(\Gamma) = (x_i(\Gamma), y_i(\Gamma)) \colon i = 0, \ldots, N_\Gamma - 1\}$ — последовательность концевых точек отрезков этой линии.

Тогда размеры N_x, N_y сетки $C = C_x \times C_y$ вычисляются следующим образом ($\lceil z \rceil$ — минимальное целое, не меньшее, чем z):

$$N_x = 1 + \left\lceil \frac{\max\{x_i(\Gamma)\} - \min\{x_i(\Gamma)\}}{\delta} \right\rceil, \qquad N_y = 1 + \left\lceil \frac{\max\{y_i(\Gamma)\} - \min\{y_i(\Gamma)\}}{\delta} \right\rceil.$$

Множества C_x и C_y, образующие сетку C, определяются равенствами

$$C_x = \{x_k \colon x_k = k\delta + \min\{x_i(\Gamma)\},\ k = 0, \ldots, N_x - 1\},$$

$$C_y = \{y_k \colon y_k = k\delta + \min\{y_i(\Gamma)\},\ k = 0, \ldots, N_y - 1\}.$$

Далее построим множество $\widehat{C}$ "запретных" узлов.

Для того чтобы дискретная реализация оптимальной траектории не пересекала запретные области в случае касания, используем параметр $\varepsilon \in (\delta; 2\delta)$, который позволит уменьшить запретные области для обеспечения зазора и прохождения дискретной траектории между ними.

Обозначим через $L_i(\Gamma)$ i-й отрезок граничной ломаной линии Γ:

$$L_i(\Gamma) = \begin{cases} \{t \colon t = p_{N_\Gamma - 1}(\Gamma)\, k + p_0(\Gamma) \cdot (1 - k), k \in [0; 1]\}, & \text{если } i = 0, \\ \{t \colon t = p_{i-1}(\Gamma)\, k + p_i(\Gamma) \cdot (1 - k), k \in [0; 1]\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $r(t, X)$ — минимальное евклидово расстояние от точки $t \in \mathbb{R}^2$ до точек множества $X \subset \mathbb{R}^2$: $r(t, X) = \inf_{x \in X} |t - x|$.

Обозначим через $\widehat{C}(L_i(\Gamma))$ множество узлов сетки, лежащих в окрестности радиуса $h - \varepsilon$ отрезка ломаной $L_i(\Gamma)$:

$$\widehat{C}(L_i(\Gamma)) = \{t \colon t \in C_x \times C_y, r(t, L_i(\Gamma)) < h - \varepsilon\}, \tag{13}$$

где величина ε введена выше.

Обозначим через $\widehat{C}(S)$ множество узлов сетки, лежащих в окрестности радиуса $h-\varepsilon$ границы множества $K(S,M^h)$:

$$\widehat{C}(S)=\{t\colon t\in C_x\times C_y, r(t,\partial K(S,M^h))<h-\varepsilon\}. \tag{14}$$

Множество “запретных” узлов определим как объединение введенных выше множеств:

$$\widehat{C}=\bigcup_i \widehat{C}(L_i(\Gamma))\bigcup_{S\in\mathbb{S}}\widehat{C}(S).$$

Без ограничения общности можно считать, что множество $\widehat{C}$ является 4-связным. Иначе, можно расширить множество $\widehat{C}$ до 4-х связного путем дополнения 8-связных окрестностей 4-связными точками. Таким образом, любая точка множества $\widehat{C}$ будет иметь в своей 4-связной окрестности соседа из этого же множества.

Следующий ниже алгоритм построения оптимального коридора, используя известный в компьютерной графике метод “заливки” дискретной области (см., например, [3]), рекурсивно заполняет 8-связное подмножество множества $C\setminus\widehat{C}$, начиная с узла t_*.

Алгоритм 1 построения оптимального коридора

```
Поместить в стек элемент t*
Выполнять, пока стек не будет пуст:
    Взять элемент из стека
    Пометить элемент как принадлежащий оптимальному коридору
    Для каждого элемента из 8−связной окрестности текущего элемента:
        Если элемент не помечен и не является запретным:
            Поместить элемент в стек
```

Введем необходимые для описания алгоритма 2 обозначения:

$\overrightarrow{R}_8(p_c,p)$ ($\overleftarrow{R}_8(p_c,p)$) — функция 8-связного обхода точки p на один шаг по часовой (против часовой) стрелке вокруг в p_c в окрестности точки p_c (см. рис. 5);

$\overrightarrow{R}_4(p_c,p)$ ($\overleftarrow{R}_4(p_c,p)$) — функция 4-связного обхода точки p на один шаг по часовой (против часовой) стрелке вокруг в p_c в окрестности точки p_c (см. рис. 6).

Ниже в описании алгоритма символы R_8, R_4, AR_4 обозначают в случае построения левой границы: $R_8=\overleftarrow{R}_8$, $R_4=\overleftarrow{R}_4$, $AR_4=\overrightarrow{R}_4$; в случае построения правой границы: $R_8=\overrightarrow{R}_8$, $R_4=\overrightarrow{R}_4$, $AR_4=\overleftarrow{R}_4$.

Пусть (a_t,b_t), где $a_t\in C\setminus\widehat{C}$, $b_t\in\widehat{C}$, — пара соседних граничных узлов сетки C, с помощью которых алгоритм 2 будет строить границы оптимального коридора.

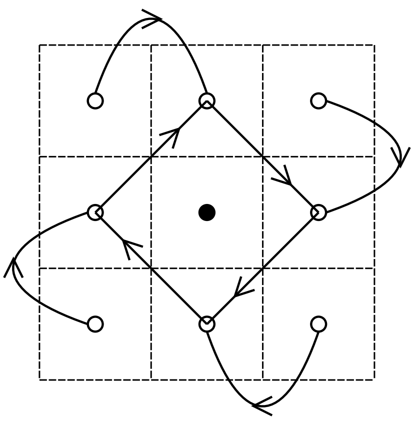


Рис. 5. Функция обхода $\overrightarrow{R}_8$.

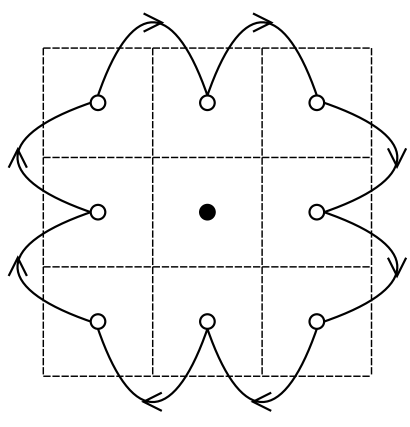


Рис. 6. Функция обхода $\overrightarrow{R}_4$.

Определим два множества: $N_* \subset \widehat{C}$ и $N^* \subset \widehat{C}$ — 4-связные подмножества 8-связных окрестностей не совпадающих точек t_* и t^*. Подмножество N_* будет определять допустимые начальные положения точек b_t в паре (a_t, b_t) при $a_t = t_*$. Подмножество N^* будет определять допустимые конечные положения точки b_t в паре (a_t, b_t) при $a_t = t^*$.

В нижеследующем описании присваивание значения B переменной A обозначим выражением $A := B$.

Алгоритм 2 построения границ оптимального коридора

Инициализация формирующей пары (a_t, b_t): $a_t := t_*$, $b_t :=$ любой элемент из N_*
Инициализация выходной последовательности $Result := \{a_t\}$
Внешний Цикл (движение точки b_t в запретной области):
    Внутренний Цикл (движение точки a_t в допустимой области):
        $next\_a_t := R_8(b_t, a_t)$
        Если $next\_a_t \in \widehat{C}$ ИЛИ $next\_a_t \notin C$, то: $next\_a_t := R_4(b_t, a_t)$
            Если $next\_a_t \in \widehat{C}$ ИЛИ $next\_a_t \notin C$, то:
                Выйти из Внутреннего Цикла
        $a_t := next\_a_t$
        В конец последовательности $Result$ добавить элемент a_t
        Если $a_t = t^*$ И $b_t \in N^*$, то:
            Цель достигнута – Завершить Алгоритм
        Если $a_t = t_*$ И $b_t \in N_*$, то:
            Цель не достигнута – Завершить Алгоритм с Ошибкой
    Конец Внутреннего Цикла
    $next\_b_t := AR_4(a_t, b_t)$
    Если $next\_b_t \in \widehat{C}$ ИЛИ $next\_b_t \notin C$, то: $b_t := next\_b_t$
Конец Внешнего Цикла

Точка $p \in C \setminus \widehat{C}$ является граничной, если ее 8-окрестность содержит точку множества $\widehat{C}$.

Множества N_* и N^* предназначены для обеспечения окончания прослеживания контура при построении границы алгоритмом 2. Здесь наряду с проверкой на совпадение текущей точки формируемого контура с конечной точкой t^* (в случае успеха) или начальной точкой t_* (в случае ошибки) производится дополнительная проверка $b_t \in N^*$ или $b_t \in N_*$ соответственно. Это связано с необходимостью различать направления прохода алгоритма через точки t_* и t^*.

Алгоритм 2 работает следующим образом.

В качестве начального значения для точки a_t берется точка t_*, которая должна принадлежать в допустимой области. В качестве начального значения для точки b_t берется произвольный узел — один из соседних к точке t_* узлов, находящихся в запретной области. Множество N_* состоит из всех узлов, находящихся в запретной области, являющихся соседними точке t_* и 4-связных по отношению к выбранному начальному значению b_t. Для одного выбранного начального значения b_t существует только одно множество N_*, но для разных начальных значений b_t могут быть различные множества N_*. Например, в случае расположения точки t_* в узком одноузловом коридоре множество N_* может лежать на одной из сторон коридора.

Работа алгоритма заключается в попеременном движении точек a_t и b_t. В случае построения правой границы точка a_t поворачивается по часовой стрелке, точка b_t — против часовой стрелки. В случае построения левой границы, наоборот, точка a_t поворачивается против часовой стрелки, точка b_t — по часовой стрелке. Далее рассмотрим вариант работы алгоритма для построения правой границы.

Точка a_t перемещается путем многократного поворота по часовой стрелке вокруг точки b_t в 8-связной окрестности точки b_t. Каждый шаг поворота точки a_t является 8-связным и осуществляется путем применения функций $\overrightarrow{R}_8$ или $\overrightarrow{R}_4$ (см. рис. 5 и 6). Изменение точки a_t прекращается, если при любом следующем повороте ($\overrightarrow{R}_8$ или $\overrightarrow{R}_4$) точка попадает в запретную область. При этом выход за границы сетки C считается также запретным. Каждое новое значение точки a_t добавляется в выходную последовательность.

Точка b_t перемещается путем однократного поворота против часовой стрелки вокруг точки a_t в 8-связной окрестности точки a_t. Шаг поворота точки b_t является 4-связным и осуществляется применением функции $\overleftarrow{R}_4$ (см. рис. 6). Точка b_t остается неизменной, если при повороте она пытается выйти из запретной области в область $C \setminus \widehat{C}$.

При достижении точкой a_t точки t^*, а точкой b_t множества N^* — алгоритм успешно прекращает работу. Результат работы алгоритма — выходная 8-связная последовательность граничных узлов с началом и концом в точках t_* и t^*. Выбор множества N^* аналогичен выбору множества N_*. Множество N^* состоит из всех узлов в 8-связной окрестности точки t^*, находящихся в запретной области и 4-связных по отношению к одному из этих узлов. Для корректной работы алгоритма необходимо, чтобы точка t^* была граничной, т. е. принадлежала допустимой области и множество N^* не было пусто.

При достижении точкой a_t точки t_*, а точкой b_t множества N_* — алгоритм прекращает работу с ошибкой. Данный случай означает, что точки t_* и t^* не принадлежат одному 8-связному множеству, а выходная последовательность будет представлять собой замкнутую 8-связную последовательность граничных узлов, которая не содержит в себе точки t^*.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть запретное множество $\widehat{C}$ является 4-связным. Если не совпадающие граничные точки t_* и t^* принадлежат 8-связной компоненте множества $C \setminus \widehat{C}$, то алгоритм 2 выдает левую или правую границу оптимального коридора в виде 8-связной последовательности, соединяющей точки t_* и t^* и состоящей из граничных узлов множества $C \setminus \widehat{C}$. В противном случае алгоритм завершается с ошибкой.*

На рис. 7 приведен пример построения оптимального коридора, левой и правой оптимальных границ. Левая граница обозначена точечной пунктирной линией, правая — штрих-пунктирной линией.

По теореме 2 задача (9) имеет не единственное решение, поэтому представляет интерес следующая задача. Пусть $t(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$ — непрерывно дифференцируемая функция, параметрически описывающая траекторию $\mathcal{T}$. Требуется найти среди гладких траекторий $\mathbb{T}^*$

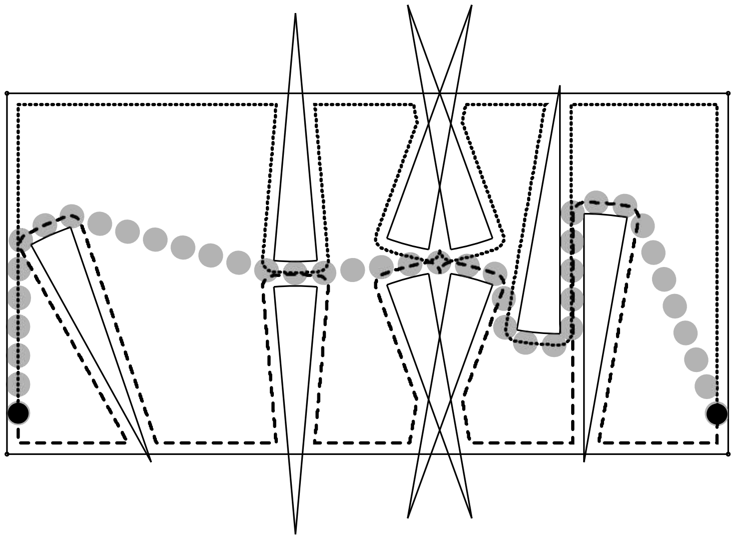


Рис. 7

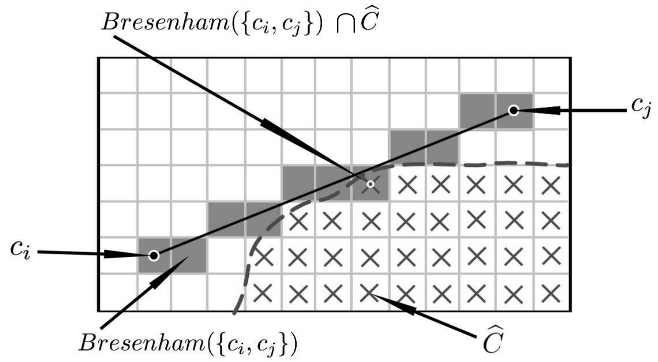


Рис. 8

решений задачи (9) траектории с минимальной длиной:

$$\min_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}^*} \int\limits_0^1 \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}d\tau, \tag{15}$$

где $x'(\tau), y'(\tau)$ — производные функций $x(\tau), y(\tau)$.

Класс траекторий $\mathbb{T}^*$, доставляющих минимум в (9), лежит внутри оптимального коридора Y^h_{opt}.

Для решения задачи (15) воспользуемся алгоритмом Дейкстры [4] построения кратчайшего пути в графе. Для этого следует определить неориентированный взвешенный граф (т. е. множества вершин и ребер) с неотрицательными весами, в котором данный алгоритм будет строить кратчайший путь.

В качестве множества вершин примем объединение множества узлов описанной выше двумерной прямоугольной сетки и пары точек начального и конечного положения объекта:

$$V = (C_x \times C_y) \cup \{t_*, t^*\}.$$

В качестве множества ребер U возьмем все пары вершин $\{v_i, v_j\}$ из множества V, удовлетворяющие условию: отрезок $\{v_i, v_j\}$ не должен пересекать "запретные" области, которые состоят из h-окрестностей границы Γ и множеств $K(S, M^h), S \in \mathbb{S}$. В качестве веса ребра возьмем его длину: $w = |v_i - v_j|$.

Для определения того факта, что отрезок ребра не пересекает "запретную" область, применяется алгоритм Брезенхэма [3] для растеризации отрезка (см. рис. 8).

Растеризация отрезка означает отображение непрерывного отрезка на дискретную прямоугольную равномерную сетку вершин на плоскости. Идея алгоритма Брезенхэма заключается в том, что отмечаются вершины, ближайшие к отрезку по той из координат, на ось которой проекция отрезка меньше.

Пусть $Bresenham(\{c_i, c_j\})$ — подмножество вершин на сетке $C_x \times C_y$, отмечаемых при растеризации отрезка $\{c_i, c_j\}$ алгоритмом Брезенхэма. На рис. 8 показано, как с помощью алгоритма Брезенхэма определяется факт пересечения ребра $\{c_i, c_j\}$ с множеством "запретных" вершин $\widehat{C}$. Тогда множество ребер графа определим как

$$U = \{\{v_i, v_j, w\} : \ v_i, v_j \in V, \ v_i \neq v_j, \ Bresenham(\{v_i, v_j\}) \cap \widehat{C} = \varnothing, \ w = |v_i - v_j|\}.$$

Предложенный алгоритм решает задачу об оптимальном пути, и его асимптотическая сложность есть $O(|C|^2)$ [4]. На рис. 7 представлен пример построения предложенным алгоритмом оптимальной траектории в задаче (9) для случая большого количества наблюдателей. Оптимальная траектория на рисунке показана серыми кругами радиуса h.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Движущийся объект и наблюдатель // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 411–413.
2. **Попов А.А., Костоусов В.Б., Бердышев В.И.** Траектория объекта, наиболее удаленная от наблюдателей // CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1894: Proc. of the 48th Internat. Youth School-Conf. "Modern Problems in Mathematics and its Applications" (Yekaterinburg, Russia, February 5 – February 11, 2017). 2017. С. 129–136. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894 .
3. **Rogers D.F.** Procedural elements for computer graphics. N Y: McGraw-Hill, 1985. 430 p. ISBN: 0-07-053534-5 .
4. Introduction to algorithms: 3rd ed. / T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein. Cambridge; London: The MIT Press, 2009. 1312 p. ISBN: 978-0-262-03384-8 .

Поступила 29.12.2017

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
научный руководитель
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Костоусов Виктор Борисович
канд. физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: vkost@imm.uran.ru

Попов Александр Андреевич
ведущий программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: aap@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Berdyshev V.I. A moving object and observers. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, no. 2, pp. 643–645. doi: 10.1134/S1064562415050178 .
2. Popov A.A., Kostousov V.B., Berdyshev V.I. The farthest from observers trajectory. *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 1894. Proc. of the 48th International Youth School-Conf. "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, February 5 – February 11, 2017, pp. 129–136. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1894 (in Russian) .
3. Rogers D.F. *Procedural elements for computer graphics.* N Y, McGraw-Hill. 1985, 433 p. ISBN: 0-07-053534-5 .
4. Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C. *Introduction to algorithms. 3rd ed.*, Cambridge; London: The MIT Press, 2009, 1312 p. IISBN: 978-0-262-03384-8 .

The paper was received by the Editorial Office on Dezember 29, 2017.

Vitalii Ivanovich Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru .

Viktor Borisovich Kostousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: vkost@imm.uran.ru .

Aleksandr Andreevich Popov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: aap@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.955

ОБ АППРОКСИМАЦИИ МИНИМАКСНЫХ РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА – ЯКОБИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Рассматривается минимаксное решение задачи Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными с условием на правом конце. Уравнения Гамильтона — Якоби рассматриваемого вида возникают в задачах динамической оптимизации систем с запаздыванием. Их аппроксимация сопряжена с дополнительными вопросами корректного перехода от бесконечномерного функционального аргумента искомого решения к конечномерному. Ранее изучались аппроксимации, основанные на кусочно-линейном приближении функционального аргумента и свойствах корректности минимаксных решений. В данной статье предложена и обоснована схема аппроксимации функциональных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными обычными уравнениями Гамильтона — Якоби с частными производными, которая основана на аппроксимации характеристических функционально-дифференциальных включений, используемых при определении искомого минимаксного решения, при помощи обыкновенных дифференциальных включений.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона — Якоби, обобщенные решения, коинвариантные производные, конечномерные аппроксимации, системы с запаздыванием.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. Approximation of minimax solutions to Hamilton–Jacobi functional equations for delay systems.

A minimax solution of the Cauchy problem for a functional Hamilton–Jacobi equation with coinvariant derivatives and a condition at the right end is considered. Hamilton–Jacobi equations of this type arise in dynamical optimization problems for time-delay systems. Their approximation is associated with additional questions of the correct transition from the infinite-dimensional functional argument of the desired solution to the finite-dimensional one. Earlier, the schemes based on the piecewise linear approximation of the functional argument and the correctness properties of minimax solutions were studied. In this paper, a scheme for the approximation of Hamilton–Jacobi functional equations with coinvariant derivatives by ordinary Hamilton–Jacobi equations with partial derivatives is proposed and justified. The scheme is based on the approximation of the characteristic functional–differential inclusions used in the definition of the desired minimax solution by ordinary differential inclusions.

Keywords: Hamilton–Jacobi equations, generalized solutions, coinvariant derivatives, finite-dimensional approximations, time-delay systems.

MSC: 35F21, 49L99, 34K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-53-62

Введение

Данная работа, инициированная, с одной стороны, исследованиями по теории позиционных дифференциальных игр [1–5], а с другой — развитием теории обобщенных (минимаксных [6], вязкостных [7]) решений уравнений Гамильтона — Якоби, примыкает к работам [8–10], посвященным функциональным уравнениям Гамильтона — Якоби, возникающим в задачах динамической оптимизации систем с запаздыванием.

Рассматривается минимаксное решение задачи Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными [9–11] с условием на правом конце. В теории уравнений Гамильтона — Якоби большое внимание уделяется аппроксимационным

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3047.2017.1.

схемам построения решений (см., например, [6;12–14]). Аппроксимация рассматриваемого уравнения Гамильтона — Якоби сопряжена с дополнительными вопросами корректного перехода от бесконечномерного функционального аргумента искомого решения к конечномерному. В работе [15] (см. также [10, § 10]) предложена аппроксимация функциональных уравнений Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными, основанная на кусочно-линейном приближении функционального аргумента и свойствах корректности минимаксных решений. Ниже приводится аппроксимационная схема, которая основана на аппроксимации используемых при определении минимаксного решения характеристических дифференциальных включений с запаздыванием при помощи обыкновенных дифференциальных включений. Применяемые аппроксимации систем с запаздыванием восходят к работам [16–18] и подробно исследованы в [19].

1. Формулировка результата

Пусть зафиксированы числа $t_0, \vartheta \in \mathbb{R}$, $t_0 < \vartheta$ и $h > 0$. Через $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой $\|\cdot\|_C$. Для краткости положим $C = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$.

Рассматривается задача Коши для функционального уравнения Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными

$$\partial_t\varphi(t,w(\cdot)) + H\big(t,w(\cdot),\nabla\varphi(t,w(\cdot))\big) = 0, \quad (t,w(\cdot)) \in [t_0,\vartheta) \times C, \tag{1.1}$$

с условием на правом конце

$$\varphi(\vartheta,w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in C. \tag{1.2}$$

Здесь искомым является функционал $\varphi : [t_0,\vartheta]\times C \to \mathbb{R}$, $\partial_t\varphi(t,w(\cdot))$ и $\nabla\varphi(t,w(\cdot))$ — коинвариантные производные [9–11] этого функционала в точке $(t,w(\cdot))$. Эти производные однозначно определяются соотношением

$$\varphi(\tau,x_\tau(\cdot)) - \varphi(t,w(\cdot)) = (\tau-t)\partial_t\varphi(t,w(\cdot)) + \langle x_\tau(0)-w(0),\nabla\varphi(t,w(\cdot))\rangle + o(\tau-t), \quad \tau\in[t,\vartheta],$$

которое должно выполняться для любой функции $x(\cdot) \in C([t-h,\vartheta],\mathbb{R}^n)$, являющейся липшицевой на отрезке $[t,\vartheta]$ и удовлетворяющей равенству $x(t+\xi) = w(\xi)$ при $\xi \in [-h,0]$. Здесь функция $x_\tau(\cdot) \in C$ определяется по $x(\cdot)$ и τ согласно равенству $x_\tau(\xi) = x(\tau+\xi)$, $\xi \in [-h,0]$, символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означают скалярное произведение векторов, бесконечно малое $o(\delta)$ может зависеть от t и $x(\cdot)$, $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Предполагаются выполненными следующие условия:

$(A.1)$ Функционалы $H : [t_0,\vartheta]\times C\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\sigma : C \to \mathbb{R}$ непрерывны.

$(A.2)$ Существует такое число $a > 0$, что

$$|H(t,w(\cdot),s) - H(t,w(\cdot),r)| \leqslant a(1+\|w(\cdot)\|_C)\|s-r\|, \quad (t,w(\cdot)) \in [t_0,\vartheta]\times C, \quad s,r\in\mathbb{R}^n.$$

$(A.3)$ Для любого $\alpha \geqslant 0$ справедливо равенство

$$H(t,w(\cdot),\alpha s) = \alpha H(t,w(\cdot),s), \quad (t,w(\cdot)) \in [t_0,\vartheta]\times C, \quad s\in\mathbb{R}^n.$$

$(A.4)$ Для любого компакта $W \subset C$ существует такое число $\lambda = \lambda(W) > 0$, что

$$|H(t,w(\cdot),s) - H(t,z(\cdot),s)| \leqslant \lambda\|s\|\|w(\cdot)-z(\cdot)\|_C, \quad t\in[t_0,\vartheta], \quad w(\cdot),z(\cdot)\in W, \quad s\in\mathbb{R}^n.$$

Здесь символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Пусть U и V — непустые множества и многозначные отображения $F^* = F^*(t,w(\cdot),v) \subset \mathbb{R}^n$, $F_* = F_*(t,w(\cdot),u) \subset \mathbb{R}^n$, $(t,w(\cdot)) \in [t_0,\vartheta]\times C$, $u\in U$, $v\in V$, обладают следующими свойствами:

$(B.1)$ Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $w(\cdot) \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ и $v \in V$ множества $F^*(t, w(\cdot), v)$, $F_*(t, w(\cdot), u)$ являются непустыми выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^n$.

$(B.2)$ Для любых фиксированных $u \in U$ и $v \in V$ многозначные отображения $F^*(t, w(\cdot), v)$ и $F_*(t, w(\cdot), u)$ полунепрерывны сверху по включению при изменении $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C$.

$(B.3)$ Существует число $c > 0$, для которого справедлива оценка

$$\|f\| \leqslant c(1 + \|w(\cdot)\|_C), \quad f \in F^*(t, w(\cdot), v) \cup F_*(t, w(\cdot), u),$$
$$(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C, \quad u \in U, \quad v \in V.$$

$(B.4)$ Имеет место равенство

$$H(t, w(\cdot), s) = \sup_{v \in V} \min_{f \in F^*(t, w(\cdot), v)} \langle s, f\rangle = \inf_{u \in U} \max_{f \in F_*(t, w(\cdot), u)} \langle s, f\rangle,$$
$$(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Отметим (см. [10, с. 83]), что в силу $(A.1)$–$(A.4)$ эти условия выполнены, например, для

$$U = V = \mathbb{R}^n,$$
$$F^*(t, w(\cdot), v) = \big\{f \in \mathbb{R}^n : \ \|f\| \leqslant \sqrt{2}a(1 + \|w(\cdot)\|_C), \ \langle f, v\rangle \geqslant H(t, w(\cdot), v)\big\},$$
$$F_*(t, w(\cdot), u) = \big\{f \in \mathbb{R}^n : \ \|f\| \leqslant \sqrt{2}a(1 + \|w(\cdot)\|_C), \ \langle f, u\rangle \leqslant H(t, w(\cdot), u)\big\}.$$

Пусть $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times C$, $u \in U$ и $v \in V$. Рассмотрим дифференциальное включение с запаздыванием

$$\dot{x}(\tau) \in F^*(\tau, x_\tau(\cdot), v), \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.3}$$

при начальном условии

$$x(\tau) = w(\tau - t), \quad \tau \in [t - h, t]. \tag{1.4}$$

Здесь по-прежнему $x_\tau(\xi) = x(\tau + \xi)$, $\xi \in [-h, 0]$. Под решением задачи (1.3), (1.4) понимаем функцию $x(\cdot) \in C([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которая при $\tau \in [t - h, t]$ удовлетворяет равенству (1.4), а при $\tau \in [t, \vartheta]$ является абсолютно непрерывной и почти всюду удовлетворяет соотношению (1.3). Множество всех решений задачи (1.3), (1.4) обозначим через $X^*(t, w(\cdot), v)$. Соответственно через $X_*(t, w(\cdot), u) \subset C([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ обозначаем множество удовлетворяющих условию (1.4) решений дифференциального включения

$$\dot{x}(\tau) \in F_*(\tau, x_\tau(\cdot), u), \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{1.5}$$

Отметим, что в силу свойств $(B.1)$–$(B.3)$ множества $X^*(t, w(\cdot), v)$ и $X_*(t, w(\cdot), u)$ являются непустыми компактами в $C([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [10, теорема P2.1]).

Из результатов [10] (см. теорему 7.1 с учетом утверждения 10.1) следует, что при условиях $(A.1)$–$(A.4)$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное минимаксное решение — непрерывный функционал $\varphi : [t_0, \vartheta] \times C \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий краевому условию (1.2) и неравенствам

$$\begin{aligned} &\sup_{(t, w(\cdot), v, \tau)} \min_{x(\cdot)} \big(\varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))\big) \leqslant 0, \\ &\inf_{(t, w(\cdot), u, \tau)} \max_{y(\cdot)} \big(\varphi(\tau, y_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot))\big) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta) \times C, \ \ u \in U, \ \ v \in V, \ \ \tau \in (t, \vartheta], \ \ x(\cdot) \in X^*(t, w(\cdot), v), \ \ y(\cdot) \in X_*(t, w(\cdot), u),$$

каковы бы ни были удовлетворяющие условиям $(B.1)$–$(B.4)$ отображения F^* и F_*, определяющие множества $X^*(t, w(\cdot), v)$ и $X_*(t, w(\cdot), u)$. Это решение непрерывно зависит [10, теорема 9.1] от изменения функционалов H, σ и в точках коинвариантной дифференцируемости удовлетворяет [10, утверждение 4.2] уравнению (1.1).

Следуя [19], аппроксимируем дифференциальные включения с запаздыванием (1.3)–(1.5) при помощи обыкновенных дифференциальных включений. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\mathbf{n} = n(m+1), \quad \mathbb{R}^{\mathbf{n}} = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-раз}}.$$

Всюду далее элементы пространства $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ будем выделять жирным шрифтом. Пусть $\Delta h = h/m$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](\cdot) \in C$ — линейный сплайн на отрезке $[-h, 0]$ с узлами в точках $-i\Delta h$ и значениями $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](-i\Delta h) = y_i$, $i = \overline{0,m}$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{y}_0(\tau) \in F^*\big(\tau, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau)](\cdot), v\big), \quad \dot{y}_i(\tau) = (y_{i-1}(\tau) - y_i(\tau))/\Delta h, \quad i = \overline{1,m}, \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.7}$$

$$\dot{y}_0(\tau) \in F_*\big(\tau, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau)](\cdot), u\big), \quad \dot{y}_i(\tau) = (y_{i-1}(\tau) - y_i(\tau))/\Delta h, \quad i = \overline{1,m}, \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.8}$$

при начальном условии

$$y_i(t) = w(-i\Delta h), \quad i = \overline{0,m}. \tag{1.9}$$

Обозначим через $\mathbf{F}^*(t, \mathbf{y}, v)$ (через $\mathbf{F}_*(t, \mathbf{y}, u)$) множество векторов $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ таких, что $f_0 \in F^*(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](\cdot), v)$ (соответственно, $f_0 \in F_*(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}](\cdot), u)$) и $f_i = (y_{i-1} - y_i)/\Delta h$, $i = \overline{1,m}$. Положим

$$w_i = w(-i\Delta h), \quad i = \overline{0,m}, \quad \mathbf{w} = (w_0, w_1, \ldots, w_m). \tag{1.10}$$

Тогда соотношения (1.7)–(1.9) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) \in \mathbf{F}^*(\tau, \mathbf{y}(\tau), v), \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.11}$$

$$\dot{\mathbf{y}}(\tau) \in \mathbf{F}_*(\tau, \mathbf{y}(\tau), u), \quad \tau \in [t, \vartheta], \tag{1.12}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}. \tag{1.13}$$

В силу условия $(B.4)$ имеют место равенства

$$\sup_{v \in V} \min_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}^*(t,\mathbf{w},v)} \langle \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle = \inf_{u \in U} \max_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}_*(t,\mathbf{w},u)} \langle \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle = H(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot), s_0) + \sum_{i=1}^{m} \langle s_i, (w_{i-1} - w_i)/\Delta h \rangle,$$
$$(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}.$$

Более того, в силу условий $(B.1)$–$(B.3)$ многозначные отображения $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}^*(t, \mathbf{w}, v) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_*(t, \mathbf{w}, u) \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $u \in U$, $v \in V$, удовлетворяют всем дополнительным свойствам, необходимым для того, чтобы в согласии с [6, с. 19] их можно было использовать для определения минимаксного решения следующей задачи Коши для обычного уравнения Гамильтона — Якоби с частными производными

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(t, \mathbf{w}) + H\Big(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot), \frac{\partial \varphi_m}{\partial w_0}(t, \mathbf{w})\Big) + \sum_{i=1}^{m} \Big\langle \frac{\partial \varphi_m}{\partial w_i}(t, \mathbf{w}), \frac{w_{i-1} - w_i}{\Delta h} \Big\rangle = 0, \quad (t, \mathbf{w}) \in (t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}},$$

$$\varphi_m(\vartheta, \mathbf{w}) = \sigma(\mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot)), \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}. \tag{1.14}$$

Здесь искомой является функция $\varphi_m(t, \mathbf{w}) = \varphi_m(t, w_0, w_1, \ldots, w_m)$, через $\frac{\partial \varphi_m}{\partial w_i}(t, \mathbf{w})$ обозначен градиент этой функции по переменной w_i.

Положим

$$H_m(t, \mathbf{w}, \mathbf{s}) = H(t, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot), s_0) + \sum_{i=1}^{m} \langle s_i, (w_{i-1} - w_i)/\Delta h \rangle, \quad \sigma_m(\mathbf{w}) = \sigma(\mathfrak{S}_m[\mathbf{w}](\cdot)),$$
$$(t, \mathbf{w}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}. \tag{1.15}$$

Тогда задачу (1.14) можно переписать в стандартном виде:

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}(t,\mathbf{w}) + H_m\Big(t,\mathbf{w},\frac{\partial \varphi_m}{\partial \mathbf{w}}(t,\mathbf{w})\Big) = 0, \quad (t,\mathbf{w}) \in (t_0,\vartheta)\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \tag{1.16}$$

$$\varphi_m(\vartheta,\mathbf{w}) = \sigma_m(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}. \tag{1.17}$$

В силу требований $(A.1)$–$(A.4)$ функции H_m и σ_m удовлетворяют всем условиям, при которых задача Коши (1.16), (1.17) имеет единственное минимаксное решение [6, теорема 3.1]. Это решение является непрерывной функцией $\varphi_m : [t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}} \to \mathbb{R}$, которая удовлетворяет краевому условию (1.17) и неравенствам

$$\begin{aligned} &\sup_{(t,\mathbf{w},v,\tau)} \min_{\mathbf{x}(\cdot)} \big(\varphi_m(\tau,\mathbf{x}(\tau)) - \varphi_m(t,\mathbf{w})\big) \leqslant 0,\\ &\inf_{(t,\mathbf{w},u,\tau)} \max_{\mathbf{y}(\cdot)} \big(\varphi_m(\tau,\mathbf{y}(\tau)) - \varphi_m(t,\mathbf{w})\big) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$(t,\mathbf{w})\in[t_0,\vartheta)\times\mathbb{R}^{\mathbf{n}},\ \ u\in U,\ \ v\in V,\ \ \tau\in(t,\vartheta],\ \ \mathbf{x}(\cdot)\in\mathbf{Y}^*(t,\mathbf{w},v),\ \ \mathbf{y}(\cdot)\in\mathbf{Y}_*(t,\mathbf{w},u),$$

где через $\mathbf{Y}^*(t,\mathbf{w},v)$ и $\mathbf{Y}_*(t,\mathbf{w},u)$ обозначены соответственно множества решений дифференциальных включений (1.11) и (1.12) при условии (1.13). Отметим, что множества $\mathbf{Y}^*(t,\mathbf{w},v)$ и $\mathbf{Y}_*(t,\mathbf{w},u)$ являются непустыми компактами в $C([t,\vartheta],\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ (см., например, [6, теорема П3]).

Имеет место

Теорема. *Пусть выполнены условия* $(A.1)$–$(A.4)$, φ *и* φ_m, $m\in\mathbb{N}$, — *минимаксные решения задач* (1.1), (1.2) *и* (1.16), (1.17) *соответственно. Тогда для любого компакта* $W_0\subset C$ *и любого числа* $\varepsilon>0$ *найдется такое число* $M>0$, *что для любых* $(t,w(\cdot))\in[t_0,\vartheta]\times W_0$ *при условии* $m\geqslant M$ *будет справедливо неравенство*

$$|\varphi(t,w(\cdot)) - \varphi_m(t,\mathbf{w})| \leqslant \varepsilon,$$

где вектор $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ *определяется по функции* $w(\cdot)$ *в согласии с соотношениями* (1.10).

2. Доказательство теоремы

Доказательство проводится по схеме из [6, лемма 3.8; 10, теорема 7.1]. Зафиксируем компакт $W_0\subset C$ и отображения F^*, F_*, удовлетворяющие условиям $(B.1)$–$(B.4)$. Обозначим

$$R_0 = \sup\big\{\|w(\cdot)\|_C :\ w(\cdot)\in W_0\big\},$$
$$\omega_0(\delta) = \sup\big\{\|w(\xi)-w(\eta)\| :\ w(\cdot)\in W_0,\ |\xi-\eta|\leqslant\delta,\ \xi,\eta\in[-h,0]\big\}, \quad \delta>0,$$

и, взяв константу c из условия $(B.3)$, положим

$$R_1 = (1+R_0)e^{c(\vartheta-t_0)} - 1, \quad \omega_1(\delta) = \omega_0(\delta) + c(1+R_1)\delta, \quad \delta>0.$$

Определим компакт

$$X_0 = \Big\{x(\cdot)\in C([t_0-h,\vartheta],\mathbb{R}^n) :\ \|x(t)\|\leqslant R_1,\ \|x(t)-x(\tau)\|\leqslant\omega_1(|t-\tau|),\ t,\tau\in[t_0-h,\vartheta]\Big\}.$$

Пусть $m\in\mathbb{N}$, $y(\cdot)\in X_0$ и $t\in[t_0,\vartheta]$. Рассмотрим решения $y_i(\cdot)$, $i=\overline{0,m}$, системы

$$y_0(\tau)=y(\tau), \quad \dot y_i(\tau) = (y_{i-1}(\tau)-y_i(\tau))/\Delta h, \quad \tau\in[t,\vartheta], \quad y_i(t) = y(t-i\Delta h), \quad i=\overline{1,m}. \tag{2.1}$$

Обозначим $\mathbf{y}(\tau\mid t,y(\cdot)) = (y_0(\tau),y_1(\tau),\ldots,y_m(\tau))\in\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\tau\in[t,\vartheta]$. В силу [19, лемма 1] имеем

$$\|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau\mid t,y(\cdot))\big](\cdot)\|_C = \max_{i=\overline{0,m}}\|y_i(\tau)\| \leqslant \max_{\xi\in[t-h,\tau]}\|y(\xi)\|, \quad \tau\in[t,\vartheta]. \tag{2.2}$$

Согласно [19, лемма 3] найдется такой компакт $W_1 \subset C$, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $y(\cdot) \in X_0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ будут справедливы включения $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot) \in W_1$, $y_\tau(\cdot) \in W_1$, $\tau \in [t, \vartheta]$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. В силу условия $(A.1)$ выберем число $\zeta > 0$ так, чтобы для любых $w(\cdot), z(\cdot) \in W_1$, удовлетворяющих неравенству $\|w(\cdot) - z(\cdot)\|_C \leqslant \zeta$, выполнялась оценка

$$|\sigma(w(\cdot)) - \sigma(z(\cdot))| \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

В согласии с условием $(A.4)$ определим число $\lambda_1 = \lambda(W_1)$ и положим

$$\alpha = \zeta^2 / \big(8(\vartheta - t_0) e^{2\lambda_1(\vartheta - t_0)}\big) > 0. \tag{2.4}$$

Опираясь на [19, теорема 2], выберем число $M > 0$ так, чтобы для любых $m \in \mathbb{N}$, $y(\cdot) \in X_0$ и $t \in [t_0, \vartheta]$ при $m \geqslant M$ выполнялось неравенство

$$\|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot) - y_\tau(\cdot)\|_C \leqslant \min\big\{\zeta/2, \alpha/(4\lambda_1 R_0)\big\}, \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{2.5}$$

Покажем, что выбранное число M удовлетворяет утверждению теоремы.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant M$ и $(t, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times W_0$. Пусть φ — минимаксное решение задачи (1.1), (1.2), φ_m — минимаксное решение задачи (1.16), (1.17), $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ — вектор, определенный согласно (1.10). Покажем, что

$$\varphi_m(t, \mathbf{w}) - \varphi(t, w(\cdot)) \leqslant \varepsilon. \tag{2.6}$$

Неравенство $\varphi(t, w(\cdot)) - \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varepsilon$ проверяется аналогично с понятными изменениями.

Обозначим через X_1 множество функций $x(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которые являются абсолютно непрерывными на $[t, \vartheta]$ и удовлетворяют соотношениям

$$x(\tau) = w(-h), \quad \tau \in [t_0 - h, t - h], \quad x(\tau) = w(\tau - t), \quad \tau \in [t - h, t],$$
$$\|\dot{x}(\tau)\| \leqslant c(1 + \max_{\xi \in [t-h, \tau]} \|x(\xi)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta].$$

Множество X_1 компактно в $C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [10, теорема P2.1]) и выполняется включение $X_1 \subset X_0$. Положим

$$Z = \Big\{(x(\cdot), y(\cdot)) \in X_1 \times X_1 \colon \\ \langle s(\tau), \dot{s}(\tau)\rangle \leqslant \lambda_1 \max_{\xi \in [t, \tau]} \|s(\xi)\|^2 + \alpha \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta],\ s(\tau) = y(\tau) - x(\tau)\Big\},$$

$$L(\tau) = \Big\{(x(\cdot), y(\cdot)) \in Z \colon \varphi(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)),\ \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varphi_m\big(\tau, \mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big)\Big\}, \quad \tau \in [t, \vartheta],$$

$$t^\circ = \max\big\{\tau \in [t, \vartheta] \colon L(\tau) \neq \varnothing\big\}. \tag{2.7}$$

Максимум в (2.7) достигается в силу компактности Z в $C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^{2n})$, непрерывности φ и φ_m и того факта, что из сходимости $y_k(\cdot) \to y(\cdot)$ при $k \to \infty$ в $C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ следует сходимость $\mathbf{y}(\cdot \mid t, y_k(\cdot)) \to \mathbf{y}(\cdot \mid t, y(\cdot))$ в $C([t, \vartheta], \mathbb{R}^{\mathbf{n}})$.

Предположим, что $t^\circ = \vartheta$, т. е. $L(\vartheta) \neq \varnothing$, и $(x(\cdot), y(\cdot)) \in L(\vartheta)$. Тогда, если учесть краевые условия (1.2) и (1.17), имеем

$$\varphi(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) = \sigma(x_\vartheta(\cdot)), \quad \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varphi_m\big(\vartheta, \mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big) = \sigma_m\big(\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big). \tag{2.8}$$

Далее, опираясь на определение множества Z, лемму Беллмана — Гронуолла (см., например, [20, с. 43, лемма 2.1]) и выбор (2.4) числа α, выводим

$$\max_{\xi \in [t, \tau]} \|y(\xi) - x(\xi)\|^2 \leqslant 2\alpha(\vartheta - t) e^{2\lambda_1(\vartheta - t)} \leqslant \zeta^2/4, \quad \tau \in [t, \vartheta].$$

Отсюда с учетом выбора (2.5) числа M получаем

$$\|x_\vartheta(\cdot) - \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big](\cdot)\|_C \leqslant \|x_\vartheta(\cdot) - y_\vartheta(\cdot)\|_C + \|y_\vartheta(\cdot) - \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big](\cdot)\|_C \leqslant \zeta.$$

После этого, принимая во внимание выбор (2.3) числа ζ и обозначения (1.15), заключаем

$$|\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma_m\big(\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))\big)| = |\sigma(x_\vartheta(\cdot)) - \sigma\big(\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\vartheta \mid t, y(\cdot))](\cdot)\big)| \leqslant \varepsilon. \qquad (2.9)$$

Соотношения (2.8) и (2.9) доказывают неравенство (2.6). Таким образом, для доказательства теоремы осталось убедиться, что равенство $t^\circ = \vartheta$ действительно выполняется.

Предположим от противного, что $t^\circ < \vartheta$. Пусть $(x^\circ(\cdot), y^\circ(\cdot)) \in L(t^\circ)$. Обозначим $w^\circ(\cdot) = x^\circ_{t^\circ}(\cdot)$, $\mathbf{w}^\circ = \mathbf{y}(t^\circ \mid t, y^\circ(\cdot))$ и $s^\circ(\tau) = y^\circ(\tau) - x^\circ(\tau)$, $\tau \in [t, \vartheta]$.

Опираясь на свойство $(B.4)$, выберем $v^\circ \in V$ и $u^\circ \in U$ так, чтобы для любых $f^* \in F^*(t^\circ, w^\circ(\cdot), v^\circ)$ и $f_* \in F_*(t^\circ, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}^\circ](\cdot), u^\circ)$ выполнялись неравенства

$$H(t^\circ, w^\circ(\cdot), s^\circ(t^\circ)) \leqslant \langle s^\circ(t^\circ), f^*\rangle + \alpha/8, \quad H(t^\circ, \mathfrak{S}_m[\mathbf{w}^\circ](\cdot), s^\circ(t^\circ)) \geqslant \langle s^\circ(t^\circ), f_*\rangle - \alpha/8. \qquad (2.10)$$

Обозначим через $\widehat{X}^*$ множество таких функций $x(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, что $x(\tau) = x^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t_0 - h, t^\circ - h]$ и $x(\tau) = \widehat{x}(\tau)$ при $\tau \in [t^\circ - h, \vartheta]$, где $\widehat{x}(\cdot) \in X^*(t^\circ, w^\circ(\cdot), v^\circ)$. В силу $(B.3)$ справедливо включение $\widehat{X}^* \subset X_1$. Через $\widehat{Y}_*$ обозначим множество таких функций $y(\cdot) \in C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, что $y(\tau) = y^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t_0 - h, t^\circ]$ и существует функция $\widehat{\mathbf{y}}(\cdot) = (\widehat{y}_0(\cdot), \widehat{y}_1(\cdot), \ldots, \widehat{y}_m(\cdot)) \in \mathbf{Y}_*(t^\circ, \mathbf{w}^\circ, u^\circ)$, для которой $y(\tau) = \widehat{y}_0(\tau)$ при $\tau \in [t^\circ, \vartheta]$. Тогда в силу связи включений (1.8), (1.12) и системы (2.1) имеем $\widehat{\mathbf{y}}(\tau) = \mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))$ при $\tau \in [t^\circ, \vartheta]$, откуда с учетом условия $(B.3)$ и неравенства (2.2) получаем $\widehat{Y}_* \subset X_1$.

Для любого $y(\cdot) \in \widehat{Y}_*$ в силу соотношений (2.1) и (2.2) выводим

$$\|\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot) - \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(t^\circ \mid t, y(\cdot))](\cdot)\|_C \leqslant \omega_1(\tau - t^\circ) + 2R_1(\tau - t^\circ)/\Delta h, \quad \tau \in [t^\circ, \vartheta].$$

Учитывая это вместе с условиями $(A.1)$, $(B.2)$ и $(B.3)$, из (2.10) получаем, что существует $\tau^\circ \in (t^\circ, \vartheta]$ такое, что для любых $x(\cdot) \in \widehat{X}^*$ и $y(\cdot) \in \widehat{Y}_*$ при почти всех $\tau \in [t^\circ, \tau^\circ]$ выполняются неравенства

$$H(\tau, x_\tau(\cdot), s(\tau)) \leqslant \langle \dot{x}(\tau), s(\tau)\rangle + \alpha/4, \quad H\big(\tau, \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot), s(\tau)\big) \geqslant \langle \dot{y}(\tau), s(\tau)\rangle - \alpha/4,$$

где $s(\tau) = y(\tau) - x(\tau)$, а стало быть, справедлива оценка

$$\langle s(\tau), \dot{s}(\tau)\rangle \leqslant H\big(\tau, \mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot), s(\tau)\big) - H(\tau, x_\tau(\cdot), s(\tau)) + \alpha/2.$$

Поскольку $x(\cdot), y(\cdot) \in X_0$, то при $\tau \in [t^\circ, \tau^\circ]$ имеем $x_\tau(\cdot) \in W_1$, $\mathfrak{S}_m[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))](\cdot) \in W_1$ и, далее, в согласии с условием $(A.4)$ и выбором (2.5) числа M выводим

$$\begin{aligned} &H\big(\tau, \mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot), s(\tau)\big) - H(\tau, x_\tau(\cdot), s(\tau)) \leqslant \lambda_1\|s(\tau)\|\|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot) - x_\tau(\cdot)\|_C \\ &\leqslant \lambda_1 2R_1\|\mathfrak{S}_m\big[\mathbf{y}(\tau \mid t, y(\cdot))\big](\cdot) - y_\tau(\cdot)\|_C + \lambda_1\|s(\tau)\|\|y_\tau(\cdot) - x_\tau(\cdot)\|_C \leqslant \alpha/2 + \lambda_1 \max_{\xi \in [t, \tau]} \|s(\xi)\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $x(\cdot) \in \widehat{X}^*$ и $y(\cdot) \in \widehat{Y}_*$ при почти всех $\tau \in [t^\circ, \tau^\circ]$ верна оценка

$$\langle s(\tau), \dot{s}(\tau)\rangle \leqslant \lambda_1 \max_{\xi \in [t, \tau]} \|s(\xi)\|^2 + \alpha.$$

Более того, так как $s(\tau) = s^\circ(\tau) = y^\circ(\tau) - x^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t, t^\circ]$ и $(x^\circ(\cdot), y^\circ(\cdot)) \in Z$, эта оценка выполняется при почти всех $\tau \in [t, \tau^\circ]$.

Опираясь на первое из неравенств в (1.6) и второе из неравенств в (1.18), в согласии с определениями множеств $\widehat{X}^*$ и $\widehat{Y}_*$ заключаем, что найдутся такие функции $x^*(\cdot) \in \widehat{X}^*$ и $y_*(\cdot) \in \widehat{Y}_*$, для которых будут справедливы неравенства

$$\varphi(t^\circ, w^\circ(\cdot)) \geqslant \varphi(\tau^\circ, x^*_{\tau^\circ}(\cdot)), \quad \varphi_m(t^\circ, \mathbf{w}^\circ) \leqslant \varphi_m\big(\tau^\circ, \mathbf{y}(\tau^\circ \mid t, y_*(\cdot))\big). \qquad (2.11)$$

Положим

$$(\widetilde{x}(\tau), \widetilde{y}(\tau)) = \begin{cases} (x^*(\tau), y_*(\tau)), & \text{если } \tau \in [t_0 - h, \tau^\circ], \\ (x^*(\tau^\circ), y_*(\tau^\circ)), & \text{если } \tau \in (\tau^\circ, \vartheta]. \end{cases}$$

Тогда $(\widetilde{x}(\cdot), \widetilde{y}(\cdot)) \in Z$. Кроме того, так как по построению $\widetilde{x}(\tau) = x^\circ(\tau)$ и $\widetilde{y}(\tau) = y^\circ(\tau)$ при $\tau \in [t_0 - h, t^\circ]$, в силу включения $(x^\circ(\cdot), y^\circ(\cdot)) \in L(t^\circ)$ и неравенств (2.11) имеем

$$\varphi(t, w(\cdot)) \geqslant \varphi(t^\circ, w^\circ(\cdot)) \geqslant \varphi(\tau^\circ, \widetilde{x}_{\tau^\circ}(\cdot)), \quad \varphi_m(t, \mathbf{w}) \leqslant \varphi_m(t^\circ, \mathbf{w}^\circ) \leqslant \varphi_m\bigl(\tau^\circ, \mathbf{y}(\tau^\circ \mid t, \widetilde{y}(\cdot))\bigr).$$

Таким образом, заключаем $(\widetilde{x}(\cdot), \widetilde{y}(\cdot)) \in L(\tau^\circ)$, что противоречит определению (2.7) числа t°.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
3. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
5. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Crandall M.G., Lions P.-L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
8. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения типа Гамильтона — Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 4. С. 457–461.
9. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 110–130.
10. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. 243 с.
11. **Kim A.V.** Functional differential equations. Application of i-smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
12. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН: Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
13. **Falcone M., Ferretti R.** Discrete time high order schemes for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations // Numer. Math. 1994. Vol. 67, no. 3. P. 315–344.
14. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 6. С. 736–739.
15. **Лукоянов Н.Ю.** Об аппроксимации функциональных уравнений Гамильтона — Якоби в системах с наследственной информацией // Тр. Междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, посвящен. 60-летию акад. А.И. Субботина (22–26 июня 2005 г., Екатеринбург, Россия). Т. 1. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2006. С. 108–115.
16. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
17. **Репин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
18. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.

19. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Конечномерные моделирующие поводыри в системах с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 182–195.
20. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Поступила 1.10.2017

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
ИЕНиМ, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
ИЕНиМ, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
аспирант
ИЕНиМ, Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York, Springer. 1988. 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. On the problem of unifying differential games. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, no. 1, pp. 269–273.
3. Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect. *Sov. Math., Dokl.*, 1971, vol. 12, pp. 262–266.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 286 p.
5. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
6. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona-Yakobi.* [Minimax inequalities and Hamilton-Jacobi equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p.
7. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
8. Lukoyanov N.Yu. Functional equations of Hamilton–Jacobi type and differential games with hereditary information. *Dokl. Math.*, 2000, vol. 61, no. 2, pp. 301–304.
9. Krasovskii N.N., Lukoyanov N.Yu. Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2000, suppl. 1, pp. S136–S153.
10. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona-Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton-Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Ekaterinburg, Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.
11. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i-smooth calculus.* Dordrecht, Kluwer, 1999, 165 p. doi: 10.1007/978-94-017-1630-7 .

12. Taras'ev A.M., Uspenskij A.A., Ushakov V.N. Approximation schemes and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 1995, vol. 33, no. 6, pp. 127–139.
13. Falcone M., Ferretti R. Discrete time high order schemes for viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. *Numer. Math.*, 1994, vol. 67, no. 3, pp. 315–344. doi: 10.1007/s002110050031 .
14. Subbotin A.I., Chentsov A.G. An iteration procedure for constructing minimax and viscous solutions to Hamilton–Jacobi equations. *Dokl. Math.*, 1996, vol. 53, no. 3, pp. 416–419.
15. Lukoyanov N.Yu. Approximation of the Hamilton–Jacobi functional equations in systems with hereditary information. Proc. Internat. Seminar Control Theory and Theory of Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi eguations, dedicated to the 60th birthday of Academician A.I. Subbotin, June 22-26, 2005, Ekaterinburg, Russia. Vol. 1. Ekaterinburg, Ural State University Publ., 2006, pp. 108–115 (in Russian). ISBN: 5-7996-0318-4 .
16. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5 .
17. Repin Yu.M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. *PMM, J. Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 2, pp. 254–264. doi: 10.1016/0021-8928(65)90029-8 .
18. Kurzhanskii A.B. On the approximation of linear differential equations with lag. *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2094–2107 (in Russian).
19. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Finite-dimensional modeling guides in systems with delay. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 182–195 (in Russian).
20. Bellman R., Cooke K.L. Differential–Difference Equations. N Y, Acad. Press, 1963, 462 p. ISBN: 9780080955148 . Translated to Russian under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya.* Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p.

The paper was received by the Editorial Office on October 1, 2017.

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: nyul@imm.uran.ru .

Anton Romanovich Plaksin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977.1

О ГЕОМЕТРИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

М. И. Гусев, И. В. Зыков

Рассматривается нелинейная управляемая система, линейная по управляющим переменным. Ограничения на управление и траекторию системы заданы системой изопериметрических ограничений в форме неравенств для интегральных функционалов. В работе получено описание границы множества достижимости системы в заданный момент времени. Показано, что допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является слабо эффективным решением некоторой задачи оптимального управления с векторным критерием при условии полной управляемости линеаризованной системы. Компонентами критерия являются интегральные функционалы, задающие изопериметрические ограничения. Данное утверждение обобщает на случай нескольких совместных интегральных ограничений результаты предыдущих работ авторов. Доказательство опирается на теорему Грейвса для накрывающих отображений и использует свойства производной отображения "вход-выход"и ограничений задачи. Утверждение остается справедливым, если начальное состояние системы не фиксировано, а принадлежит заданному множеству. Осуществляется редукция рассматриваемой задачи к задаче управления со скалярным критерием, зависящим от параметров. В качестве скалярного критерия выбирается чебышевская свертка интегральных функционалов. Получены необходимые условия оптимальности управлений, приводящих на границу множества достижимости, в форме принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: управляемая система, изопериметрические ограничения, множество достижимости, принцип максимума.

M. I. Gusev, I. V. Zykov. On the geometry of reachable sets for control systems with isoperimetric constraints.

A nonlinear control system linear in control variables is considered. The control and the trajectory are subject to a system of isoperimetric constraints in the form of inequalities for integral functionals. We describe the boundary of the reachable set of the system at a given time and show that an admissible control taking the system to the boundary of the admissible set is a weakly efficient solution of a certain optimal control problem with a vector criterion if the linearized system is completely controllable. The components of the criterion are integral functionals that specify isoperimetric constraints. The stated result generalizes the authors' earlier results to the case of several consistent integral constraints. The proof is based on the Graves theorem on covering mappings and on the properties of the derivative of the “input–output” mapping and of the constraints. The result remains valid if the initial state of the system is not fixed but belongs to a given set. The problem is reduced to a control problem with a scalar criterion depending on parameters. The Chebyshev convolution of integral functionals is chosen as the scalar criterion. Necessary conditions are obtained for the optimality of controls taking the system to the boundary of the reachable set in the form of Pontryagin's maximum principle.

Keywords: control system, isoperimetric constraints, reachable set, maximum principle.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-63-75

1. Введение и постановка задачи

Свойствам множеств достижимости в линейных и нелинейных системах и алгоритмам их приближенного построения посвящен ряд исследований. В работах [1; 2] предложены алгоритмы построения множеств достижимости в системах с геометрическими ограничениями на управления, основанные на дискретных аппроксимациях. Внешние и внутренние аппроксимации множеств достижимости при помощи эллипсоидов и многогранников в пространстве

[1]Работа выполнена при поддержке комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-9 “Оценивание динамики нелинейных управляемых систем и маршрутная оптимизация”.

состояний анализировались в [3–5]. Вопросы устойчивости относительно возмущений ограничений, связанные с задачами достижимости, рассматривались в [6; 7].

В данной работе исследуется задача описания границы множества достижимости управляемой системы с изопериметрическими ограничениями на управление и траекторию. Указанная задача может трактоваться как обобщение задачи с интегральными ограничениями на управления игроков. Свойства множеств достижимости в нелинейных системах с интегральными ограничениями и алгоритмы их построения изучались в [8–11]. В отличие от рассматриваемой в [10] постановки мы здесь исследуем систему, у которой начальное состояние не фиксировано, а ограничения заданы системой интегральных неравенств, в которых подынтегральные функции зависят не только от управления, но и от траектории системы.

Далее мы доказываем, что допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является слабо эффективным (слабо оптимальным по Слейтеру) решением некоторой задачи оптимального управления с векторным критерием. Компонентами критерия являются интегральные функционалы, задающие изопериметрические ограничения. В работе осуществляется редукция рассматриваемой задачи к задаче управления со скалярным критерием. Получены необходимые условия оптимальности управлений, приводящих на границу множества достижимости, в форме принципа максимума Понтрягина. Принцип максимума может быть положен в основу алгоритмов вычисления множеств достижимости для систем с геометрическими ограничениями на управление [12–14].

В статье используются следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0_k обозначает нулевой вектор в $\mathbb{R}^k$. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ (x, y) — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма. Для вещественной прямоугольной $k \times m$ матрицы A через $\| A \|$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначается граница S, $\nabla g(x), g_x(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x)$ — матрица Якоби отображения $g(x)$. Символом $\mathsf{col}(x_1, \ldots, x_m)$ обозначаем вектор-столбец в $\mathbb{R}^m$ с координатами x_i. Обозначение $\mathsf{col}(x^1, \ldots, x^k)$, где x^i — векторы-столбцы разной размерности, используется для вектор-столбца, составленного из данных векторов. Через $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ и C будем обозначать соответственно пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_1}$, $\| \cdot \|_{\mathbb{L}_2}$, $\| \cdot \|_C$.

Мы рассматриваем управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \quad x(t_0) \in X^0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения, X^0 — заданное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x, а также удовлетворяют соответственно условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\| f_1(t, x) \| \le l_1(t)(1 + \| x \|), \tag{1.2}$$

$$\| f_2(t, x) \|_{n \times r} \le l_2(t), \tag{1.3}$$

где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$.

Решением (*траекторией*) *системы* (1.1), *отвечающим управлению* $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, называется абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1.1) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Для любых $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ существует единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, которое будем обозначать как $x(t, x^0, u(\cdot))$.

Пусть заданы k интегральных функционалов $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ вида

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[Q_i(t, x(t)) + u^\top(t) R_i(t, x(t)) u(t) \Big] dt, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Здесь $x(t)$ — решение системы (1.1), отвечающее управлению $u(t)$ и начальному вектору x^0, функции $Q_i(t,x)$ и симметричные матрицы $R_i(t,x)$ предполагаются непрерывными на $[t_0,t_1]\times\ \mathbb{R}^n$.

Пару функций $(x(\cdot),u(\cdot))$ назовем *управляемым процессом*, если $(x(\cdot),u(\cdot))$ удовлетворяют уравнению (1.1). Пусть задан вектор $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_k)\in\mathbb{R}^r$ с положительными координатами.

О п р е д е л е н и е 1. Множеством достижимости $G(t_1)$ системы (1.1) будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управляемым процессам $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющим условиям

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))\le\mu_i,\quad i=1,\ldots,k. \tag{1.4}$$

Обозначим через $J(x(\cdot),u(\cdot))=(J_1(x(\cdot),u(\cdot)),\ldots,J_k(x(\cdot),u(\cdot)))$ векторный функционал, компонентами которого являются функционалы $J_i(x(\cdot),u(\cdot))$. Рассмотрим следующую многокритериальную задачу оптимального управления для системы (1.1):

$$J(x(\cdot),u(\cdot))\to\min,\quad x(t_0)\in X^0,\quad x(t_1)=x^1,\quad u(\cdot)\in\mathbb{L}_2, \tag{1.5}$$

где x^1 — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$. Управляемый процесс $(x(\cdot),u(\cdot))$ назовем допустимым в задаче (1.5), если $x(t_0)\in X^0,\ x(t_1)=x^1$. Напомним следующие определения из теории многокритериальной оптимизации (см., например, [15]).

О п р е д е л е н и е 2. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется эффективным (неулучшаемым, оптимальным по Парето) в задаче (1.5), если не существует допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ такого, что

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))\le J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)),\quad i=1,\ldots,k,\quad \text{и}\quad \exists\ i_0\ J_{i_0}(x(\cdot),u(\cdot))<J_{i_0}(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)). \tag{1.6}$$

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется локально эффективным (локально оптимальным по Парето), если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющего неравенствам $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}}<\varepsilon$, $\|u(\cdot)-\hat{u}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}<\varepsilon$, не выполняется (1.6).

О п р е д е л е н и е 3. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется слабо эффективным (оптимальным по Слейтеру) в задаче (1.5), если не существует допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ такого, что

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))<J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)),\quad i=1,\ldots,k. \tag{1.7}$$

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется слабо локально эффективным (локально оптимальным по Слейтеру), если существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющего неравенствам $\|x(\cdot)-\hat{x}(\cdot)\|_{\mathbb{C}}<\varepsilon$, $\|u(\cdot)-\hat{u}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}<\varepsilon$, не выполняется (1.7).

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $(x(t),u(t))$ — управляемый процесс. Линейная система

$$\dot{\delta x}=A(t)\delta x+B(t)\delta v,$$

где $A(t)=\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t))+\dfrac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u(t)],\ B(t)=f_2(t,x(t))$, называется линеаризацией системы (1.1) вдоль $(x(t),u(t))$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть функции* $f_1(t,x),f_2(t,x)$ *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.3), *множество* X^0 *ограничено и существуют* $i,\ 1\le i\le k,\ \alpha>0$ *такие, что* $Q_i(t,x)\ge0,\ u^\top R_i(t,x)u\ge\alpha\|u\|^2$ *для всех* $(t,x,u)\in[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$. *Тогда множество траекторий системы* (1.1), *удовлетворяющих ограничению* (1.4), *относительно компактно в пространстве* $\mathbb{C}=\ \mathbb{C}[t_0,t_1]$.

Доказательство. Пусть $(x(\cdot),u(\cdot))$ удовлетворяют ограничениям (1.4). Тогда, очевидно, $\| u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} \leq \dfrac{\mu_{i_0}}{\alpha}$, и $\| x(t_0) \| \leq K$, где K — радиус шара с центром в нуле, содержащего X^0. Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет рассуждения из доказательства [10, Proposition 3]. $\square$

Лемма 2. *Пусть $u_p(\cdot)$ — последовательность управлений из $\mathbb{L}_2$, x_p^0 — последовательность в $\mathbb{R}^n$. Если $u_p(\cdot)$ слабо сходится к $u(\cdot)$, а x_p^0 сходится к x^0 при $p \to \infty$, то последовательность траекторий $x_p(t) = x(t, x_p^0, u_p(\cdot))$ на $[t_0, t_1]$ равномерно сходится к траектории $x(t) = x(t, x^0, u(\cdot))$.*

Доказательство. Последовательность x_p^0 лежит в ограниченном множестве, поэтому в силу леммы 1 множество траекторий $x_p(\cdot)$ относительно компактно в пространстве $\mathbb{C}$ и, значит, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_p(t)$ равномерно на $[t_0, t_1]$ сходится к непрерывной вектор-функции $x(t)$. Очевидно, $x(t_0) = x^0$.

Представим $x_p(t)$ в виде

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} f_1(\tau, x_p(\tau))d\tau + \int_{t_0}^{t} f_2(\tau, x_p(\tau))u_p(\tau)d\tau, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{2.1}$$

В силу непрерывности f_1 и f_2 имеем $f_i(\tau, x_p(\tau)) \rightrightarrows f_i(\tau, x(\tau)),\ t_0 \leq \tau \leq t_1,\ i = 1, 2$. Второе слагаемое в правой части (2.1) представим в виде

$$\int_{t_0}^{t} f_2(\tau, x_p(\tau))u_p(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} f_2(\tau, x(\tau))u_p(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \left[f_2(\tau, x_p(\tau)) - f_2(\tau, x(\tau))\right] u_p(\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Так как $u_p(\cdot)$ ограничена в $\mathbb{L}_2$, а $f_2(\tau, x_p(\tau)) \rightrightarrows f_2(\tau, x(\tau))$, то второе слагаемое в правой части (2.2) стремится к нулю. В силу слабой сходимости $u_p(\cdot)$ к $u(\cdot)$

$$\int_{t_0}^{t} f_2(\tau, x(\tau))u_p(\tau)d\tau \to \int_{t_0}^{t} f_2(\tau, x(\tau))u(\tau)d\tau, \quad p \to \infty,$$

для любого $t_0 \leq t \leq t_1$. Переходя в обеих частях равенства (2.1) к пределу, получим, что $x(t) = x(t, x^0, u(\cdot))$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $u_p(\cdot) \to u(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$, $x_p^0 \to x^0$, $x(t, x_p^0, u_p(\cdot)) = x_p(t)$, $x(t, x^0, u(\cdot))$=x(t) и линеаризованная вдоль $(x(\cdot), u(\cdot))$ система (1.1) вполне управляема. Тогда для всех достаточно больших p линеаризованная вдоль $(x_p(\cdot), u_p(\cdot))$ система также будет вполне управляемой.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $x_p(t) \rightrightarrows x(t),\ t_0 \leq t \leq t_1$. Дальнейшее доказательство проводится по схеме [10, Lemma 1], так как требует только равномерной сходимости траекторий и сходимости управлений в $\mathbb{L}_2$. $\square$

Лемма 4. *Функционалы $J_i(x(\cdot), u(\cdot)),\ i = 1, \ldots, k$ непрерывны в $\mathbb{C} \times \mathbb{L}_2$.*

Доказательство. Для любых $u(\cdot), \bar{u}(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, $x(\cdot), \bar{x}(\cdot) \in \mathbb{C},\ i = 1, \ldots, k$, справедлива оценка

$$|J_i(x(\cdot), u(\cdot)) - J_i(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))|$$

$$= \Bigg| \int_{t_0}^{t_1} \Bigg(\big(Q_i(t, x(t)) - Q_i(t, \bar{x}(t))\big) + \big(u^\top(t) - \bar{u}^\top(t)\big) R_i(t, x(t))u(t)$$

$$+\bar{u}^\top(t)R_i(t,x(t))(u(t)-\bar{u}(t))+\bar{u}^\top(t)\big(R_i(t,x(t))-R_i(t,\bar{x}(t))\big)\bar{u}(t)\Big)dt\Big|$$
$$\le \max_t \| Q_i(t,x(t))-Q_i(t,\bar{x}(t)) \| \cdot|t_1-t_0|$$
$$+\| u(\cdot)-\bar{u}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}\| R_i(\cdot,x(\cdot)) \|_{\mathbb{C}} \big(\| u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}+\| \bar{u}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}\big)$$
$$+\max_t \| R_i(t,x(t))-R_i(t,\bar{x}(t)) \| \cdot \| \bar{u}(\cdot) \|^2_{\mathbb{L}_2}. \tag{2.3}$$

Зафиксируем $\delta>0$ и рассмотрим $x(\cdot)$ такие, что $\| x(\cdot)-\bar{x}(\cdot) \|_{\mathbb{C}}\le\delta$. Множество $K=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \| x(t)-\bar{x}(t) \|\le\delta,\ t_0\le t\le t_1\}$ компактно в $\mathbb{R}^{n+1}$. Из равномерной непрерывности функций $Q_i(t,x)$ и $R_i(t,x)$ на K следует, что $Q_i(t,x(t))\rightrightarrows Q_i(t,\bar{x}(t)),\ R_i(t,x(t))\rightrightarrows R_i(t,\bar{x}(t))$ при $\| x(\cdot)-\bar{x}(\cdot) \|_{\mathbb{C}}\to 0$. Следовательно, правая часть неравенства (2.3) стремится к нулю при $\| u(\cdot)-\bar{u}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}\to 0,\ \| x(\cdot)-\bar{x}(\cdot) \|_{\mathbb{C}}\to 0$. Лемма доказана. □

3. Условия оптимальности для граничных процессов

Управляемый процесс $(x(\cdot),u(\cdot))$, удовлетворяющий ограничениям (1.4), будем называть *граничным*, если $x(t_1)\in\partial G(t_1)$.

Теорема 1. *Пусть управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ является граничным, и пусть линеаризация системы* (1.1) *вдоль $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ вполне управляема. Тогда $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ является локально слабо эффективным решением в задаче* (1.5)*, где $x^1=\hat{x}(t_1)$ и $J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))=\mu_i$ хотя бы для одного $i,\ 1\le i\le k$.*

Доказательство. Необходимо доказать, что найдется $\varepsilon>0$ такое, что не существует допустимого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$, для которого выполнены условия

$$\| x(\cdot)-\hat{x}(\cdot) \|_{\mathbb{C}}<\varepsilon,\quad \| u(\cdot)-\hat{u}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}<\varepsilon,\quad x(t_1)=\hat{x}(t_1)\ \text{ и }\ J_i(x(\cdot),u(\cdot))<J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) \tag{3.1}$$

для всех $i=1,\ldots,k$. Допустим противное. Тогда для каждого $p\in\mathbb{N}$ существует допустимый процесс $(x_p(\cdot),u_p(\cdot))$, для которого выполняются неравенства (3.1) при $\varepsilon=1/p$. Допустимый процесс $(x_p(\cdot),u_p(\cdot))$ порождается начальным вектором ${x_p}^0=x_p(t_0)\in X^0$ и управлением $u_p(\cdot)\in\mathbb{L}_2$.

В силу леммы 3 найдется $\bar{p}\in\mathbb{N}$ такое, что линеаризованная вдоль $(x_{\bar{p}}(\cdot),u_{\bar{p}}(\cdot))$ система (1.1) будет вполне управляемой. Обозначим

$$\delta=\frac{1}{2}\min_{1\le i\le k}\{J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))-J_i(x_{\bar{p}}(\cdot),u_{\bar{p}}(\cdot))\}>0,\quad \bar{x}^0=x_{\bar{p}}(t_0).$$

Из непрерывности функционалов J_i (см. лемму 4) следует, что найдется $\sigma>0$ такое, что для любого управления $u(\cdot)$, удовлетворяющего неравенству $\| u_{\bar{p}}(\cdot)-u(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2}<\sigma$, и отвечающей $u(\cdot)$ траектории системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=\bar{x}^0$ имеет место неравенство

$$|J_i(x_{\bar{p}}(\cdot),u_{\bar{p}}(\cdot))-J_i(x(\cdot),u(\cdot))|<\frac{\delta}{2},\quad i=1,\ldots,k,$$

и, следовательно,

$$J_i(x(\cdot),u(\cdot))\le J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))-\frac{\delta}{2}\le\mu_i,\quad i=1,\ldots,k.$$

Определим отображение $F:\mathbb{L}_2\to\mathbb{R}^n$ равенством $F(u(\cdot))=x(t_1)$, где $x(t)$ — отвечающая $u(\cdot)$ траектория системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=\bar{x}^0$. Тогда $F(u_{\bar{p}}(\cdot))=x^1$ и в силу [10, Lemma 2] производная Фреше $F'(u_{\bar{p}}(\cdot))$ определяется равенством $F'(u_{\bar{p}}(\cdot))=\delta x(t_1)$. Здесь $\delta x(t_1)$ — решение линеаризованной вдоль $(x_{\bar{p}}(\cdot),u_{\bar{p}}(\cdot))$ системы

$$\delta\dot{x}(t)=A_{\bar{p}}(t)\delta x(t)+B_{\bar{p}}(t)v(t),\quad \delta x(t_0)=0. \tag{3.2}$$

Так как система (3.2) вполне управляема, то $\mathsf{Im}F'(u_{\bar p}(\cdot)) = \mathbb{R}^n$, т. е. отображение $F'(u_{\bar p}(\cdot))$ сюръективно. По теореме Грейвса — Люстерника (см., например, [16; 17]) существует окрестность V точки $x^1 = F(u_{\bar p})$, которая принадлежит образу шара $\{u(\cdot) :\| u(\cdot) - u_{\bar p}(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \sigma\}$ при отображении F. Поскольку данный образ состоит из концов траекторий системы (1.1), отвечающих управлениям $u(\cdot)$ и удовлетворяющих начальному условию $x(t_0) = \bar x^0 \in X^0$, то $V \subset G(t_1)$. Это противоречит условию $x^1 \in \partial G(t_1)$.

Если $J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) < \mu_i$ для всех i, то, взяв в качестве $(x_{\bar p}(\cdot), u_{\bar p}(\cdot))$ пару $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ и придерживаясь приведенных выше рассуждений, приходим к противоречию. Поэтому $J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) = \mu_i$, по крайней мере для одного i. Теорема доказана. □

Применим к функционалам задачи (1.5) чебышевскую свертку критериев. Если управляемый процесс $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ доставляет локальный минимум в задаче (1.5), то найдутся числа $w_i > 0,\ i = 1, \dots, k,\ \sum w_i = 1$, такие, что $(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))$ доставляет локальный минимум функционалу

$$J_w(x(\cdot), u(\cdot)) = \max_{1\le i\le k} w_i J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \tag{3.3}$$

в классе процессов, удовлетворяющих условиям $x(t_0) \in X^0,\ x(t_1) = x^1$. Доказательство этого факта вполне элементарно, если $J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot)) > 0,\ i = 1, \dots, k$, достаточно взять коэффициенты $w_i = \dfrac{1}{J_i(\hat x(\cdot), \hat u(\cdot))},\ i = 1, \dots, k$ (см., например, [15]). Рассматриваемый критерий (3.3) не очень удобен, так как функционал J_w не дифференцируем. Однако по известной схеме, используемой, например, в линейных задачах целевого программирования [18], задачу минимизации функционала (3.3) можно заменить эквивалентной задачей

$$v \to \min, \quad w_i J(x(\cdot), u(\cdot)) \le v \tag{3.4}$$

в классе процессов, для которых $x(t_1) = x^1,\ x(t_0) \in X^0$. Действительно, из неравенств

$$w_i J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \le v$$

следует, что $J_w(x(\cdot), u(\cdot)) \le v$ и задача минимизации (3.4) эквивалентна задаче минимизации $J_w(x(\cdot), u(\cdot))$ по $(x(\cdot), u(\cdot))$. Систему (1.1) дополним дифференциальными уравнениями

$$\dot x_{n+i} = Q_i(t, x) + u^\top R_i(t, x)u, \quad i = 1, \dots, k, \tag{3.5}$$

с нулевыми начальными условиями $x_{n+i}(t_0) = 0,\ i = 1, \dots, k$, и уравнением

$$\dot x_{n+k+1} = 0; \tag{3.6}$$

начальное условие для x_{n+k+1} не задано. Будем вначале считать, что X^0 состоит из единственной точки $X^0 = \{x^0\}$. Тогда задачу 3.4 мы можем представить в виде

$$\psi_0(\bar x(t_0), \bar x(t_1)) = x_{n+k+1}(t_1) \to \min \tag{3.7}$$

при ограничениях, задаваемых дифференциальными уравнениями (1.1), (3.5), (3.6) и системой ограничений для правого и левого концов траекторий:

$$\psi_1(\bar x(t_0), \bar x(t_1)) \le 0, \quad \psi_2(\bar x(t_0), \bar x(t_1)) = 0.$$

Здесь и далее $\bar x, \bar y \in \mathbb{R}^{n+k+1}$ — векторы с координатами

$$\bar x = \mathsf{col}(x_1, \dots, x_{n+k+1}) = \mathsf{col}(x, x_{n+1}, \dots, x_{n+k+1}),$$

$$\bar y = \mathsf{col}(y_1, \dots, y_{n+k+1}) = \mathsf{col}(y, y_{n+1}, \dots, y_{n+k+1}), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Функции $\psi_1 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^k$ и $\psi_2 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{2n+k}$ определены равенствами

$$\psi_1(\bar x, \bar y) = \mathsf{col}(w_1 y_{n+1} - y_{n+k+1}, w_2 y_{n+2} - y_{n+k+1}, \dots, w_k y_{n+k} - y_{n+k+1}),$$

$$\psi_2(\bar x,\bar y)=\mathsf{col}(x_1-x_1^0,\dots,x_n-x_n^0,0,\dots,0,y_1-x_1^1,\dots,y_n-x_n^1)=\mathsf{col}(x-x^0,0_k,y-x^1).$$

Таким образом, $\psi_1(\bar x(t_0),\bar x(t_1))$ зависит только от $\bar x(t_1)$, а $\psi_2(\bar x(t_0),\bar x(t_1))$ от $\bar x(t_0)$ и $\bar x(t_1)$.
Рассмотрим функцию Понтрягина следующего вида

$$H(t,p,\nu,x,u)=p^\top(f_1(t,x)+f_2(t,x)u)-\sum_{i=1}^k\nu_i\Big(Q_i(t,x)+u^\top R_i(t,x)u\Big).$$

Теорема 2. *Пусть допустимый процесс $(\hat x(\cdot),\hat u(\cdot))$ есть решение задачи* (3.4)*. Тогда существуют вектор $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_k)\neq 0$ с неотрицательными координатами и решение $p(t)$ дифференциального уравнения*

$$\dot p(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}\,(t,p(t),\nu,\hat x(t),\hat u(t)) \tag{3.8}$$

такие, что

$$H(t,p(t),\nu,\hat x(t),\hat u(t))=\max_{u\in\mathbb{R}^r}H(t,p(t),\nu,\hat x(t),u) \tag{3.9}$$

и, следовательно,

$$\hat u(t)=\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^k\nu_iR_i(t,\hat x(t))\Big)^{-1}f_2\,(t,\hat x(t))\,p(t). \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\hat{\bar x}(t)$ вектор-функцию

$$\hat{\bar x}(t)=\mathsf{col}\,(\hat x(t),x_{n+1}(t),\dots,x_{n+k+1})\,,$$

где $x_i(t),\quad i=n+1,\dots,n+k+1$ — решения дифференциальных уравнений (3.5), (3.6), получаемые при подстановке в их правую часть $\hat x(t)$, $\hat u(t)$. Тогда управляемый процесс $\big(\hat{\bar x}(\cdot),\hat u(\cdot)\big)$ доставляет локальное решение в задаче (3.7) для системы (1.1), (3.5), (3.6) при ограничениях

$$\psi_1(\bar x(t_0),\bar x(t_1))\le 0,\quad \psi_2(\bar x(t_0),\bar x(t_1))=0. \tag{3.11}$$

Поскольку локальный минимум в $\mathbb{L}_2$ допускает игольчатые вариации управления, то процесс $(\hat{\bar x}(t),\hat u(t))$ удовлетворяет принципу максимума.

Введем функцию Понтрягина

$$H_1(t,\bar p,\bar x,u)=p^\top(f_1(t,x)+f_2(t,x)u)+\sum_{i=1}^kp_{n+1}\big(Q_i(t,x)+u^\top R_i(t,x)u\big),$$

где $\bar p=\mathsf{col}(p_1,\dots,p_n,p_{n+1},\dots,p_{n+k})=\mathsf{col}(p,,p_{n+1},\dots,p_{n+k})$, и функцию

$$l(\bar x,\bar y)=\lambda_0\psi_0(\bar x,\bar y)+\lambda_1^\top\psi_1(\bar x,\bar y)+\lambda_2^\top\psi_2(\bar x,\bar y).$$

Тогда (см.,например, [19, §5, т. 2]) найдутся $(\lambda_0,\lambda^1,\lambda^2)\neq 0$, $\lambda_0\in\mathbb{R}^n$, $\lambda^1\in\mathbb{R}^k$, $\lambda^2\in\mathbb{R}^{2n+k}$, $\lambda_0\ge 0$, $\lambda_1\ge 0$ и функция $\bar p(t)$ такие, что

$$\dot{\bar p}(t)=-\frac{\partial H_1}{\partial\bar x}\left(t,\bar p(t),\hat{\bar x}(t),\hat u(t)\right), \tag{3.12}$$

выполнены условия трансверсальности

$$\bar p(t_0)=l_{\bar x}\left(\hat{\bar x}(t_0),\hat{\bar x}(t_1)\right),\quad \bar p(t_1)=-l_{\bar y}\left(\hat{\bar x}(t_0),\hat{\bar x}(t_1)\right), \tag{3.13}$$

условие дополняющей нежесткости

$$\lambda^{1\top}\psi_1(\hat{\bar x}(t_0),\hat{\bar x}(t_1))=0$$

и условие максимума

$$H_1(t,\bar{p}(t),\hat{\bar{x}}(t),\hat{u}(t)) = \max_{u\in\mathbb{R}^r} H(t,\bar{p}(t),\hat{\bar{x}}(t),u). \tag{3.14}$$

Представим вектор $\lambda^2 \in \mathbb{R}^{2n+k}$ в виде $\lambda^2 = \begin{pmatrix}\lambda^2_I\\ \lambda^2_{II}\end{pmatrix}$, где $\lambda^2_I \in \mathbb{R}^{n+k}$, $\lambda^2_{II} \in \mathbb{R}^n$. Тогда из условий трансверсальности (3.13) будем иметь

$$\bar{p}(t_0) = \begin{pmatrix}\lambda^2_I\\ 0\end{pmatrix}, \quad \bar{p}(t_1) = -\begin{pmatrix}\lambda^2_{II}\\ \lambda^1_w\\ \lambda_0 - \sum\lambda^1_i\end{pmatrix},$$

где обозначено $\lambda^1_w = \mathsf{col}(\lambda^1_1 w_1,\ldots,\lambda^1_k w_k)$.

Из уравнений (3.12) вытекает

$$\dot{p}_{n+i}(t) = 0, \quad i = 1,\ldots,k+1,$$

следовательно, $\dot{p}_{n+i}(t) = \mathrm{const}$. Учитывая условия трансверсальности, имеем $p_{n+i}(t) \equiv w_i\lambda^1_i$, $i = 1,\ldots,k$, и $p_{n+k+1}(t) \equiv 0$. Из последнего равенства получаем $\lambda_0 - \sum_{i=1}^k \lambda^1_i = 0$. Допустим, что $\lambda_0 = 0$, тогда $\sum\lambda^1_i = 0$. Учитывая неравенства $\lambda^1_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,k$, выводим $\lambda^1 = 0$.

Соотношение (3.14) в этом случае принимает вид

$$p^\top(t) f_2(t,\hat{x}(t))\hat{u}(t) = \max_{u\in\mathbb{R}^2} p^\top(t) f_2(t,\hat{x}(t))u, \tag{3.15}$$

где $\dot{p}(t) = -A^\top(t)p(t)$. Здесь $A(t)$ — матрица линеаризованной вдоль $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ системы (1.1). Пусть матрица $B(t)$ определяется равенством $B(t) = f_2(t,\hat{x}(t))$. Равенство (3.15) возможно только при $p^\top(t)B(t) \equiv 0$. Так как по условию пара $(A(t),B(t))$ вполне управляема, то из условия $p^\top(t)B(t) \equiv 0$ следует, что $p(t) \equiv 0$. Тогда из условий трансверсальности получаем равенство $\lambda^2 = 0$. Таким образом, $(\lambda_0,\lambda^1,\lambda^2) = 0$, что противоречит утверждению принципа максимума. Наше допущение, что $\lambda_0 = 0$, привело к противоречию, значит, $\lambda_0 > 0$ и, следовательно, $\sum\lambda^1_i = \lambda_0 > 0$, т.е. λ^1 — ненулевой вектор.

Введем неотрицательные величины ν_i равенствами $\nu_i = \lambda^1_i w_i,\ i = 1,\ldots,k$, очевидно, $\sum_i \nu_i > 0$. В данных обозначениях соотношение максимума (3.14) перейдет в (3.9). Приравнивая нулю градиент H по u и учитывая, что $\sum_{i=1}^k \nu_i R_i(t,\hat{x}(t))$ — невырожденная матрица, получим равенство (3.10). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. Если условие $J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot)) > 0,\ i = 1,\ldots,k$, не выполнено, формулировка теоремы 2 остается справедливой. В этом случае можно определить $M = \max_i |J_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))| + 1$ и ввести функционалы $\tilde{J}_i$, добавляя к J_i константу M:

$$\tilde{J}_i(x(\cdot),u(\cdot)) = J_i(x(\cdot),u(\cdot)) + M.$$

Очевидно, $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ является локально оптимальным по Слейтеру процессом для векторного функционала $\tilde{J} = (\tilde{J}_1\ldots,\tilde{J}_k)$. Положим в этом случае $w_i = \dfrac{1}{\tilde{J}_i(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))} > 0$, тогда $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ локально минимизирует функционал

$$\max_i w_i\tilde{J}_i(x(\cdot),u(\cdot)) = \max_i w_i\left(J_i(x(\cdot),u(\cdot)) + M\right).$$

В этом случае ограничения (3.4) примут вид $w_i J_i(x(\cdot),u(\cdot)) + w_i M \leq v$ и схема доказательства теоремы полностью сохраняется. По-другому будут только выглядеть условия дополняющей нежесткости, которые в окончательной формулировке теоремы не используются.

Предположим далее, что X^0 имеет вид $X^0 = \{x\colon g_j(x) \leq 0,\ j = 1,\ldots,m\},\ m \geq 1$, где $g_j(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Теорема 3. *Пусть допустимый процесс* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *есть локальное решение задачи* (3.4) *и линеаризованная вдоль* $\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)$ *система вполне управляема. Тогда существуют векторы* $\nu \geq 0,\ \nu \neq 0,\ \gamma \geq 0$ *и вектор-функция* $p(t)$ *такие, что выполнены условия* (3.8)–(3.10) *и*

$$p(t_0) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \nabla g_j(\hat{x}(t_0)), \quad \gamma_j g_j(\hat{x}(t_0)) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Доказательство. Рассмотрим, как и ранее при доказательстве теоремы 2, управляемый процесс $(\hat{\bar{x}}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ для системы $(1.1), (3.5), (3.6)$. Терминальные ограничения имеют в рассматриваемой задаче вид (3.11), где

$$\psi_1 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{k+1} \ \text{ и } \ \psi_2 : \mathbb{R}^{n+k+1} \times \mathbb{R}^{n+k+1} \to \mathbb{R}^{n+k}$$

определяются соотношениями

$$\psi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \mathsf{col}(g(x), w_1 y_{n+1} - y_{n+k+1}, \ldots, w_k y_{n+k} - y_{n+k+1}),$$

$$\psi_2(\bar{x}, \bar{y}) = \mathsf{col}(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, y_1 - x_1^1, \ldots, y_n - x_n^1).$$

Определим функцию

$$l(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_0 \psi_0(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j g_j(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^1 (w_i y_{n+i} - y_{n+k+1}) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 x_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{k+i}^2 (y_i - x_i^1),$$

где $\lambda_0, \gamma_j, \lambda_i^1, \lambda_i^2$ — заданные параметры (множители Лагранжа). Из принципа максимума (см. [19, § 5, т. 2]) следует существование множителей $\lambda_0 \geq 0, \gamma \geq 0, \lambda^1 \geq 0, \lambda^2 \geq 0,\ (\lambda_0, \gamma, \lambda^1, \lambda^2) \neq 0$ и функций $\bar{p}(t)$ таких, что выполняются соотношения $(3.12), (3.14)$, условия трансверсальности (3.13) и условия дополняющей нежесткости

$${\lambda^1}^\top \psi_1(\hat{\bar{x}}(t_0), \hat{\bar{x}}(t_1)) = 0, \quad \gamma^\top g(x(t_0)) = 0.$$

Из условий трансверсальности имеем

$$\bar{p}(t_0) = \begin{pmatrix} \sum \gamma_i \nabla g_i(x(t_0)) \\ \lambda_I^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}(t_1) = \begin{pmatrix} \lambda_{II}^2 \\ \lambda_w \\ \lambda_0 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^1 \end{pmatrix}.$$

(см. обозначения в доказательстве теоремы 2). Дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2. □

Пусть управляемая система линейна:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{3.17}$$

вполне управляема на $[t_0, t_1]$, функционалы $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ имеют вид

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[x^\top(t) Q_i(t) x(t) + u(t)^\top R_i(t) u(t) \Big]\, dt,$$

где $Q_i(t), R_i(t)$ — непрерывные симметричные матрицы; $Q_i(t)$ неотрицательно определена, $R_i(t)$ положительно определена для всех $t \in [t_0, t_1]$; множество X^0 выпукло.

Теорема 4. *Пусть пара* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *является граничным процессом. Тогда* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *есть парето-оптимальное решение задачи* (3.4), *где* $x^1 = \hat{x}(t_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ в виде суммы

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = J_i^1(x(\cdot)) + J_i^2(u(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где

$$J_i^1(x(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} x^\top(t) Q_i(t) x(t) dt, \quad J_i^2(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} u^\top(t) R_i(t) u(t) dt.$$

Очевидно, J_i^1 выпуклый по $x(\cdot)$, а J_i^2 строго выпуклый по $u(\cdot)$ функционалы. Предположим, что процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ не является парето-оптимальным в задаче (3.4). Тогда найдется пара $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, удовлетворяющая ограничениям задачи (3.4) такая, что

$$J_i(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \leq J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, k,$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое. Следовательно, $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) \neq (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Если допустить, что $\bar{u}(\cdot) = \hat{u}(\cdot)$, то тогда $\bar{x}(t)$ и $\hat{x}(t)$ — две траектории одной и той же системы дифференциальных уравнений, приходящие в одну точку $\hat{x}(t_1) = x^1$. Из теоремы единственности решения тогда получим $\bar{x}(t) \equiv \hat{x}(t)$.

Таким образом, $\bar{u}(\cdot) \neq \hat{u}(\cdot)$. Для $0 \leq \alpha \leq 1$ положим

$$u_\alpha(\cdot) = \alpha \bar{u}(\cdot) + (1 - \alpha) \hat{u}(\cdot)$$

и обозначим через $x_\alpha(t)$ траекторию системы (3.17), порожденную управлением $u_\alpha(\cdot)$ и начальным вектором

$$x_\alpha(t_0) = \alpha \bar{x}(t_0) + (1 - \alpha) \hat{x}(t_0) \in X^0.$$

Тогда $x_\alpha(t) = \alpha \bar{x}(t) + (1 - \alpha) \hat{x}(t)$. В силу выпуклости J_i^1 и строгой выпуклости J_i^2 имеем $(i = 1, \ldots, k)$

$$J_i^1(x_\alpha(\cdot)) \leq \alpha J_i^1(\bar{x}(\cdot)) + (1 - \alpha) J_i^1(\hat{x}(\cdot)), \quad J_i^2(u_\alpha(\cdot)) < \alpha J_i^2(\bar{u}(\cdot)) + (1 - \alpha) J_i^2(\hat{u}(\cdot))$$

для всех $0 < \alpha < 1$, и, значит,

$$J_i(x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) < J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)), \quad i = 1, \ldots, k.$$

При $\alpha \to 0 \quad (x_\alpha(\cdot), u_\alpha(\cdot)) \to (\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ и, значит, пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ не является локально оптимальной по Слейтеру, что противоречит утверждению теоремы 1. $\square$

Из выпуклости функционалов $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$ и линейности ограничений задачи (3.16) следует существование коэффициентов $w_i \geq 0$, $\sum w_i = 1$ таких, что $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ минимизирует линейную свертку критериев

$$J_w(x(\cdot), u(\cdot)) = \sum_{i=1}^{k} w_i J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \to \min$$

при ограничениях (3.16). Этот факт следует из леммы Карлина [20]. Обозначим

$$Q_w(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i Q_i(t), \quad R_w(t) = \sum_{i=1}^{k} w_i R_i(t),$$

матрица $Q_w(t)$ неотрицательно определена, $R_w(t)$ положительно определена для любого $t \in [t_0, t_1]$. Пусть для простоты $X^0 = \{x^0\}$. Из принципа максимума, учитывая полную управляемость системы (3.16), получим, что существует решение $p(t)$ сопряженной системы такое, что

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2} R_w^{-1}(t) B^\top(t) p(t).$$

Для пары $(x(t), p(t))$ ($x(t)$ — отвечающая $\hat{u}$ траектория) получим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \dfrac{1}{2}B(t)R_w^{-1}(t)B^\top(t) \\ 2Q_w(t) & -A^\top(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix},$$

$x(t_0) = x^0,\ p(t_0) = p^0$.

Ограничения $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu_i$ можно заменить системой квадратичных неравенств

$$x^{0\top} S_w^{1i} x^0 + x^{0\top} S_w^{2i} p^0 + p^{0\top} S_w^{3i} p^0 \leq \mu_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{3.18}$$

относительно p^0. Здесь $S_w^{1i},\ S_w^{2i},\ S_w^{3i}$ — $n \times n$ матрицы, S_w^{1i} неотрицательно определены, а S_w^{3i} положительно определены (см., например, [21]). Хотя бы одно из неравенств (3.18) должно выполняться как равенство. Все граничные точки области достижимости содержатся среди решений управляемой системы, порождаемых решениями p^0 системы (3.18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Незнахин А.А., Ушаков В.Н.** Сеточный метод приближенного построения ядра выживаемости для дифференциального включения // Вычисл. математика и математическая физика. 2001. Т. 41, № 6. С. 895–908.
2. **Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320–328.
3. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Basel: Birkhäuser, 1997. 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9 .
4. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
5. **Filippova T.F.** Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity // AIP Conference Proc. 2016. Vol. 1773. P. 1–10. doi: 10.1063/1.4964998 .
6. **Ченцов А.Г.** Асимптотическая достижимость при возмущении интегральных ограничений в абстрактной задаче управления // Изв. вузов. Математика. 1995. № 2. С. 60–71; № 3 С. 62–73.
7. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805 .
8. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Series A: Math. Analysis. 2004. Vol. 11, no. 2-3. C. 255–267.
9. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls / K.G. Guseinov, O. Ozer, E. Akyar, V.N. Ushakov // Nonlinear Diff. Eq. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. **Gusev M.I., Zykov I.V.** On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, no. 1. P. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
11. **Gusev M.I.** An algorithm for computing boundary points of reachable sets of control systems under integral constraints // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 1. P. 44–51. doi: 10.15826/umj.2017.1.003 .
12. **Baier R., Gerdts M., Xausa I.** Approximation of reachable sets using optimal control algorithms // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2013. Vol. 3, no. 3. P. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .
13. **Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** Построение множества достижимости интегратора Брокетта // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, № 5. С. 707–724.
14. **Горнов А.Ю.** Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.
15. **Подиновский В.В., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
16. **Dontchev A.L.** The Graves theorem revisited // J. Convex Anal. 1996. Vol. 3, no. 1. P. 45–53.
17. **Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.** Теорема Люстерника и теория экстремума // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 6. С. 11–46.

18. **Штойер Р.** Многокритериальная оптимизация Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
19. **Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал пресс, 2006. 144 с.
20. **Карлин С.** Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 835 с.
21. **Gusev M.I., Zykov I.V.** A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2, P. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

Поступила 31.10.2017

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Зыков Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: zykoviustu@mail.ru

REFERENCES

1. Neznakhin A.A., Ushakov V.N. A grid method for the approximate construction of the viability kernel for a differential inclusion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2001, vol. 41, no. 6, pp. 846–859.
2. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
3. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Basel, Birkhäuser, 1997, 321 p. ISBN: 978-0-8176-3699-9 .
4. Kostousova E.K. External and internal parallelotopic estimates for attainability sets. *Vychisl. Tekhnol.*, 1998, vol. 3, no. 2, pp. 11–20 (in Russian).
5. Filippova T.F. Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity. *AIP Conference Proc.*, 2016, vol. 1773, pp. 1–10. doi: 10.1063/1.4964998 .
6. Chentsov A.G. Asymptotic attainability with perturbation of integral constraints in an abstract control problem. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1995, vol. 39, part I: no. 3, pp. 60–71, part II: no. 2, pp. 57–68.
7. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* Dordrecht, Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997, 322 p. doi: 10.1007/978-94-017-0805-0 .
8. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under L_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
9. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Diff. Eq. and Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of boundary points of reachable sets for a system with integrally constrained control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 4082–4087. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.792 .
11. Gusev M.I. An algorithm for computing boundary points of reachable sets of control systems under integral constraints. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 1, pp. 44–51. doi: 10.15826/umj.2017.1.003 .
12. Baier R., Gerdts M., Xausa I. Approximation of reachable sets using optimal control algorithms. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 519–548. doi: 10.3934/naco.2013.3.519 .

13. Vdovin S.A., Taras'ev A.M., Ushakov V.N. Construction of an attainability set for the Brockett integrator. *J. Appl. Math. Mech.*, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 631–646. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2004.09.001 .
14. Gornov A.Yu. *Vychislitel'nye tekhnologii resheniya zadach optimal'nogo upravleniya.* [The computational technologies for solving optimal control problems]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009, 278 p. ISBN: 978-5-02-023284-6 .
15. Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach.* [Pareto optimal solutions of multicriteria problems]. Moscow, Nauka Publ., 1982, 256 p. ISBN (2nd ed.): 978-5-9221-0812-6 .
16. Dontchev A.L. The Graves theorem revisited. *J. Convex Anal.*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 45–53.
17. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskii N.P. Lyusternik's theorem and the theory of extrema. *Russian Math. Surveys*, 1980, vol. 35, no. 6, pp. 11–51. doi: 10.1070/RM1980v035n06ABEH001973 .
18. Steuer R.E. *Multiple criteria optimization: theory, computation, and application.* N Y, Willey, 1986, 546 p. ISBN: 0471859702 . Translated to Russian under the title *Mnogokriterial'naya optimizatsiya. Teoriya, vychisleniya i prilozheniya.* M.: Radio i svjaz' Publ., 1992. 504 p.
19. Arutyunov A.V., Magaril-Ilyaev G.G., Tikhomirov V.M. *Printsip maksimuma Pontryagina. Dokazatel'stvo i prilozheniya.* [Pontryagin maximum principle. Proof and applications]. Moscow, Faktorial Press, 2006, 144 p. ISBN: 5886880828 .
20. Karlin S. *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics. Vol. I, II.* London, Paris, Pergamon Press. 1959, Vol. I: 433 p. ISBN: 9781483222981 . Vol. II: 386 p. ISBN: 9781483224008 . Translated to Russian under the title *Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovanii i ekonomike.* Moscow, Mir Publ., 1964, 835 p.
21. Gusev M.I., Zykov I.V. A numerical method for solving linear-quadratic control problems with constraints. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

The paper was received by the Editorial Office on October 31, 2017.

Mikhail Ivanovich Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: gmi@imm.uran.ru .

Igor' Vladimirovich Zykov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: zykoviustu@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.97

ВАРИАЦИИ ТИПА v-ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ [1]

А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский

Для общей задачи оптимального управления с фазовым ограничением предлагается доказательство принципа максимума с помощью v-замены времени $t \mapsto \tau$, при которой исходное время становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, а дополнительное управление $v(\tau) \geqslant 0$ кусочно-постоянно, и его значения служат аргументами новой задачи. Фазовое ограничение порождает континуум ограничений неравенства в этой задаче, поэтому необходимые условия экстремума в ней содержат меру. Переписав эти условия в терминах исходной задачи, мы получаем непустой компакт из наборов множителей Лагранжа, которые обеспечивают выполнение принципа максимума на конечном множестве значений управления и времени, соответствующем данной v-замене. Компакты, порожденные всевозможными кусочно-постоянными v-заменами, частично упорядочены по включению, и поэтому образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности, в котором принцип максимума выполнен для всех значений управления и времени.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, v-замена времени, фазовое ограничение, полубесконечная задача, множители Лагранжа, мера Лебега — Стилтьеса, функция ограниченной вариации, конечнозначное условие максимума, центрированная система компактов.

A. V. Dmitruk, N. P. Osmolovskii. Variations of the v-change of time in problems with state constraints.

For a general optimal control problem with a state constraint, we propose a proof of the maximum principle based on a v-change of the time variable $t \mapsto \tau$, under which the original time becomes yet another state variable subject to the equation $dt/d\tau = v(\tau)$, while the additional control $v(\tau) \geqslant 0$ is piecewise constant, and its values are arguments of the new problem. Since the state constraint generates a continuum of inequality constraints in this problem, the necessary optimality conditions involve a measure. Rewriting these conditions in terms of the original problem, we get a nonempty compact set of collections of Lagrange multipliers that fulfil the maximum principle on a finite set of values of the control and time variables corresponding to the v-change. The compact sets generated by all possible piecewise constant v-changes are partially ordered by inclusion, thus forming a centered family. Taking any element of their intersection, we obtain a universal optimality condition, in which the maximum principle holds for all values of the control and time.

Keywords: Pontryagin maximum principle, v-change of time, state constraint, semi-infinite problem, Lagrange multipliers, Lebesgue–Stieltjes measure, function of bounded variation, finite-valued maximum condition, centered family of compact sets.

MSC: 49K15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-76-92

1. Введение

Задачи с фазовыми ограничениями привлекали внимание специалистов с самого начала развития теории оптимального управления (см., например, [1]). При этом, как хорошо известно, обобщение принципа максимума Понтрягина на эти задачи было сопряжено со значительными трудностями, поскольку здесь мы имеем дело с бесконечным (континуальным) числом ограничений неравенства. В работе А. Я. Дубовицкого и А. А. Милютина [2] было предложено трактовать фазовое ограничение как ограничение в пространстве C непрерывных функций на данном отрезке, и тогда множитель Лагранжа, соответствующий данному ограничению, представляет собой элемент сопряженного пространства C^*, т. е. меру Лебега — Стилтьеса [3].

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-01-00585 и 17-01-00805).

При таком подходе необходимые условия слабого минимума (т. е. условия стационарности) получить уже несложно (см., например, [2; 4; 5]). Однако переход от этих условий к принципу максимума (т. е. к необходимым условиям сильного минимума) по-прежнему остается непростым.

Известные способы доказательства принципа максимума для задач с фазовыми ограничениями используют либо так называемую v-замену времени [2; 6–9], либо овыпукление правой части управляемой системы [4; 6; 9–11], либо функции штрафа [12; 13], либо вариационный принцип Экланда [14; 15] [2]. Отдельно упомянем самое первое доказательство, предложенное Р. В. Гамкрелидзе [1, § 6] в предположении о "простой" структуре множества выхода оптимальной траектории на фазовую границу, а именно, что это множество состоит из конечного числа отрезков. В этом случае на каждом таком отрезке можно продифференцировать фазовое ограничение и перейти к смешанным ограничениям типа равенства, т. е., по сути дела, перейти к задаче Лагранжа классического вариационного исчисления. (О связи этого подхода с методом Дубовицкого — Милютина см. [16; 17].) Все эти доказательства технически довольно сложны и не вполне освоены даже специалистами, не говоря уже о более широком круге читателей, пусть и с хорошей математической подготовкой. Поэтому вопрос о более простом и ясном доказательстве остается актуальным.

Общая v-замена времени состоит в переходе от исходного времени t к новому времени τ, при котором исходное время $t = t(\tau)$ становится еще одной фазовой переменной, подчиненной уравнению $dt/d\tau = v(\tau)$, где $v(\tau) \geqslant 0$ есть еще одно управление. Принципиальный момент состоит здесь в том, что эта замена не взаимно-однозначна (там, где $v(\tau) = 0$), и по этой причине малые вариации управления $v(\tau)$ порождают немалые (так называемые "понтрягинские") вариации исходного управления $u(t)$. Использование этого приема требует однако хорошего владения теорией функций действительного переменного.

В конце 1990-х годов А. А. Милютин предложил использовать упрощенный вариант v-замены, с *кусочно-постоянной* функцией $v(\tau)$. Этим способом он доказал принцип максимума для общей понтрягинской задачи, т. е. задачи с концевыми ограничениями, но без фазовых. В случае кусочно-постоянной v-замены малые вариации управления $v(\tau)$ порождают по сути дела игольчатые вариации исходного управления $u(t)$ с небольшим, но существенным отличием от стандартных (подробнее об этом ниже). Преимущество вариаций типа v-замены по сравнению со стандартными игольчатыми вариациями (пакетами иголок) состоит в следующем: а) оптимальное управление может быть произвольной измеримой ограниченной функцией, тогда как для использования игольчатых вариаций надо требовать его кусочной непрерывности; б) v-замена дает гладкую управляемую систему, определенную, по крайней мере, в целой окрестности оптимального процесса, тогда как игольчатые вариации приводят к задаче, функции которой определены лишь на неотрицательном ортанте конечномерного пространства (точнее, в его пересечении с окрестностью нуля), соответствующем ширинам иголок в данном пакете.

Цель настоящей статьи — показать возможность применения кусочно-постоянной v-замены для доказательства принципа максимума в задачах с фазовыми ограничениями. Доказательство оказалось, на наш взгляд, довольно простым — оно доступно студентам с хорошей математической подготовкой, и может служить основой для несложного спецкурса. Общая схема его такова. Кусочное постоянство функции $v(\tau)$ позволяет перейти к задаче *в конечномерном пространстве*, аргументами которой служат ее значения, а также начальное значение фазовой переменной x. Наличие фазовых ограничений приводит к тому, что в этой конечномерной задаче имеется бесконечное число ограничений неравенства, т. е. это не есть обычная гладкая конечномерная задача[3]. Однако условия оптимальности в ней известны; их специ-

[2] Литература по этой теме довольно большая; мы указываем в качестве примеров лишь некоторые работы, не делая попытки какого-либо обзора.

[3] В зарубежной литературе такие задачи принято называть *полубесконечными* (наверное, более правильно было бы называть их *полубесконечномерными).*

фика лишь в том, что они содержат меру, сосредоточенную на множестве индексов (моментов времени) активных неравенств. Применяя эти условия и переписывая их в терминах исходной задачи, мы получаем множество соответствующих наборов множителей Лагранжа, которое является непустым компактом в некоторой топологии (обычной топологии по конечномерным компонентам и слабой-* относительно меры). Каждый элемент этого компакта (т. е. набор множителей Лагранжа) обеспечивает выполнение принципа максимума на конечном множестве значений управления и времени, соответствующем данной v-замене. Компакты, порожденные всевозможными кусочно-постоянными v-заменами, частично упорядочены по включению и поэтому образуют центрированную систему. Взяв любой элемент из их пересечения, мы получаем единое условие оптимальности — набор множителей Лагранжа, для которого принцип максимума выполнен при всех значениях управления и времени.

Отметим, что прием перехода к семейству вспомогательных задач (в нашем случае они конечномерные) и использование центрированной системы компактов также был предложен А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным (см. [10; 18; 19]). Он уже применялся нами в работах [4; 5; 20] для общей задачи понтрягинского типа, без фазовых ограничений, где конечномерность получалась за счет использования обычных игольчатых вариаций управления (пакета иголок), и ширины иголок были параметрами задачи. В задаче с фазовыми ограничениями использовать игольчатые вариации вряд ли возможно (см. ниже сноску 6).

Для простоты изложения и в целях наиболее ясной демонстрации того эффекта, который обеспечивает v-замена, мы проведем здесь доказательство для случая одного фазового ограничения. Случай нескольких ограничений требует дополнительных технических конструкций; он будет рассмотрен в наших дальнейших работах.

2. Постановка задачи и принцип максимума в ней

Пусть $x(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ есть абсолютно непрерывная функция (*фазовая переменная*), $u(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^r$ — измеримая ограниченная функция (*управление*). Отрезок времени $[t_0, t_1]$ заранее не фиксирован. Рассмотрим следующую задачу с функционалом типа Майера:

$$J := F_0(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \to \min, \tag{2.1}$$

$$F(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) \leqslant 0, \quad K(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \tag{2.2}$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \ \text{ п.в. на } \ [t_0, t_1], \tag{2.3}$$

$$\Phi(t, x(t)) \leqslant 0 \ \text{ на } \ [t_0, t_1]. \tag{2.4}$$

Здесь F и K — вектор-функции размерностей $d(F)$ и $d(K)$, функция Φ скалярная. Предполагается, что F_0, F, K — функции класса C^1, а f и Φ непрерывны вместе с производными по t и x. Множество $U \subset \mathbb{R}^r$ произвольно. Задачу (2.1)–(2.4) для краткости назовем *задачей A*.

Отметим, что, несмотря на относительно простой вид этой задачи, к ней сводятся все задачи оптимального управления для систем ОДУ, не содержащие смешанных ограничений. При отсутствии ограничения (2.4) задача A есть общая (каноническая) задача оптимального управления понтрягинского типа.

З а м е ч а н и е. Строго говоря, свойства функций Φ и f надо предполагать выполненными на множествах $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q} \times U$ соответственно, где $\mathcal{Q}$ — некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, а свойства функций F_0, F, K — на некотором открытом множестве $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$. Как правило, это всегда подразумевается без явного указания множеств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{P}$. Мы также не будем отвлекаться на эти несущественные детали.

Пару функций $w(t) = (x(t), u(t))$ вместе с отрезком их определения $[t_0, t_1]$ будем называть *процессом* задачи. Процесс называется *допустимым*, если он удовлетворяет всем ограничениям задачи. При этом условия (2.3) предполагаются выполненными почти всюду. Как обычно, будем говорить, что допустимый процесс $\hat{w}(t) = (\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, доставляет *сильный минимум,* если $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $J(w) \geqslant J(\hat{w})$ для всех допустимых процессов $w(t) = (x(t), u(t)) \mid t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющих условиям

$$|t_0 - \hat{t}_0| < \varepsilon, \quad |t_1 - \hat{t}_0| < \varepsilon, \quad |x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon \ \text{ на } \ [t_0, t_1] \cap [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

Мы будем предполагать, что концы такого “оптимального” процесса не лежат на фазовой границе; точнее, что для них выполнены строгие неравенства

$$\Phi(t_0, \hat{x}(t_0)) < 0, \qquad \Phi(t_1, \hat{x}(t_1)) < 0. \tag{2.5}$$

Для формулировки необходимых условий оптимальности в задаче A нам потребуются следующие обозначения. Введем *функцию Понтрягина*

$$H(\psi_x, t, x, u) = \psi_x f(t, x, u),$$

где ψ_x есть вектор-строка размерности n (зависимость H от ψ_x иногда будем опускать), и *концевую функцию Лагранжа*

$$l(t_0, x_0, t_1, x_1) = (\alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K)(t_0, x_0, t_1, x_1).$$

Здесь α_0 — число, α, β — вектор-строки тех же размерностей, что и F, K соответственно (зависимость l от α_0, α, β мы опускаем).

Пусть $w = (x(t), u(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, — допустимый процесс задачи A. Будем говорить, что для него выполнен *принцип максимума,* если существуют число α_0, вектор-строки $\alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, неубывающая функция $\mu(t)$, функции ограниченной вариации $\psi_x(t)$, $\psi_t(t)$ размерности n, 1 соответственно (где ψ_x есть строка, x и t — индексы, а не обозначения производных) такие, что

(i) $\quad \alpha_0 \geqslant 0\,, \ \alpha \geqslant 0\,;$

(ii) $\quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + \int\limits_{t_0}^{t_1} d\mu > 0;$

(iii) $\quad \alpha F(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)) = 0, \quad \Phi(t, x(t))\, d\mu(t) = 0;$

(iv_x) $\quad -\dot{\psi}_x(t) = H_x(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) - \dfrac{d\mu(t)}{dt}\, \Phi_x(t, x(t));$

(iv_t) $\quad -\dot{\psi}_t(t) = H_t(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) - \dfrac{d\mu(t)}{dt}\, \Phi_t(t, x(t));$

(v_x) $\quad \psi_x(t_0) = l_{x_0}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad \psi_x(t_1) = -l_{x_1}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$

(v_t) $\quad \psi_t(t_0) = l_{t_0}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1)), \quad \psi_t(t_1) = -l_{t_1}(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$

(vi) $\quad H(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) + \psi_t(t) = 0$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$;

(vii) $\quad H(\psi_x(t-0), t, x(t), u') + \psi_t(t-0) \leqslant 0$ и $H(\psi_x(t+0), t, x(t), u') + \psi_t(t+0) \leqslant 0$ для всех $t \in [t_0, t_1]$ и всех $u' \in U$.

Функции $\psi_x(t)$ и $\psi_t(t)$ называются *сопряженными переменными*[4]. Удобно пока не конкретизировать, с какой стороны они непрерывны, а считать, что в каждой точке t эти функции имеют два значения — левое и правое; в точках непрерывности (а это все, кроме счетного множества) эти значения совпадают. Условие (vii) очевидно эквивалентно тому, что

[4]Обозначения ψ_x и ψ_t предложены А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным. Их удобство быстро выясняется при решении конкретных задач с многими фазовыми переменными.

$H(\psi_x(t), t, x(t), u') + \psi_t(t) \leqslant 0$ во всех точках непрерывности функций ψ_x и ψ_t. Отметим также, что второе условие в (iii) эквивалентно тому, что $d\mu(t) = 0$ на любом интервале, где $\Phi(t, x(t)) < 0$.

Условия (i)–(v_t) называются *условиями неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежесткости, сопряженными уравнениями и условиями трансверсальности* соответственно. Условие (vi) не имеет пока стандартного названия; его можно назвать *законом изменения энергии*, так как из него и сопряженного уравнения для ψ_t следует уравнение для функции H, которая в механических задачах, как правило, имеет смысл энергии системы:

$$\dot H = H_t \quad \text{или} \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}\,.$$

(В случае, когда задача автономна, т. е. $f = f(x,u)$ и $\Phi = \Phi(x)$ не зависят от t, получаем *закон сохранения энергии*: $\dot H = 0$, т. е. $H = \mathrm{const}$).

Из условий (vi) и (vii) вытекает *условие максимума* функции Понтрягина:

$$\max_{u' \in U} H(\psi_x(t), t, x(t), u') = H(\psi_x(t), t, x(t), u(t)) \quad \text{для почти всех} \quad t \in [t_0, t_1],$$

благодаря которому вся совокупность условий (i)–(vii) называется *принципом максимума.* При отсутствии фазового ограничения (2.4) $d\mu(t) \equiv 0$, и мы получаем классический принцип максимума Понтрягина для канонической понтрягинской задачи.

Отметим, что сопряженные уравнения (iv_x)–(iv_t) можно понимать как равенства мер на отрезке $[t_0, t_1]$:

$$-d\psi_x(t) = H_x(\psi_x(t), t, x(t), u(t))\, dt - \Phi_x(t, x(t)) d\mu(t),$$
$$-d\psi_t(t) = H_t(\psi_x(t), t, x(t), u(t))\, dt - \Phi_t(t, x(t)) d\mu(t).$$

Можно также записать эти равенства в интегральной форме:

$$\psi_x(t+0) - \psi_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} -H_x(\psi_x(s), s, x(s), u(s))\, ds + \int_{t_0}^{t+0} \Phi_x(s, x(s)) d\mu(s),$$

$$\psi_t(t+0) - \psi_t(t_0) = \int_{t_0}^{t} -H_t(\psi_x(s), s, x(s), u(s))\, ds + \int_{t_0}^{t+0} \Phi_t(s, x(s)) d\mu(s).$$

Необходимые условия сильного минимума даются следующей теоремой, впервые доказанной (для несколько менее общей задачи) в [2] и обобщающей классический принцип максимума Понтрягина [1].

Теорема 1. *Если процесс $\hat w = (\hat x(t), \hat u(t)) \mid t \in [\hat t_0, \hat t_1])$ доставляет сильный минимум в задаче A, то для него выполнен принцип максимума (i)–(vii).*

Доказательство удобно сначала провести не для поставленной общей задачи A, а для более частной задачи, в которой зависимость от времени отсутствует.

3. Автономная задача B

Рассмотрим следующую задачу B на нефиксированном отрезке $[t_0, t_1]$:

$$J := F_0(x(t_0), x(t_1)) \to \min, \tag{3.1}$$

$$F(x(t_0), x(t_1)) \leqslant 0, \quad K(x(t_0), x(t_1)) = 0, \tag{3.2}$$

$$\dot x(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U \ \text{ п.в. на } \ [t_0, t_1], \tag{3.3}$$

$$\Phi(x(t)) \leqslant 0 \ \text{ на } \ [t_0, t_1]. \tag{3.4}$$

Для нее из сопряженного уравнения (iv_t) следует, что $\psi_t = \text{const}$, и тогда из условий трансверсальности (v_t) получаем $\psi_t \equiv 0$, поэтому вместо ψ_x будем писать просто ψ. В остальном формулировка принципа максимума остается без изменений. Таким образом, условия (vi), (vii) для задачи запишутся в виде $\psi(t)f(x(t), u(t)) = 0$ и $\psi(t \pm 0)f(x(t), u') \leqslant 0$ соответственно.

Хотя задача B и является частным случаем задачи A, любую задачу A можно привести к виду (3.1)–(3.4). Это достигается с помощью следующего простого приема. К управляемой системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ добавим уравнение $dt/d\tau = 1$, считая, что τ — новое время, а $t = t(\tau)$ — новая фазовая переменная. Функции $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ также полагаем теперь зависящими от нового времени: $x = x(\tau)$, $u = u(\tau)$. В результате приходим к следующей задаче A':

$$J = F_0(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1)) \to \min,$$

$$F(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1)) \leqslant 0, \quad K(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1)) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(t, x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad u \in U, \quad \Phi(x(t)) \leqslant 0, \tag{3.5}$$

где $t(\tau)$, $x(\tau)$ — фазовые переменные, $u(\tau)$ — управление, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ — нефиксированный отрезок. Ясно, что задача A' имеет тип B.

Нетрудно видеть, что и допустимые, и оптимальные процессы обеих задач находятся во взаимно-однозначном соответствии. Поэтому, получив необходимые условия оптимальности в задаче B, можно получить и необходимые условия в задаче A. Функция Понтрягина для "автономной" системы (3.5) есть $\widetilde{H} = \psi_x f + \psi_t$, "автономные" условия $\widetilde{H}(x, u) = 0$ и $\widetilde{H}(x, u') \leqslant 0$ имеют вид $\psi_x f(x, u) + \psi_t = 0$ и $\psi_x f(x, u') + \psi_t \leqslant 0$, т. е. это в точности условия (vi) и (vii). Детали этой переписки мы оставляем читателю в качестве несложного упражнения.

Перейдем непосредственно к д о к а з а т е л ь с т в у теоремы 1 для задачи B. Для этого мы опять превратим время в фазовую переменную, но теперь положим $dt/d\tau = v(\tau)$, где функция $v(\tau)$ будет лишь неотрицательная, но не всюду положительная и, следовательно, $t = t(\tau)$ — монотонно неубывающая, но не строго возрастающая функция. Подобная необратимая замена, превращающая время t в фазовую переменную, была предложена А. Я. Дубовицким и использовалась в его совместных работах с А. А. Милютиным [2; 6] и затем А. А. Милютиным [8; 9]; она была названа ими *v-заменой.* Нетривиальный момент здесь заключается в том, что малые вариации нового управления $v(\tau)$ будут приводить к вариациям типа игольчатых для исходного управления $u(t)$. Простейший вариант такой v-замены — с кусочно-постоянными $v(\tau)$ — мы сейчас и рассмотрим.

Индекс θ. Пусть $\hat{w} = (\hat{x}(t), \hat{u}(t) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1])$ — оптимальный процесс задачи B. С этим процессом мы свяжем семейство конечномерных задач B^θ и их оптимальные решения, занумерованные некоторым индексом θ.

Под индексом будем понимать набор значений времени и управления

$$\theta = \{(t^1, u^1), \ \ldots, \ (t^s, u^s)\}$$

такой, что $\hat{t}_0 < t^1 \leqslant \ldots \leqslant t^s < \hat{t}_1$, а значения $u^k \in U$, $k = 1, \ldots, s$, произвольны. Длина индекса $s = s(\theta)$ зависит от θ.

Определим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ следующим образом: берем отрезок $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ и в точках $t^1, \ldots, t^s$ вставляем отрезки единичной длины, сохраняя всякий раз положение точки $\hat{t}_0$. В результате получаем отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ с концами $\tau_0 = \hat{t}_0$, $\tau_1 = \hat{t}_1 + s$, а вставленные отрезки будут иметь вид

$$\Delta^1 = [t^1, \, t^1 + 1], \quad \Delta^2 = [t^2 + 1, \, t^2 + 2], \quad \ldots, \quad \Delta^s = [t^s + (s-1), \, t^s + s].$$

Положим $E_0=\bigcup\limits_1^s \Delta^k, \quad E_+=[\tau_0,\tau_1]\backslash E_0$. Пусть

$$v^\theta(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\in E_0,\\ 1, & \tau\in E_+,\end{cases} \qquad t^\theta(\tau)=\hat t_0+\int\limits_{\tau_0}^{\tau} v^\theta(r)dr, \quad \tau\in[\tau_0,\tau_1].$$

Тогда $\dfrac{dt^\theta(\tau)}{d\tau}=v^\theta(\tau), \quad t^\theta(\tau_0)=\hat t_0, \quad t^\theta(\tau_1)=\hat t_1$. Таким образом, $t^\theta(\tau)$ — кусочно-линейная неубывающая функция, отображающая $[\tau_0,\tau_1]$ на $[\hat t_0,\hat t_1]$, причем Δ^k — ее отрезки постоянства и $t^\theta(\Delta^k)=t^k, \ k=1,\dots,s$.

Положим

$$u^\theta(\tau)=\begin{cases}\hat u(t^\theta(\tau)), & \tau\in E_+,\\ u^k, \quad \tau\in\Delta^k, & k=1,\dots,s;\end{cases} \qquad x^\theta(\tau)=\hat x(t^\theta(\tau)). \tag{3.6}$$

Тогда $u^\theta(\tau)$ — ограниченная измеримая функция, $u^\theta(\tau)\in U$ п.в. на $[\tau_0,\tau_1]$, а $x^\theta(\tau)$ — абсолютно непрерывная функция; при этом

$$\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau}=v^\theta(\tau)\,f(x^\theta(\tau),u^\theta(\tau)), \quad x^\theta(\tau_0)=\hat x(\hat t_0), \quad x^\theta(\tau_1)=\hat x(\hat t_1),$$

т. е. концы новой траектории $x^\theta(\tau)$ совпадают с концами исходной $\hat x(t)$.

Обратим внимание, что некоторые точки t^k могут совпадать: $t^{k'}=\ldots=t^{k''}=t_*$, поэтому в такой точке t_* вставляется подряд несколько единичных отрезков, на каждом из которых задается $v^\theta(\tau)=0$ и свое значение $u^\theta(\tau)=u^k$.

Множество E_0 состоит из конечного числа отрезков $\Delta^k, \ k=1,\dots,s$, множество E_+ — из конечного числа интервалов или полуинтервалов. Все указанные отрезки, интервалы и полуинтервалы множеств E_0 и E_+ объединим в общий набор, упорядочим и обозначим составляющие этого набора через $\sigma_k, \ k=1,\dots,m$. Итак, $[\tau_0,\tau_1]=\sigma_1\cup\ldots\cup\sigma_m$, причем различные σ_k не перекрываются. Обозначим через $\chi_k(\tau)$ характеристическую функцию множества $\sigma_k, \ k=1,\dots,m$.

Задача B^θ индекса θ. Для данного индекса θ зафиксируем построенный отрезок $[\tau_0,\tau_1]$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{m+n}$ с переменными $z=(z_1,\,\dots,\,z_m), \quad x_0=x(\tau_0)$.
Положим

$$v(\tau)=\sum_{k=1}^m z_k\,\chi_k(\tau), \tag{3.7}$$

т. е. z_k есть значения управления $v(\tau)$ на участке σ_k. Управление $u^\theta(\tau)$ зафиксируем и не будем варьировать.

Задача B^θ в пространстве $\mathbb{R}^{m+n}$ имеет вид

$$F_0(x_0,x(\tau_1))\to\min,$$

$$F(x_0,x(\tau_1))\leqslant 0, \quad K(x_0,x(\tau_1))=0,$$

$$\frac{dx}{d\tau}=v(\tau)\,f(x(\tau),u^\theta(\tau)), \quad x(\tau_0)=x_0,$$

$$-z\leqslant 0, \quad \Phi(x(\tau))\leqslant 0 \ \text{ на } \ [\tau_0,\tau_1].$$

Назовем ее *присоединенной задачей*, соответствующей процессу $\hat w(t)$ и индексу θ.

С учетом (3.7) управляемая система этой задачи фактически такова:

$$\frac{dx}{d\tau}=\sum_{k=1}^m z_k\chi_k(\tau)\,f(x,u^\theta(\tau)), \tag{3.8}$$

поэтому для каждой пары (z, x_0) значение $x_1 = x(\tau_1)$ определяется однозначно и, более того, гладким образом зависит от этой пары. (Здесь априори $z_k \in \mathbb{R}$ произвольны; условие $z_k \geqslant 0$ присутствует лишь в ограничениях задачи, но сама система (3.8) имеет смысл и без него, ее правая часть есть гладкая функция z и x.)

Пусть $\hat z_k$ — значение $v^\theta(\tau)$ на σ_k, $k = 1, \ldots, m$, т. е. $v^\theta(\tau) = \sum \hat z_k\, \chi_k(\tau)$. Напомним, что $\hat z_k = 0$, если $\sigma_k \subset E_0$, и $\hat z_k = 1$, если $\sigma_k \subset E_+$. Положим $\hat z = (\hat z_1, \ldots, \hat z_m)$, $\hat x_0 = \hat x(\hat t_0)$. Пару $(\hat z, \hat x_0)$ назовем *присоединенной точкой* задачи B^θ, соответствующей процессу $\hat w(t)$ [5].

Обратим внимание, что при оптимальном $\hat z$, т. е. при $v = v^\theta$, каждый отрезок $\Delta^k \subset E_0$ при отображении $\tau \mapsto t(\tau)$ схлопывается и переходит в точку t^k, так что выбранные нами значения $u^\theta(\tau) = u^k$ на Δ^k не проявляются в исходном времени t и поэтому, казалось бы, не играют никакой роли. Но так происходит только на оптимальном $\hat z$! Если z немного отклоняется от оптимального, то соответствующее $z_k > 0$, и отрезок $\Delta^k \subset E_0$ переходит уже в маленький отрезок t длины z_k, на котором $u(t) = u^k$. Тем самым в исходном времени возникает *игольчатая вариация* управления. Отметим, однако, что от “стандартной” игольчатой вариации эта вариация отличается тем, что мы *не заменяем* управление $\hat u(t)$ на малом отрезке около точки t^k, а *расшиваем* эту точку, вставляя в это место малый отрезок с заданным значением $u(t) = u^k$. Поскольку точек t^k несколько, в итоге получаем пакет игольчатых вариаций[6].

Как уже отмечалось во введении, преимущество таких “вставных” иголок по сравнению с обычными состоит также в том, что если последние можно делать только в точках непрерывности оптимального управления $\hat u(t)$ (иначе не получим гладкой зависимости траектории от ширины иголки), то для реализации “вставных” иголок никаких предположений относительно управления $\hat u(t)$ не требуется; оно может быть произвольной измеримой ограниченной функцией.

В задаче B^θ управление $u^\theta(\tau)$ не варьируется, и нетрудно видеть, что, по сути дела, эта задача получена из исходной задачи B сужением (причем существенным) класса допустимых управлений до пакетов “вставных” игольчатых вариаций. Отсюда следует, что пара $(\hat z, \hat x_0)$, соответствующая оптимальному процессу $\hat w(t)$ задачи B, тоже оптимальна, т. е. доставляет локальный минимум в задаче B^θ.

Обратим внимание, что хотя все “установочные” функции в задаче B^θ гладкие, эту задачу все же нельзя назвать гладкой, ибо в ней имеется континуальное число ограничений неравенства $\Phi(x(\tau)) \leqslant 0$. (Их можно трактовать как принадлежность функции $\Phi(x(\tau))$ неположительному конусу пространства $C[\tau_0, \tau_1]$.) Это стандартная задача “полубесконечного” математического программирования, для которой можно воспользоваться известными необходимыми условиями локального минимума — общим правилом множителей Лагранжа (см. напр. [4;21]). В данном случае эти условия состоят в следующем.

Теорема 2. *Пусть точка $(\hat z, \hat x_0)$ доставляет локальный минимум в задаче B^θ. Тогда найдется число α_0, векторы-строки $\alpha \in \mathbb{R}^{d(F)}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d(K)}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{m+n}$ и неубывающая функция $\mu^\theta(\tau)$ с условием $\mu^\theta(\tau_0) = 0$ такие, что*

$$(i)\quad \alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0,$$

$$(ii)\quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \int_{t_0}^{t_1} d\mu^\theta(\tau) > 0,$$

$$(iii)\quad \alpha F(\hat x_0, \hat x_1) = 0, \quad \gamma\, \hat z = 0, \quad \Phi(x^\theta(\tau))\, d\mu^\theta(\tau) = 0,$$

[5] Для других классов задач, когда соответствующая задача B^θ ставится в некотором пространстве функций, получаем *присоединенный процесс* задачи B^θ.

[6] Использовать стандартные игольчатые вариации, подобно тому как это делалось, например, в [20], здесь не представляется возможным, поскольку $\Phi(x(\tau))$ не будет дифференцируемо по ширине иголки, ибо уже производная траектории $x(\tau)$ по ширине иголки будет разрывной функцией.

и при этом функция Лагранжа задачи B^θ

$$L(z,x_0)=(\alpha_0F_0+\alpha F+\beta K)-\gamma z+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\Phi(x(\tau))\,d\mu^\theta(\tau)$$

стационарна в точке $(\hat z,\hat x_0)$:

$$L'(\hat z,\hat x_0)=0. \tag{3.9}$$

Наша ближайшая цель — расшифровать эти условия.

4. Условия стационарности в задаче B^θ

Как и прежде, введем для удобства обозначения концевую функцию Лагранжа $l=\alpha_0F_0+\alpha F+\beta K$ и для краткости положим $f^\theta=f(x^\theta,u^\theta)$, $f_x^\theta=f_x(x^\theta,u^\theta)$.

Будем учитывать, что функция $x(\tau)$ и ее концевое значение $x_1=x(\tau_1)$ гладким образом определяется парой (z,x_0) в силу уравнения (3.8) и начального условия $x(\tau_0)=x_0$. Другими словами, имеется оператор $P:\ (z,x_0)\in\mathbb{R}^{m+n}\ \longmapsto\ x(\tau)\in C[\tau_0,\tau_1]$. Его производная есть линейное отображение $P'(z,x_0)\ :\ (\bar z,\bar x_0)\mapsto\bar x(\tau)$, где функция $\bar x(\tau)$ есть решение задачи Коши для уравнения в вариациях:

$$\frac{d\bar x}{d\tau}=v^\theta f_x(x^\theta,u^\theta)\,\bar x+\sum\bar z_k\chi_k\,f(x^\theta,u^\theta),\qquad \bar x(\tau_0)=\bar x_0\,. \tag{4.1}$$

Поэтому условие (3.9) означает, что для любых $(\bar z,\bar x_0)$

$$L'(\hat z,\hat x_0)(\bar z,\bar x_0)=l_{x_0}\bar x_0+l_{x_1}\bar x_1-\gamma\bar z+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\Phi'(x^\theta(\tau))\,\bar x(\tau)\,d\mu^\theta(\tau)=0, \tag{4.2}$$

где $\bar x_1:=\bar x(\tau_1)$. (Производные функции $l(x_0,x_1)$ берутся в оптимальной точке $(\hat x_0,\hat x_1)$.)

Перепишем теперь это равенство в терминах независимых переменных $(\bar z,\bar x_0)$. Для этого нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть абсолютно непрерывная функция* $\bar x(\tau)$ *и функция ограниченной вариации* $\psi(\tau)$ *(обе n-мерные) удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{aligned}\dot{\bar x}&=A\bar x+\bar\xi, &\quad \bar x(\tau_0)&=\bar x_0\,,\\ \dot\psi&=-\psi A+\dot\mu\,\varphi, &\quad \psi(\tau_1)&=-l_1\,,\end{aligned}$$

где матрица $A(\tau)$ *и функция* $\bar\xi(\tau)$ *измеримы и ограничены,* $\varphi(\tau)$ *непрерывна,* $\mu(\tau)$ *— неубывающая функция, постоянная в окрестностях точек* $\tau_0,\,\tau_1$, *и* l_1 *есть вектор из* $\mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$l_1\,\bar x_1+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\varphi\,\bar x\,d\mu=-\psi_0\,\bar x_0-\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\psi\,\bar\xi\,d\tau. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем производную по времени от произведения $\psi\,\bar x$:

$$\frac{d}{d\tau}(\psi\,\bar x)=(-\psi A+\dot\mu\,\varphi)\,\bar x+\psi\,(A\bar x+\bar\xi)=\dot\mu\,\varphi\,\bar x+\psi\,\bar\xi\,,$$

поэтому

$$\psi_1\,\bar x_1-\psi_0\,\bar x_0=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\varphi\,\bar x\,d\mu+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1}\psi\,\bar\xi\,d\tau.$$

Отсюда с учетом граничного значения $\psi_1 = -l_1$ получаем (4.3). □

Применим теперь эту лемму к равенству (4.2) с учетом уравнения (4.1). У нас

$$A = v^\theta(\tau)\, f_x^\theta(\tau), \qquad \bar\xi = \sum \bar z_k\, \chi_k(\tau)\, f^\theta(\tau), \qquad \varphi = \Phi'(x^\theta(\tau)), \qquad l_1 = l_{x_1}\,.$$

Введем функцию ограниченной вариации $\psi^\theta(\tau)$ (сопряженную переменную задачи B^θ), которая есть решение уравнения

$$\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = -v^\theta \psi^\theta f_x^\theta + \dot\mu^\theta\, \Phi'(x^\theta), \qquad \psi^\theta(\tau_1) = -l_{x_1}\,. \tag{4.4}$$

Тогда по лемме 1 равенство (4.2) принимает вид

$$l_{x_0}\bar x_0 - \gamma \bar z - \psi_0 \bar x_0 - \sum_k \bar z_k \int_{\tau_0}^{\tau_1} \chi_k(\tau)\, \psi^\theta f^\theta\, d\tau = 0,$$

т. е.

$$\big(l_{x_0} - \psi^\theta(\tau_0)\big)\, \bar x_0 - \sum_k \bar z_k \int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta\, d\tau = \sum_k \gamma_k\, \bar z_k\,.$$

Это равенство выполнено для всех $\bar x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всех $\bar z_k$, $k = 1, \ldots, m$. Отсюда $\psi^\theta(\tau_0) = l_{x_0}$, и при каждом k

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta\, d\tau = -\gamma_k\,. \tag{4.5}$$

Вспомним, что все $\gamma_k \geqslant 0$, и согласно условию дополняющей нежесткости $\gamma\hat z := \sum \gamma_k \hat z_k = 0$; значит, $\gamma_k \hat z_k = 0$ для всех k. Если $\sigma_k \subset E_+$, то $\hat z_k = 1$, и тогда $\gamma_k = 0$. Если же $\sigma_k \subset E_0$, то $\hat z_k = 0$, и тогда нам известно лишь, что $\gamma_k \geqslant 0$.

Наконец, заметим, что из условия нетривиальности (ii) теоремы 2 можно исключить γ. Действительно, если $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$ и $d\mu^\theta \equiv 0$, то $l = 0$, и сопряженное уравнение (4.4) для ψ^θ превращается в однородное ОДУ с нулевым значением на конце, поэтому $\psi^\theta \equiv 0$; тогда из (4.5) также и $\gamma = 0$.

Подведем предварительный итог проделанной расшифровки условий стационарности.

Теорема 3. *Для любого индекса θ существуют набор $\lambda^\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu^\theta(\tau))$ и соответствующая ему функция ограниченной вариации $\psi^\theta(\tau)$ такие, что выполнены условия:*

(i) $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad d\mu^\theta(\tau) \geqslant 0;$

(ii) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + \int_{t_0}^{t_1} d\mu^\theta(\tau) = 1;$

(iii) $\alpha F(\hat x_0, \hat x_1) = 0, \quad \Phi(x^\theta(\tau))\, d\mu^\theta(\tau) = 0;$

$$\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = -v^\theta \psi^\theta f_x^\theta + \dot\mu^\theta\, \Phi'(x^\theta), \quad \psi^\theta(\tau_0) = l_{x_0}\,, \quad \psi^\theta(\tau_1) = -l_{x_1}; \tag{4.6}$$

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau \quad \begin{cases} = 0, & \text{\textit{если}}\ \ \sigma_k \subset E_+\,, \\ \leqslant 0, & \text{\textit{если}}\ \ \sigma_k \subset E_0\,, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{4.7}$$

Рассмотрим подробнее второе условие из (4.7). Возьмем произвольный отрезок $\sigma_k \subset E_0$; обозначим его как $\sigma_k = [\tau', \tau'']$. На нем $u^\theta(\tau) = u^k$ постоянно, $v^\theta = 0$, поэтому значение $x^\theta(\tau)$ также постоянно; обозначим его через $\hat x_*$; при этом $f^\theta = f(\hat x_*, u^k)$. Тогда в силу (4.6) $\dot\psi^\theta = \dot\mu^\theta\, \Phi'(\hat x_*)$, поэтому $\psi^\theta(\tau)$ меняется в пространстве $\mathbb{R}^n$ в постоянном направлении $\Phi'(\hat{x}_*)$. Согласно (4.7)

$$\int_{\tau'}^{\tau''} \psi^\theta(\tau) f(\hat{x}_*,\, u^k)\, d\tau \;\leqslant\; 0. \tag{4.8}$$

Слева и справа к данному отрезку $[\tau', \tau'']$ могут примыкать и другие отрезки из E_0. (При отображении $\tau \mapsto t$ они все перейдут в одну точку t_k.) Пусть $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ есть объединение данного отрезка со всеми примыкающими к нему отрезками из E_0. (Если слева других таких нет, то $\tau'_* = \tau'$, а если нет справа, то $\tau''_* = \tau''$.) Тогда на всем этом объединенном отрезке $v^\theta = 0$, так что по-прежнему $x^\theta(\tau) = \hat{x}_*$ постоянно, $\dot\psi^\theta = \dot\mu^\theta\, \Phi'(\hat{x}_*)$, поэтому $\psi^\theta(\tau)$ по-прежнему меняется в том же постоянном направлении $\Phi'(\hat{x}_*)$.

Рассмотрим подынтегральную функцию $h^k(\tau) = \psi^\theta(\tau) f(\hat{x}_*, u^k)$ из (4.8) на объединенном отрезке $[\tau'_*,\, \tau''_*]$. Обратим внимание, что на этом отрезке управление $u^\theta(\tau)$, вообще говоря, не постоянно, а лишь кусочно-постоянно, но мы зафиксировали значение u^k и рассматриваем функцию $h^k(\tau)$ с этим значением даже на "чужих" отрезках из E_0, примыкающих к данному. Как и $\psi^\theta(\tau)$, это есть функция ограниченной вариации. Для нее на всем отрезке $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ имеем

$$\frac{dh^k}{d\tau} = \dot\mu^\theta(\tau)\, \Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k).$$

Пусть для определенности константа $\Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) \geqslant 0$. Тогда $h^k(\tau)$ не убывает, поэтому из (4.8) следует, что $h^k(\tau' + 0) \leqslant 0$, тем более $h^k(\tau'_* + 0) \leqslant 0$ (ибо $\tau'_* \leqslant \tau'$).

Мы утверждаем, что при этом и $h^k(\tau'_* - 0) \leqslant 0$. Действительно, в силу сопряженного уравнения (4.6) скачок функции h^k в точке τ'_* происходит в том же направлении:

$$\Delta h^k(\tau'_*) = h^k(\tau'_* + 0) \,-\, h^k(\tau'_* - 0) = \Delta\psi^\theta(\tau'_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) = \Delta\mu^\theta(\tau'_*)\, \Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) \;\geqslant\; 0,$$

откуда $h^k(\tau'_* - 0) \leqslant h^k(\tau'_* + 0) \;\leqslant\; 0$, что и требовалось доказать.

Случай, когда $\Phi'(\hat{x}_*)\, f(\hat{x}_*, u^k) \leqslant 0$, аналогичным образом дает $h^k(\tau''_* + 0) \leqslant 0$.

Итак, мы показали, что второе условие из (4.7) обеспечивает выполнение хотя бы одного из неравенств:

$$\text{либо} \;\; h^k(\tau'_* - 0) \leqslant 0, \quad \text{либо} \;\; h^k(\tau''_* + 0) \leqslant 0, \tag{4.9}$$

где $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ есть максимальный отрезок, содержащий данный отрезок $\sigma_k \subset E_0$, на котором сохраняется значение $v^\theta = 0$.

Перепишем теперь полученные условия в терминах исходного времени t. Это даст нам возможность рассматривать условия, полученные для различных индексов θ, на одном и том же отрезке $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$.

Конечнозначный принцип максимума индекса θ. Итак, на отрезке $[\tau_0, \tau_1]$ мы имеем неубывающую функцию $t^\theta(\tau)$, которая отображает его на отрезок $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, причем на каждом отрезке $\Delta_k \subset E_0$ она постоянна. При этом на $[\tau_0, \tau_1]$ имеются функции $u^\theta(\tau)$ и $x^\theta(\tau)$, связанные с исходными $\hat{x}(t)$ и $\hat{u}(t)$ по формулам (3.6).

Пусть $\tau^\theta(t)$ есть наименьший корень уравнения $t^\theta(\tau) = t$. Эта функция также не убывает, но имеет разрывы в заданных точках t^k (и только в них): $\Delta\tau(t^k) = \tau''_* - \tau'_*$, где $[\tau'_*,\, \tau''_*]$ — указанный выше максимальный отрезок, соответствующий точке t^k. Положим

$$\mu(t) = \mu^\theta(\tau^\theta(t)), \qquad \psi(t) = \psi^\theta(\tau^\theta(t)), \qquad t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

Нетрудно убедиться, что $\mu(t)$ есть по-прежнему неубывающая функция, имеющая в точках t^k скачки $\Delta\mu(t^k) = \mu(\tau''_* + 0) - \mu(\tau'_* - 0)$, а $\psi(t)$ есть функция ограниченной вариации, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t)\, f_x(\hat{x}(t)), \hat{u}(t))) + \frac{d\mu(t)}{dt}\, \Phi'(\hat{x}(t))$$

и имеющая те же концевые значения, что и $\psi^\theta(\tau)$. (Здесь мы также учли, что для $\tau \in E_+$ и соответствующего $t = t^\theta(\tau)$ имеем $d\mu(t) = d\mu^\theta(\tau)$. Проверку этих свойств мы оставляем читателю в качестве несложных упражнений.)

Напомним также, что в силу нашего предположения (2.5), в окрестностях точек $\hat{t}_0$, $\hat{t}_1$ мера не работает: $d\mu(t) = 0$, поэтому функция $\psi(t)$ непрерывна в этих точках.

Теорема 3 переписывается в исходном времени $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ следующим образом.

Теорема 4 (принцип максимума индекса θ). *Для любого индекса θ существуют набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu(t))$ и соответствующая ему функция ограниченной вариации $\psi(t)$ такие, что выполнены условия*:

(i) $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad d\mu(t) \geqslant 0;$

(ii) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + \int\limits_{\hat{t}_0}^{\hat{t}_1} d\mu(t) = 1;$

(iii) $\alpha F(\hat{x}_0, \hat{x}_1) = 0, \quad \Phi(\hat{x}(t))d\mu(t) = 0;$

(iv) $\dfrac{d\psi(t)}{dt} = -\psi(t) f_x(\hat{x}(t)), \hat{u}(t))) + \dfrac{d\mu(t)}{dt}\Phi'(\hat{x}(t));$

(v) $\psi(\hat{t}_0) = l_{x_0}, \quad \psi(\hat{t}_1) = -l_{x_1};$

(vi) *для любого интервала или полуинтервала Δ, из которых состоит E_+,*

$$\int\limits_{t^\theta(\Delta)} \psi(t) f(\hat{x}(t)), \hat{u}(t)))dt = 0;$$

(vii) *для любой пары (t^k, u^k) из индекса θ выполнено хотя бы одно из неравенств*:

$$\textit{либо} \;\; \psi(t^k - 0)\, f(\hat{x}(t^k), u^k) \leqslant 0, \quad \textit{либо} \;\; \psi(t^k + 0)\, f(\hat{x}(t^k), u^k) \leqslant 0. \tag{4.10}$$

(Условие (vi) получается здесь из первого условия (4.7) с учетом того, что на каждом $\Delta \subset E_+$ отображение $\tau \to t$ взаимно-однозначно, $v^\theta(\tau) = 1$, и поэтому $dt = d\tau$. Условие (vii) вытекает из (4.9).)

Итак, для данного индекса θ мы получили набор множителей Лагранжа, которые порождают функцию $\psi(t)$, так что выполнены указанные условия (i)–(vii). Эти множители Лагранжа, вообще говоря, зависят индекса θ. Условия (i)–(v) одни и те же для всех индексов, а условия (vi)–(vii) связаны с каждым отдельным индексом. Наша цель теперь — перейти к условиям (vi)–(vii) с набором множителей, не зависящим от индекса θ.

5. Переход к универсальному принципу максимума

Как и в доказательстве принципа максимума в задаче без фазовых ограничений [4; 20], для учета условий, порождаемых различными индексами θ, проделаем следующую процедуру. Для данного индекса θ введем множество всех наборов $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu(t))$, удовлетворяющих условиям (i)–(v); обозначим его через Λ^θ. Это есть множество в пространстве

$$Y^* = \mathbb{R}^{1+d(F)+d(K)} \times C^*[\hat{t}_0, \hat{t}_1],$$

сопряженном к пространству $Y = \mathbb{R}^{1+d(F)+d(K)} \times C[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$. Установим следующий ключевой факт.

Лемма 2. Λ^θ *есть слабый-* компакт (т. е. компакт относительно обычной сходимости конечномерных векторов* $(\alpha_0, \alpha, \beta)$ *и слабой-* сходимости мер* $d\mu(t)$ *в пространстве* C^*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta,\, \mu(t)) \in \Lambda^\theta$ и соответствующая ему функция ограниченной вариации $\psi(t)$. Прежде всего покажем, что она однозначно (с точностью до значений в точках ее разрыва) определяется набором λ из сопряженного уравнения (iv) и любого из концевых условий (v), например левого. Запишем это уравнение в виде равенства мер:

$$d\psi(t) = -\psi(t)\, f_x(\hat{x}(t)), \hat{u}(t)))\, dt + d\mu(t)\, \Phi'(\hat{x}(t)). \tag{5.1}$$

Пусть W есть фундаментальная матрица однородного уравнения: $\dot{W} = -W f_x\,,\;\; W(\hat{t}_0) = I.$ Тогда для всех t справедлива формула Коши

$$\psi(t-0) = \left(\psi(\hat{t}_0) + \int\limits_{\hat{t}_0}^{t-0} \Phi'(\hat{x}(s))\, W^{-1}(s)\, d\mu(s)\right) W(t), \tag{5.2}$$

и аналогичная формула справедлива для значения $\psi(t+0)$.

Далее. Поскольку слабая-* топология пространства Y^* метризуема (так как Y сепарабельно), для установления компактности Λ^θ достаточно рассмотреть произвольную последовательность его элементов λ_n. Считаем сразу, что векторы $(\alpha_0, \alpha, \beta)_n$ сходятся к некоторым $(\alpha_0, \alpha, \beta)$.

Так как нормы всех мер $d\mu_n$ в совокупности ограничены в силу (ii), то из (5.2) с учетом ограниченности всех начальных значений $\psi_n(\hat{t}_0) = (l_{x_0})_n$ вытекает, что функции $\psi_n(t)$ будут равномерно ограничены общей константой. Отсюда согласно теоремам Хелли (см., например, [3, гл. 6]) найдется подпоследовательность, сходящаяся при каждом t к некоторой функции ограниченной вариации $\psi(t)$, причем меры $d\psi_n$ слабо-* сходятся к мере $d\psi$. Сохраним для этой подпоследовательности прежнюю нумерацию и считаем также, что и меры $d\mu_n$ слабо-* сходятся к некоторой мере $d\mu$, связанной с $d\psi$ соотношениями (5.1) и (5.2).

Ясно, что условия (i), (ii), (iv), (v) и первое равенство из (iii) при таком переходе к пределу сохраняются. Второе условие в (iii) означает, что на любом интервале, лежащем между соседними точками $t^k < t^{k+1}$, на котором $\Phi(\hat{x}(t)) < 0$, мера $d\mu(t) = 0$. Это эквивалентно тому, что для любой непрерывной функции $\eta(t)$, носитель которой содержится в этом интервале, $\displaystyle\int \eta(t)\, d\mu(t) = 0$. Очевидно, при переходе к слабому-* пределу это свойство сохраняется.

Поскольку $\psi_n(t) \to \psi(t)$ при всех t, то по теореме Лебега равенство (vi) также выдерживает предельный переход. Поэтому осталось рассмотреть лишь последнее условие (vii).

Зафиксируем любое k и, чтобы избежать путаницы с нумерацией последовательности, обозначим здесь $t^k = t_*\,,\;\; \hat{x}(t^k) = x_*\,,\;\; u^k = u$. (Напомним, что $u^k = u$ есть любая заранее заданная точка из U.) Рассмотрим последовательность функций ограниченной вариации $h_n(t) = \psi_n(t) f(x_*\,, u)$. Для нее также имеем сходимость $h_n(t) \to h(t) := \psi(t) f(x_*\,, u)$ при всех t, и, кроме того, в силу (iv)

$$\dot{h}_n(t) = \big(-\psi_n(t) f_x(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, f(x_*\,, u)\big) + \dot{\mu}_n(t)\, \Phi'(\hat{x}(t))\, f(x_*\,, u). \tag{5.3}$$

При этом скачок в точке t_*

$$\Delta h_n(t_*) = \Delta\mu_n(t_*)\, \Phi'(x_*)\, f(x_*\,, u).$$

Согласно (4.10) выполнено хотя бы одно из неравенств: $h_n(t_* - 0) \leqslant 0$ или $h_n(t_* + 0) \leqslant 0$. Без нарушения общности считаем, что константа $\Phi'(x_*) f(x_*\,, u) \geqslant 0$. Тогда $\Delta h_n(t_*) \geqslant 0$, и поэтому $h_n(t_* - 0) \leqslant 0$ для всех n. Покажем, что и для предельной h выполнено то же неравенство $h(t_* - 0) \leqslant 0$.

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Из равномерной ограниченности всех $\psi_n(t)$ и непрерывности функции $\Phi'(\hat{x}(t))$ вытекает в силу (5.3), что найдутся $\delta > 0$ и константа c такие, что при всех n на интервале $(t_* - \delta,\, t_*)$ выполняется оценка $\dot{h}_n(t) \;\geqslant\; -c - \dot{\mu}_n\,\varepsilon$. Тогда на этом интервале с учетом нормировки (ii)

$$h_n(t_* - 0) - h_n(t) \;\geqslant\; -c\delta - \varepsilon \int d\mu_n \;\geqslant\; -c\delta - \varepsilon.$$

Уменьшив, если надо, δ, имеем $h_n(t_* - 0) - h_n(t) \geqslant -2\varepsilon$, т.е. $h_n(t) \;\leqslant\; h_n(t_* - 0) + 2\varepsilon$. Так как по условию $h_n(t_* - 0) \leqslant 0$, то отсюда получаем $h_n(t) \leqslant 2\varepsilon$ на интервале $(t_* - \delta,\, t_*)$. Поскольку ε и δ не зависят от номера n, это же неравенство выполнено и для поточечного предела: $h(t) \leqslant 2\varepsilon$ на том же интервале, а значит и $h(t_* - 0) \leqslant 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда получаем $h(t_* - 0) \leqslant 0$. Лемма 2 доказана. □

Таким образом, перебирая всевозможные индексы θ, мы для каждого из них получаем свой непустой компакт Λ^θ. Покажем, что семейство всех этих компактов образует *центрированную систему.* Для этого введем отношение порядка в множестве всех индексов. Будем говорить, что $\theta_1 \subset \theta_2$, если каждая пара (t^k, u^k) из θ_1 входит и в θ_2. Ясно что для любых двух индексов θ_1 и θ_2 найдется третий, содержащий каждый из них, например их объединение. Нетрудно заметить, что при расширении индекса θ множество Λ^θ сужается, т.е. включение $\theta_1 \subset \theta_2$ влечет обратное включение $\Lambda^{\theta_1} \supset \Lambda^{\theta_2}$. Пусть теперь имеется конечный набор компактов $\Lambda^{\theta_1}, \ldots, \Lambda^{\theta_m}$. Возьмем любой индекс θ, содержащий в себе все индексы $\theta_1, \ldots, \theta_m$. Тогда непустой компакт Λ^θ содержится в каждом из компактов $\Lambda^{\theta_1}, \ldots, \Lambda^{\theta_m}$ и, следовательно, в их пересечении. Отсюда вытекают центрированность семейства $\{\Lambda^\theta\}$ и, значит, непустота его пересечения $\Lambda_* = \bigcap\limits_\theta \Lambda^\theta$.

Возьмем произвольный набор множителей $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \mu) \in \Lambda_*$, и пусть $\psi(t)$ есть сопряженная функция, соответствующая этому набору. Для этого набора по определению выполнены условия (i)–(v). Выполнение условия (vi) в любом индексе θ означает, что для любого интервала (t', t'')

$$\int\limits_{t'}^{t''} \psi(t)\, f(\hat{x}(t)), \hat{u}(t)))\, dt = 0$$

(ибо найдется индекс, содержащий точки t', t''), а это эквивалентно выполнению почти всюду на $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ равенства

$$\psi(t)\, f(\hat{x}(t)), \hat{u}(t))) = 0.$$

Наконец, выполнение (vii) для выбранного "универсального" набора λ означает, что для любой точки $t \in (\hat{t}_0, \hat{t}_1)$ и любого $u \in U$ выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\text{либо} \quad \psi(t-0)\, f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0, \qquad \text{либо} \quad \psi(t+0)\, f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0.$$

Это очевидно эквивалентно тому, что $\psi(t)\, f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0$ для всех точек непрерывности функции ψ из интервала $(\hat{t}_0, \hat{t}_1)$, а тогда и для его граничных точек (поскольку функция ψ непрерывна в этих точках), а для точек разрыва ψ выполнены оба указанных неравенства.

Таким образом, для выбранного набора λ выполнены все условия (i)–(vii) принципа максимума. Теорема 1 для автономной задачи B доказана, а вместе с этим, как уже говорилось, она доказана и для исходной задачи A. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1969. 393 p.
2. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.

3. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 p.
4. **Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2004. 168 с.
(Доступно на: http://www.math.msu.su/department/opu/node/139).
5. Оптимальное управление / Э. М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин [и др.]; под ред. Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2008. 320 с. ISBN 978-5-94057-367-8 .
6. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике: сб. ст. / В.Л. Левин. М.: Наука, ЦЭМИ, 1981. С. 6–47.
7. **Гирсанов И.В.** Лекции по теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970. 122 с.
8. **Милютин А.А.** Принцип максимума в регулярной задаче оптимального управления: в кн.: Необходимое условие в оптимальном управлении / Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А. М.: Наука, 1990. 320 с. ISBN 5-02-006708-3 .
9. **Милютин А.А.** Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М., Физматлит, 2001. 303 с. ISBN: 5-9221-0114-5 .
10. **Милютин А.А.** Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 5 (155). С. 110–116.
11. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974. 481 p.
12. **Арутюнов А.В.** Принцип максимума Понтрягина в теории оптимального управления // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 1997. Т. 42.
13. **Vinter R.B., Zheng H.** Necessary conditions for optimal control problems with state constraints // Transactions of AMS. 1998. Vol. 350, no. 3. P. 1181–1204.
14. **Bourdin L.** Note on Pontryagin maximum principle with running state constraints and smooth dynamics – Proof based on the Ekeland variational principle [e-resource]. 26 p.
URL: https://arxiv.org/pdf/1604.04051.pdf .
15. **Bonnans J.F.** Course on optimal control [e-resource]. OROC Ensta, Paris-Tech, 2017.
URL: www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans/notes/oc/oc.html .
16. **Arutyunov A.V., Karamzin D.Y., Pereira F.L.** The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited // JOTA. 2011. Vol. 149, no. 3. P. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5 .
17. **Dmitruk A.V., Samylovskiy I.A.** On the relation between two approaches to necessary optimality conditions in problems with state constraints // JOTA. 2017. Vol. 173, no. 2. P. 391–420.
doi: 10.1007/s10957-017-1089-0.
18. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Трансляции уравнений Эйлера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 1263–1284.
19. **Dmitruk A.V.** On the development of Pontryagin's Maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin // Control and Cybernetics. 2009. Vol. 38, no. 4a. P. 923–958.
20. **Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.** О доказательстве принципа максимума Понтрягина с помощью игольчатых вариаций // Фундам. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 5. С. 49–74.
21. **Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P.** Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints // SIAM J. Control Optim. 2014. Vol. 52, no. 6. P. 3437–3462. doi: 10.1137/130921465.

Дмитрук Андрей Венедиктович Поступила 26.07.2017

д-р физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник ЦЭМИ РАН,
проф. МГУ им. М.В. Ломоносова, каф. оптимального управления, г. Москва
e-mail: dmitruk@member.ams.org

Осмоловский Николай Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский государственный строительный университет, каф. прикладной математики, г. Москва;
Университет технических и гуманитарных наук, г. Радом, Польша
e-mail: osmolovski@uph.edu.pl

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L. W. Neustadt, N Y, London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN 2-88124-077-1. Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1969, 393 p.
2. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Extremum problems in the presence of restrictions, *USSR Comput. Math. and Math. Phys.,* 1965, vol. 5, no. 3, pp. 1–80. doi: 10.1016/0041-5553(65)90148-5.
3. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol. 1,2.* N Y, Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830. Original Russian text (4th ed.) published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 543 p.
4. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii.* [The Maximum Principle in Optimal Control]. Moscow, Mosk. Gos. Univ. Publ., 2004, 168 p.
5. Galeev E.M., Zelikin M.I., Konyagin S.V. et. al. *Optimal'noe upravlenie.* [Optimal Control], eds. N.P. Osmolovskii, V.M. Tikhomirov. Moscow, MTsNMO Publ., 2008, 320 p. ISBN: 978-5-94057-367-8.
6. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. *Teoriya printsipa maksimuma.* [Theory of the maximum principle]. In: *Metody teorii ekstremal'nykh zadach v ekonomike* [Methods of the theory of extremal problems in economics], eds. V.L. Levin, Moscow, Nauka Publ., 1981, pp. 6–47.
7. Girsanov I.V. *Lectures on mathematical theory of extremum problems.* Ser. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 67. Berlin, Heidelberg, N Y, Springer-Verlag, 1972, 136 p. doi: 10.1007/978-3-642-80684-1. Original Russian text published in Girsanov I.V. *Lekcii po teorii jekstremal'nyh zadach.* Moscow, MGU Publ., 1970, 122 p.
8. Milyutin A.A. *Printsip maksimuma v regulyarnoi zadache optimal'nogo upravleniya.* [The maximum principle in the regular problem of optimal control]. In: Afanas'ev A.P., Dikusar V.V., Milyutin A.A., Chukanov S.A. *A necessary condition in optimal control* [Neobkhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii], eds. Milyutin A.A., Moscow, Nauka Publ., 1990, 320 p. ISBN: 5-02-006708-3 .
9. Milyutin A.A. *Printsip maksimuma v obshchei zadache optimal'nogo upravleniya.* [The maximum principle in the general problem of optimal control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 303 p. ISBN: 5-9221-0114-5.
10. Milyutin A.A. General schemes of necessary conditions for extrema and problems of optimal control. *Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, no. 5, pp. 109–115. doi: 10.1070/RM1970v025n05ABEH003799..
11. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Ser. Studies Math. Appl., vol. 6, Amsterdam, N Y, Oxford, North-Holland Publ. Comp., 1979, 460 p. ISBN: 0444851674. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.
12. Arutyunov A.V. Pontryagin's maximum principle in optimal control theory. *J. Math. Sci*, 1999, vol. 94, no. 3, pp. 1311–1365.
13. Vinter R.B., Zheng H. Necessary conditions for optimal control problems with state constraints. *Trans. AMS.*, 1998, vol. 350, no. 3, pp. 1181–1204.
14. Bourdin L. Note on Pontryagin maximum principle with running state constraints and smooth dynamics – Proof based on the Ekeland variational principle [e-resource]. 26 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1604.04051.pdf.
15. Bonnans J.F. Course on optimal control [site]. OROC Ensta, Paris-Tech, 2017. Available at: www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans/notes/oc/oc.html.
16. Arutyunov A.V., Karamzin D.Y., Pereira F.L. The maximum principle for optimal control problems with state constraints by R.V. Gamkrelidze: revisited. *JOTA*, 2011, vol. 149, no. 3, pp. 474–493. doi: 10.1007/s10957-011-9807-5.
17. Dmitruk A.V., Samylovskiy I.A. On the relation between two approaches to necessary optimality conditions in problems with state constraints. *JOTA*, 2017, vol. 173, no. 2, pp. 391–420. doi: 10.1007/s10957-017-1089-0.
18. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Translation of Euler's equations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 6, pp. 37–64. doi: 10.1016/0041-5553(69)90125-6.
19. Dmitruk A.V. On the development of Pontryagin's maximum principle in the works of A.Ya. Dubovitskii and A.A. Milyutin. *Control and Cybernetics*, 2009, vol. 38, no. 4a, pp. 923–958.

20. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. On the proof of Pontryagin's maximum principle by means of needle variations. *J. Math. Sci.*, 2016, vol. 218, no. 5, pp. 581–598. doi: 10.1007/s10958-016-3044-2 .
21. Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. Necessary conditions for a weak minimum in optimal control problems with integral equations subject to state and mixed constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 2014, vol. 52, no. 6, pp. 3437–3462. doi: 10.1137/130921465.

The paper was received by the Editorial Office on July 26, 2017.

Andrei Venediktovich Dmitruk, Dr. Phys.-Math. Sci., Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 117418 Russia; Dept. of Optimal Control, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: dmitruk@member.ams.org .

Nikolai Pavlovich Osmolovskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Dept. of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129337 Russia; of Informatics and Mathematics, University of Technology and Humanities in Radom, Poland, e-mail: osmolovski@uph.edu.pl .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 515.124+517.988.6+517.911.5

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ[1]

Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко

Предлагается распространение теоремы Надлера о неподвижной точке многозначного отображения на пространства с векторнозначной метрикой. Под векторнозначной метрикой понимается отображение, обладающее свойствами "обычной" метрики, значениями которого являются элементы линейного нормированного упорядоченного пространства. Доказанный аналог теоремы Надлера применяется к системе интегральных включений в пространстве суммируемых функций. Затем с помощью редукции к системе интегральных включений исследуется краевая задача с многозначными условиями для систем функционально-дифференциальных включений. Получены условия (не содержащие требования выпуклости значений многозначной функции, порождающей оператор Немыцкого) существования решений и даны оценки решений.

Ключевые слова: пространство с векторнозначной метрикой, сжимающее многозначное отображение, неподвижная точка, интегральное включение.

E. S. Zhukovskii, E. A. Panasenko. On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric.

Nadler's theorem on a fixed point of a multivalued mapping is extended to spaces with a vector-valued metric. A vector-valued metric is understood as a mapping with the properties of a usual metric and values in a linear normed ordered space. We prove an analog of Nadler's theorem and apply it to a system of integral inclusions in a space of summable functions. Then we study a boundary value problem with multivalued conditions for systems of functional differential equations by means of reduction to a system of integral inclusions. Conditions for the existence of solutions are obtained and estimates of the solutions are given. The existence conditions do not contain the convexity requirement for the values of the multivalued function generating a Nemytskii operator.

Keywords: space with a vector-valued metric, contracting multivalued mapping, fixed point, integral inclusion.

MSC: 54E35, 54H25, 34K09

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-93-105

Введение

Общеизвестны многочисленные применения утверждений о неподвижных точках в функциональном анализе, теории дифференциальных и интегральных уравнений и включений, в численных методах. В последние годы эти результаты нашли новые приложения в кибернетике, теории управления и оптимизации, теории игр. Для решения дифференциальных игр А. Г. Ченцовым разработан метод программных итераций, существенно использующий неподвижные точки соответствующих операторов (см. [1; 2]). В связи с появлением отмеченных и многих других приложений неподвижные точки являются объектом постоянного интереса исследователей. В современных исследованиях неподвижных точек значительную долю занимают работы, связанные с распространением классического принципа Банаха сжимающих отображений на различные обобщения метрических пространств. Естественным обобщением метрических пространств являются пространства с векторнозначной метрикой, в которых каждой паре элементов поставлен в соответствие элемент вещественного линейного упорядоченного пространства — "векторное расстояние". Для таких пространств в [3; 4] получены

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание № 3.8515.2017/БЧ), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00553, № 16-01-00386); исследования в разделах 1, 2 выполнены за счет средств Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

результаты о неподвижных точках сжимающих и обобщенно сжимающих отображений, в [5] рассмотрена задача о точках совпадения, в [6;7] получены условия устойчивости накрывающих отображений к липшицевым возмущениям.

В данной работе предлагается утверждение о неподвижной точке многозначного сжимающего отображения пространства с векторнозначной метрикой — аналог известной теоремы Надлера (см., например [8, § 2.1.1]) — и демонстрируются его применения к исследованию интегральных включений и краевых задач для функционально-дифференциальных включений.

Большое влияние на это исследование оказали лекции и доклады профессора Александра Георгиевича Ченцова на "Колмогоровских чтениях" (г. Тамбов). Мы благодарны Александру Георгиевичу за внимание к нашим работам, ценные советы и замечания.

1. Определение векторнозначной метрики

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором задан выпуклый замкнутый острый конус E_+, т. е. замкнутое в E множество, удовлетворяющее условиям

$$0 \in E_+; \quad \forall e \in E_+ : \; e \neq 0 \quad \forall k > 0 \quad ke \in E_+, \;\; -ke \notin E_+;$$

$$\forall e, \tilde{e} \in E_+ \quad \forall k \in [0,1] \quad ke + (1-k)\tilde{e} \in E_+.$$

Определим в E упорядоченность $\leq$, полагая

$$\forall e, \tilde{e} \in E \quad \tilde{e} \leq e \quad \Leftrightarrow \quad e - \tilde{e} \in E_+.$$

Будем предполагать, что норма $\|\cdot\|_E$ в пространстве E является монотонной:

$$\forall e, \tilde{e} \in E_+ \quad \tilde{e} \leq e \;\Rightarrow\; \|\tilde{e}\|_E \leq \|e\|_E.$$

Пусть задано непустое множество Ω. Отображение $\mathcal{P}_\Omega \colon \Omega^2 \to E_+$ назовем *векторнозначной метрикой,* или в. *метрикой,* если для любых $\omega, u, v \in \Omega$ выполнены следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_\Omega(\omega, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; \omega = u; \quad \mathcal{P}_\Omega(\omega, u) = \mathcal{P}_\Omega(u, \omega); \quad \mathcal{P}_\Omega(\omega, u) \leq \mathcal{P}_\Omega(\omega, v) + \mathcal{P}_\Omega(v, u).$$

В дальнейшем будем опускать индекс в обозначении в. метрики, если ясно, где она определена. Множество Ω с определенной на нем в. метрикой $\mathcal{P}$ будем называть в. *метрическим пространством.*

В пространстве $\Omega \doteq (\Omega, \mathcal{P})$ естественным образом определяются аналоги основных понятий метрических пространств. *Замкнутый шар с центром в точке* $\omega_0 \in \Omega$ *радиуса* $e \in E_+$ — это множество $\mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e) \doteq \{\omega \in \Omega \colon \mathcal{P}(\omega, \omega_0) \leq e\}$; e*-раздутие* $\mathrm{B}_\Omega(U, e)$ множества $U \subset \Omega$ определяется равенством $\mathrm{B}_\Omega(U, e) \doteq \bigcup_{\omega_0 \in U} \mathrm{B}_\Omega(\omega_0, e)$. Под *сходимостью* $\omega_i \to \omega$ при $i \to \infty$ в Ω понимается сходимость $\|\mathcal{P}(\omega_i, \omega)\|_E \to 0$. Множество $U \subset \Omega$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности его элементов $\omega_i \in U$, $\omega_i \to \omega$ выполнено $\omega \in U$. Последовательность $\{\omega_i\} \subset \Omega$ называют *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \quad \forall i > I \quad \forall j > I \quad \|\mathcal{P}(\omega_i, \omega_j)\|_E < \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовательность в Ω сходится, то это в. метрическое пространство называют *полным.*

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, если $\mathcal{P}$ — в. метрика на Ω, то, вследствие монотонности нормы в E, формула

$$\rho(\omega, u) = \|\mathcal{P}(\omega, u)\|_E \tag{1.1}$$

определяет "обычную" метрику на Ω, причем сходимости в пространствах (Ω, ρ), $(\Omega, \mathcal{P})$ равносильны, и полнота одного из них влечет полноту другого. Но, как далее будет показано, в задачах о неподвижной точке в. метрика может быть эффективнее “обычной” метрики (1.1): использование в. метрики позволяет получить более общие условия существования неподвижных точек и их более точные оценки.

Приведем несколько примеров в. метрических пространств.

Пример 1. Пусть заданы метрические пространства (Ω_i, ρ_i), $i = \overline{1, n}$. В их произведении $\Omega \doteq \prod_{i=1}^n \Omega_i$ в. метрика — это вектор

$$\mathcal{P}(\omega, u) = \big(\rho_1(\omega_1, u_1), \ldots, \rho_n(\omega_n, u_n)\big), \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega, \quad u = (u_1, \ldots, u_n) \in \Omega,$$

а пространство ее значений $E = \mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное пространство с любой монотонной нормой $|\cdot|$. Рассматриваемое здесь пространство полно тогда и только тогда, когда полны все Ω_i, $i = \overline{1, n}$.

Пример 2. “Стандартные” линейные нормированные пространства функций $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^m$ и их подмножества можно рассматривать как пространства с в. метрикой

$$t \in [a, b] \mapsto \mathcal{P}(\omega, u)(t) = |\omega(t) - u(t)|.$$

В частности, в пространствах $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ и $L([a, b], \mathbb{R}^m)$ непрерывных и соответственно суммируемых функций для такой в. метрики выполнены $\mathcal{P}(\omega, u) \in C([a, b], \mathbb{R}_+)$ и соответственно $\mathcal{P}(\omega, u) \in L([a, b], \mathbb{R}_+)$.

Пример 3. Пусть элементами множества Ω являются функции двух аргументов t, x, пробегающих соответственно множества T и X. Тогда для определения в. метрики на Ω можно использовать следующую схему. Пусть для всех $\omega \in \Omega$ при каждом фиксированном $x \in X$ функция $\omega(\cdot, x)$ есть элемент метрического пространства (W, ρ_W) и для произвольных $\omega, \hat{\omega} \in \Omega$ отображение $x \in X \mapsto \rho_W\big(\omega(\cdot, x), \hat{\omega}(\cdot, x)\big) \in \mathbb{R}_+$ является элементом конуса E_+ линейного нормированного пространства E. Тогда это отображение — в. метрика в пространстве Ω.

2. Теорема о неподвижной точке многозначного отображения

Пусть задано линейное пространство E, упорядоченное выпуклым замкнутым острым конусом E_+, с монотонной нормой $||\cdot||_E$. Будем предполагать, что конус E_+ воспроизводящий, т. е. $E = E_+ - E_+$. Отметим, что на в. метрические пространства не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в E_+ может не иметь инфимума (в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$, упорядоченность в E частичная). Тем не менее для многозначных отображений в. метрических пространств можно сформулировать условия существования неподвижной точки, аналогичные известной теореме Надлера.

В пространстве $\mathcal{L}(E)$ линейных ограниченных операторов $F\colon E \to E$ (со стандартно определенной нормой) зададим множество $\mathcal{L}_+(E) \doteq \{F\colon E \to E\colon F(E_+) \subset E_+\}$ положительных операторов. Очевидно, нулевой оператор $0 \in \mathcal{L}(E)$ является положительным. Для произвольного ненулевого оператора $F \in \mathcal{L}_+(E)$, так как $Fe \in E_+$ при любом $e \in E_+$, то $kFe \in E_+$ при $k > 0$, т. е. $kF \in \mathcal{L}_+(E)$. Далее, так как конус E_+ воспроизводящий, то для произвольного ненулевого оператора $F \in \mathcal{L}_+(E)$ существует $e \in E_+$ такой, что $Fe \neq 0$. Тогда $-kFe \notin E_+$ при $k > 0$, следовательно, $-kF \notin \mathcal{L}_+(E)$. Таким образом, множество $\mathcal{L}_+(E)$ является острым конусом в $\mathcal{L}(E)$.

Замкнутость этого конуса вытекает из замкнутости конуса E_+. Действительно, пусть последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{L}_+(E)$ сходится (по норме операторов) к некоторому $F \in \mathcal{L}(E)$. Тогда, поскольку из сходимости по норме операторов следует сильная сходимость, для любого $e \in E_+$ имеем $||F_i e - Fe||_E \to 0$. Следовательно, $Fe \in E_+$ и, значит, $F \in \mathcal{L}_+(E)$. Аналогично из выпуклости E_+ следует выпуклость $\mathcal{L}_+(E)$. Итак, $\mathcal{L}_+(E)$ — выпуклый замкнутый острый конус. Этот конус задает порядок на $\mathcal{L}(E)$; соответственно для $F, G \in \mathcal{L}(E)$ будем писать $F \geq G$ или $F - G \geq 0$, если $F - G \in \mathcal{L}_+(E)$.

Определим аналог свойства сжатия для многозначного отображения пространства X с векторнозначной метрикой $\mathcal{P}\colon X^2 \to E_+$.

Обозначим через $\mathrm{Cl}(X)$ совокупность всех непустых замкнутых (в векторнозначной метрике $\mathcal{P}$) подмножеств пространства X.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть задан оператор $Q \in \mathcal{L}_+(E)$ со спектральным радиусом $\varrho(Q) < 1$. Оператор $\Phi\colon X \to \mathrm{Cl}(X)$ будем называть *сжимающим с операторным коэффициентом* $Q \in \mathcal{L}_+(E)$ или Q-*сжатием* (*относительно векторнозначной метрики*), если

$$\forall x, \tilde{x} \in X \quad \Phi(x) \subset \mathrm{B}_X\big(\Phi(\tilde{x}), Q\mathcal{P}(\tilde{x}, x)\big).$$

Отметим, что это включение равносильно соотношению

$$\forall x, \tilde{x} \in X \quad \forall y \in \Phi(x) \quad \exists \tilde{y} \in \Phi(\tilde{x}) \quad \mathcal{P}(\tilde{y}, y) \le Q\,\mathcal{P}(\tilde{x}, x).$$

Если оператор Φ — Q-сжатие, то он является замкнутым, т. е. для любых элементов $y, x, x_i \in X$, $y_i \in \Phi(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, из сходимости $x_i \to x$, $y_i \to y$ следует $y \in \Phi(x)$. Действительно, при каждом $i = 1, 2, \ldots$ существует такой $\tilde{y}_i \in \Phi(x)$, что $\mathcal{P}(\tilde{y}_i, y_i) \le Q\,\mathcal{P}(x, x_i)$. Следовательно, $\tilde{y}_i \to y$, а так как множество $\Phi(x)$ замкнуто, то $y \in \Phi(x)$.

Отметим также, что если $E = \mathbb{R}$, то $Q = (q)_{1\times 1}$, $\varrho(Q) = q < 1$, и определение 1 равносильно классическому определению сжатия в метрическом пространстве.

Обозначим символом $I \in \mathcal{L}(E)$ тождественный оператор.

Сформулируем утверждение о существовании неподвижной точки у многозначного отображения в пространстве с векторнозначной метрикой.

Теорема 1. *Пусть пространство E является банаховым, пространство $(X, \mathcal{P})$ — полным. Если оператор $\Phi\colon X \to \mathrm{Cl}(X)$ сжимающий с операторным коэффициентом $Q \in \mathcal{L}_+(E)$, то для любых $x_0 \in X$, $x_1 \in \Phi(x_0)$ существует решение x включения*

$$x \in \Phi(x), \tag{2.1}$$

удовлетворяющее неравенству

$$\mathcal{P}(x, x_0) \le (I - Q)^{-1}\,\mathcal{P}(x_1, x_0). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположения $\varrho(Q) < 1$ следует, что оператор $I - Q\colon E \to E$ обратим, и обратный оператор является суммой ряда Неймана $(I - Q)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} Q^i$, члены которого — положительные операторы Q^i. Вследствие замкнутости конуса $\mathcal{L}_+(E)$ оператор $(I - Q)^{-1}\colon E \to E$ также является положительным, и при любом натуральном l справедливо $(I - Q)^{-1} - \sum_{i=0}^{l} Q^i \ge 0$.

Так как оператор Φ является Q-сжатием, то для элементов $x_0 \in X$ и $x_1 \in \Phi(x_0)$ найдется $x_2 \in \Phi(x_1)$, удовлетворяющий неравенству

$$\mathcal{P}(x_2, x_1) \le Q\,\mathcal{P}(x_1, x_0).$$

Аналогично при каждом натуральном i существует $x_{i+1} \in \Phi(x_i)$, удовлетворяющий неравенству

$$\mathcal{P}(x_{i+1}, x_i) \le Q\,\mathcal{P}(x_i, x_{i-1}) \le Q^i\,\mathcal{P}(x_1, x_0). \tag{2.3}$$

Покажем, что последовательность $\{x_i\} \subset X$ является фундаментальной. В силу соотношений (2.3), для любых $j = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\mathcal{P}(x_{j+l}, x_j) \le \sum_{i=j}^{j+l-1} \mathcal{P}(x_{i+1}, x_i) \le \sum_{i=0}^{l-1} Q^i Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0) \le (I - Q)^{-1} Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0), \tag{2.4}$$

откуда в силу монотонности нормы в пространстве E получаем соотношение

$$\|\mathcal{P}(x_{j+l}, x_j)\|_E \leq \|(I-Q)^{-1}Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0)\|_E.$$

Так как $\varrho(Q) < 1$, то при $j \to \infty$ имеет место сходимость $Q^j \to 0$ (в пространстве $\mathcal{L}(E)$), следовательно, $\|(I-Q)^{-1}Q^j\,\mathcal{P}(x_1, x_0)\|_E \to 0$, и поэтому последовательность $\{x_i\} \subset X$ действительно является фундаментальной. Обозначим через x ее предел и заметим, что вследствие замкнутости сжимающего оператора Φ выполнено $x \in \Phi(x)$.

Из неравенства (2.4), при $j = 0$, следует оценка

$$\mathcal{P}(x_l, x_0) \leq (I-Q)^{-1}\,\mathcal{P}(x_1, x_0), \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, в силу замкнутости конуса E_+, получаем, что найденная неподвижная точка x отображения Φ удовлетворяет неравенству (2.2). $\square$

Пусть заданы метрические пространства (X_i, ρ_i), $i = \overline{1,n}$, их произведение $X \doteq \prod_{i=1}^n X_i$ наделим в. метрикой (см. пример 1)

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X,\ u = (u_1, \ldots, u_n) \in X \ \mapsto\ \mathcal{P}(x, u) = \big(\rho_1(x_1, u_1), \ldots, \rho_n(x_n, u_n)\big) \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть определены отображения $\Phi_i\colon X \to \mathrm{Cl}(X_i)$, $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим систему включений

$$x_i \in \Phi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть пространства (X_i, ρ_i), $i = \overline{1,n}$, полные и для любого $j = \overline{1,n}$ при всех $x_l \in X_l$, $l = \overline{1,n}$, $l \neq j$ отображение $\Phi_{ij} \doteq \Phi_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n)\colon X_j \to \mathrm{Cl}(X_i)$ q_{ij}-липшицево, т.е.*

$$\forall x, \tilde{x} \in X_j \quad \forall y \in \Phi_{ij}(x) \quad \exists \tilde{y} \in \Phi_{ij}(\tilde{x}) \quad \rho_i(\tilde{y}, y) \leq q_{ij}\rho_j(\tilde{x}, x).$$

Тогда если $n \times n$-матрица $Q = \big(q_{ij}\big)$ имеет спектральный радиус $\varrho(Q) < 1$, то для любых $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in X$, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1) \in X$ таких, что $x_i^1 \in \Phi_i(x^0)$, $i = \overline{1,n}$, существует решение x системы (2.5)*, удовлетворяющее неравенству* (2.2).

3. Условия разрешимости одного интегрального включения

Обозначим через $L([a,b], \mathbb{R}^n)$, $L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ пространства суммируемых, существенно ограниченных (по Лебегу) функций $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, соответственно, с нормами $||y||_L \doteq \int_a^b |y(t)|dt$, $||y||_{L_\infty} \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |y(t)|$; $L([a,b], \mathbb{R}_+)$ — множество суммируемых (по Лебегу) функций $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ (очевидно, образующее выпуклый замкнутый острый воспроизводящий конус в $L([a,b], \mathbb{R})$).

Пусть заданы функция $\kappa\colon [a,b]^2 \to \mathbb{R}^{m\times n}$ и многозначное отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Рассмотрим интегральное включение

$$y(t) \in F\bigg(t, \int_a^b \kappa(t,s)y(s)\,ds\bigg), \quad t \in [a,b], \tag{3.1}$$

относительно неизвестной суммируемой функции $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(a) при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^m$ множество $F(t,x)$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$;

(b) для любого $x \in \mathbb{R}^m$ отображение $F(\cdot, x) \colon [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо;

(c) отображение $t \in [a,b] \mapsto F(t,0)$ имеет суммируемое сечение;

(d) для некоторой суммируемой функции $q \colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$ при п.в. $t \in [a,b]$, любых $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ и $y \in F(t,x)$ существует $\tilde{y} \in F(t,\tilde{x})$ удовлетворяющий неравенству $|\tilde{y} - y| \le q(t)|\tilde{x} - x|$;

(e) функция κ измерима и существенно ограничена.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **(a)**–**(e)** *и линейный оператор*

$$Q \colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R}), \quad (Q\mathcal{P})(t) \doteq \int\limits_a^b q(t)|\kappa(t,s)|\mathcal{P}(s)\,ds, \tag{3.2}$$

имеет спектральный радиус $\varrho(Q) < 1$. *Тогда существует решение* $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *включения* (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве $L([a,b],\mathbb{R}^n)$ определим в. метрику

$$\mathcal{P} \colon L([a,b],\mathbb{R}^n) \times L([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{P}(\tilde{y},y)(t) \doteq |\tilde{y}(t) - y(t)| \ \ \forall \tilde{y}, y \in L([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Покажем, что включение (3.1) может быть представлено в виде включения (2.1) в пространстве $\big(L([a,b],\mathbb{R}^n),\, \mathcal{P}\big)$, удовлетворяющего предположениям теоремы 1.

Из условия **(e)** следует, что заданный соотношением

$$(\mathrm{k}y)(t) \doteq \int\limits_a^b \kappa(t,s)y(s)\,ds$$

интегральный оператор действует из $L([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$. Определим многозначный оператор Немыцкого $\mathcal{N}_F \colon L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^m)$, сопоставляющий каждой функции $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ множество суммируемых сечений многозначного отображения $t \in [a,b] \mapsto F(t,z(t)) \subset \mathbb{R}^n$, и запишем включение (3.1) в виде

$$y \in \mathcal{N}_F \mathrm{k}\, y. \tag{3.3}$$

Покажем, что композиция $\mathcal{N}_F\mathrm{k} \colon L([a,b],\mathbb{R}^m) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^m)$ является сжатием (относительно в. метрики $\mathcal{P}$).

Из предположения **(d)** следует, что отображение $F(t,\cdot) \colon \mathbb{R}^m \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно (в метрике Хаусдорфа). Учитывая предположение **(a)**, заключаем, что F удовлетворяет условиям Каратеодори и поэтому суперпозиционно измеримо. Итак, для любого $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ отображение $F(\cdot, z(\cdot))$ измеримо. Покажем, что среди его сечений есть суммируемые функции.

Согласно предположению **(c)** найдем суммируемое сечение y_0 отображения $F(\cdot,0)$. Выберем произвольное $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ и определим многозначное отображение

$$V_{0,y_0,z} \colon [a,b] \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n), \quad V_{0,y_0,z}(t) \doteq \big\{v \colon |v - y_0(t)| \le q(t)|z(t)|\big\}.$$

Это отображение измеримо, и в силу предположения **(d)** имеем $V_{0,y_0,z}(t) \cap F(t,z(t)) \ne \varnothing$ при п.в. $t \in [a,b]$. Отображение $t \in [a,b] \mapsto V_{0,y_0,z}(t) \cap F(t,z(t))$ измеримо (см. [8, следствие 1.5.8]) и поэтому имеет измеримое сечение, очевидно являющееся суммируемым. Итак, при любом $z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ у отображения $F(\cdot,z(\cdot))$ существуют суммируемые сечения. Множество таких сечений замкнуто в $L([a,b],\mathbb{R}^n)$. Действительно, если $u_i \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $u_i(t) \in F(t,z(t))$, $i = 1,2,\ldots$, и $\|u_i - u\|_L \to 0$, то некоторая подпоследовательность $\{u_{i_j}\}_{j=1}^\infty$ сходится к u почти всюду и $u(t) \in F(t,z(t))$ вследствие замкнутости множества $F(t,z(t))$. Таким образом, $\mathcal{N}_F \colon L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) \to \mathrm{Cl}\big(L([a,b],\mathbb{R}^m)\big)$.

Теперь покажем, что для любых $z, \tilde z \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, $u \in \mathcal{N}_F z \subset L([a,b],\mathbb{R}^m)$ существует $\tilde u \in \mathcal{N}_F \tilde z \subset L([a,b],\mathbb{R}^m)$, удовлетворяющий неравенству

$$|\tilde u(t) - u(t)| \le q(t)|\tilde z(t) - z(t)|. \tag{3.4}$$

Для этого определим измеримое многозначное отображение

$$V_{z,u,\tilde z}\colon [a,b] \to \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n), \quad V_{z,u,\tilde z}(t) \doteq \bigl\{v\colon |v - u(t)| \le q(t)|\tilde z(t) - z(t)|\bigr\}.$$

Согласно **(d)** при п.в. $t \in [a,b]$ выполнено $V_{z,u,\tilde z}(t) \cap F(t,\tilde z(t)) \ne \varnothing$. В силу измеримости отображения $t \in [a,b] \mapsto V_{z,u,\tilde z}(t) \cap F(t,\tilde z(t))$ оно имеет измеримое сечение $\tilde u$. Из $\tilde u(t) \in V_{z,u,\tilde z}(t)$, $t \in [a,b]$, следует, что функция $\tilde u$ суммируема и удовлетворяет неравенству (3.4).

Для композиции $\mathcal{N}_F\mathrm{k}$ в силу неравенства (3.4) получаем

$$\forall y, \tilde y \in L([a,b],\mathbb{R}^m) \quad \forall u \in \mathcal{N}_F\mathrm{k}\,y \quad \exists \tilde u \in \mathcal{N}_F\mathrm{k}\,\tilde y$$

$$\mathcal{P}(\tilde u, u)(t) = |\tilde u(t) - u(t)| \le q(t)\int_a^b |\kappa(t,s)|\,|\tilde y(s) - y(s)|\,ds = \int_a^b q(t)|\kappa(t,s)|\mathcal{P}(\tilde y, y)(s)\,ds.$$

Так как спектральный радиус оператора (3.2) меньше единицы, то отображение

$$\mathcal{N}_F\mathrm{k}\colon L([a,b],\mathbb{R}^m) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^m)$$

является сжатием с операторным коэффициентом (3.2). Согласно теореме 1 существует решение $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ включения (3.1). □

Теорема 1 позволяет не только сформулировать условия разрешимости включения (3.1), но и, используя неравенство (2.2), получить оценки его решений. С этой целью для заданного соотношением (3.2) оператора Q найдем оператор $(I-Q)^{-1}\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R})$. Так как $\varrho(Q) < 1$, то оператор $(I-Q)^{-1}$ является суммой ряда Неймана $I + Q + Q^2 + \dots$. Получим представления членов этого ряда — степеней оператора Q, а затем его суммы. Напомним, что для любого положительного интегрального оператора $\mathrm{h}\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{h}u = \int_a^b \eta(t,s)u(s)\,ds$ с ядром $\eta(t,s) \ge 0$ при п.в. $(t,s) \in [a,b]^2$ выполнено $\int_a^b \eta(t,\cdot)\,dt \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ и $\|\mathrm{h}\|_{L\to L} = \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} \int_a^b \eta(t,s)\,ds$.

Так как интегральный оператор Q действует в $L([a,b],\mathbb{R})$ и регулярен (более того, положителен), то любая его i-я степень Q^i является интегральным оператором с ядром q_i, определяемым соотношениями (см. [9, гл. III, § 5.3, с. 158])

$$q_1(t,s) = q(t)\kappa_1(t,s), \quad \kappa_1(t,s) = |\kappa(t,s)|;$$

$$q_i(t,s) = q(t)\kappa_i(t,s), \quad \kappa_i(t,s) = \int_a^b \kappa_{i-1}(t,\varsigma)\,q(\varsigma)\,\kappa_1(\varsigma,s)\,d\varsigma, \quad i = 2,3,\dots .$$

Из этих соотношений в силу существенной ограниченности функции κ следует, что все функции κ_i, $i = 2,3,\dots$, также существенно ограничены.

Покажем, что *оператор $(I-Q)^{-1}$ представим в виде суммы тождественного оператора I и интегрального оператора с ядром $\eta(t,s) = q(t)\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i(t,s)$, причем имеет место сходимость*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} \int_a^b \Bigl(\eta(t,s) - q(t)\sum_{i=1}^{j}\kappa_i(t,s)\Bigr)\,dt \to 0 \quad \text{при} \;\; j \to \infty. \tag{3.5}$$

В силу сходимости ряда Неймана для его частичных сумм — операторов $\mathrm{h}_j\colon L([a,b],\mathbb{R}) \to L([a,b],\mathbb{R})$, $\mathrm{h}_j u = \int_a^b \eta_j(t,s)u(s)\,ds$, где $\eta_j(t,s) = q(t)\sum\limits_{i=1}^{j}\kappa_i(t,s)$, — справедливо

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists J \quad \forall i > j > J \quad \dot\forall t \in [a,b] \quad \int\limits_a^b \big(\eta_i(t,s) - \eta_j(t,s)\big)ds \le \varepsilon. \tag{3.6}$$

Следовательно, $\eta_i(t,\cdot) \to \eta(t,\cdot)$ в пространстве $L([a,b],\mathbb{R})$, где $\eta(t,s) = \lim\limits_{i\to\infty}\eta_i(t,s)$. Поэтому из соотношения (3.6) получаем

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists J \quad \forall j > J \quad \dot\forall t \in [a,b] \quad \int\limits_a^b \big(\eta(t,s) - \eta_j(t,s)\big)ds \le \varepsilon;$$

таким образом, сходимость (3.5) доказана.

Теперь можем оценить решения включения (3.1).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда для любых* $y_0 \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y_1 \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *таких, что* $y_1(t) \in F\big(t, \int_a^b \kappa(t,s)y_0(s)\,ds\big)$ *при п.в.* $t \in [a,b]$, *существует решение* $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *включения* (3.1), *удовлетворяющее неравенству*

$$|y(t) - y_0(t)| \le |y_1(t) - y_0(t)| + \int\limits_a^b q(t)\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i(t,s)|y_1(s) - y_0(s)|\,ds, \quad t \in [a,b].$$

Заключим раздел следующим замечанием об общности рассмотренного здесь включения (3.3). Это включение содержит интегральный оператор $L([a,b],\mathbb{R}^m) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, а любой линейный оператор, действующий в этих пространствах, является интегральным (см. [9, гл. III, § 5.2, с. 157]), и, что более важно, к такому включению сводятся краевые задачи для функционально-дифференциальных включений.

4. Условия разрешимости краевой задачи для функционально-дифференциального включения

Приведем вначале некоторые сведения о функционально-дифференциальных уравнениях.

Символом $AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство абсолютно непрерывных функций $t \in [a,b] \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$. Пусть заданы линейные ограниченные отображения $\mathcal{L}\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n) \to L([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\ell\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$. Следуя [10, § 2.1], линейной краевой задачей для функционально-дифференциального уравнения мы называем систему уравнений

$$\mathcal{L}x = y, \tag{4.1}$$

$$\ell x = \gamma. \tag{4.2}$$

Если краевая задача (4.1), (4.2) при каждых $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное решение $x \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, то это решение непрерывно зависит от (y,γ) и определяется формулой [10, § 3.1]

$$x(t) = X(t)\gamma + \int\limits_a^b \mathfrak{g}(t,s)y(s)\,ds, \quad t \in [a,b]. \tag{4.3}$$

Здесь $X \in AC([a,b],\mathbb{R}^{n\times n})$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, линейный непрерывный оператор $y \in L([a,b],\mathbb{R}^n) \mapsto \int_a^b \mathfrak{g}(\cdot,s)y(s)\,ds \in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ — оператор Грина, а его ядро $\mathfrak{g} \in L_\infty([a,b]^2,\mathbb{R}^{n\times n})$ — функция Грина.

Пусть заданы: отображение $F\colon [a,b]\times\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, измеримая функция $\tau\colon [a,b]\to[a,b]$ и вектор $\gamma\in\mathbb{R}^n$. Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального включения

$$(\mathcal{L}x)(t)\in F\bigl(t, x(\tau(t))\bigr),\quad t\in[a,b], \tag{4.4}$$

с линейным краевым условием (4.2). Заметим, что требование принадлежности значений функции τ отрезку $[a,b]$ необходимо нам лишь для сокращения выкладок, оно не ограничивает общность рассматриваемого включения: при его невыполнении можно определить равносильное включение, удовлетворяющее этому условию.

Будем предполагать, что соответствующая линейная краевая задача (4.1), (4.2) однозначно разрешима; тогда задача (4.4), (4.2) равносильна включению

$$y(t)\in F\Bigl(t,\ X\bigl(\tau(t)\bigr)\gamma+\int\limits_a^b \mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)y(s)\,ds\Bigr),\quad t\in[a,b], \tag{4.5}$$

а именно для любого решения $y\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ включения (4.5) определяемая соотношением (4.3) функция x будет решением задачи (4.4), (4.2); обратно, для любого решения x задачи (4.4), (4.2) правая часть y уравнения (4.1) будет решением включения (4.5).

Применяя к включению теорему 2 и следствие 2, получаем следующее утверждение о разрешимости краевой задачи (4.4), (4.2).

Теорема 3. *Пусть отображение F удовлетворяет условиям* **(a)–(d)** *и линейный оператор*

$$Q\colon L([a,b],\mathbb{R})\to L([a,b],\mathbb{R}),\quad (Q\mathcal{P})(t)\doteq\int\limits_a^b q(t)|\mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)|\mathcal{P}(s)\,ds,$$

имеет спектральный радиус $\varrho(B)<1$. Тогда существует решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (4.4), (4.2). *Кроме того, для любых $x_0\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y_1\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ таких, что $\ell x_0=\gamma$ и $y_1(t)\in F\bigl(t,x_0(\tau(t))\bigr)$ при п.в. $t\in[a,b]$, существует решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ задачи* (4.4), (4.2)*, удовлетворяющее неравенству*

$$|(\mathcal{L}x)(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|\le|y_1(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|+\int\limits_a^b q(t)\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i(t,s)|y_1(s)-(\mathcal{L}x_0)(s)|\,ds,\quad t\in[a,b],$$

$$\text{где}\ \ \kappa_1(t,s)=|\mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)|,\quad \kappa_i(t,s)=\int\limits_a^b\kappa_{i-1}(t,\varsigma)\,q(\varsigma)\,\kappa_1(\varsigma,s)\,d\varsigma,\quad i=2,3,\dots.$$

В заключение рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального включения (4.4) с многозначным краевым условием

$$\ell x\in\Psi x, \tag{4.6}$$

где $\Psi\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$. По-прежнему предполагаем, что линейная краевая задача (4.1), (4.2) однозначно разрешима. Задача (4.4), (4.6) равносильна системе включений

$$\begin{cases} y(t)\in F\Bigl(t,\ X\bigl(\tau(t)\bigr)\gamma+\int\limits_a^b\mathfrak{g}\bigl(\tau(t),s\bigr)y(s)\,ds\Bigr),\quad t\in[a,b],\\ \gamma\in\Psi\Bigl(X(\cdot)\gamma+\int\limits_a^b\mathfrak{g}(\cdot,s)y(s)\,ds\Bigr),\end{cases} \tag{4.7}$$

т. е. для любого решения $(y,\gamma) \in L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ системы (4.7) соотношение (4.3) определяет решение x задачи (4.4), (4.6); обратно, для любого решения x задачи (4.4), (4.6) правая часть (y,γ) задачи (4.1), (4.2) удовлетворяет системе (4.7).

Относительно многозначного функционала Ψ будем предполагать, что выполнено следующее условие:

(f) существует линейный функционал $\psi\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$, положительный относительно конуса неотрицательных функций и такой, что для любых $x,u\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $\gamma\in\Psi x$ существует $\tilde\gamma\in\Psi u$, удовлетворяющий неравенству $|\tilde\gamma-\gamma|\le\psi|u(\cdot)-x(\cdot)|$.

Для исследования системы (4.7) применим теорему 1 и таким образом получим следующий признак разрешимости краевой задачи (4.4), (4.6).

Теорема 4. *Пусть отображение F удовлетворяет условиям* **(a)–(d)**, *а отображение Ψ — условию* **(f)**. *Если для спектрального радиуса ϱ линейного оператора*

$$Q\colon L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}\to L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R},$$

$$Q(p,\alpha)\doteq\left(\int_a^b q(\cdot)\,|\mathfrak{g}\big(\tau(\cdot),s\big)|\,p(s)\,ds+q(\cdot)\,|X\big(\tau(\cdot)\big)|\,\alpha;\ \psi\int_a^b|\mathfrak{g}(\cdot,s)|\,p(s)\,ds+\psi|X(\cdot)|\,\alpha\right) \qquad (4.8)$$

выполнено $\varrho(Q)<1$, то существует решение $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (4.4), (4.6).

Доказательство. В произведении $\Omega\doteq L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ определим в. метрику $\mathcal{P}\colon\Omega\times\Omega\to L([a,b],\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+$ — отображение, сопоставляющее любым $\omega=(y,\gamma)\in\Omega$, $\tilde\omega=(\tilde y,\tilde\gamma)\in\Omega$ пару $\mathcal{P}(\tilde\omega,\omega)\doteq\big(|\tilde y(\cdot)-y(\cdot)|,\,|\tilde\gamma-\gamma|\big)$. Отметим, что множество $L([a,b],\mathbb{R}_+)\times\mathbb{R}_+$ является выпуклым замкнутым острым воспроизводящим конусом в $L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$.

Запишем систему (4.7) в виде следующей системы операторных включений

$$\begin{cases} y\in\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,y+X(\tau(\cdot))\gamma\big),\\ \gamma\in\Psi(\mathrm{g}y+X\gamma).\end{cases}$$

Здесь операторы $\mathrm{g}\colon L([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{k}\colon L([a,b],\mathbb{R}^n)\to AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ определены равенствами

$$\mathrm{g}\,y=\int_a^b\mathfrak{g}(\cdot,s)\,y(s)\,ds,\quad \mathrm{k}\,y=\int_a^b\mathfrak{g}\big(\tau(\cdot),s\big)\,y(s)\,ds,$$

где $\mathcal{N}_F\colon L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)\to\mathrm{Cl}\big(L([a,b],\mathbb{R}^m)\big)$ — оператор Немыцкого, порожденный удовлетворяющей условиям Каратеодори (см. доказательство теоремы 1) многозначной функцией F.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательстве теоремы 2, можно показать, что для любых (y,γ) и $(\tilde y,\tilde\gamma)$, принадлежащих $L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, любой суммируемой функции $v\in\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,y+X(\tau(\cdot))\gamma\big)$ существует суммируемая функция $\tilde v\in\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,\tilde y+X(\tau(\cdot))\tilde\gamma\big)$, удовлетворяющая неравенству

$$|\tilde v(t)-v(t)|\le\int_a^b q(t)\,|\mathfrak{g}\big(\tau(t),s\big)|\,|\tilde y(s)-y(s)|\,ds+q(t)\,|X\big(\tau(t)\big)|\,|\tilde\gamma-\gamma|,\quad t\in[a,b].$$

В силу предположения **(f)** для любых $(y,\gamma)\in L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, $(\tilde y,\tilde\gamma)\in L([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, любого вектора $\vartheta\in\Psi(X\gamma+\mathrm{g}y)$ существует вектор $\tilde\vartheta\in\Psi(X\tilde\gamma+\mathrm{g}\tilde y)$ такой, что

$$|\tilde\vartheta-\vartheta|\le\psi\int_a^b|\mathfrak{g}(\cdot,s)|\,|\tilde y(s)-y(s)|\,ds+\psi|X(\cdot)|\,|\tilde\gamma-\gamma|.$$

Итак, установлено, что отображение

$$(y,\gamma)\in\Omega\mapsto\Big(\mathcal{N}_F\big(\mathrm{k}\,y+X(\tau(\cdot))\gamma\big),\,\Psi(X\gamma+\mathrm{g}y)\Big)\in\Omega$$

является сжимающим с операторным коэффициентом $Q\in\mathcal{L}_+\big(L([a,b],\mathbb{R})\big)$, заданным соотношением (4.8). Согласно теореме 1 система (4.7), а следовательно, и краевая задача (4.4), (4.6) разрешимы. □

Для получения оценки решений краевой задачи (4.4), (4.6) определим натуральные степени оператора (4.8). Для сокращения выкладок обозначим

$$q_1(t,s)\doteq q(t)\,|\mathfrak{g}\big(\tau(t),s\big)|,\quad Y_1(t)\doteq q(t)\,|X\big(\tau(t)\big)|,\quad \nu_1\doteq\psi|X(\cdot)|.$$

В силу интегрального представления линейных ограниченных функционалов на пространстве $L([a,b],\mathbb{R})$ (см., например, [11, гл. VI, § 2.1]) существует такая функция $\varphi_1\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что

$$\psi\int_a^b|\mathfrak{g}(\cdot,s)|\,p(s)\,ds=\int_a^b\varphi_1(s)p(s)\,ds.$$

Таким образом, оператор (4.8) каждой паре $(p,\alpha)\in L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ сопоставляет

$$Q(p,\alpha)=\left(\int_a^b q_1(\cdot,s)\,p(s)\,ds+Y_1(\cdot)\alpha;\ \int_a^b\varphi_1(s)p(s)\,ds+\nu_1\alpha\right)\in L([a,b],\mathbb{R})\times\mathbb{R}.$$

Натуральные степени оператора этого оператора определяются соотношением

$$Q^i(p,\alpha)=\left(\int_a^b q_i(\cdot,s)\,p(s)\,ds+Y_i(\cdot)\alpha;\ \int_a^b\varphi_i(s)p(s)\,ds+\nu_i\alpha\right),\quad i=2,3,\ldots,$$

где

$$q_i(t,s)=\int_a^b q_1(t,\varsigma)q_{i-1}(\varsigma,s)\,d\varsigma+Y_1(t)\varphi_{i-1}(s);\quad Y_i(t)=\int_a^b q_1(t,s)Y_{i-1}(s)\,ds+Y_1(t)\nu_{i-1};$$

$$\varphi_i(s)=\int_a^b\varphi_1(\varsigma)q_{i-1}(\varsigma,s)\,d\varsigma+\nu_1\varphi_{i-1}(s);\quad \nu_i=\int_a^b\varphi_1(s)Y_{i-1}(s)\,ds+\nu_1\nu_{i-1}.$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда для произвольных* $x_0\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y_1\in L([a,b],\mathbb{R}^n)$ *и* $\gamma_1\in\mathbb{R}^n$ *таких, что* $y_1(t)\in F\big(t,x_0(\tau(t))\big)$ *при п.в.* $t\in[a,b]$ *и* $\gamma_1\in\Psi x_0$, *существует решение* $x\in AC([a,b],\mathbb{R}^n)$ *краевой задачи* (4.4), (4.6), *удовлетворяющее неравенствам*

$$|(\mathcal{L}x)(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|$$
$$\le|y_1(t)-(\mathcal{L}x_0)(t)|+\int_a^b\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t,s)|y_1(s)-(\mathcal{L}x_0)(s)|\,ds+\sum_{i=1}^{\infty}Y_i(t)|\gamma_1-\ell x_0|,\quad t\in[a,b],$$

$$|\ell x-\ell x_0|\le|\gamma_1-\ell x_0|+\int_a^b\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(s)|y_1(s)-(\mathcal{L}x_0)(s)|\,ds+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i|\gamma_1-\ell x_0|.$$

В большинстве исследований дифференциальных включений предполагается выпуклость значений многозначного отображения F. Это условие, в частности, обеспечивает замкнутость образов композиции линейного интегрального оператора и оператора Немыцкого. Такая композиция — “интегральный мультиоператор, порожденный отображением F” (см. [8, определение 1.5.33]), — возникает в результате стандартно используемой редукции дифференциального включения к интегральному включению в пространстве решений — непрерывных функций. В данной работе функционально-дифференциальное включение сводится к включению в пространстве производных от решений — суммируемых функций. Это позволяет избавиться от обременительного условия выпуклости значений F. Отметим, что функционально-дифференциальные включения вида $\dot{x} \in Gx$, где $G\colon AC([a,b],\mathbb{R}^n) \rightrightarrows L([a,b],\mathbb{R}^n)$ — вольтеррово многозначное отображение, возможно, не обладающее свойством выпуклости значений, изучалось в работах А. И. Булгакова; в этих исследованиях использовались результаты о существовании у отображения G непрерывных селекторов (см., например, [12]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321 .
2. **Ченцов А.Г.** Об одной модификации метода программных итераций // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1076–1086.
3. **Забрейко П.П., Макаревич Т.А.** Об одном обобщении принципа Банаха — Каччиополли на операторы в псевдометрических пространствах // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1497–1504.
4. **Перов А.И.** Многомерная версия принципа обобщённого сжатия М. А. Красносельского // Функц. анализ и его приложения. 2010. Т. 44, № 1. С. 83–87. doi: 10.4213/faa2953 .
5. **Жуковский Е.С.** О точках совпадения векторных отображений // Изв. вузов. Математика. 2016. № 10. С. 14–28.
6. **Жуковский Е.С.** О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21, № 2. С. 375–379. doi: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-375-379 .
7. **Жуковский Е.С.** О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 297–311.
8. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. М.: Либроком, 2011. 224 с.
9. Функциональный анализ / ред. С.Г. Крейн. М.: Наука, 1972. 544 с.
10. **Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
12. **Булгаков А.И., Беляева О.П., Мачина А.Н.** Функционально-дифференциальное включение с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2005. № 1. С. 3–20.

Поступила 09.10.2017

Жуковский Евгений Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор НИИ математики, физики и информатики
ТГУ имени Г.Р. Державина, г. Тамбов
ведущий научный сотрудник
Математический институт им. С.М. Никольского РУДН, г. Москва
e-mail: zukovskys@mail.ru

Панасенко Елена Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой функционального анализа
ТГУ имени Г.Р. Державина, г. Тамбов
e-mail: panlena_t@mail.ru

REFERENCES

1. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 43–61. doi: 10.1134/S0081543817050066 .
2. Chentsov A.G. A Version of the Program Iteration Method. *Diff. Equ.*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1132–1143. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000011287.42107.96 .
3. Zabrejko P.P., Makarevich T.A. A generalization of the Banach–Cacciopolli principle to operators in pseudometric spaces. *Diff. Equ.*, 1987, vol. 23, no. 9, pp. 1024–1030.
4. Perov A.I. Multidimensional version of M. A. Krasnoselskii's generalized contraction principle. *Funct. Anal. Appl.*, 2010, vol. 44, no. 1, pp. 69–72. doi: 10.1007/s10688-010-0008-z .
5. Zhukovskiy E.S. On coincidence points for vector mappings. *Russian Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 2016, vol. 60, no. 10, pp. 10–22. doi: 10.3103/S1066369X16100030 .
6. Zhukivskiy E.S. On perturbations of covering mappings in spaces with vector-valued metrics. *Vestn. Tambov. Univ. Ser.: Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 375–379 (in Russian).
7. Zhukivskiy E.S. Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 230–241. doi: 10.1134/S0037446616020063 .
8. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differenzial'nykh vklyuchenii.*[Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions]. Moscow, Librocom Publ., 2011, 224 p. (in Russian). ISBN: 978-5-397-01526-4 .
9. Vilenkin N.Ya., Krein S.G., et al. *Functional analysis.* Wolters-Noordhoff Ser. of Monographs and Textbooks on Pure and Appl. Math., Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1972, 379 p. ISBN: 9001909809 . Original Russian text published in Krein S.G. (ed.), *Funkzional'nyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 544 p.
10. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* Advanced Seri. in Math. Science and Engineering, 3. Atlanta: World Federation Publ., 1995, 172 p. ISBN: 1-885978-02-2 . Original Russian text published in Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p.
11. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis.* Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251 . Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz.* Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p.
12. Bulgakov A.I., Belyaeva O.P., Machina A.N. Functional-differential inclusion with multivalued map not necessarily convex-valued with respect to switching. *Vestn. Udmurt. Univ. Matematika*, 2005, no. 1, pp. 3–20 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2017.

Evgenii Semenovich Zhukovskiy, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Research Institute of Mathematics, Physics, and Computer Sciences, Tambov Derzhavin State University, Tambov, 392000 Russia; Nikol'skii Mathematical Institute, RUDN University, Moscow, 117198 Russia,
e-mail: zukovskys@mail.ru .

Elena Aleksandrovna Panasenko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), docent, Functional Analysis Department, Tambov Derzhavin State University, Tambov, 392000 Russia,
e-mail: panlena_t@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

А. И. Короткий, А. Л. Литвиненко

Исследуется разрешимость неоднородной смешанной краевой задачи для модели стационарной реакции-конвекции-диффузии. Такие модели часто используются в науке и технике при описании и исследовании различных процессов тепломассопереноса. Основное внимание уделяется вопросам разрешимости краевой задачи в различных функциональных пространствах, вопросам устойчивости и непрерывной зависимости решения задачи от исходных данных задачи в естественных метриках. Особенность краевой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Такие граничные данные нельзя, вообще говоря, продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать известным способом для преобразования задачи к однородным граничным данным. Для доказательства разрешимости задач используется теорема Лакса—Мильграмма, из этой же теоремы следуют оценки норм решения. Установлены также варианты полной непрерывности оператора решения. Найденные свойства решений прямой задачи в дальнейшем будут использоваться при решении обратных задач.

Ключевые слова: прямая задача, смешанное граничное условие, слабое решение, обобщенное решение, сильное решение, устойчивость, полная непрерывность оператора.

A. I. Korotkii, A. L. Litvinenko. Solvability of a mixed boundary value problem for a stationary reaction–convection–diffusion model.

We study the solvability of an inhomogeneous mixed boundary value problem for a stationary reaction–convection–diffusion model. Such models are often used in science and engineering for the description and analysis of various processes of heat and mass transfer. We focus on the issues of solvability of the boundary value problem in various functional spaces and on the stability of the solution and its continuous dependence on the input data in natural metrics. The peculiarity of the problem consists in the inhomogeneity and irregularity of the mixed boundary data. These boundary data, in general, cannot be continued inside the domain so that the continuation is sufficiently smooth and can be used in the known way to transform the problem to homogeneous boundary data. To prove the solvability of the problem, we use the Lax–Milgram theorem. Estimates for the norms of the solution follow from the same theorem. The properties of the solution of the direct problem found in this study will be used in what follows to solve inverse problems.

Keywords: direct problem, mixed boundary condition, weak solution, generalized solution, strong solution, stability, completely continuous operator.

MSC: 35J25, 76D03, 76R10, 86A04

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-106-120

Введение

В работе изучаются краевые задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии с неоднородными смешанными граничными условиями. Такие модели часто используются при исследовании различных гидродинамических и тепловых процессов, в частности при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод, в микроэлектронике при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле [1; 2].

Основная задача состоит в нахождении решения соответствующей краевой задачи при известных данных на границе области изменения независимой пространственной переменной (области протекания процесса). Математическая постановка задачи приводит к смешанной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка. Такую задачу иногда называют прямой задачей. Особенность прямой задачи состоит в неоднородности и нерегулярности смешанных граничных данных. Такие граничные данные нельзя, вообще говоря, продолжить внутрь области так, чтобы продолжение было достаточно гладким и его можно было бы использовать для преобразования задачи к однородным граничным данным.

Для прямой задачи вводятся понятия решения в различных функциональных пространствах в зависимости от гладкости и согласованности граничных данных (слабые, обобщенные, сильные [3–9]). Доказаны теоремы о разрешимости задачи. Установлены априорные оценки на решения и непрерывная зависимость решений от исходных данных задачи. Получены оценки норм оператора решения и установлены некоторые варианты его полной непрерывности. Найденные свойства решений прямой задачи в дальнейшем будут использоваться при решении обратных задач.

В работе продолжаются исследования [10–12].

1. Постановка задачи

Охарактеризуем сначала содержательную сторону задачи. В прямоугольной области $\Omega = (0,l_1)\times(0,l_2) \subset \mathbb{R}^2$, содержащей неоднородную сплошную среду, находящуюся под воздействием некоторых внутренних и внешних определяющих состояние среды факторов, рассматривается установившееся (стационарное) распределение температуры (или концентрации какого-либо вещества среды). Математическая модель распределения температуры (концентрации вещества) в области Ω представляет собой смешанную краевую задачу для уравнения реакции-конвекции-диффузии [1–8]:

$$\mathbb{L}\,T \equiv \operatorname{div}(\,k\,\nabla T) - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla T\,\rangle - q\,T = f\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \tag{1.1}$$

$$T = \xi\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_1 = \{\,(x_1,0) \in \mathbb{R}^2 : \,0 < x_1 < l_1\,\}\,, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_2 = \{\,(l_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \,0 < x_2 < l_2\,\}\,, \tag{1.3}$$

$$k\,\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = \varphi\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_3 = \{\,(x_1,l_2) \in \mathbb{R}^2 : \,0 < x_1 < l_1\,\}\,, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_4 = \{\,(0,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \,0 < x_2 < l_2\,\}\,. \tag{1.5}$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ — точка пространства $\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{u} = (u_1(\boldsymbol{x}),u_2(\boldsymbol{x}))$ — заданный вектор скорости движения среды в точках $\boldsymbol{x}$ области Ω, удовлетворяющий условию $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ в области Ω (условие несжимаемости среды) и условию $\boldsymbol{u} = 0$ на границе Γ области Ω (условие прилипания среды на неподвижной границе Γ); $T = T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — искомая температура (концентрация вещества) среды в области Ω; $k = k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент теплопроводности (диффузии) среды в области Ω; $q = q(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — заданный коэффициент реакции в точках области Ω, характеризующий скорость образования или стока тепла (вещества) в результате химических превращений; $f = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, — заданная объемная плотность производства или стока тепла (вещества) в области Ω; $\xi = \xi(\boldsymbol{x})$ и $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x})$ — заданные функции, определенные на частях Γ_1 и Γ_3 границы Γ области Ω соответственно, характеризующие внешние факторы (режимы) взаимодействия среды, находящейся внутри области Ω, с окружающей средой; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точках границы Γ области Ω; $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Задача состоит в нахождении распределения температуры (концентрации вещества) T в области Ω в результате решения краевой задачи (1.1)–(1.5). Эту задачу иногда будем называть *прямой задачей*.

Уточним постановку задачи.

Далее в тексте будут использоваться пространства Лебега $L_p(\Omega)$, $L_p(\Gamma)$, $L_p(\Gamma_1)$, $L_p(\Gamma_3)$, $p \geqslant 1$, пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, $p \geqslant 1$, $l \geqslant 1$ [3–8; 13; 14], а также их векторные аналоги $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_1)$, $\mathbf{L}_p(\Gamma_3)$, $\mathbf{W}_p^l(\Omega)$, нормы в которых определяются обычным образом [4, с. 467; 5, с. 34]. Кроме того, будут использоваться гильбертовы пространства [5, с. 41]

$$\mathbf{H}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) \colon \boldsymbol{u} = 0 \text{ на } \Gamma \,, \ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega \right\},$$

$$G_1(\Omega) = \left\{ g \in W_2^1(\Omega) \colon g = 0 \text{ на } \Gamma_1 \right\},$$

$$G_2(\Omega) = \left\{ g \in W_2^2(\Omega) \colon g = 0 \text{ на } \Gamma_1 \,, \ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \right\}.$$

В пространствах $\mathbf{H}(\Omega)$, $G_1(\Omega)$ и $G_2(\Omega)$ будут использоваться скалярные произведения и нормы пространств $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ соответственно или эквивалентные им нормы.

Пусть далее для определенности

$$k \in C^1(\overline{\Omega}) \,, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\Omega) \,, \quad q \in L_\infty(\Omega) \,, \quad f \in L_2(\Omega) \,, \quad \xi \in L_2(\Gamma_1) \,, \quad \varphi \in L_2(\Gamma_3) \,;$$

$$\begin{array}{lll} 0 < \mu_1 \leqslant k(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_2 \,, & \boldsymbol{x} \in \overline{\Omega} \,, & \mu_1 = \text{const} \leqslant \mu_2 = \text{const} \,; \\ \| \, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \, \|_{\mathbb{R}^2} \leqslant \mu_3 \,, & \boldsymbol{x} \in \Omega \,, & \mu_3 = \text{const} \geqslant 0 \,; \\ 0 \leqslant q(\boldsymbol{x}) \leqslant \mu_4 \,, & \boldsymbol{x} \in \Omega \,, & \mu_4 = \text{const} \geqslant 0 \,. \end{array}$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются в [3–8; 13; 14].

Далее исследуем разрешимость прямой задачи в различных функциональных пространствах. Интерес будут представлять также некоторые свойства оператора решения прямой задачи

$$\mathbb{A} \colon \psi = (\, f \,, \, \xi \,, \, \varphi \,) \to T_\psi \,.$$

2. Разрешимость прямой задачи в $L_2(\Omega)$

Понятие слабого решения краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $L_2(\Omega)$ введено согласно [9] и использовалось в [11; 12]. *Слабым решением* краевой задачи (1.1)–(1.5) называется функция $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному равенству (2.1) для любой функции $g \in G_2(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} T \left(\operatorname{div} (\, k \nabla g \,) \, + \, \langle \, \boldsymbol{u} \,, \nabla g \, \rangle \, - \, q \, g \right) dx = \int\limits_{\Gamma_1} \xi \, k \, \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}} \, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_3} \varphi \, g \, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} f \, g \, dx \,. \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Для любых $\xi \in L_2(\Gamma_1)$, $\varphi \in L_2(\Gamma_3)$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное слабое решение $T \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке*

$$\| \, T \, \|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_1 \, \| \, f \, \|_{L_2(\Omega)} + C_2 \, \| \, \xi \, \|_{L_2(\Gamma_1)} + C_3 \, \| \, \varphi \, \|_{L_2(\Gamma_3)} \,,$$

где C_1, C_2, C_3 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным краевой задачи и не зависящие от оцениваемой и оценивающих величин. Оператор решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как опрератор из $\Xi = L_2(\Omega) \times L_2(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$ в $L_2(\Omega)$, линеен и ограничен, причем

$$\| \, \mathbb{A} \, \|_{\mathcal{L}(\Xi; L_2(\Omega))} \leqslant \left(\, C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \, \right)^{1/2} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится по схеме [11; 12].

3. Разрешимость прямой задачи в $W_2^1(\Omega)$

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^1(\Omega)$, следуя [3–5]. В этом разделе можно считать, что $k \in C(\overline{\Omega})$, а относительно функции ξ будем предполагать, что она допускает продолжение в $W_2^1(\Omega)$. Это означает, что существует функция $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$ такая, что ее след на Γ_1 совпадает с функцией ξ. Не каждую функцию ξ из $L_2(\Omega)$ можно продолжить в область Ω до функции из $W_2^1(\Omega)$ [6, с. 200-204; 7, с. 309–311]. Любую функцию $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ можно продолжить в область Ω до некоторой функции $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$. Действительно, функция

$$P_\xi(x_1, x_2) = \xi(x_1)\,, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega\,,$$

является искомой. При этом для данного способа продолжения

$$\| P_\xi \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{l_2}\, \| \xi \|_{W_2^1(\Gamma_1)}\,. \tag{3.1}$$

Подмножество всех функций из пространства $L_2(\Omega)$, которые можно продолжить в область Ω до функции из $W_2^1(\Omega)$, представляет собой банахово пространство следов функций из $W_2^1(\Omega)$ на границе Γ_1 [6, с. 140, 197; 7, с. 45, 309; 8, с. 29; 13, с. 216]:

$$W_2^{1/2}(\Gamma_1) = \left\{ \xi = \eta|_{\Gamma_1} \colon\; \eta \in W_2^1(\Omega) \right\}.$$

Отметим, что имеют место вложения $W_2^1(\Gamma_1) \subset W_2^{1/2}(\Gamma_1) \subset L_2(\Gamma_1)$ [6, с. 140, 197; 7, с. 45, 309; 13, с. 95, 97, 112, 216]; операторы вложения линейны и непрерывны: существуют положительные постоянные $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ такие, что для любых $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ и $\eta \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ справедливы неравенства $\| \xi \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)} \leqslant \alpha_1 \| \xi \|_{W_2^1(\Gamma_1)}$ и $\| \eta \|_{L_2(\Gamma_1)} \leqslant \alpha_2 \| \eta \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)}$ [6, с. 140, 197; 7, с. 45, 309; 13, с. 95, 97, 112, 216]. Для рассматриваемой области Ω и ее грани Γ_1 существует линейный ограниченный оператор продолжения $\mathbb{P}\colon W_2^{1/2}(\Gamma_1) \to W_2^1(\Omega)$ такой, что для любой функции $\xi \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ выполняется неравенство

$$\| \mathbb{P}\xi \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta \, \| \xi \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)} \tag{3.2}$$

с постоянной β, не зависящей от $\xi \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ [6, с. 131, 197; 7, с. 309; 8, с. 30; 13, с. 217]. Если оператор $\mathbb{P}$ рассматривать как оператор на более узкой области определения $W_2^1(\Gamma_1)$, то отсюда получаем существование линейного ограниченного оператора продолжения $\mathbb{P}\colon W_2^1(\Gamma_1) \to W_2^1(\Omega)$ такого, что для любой функции $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$ выполняется неравенство

$$\| \mathbb{P}\xi \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \tau \, \| \xi \|_{W_2^1(\Gamma_1)} \tag{3.3}$$

с постоянной τ ($\tau = \beta\,\alpha_1$), не зависящей от $\xi \in W_2^1(\Gamma_1)$. Заметим также, что искомое продолжение не однозначно. Если к какому-либо продолжению прибавить любую достаточно гладкую функцию с компактным носителем в Ω, то снова получим функцию из $W_2^1(\Omega)$ с теми же самыми следами на границе области Ω, какие имело исходное продолжение. Если какое-либо продолжение умножить на любую достаточно гладкую функцию, равную единице в какой-либо окрестности границы Γ, то снова получим функцию из $W_2^1(\Omega)$ с теми же самыми следами на границе области Ω, какие имело исходное продолжение.

Умножим равенство (1.1) на пробную функцию $g \in W_2^1(\Omega)$, результат проинтегрируем по области Ω. Применим формулу интегрирования по частям [3, с. 75; 4, с. 70] (первую формулу Грина), перебросив часть производных с функции T на функцию g, получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma} k\,\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}}\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} k\,\langle \nabla T\,, \nabla g \rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle \boldsymbol{u}\,, \nabla T \rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\,T\,g\, dx = \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx\,.$$

Учитывая граничные условия (1.3)–(1.5) и считая, что $g \in G_1(\Omega)$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} k\, \langle \nabla T\,, \nabla g\, \rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla T\, \rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\, T\, g\, dx = \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx\,.$$

Если T искать в виде $T = \Theta + P_\xi$, где Θ есть новая искомая функция из $G_1(\Omega)$, то для Θ получим равенство

$$\int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} k\, \langle \nabla\Theta\,, \nabla g\, \rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla\Theta\, \rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\, \Theta\, g\, dx$$

$$= \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx + \int\limits_{\Omega} k\, \langle \nabla P_\xi\,, \nabla g\, \rangle\, dx + \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla P_\xi\, \rangle\, g\, dx + \int\limits_{\Omega} q\, P_\xi\, g\, dx\,.$$

Перепишем данное равенство в виде

$$B(\,\Theta\,,\, g\,) = F(g)\,, \tag{3.4}$$

где

$$B(\,\Theta\,,\, g\,) = \int\limits_{\Omega} k\, \langle \nabla\Theta\,, \nabla g\, \rangle\, dx + \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla\Theta\, \rangle\, g\, dx + \int\limits_{\Omega} q\, \Theta\, g\, dx\,,$$

$$F(g) = \int\limits_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} f\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} k\, \langle \nabla P_\xi\,, \nabla g\, \rangle\, dx - \int\limits_{\Omega} \langle\, \boldsymbol{u}\,, \nabla P_\xi\, \rangle\, g\, dx - \int\limits_{\Omega} q\, P_\xi\, g\, dx\,.$$

Все элементы в равенстве (3.4) определены корректно, интегралы существуют и конечны.

Обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^1(\Omega)$ назовем функцию $T = \Theta + P_\xi$, где функция-продолжение $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$ определена выше, а функция $\Theta \in G_1(\Omega)$ удовлетворяет вариационному равенству (3.4) для любой функции $g \in G_1(\Omega)$.

Для формулировки следующего утверждения введем обозначения

$$P[\,\xi\,] = \bigl\{\eta \in W_2^1(\Omega)\colon \eta\,|_{\,\Gamma_1} = \xi\bigr\}\,;$$

для элементов $\xi \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ $(\,\xi \in W_2^1(\Gamma_1)\,)$, $P_\xi \in P[\,\xi\,]$, $\xi \neq 0$, определим числа

$$\beta_1 = \beta(\,\xi\,,\, P_\xi\,) = \inf\bigl\{\beta \geqslant 0\colon \|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta\,\|\,\xi\,\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)}\bigr\}\,, \tag{3.5}$$

$$\bigl(\,\beta_2 = \beta[\,\xi\,,\, P_\xi\,] = \inf\bigl\{\,\beta \geqslant 0\colon \|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \beta\,\|\,\xi\,\|_{W_2^1(\Gamma_1)}\,\bigr\}\,\bigr)\,, \tag{3.6}$$

при $\xi = 0$ положим $\beta_1 = \beta(\,0\,,\, P_\xi\,) = 0\,,\ \beta_2 = \beta[\,0\,,\, P_\xi\,] = 0\,.$

Теорема 3.1. *Для любых $\varphi \in L_2(\Gamma_3)$, $f \in L_2(\Omega)$ и любой функции $\xi \in L_2(\Gamma_1)$, допускающей продолжение в область Ω до функции $P_\xi \in W_2^1(\Omega)$, краевая задача (1.1)–(1.5) имеет единственное обобщенное решение $T \in W_2^1(\Omega)$, для которого справедлива оценка*

$$\|\, T\,\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_4\,\|\, f\,\|_{L_2(\Omega)} + C_5\,\|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)} + C_6\,\|\,\varphi\,\|_{L_2(\Gamma_3)}\,, \tag{3.7}$$

где C_4, C_5, C_6 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным краевой задачи и не зависящие от оцениваемой и оценивающих величин. Оператор решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как оператор из $\Xi_1 = L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$ в $W_2^1(\Omega)$, линеен и ограничен, причем

$$\|\,\mathbb{A}\,\|_{\mathcal{L}(\Xi_1;W_2^1(\Omega))} \leqslant \bigl(\,C_4^2 + \beta^2\,C_5^2 + C_6^2\,\bigr)^{1/2}. \tag{3.8}$$

Если $\mathbb{A}$ *рассматривать как оператор из* $\Xi_2 = L_2(\Omega) \times W_2^1(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$ *в* $W_2^1(\Omega)$, *то*

$$\| \mathbb{A} \|_{\mathcal{L}(\Xi_2; W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(C_4^2 + \tau^2 C_5^2 + C_6^2 \big)^{1/2}. \tag{3.9}$$

Наряду с оценками (3.8) *и* (3.9) *справедливы также оценки*

$$\| \mathbb{A} \|_{\mathcal{L}(\Xi_1; W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(C_4^2 + \beta_1^2 C_5^2 + C_6^2 \big)^{1/2}, \quad \| \mathbb{A} \|_{\mathcal{L}(\Xi_2; W_2^1(\Omega))} \leqslant \big(C_4^2 + \beta_2^2 C_5^2 + C_6^2 \big)^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем разрешимость вариационного равенства (3.4) в пространстве $G_1(\Omega)$. Для доказательства воспользуемся теоремой Лакса — Мильграма [15, с. 386]. Проверим условия этой теоремы.

Правая часть в (3.4) является линейным непрерывным функционалом над гильбертовым пространством $G_1(\Omega)$. Действительно, это следует из оценок

$$\begin{aligned}
|F(g)| &\leqslant \Big| \int_{\Gamma_3} \varphi\, g\, d\Gamma \Big| + \Big| \int_\Omega f\, g\, dx \Big| + \Big| \int_\Omega k \,\langle \nabla P_\xi \,, \nabla g \,\rangle\, dx \Big| + \Big| \int_\Omega \langle\, \boldsymbol{u} \,, \nabla P_\xi \,\rangle\, g\, dx \Big| + \Big| \int_\Omega q\, P_\xi\, g\, dx \Big| \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} \|g\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2 \int_\Omega |\langle\, \nabla P_\xi \,, \nabla g \,\rangle|\, dx \\
&\quad + \|\langle\, \boldsymbol{u} \,, \nabla P_\xi \,\rangle\, \|_{L_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{L_2(\Omega)} + \|\, q\, P_\xi \|_{L_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{L_2(\Omega)} \\
&\leqslant \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)}\, \gamma_1 \,\|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_2 \,\|\nabla P_\xi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \\
&\quad + \mu_3 \,\|\nabla P_\xi\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \,\|P_\xi\|_{L_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leqslant \Big[\gamma_1 \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_3 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_4 \,\|P_\xi\|_{L_2(\Omega)} \Big] \|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)} \\
&= \gamma_2 \,\|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)}\,,
\end{aligned}$$

где γ_1 — константа из теоремы вложения [3, с. 72–77; 4, с. 79; 15, с. 340],

$$\|\, g\, \|_{L_2(\Gamma_3)} \leqslant \gamma_1 \,\|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)} \quad \forall\, g \in G_1(\Omega)\,,$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 \|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + \mu_2 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_3 \,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} + \mu_4 \,\|P_\xi\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

Левая часть в (3.4) есть билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $G_1(\Omega) \times G_1(\Omega)$. Проверим сначала непрерывность билинейной формы:

$$\begin{aligned}
|\, B(\Theta, g)\, | &\leqslant \Big| \int_\Omega k \,\langle\, \nabla\Theta, \nabla g \,\rangle\, dx \Big| + \Big| \int_\Omega \Theta \,\langle\, \boldsymbol{u}, \nabla g \,\rangle\, dx \Big| + \Big| \int_\Omega q\, \Theta\, g\, dx \Big| \\
&\leqslant \mu_2 \int_\Omega |\,\langle\, \nabla\Theta, \nabla g \,\rangle\,|\, dx + \|\Theta\|_{L_2(\Omega)} \|\langle\, \boldsymbol{u}, \nabla g \,\rangle\, \|_{L_2(\Omega)} + \mu_4 \,\|\Theta\|_{L_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{L_2(\Omega)} \\
&\leqslant \mu_2 \,\|\nabla\Theta\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\Theta\|_{L_2(\Omega)}\, \mu_3 \,\|\nabla g\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \mu_4 \,\|\Theta\|_{L_2(\Omega)} \|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)} \\
&\leqslant \big(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \big) \,\|\Theta\|_{W_2^1(\Omega)} \|\, g\, \|_{W_2^1(\Omega)}\,.
\end{aligned}$$

Проверим теперь коэрцитивность билинейной формы. Предварительно заметим, что

$$\int_\Omega \Theta \,\langle\, \boldsymbol{u}, \nabla\Theta \,\rangle\, dx = \frac{1}{2} \int_\Gamma \langle\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{n} \,\rangle\, \Theta^2 \, d\,\Gamma = 0\,.$$

Поэтому

$$B(\Theta, \Theta) = \int_\Omega k \,\langle\, \nabla\Theta, \nabla\Theta \,\rangle\, dx + \int_\Omega q\, \Theta^2\, dx$$

$$\geqslant \frac{\mu_1}{2}\int\limits_{\Omega}\langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle\, dx + \frac{\mu_1}{2}\int\limits_{\Omega}\langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle\, dx \geqslant \frac{\mu_1}{2}\int\limits_{\Omega}\langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle\, dx + \frac{\mu_1}{2}\gamma_3^{-2}\int\limits_{\Omega}\Theta^2\, dx$$

$$\geqslant \gamma_4\, \|\Theta\|^2_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

где $\gamma_4 = \min\left\{ 2^{-1}\mu_1\,,\ 2^{-1}\mu_1\gamma_3^{-2} \right\}$, γ_3 — константа из неравенства Фридрихса [3, с. 62; 4, с. 71, 72; 15, с. 186, 344; 16, с. 374],

$$\|\, g\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \gamma_3 \|\, \nabla g\,\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, g\in G_1(\Omega)\,.$$

Итак, по теореме Лакса — Мильграма получаем существование единственного решения Θ вариационного равенства (3.4) из пространства $G_1(\Omega)$. Из теоремы Лакса — Мильграмма следует также оценка

$$\|\Theta\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \gamma_4^{-1}\|\, F\,\| \leqslant \gamma_4^{-1}\Big[\gamma_1\|\varphi\|_{L_2(\Gamma_3)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} + (\,\mu_2+\mu_3+\mu_4\,)\,\|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)}\Big]\,.$$

Переходя к функции $T = \Theta + P_\xi$, получаем искомую оценку

$$\|T\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \|\Theta\|_{W_2^1(\Omega)} + \|P_\xi\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_4\,\|\, f\,\|_{L_2(\Omega)} + C_5\,\|\,\varphi\,\|_{L_2(\Gamma_3)} + C_6\,\|\, P_\xi\,\|_{W_2^1(\Omega)}\,,$$

где $C_4 = \gamma_4^{-1}$, $C_5 = \gamma_4^{-1}\gamma_1$, $C_6 = 1 + \gamma_4^{-1}(\,\mu_2+\mu_3+\mu_4\,)$.

Оценки норм оператора решения в заключительной части теоремы непосредственно следуют из неравенств (3.2), (3.3), (3.5)–(3.9). □

4. Разрешимость задачи в $W_2^2(\Omega)$

Введем понятие сильного решения краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^2(\Omega)$, следуя [3–5]. В этом разделе будем считать, что $k\in C^1(\overline{\Omega})$, а относительно функций ξ и φ будем предполагать, что они допускают продолжения в область Ω, являющиеся функциями из $W_2^2(\Omega)$ удовлетворяющими соответствующим граничным условиям. Точнее, существуют функции $U_\xi\in W_2^2(\Omega)$ и $V_\varphi\in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3), (1.5), $\partial U_\xi/\partial \boldsymbol{n} = 0$ на Γ_3, и (1.3), (1.4), (1.5), $V_\varphi = 0$ на Γ_1, соответственно. Из теорем вложения следует [3, с. 83–87; 6, с. 155; 7, с. 49, 50, 51; 8, с. 32, 33], что не каждая функция $\xi\in W_2^1(\Gamma_1)$ и $\varphi\in L_2(\Gamma_3)$ допускают искомые продолжения.

Любая функция $\xi\in W_2^2(\Gamma_1)$, удовлетворяющая граничным условиям $d\xi/dx_1(0) = 0 = d\xi/dx_1(l_1)$, допускает искомое продолжение. Действительно, продолжение $U_\xi(x_1,x_2) = \xi(x_1)$, $(x_1,x_2)\in\Omega$, является искомым. Обозначим

$$W = \left\{\, \xi\in W_2^2(\Gamma_1)\colon d\xi/dx_1(0) = 0 = d\xi/dx_1(l_1)\right\}.$$

Это множество является подпространством пространства $W_2^2(\Gamma_1)$, как таковое оно далее и будет рассматриваться.

Для любой функции $\varphi\in W_2^2(\Gamma_3)$, удовлетворяющей граничным условиям $d\varphi/dx_1(0) = 0 = d\varphi/dx_1(l_1)$, продолжение $V_\varphi(x_1,x_2) = x_2^2\,(2\,l_2)^{-1}\varphi(x_1)$, $(x_1,x_2)\in\Omega$, является искомым. Обозначим

$$Z = \left\{\, \varphi\in W_2^2(\Gamma_3)\colon d\varphi/dx_1(0) = 0 = d\varphi/dx_1(l_1)\right\}.$$

Это множество является подпространством пространства $W_2^2(\Gamma_3)$, как таковое оно далее и будет рассматриваться.

Подобных функций-продолжений U_ξ и V_φ существует бесконечно много. Если к функциям U_ξ и V_φ прибавить любую достаточно гладкую функцию с компактным носителем в Ω, то снова получим функции-продолжения, имеющие те же самые следы, что и функции U_ξ и V_φ соответственно. Если функции U_ξ и V_φ умножить на любую достаточно гладкую функцию, равную единице в некоторой окрестности границы Γ, то снова получим функции-продолжения, имеющие те же самые следы, что и функции U_ξ и V_φ соответственно.

Функции ξ и φ, допускающие искомые продолжения, образуют соответственно множества

$$U(\Gamma_1)=\left\{\eta|_{\Gamma_1}:\ \eta\in\mathfrak{A}\right\},\quad \mathfrak{A}=\left\{\eta\in W_2^2(\Omega):\ \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}}=0 \text{ на } \Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4\right\},$$

$$V(\Gamma_3)=\left\{\frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}}|_{\Gamma_3}:\ \eta\in\mathfrak{B}\right\},\quad \mathfrak{B}=\left\{\eta\in W_2^2(\Omega):\ \eta|_{\Gamma_1}=0\,,\ \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}}=0 \text{ на } \Gamma_2\cup\Gamma_4\right\}.$$

Множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются подпространствами пространства $W_2^2(\Omega)$, на них далее будет рассматриваться норма пространства $W_2^2(\Omega)$. Из теорем вложения [8, с. 32; 13, с. 34] следует, что $U(\Gamma_1)$ есть замкнутое линейное многообразие (подпространство) в $W_2^{3/2}(\Gamma_1)$, а $V(\Gamma_3)$ есть замкнутое линейное многообразие (подпространство) в $W_2^{1/2}(\Gamma_3)$. Ясно, что для любой функции $\xi\in U(\Gamma_1)$, $\xi\neq 0$, и любого ее соответствующего продолжения $U_\xi\in W_2^2(\Omega)$ существует число $\sigma\geqslant 0$ такое, что $\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\sigma\|\xi\|_{W_2^{3/2}(\Gamma_1)}$; для любой функции $\varphi\in V(\Gamma_3)$, $\varphi\neq 0$, и любого ее соответствующего продолжения $V_\varphi\in W_2^2(\Omega)$ существует число $\lambda\geqslant 0$ такое, что $\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\lambda\|\varphi\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_3)}$. Отметим также, что построенные выше конкретные операторы продолжения

$$\mathbb{P}\colon W_2^2(\Gamma_1)\supset W\ni\xi\to U_\xi\in\mathfrak{A}\subset W_2^2(\Omega)\,,$$
$$\mathbb{Q}\colon W_2^2(\Gamma_3)\supset Z\ni\varphi\to V_\varphi\in\mathfrak{B}\subset W_2^2(\Omega)\,,$$

линейны и непрерывны.

Сильным решением краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^2(\Omega)$ назовем функцию $T=\Phi+U_\xi+V_\varphi$, где функции-продолжения $U_\xi\in\mathfrak{A}$ и $V_\varphi\in\mathfrak{B}$ определены выше, а функция $\Phi\in G_2(\Omega)$ почти всюду в области Ω удовлетворяет равенству

$$\mathbb{L}\,\Phi=f-\mathbb{L}\,U_\xi-\mathbb{L}\,V_\varphi \quad \text{п. в. } \boldsymbol{x}\in\Omega\,. \tag{4.1}$$

Для формулировки следующего утверждения введем обозначения

$$U[\,\xi\,]=\left\{\eta\in U(\Gamma_1)\colon \eta=\xi \text{ на } \Gamma_1\right\},\quad V[\,\varphi\,]=\left\{\eta\in V(\Gamma_3)\colon \frac{\partial\eta}{\partial\boldsymbol{n}}=\varphi \text{ на } \Gamma_3\right\};$$

для элементов $\xi\in W_2^{3/2}(\Gamma_1)$, $\xi\neq 0$, $U_\xi\in U[\,\xi\,]$, $\varphi\in W_2^{1/2}(\Gamma_3)$, $\varphi\neq 0$, $V_\varphi\in V[\,\varphi\,]$ определим числа

$$\sigma_*=\sigma(\,\xi\,,\,U_\xi\,)=\inf\left\{\sigma\geqslant 0\colon \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\sigma\,\|\,\xi\,\|_{W_2^{3/2}(\Gamma_1)}\right\},$$
$$\lambda_*=\lambda(\,\varphi\,,\,V_\varphi)=\inf\left\{\lambda\geqslant 0\colon \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\lambda\,\|\,\varphi\,\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_3)}\right\},$$

при $\xi=0$ и $\varphi=0$ положим $\sigma_*=\sigma(\,0\,,\,U_\xi\,)=0$ и $\lambda_*=\lambda(\,0\,,\,V_\xi\,)=0$ соответственно.

Теорема 4.1. *Для любой функции $f\in L_2(\Omega)$, любых функций $\xi\in U(\Gamma_1)$ и $\varphi\in V(\Gamma_3)$, любых соответствующих продолжений $U_\xi\in\mathfrak{A}$ и $V_\varphi\in\mathfrak{B}$, краевая задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное сильное решение $T\in W_2^2(\Omega)$, для которого справедлива оценка*

$$\|\,T\,\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant C_7\,\|\,f\,\|_{L_2(\Omega)}+C_8\,\|\,U_\xi\,\|_{W_2^2(\Omega)}+C_9\,\|\,V_\varphi\,\|_{W_2^2(\Omega)}\,,$$

где C_7, C_8, C_9 — некоторые положительные константы, вычисляемые по известным исходным данным краевой задачи и не зависящие от оцениваемой и оценивающих величин. Оператор решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как оператор из $\Xi_3=L_2(\Omega)\times U(\Gamma_1)\times V(\Gamma_3)$ в $W_2^2(\Omega)$, линеен и ограничен, причем если для функций ξ и φ выполняются неравенства $\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\sigma\,\|\,\xi\,\|_{W_2^{3/2}(\Gamma_1)}$ и $\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\leqslant\lambda\,\|\,\varphi\,\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_3)}$, то

$$\|\,\mathbb{A}\,\|_{\mathcal{L}(\Xi_3;W_2^2(\Omega))}\leqslant\left(\,C_7^2+\sigma^2\,C_8^2+\lambda^2\,C_9^2\,\right)^{1/2}.$$

Наряду с этой оценкой справедлива также оценка

$$\|\,\mathbb{A}\,\|_{\mathcal{L}(\Xi_3;W_2^2(\Omega))}\leqslant\left(\,C_7^2+\sigma_*^2\,C_8^2+\lambda_*^2\,C_9^2\,\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольные функции $f \in L_2(\Omega)$, $\xi \in U(\Gamma_1)$, $\varphi \in V(\Gamma_3)$ и произвольные соответствующие продолжения $U_\xi \in \mathfrak{A}$, $V_\varphi \in \mathfrak{B}$. Для доказательства теоремы воспользуемся теоремой Лакса — Мильграма. Умножим равенство (4.1) на $\mathbb{L}\,Y$ и проинтегрируем по области Ω: $B(\,\Phi\,,\,Y\,) \equiv \langle \mathbb{L}\,\Phi\,,\,\mathbb{L}\,Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle\, f - \mathbb{L}\,U_\xi - \mathbb{L}\,V_\varphi\,,\mathbb{L}\,Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} \equiv F(\,Y\,)$.

Получаем вариационное равенство

$$B(\,\Phi\,,\,Y\,) = F(\,Y\,) \quad \forall\, Y \in G_2(\Omega) \tag{4.2}$$

с билинейной формой

$$B(\,\Phi\,,\,Y\,) = \int\limits_\Omega (\mathbb{L}\Phi)(\mathbb{L}\,Y)\,dx\,, \quad \Phi \in G_2(\Omega)\,, \quad Y \in G_2(\Omega)\,,$$

и линейной формой

$$F(\,Y\,) = \int\limits_\Omega (\,f - \mathbb{L}\,U_\xi - \mathbb{L}\,V_\varphi\,)\,\mathbb{L}\,Y\,dx\,, \quad Y \in G_2(\Omega)\,.$$

Прежде чем проверить условия теоремы Лакса — Мильграма, предварительно докажем, что линейный оператор $\mathbb{L} : W_2^2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ограничен (непрерывен), т. е. существует положительная константа ω такая, что

$$\|\,\mathbb{L}\,g\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \omega\,\|\,g\,\|_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall\, g \in W_2^2(\Omega)\,. \tag{4.3}$$

Действительно, для любой функции $g \in W_2^2(\Omega)$ справедлива цепочка неравенств

$$(\,\mathbb{L}\,g\,)^2 = \big(\operatorname{div}(\,k\,\nabla g) - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla g\,\rangle - q\,g\,\big)^2$$

$$= \left(\frac{\partial(\,k\,\partial\,g/\partial\,x_1)}{\partial\,x_1} + \frac{\partial(\,k\,\partial\,g/\partial\,x_2)}{\partial\,x_2} - u_1\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1} - u_2\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2} - q\,g\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1} + k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2} + \frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2} + k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2} - u_1\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1} - u_2\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2} - q\,g\right)^2$$

$$\leqslant 7\left[\left(\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + \left(k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + \left(k\,\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\right)^2 + \left(u_1\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + \left(u_2\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + (\,q\,g\,)^2\right]$$

$$\leqslant 7\left[\left\|\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\right\|^2_{C(\overline{\Omega})}\left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + (\,\mu_2\,)^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\right)^2 + \left\|\frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\right\|^2_{C(\overline{\Omega})}\left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + (\,\mu_2\,)^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\right)^2\right.$$
$$\left. + \,\mu_3^2\left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + \mu_3^2\left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + \mu_4^2\,g^2\right]$$

$$\leqslant 14\max\left\{\left\|\frac{\partial\,k}{\partial\,x_1}\right\|^2_{C(\overline{\Omega})},\,\left\|\frac{\partial\,k}{\partial\,x_2}\right\|^2_{C(\overline{\Omega})},\,\mu_2^2\,,\,\mu_3^2\,,\,\mu_4^2\right\}\left(\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + g^2\right)$$

$$\leqslant \omega^2\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + g^2\right],$$

где

$$\omega^2 = 14\,\max\left\{\,\|\,k\,\|^2_{C^1(\overline{\Omega})}\,,\,\mu_2^2\,,\,\mu_3^2\,,\,\mu_4^2\right\}.$$

Выделяем из цепочки неравенств неравенство

$$(\,\mathbb{L}\,g\,)^2 \leqslant \omega^2\left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_1\,\partial\,x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial\,x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,g}{\partial\,x_2}\right)^2 + g^2\right].$$

Проинтегрировав это неравенство по Ω и вычислив затем квадратный корень из обеих частей неравенства, получим (4.3).

Проверим теперь условия теоремы Лакса — Мильграма. Линейная форма $F(Y)$ является линейным непрерывным функционалом над гильбертовым пространством $G_2(\Omega)$. Действительно, воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского и оценкой (4.3), получим цепочку неравенств

$$|\langle f - \mathbb{L}\,U_\xi - \mathbb{L}\,V_\varphi\,,\,\mathbb{L}Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| \leqslant |\langle f\,,\,\mathbb{L}Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| + |\langle\,\mathbb{L}\,U_\xi\,,\,\mathbb{L}Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| + |\langle\,\mathbb{L}\,V_\varphi\,,\,\mathbb{L}Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}|$$

$$\leqslant \|\,f\,\|_{L_2(\Omega)}\|\,\mathbb{L}\,Y\|_{L_2(\Omega)} + \|\,\mathbb{L}\,U_\xi\|_{L_2(\Omega)}\|\,\mathbb{L}\,Y\|_{L_2(\Omega)} + \|\,\mathbb{L}\,V_\varphi\|_{L_2(\Omega)}\|\mathbb{L}\,Y\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\,\omega\,\|Y\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega\,\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)}\,\omega\,\|Y\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega\,\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\,\omega\,\|\,\mathbb{L}\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$\leqslant \Big(\omega\,\|f\|_{L_2(\Omega)} + \omega^2\,\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega^2\,\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\Big)\,\|Y\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$\leqslant \varkappa\,\|Y\|_{W_2^2(\Omega)}\,,$$

$$\varkappa = \omega\,\|f\|_{L_2(\Omega)} + \omega^2\,\|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega^2\,\|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}\,,$$

из которой следует непрерывность линейной формы на $G_2(\Omega)$: $|\,F(\,Y\,)\,| \leqslant \varkappa\,\|Y\|_{W_2^2(\Omega)}$.

Билинейная форма $B(\,\Phi\,,\,Y\,)$ непрерывна и коэрцитивна на $G_2(\Omega)\times G_2(\Omega)$. Проверим сначала непрерывность билинейной формы. Используя неравенство Коши — Буняковского и оценку (4.3), получим цепочку неравенств

$$|\,B(\,\Phi\,,\,Y\,)\,| \leqslant |\langle\,\mathbb{L}\,\Phi\,,\,\mathbb{L}Y\,\rangle_{L_2(\Omega)}| \leqslant \|\,\mathbb{L}\,\Phi\,\|_{L_2(\Omega)}\|\,\mathbb{L}\,Y\,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \omega^2\,\|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)}\,\|\,Y\,\|_{W_2^2(\Omega)}\,,$$

из которой следует непрерывность билинейной формы на $G_2(\Omega)\times G_2(\Omega)$:

$$|\,B(\,\Phi\,,\,Y\,)\,| \leqslant \omega^2\,\|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)}\,\|\,Y\,\|_{W_2^2(\Omega)}\,.$$

Проверим теперь коэрцитивность билинейной формы:

$$B(\,Y\,,\,Y\,) = \langle\,\mathbb{L}\,Y\,,\,\mathbb{L}\,Y\,\rangle_{L_2(\Omega)} \geqslant \varrho\,\|\,Y\,\|^2_{W_2^2(\Omega)}\,. \tag{4.4}$$

Действительно, для любого элемента $Y\in G_2(\Omega)$ и любого числа $\varepsilon\in(0,1)$ имеем

$$\int\limits_\Omega(\,\mathbb{L}\,Y\,)^2dx = \int\limits_\Omega\big(\,\mathrm{div}\,(\,k\,\nabla Y) - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2dx = \int\limits_\Omega\big(\,k\,\Delta\,Y + \langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2dx$$

$$= \int\limits_\Omega\Big[\big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2 + 2\,\big(\,k\,\Delta\,Y\big)\,\big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big) + \big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2\Big]\,dx$$

$$\geqslant (\,1-\varepsilon\,)\int\limits_\Omega\big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2dx + \Big(1-\frac{1}{\varepsilon}\Big)\int\limits_\Omega\big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle - \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle - q\,Y\,\big)^2dx$$

$$\geqslant (\,1-\varepsilon\,)\int\limits_\Omega\big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2dx + \Big(1-\frac{1}{\varepsilon}\Big)\;3\int\limits_\Omega\big(\,\langle\,\nabla k\,,\nabla Y\,\rangle^2 + \langle\,\boldsymbol{u}\,,\nabla Y\,\rangle^2 + (\,q\,Y\,)^2\,\big)\,dx$$

$$\geqslant (\,1-\varepsilon\,)\int\limits_\Omega\big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2dx + \Big(1-\frac{1}{\varepsilon}\Big)\;3\int\limits_\Omega\big(\,\|\,\nabla k\,\|^2_{\mathbb{R}^2}\,\|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2} + \|\,\boldsymbol{u}\,\|^2_{\mathbb{R}^2}\,\|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2} + q^2\,Y^2\,\big)\,dx$$

$$\geqslant (\,1-\varepsilon\,)\int\limits_\Omega\big(\,k\,\Delta\,Y\big)^2dx + \Big(1-\frac{1}{\varepsilon}\Big)\;c_1\int\limits_\Omega\big(\,\|\,\nabla Y\,\|^2_{\mathbb{R}^2} + Y^2\,\big)\,dx\,,$$

$$c_1 = 3\,\max\big\{\,\|\,k\,\|^2_{C^1(\overline{\Omega})}\,,\,\mu_3^2\,,\,\mu_4^2\,\big\}\,.$$

Далее, учитывая граничные условия для функций из $G_2(\Omega)$, с помощью двухкратного интегрирования по частям получим

$$\int\limits_\Omega \big(k\,\Delta Y \big)^2 dx \geqslant \mu_1^2 \int\limits_\Omega \Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \Big)^2 dx = \mu_1^2 \int\limits_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \Big)^2 + 2\, \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} + \Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \Big)^2 \Big]\, dx$$

$$= \mu_1^2 \int\limits_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \Big)^2 + 2 \Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \Big)^2 \Big]\, dx$$

$$+ \mu_1^2 \int\limits_\Gamma \Big[2\, \frac{\partial Y}{\partial x_1} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \cos(\boldsymbol{n}, x_1) - 2\, \frac{\partial Y}{\partial x_1} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_1\, \partial x_2} \cos(\boldsymbol{n}, x_2) \Big]\, d\Gamma$$

$$= \mu_1^2 \int\limits_\Omega \Big[\Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2} \Big)^2 + 2 \Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1 \partial x_2} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} \Big)^2 \Big]\, dx \equiv \mu_1^2 \, \| \, Y_{xx} \, \|^2_{L_2(\Omega)} \, .$$

Итак, получаем неравенство

$$(1-\varepsilon)\, \mu_1^2 \, \| \, Y_{xx} \, \|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \int\limits_\Omega (\,\mathbb{L}\, Y\,)^2 dx + \Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \Big)\; c_1 \int\limits_\Omega \big(\, \| \, \nabla Y \, \|^2_{\mathbb{R}^2} + Y^2 \, \big)\, dx \, .$$

Прибавим к обеим частям неравенства выражение $(1-\varepsilon)\, \mu_1^2 \, \| \, Y \, \|^2_{W_2^1(\Omega)}$, в результате имеем

$$(1-\varepsilon)\, \mu_1^2 \, \| \, Y \, \|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \int\limits_\Omega (\,\mathbb{L}\, Y\,)^2 dx + \Big[\, (1-\varepsilon)\, \mu_1^2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \Big)\, c_1 \Big] \, \| \, Y \, \|^2_{W_2^1(\Omega)} \, . \tag{4.5}$$

Учитывая коэрцитивность билинейной формы $B(\cdot,\cdot)$ из предыдущего раздела, неравенство Коши — Буняковского, неравенство Фридрихса, для каждого элемента $Y \in G_2(\Omega)$ имеем цепочку неравенств

$$\gamma_4 \, \| \, Y \, \|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant B(\, Y \,,\, Y \,) = \langle \, \mathbb{L}\, Y \,,\, Y \, \rangle_{L_2(\Omega)} \leqslant \| \, \mathbb{L}\, Y \, \|_{L_2(\Omega)} \, \| \, Y \, \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \| \, \mathbb{L}\, Y \, \|_{L_2(\Omega)} \, \gamma_3 \, \| \, Y \, \|_{W_2^1(\Omega)} \, ,$$

из которой следует неравенство $\| \, Y \, \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant \gamma_4^{-1} \, \gamma_3 \, \| \, \mathbb{L}\, Y \, \|_{L_2(\Omega)}$. Используя это неравенство, оценим правую часть в (4.5):

$$(1-\varepsilon)\, \mu_1^2 \, \| \, Y \, \|^2_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \int\limits_\Omega (\,\mathbb{L}\, Y\,)^2 dx + \Big[\, (1-\varepsilon)\, \mu_1^2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \Big)\, c_1 \Big] \, \gamma_4^{-2} \, \gamma_3^2 \, \| \, \mathbb{L}\, Y \, \|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\leqslant \Big[\, 1 + \Big(\, (1-\varepsilon)\, \mu_1^2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \Big)\, c_1 \Big) \, \gamma_4^{-2} \, \gamma_3^2 \Big] \, \| \, \mathbb{L}\, Y \, \|^2_{L_2(\Omega)} \, .$$

Отсюда следует неравенство коэрцитивности (4.4) с

$$\varrho = (1-\varepsilon)\, \mu_1^2 \Big[\, 1 + \Big(\, (1-\varepsilon)\, \mu_1^2 + \Big(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \Big)\, c_1 \Big) \, \gamma_4^{-2} \, \gamma_3^2 \Big]^{-1} .$$

Итак, по теореме Лакса — Мильграма получаем существование единственного решения Φ вариационного равенства (4.2) из пространства $G_2(\Omega)$. Из теоремы Лакса — Мильграма следует также оценка

$$\|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \varrho^{-1} \left[\, \omega \, \|f\|_{L_2(\Omega)} + \omega^2 \, \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \omega^2 \, \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \, \right] .$$

Поскольку оператор $\mathbb{L}$ осуществляет отображение $G_2(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$ [11 ; 12, § 1.2], то из того, что Φ есть решение вариационного равенства (4.2), следует, что Φ есть сильное решение краевой задачи (1.1)–(1.5) из пространства $W_2^2(\Omega)$.

Переходя к функции $T = \Phi + U_\xi + V_\varphi$, получаем искомую оценку

$$\|T\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \|\Phi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C_7 \, \| \, f \, \|_{L_2(\Omega)} + C_8 \, \|U_\xi\|_{W_2^2(\Omega)} + C_9 \, \|V_\varphi\|_{W_2^2(\Omega)} \, ,$$

где $C_7 = \varrho^{-1} \, \omega \, , \ \ C_8 = 1 + \varrho^{-1} \, \omega^2 \, , \ \ C_9 = 1 + \varrho^{-1} \, \omega^2 \, .$

Оценки норм оператора решения из заключительной части теоремы непосредственно следуют из полученного основного неравенства аналогично доказательству теоремы 4.1. ☐

5. Полная непрерывность оператора решения

В этом разделе докажем, что оператор решения прямой задачи является вполне непрерывным [17, с. 222, 230]. Отсюда получим важное для наших дальнейших исследований следствие, что такой оператор не может иметь непрерывного (ограниченного [17, с. 209]) обратного оператора [17, с. 222, 228].

Теорема 5.1. *Оператор слабого решения прямой задачи* $\mathbb{A}\colon \Xi \to L_2(\Omega)$ *вполне непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится по схеме [11; 12].

Теорема 5.2. *Оператор обобщенного решения прямой задачи* $\mathbb{A}\colon H_s \to W_2^1(\Omega)$*, где* $H_s = L_2(\Omega) \times W_2^s(\Gamma_1) \times L_2(\Gamma_3)$*,* $s > 1/2$*, вполне непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространство $W_2^s(\Gamma_1)$ непрерывно (и даже компактно) вкладывается в пространство $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ [13, гл. 6; 8, с. 33, 319], поэтому оператор обобщенного решения $\mathbb{A}$, рассматриваемый как оператор, действующий из H_s в $W_2^1(\Omega)$, будет также непрерывным. Поскольку H_s есть гильбертово пространство [8, с. 320] и поэтому является рефлексивным пространством [17, с. 181], то для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $\mathbb{A}$ переводит слабо сходящиеся последовательности из H_s в сильно сходящиеся последовательность из $W_2^1(\Omega)$ [17, с. 230; 18, с. 254]. Пусть задана произвольная слабо сходящаяся в H_s последовательность $\{\, \psi_i = (\, f_i \, , \, \xi_i \, , \, \varphi_i \,)\} \subset H_s$, $\psi_i \rightharpoonup \psi_0 = (\, f_0 \, , \, \xi_0 \, , \, \varphi_0 \,)$ слабо в H_s, т.е. $f_i \rightharpoonup f_0$ слабо в $L_2(\Omega)$, $\xi_i \rightharpoonup \xi_0$ слабо в $W_2^s(\Gamma_1)$, $\varphi_i \rightharpoonup \varphi_0$ слабо в $L_2(\Gamma_3)$. Всякий линейный непрерывный оператор, действующий в банаховых пространствах, переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся последовательности [18, с. 552], поэтому $T_i = \mathbb{A}\psi_i \rightharpoonup T_0 = \mathbb{A}\psi_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$. Из компактности вложения $W_2^s(\Gamma_1) \subset W_2^{1/2}(\Gamma_1)$ имеем $\xi_i \to \xi_0$ в $W_2^{1/2}(\Gamma_1)$, а из ограниченности оператора продолжения $\mathbb{P}\colon W_2^{1/2}(\Gamma_1) \to W_2^1(\Omega)$ получаем, что $\mathbb{P}\xi_i \to \mathbb{P}\xi_0$ в $W_2^1(\Omega)$. Отсюда следует, что, по крайней мере, $\Theta_i = T_i - \mathbb{P}\xi_i \rightharpoonup \Theta_0 = T_0 - \mathbb{P}\xi_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$.

В равенстве (3.4), определяющем компоненту Θ_i обобщенного решения $T_i = \Theta_i + \mathbb{P}\xi_i$, положим $\Theta = \Theta_i$ и $g = \Theta_i$ и перепишем это равенство в виде

$$\int\limits_\Omega k \, \langle \, \nabla\Theta_i \, , \nabla\Theta_i \, \rangle \, dx + \int\limits_\Omega q \, \Theta_i^2 \, dx = F(\Theta_i) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_i \, \rangle \, \Theta_i \, dx \, .$$

В правой части этого равенства имеет место сходимость

$$F(\Theta_i) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_i \, \rangle \, \Theta_i \, dx \to F(\Theta_0) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_0 \, \rangle \, \Theta_0 \, dx \, .$$

Поскольку

$$F(\Theta_0) - \int\limits_\Omega \langle \, \boldsymbol{u} \, , \nabla\Theta_0 \, \rangle \, \Theta_0 \, dx = \int\limits_\Omega k \, \langle \, \nabla\Theta_0 \, , \nabla\Theta_0 \, \rangle \, dx + \int\limits_\Omega q \, \Theta_0^2 \, dx \, ,$$

то
$$\int_\Omega k\,\langle\,\nabla\Theta_i\,,\nabla\Theta_i\,\rangle\,dx+\int_\Omega q\,\Theta_i^2\,dx\to\int_\Omega k\,\langle\,\nabla\Theta_0\,,\nabla\Theta_0\,\rangle\,dx+\int_\Omega q\,\Theta_0^2\,dx\,.$$

В пространстве $W_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение
$$[\,u\,,\,v\,]_{W_2^1(\Omega)}=\int_\Omega\big(\,k\,\langle\,\nabla u\,,\,\nabla v\,\rangle+q\,u\,v\,\big)\,dx\,,$$

порождающее норму, эквивалентную стандартной норме в $W_2^1(\Omega)$ [3, гл.2, § 3]. Таким образом, $\Theta_i\rightharpoonup\Theta_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и $\|\,\Theta_i\,\|_{W_2^1(\Omega)}\to\|\,\Theta_0\,\|_{W_2^1(\Omega)}$. В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость [17, с. 185] $\Theta_i\to\Theta_0$ сильно в $W_2^1(\Omega)$. Поэтому
$$T_i\to T_0\ \text{ сильно в } W_2^1(\Omega)\,. \qquad \square$$

Теорема 5.3. *Оператор сильного решения прямой задачи* $\mathbb{A}\colon\Lambda\to W_2^2(\Omega)$*, где* $\Lambda=W_2^1(\Omega)\times W\times Z$*, вполне непрерывен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что оператор $\mathbb{A}$ переводит слабо сходящуюся в Λ последовательность в сильно сходящуюся в $W_2^2(\Omega)$ последовательность. Предварительно отметим, что из теорем вложения следует непрерывность и компактность вложения Λ в Ξ_3. Кроме того, как установлено выше, существуют непрерывные операторы продолжения $\mathbb{P}\colon W\to\mathfrak{A}\subset W_2^2(\Omega)$, $\mathbb{Q}\colon Z\to\mathfrak{B}\subset W_2^2(\Omega)$, образы которых удовлетворяют соответствующим граничным условиям.

Пусть задана произвольная слабо сходящаяся в Λ последовательность $\{\,\psi_i=(\,f_i\,,\,\xi_i\,,\,\varphi_i\,)\}\subset\Lambda$, $\psi_i\rightharpoonup\psi_0=(\,f_0\,,\,\xi_0\,,\,\varphi_0\,)$ слабо в Λ, т.е. $f_i\rightharpoonup f_0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$, $\xi_i\rightharpoonup\xi_0$ слабо в W, $\varphi_i\rightharpoonup\varphi_0$ слабо в Z. Всякий линейный непрерывный оператор, действующий в банаховых пространствах, переводит слабо сходящиеся последовательности в слабо сходящиеся последовательности, поэтому $T_i=\mathbb{A}\psi_i\rightharpoonup T_0=\mathbb{A}\psi_0$ слабо в $W_2^2(\Omega)$. Из компактности вложения $W_2^1(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ имеем $f_i\to f_0$ сильно в $L_2(\Omega)$, а из ограниченности и компактности вложения $\Lambda\subset\Xi_3$, ограниченности операторов продолжения имеем $\mathbb{P}\,\xi_i\to\mathbb{P}\,\xi_0$ сильно в $W_2^2(\Omega)$, $\mathbb{Q}\,\varphi_i\to\mathbb{Q}\,\varphi_0$ сильно в $W_2^2(\Omega)$. Отсюда следует, что $\eta_i=f_i-\mathbb{L}\,(\mathbb{P}\,\xi_i)-\mathbb{L}\,(\mathbb{Q}\,\varphi_i)\to\eta_0=f_0-\mathbb{L}\,(\mathbb{P}\,\xi_0)-\mathbb{L}\,(\mathbb{Q}\,\varphi_0)$ сильно в $L_2(\Omega)$.

В ходе доказательства теоремы 4.1 установлено, что билинейная форма B порождает новое скалярное произведение в $W_2^2(\Omega)$, которому соответствует норма, эквивалентная классической норме в пространстве $W_2^2(\Omega)$. Имеет место сходимость $B(\,\Phi_i\,,\,\Phi_i\,)=\eta_i\to\eta_0=B(\,\Phi_0\,,\,\Phi_0\,)$, значит $\Phi_i\rightharpoonup\Phi_0$ слабо в $W_2^2(\Omega)$ и $\|\,\Phi_i\,\|_{W_2^2(\Omega)}\to\|\,\Phi_0\,\|_{W_2^2(\Omega)}$.

В гильбертовом пространстве из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость
$$T_i\to T_0\ \text{ сильно в } W_2^2(\Omega)\,. \qquad \square$$

6. Заключение

В работе рассматривалась краевая задача с неоднородными смешанными граничными условиями для модели реакции-конвекции-диффузии, описывающая распределение тепла или концентрации какого-либо вещества в известной области изменения независимых пространственных переменных. На некоторых участках границы области, составляющих всю границу в целом, задавались неоднородные граничные условия первого или второго рода. Граничные данные предполагались нерегулярными в ряде случаев, что не позволяло продолжить эти данные внутрь области, чтобы известным способом можно было бы свести задачу к более простой задаче с однородными граничными условиями. Для рассматриваемой краевой задачи в зависимости от гладкости и согласованности граничных данных введены соответствующие понятия решения задачи, доказаны теоремы о разрешимости задачи, получены соответствующие априорные оценки на решения, установлены некоторые варианты полной непрерывности оператора решения.

Интерес представляет распространение полученных результатов на более общие классы моделей. Результаты этой работы можно рассматривать как необходимый подготовительный материал для правильной постановки и решения различных обратных граничных задач, связанных с процессами тепломассопереноса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
3. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
4. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
5. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961. 203 с.
6. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
7. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 431 с.
8. **Алексеев Г.В., Терешко Д.А.** Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
9. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 416 с.
10. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 88–97.
11. **Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.** Прямые и обратные задачи для моделей стационарной реакции-конвекции-диффузии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 98–113.
12. **Короткий А.И., Стародубцева Ю.В.** Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.
13. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975. 268 p.
14. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. 336 с.
15. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.
16. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 5. М.: Физматлит, 1959. 657 с.
17. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
18. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.

Короткий Александр Илларионович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Поступила 25.08.2017

Литвиненко Анастасия Леонидовна
магистрантка
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: a.litvinenko114@yandex.ru

REFERENCES

1. Marchuk G.I. *Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchei sredy.* [Mathematical modelling in environmental problems]. Moscow: Nauka Publ., 1982, 319 p.
2. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha.* [Computational heat transfer]. Moscow: Editorial URSS Publ., 2003, 784 p.
3. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics.* Berlin, Heidelberg, N Y: Springer-Verlag, 1985. 322 p. doi: 10.1007/978-1-4757-4317-3 . Original Russian text published in *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki*, M.: Nauka Publ., 1973, 408 p.
4. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations.* N Y, London: Academic Press, 1968. 495 p. Original Russian text published in *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa*, M.: Nauka Publ., 1973, 576 p.
5. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaemoi zhidkosti.* [Mathematical questions in the dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 203 p.
6. Mikhailov V.P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh.* [Partial differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 392 p.
7. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh.* [Linear partial differential equations]. Moscow: Vishaisha Shkola, 1977, 431 p.
8. Alekseev G.V., Tereshko D.A. *Analiz i optimizatsiya v gidrodinamike vyazkoi zhidkosti.* [Analysis and optimization in hydrodynamics of viscous fluids]. Vladivostok: Dal'nauka, 2008, 365 p.
9. Lions J.L. Controle Optimal de Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles. Paris: Dunod: Gauthier-Villars, 1968, 426 p. Translated under the title *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi*, M.: Mir Publ., 1972, 416 p.
10. Korotkii A.I., Kovtunov D.A. Reconstruction of boundary regimes in an inverse problem of thermal convection of a high viscous fluid. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2006, vol. 12, no. 2, pp. 88–97 (in Russian).
11. Korotkii A.I., Starodubtseva Yu.V. Direct and inverse boundary value problems for models of stationary reaction-convection-diffusion. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, Suppl. 1, pp. 96–112. doi: 10.1134/S0081543815090072.
12. Korotkii A.I., Starodubtseva Yu.V. *Modelirovanie pryamykh i obratnykh granichnykh zadach dlya statsionarnykh modelei teplomassoperenosa.* [Modelling of direct and inverse problems for models of stationary heat and mass transfer]. Yekaterinburg: Izdatelstvo Uralskogo Universiteta, 2015, 168 p.
13. Adams R.A. Sobolev spaces. N Y: Acad. Press, 1975, 268 p.
14. Sobolev S.L. *Some application of functional analysis in mathematical physics.* Providence: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. Original Russian text published in *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike*, M.: Nauka Publ., 1988, 336 p.
15. Rektorys K. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike i tekhnike.* [Variational methods in mathematics, science and engineering]. Moscow: Mir Publ., 1985, 590 p.
16. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki.* [A course of higher mathematics], vol. 5. Moscow: Fizmatlit Publ., 1959, 657 p.
17. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1972, 496 p.
18. Dunford N., Schwartz J.T. [Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.] *Linear operators. General theory.* Moscow: URSS Publ. Publ., 2004, 896 p.

The paper was received by Editorial Office on August 25, 2017.

Aleksandr Illarionovich Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; e-mail: korotkii@imm.uran.ru.

Anastasia Leonidovna Litvinenko, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; e-mail: a.litvinenko114@yandex.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

К ПРОБЛЕМЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В. И. Максимов

Исследуется задача восстановления неизвестных входных воздействий на систему, описываемую векторным нелинейным дифференциальным уравнением с постоянным запаздыванием. Заранее как входное воздействие, так и решение (траектория) системы неизвестны. В ходе функционирования системы в дискретные моменты времени измеряются текущие фазовые состояния. Эти измерения, вообще говоря, неточны. Требуется указать правило приближенного восстановления входа, обладающее свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности означает, что текущие значения приближений вырабатываются в реальном времени, свойство устойчивости — что приближения сколь угодно близки при достаточной точности наблюдений. В статье указывается алгоритм решения указанной задачи, позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять восстановление неизвестных воздействий. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений. В основе предлагаемого алгоритма лежит метод управляемых по принципу обратной связи моделей.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, динамическое восстановление, метод управляемых моделей.

V. I. Maksimov. On the problem of input reconstruction in a nonlinear system with constant delay.

We study the problem of reconstructing an unknown input acting on a system described by a nonlinear vector differential equation with constant delay. Both the input and the solution (trajectory) of the system are unknown. During the operation of the system, its phase states are measured at discrete times. The measurements, in general, are inaccurate. It is required to give a dynamic stable rule for the approximate reconstruction of the input, which means that the approximate values must be found in real time and the approximations must be arbitrarily accurate for sufficiently exact observations. For the solution of this problem, we propose an algorithm based on the method of models with feedback control. The algorithm reconstructs the unknown input simultaneously with the process. The algorithm is stable with respect to information noises and computational errors.

Keywords: delay systems, dynamic reconstruction, method of controlled models.

MSC: 49J35, 91A24, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-121-130

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается динамическая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1.1}$$
$$x(s) = x_0(s) \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n),$$

где $\tau = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$ — запаздывание, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u \in \mathbb{R}^r$ — возмущение, $B(x)$ — $(n \times r)$-мерная матричная функция, $f(t, x, y)$ — n-мерная вектор-функция, $F(t, x, y, u) = f(t, x, y) + B(x)u$ — липшицевая по совокупности переменных в области $\mathbb{R}^{2n+1} \times P$ функция. Начальное состояние системы $x_0(s),\ s \in [-\tau, 0]$ задано. Будем считать, что эта функция липшицева. Возмущение — r-мерная (измеримая по Лебегу) входная вектор-функция,

[1]Работа подготовлена при поддержке программы президиума РАН №30 “Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации”.

удовлетворяющая включению $u(t) \in P$, $t \in T$, — неизвестно. Здесь $P \subset \mathbb{R}^r$ — выпуклый компакт. Такова вся априорная информация о действующем на систему (1.1) возмущении. Цель работы состоит в построении алгоритма восстановления некоторого возмущения, порождающего решение $x(\cdot)$. Входными данными алгоритма являются результаты неточного измерения фазового состояния системы $x(t)$. Выход алгоритма — некоторая функция $v^h(\cdot)$.

Обсуждаемая задача относится к классу динамических обратных задач. Подобные задачи исследовались ранее. Один из подходов к их решению для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был развит в работах [1; 2]. (Здесь мы указываем только монографии, в которых можно найти соответствующие ссылки.) Подход основан на сочетании методов теории гарантированного управления [3] и известных в теории некорректных задач методов сглаживающего функционала (метод А. Н. Тихонова) и невязки [4].

Уточним постановку задачи и опишем содержательно метод ее решения. На промежутке времени T реализуется некоторая траектория системы (1.1), т. е. решение $x(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0(s), u(\cdot))$ дифференциального уравнения (1.1), зависящее от изменяющегося во времени входного воздействия $u(\cdot) \in P(\cdot) = \{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r)\colon \tilde{u}(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$. Интервал T разбит на конечное число полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$. В моменты времени τ_i, $i \in [0 : m-1]$, измеряются (приближенно) реализующиеся состояния системы $x(\tau_i)$, т. е. находятся векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h| \le h. \tag{1.2}$$

Здесь $h \in (0,1)$ — уровень информационной погрешности, символ $|\cdot|$ означает евклидову норму в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^r$. Решение уравнения (1.1) — функция $x(\cdot)$ — неизвестно. Задача состоит в построении алгоритма восстановления (в темпе “реального” времени) неизвестного входа на основе неточного измерения величин $x(\tau_i)$, $i \in [1 : m-1]$.

Для того чтобы приближенно вычислять неизвестный вход, мы воспользуемся методом позиционного управления с моделью [1;2]. В соответствии с этим методом задача восстановления неизвестного входа по результатам измерения величин ξ_i^h заменяется другой задачей, а именно задачей управления по принципу обратной связи некоторой вспомогательной системой. Таким образом, задача восстановления $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

(1) к задаче выбора вспомогательной системы, называемой *моделью*, которая функционирует “синхронно” с реальной системой, а также

(2) к задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

Для некоторых задач динамической реконструкции для систем с последействием описанная выше схема реализована в работах [5–11]. При этом в работах [10; 11] рассматривались линейные системы, а при выборе моделей использовались схемы аппроксимации дифференциальных уравнений с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями, аналогичные схеме из настоящей работы. Данную работу можно рассматривать в качестве продолжения работ [10; 11]. Следует отметить, что схема аппроксимации систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями широко используется при решении задач восстановления структурных характеристик систем с запаздыванием по измерениям фазовых траекторий (см., например, работы [12–14], в которых есть соответствующая библиография).

2. Вспомогательные построения

Прежде чем указать алгоритм решения задачи, приведем вспомогательные построения.

В качестве модели (при фиксированном $h \in (0,1)$) возьмем систему обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $n \times (q+1)$ ($q = q_h$, $q_h \to \infty$ при $h \to 0$) следующего вида:

$$\dot{y}(t) = F_q(t, y(t), v^h(t)), \tag{2.1}$$

где $y = \{y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(q)}\}$ — $((q+1)\times n)$–мерный вектор; $y^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j \in [0:q]$; $\omega_q = \tau/q$;

$$F_q(t,y,v) = \left\{ \begin{array}{c} F(t, y^{(0)}, y^{(q)}, v) \\ \omega_q^{-1}\{y^{(0)} - y^{(1)}\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_q^{-1}\{y^{(q-1)} - y^{(q)}\} \end{array} \right\}.$$

Начальное состояние модели: $y^{(j)}(0) = x_0(-j\omega_q)$, $j \in [0:q]$. Подобная система использовалась в работах [15–17] при исследовании дифференциально-разностных игр.

Ниже полагаем, что в моменты τ_i измеряется (с ошибкой) часть координат системы (2.1), а именно координаты $y^{(0)}(\tau_i)$. Результаты измерений — векторы $\psi_i^h \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$|y^{(0)}(\tau_i) - \psi_i^h| \le h. \tag{2.2}$$

Итак, модель описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (см. (2.1)), в то время как заданная система — уравнением с запаздыванием (см. (1.1)).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [16]. *Каково бы ни было число $\varepsilon_1 > 0$ можно указать число $N_0 = N_0(\varepsilon_1, x_0(s))$ такое, что при всех $q > N_0$ равномерно по всем $v(\cdot) \in P(\cdot)$ выполняются неравенства*

$$\sup_{t\in T} |x(t - j\omega_q) - y^{(j)}(t)| \le \varepsilon_1, \quad j \in [0:q].$$

Здесь и всюду ниже символ $x(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot))$ означает решение системы (1.1) с начальным состоянием $x_0(s)$ и возмущением $u = v(\cdot) \in P(\cdot)$, а символ $y(\cdot) = y(\cdot; 0, y(0), v(\cdot))$ — решение системы (2.1) с начальным состоянием $y(0)$ и тем же самым возмущением, т. е. $v^h = v(\cdot)$.

Одно и то же решение уравнения (1.1) может вызываться не единственным возмущением. Пусть $U(x(\cdot))$ — множество всех возмущений из $P(\cdot)$, порождающих решение $x(\cdot)$ уравнения (1.1), т. е.

$$U(x(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P(\cdot) \colon \dot{x}(t) - f(t, x(t), x(t-\tau)) = B(x(t))u(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\}.$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T;\mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $P(\cdot)$, порождающее решение $x(\cdot)$ уравнения (1.1), т. е.

$$u_*(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot)\in U(x(\cdot))} |u(\cdot)|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно. Следуя принятому в теории некорректных задач подходу [4], мы будем восстанавливать $u_*(\cdot)$.

Пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1. Для любого вектора $u \in P$ и любых n-мерных векторов x_1, x_2, y_1, y_2 при всех $t \in T$ справедливо неравенство

$$(F(t, x_1, y_1, u) - F(t, x_2, y_2, u), x_1 - x_2) \le \chi_1 |x_1 - x_2|^2 + \chi_2 |y_1 - y_2|^2,$$

где $\chi_1 < 0$, $\chi_2 > 0$ — постоянные, такие что $0 < \chi_2 < -\chi_1$.

Здесь символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В качестве примера можно привести систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 x(t-\tau) + B(x(t))u(t),$$

где A_1 — $(n\times n)$-мерная отрицательно определенная матрица. Тогда найдется число $c_1 < 0$ такое, что

$$(A_1(x_1 - x_2), x_1 - x_2) \le c_1 |x_1 - x_2|^2 \quad \forall x_1, x_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим, что $B(x)$ — матричная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$\|B(x_1) - B(x_2)\| \le L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\|\cdot\|$ означает евклидову норму матрицы.

Как нетрудно видеть, условие 1 будет выполнено, если существует такое число $c_2 > 0$, что справедливо неравенство

$$\|A_2\|/(4c_2) + c_2 + Ld(P) \le -c_1,$$

где $d(P) = \sup_{u\in P} |u|$. Тогда $\chi_1 = c_1 + c_2 + Ld(P)$, $\chi_2 = \|A_2\|/(4c_2)$. Заметим, что число c_2 с указанными выше свойствами существует, например, в случае, когда

$$(c_1 + Ld(P))^2 > \|A_2\|.$$

Символом $\mathbb{R}^n_q$ обозначим пространство $(n \times (q+1))$-мерных векторов со скалярным произведением

$$(z, y)_q = (x_0, y_0) + c_q \sum_{j=1}^{q} (x_j, y_j)$$

и нормой $|\cdot|_q$. Здесь $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_q\}$, $y = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in [0 : q]$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$, q — натуральное число.

У с л о в и е 2. Число c_q таково, что выполняется неравенство

$$\chi_2 \le 0,5 c_q \omega_q \le -\chi_1.$$

3. Алгоритм решения

Фиксируем семейство разбиений Δ_h интервала T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) = \vartheta/m_h, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta.$$

Совокупность всех кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot)\colon T \mapsto \mathbb{R}^n$, $\xi^h(t) = \xi^h_i$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \in [0 : m_h]$, удовлетворяющих ограничениям (1.2), будем обозначать символом $\Xi(x(\cdot), h)$.

Введем вспомогательную функцию $\alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h. Вместе с ней фиксируем числа $q = q(h) > N_0(h, x_0(s))$ и $\alpha = \alpha(h)$, а также разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m}$, $m = m_h$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $i \in [0 : m-1]$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i вычисляется вектор

$$v^h_i = \arg\min\bigl\{2(\psi^h_i - \xi^h_i)' B(\xi^h_i) v + \alpha |v|^2 \colon v \in P\bigr\}, \tag{3.1}$$

где штрих означает транспонирование. Затем на вход модели (2.1) в течение промежутка δ_i подается управление $v^h(t) = v^h_i$. В результате под действием этого управления модель (2.1) переходит из состояния $y(\tau_i)$ в состояние $y(\tau_{i+1})$. На следующем $(i+1)$-м шаге аналогичные действия повторяются.

Как видно из приведенной ниже теоремы 1, описанный выше метод позиционного управления моделью (2.1) генерирует вход модели $v^h(\cdot)$, который сколь угодно точно аппроксимирует вход $u_*(\cdot)$ системы (1.1), если только величина h (погрешность наблюдения) и шаг $\delta(h)$ разбиения Δ_h достаточно малы.

Наряду с системами (1.1) и (2.1) рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_q(t) = F_q(t, x_q(t), u_*(t)) \tag{3.2}$$

с начальным состоянием

$$x_q^{(j)}(0) = x_0(-j\omega_q), \quad j \in [0:q].$$

Здесь $x_q = \{x_q^{(0)}, \dots, x_q^{(q)}\} \in \mathbb{R}^{n\times(q+1)}$. Таким образом, система (3.2) отличается от системы (2.1) возмущением. Введем величину

$$\varepsilon_q(t) = \nu_q(t) + \alpha \int\limits_0^t \{|v^h(\nu)|^2 - |u_*(\nu)|^2\}\, d\nu,$$

где $\alpha = \alpha(h)$; $\nu_q(t) = |y(t) - x_q(t)|_q^2$; $y(\cdot)$ — решение системы (2.1); $x_q(\cdot)$ — решение системы (3.2).

Лемма 2. *Пусть управление* $v^h(\cdot)$ *в модели* (2.1) *находится по формуле* (3.1). *Тогда равномерно по всем* $h \in (0,1)$, $i \in [0:m_h]$ *и* $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$ *верны неравенства*

$$\varepsilon_q(\tau_i) \le c_*(h + \delta(h)), \tag{3.3}$$

где $c_* = \mathrm{const} \in (0, +\infty)$, $h \in (0,1)$, $q = q(h) > N_0(h, x_0(s))$, *число* N_0 *определено в лемме* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon_q(t)$. Продифференцировав $\varepsilon_q(t)$, получим

$$\dot\varepsilon_q(t) = I_t^{(1)} + I_t^{(2)} \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{3.4}$$

где

$$I_t^{(1)} = 2\big(y(t) - x_q(t), F_q(t, y(t), v^h(t)) - F_q(t, x_q(t), u_*(t))\big)_q; \quad I_t^{(2)} = \alpha\{|v^h(t)|^2 - |u_*(t)|^2\}.$$

Далее имеем

$$I_t^{(1)} = I_t^{(3)} + I_t^{(4)}. \tag{3.5}$$

Здесь

$$I_t^{(3)} = 2c_q\omega_q^{-1}\sum_{j=0}^{q-1}\big\{(y^{(j)}(t) - y^{(j+1)}(t)) - (x_q^{(j)}(t) - x_q^{(j+1)}(t))\big\}\big\{y^{(j+1)}(t) - x_q^{(j+1)}(t)\big\};$$

$$I_t^{(4)} = 2\Big(F(t, y^{(0)}(t), y^{(q)}(t), v^h(t)) - F(t, x_q^{(0)}(t), x_q^{(q)}(t), u_*(t)), y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)\Big).$$

Заметим, что верно неравенство

$$I_t^{(3)} \le c_q\omega_q^{-1}\big\{|y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 - |y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2\big\}. \tag{3.6}$$

Кроме того,

$$I_t^{(4)} = I_t^{(5)} + I_t^{(6)}, \tag{3.7}$$

где

$$I_t^{(5)} = 2\big(B(x_q^{(0)}(t))\{v^h(t) - u_*(t)\}, y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)\big);$$

$$I_t^{(6)} = 2\big(F(t, y^{(0)}(t), y^{(q)}(t), v^h(t)) - F(t, x_q^{(0)}(t), x_q^{(q)}(t), v^h(t)), y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)\big).$$

В свою очередь, в силу условия 1

$$I_t^{(6)} \le 2\chi_1|y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 + 2\chi_2|y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2. \tag{3.8}$$

В таком случае из (3.5)–(3.8) выводим оценку

$$I_t^{(1)} \le 2(c_q q/(2\tau) + \chi_1)|y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 + 2(\chi_2 - c_q q/(2\tau))|y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2 + I_t^{(5)}. \tag{3.9}$$

Учитывая условие 2, из (3.9) получаем

$$I_t^{(1)} \le I_t^{(5)}. \tag{3.10}$$

Значит, ввиду (3.10) из (3.4) следует при п.в. $t \in T$ справедливость неравенства

$$\dot\varepsilon_q(t) \le I_t^{(2)} + 2(B(x_q^{(0)}(t))\{v^h(t) - u_*(t)\}, y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)). \tag{3.11}$$

Нетрудно видеть, что можно указать (в явном виде) число $c_1 > 0$ такое, что равномерно по всем $v(\cdot) \in P(\cdot)$, $q > N_0(h, x_0(s))$ выполняются неравенства

$$|\dot x_q^{(0)}(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le c_1, \tag{3.12}$$

$$|\dot y^{(0)}(\cdot; 0, y(0), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le c_1. \tag{3.13}$$

Кроме того, ввиду леммы 1 при всех $q > N_0(h, x_0(s))$ и всех $v(\cdot) \in P(\cdot)$

$$|x(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot)) - x_q^{(0)}(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le h, \tag{3.14}$$

$$|y(\cdot; 0, x_0(s), v(\cdot)) - y^{(0)}(\cdot; 0, y(0), v(\cdot))|_{C(T;\mathbb{R}^n)} \le h. \tag{3.15}$$

Поэтому в силу (1.2), (2.2), (3.11)–(3.15) при п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ и всех $i \in [0 : m-1]$ верно неравенство

$$\dot\varepsilon_q(t) \le I_t^{(2)} + 2(B(\xi_i^h)(v^h(t) - u_*(t)), \psi_i^h - \xi_i^h) + c_2(t - \tau_i) + c_3 h.$$

Из этого неравенства, учитывая правило определения управления $v^h(\cdot)$ (см. (3.1)), получаем (3.3). Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает

Следствие. *При $q = (h) > N_0(h, x_0(s))$ справедливы неравенства:*

$$\sup_{t\in T} |y^{(0)}(t) - x_q^{(0)}(t)|^2 \le c^{(1)}(h + \delta(h) + \alpha(h));$$

$$\sup_{t\in T} |y^{(q)}(t) - x_q^{(q)}(t)|^2 \le c^{(2)}(h + \delta(h) + \alpha(h));$$

$$\int_0^\vartheta |v^h(\nu)|^2 d\nu \le \int_0^\vartheta |u_*(\nu)|^2\, d\nu + c^{(3)}(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h).$$

Здесь $c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}$ — некоторые постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Лемма 3. *Пусть $q = q(h) > N_0(h, x_0(s))$. Пусть также $\alpha(h) \to 0$, $(h + \delta(h))/\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда $v^h(\cdot) \to v_0(\cdot)$ слабо в $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ при $h \to 0$, где $v_0(\cdot)$ — некоторая функция из множества $U(x(\cdot))$.*

Доказательство. Предположим противное: существует последовательность $h_j \to 0$ при $j \to \infty$ такая, что

$$v^{h_j}(\cdot) \to v_0(\cdot) \notin U(x(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T; \mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.16}$$

В силу следствия получаем

$$\sup_{t\in T} |y_{q_j}^{(0)}(t) - x_{q_j}^{(0)}(t)| \le c^{(1)}(h_i + \delta(h_j) + \alpha(h_j)) \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.17}$$

Здесь $q_j > N_0(h_j, x_0(s))$; $y_{q_j}(\cdot) = \{y_{q_j}^{(0)}(\cdot), \dots, y_{q_j}^{(q_j)}(\cdot)\}$ — решение системы (2.1) при $q = q_j$ и управлении $v = v^{h_j}(\cdot)$, вычисляемым по формуле (3.1) при $h = h_j$; $x_{q_j}(\cdot) = \{x_{q_j}^{(0)}(\cdot), \dots, x_{q_j}^{(q_j)}(\cdot)\}$ — решение системы (3.2) при $q = q_j$. Пусть $y^h(\cdot)$ — решение системы

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)) + B(y(t))v^h(t)$$

с начальным условием

$$y(s) = x_0(s), \quad s \in [-\tau, 0].$$

В таком случае при $t \in T$ справедливы равенства

$$y^{h_j}(t) = x(0) + \int_0^t \big\{f(\nu, y^{h_j}(\nu), y^{h_j}(\nu - \tau)) + B(y^{h_j}(\nu))v^{h_j}(\nu)\big\}\, d\nu; \tag{3.18}$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \big\{f(\nu, x(\nu), x(\nu - \tau)) + B(x(\nu))u_*(\nu)\big\}\, d\nu. \tag{3.19}$$

Ввиду леммы 1 имеем

$$\begin{gathered} \sup_{t\in T} |x_{q_j}^{(0)}(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \\ \sup_{t\in T} |y_{q_j}^{(0)}(t) - y^{h_j}(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \end{gathered} \tag{3.20}$$

Отсюда и из (3.17), (3.20) вытекает сходимость

$$\sup_{t\in T} |y^{h_j}(t) - x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.21}$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.18), (3.19), получаем

$$|J_t^{h_j}| \le |y^{h_j}(t) - x(t)| + |I_t^{h_j}|, \tag{3.22}$$

где

$$I_t^{h_j} = \int_0^t \big\{f(\nu, y^{h_j}(\nu), y^{h_j}(\nu - \tau)) - f(\nu, x(\nu), x(\nu - \tau))\big\}\, d\nu,$$

$$J_t^{h_j} = \int_0^t \big\{B(y^{h_j}(\nu))v^{h_j}(\nu) - B(x(\nu))u_*(\nu)\big\}\, d\nu.$$

В силу (3.21)) из (3.22) следует сходимость

$$\sup_{t\in T} |J_t^{h_j}| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.23}$$

Далее имеем

$$\sup_{\nu\in T} \Big| \int_0^\nu B(x(t))\{v_j^h(t) - u_*(t)\}\, dt \Big| \le \sup_{\nu\in T} \Big| \int_0^\nu \big\{B(y^{h_j}(t))v^{h_j}(t) - B(x(t))u_*(t)\big\}\, dt \Big|$$

$$+ \sup_{\nu\in T} \Big| \int_0^\nu \{B(y^{h_j}(t)) - B(x(t))\} v^{h_j}(t)\, dt \Big|. \tag{3.24}$$

Первое слагаемое в правой части (3.24) стремится к нулю в силу (3.23), а второе — в силу (3.21). Значит,

$$\sup_{\nu\in T}\Big|\int\limits_0^{\nu} B(x(t))\{v^{h_j}(t)-u_*(t)\}\,dt\Big| \to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Следовательно,

$$B(x(t))v_0(t)=B(x(t))u_*(t) \quad \text{при п.в.} \quad t\in T.$$

Поэтому

$$v^{h_j}(\cdot)\to v_0(\cdot)\in U(x(\cdot)) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T;\mathbb{R}^r) \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{3.25}$$

Однако (3.25) противоречит (3.16).

Лемма доказана.

Из леммы 3 и следствия стандартным образом (см., например, [2, с. 25, 26]) устанавливается справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть управление $v^h(\cdot)$ находится по формуле* (3.1)*. Тогда равномерно по всем $\xi^h(\cdot)\in\Xi(x(\cdot),h)$ имеет место сходимость $v^h(\cdot)\to u_*(\cdot)$ в $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ при $h\to 0$, если $q=q(h)>N_0(h,x_0(s))$, $\alpha(h)\to 0$, $(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h)\to 0$ при $h\to 0$.*

4. Оценка скорости сходимости алгоритма

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. При ее обосновании нам понадобится

Лемма 4 [2, с. 29, 30]. *Пусть $u(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R}^r)$, $v(\cdot)$ — r-мерная функция ограниченной вариации и*

$$\Big|\int\limits_0^t u(\nu)\,d\nu\Big|\le\varepsilon, \quad |v(t)|\le K \quad \forall t\in T.$$

Тогда

$$\Big|\int\limits_0^t (u(\nu),v(\nu))\,d\nu\Big|\le\varepsilon(K+\mathrm{var}_T v(\cdot)) \quad \forall t\in T.$$

Здесь ε и K — постоянные, символ $var_T v(\cdot)$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T.

Теорема 2. *Пусть $n=r$, $B(x)=E$ — единичная матрица и $u_*(\cdot)$ — функция ограниченной вариации. Тогда справедлива оценка скорости сходимости алгоритма*

$$|u_*(\cdot)-v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}\le K_1\big[\{\alpha(h)+\delta(h)+h\}^{1/2}+(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h)\big]. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу следствия (см. первые два неравенства) верно неравенство

$$\sup_{t\in T}\Big|\int\limits_0^t\{u_*(\tau)-v^h(\tau)\}\,d\tau\Big| = \sup_{t\in T}\Big|\int\limits_0^t\big\{f(\nu,x_q^{(0)}(\nu),x_q^{(q)}(\nu))-f(\nu,y^{(0)}(\nu),y^{(q)}(\nu))\big\}\,d\nu\Big|$$

$$\le C_0\{\alpha(h)+\delta(h)+h\}^{1/2}.$$

Здесь и ниже C_0 и C_1 — некоторые постоянные, которые могут быть выписаны явно. Отсюда, снова воспользовавшись следствием (см. третье неравенство), получаем

$$|u_*(\cdot)-v^h(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}\le 2|u_*(\cdot)|^2_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}-2\int\limits_0^{\vartheta}(u_*(\nu),v^h(\nu))\,d\nu$$

$$+ c^{(3)}(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h) = 2\int\limits_0^{\vartheta}(u_*(\nu), u_*(\nu) - v^h(\nu))\,d\nu + c^{(3)}(h+\delta(h))\alpha^{-1}(h). \qquad (4.2)$$

В силу леммы 4

$$\Big|\int\limits_0^{\vartheta}(u_*(\nu), u_*(\nu) - v^h(\nu))\,d\nu\Big| \le C_1(\alpha(h)+\delta(h)+h)^{1/2}. \qquad (4.3)$$

Оценка (4.1) является следствием неравенств (4.2), (4.3).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
3. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. I. М.: МЦНМО, 2011. 620 с.
5. **Максимов В. И.** Метод функций Ляпунова в задачах реконструкции входов систем с последействием // Соврем. математика и ее приложения. 2005. Т. 26. С. 78–95.
6. **Близорукова М. С.** О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикл. математика и информатика: сб. Тр. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / М.: МАКС Пресс, 2000. № 28. С. 105–115.
7. **Васильева Е. В.** Динамический метод невязки для дифференциального уравнения с памятью // Проблемы мат. физики: сб. Тр. факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова / М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 68–74.
8. **Кадиев А. М., Максимов В. И.** О реконструкции управлений в параболическом уравнении // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 11. С. 1545–1552.
9. **Maksimov V., Pandolfi L.** On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag system // IMA J. Math. Control Inform. 2002. Vol. 19, no. 1/2. doi: 10.1093/imamci/19.1_and_2.173 . P. 173–184.
10. **Kappel F., Maksimov V. I., Skuratov E. N.** On dynamical reconstruction of control in a system with time delay. Finite-dimensional models // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2001. Vol. 9, no. 3. P. 269–282. doi: 10.1515/jiip.2001.9.3.269 .
11. **Максимов В. И.** О применении конечномерных управляемых моделей к задаче реконструкции входа в линейной системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 196–204.
12. **Banks H. T., Bihari K. L.** Modeling and estimating uncertainty in parameter estimation // Inverse Probl. 2001. Vol. 17, no. 1. P. 1–17. doi: 10.1088/0266-5611/17/1/308 .
13. **Banks H. T., Bortz D. M.** Inverse problems for a class of measure dependent dynamical systems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2005. Vol. 13, no. 1. P. 103–121. doi: 10.1515/1569394053978515 .
14. **Banks H. T., Rehm K., Sutton K.** Inverse problems for nonlinear delay systems // Methods Appl. Anal. 2010. Vol. 17, no. 3. P. 331–356. doi: 10.4310/MAA.2010.v17.n4.a2 .
15. **Кряжимский А. В., Максимов В. И.** Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, № 2. С. 202–209.
16. **Максимов В. И.** Аппроксимация нелинейных дифференциально-разностных игр // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1979. Вып. 30. С. 49–65.
17. **Лукоянов Н. Ю., Плаксин А. Р.** Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 204–217.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 10.09.2017

REFERENCES

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions*. Basel, Gordon and Breach, 1995, 625 p. ISBN: 2-88124-944-2 .
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov upravlyaemykh sistem.* [Methods of Dynamic Reconstruction of Inputs of Control Systems]. Ekaterinburg, Ural'sk. Otd. Ross. Akad. Nauk Publ., 2011, 292 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii. I.* [Optimization methods. I]. Moscow, MCCME Publ., 2011, 620 p. ISBN: 978-5-94057-707-2 .
5. Maksimov V.I. Lyapunov function method in input reconstruction problems of systems with aftereffect. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2007, vol. 140, no. 6, pp. 832–849. doi: 10.1007/s10958-007-0020-x .
6. Blizorukova M.S. Input modeling in time-delayed systems. *Comput. Math. Model.*, 2001, vol. 12, no. 2, pp. 174–185. doi: 10.1023/A:1012518317520 .
7. Vasil'eva E.V. The dynamic discrepancy method for a differential equation with memory. *Comput. Math. Model.*, 1999, vol. 10, no. 1, pp. 55–60. doi: 10.1007/BF02358922 .
8. Kadiyev A.M., Maksimov V.I. On the reconstruction of controls in a parabolic equation. *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 11, pp. 1585–1593. doi: 10.1134/S0012266107110134 .
9. Maksimov V., Pandolfi L. On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag system. *IMA J. Math. Control and Information*, 2002, vol. 19, no. 1/2, pp. 173–184. doi: 10.1093/imamci/19.1_and_2.173 .
10. Kappel F., Maksimov V.I., Skuratov E.N. On dynamical reconstruction of control in a system with time delay. Finite-dimensional models. *J. Inverse and Ill-Posed Probl.*, 2001, vol. 9, no. 3, pp. 269–282. doi: 10.1515/jiip.2001.9.3.269 .
11. Maksimov V.I. On the application of finite-dimensional controllable models to the problem of input reconstruction in a linear system with delay. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 196–204 (in Russian).
12. Banks H.T., Bihari K.L. Modeling and estimating uncertainty in parameter estimation. *Inverse Probl.*, 2001, vol. 17, no. 1, pp. 1–17. doi: 10.1088/0266-5611/17/1/308 .
13. Banks H.T., Bortz D.M. Inverse problems for a class of measure dependent dynamical systems. *J. Inverse and Ill-Posed Probl.*, 2005, vol. 13, no. 1, pp. 103–121. doi: 10.1515/1569394053978515 .
14. Banks H.T., Rehm K., Sutton K. Inverse problems for nonlinear delay systems. *Methods Appl. Anal.*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 331–356. doi: 10.4310/MAA.2010.v17.n4.a2 .
15. Kriazhimskii A.V., Maksimov V.I. Approximation in linear differential-difference games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1978, vol. 42, no. 2, pp. 212–219. doi: 10.1016/0021-8928(78)90136-3 .
16. Maksimov V.I. Approximation on nonlinear differential-difference games. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 1979, vol. 30, pp. 49–65 (in Russian).
17. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On the approximation of nonlinear conflict-controlled systems of neutral type. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 182–196. doi: 10.1134/S0081543816020152 .

The paper was received by Editorial Office on September 10, 2017.

Maksimov V.I. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. П. Максимов

Рассматривается линейная функционально-дифференциальная система управления с последействием общего вида. Исследуется задача оптимального управления с линейными ограничениями на фазовые и управляющие переменные. Управления реализуются линейным оператором общего вида. Охватываются случаи распределенного и сосредоточенного запаздывания в цепи управления, а также случай импульсных управляющих воздействий. Систематическое использование матрицы Коши позволяет свести исходную задачу к задаче, описываемой только в терминах управляющих переменных с участием вспомогательных переменных, связанных с определяющими соотношениями для матрицы Коши рассматриваемой системы. В случае, когда для управления используются только элементы конечномерного подпространства пространства управляющий воздействий, в явном виде записывается задача, допускающая эффективное решение стандартными программными средствами. Приводится пример прикладной задачи оптимального управления, возникающей в экономической динамике. Дается описание гибридных систем (систем с непрерывным и дискретным временем), допускающих сведение к рассмотренному классу систем.

Ключевые слова: линейные системы, управление, оптимизация.

V. P. Maksimov. On a class of optimal control problems for functional differential systems.

A linear functional differential control system of general form with aftereffect is considered. An optimal control problem with linear constraints on the state and control variables is studied. The control is realized by a linear operator of general form. The cases of distributed and lumped delay in the control loop, as well as the case of impulsive control, are covered. The Cauchy matrix is used to reduce the problem under consideration to a problem formulated only in terms of control variables with the use of some auxiliary variables linked with the defining relations for the Cauchy matrix of the system. In the case when the control is chosen from a finite-dimensional subspace of the control space, a problem effectively solvable by standard software tools is written explicitly. An example of an applied optimal control problem that arises in economic dynamics is presented. A class of hybrid systems (systems with continuous and discrete times) reducible to the system under consideration is described.

Keywords: linear systems, control, optimization.

MSC: 34H05, 34K10, 34K34, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-131-142

Введение

Конструктивному исследованию задач линейной оптимизации для различных конкретных классов систем с запаздыванием посвящена обширная литература (см., например, монографии [1;2] и приводимые в них списки литературы, а также работы [3–7]). Естественное стремление к расширению класса изучаемых задач приводит в рамках общепринятого подхода к необходимости доказательства новых вариантов принципа максимума, преодоления трудностей построения и интегрирования сопряженных систем, учету новых классов ограничений на фазовые переменные. Настоящая работа продолжает исследование [8], где рассматриваются задачи управления, обобщающие классическую задачу о переводе системы управления из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. При этом общность касается как класса рассматриваемых систем, так и постановки задачи и классов используемых управлений. Здесь мы сохраняем эту общность, включая возможность использования смешанных управлений, сочетающих классические и импульсные режимы управления, и исследуем задачу оптимального управления с общими линейными ограничениями на фазовые переменные и общим линейным целевым функционалом. В центре внимания по-прежнему находится та исключительная роль, которая принадлежит в этих вопросах оператору Коши (оператору Грина задачи Коши) рассматриваемой системы управления. Систематическое использование матрицы Коши позволяет свести исходную задачу к задаче, описываемой только в терминах управляющих переменных с участием вспомогательных переменных, связанных с определяющими соотношениями для матрицы Коши рассматриваемой системы. Это дает возможность предложить конечномерную аппроксимацию исходной задачи с использованием сочетания кусочно-постоянных и импульсных управлений. Кроме того, общность исходной постановки задачи позволяет использовать предлагаемый подход при рассмотрении широких классов гибридных систем (систем с непрерывным и дискретным временем) после их редукции к системам с непрерывным временем рассмотренного класса. Основные соотношения, полученные в настоящей работе, оказываются универсальными в рамках предлагаемого общего класса систем с последействием, при этом вся специфика конкретных систем учитывается за счет соответствующих свойств ядер интегральных операторов, входящих в описание рассматриваемой системы.

1. Предварительные сведения

Приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения из [9–11]. Обозначим через $L^n = L^n[0,\, T]$ пространство суммируемых по Лебегу функций $v\colon [0,\, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|v\|_{L^n} = \int\limits_0^T |v(s)|_n\, ds$, где $|\cdot|_n$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Далее, если размерность пространства очевидна, индекс у нормы будем опускать; для любого элемента $a \in \mathbb{R}^n$ (n-вектор-столбца) запись $(a)_i$ означает его i-й элемент.

Зафиксируем отрезок $[0,\, T] \subset \mathbb{R}$ и конечное множество точек $\{\tau_1, \dots, \tau_m\}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m < T$, и, следуя [12], введем пространство $DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных функций $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$x(t) = \int\limits_0^t v(s)\, ds + x(0) + \sum_{k=1}^m \chi_{[\tau_k,\, T]}(t)\Delta x(\tau_k), \quad t \in [0, T],$$

где $v \in L^n$, $\Delta x(\tau_k) = x(\tau_k) - x(\tau_k - 0)$, $\chi_{[\tau_k,\, T]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_k,\, T]$.

Элементы пространства $DS^n(m)$ — это функции, абсолютно непрерывные на каждом из промежутков $[0,\, \tau_1), [\tau_1,\, \tau_2), \dots, [\tau_m,\, T]$ и непрерывные справа в точках $\tau_1, \dots, \tau_m$. Производная $\dot{x}$ элемента $x \in DS^n(m)$ понимается как производная его абсолютно непрерывной составляющей $\dot{x}(t) = v(t)$, $t \in [0, T]$. Если норма в $DS^n(m)$ определяется равенством

$$\|x\|_{DS^n(m)} = \|\dot{x}\|_{L^n} + |x(0)|_n + \sum_{k=1}^m |\Delta x(\tau_k)|_n,$$

то $DS^n(m)$ — банахово пространство. Пространство $DS^n(m)$ является расширением пространства $AC^n = AC^n[0,\, T]$ абсолютно непрерывных функций $y\colon [0,\, T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|y\|_{AC^n} = \|\dot{y}\|_{L^n} + |y(0)|_n$.

Напомним, что стандартный подход к изучению дифференциальных уравнений с разрывными решениями связан с теорией так называемых “обобщенных дифференциальных уравнений”, предложенной Я. Курцвейлем [13]. К настоящему времени эта теория хорошо разработана (см., например, [14–16]). Согласно принятому подходу импульсные уравнения рассматриваются в классе функций ограниченной вариации. В этом случае под решением понимается функция ограниченной вариации, удовлетворяющая интегральному уравнению с интегралом Лебега — Стилтьеса или Перрона — Стилтьеса. Кусочно абсолютно непрерывные решения функционально-дифференциальных уравнений, рассматриваемые ниже, могут терпеть разрывы только в конечном числе заданных точек. Таким образом, в этом классе функций ограниченной вариации мы игнорируем только сингулярную компоненту. Предложенный в [12] подход не использует сложную теорию обобщенных функций и находит много приложений, где выбор пространства $DS^n(m)$ оказывается естественным.

Рассмотрим в пространстве $DS^n(m)$ уравнение [17]

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \int\limits_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A_0(t)x(0) + \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\Delta x(\tau_k) = f(t), \quad t \in [0,\, T]. \tag{1.1}$$

Здесь ядро $K(t,s)$ удовлетворяет *условию* $\mathcal{K}$: его элементы $k_{ij}(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s)\colon 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и имеют общую, суммируемую на $[0,\, T]$, мажоранту

$$|k_{ij}(t,s)| \leqslant \kappa(t), \quad i,j = 1,\dots,n, \quad t \in [0,T], \quad s \in [0,t],$$

а $(n \times n)$-матрицы $A_0,\dots,A_m$ имеют суммируемые на $[0,\, T]$ элементы. Уравнение (1.1) охватывает дифференциальные уравнения с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы Вольтерра. В частности, для оператора $(\mathcal{L}x)\,(t) = \dot{x}(t) - \int_0^t d_s\mathcal{R}(t,s)x(s)$ с распределенным запаздыванием, где без ограничения общности можно считать $R(t,t) = 0$, имеем $K(t,s) = \mathcal{R}(t,s),\ A(t) = \mathcal{R}(t,0)$ [10, с. 54–59].

Напомним [9;10], что пространство $DS^n(m)$ изоморфно прямому произведению $L^n \times \mathbb{R}^{n+mn}$, изоморфизм $J = \{V,\Theta\}\colon L^n \times \mathbb{R}^{n+mn} \to DS^n(m)$ задается равенствами

$$J(z,\beta) = Vv + \Theta\beta, \quad (Vv)(t) = \int\limits_0^t v(s)\,ds, \quad (\Theta\beta)(t) = \Theta(t)\beta, \quad t \in [0,T],$$

где $\beta \in \mathbb{R}^{n+mn},\ \Theta(t) = \big(E_n, E_n \cdot \chi_{[\tau_1,\,T]}(t),\dots,E_n \cdot \chi_{[\tau_m,\,T]}(t)\big)$, E_n — единичная $(n \times n)$-матрица. Обратный оператор $J^{-1} = [\delta,\,\sigma]\colon DS^n(m) \to L^n \times \mathbb{R}^{n+mn}$ определяется равенствами

$$J^{-1}x = (\delta x,\, \sigma x), \quad \delta x = \dot{x}, \quad \sigma x = \operatorname{col}(x(0), \Delta x(\tau_1),\dots,\Delta x(\tau_m)).$$

Тогда $x = V\delta x + \Theta\,\sigma x$. Оператор $Q = \mathcal{L}V\colon L^n \to L^n$ называют *главной частью оператора* $\mathcal{L}$, а $\tilde{A} = \mathcal{L}\Theta\colon \mathbb{R}^{n+mn} \to L^n$ — *конечномерной частью оператора* $\mathcal{L}$.

В уравнении (1.1) оператор Q является вольтерровым: $(Qv)(t) = v(t) - \int_0^t K(t,\,s)\,v(s)\,ds$ и обратимым. Обратный оператор Q^{-1} имеет представление $(Q^{-1}f)(t) = f(t) + \int_0^t R(t,\,s)\,f(s)\,ds$, где $R(t,\,s)$ — резольвентное ядро, соответствующее ядру $K(t,\,s)$. Оператор $\tilde{A}$ для уравнения (1.1) задается матрицей $\tilde{A} = (A_0, A_1,\dots,A_m)$.

Приведем представление решения уравнения (1.1). Для этого определим $(n \times (n+mn))$-матрицу $Y(t)$ как абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\dot{Y}(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\,\dot{Y}(s)\,ds - \tilde{A}(t), \quad Y(0) = 0, \quad t \in [0,\, T].$$

Однородное уравнение (1.1) $(f(t) = 0,\ t \in [0,\, T])$ имеет фундаментальную матрицу $X(t)$ размерности $n \times (n+mn)$:

$$X(t) = \Theta(t) + Y(t).$$

Решение уравнения (1.1) с начальными условиями

$$x(0) = 0, \quad \Delta x(\tau_1) = 0, \ \dots \quad \Delta x(\tau_m) = 0$$

имеет представление

$$x(t) = \int\limits_0^t \left(Q^{-1}f\right)(s)\,ds = (Cf)(t) = \int\limits_0^t C(t,\,s)f(s)\,ds, \quad t \in [0,\,T],$$

где $C(t,\,s)$ — матрица Коши [18; 19, с. 52–58]. Эта матрица является решением матричного уравнения

$$C_t'(t,\,s) = \int\limits_s^t K(t,\,\tau)\,C_\tau'(\tau,\,s)\,d\tau + K(t,\,s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

с условием $C(s,\,s) = E_n$ $\big($здесь и всюду ниже $C_\tau'(\tau,\,s) = \dfrac{\partial}{\partial\tau}C(\tau,\,s)\big)$ и уравнения

$$C(t,\,s) = E_n + \int\limits_s^t C(t,\,\tau)K(\tau,\,s)\,d\tau, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

Матрица $C(t,\,s)$ выражается через резольвентное ядро $R(t,\,s)$: $C(t,\,s) = E_n + \displaystyle\int_s^t R(\tau,\,s)\,d\tau$. Общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = X(t)\,\alpha + \int\limits_0^t C(t,\,s)\,f(s)\,ds, \quad t \in [0,\,T],$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^{n+mn}$ — произвольный вектор.

В рассматриваемых далее задачах оптимального управления целевой функционал и ограничения задаются с помощью линейных ограниченных функционалов, определенных на пространстве $DS^n(m)$. Линейный ограниченный вектор-функционал $\ell\colon DS^n(m) \to \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ имеет представление

$$\ell x = \int\limits_0^T \Phi(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k \Delta x(\tau_k), \tag{1.2}$$

где элементы $(\mathcal{N} \times n)$-матрицы Φ измеримы и ограничены в существенном, $\Psi_0, \ldots, \Psi_m$ — постоянные $(\mathcal{N} \times n)$-матрицы.

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем задачи оптимального управления для системы управления

$$\mathcal{L}x = Fu + f \tag{2.1}$$

с заданным начальным состоянием

$$x(0) = \alpha.$$

Здесь $F\colon L_2^r \to L^n$ — заданный линейный ограниченный оператор, $L_2^r = L_2^r[0,\,T]$ — пространство суммируемых с квадратом функций $u\colon [0,T] \to \mathbb{R}^r$, оснащенное скалярным произведением $(v,u) = \displaystyle\int_0^T v^\top(s)u(s)\,ds$ $((\cdot)^\top$ — символ транспонирования). Предполагается, что оператор F обладает свойством вольтерровости: для любого $\tau \in (0,T)$ $(Fu)(t) = 0$ на $[0,\tau]$ для всех таких $u \in L_2^r$, что $u(t) = 0$ на $[0,\tau]$. Подчеркнем сразу, что к числу управляющих воздействий мы относим не только управление u, входящее в правую часть уравнения (2.1), но и вектор скачков $\Delta x = \mathrm{col}(\Delta x(\tau_1), \ldots, \Delta x(\tau_m)) \in \mathbb{R}^{nm}$, интерпретируемых как результат импульсного воздействия на систему. В этом смысле можно говорить об использовании смешанного управления с бесконечномерной компонентой u и конечномерной компонентой Δx. Общая теорема о разрешимости задачи управления системой (2.1) при отсутствии ограничений на управление приведена с доказательством в [8]. Всюду ниже мы будем использовать сокращенное обозначение вектора Δx и его компонент, опуская x и ограничиваясь номером точки возможного разрыва для индексации компонент: $\Delta x = \Delta = \mathrm{col}(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$.

Целью управления в рассматриваемой задаче является минимизация целевого функционала $\Lambda(x, u)\colon DS^n(m) \times L_2^r$:

$$\Lambda(x,u) = \int_0^T \phi(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \psi_0 x(0) + \sum_{k=1}^m \psi_k \Delta_k \, + \int_0^T \lambda^\top(s)\,u(s)\,ds \;\to\; \min, \tag{2.2}$$

где $\phi(\cdot)$ — n-вектор-строка с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\, T]$ элементами, $\lambda(\cdot) \in L_2^r$, ψ_k $(k = 0, \ldots, m)$ — постоянные n-вектор-строки. При этом на фазовые и управляющие переменные накладываются следующие ограничения:

$$\ell_1 x \equiv \int_0^T \Phi^1(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0^1 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k^1 \Delta_k \;=\; \beta^1 \in \mathbb{R}^{n_1}; \tag{2.3}$$

$$\ell_2 x \equiv \int_0^T \Phi^2(s)\,\dot{x}(s)\,ds + \Psi_0^2 x(0) + \sum_{k=1}^m \Psi_k^2 \Delta_k \;\le\; \beta^2 \in \mathbb{R}^{n_2}; \tag{2.4}$$

$$Gu(t) \le \gamma \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,\, T]. \tag{2.5}$$

В ограничениях (2.3) и (2.4) порождающие элементы вектор-функционалов $\ell_1\colon DS^n(m) \to \mathbb{R}^{n_1}$ и $\ell_2\colon DS^n(m) \to \mathbb{R}^{n_2}$ удовлетворяют тем же ограничениям, что и порождающие элементы вектор-функционала ℓ в представлении (1.2). В поточечном ограничении (2.5) на управление u $G = \{g_{ij}\}$ — постоянная $(N \times r)$-матрица.

3. Основная теорема

Для формулировки основной теоремы введем следующие обозначения. Для каждой $(\mathcal{N} \times n)$-матрицы $\mathcal{Z}$ с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,\, T]$ элементами определим матрицы $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(s)$, $s \in [0,\, T]$, и $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}^k$, $k = 0, \ldots, m$, равенствами

$$\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(s) = \int_s^T \mathcal{Z}(\tau) C'_\tau(\tau,\, s)\,d\tau, \quad \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}^k \;=\; \int_0^T \mathcal{Z}(\tau)\,\dot{X}_k(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $X_0, \ldots, X_m$ — $(n \times n)$-матрицы, составляющие фундаментальную матрицу $X\colon X(t) = (X_0(t), X_1(t), \ldots, X_m(t))$. Далее положим

$$\vartheta_{\mathcal{Z}}(t) \;=\; \mathcal{Z}(t) \;+\; \mathcal{V}_{\mathcal{Z}}(t), \quad \vartheta^*_{\mathcal{Z}}(t) \;=\; (F^* \vartheta_{\mathcal{Z}})(t), \quad t \in [0,\, T].$$

В последнем равенстве каждая строка матрицы $\vartheta^*_{\mathcal{Z}}(t)$ является результатом применения сопряженного оператора $F^*\colon (L_1^n)^* \to (L_2^r)^*$ к соответствующей строке матрицы $\vartheta_{\mathcal{Z}}(t)$.

Теорема 1. *Задача* (2.1)–(2.5) *эквивалентна следующей задаче оптимизации в конечномерном расширении гильбертова пространства* L_2^r *:*

$$\mathcal{J}(u,\, \Delta) \;\equiv\; \int_0^T (\vartheta^*_\phi(t) \;+\; \lambda^\top(t))\,u(t)\,dt \;+\; \sum_{k=1}^m (\mathcal{V}_\phi^k \;+\; \psi_k)\Delta_k \;\to\; \min, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_0^T \vartheta^*_{\Phi^1}(t)\,u(t)\,dt \,+\, \sum_{k=1}^m (\mathcal{V}^k_{\Phi^1} \,+\, \Psi^1_k)\Delta_k \;=\; \beta^1 \,-\, \Psi^1_0\alpha, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_0^T \vartheta^*_{\Phi^2}(t)\,u(t)\,dt \,+\, \sum_{k=1}^m (\mathcal{V}^k_{\Phi^2} \,+\, \Psi^2_k)\Delta_k \;\le\; \beta^2 \,-\, \Psi^2_0\alpha, \tag{3.3}$$

$$Gu(t) \le \gamma, \quad t \in [0,\, T]. \tag{3.4}$$

Каждому решению $(u^0,\, \Delta^0) \in L_2^r \times \mathbb{R}^{mn}$ *задачи* (3.1)–(3.4) *соответствует решение* $(x^0,\, u^0) \in DS^n(m) \times L_2^r$ *задачи* (2.1)–(2.5), *где оптимальная траектория* x^0 *определяется равенством*

$$x^0(t) \,=\, \int\limits_0^t C(t,s)(Fu^0)(s)\,ds \,+\, \int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds \,+\, X_0(t)\alpha \,+\, \sum_{k=1}^m X_k(t)\Delta^0_k, \quad t \in [0,\, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится на основе использования представления общего решения уравнения (2.1) с использованием свойств матрицы Коши, необходимых для обоснования законности производимых преобразований (см. [8, с. 116]). Эти свойства подробно исследованы в [18;19, теоремы 2.4–2.10]. Ключевую роль при этом играет формула дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t C(t,s)f(s)\,ds \,=\, \int\limits_0^t C'_t(t,s)f(s)\,ds \,+\, f(t),$$

справедливая для любого $f \in L^n$.

З а м е ч а н и е 1. Центральное место в построении задачи (3.1)–(3.4) играют матрицы $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}$ при фиксированном выборе матрицы $\mathcal{Z}$. Определяющие уравнения для таких матриц и способ их построения с гарантированной оценкой точности описаны в работе [8, теорема 2.2]. Для системы (1.1) в случае абсолютно непрерывных траекторий и отсутствия ограничений на фазовые переменные необходимые и достаточные условия оптимальности управления сформулированы в виде принципа максимума в [20]. Там же для некоторых широко распространенных случаев оператора F, отвечающего за реализацию управлений, приведен вид сопряженного оператора F^*, входящего в конструкцию матрицы $\vartheta^*_{\mathcal{Z}}(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Гладкий случай с траекториями из пространства AC^n формально охватывается теоремой 1 при включении в число условий (2.3) равенств $\Delta_k \,=\, 0,\ k \,=\, 1, \ldots, m$. Вопрос о разумном выборе системы точек $\tau_1, \ldots, \tau_m$, и в частности вопрос об их количестве, обычно находит естественный ответ в прикладных задачах. В общей постановке дополнительная степень свободы, связанная с управляющими параметрами Δ, может рассматриваться как одна из возможностей ослабления ограничений. Отметим еще, что более точная регулировка количества управляющих конечномерных параметров может осуществляться за счет использования аналогов пространства $DS^n(m)$ с индивидуальным для каждой компоненты списком допустимых скачков траекторий. Детали можно найти в [17, с. 68].

Для формулировки следствия из теоремы 1 зафиксируем систему линейно независимых элементов $v_j,\ j = 1, \ldots, \rho$, пространства L_2^r и ввведем следующие обозначения:

$$W(t) \,=\, \{w_i(t)\} \,=\, \vartheta^*_{\phi}(t) \,+\, \lambda^\top(t); \quad c_{ij} \,=\, \int\limits_0^T w_i(t)v_j(t)\,dt; \quad d_k \,=\, (\mathcal{V}^k_{\phi} \,+\, \psi_k);$$

$$W^1(t) \,=\, \{w^1_{ij}(t)\} \,=\, \vartheta^*_{\Phi^1}(t) \,+\, \lambda^\top(t); \quad a^{1l}_{ij} \,=\, \int\limits_0^T w^1_{li}(t)v_j(t)\,dt; \quad D^1_k \,=\, (\mathcal{V}^k_{\Phi^1} \,+\, \Psi^1_k);$$

$$W^2(t) = \{w^2_{ij}(t)\} = \vartheta^*_{\Phi^2}(t) + \lambda^\top(t); \quad a^{2l}_{ij} = \int\limits_0^T w^2_{li}(t) v_j(t)\, dt; \quad D^2_k = (\mathcal{V}^k_{\Phi^2} + \Psi^2_k).$$

Следствие 1. *Пусть P — конечномерное подпространство пространства L^r_2 с базисными элементами v_j, $j = 1, \ldots, \rho$. В классе управлений $u \in P$ с компонентами $u_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{\rho} \omega^j_i\, v_j(t)$, $i = 1, \ldots, r$, задача* (3.1)–(3.4) *принимает вид*

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\, \omega^j_i + \sum_{k=1}^{m} d_k\, \Delta_k \to \min, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} a^{1l}_{ij}\, \omega^j_i + \sum_{k=1}^{m} (D^1_k\, \Delta_k)_l = (\beta^1)_l - (\Psi^1_0 \alpha)_l, \quad l = 1, \ldots, n_1, \tag{3.6}$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} a^{2l}_{ij}\, \omega^j_i + \sum_{k=1}^{m} (D^2_k\, \Delta_k)_l \le (\beta^2)_l - (\Psi^2_0 \alpha)_l, \quad l = 1, \ldots, n_2, \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{r} g_{li}\, \omega^j_i\, v_j(t) \le (\gamma)_l, \quad t \in [0, T], \quad l = 1, \ldots, N. \tag{3.8}$$

Пусть $\{t^*_j\}$, $j = 1, \ldots, \rho$, — разбиение отрезка $[0, T]$: $0 < t^*_1 \le t^*_2 \le \ldots \le t^*_{\rho-1} < T = t_\rho$. Полагая $v_j(t) = \chi_{[t^*_{j-1}, t^*_j]}(t)$, запишем условие (3.8) в виде

$$\sum_{i=1}^{r} g_{li}\, \omega^j_i \le (\gamma)_l, \quad j = 1, \ldots, \rho, \quad l = 1, \ldots, N. \tag{3.9}$$

Следствие 2. *В классе управлений кусочно-постоянных функций u с компонентами $u_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{\rho} \omega^j_i\, \chi_{[t^*_{j-1}, t^*_j]}(t)$, $i = 1, \ldots, r$, задача* (3.1)–(3.4) *принимает вид задачи линейного программирования* (3.5)–(3.7), (3.9), *где*

$$c_{ij} = \int\limits_{t^*_{j-1}}^{t^*_j} w_i(t)\, dt, \quad a^{1l}_{ij} = \int\limits_{t^*_{j-1}}^{t^*_j} w^1_{li}(t)\, dt, \quad a^{2l}_{ij} = \int\limits_{t^*_{j-1}}^{t^*_j} w^2_{li}(t)\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствий 1 и 2 состоит в непосредственном вычислении параметров рассматриваемой задачи с учетом конкретной структуры управляющих воздействий.

З а м е ч а н и е 3. Разбиение $\{t^*_j\}$ не связано, вообще говоря, с “импульсным” разбиением $\{\tau_k\}$, введенным ранее. При необходимости эти разбиения могут быть согласованы; такая необходимость иногда возникает в прикладных задачах.

Приведем иллюстрирующий пример.

П р и м е р. Рассмотрим на промежутке $[0, 3]$ систему управления

$$\begin{gathered} \dot x_1(t) = a\int\limits_0^t s\, \dot x_1(s)\, ds + b\, x_2(0) + c\int\limits_0^t \dot x_2(s)\, ds + A\, u_1(t), \\ \dot x_2(t) = d\int\limits_0^t \dot x_2(s)\, ds + h\, x_2(0) + B\,(u_2(t) - u_1(t)) \end{gathered} \tag{3.10}$$

с постоянными параметрами a, b, c, d, h, A, B и заданным начальным состоянием

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 6. \tag{3.11}$$

Зададим систему точек $\tau_k = k,\ k = 1, 2$ и будем рассматривать систему (3.10) в пространстве $DS^2(2)$. Функциональные ограничения-равенства (2.3) относительно фазовых переменных имеют вид

$$\int_0^3 x_1(t)\,dt = 2\int_0^3 x_2(t)\,dt, \tag{3.12}$$

а ограничения-неравенства (2.4) определены следующим образом:

$$\begin{gathered} x_1(3) \geq 1.2\,x_1(0), \quad x_2(3) \geq 1.5\,x_2(0), \\ \Delta_1^1 \geq 0, \quad \Delta_1^1 \leq 0.3\,x_2(1), \quad \Delta_1^2 = -\Delta_1^1, \quad \Delta_2^2 \geq 0, \quad \Delta_2^1 = -\Delta_2^2 \end{gathered} \tag{3.13}$$

(здесь $\Delta_k^i = (\Delta_k)_i$). Заданы поточечные ограничения (2.5) на управляющие воздействия

$$0 \leq u_1(t) \leq u_2(t), \quad t \in [0,\, 3].$$

Целевой функционал (2.2) задан равенством

$$\Lambda(x,u) = \int_0^3 u_2(t)\,dt + \Delta_1^1 + \Delta_2^2. \tag{3.14}$$

Задача решается в классе кусочно-постоянных управлений: $u_i(t) = \sum\limits_{k=1}^{3} u_i^k\,\chi_{[k-1,\,k)}(t),\ i = 1, 2.$

Приведем содержательную интерпретацию задачи. Система (3.10) описывает взаимодействие двух отраслей экономики, выпускающих два вида продукции в объеме x_1 и x_2 соответственно, u_1 — инвестиции в первую отрасль, u_2 — общий объем инвестиций (бюджет), $(u_2 - u_1)$ — инвестиции во вторую отрасль. В начальный момент времени вторая отрасль (скажем, добывающая) преобладает над первой (скажем, перерабатывающей): см. (3.11). Выделение бюджета происходит ежегодно в постоянном в фиксированный год объеме. Требуется найти минимальный суммарный за три года объем инвестиций, гарантирующий выполнение следующих условий. В интегральном выражении должно быть достигнуто двухкратное преобладание первой отрасли над второй: см. (3.12), при этом на конечный момент времени $t = 3$ должен гарантироваться рост выпуска продукции каждой отраслью по отношению к начальному показателю в указанной пропорции: см. (3.13). Скачки Δ_k^i компонент траектории означают мгновенную передачу части продукции одной отрасли для использования в другой (детали финансовых операций в рассматриваемой модели игнорируются).

Решение задачи (3.10)–(3.14) для значений параметров $a = 0.1,\ b = 0.3,\ c = -0.05,\ d = 0.2,\ A = 0.7,\ B = 0.5$ в рассматриваемом случае дает оптимальное управление, определяемое равенствами: $u_1^1 = 23.46,\ u_1^2 = 0,\ u_1^3 = 0,\ u_2^1 = 23.46,\ u_2^2 = 0,\ u_2^3 = 0,\ \Delta_1^1 = 2.60,\ \Delta_2^1 = -2.60,\ \Delta_1^2 = 0,\ \Delta_2^2 = 0$. Таким образом, минимальный трехлетний общий бюджет, достаточный для достижения поставленных целей с использованием передачи средств из одной отрасли в другую составляет 23.46 усл. ед. (все числовые значения приведены с точностью до 0.01). Отметим для сравнения, что вариант этой задачи в классе абсолютно непрерывных траекторий ($\Delta_k^i = 0,\ i, k = 1, 2$) требует минимальный трехлетний бюджет 31.89 усл. ед.

4. Один класс непрерывно-дискретных систем, допускающий приведение к системе с непрерывным временем

Степень общности оператора $\mathcal{L}$ в задаче (2.1)–(2.5) позволяет пользоваться теоремой 1 применительно и к формально более общим классам систем, например к непрерывно-дискретным (гибридным) функционально-дифференциальным системам [21;22]. Для описания непрерывно-дискретной системы зафиксируем множество $\mathcal{I} = \{t_0, t_1, \ldots, t_\mu\}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu = T$ и введем пространство $FD^\nu(\mu) = FD^\nu\{t_0, t_1, \ldots, t_\mu\}$ — пространство функций $z\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}^\nu$ с нормой, определенной равенством

$$||z||_{FD^\nu(\mu)} \;=\; \sum_{i=0}^{\mu} |z(t_i)|_\nu .$$

Рассмотрим гибридную систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + Fu + f, \\ z &= \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + g, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $f \in L^n,\ g \in FD^\nu(\mu)$, линейные операторы $\mathcal{T}_{ij},\ i,j = 1,2$, определены следующим образом.

Оператор $\mathcal{T}_{11}$ действует из пространства $DS^n(m)$ в пространство L^n:

$$(\mathcal{T}_{11}x)(t) \;=\; \int\limits_0^t K^1(t,s)\dot{x}(s)\,ds + A_0^1(t)x(0) + \sum_{k=1}^{m} A_k^1(t)\Delta x(\tau_k), \quad t \in [0,\, T].$$

Здесь ядро $K^1(t,s)$ с элементами $k_{ij}^1(t,s)$ удовлетворяет *условию* $\mathcal{K}$ с мажорантой ядра $\kappa^1(\cdot)$, элементы $(n \times n)$-матриц $A_k^1,\ k = 0,\ldots,m$ суммируемы на $[0,T]$.

Оператор $\mathcal{T}_{12}$ действует из пространства $FD^\nu(\mu)$ в пространство L^n:

$$(\mathcal{T}_{12}z)(t) = \sum_{\{j:t_j \le t\}} B_j^1(t)z(t_j), \quad t \in [0,T],$$

элементы $(n \times \nu)$-матриц $B_j^1,\ j = 0,\ldots,\mu$, суммируемы на $[0,T]$.

Оператор $\mathcal{T}_{21}$ действует из пространства $DS^n(m)$ в пространство $FD^\nu(\mu)$ по правилу

$$(\mathcal{T}_{21}x)(t_j) = \int\limits_0^{t_j} K_j^2(s)\dot{x}(s)ds \;+\; A_j^2 x(0) + \sum_{k=1}^{m} A_{jk}^2 \Delta x(\tau_k), \quad j = 0,1,\ldots,\mu,$$

с измеримыми и ограниченными в существенном на $[0,T]$ элементами $(\nu \times n)$-матриц K_j^2 и постоянными $(\nu \times n)$-матрицами $A_{jk}^2,\ j = 0,1,\ldots,\mu,\ k = 1,\ldots,m.$

Оператор $\mathcal{T}_{22}$ действует в пространстве $FD^\nu(\mu)$ и определен равенством

$$(\mathcal{T}_{22}z)(t_j) = \sum_{l=0}^{j-1} B_{jl}^2 z(t_l), \quad j = 1,\ldots,\mu,$$

где B_{jl}^2 — постоянные $(\nu \times \nu)$-матрицы.

Воспользуемся результатами работы [23] об уравнении с дискретным временем

$$z \;=\; \mathcal{T}_{22}z \;+\; g.$$

Общее решение этого уравнения имеет представление

$$z(t_i) = Z(t_i)\beta + (C_2\, g)\,(t_i), \quad i = 1,\ldots,\mu,$$

где $Z(\cdot)$ — фундаментальная матрица, β — произвольный вектор из $\mathbb{R}^\nu$, $C_2\colon FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$ — оператор Коши, порождаемый матрицей Коши $C_2(\cdot,\cdot)\colon (C_2 g)(t_i) = \sum\limits_{j=1}^{i} C_2(i,\, j)g(t_j),\ i = 1,\ldots,\mu.$

Решим второе уравнение гибридной системы относительно фазовой переменной с дискретным временем:

$$z = C_2 \mathcal{T}_{21} x + C_2 g + Z \beta.$$

Подставляя правую часть последнего равенства в первое уравнение системы, получим уравнение только относительно фазовой переменной с непрерывным временем:

$$\dot{x} = \mathcal{T}_{11} x + \mathcal{T}_{12} C_2 \mathcal{T}_{21} x + \mathcal{T}_{12} C_2 g + \mathcal{T}_{12} Z \beta + Fu + f.$$

Покажем, что это уравнение вида (2.1). Действительно, вопрос о слагаемых, содержащих $x(0)$ и переменные Δ в представлении $x(t) = (V\dot{x})(t) + x(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \chi_{[\tau_k, T]}(t)\Delta_k$ произвольного элемента $x \in DS^n(m)$, решается тривиально. Получим явное представление для оператора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12} C_2 \mathcal{T}_{21}$, ограничиваясь его действием на абсолютно непрерывную составляющую $y(t) = \displaystyle\int_0^t \dot{x}(s)\, ds$ элемента $x \in DS^n(m)$.

Теорема 2. *Главная часть оператора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{12} C_2 \mathcal{T}_{21} \colon AC^n \to L^n$ — оператор $Q_{\mathcal{T}} = \mathcal{T} V \colon L^n \to L^n$ — является интегральным оператором Вольтерра с ядром*

$$K^2(t, s) = \sum_{j: t_j \le t} \sum_{l=1}^{j} B_j(t)\, \chi_{[0, t_j]}(s)\, \chi_{[0, t_l]}(s)\, C_2(j, l) K_l^2(s),$$

удовлетворяющим условию $\mathcal{K}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы состоит в последовательном вычислении образов операторов $\mathcal{T}_{21}$, C_2 и $\mathcal{T}_{12}$ и элементарных преобразованиях с учетом свойств порождающих элементов. При этом оператор $\mathcal{T}_{21}$ применяется только к абсолютно непрерывной составляющей элемента $x \in DS^n(m)$ с нулевым начальным значением. Вольтерровость оператора $Q_{\mathcal{T}}$ вытекает из вольтерровости входящих в его определение операторов. Выполнение *условия* $\mathcal{K}$ вытекает из суммируемости на $[0, T]$ элементов матриц $B_j^1(t)$ и ограниченности в существенном на $[0, T]$ элементов матриц $K_j^2(s)$.

Таким образом, гибридная система (4.1) сводится к уравнению (2.1), в котором оператор $\mathcal{L}$ имеет вид (1.1) с ядром $K(t, s) = K^1(t, s) + K^2(t, s)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Габасов Р., Кириллова Ф. М.** Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: ЛИБРОКОМ, 2011. 272 с. ISBN: 978-5-397-01746-6 .
2. **Kolmanovskiĭ V. B., Schaĭkhet L. E.** Control of systems with aftereffect. N Y: AMS, 1996. 336 p. (Trans. Math. Monographs; vol. 157.) ISBN: 0-8218-0374-3 .
3. **Шевченко Г. В.** Численный метод решения задачи минимизации расхода ресурсов для линейных систем с постоянным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2014. № 10. С. 25–38.
4. **Шевченко Г. В.** Численное решение задачи оптимального быстродействия для линейных систем с постоянным запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. 2012. № 2. С. 100–105. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
5. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С.** Оптимальное дискретно-импульсное управление линейными системами // Автоматика и телемеханика. 2008. № 3. С. 103–125.
6. **Короткий Д .А.** Решение задачи оптимального управления для систем с запаздыванием // Вестн. Удмурт. ун-та. 2008. № 2. С. 61–62. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
7. **Габасов Р., Грушевич О. П., Кириллова Ф. М.** Оптимальное управление линейными системами с запаздыванием с учетом терминальных ограничений на их состояния // Автоматика и телемеханика. 2007. № 12. С. 3–20.

8. **Максимов В. П.** Некоторые вопросы теории управления функционально-дифференциальными системами // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2015. Т. 46, № 2. С. 112–119.
9. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
10. **Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.** Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.
11. **Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F.** Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications. N Y; Cairo: Hindawi Publ. Corporation, 2007. 314 p. ISBN: 977-5945-49-6/hbk .
12. **Анохин А. В.** О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1037–1040.
13. **Kurzweil Ja.** Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter // Czechoslovak Math. J. 1957. No. 7. P. 418–449.
14. **Завалищин С. Т., Сесекин А. Н.** Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
15. **Schwabik Š.** Generalized ordinary differential equations. Singapore: World Scientific, 1992. 392 p. ISBN: 978-981-4505-04-8 .
16. **Ashordia M.** On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1995. Vol. 6. P. 1–57.
17. **Максимов В. П., Румянцев А. Н.** Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Изв. вузов. Математика. 1993. Т. 37, № 5. С. 56–71.
18. **Максимов В. П.** О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 4. С. 601–606.
19. **Максимов В. П.** Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, Изд-во Прикам. социал. ин-та, Изд-во Перм. современ. социал.-гуманит. колледжа, 2003. 306 с.
20. **Максимов В. П.** Один вариант принципа максимума для линейных систем с последействием // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2015. Т. 20, № 5. С. 1284–1286.
21. **Максимов В. П., Чадов А. Л.** Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестн. Перм. ун-та. Сер. Экономика. 2011. № 2. С. 13–23.
22. **Chadov A. L., Maksimov V. P.** Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Funct. Differ. Equ. 2012. Vol. 19, no. 1–2. P. 49–62.
23. **Андрианов Д. Л.** Краевые задачи и задачи управления для линейный разностных систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 1993. Т. 37, № 5. С. 3–16.

Максимов Владимир Петрович Поступила 28.08.2017
д-р физ.-мат. наук, профессор
Пермский государственный национальный исследовательский университет,
г. Пермь
e-mail: maksimov@econ.psu.ru

REFERENCES

1. Gabasov R.F., Kirillova F.M. *Printsip maksimuma v teorii optimal'nogo upravleniya* [The maximum principle in optimal control theory]. Moscow, Editorial URSS, 2011, 272 p. ISBN: 978-5-397-01746-6 .
2. Kolmanovskiĭ V.B., Schaĭkhet L.E. *Control of systems with aftereffect.* N Y: American Mathematical Society, 1996, Ser. Translations of mathematical monographs, vol. 157, 336 p. ISBN: 0-8218-0374-3 .
3. Shevchenko G.V. A numerical method to minimize resource consumption by linear systems with constant delay. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 10, pp. 1732–1742. doi: 10.1134/S0005117914100026 .

4. Shevchenko G.V. Computational solution of time-optimal control problem for linear systems with delay. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 2, pp. 100–105 (in Russian).
5. Gabasov R., Kirillova F.M., Pavlenok N.S. Optimal discrete impulse control of linear systems. *Autom. Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 3, pp. 443–462. doi: 10.1134/S0005117908030107 .
6. Korotkii D.A. Solution of the optimal control problem with delay. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2008, no. 2, pp. 61–62 (in Russian).
7. Gabasov R., Grushevich O.P., Kirillova F.M. Optimal control of linear systems with delay taking into account terminal constraints on their states. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 12, pp. 2097–2112. doi: 10.1134/S0005117907120016 .
8. Maksimov V.P. Some questions of the control theory for functional differential systems. *Izv. IMI UdGU*, 2015, vol. 46, no. 2, pp. 112–119 (in Russian).
9. Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* Atlanta, GA: World Federation Publishers Company, 1995, Advanced Series in Mathematical Science and Engineering, 3, 172 p. ISBN: 1-885978-02-2 . Original Russian text published in Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p.
10. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoi teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii. Metody i prilozheniya* [Elements of the contemporary theory of functional differential equations. Methods and applications]. Moscow, Institute of Computer Science, 2002, 384 p. ISBN: 5-93972-112-5 .
11. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications.* N Y, Cairo, Hindawi Publishing Corporation, 2007, 314 p. ISBN: 977-5945-49-6/hbk .
12. Anokhin A.V. On linear impulse systems for functional-differential equations. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1986, vol. 33, no. 1, pp. 220–223.
13. Kurzweil Ja. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Math. J.*, 1957, vol. 7(82), no. 3, pp. 418–449.
14. Zavalishin S.T., Sesekin A.N. *Dynamic impulse systems: theory and applications.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1997, 256 p. ISBN: 0-7923-4394-8 . Original Russian text published in Zavalishin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye protsessy. Modeli i prilozheniya.* Moscow, Nauka Publ., 1991, 256 p.
15. Schwabik Š. *Generalized ordinary differential equations.* Singapore, World Scientific, 1992, 392 p. ISBN: 978-981-4505-04-8 .
16. Ashordia M. On the stability of solutions of the multipoint boundary value problem for the system of generalized ordinary differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 1995, vol. 6, pp. 1–57.
17. Maksimov V.P., Rumyantsev A.N. Boundary value problems and problems of pulse control in economic dynamics. Constructive study. *Russian Mathematics* (*Izv. VUZ*), 1993, vol. 37, no. 5, pp. 48–62.
18. Maksimov V.P. The Cauchy formula for a functional-differential equation. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 405–409.
19. Maksimov V.P. *Voprosy obshchei teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* [Questions of the general theory of functional differential equations]. Perm, Perm State University Publ., 2003, 306 p.
20. Maksimov V.P. A variant of the maximum principle for linear systems with aftereffect. *J. Tambov Univ. Rep. Ser. Nat. Tech. Sci.*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1284–1286 (in Russian).
21. Maksimov V.P., Chadov A.L. Hybrid models in economic dynamics models. *Perm University Herald. Economy*, 2011, no. 2, pp. 13–23 (in Russian).
22. Chadov A.L., Maksimov V.P. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times. *Funct. Differ. Equ.*, 2012, vol. 19, no. 1-2, pp. 49–62.
23. Andrianov D.L. Boundary value problems and control problems for linear difference systems with aftereffect, *Russian Mathematics* (*Izv. VUZ*), 1993, vol. 37, no. 5. pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on August 28, 2017.

Vladimir Petrovich Maksimov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Perm State University, Perm, 614990 Russia, e-mail: maksimov@econ.psu.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ В МОМЕНТ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА В СЛУЧАЕ ОДНОСТОРОННЕГО ПОВОРОТА

В. С. Пацко, А. А. Федотов

Исследуется трехмерное множество достижимости “в момент” для нелинейной управляемой системы, которую часто называют машиной Дубинса. Управляемый объект движется на плоскости с постоянной линейной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Случай, когда повороты возможны в обе стороны, рассматривался ранее. В данной работе изучается случай, когда поворот возможен только в одну сторону. Если ограничение на управление допускает движение по прямой, то доказано утверждение о том, что в любую точку на границе множества достижимости ведет кусочно-постоянное управление, количество переключений которого не больше двух. Кроме того, двумерные сечения множества достижимости по угловой координате являются выпуклыми. Если движение по прямой исключено в силу заданных ограничений на управление (в каждый текущий момент объект находится в состоянии поворота, при помощи управления выбирается в оговоренных пределах радиус поворота), то количество переключений кусочно-постоянного управления, ведущего на границу множества достижимости в момент, растет с увеличением момента времени, для которого строится множество достижимости. Подробно рассматривается случай, когда такой момент не больше времени поворота на угол 2π с наименьшим возможным радиусом. Здесь любое кусочно-постоянное управление, ведущее на границу, имеет не более двух переключений и сечения множества достижимости по угловой координате являются строго выпуклыми.

Ключевые слова: машина Дубинса, односторонний поворот, трехмерное множество достижимости, принцип максимума Понтрягина, кусочно-постоянные управления, выпуклость сечений множества достижимости.

V. S. Patsko, A. A. Fedotov. Reachable set at a certain time for a Dubins car in the case of a one-sided turn.

We study a three-dimensional reachable set “at a time” for a nonlinear control system often called a Dubins car. The controlled object (a car) moves in a plane with a constant linear velocity and bounded turning radius. The case where the car can turn left and right was studied earlier. In this paper, we investigate the case where the car can turn only in one direction. In the case where the constraints imposed on the control permit a straight line motion, we prove that the system can be guided to any point of the boundary of the reachable set by means of a piecewise-constant control with at most two switchings. Moreover, two-dimensional sections of the reachable set with constant angular coordinate are convex. If the constraints on the control forbid a straight line motion (which means that the car is turning at each time and the turning radius is chosen within prescribed limits), then the number of switchings of a piecewise-constant control guiding the system to the boundary of the reachable set grows with the growth of the time for which the reachable set is constructed. We consider in detail the case where this time is not greater than the time needed for a 2π turn with the smallest possible turning radius. In this case, any piecewise-constant control guiding the system to the boundary has at most two switchings, and the sections of the reachable set with constant angular coordinate are strictly convex.

Keywords: Dubins car, one-sided turn, three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, piecewise-constant control, convexity of sections of a reachable set.

MSC: 93C15, 93B03, 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-143-155

Введение

Данная статья посвящена исследованию множества достижимости в момент для машины Дубинса — одной из самых популярных в задачах математической теории управления и в прикладных работах моделей управляемого движения на плоскости. Динамика движения с постоянной по величине линейной скоростью и с оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости задается посредством нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение (декартовы координаты) объекта на плоскости, третья переменная есть угол направления вектора скорости. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего параметра принадлежат замкнутому отрезку.

В 1957 г. Л. Дубинс опубликовал работу [1] (относящуюся, скорее, к теории функций), из которой для указанной динамики с симметричным относительно нуля ограничением на управление вытекает решение задачи быстродействия. А именно им было установлено, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно-постоянного управления не более чем с двумя переключениями. Были выделены шесть возможных вариантов управления и показано, что при поиске оптимального программного управления можно ограничиться только ими.

Результаты, полученные Л. Дубинсом, оказались очень полезными для исследования движения объектов с ограничением на радиус поворота и с постоянной по величине линейной скоростью. Такие объекты стали называть "машина Дубинса". Необходимо отметить, однако, что подобными задачами еще в 1889 г. занимался А.А. Марков [2], исследуя вопросы оптимальной прокладки железных дорог. Р. Айзекс в своих работах по дифференциальным играм [3; 4] при описании движения автомобиля также использовал такую динамику.

Для указанной системы в рамках задачи быстродействия построен [5; 6] синтез оптимального управления обратной связи при симметричном относительно нуля ограничении на управление и в случае несимметричного ограничения. В работе [7] рассмотрен вариант машины Дубинса, обладающей только односторонним поворотом. Предложены способы решения задач быстродействия, возникающих при исследовании некоторых авиационных проблем. В работе [8] для машины Дубинса изучена задача оптимального по времени обхода набора точек на плоскости.

Динамика машины Дубинса используется для построения управления автономными колесными роботами (см., например, [9; 10]), при расчете траекторий полета в системах управления гражданской авиации [11], а также в прикладных работах, посвященных прокладке траекторий беспилотных летательных аппаратов в горизонтальной плоскости [12].

Для машины Дубинса множеством достижимости $G(t_f)$ *в момент* t_f назовем совокупность всех точек *трехмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в момент времени t_f из заданного начального фазового состояния (не теряя общности, считаем его нулевым) при помощи некоторого допустимого управления. Исследуемые в настоящей работе множества достижимости *в момент* следует отличать от множеств достижимости *к моменту*. Множество достижимости "к моменту" t_f представляет собой объединение всех предшествующих до момента t_f множеств достижимости "в момент". Построение множеств достижимости в момент для случая, когда возможны как левый, так и правый повороты, рассмотрено в статьях [13–15]. Множества достижимости к моменту исследованы в работах [9; 14; 16].

В этой статье мы рассматриваем построение множеств достижимости в момент для случая, когда поворот возможен только в одну сторону. А именно предполагается, что скалярное управление u принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, где $0 \leq u_1 < u_2 = 1$. При исследовании границы трехмерного множества достижимости в момент используем принцип максимума Понтрягина [17], который является необходимым условием приведения системы на границу множества достижимости [18]. Исследован вопрос о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. Показано, что при $u_1 = 0$ (т. е. когда допускается движение по прямой) сечения трехмерного множества достижимости в момент по угловой координате являются выпуклыми. Для случая $u_1 > 0$ аналогичный факт доказан в работе пока лишь при условии $t_f \leq 2\pi$.

1. Постановка задачи

Пусть динамика управляемого объекта (машина Дубинса) на плоскости x, y описывается следующей системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos\varphi, \\ \dot{y} &= \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \qquad u \in [u_1, u_2], \quad 0 \le u_1 < u_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

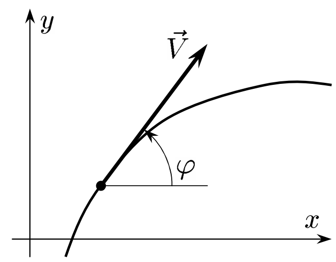


Рис. 1. Система координат, $\vec{V} = (\dot{x}, \dot{y})^{\mathsf{T}}$.

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости, φ — угол направления вектора скорости, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки (рис. 1), u — скалярный управляющий параметр. Величина линейной скорости постоянна и равна единице. Далее предполагаем, что $u_2 = 1$.

К представлению (1.1) с $u_2 = 1$ может быть приведена произвольная управляемая система третьего порядка, описывающая движение с постоянной по величине линейной скоростью и заданным диапазоном одностороннего поворота. Для этого требуется перемасштабирование по геометрическим координатам и по времени. Без ограничения общности в начальный момент времени $t_0 = 0$ полагаем нулевым начальное фазовое состояние: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ рассматриваются измеримые функции времени со значениями $u(t)$ из отрезка $[u_1, u_2]$. Угловой параметр φ считается неограниченным (принимает значения в интервале $(-\infty, \infty)$).

Исследуются множества достижимости *в момент* для системы (1.1) для двух вариантов ограничений на управление: $u_1 = 0$ и $u_1 > 0$.

2. Принцип максимума Понтрягина

Известно [18], что управления, которые приводят систему на границу множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП). Запишем соотношения принципа максимума для системы (1.1).

Пусть $u^*(\cdot)$ — некоторое допустимое управление и $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ — вызываемое им движение системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения для сопряженной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 \sin\varphi^*(t) - \psi_2 \cos\varphi^*(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

ПМП означает, что существует *ненулевое* решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$ системы (2.1), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_f]$ выполнено условие

$$\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u^*(t)$$
$$= \max_{u \in [u_1, u_2]} [\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u].$$

Условие максимума имеет форму

$$\psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \psi_3^*(t)u, \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_f]. \tag{2.2}$$

Видно, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ являются постоянными величинами. Обозначим их через ψ_1^* и ψ_2^*.

Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \mathrm{const} \neq 0$ на всем промежутке $[t_0, t_f]$. Стало быть, в этом случае имеем п.в. $u^*(t) = u_1$ или п.в. $u^*(t) = u_2$.

Пусть, по крайней мере, одно из чисел ψ_1^*, ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на уравнения динамики (1.1) и на уравнения сопряженной системы (2.1), можем записать выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^\mathsf{T}$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку смена знака функции $\psi_3^*(\cdot)$ влечет переключение управляющего воздействия с одного крайнего значения на другое, то прямую (2.3) часто называют [7; 19; 20] *прямой переключения* (сокращенно ПП).

В силу соотношения (2.2) если $\psi_3^*(t) > 0$ на некотором промежутке, то $u^*(t) = u_2$ п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость x, y идет по дуге окружности радиусом $1/u_2$ против часовой стрелки. Если $\psi_3^*(t) < 0$, то $u^*(t) = u_1$. Движение идет по дуге окружности радиусом $1/u_1$ против часовой стрелки в случае $u_1 > 0$ и представляет собой движение по прямой, если $u_1 = 0$.

Часть движения, на котором п.в. $u^*(t) = u_2$ или п.в. $u^*(t) = u_1 \neq 0$ и угол $\varphi^*(t)$ изменяется на 2π, назовем *циклом*. Траектория движения в проекции на плоскость x, y представляет собой в этом случае полную окружность.

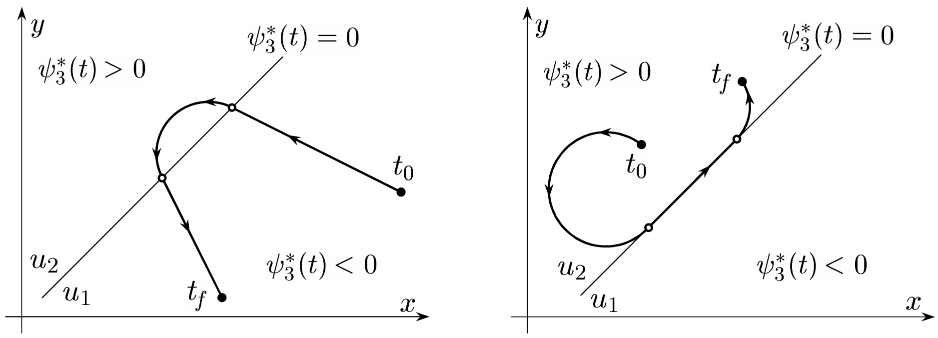
Если $\psi_3^*(t) = 0$ на некотором промежутке, то движение $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ на этом промежутке идет по прямой переключения (2.3). При этом п.в. $u^*(t) = 0$. Такой случай возможен лишь при $u_1 = 0$.

Таким образом, движение, удовлетворяющее ПМП, в проекции на плоскость x, y формируется из участков движения по дугам окружностей и прямолинейных участков. На каждом из них управление можно считать постоянным. Поэтому в дальнейшем при анализе управлений, удовлетворяющих ПМП, можем ограничиться *кусочно-постоянными* управлениями (предполагаем непрерывность справа в точках разрыва). Будет показана конечность числа переключений на промежутке $[t_0, t_f]$.

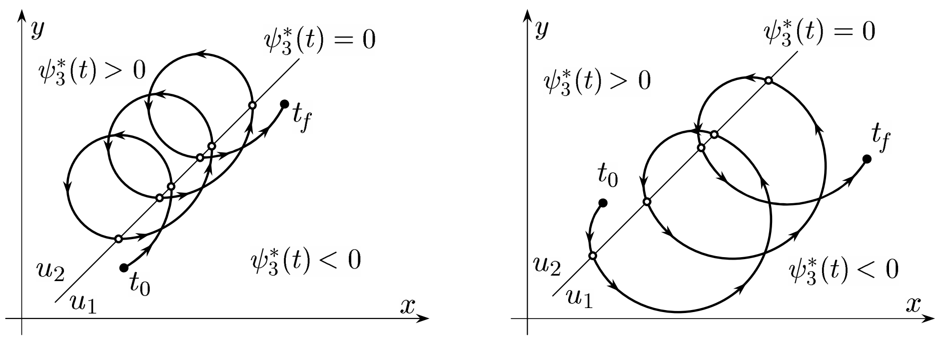
Если обе константы ψ_1^*, ψ_2^* равны нулю, то движение на всем промежутке $[t_0, t_f]$ идет либо с управлением u_1, либо с управлением u_2. Если хотя бы одна из констант не равна нулю, то возникает прямая переключения (2.3). Возможные варианты движений в этом случае показаны на рис. 2. Имеем $\psi_3^*(t) > 0$ в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$ и $\psi_3^*(t) < 0$ в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$.

Предложение 1. *Пусть движение системы* (1.1) *удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Тогда соответствующая траектория на плоскости x, y состоит из конечного числа дуг окружностей и прямолинейных участков* (*последнее возможно лишь при $u_1 = 0$*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся условием максимума (2.2). Достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одна из констант ψ_1^*, ψ_2^* не равна нулю. Рассмотрим движение между первым и последним моментами переключения управления. В эти моменты точка $(x^*(t), y^*(t))^\mathsf{T}$ находится на ПП. Промежуточные участки траектории, расположенные вне ПП, являются дугами окружностей, которые пересекаются с ПП (включая случай касания) под одинаковым углом (см. рис. 2). Продолжительность таких участков является одинаковой с каждой стороны относительно прямой (2.3). Следовательно, число переключений конечно. Стало быть, конечно и число участков движения с постоянным управлением (включая участки прямолинейного движения) вдоль всей траектории на промежутке $[t_0, t_f]$. □



а) Траектории $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ в случае $u_1 = 0$



б) Траектории $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ в случае $u_1 > 0$ (пример для $u_1 = 0.5$)

Рис. 2. Траектории принципа максимума и прямая переключения.

3. Случай $u_1 = 0$

В этом случае управления, удовлетворяющие условию максимума (2.2), принимают крайние значения $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$. Главная особенность заключается в том, что возможны два варианта прямолинейного движения (см. рис. 2):

1) на промежутках времени, когда $\psi_3^*(t) < 0$;

2) при движении по прямой переключения (на ней $\psi_3^*(t) = 0$).

3.1. Структура управлений, ведущих на границу множества достижимости

Предложение 2. *Пусть* $u_1 = 0$. *Тогда в любую точку на границе множества достижимости* $G(t_f)$ *можно попасть при помощи кусочно-постоянного управления* $u^*(\cdot)$, *принимающего значения* 0 *и* 1 *не более чем с двумя переключениями. При этом для последовательности управлений* $0, 1, 0$ *продолжительность второго участка траектории (где* $u^*(t) = 1$) *меньше* 2π.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$ очевиден. Рассмотрим случай, когда, по крайней мере, одна из констант ψ_1^*, ψ_2^* отлична от нуля. Для движения $t \to (x^*(t), y^*(t), \varphi^*(t))^{\mathsf{T}}$, ведущего на границу множества $G(t_f)$ (и удовлетворяющего ПМП), исследуем возможные варианты расположения начального геометрического положения относительно ПП.

1. Если в начальный момент t_0 выполнено условие $\psi_3^*(t_0) < 0$, то движение $(x(\cdot), y(\cdot))$ либо идет по прямой (в направлении начального вектора скорости $(\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0))^{\mathsf{T}}$) на всем промежутке $[t_0, t_f]$, либо достигает ПП под ненулевым углом в некоторый момент времени (не превышающий t_f) с последующим движением в полуплоскости $\psi_3^*(t) > 0$ по дуге окружности единичного радиуса с направлением против часовой стрелки. При этом продолжительность

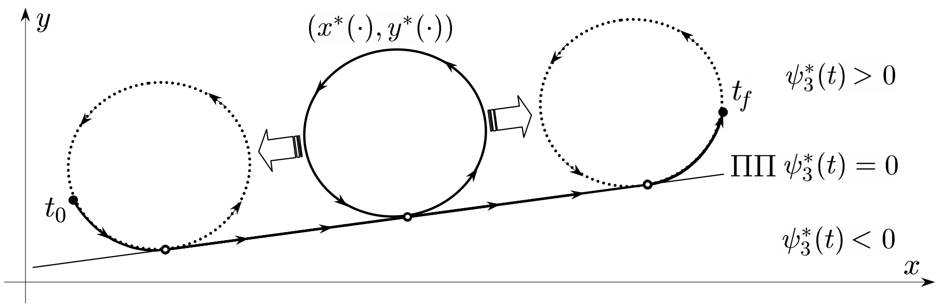


Рис. 3. Случай $u_1 = 0$. Перенос циклов в начало или в конец движения для варианта с касанием прямой переключения. Три движения приходят в одну и ту же точку множества $G(t_f)$.

движения по дуге окружности меньше, чем 2π. Если к моменту t_f траектория во второй раз приходит на ПП, то угол входа на нее остается тем же самым. Траектория переходит в полуплоскость $\psi_3^*(t) < 0$ и далее идет по прямой (см. рис. 2а). В результате имеем не более двух переключений. Средний участок (если он есть) имеет продолжительность меньше, чем 2π.

2. Пусть $\psi_3^*(t_0) > 0$. Тогда на некотором начальном участке времени движение идет по дуге окружности единичного радиуса против часовой стрелки. Возможны следующие подварианты.

2а) На всем промежутке $[t_0, t_f]$ движение идет с постоянным управлением $u^*(t) = u_2 = 1$ по дуге окружности (без переключений) в полуплоскости $\psi_3^*(t) > 0$.

2б) Движение системы (1.1) на плоскости x, y достигает ПП под ненулевым углом. В этом случае дальнейшее движение попадает в полуплоскость $\psi_3^*(t) < 0$, где продолжается по прямой линии.

2в) Траектория подходит к ПП по касательной (рис. 3). Тогда дальнейшее движение либо продолжается по дуге окружности, либо идет по ПП с возможностью схода в любой момент времени в полуплоскость $\psi_3^*(t) > 0$ по дуге окружности единичного радиуса. Если момент времени t_f достаточно большой, то могут возникать циклические движения. Однако такие циклы можно “перенести” к начальному или, наоборот, конечному участку движения с попаданием в момент t_f в ту же самую точку на границе множества $G(t_f)$. Т.е., сохранив общее количество циклов, можно добиться, чтобы они отсутствовали на среднем участке движения по ПП.

Таким образом, и в данном случае можно обойтись движениями не более чем с двумя переключениями.

3. Пусть $\psi_3^*(t_0) = 0$. В этом случае точка $(x(t_0), y(t_0))^{\mathsf{T}}$ находится на ПП.

3а) Если начальное направление движения в момент t_0 составляет ненулевой угол с ПП, то получаемое движение переходит либо в полуплоскость $\psi_3^*(t_0) > 0$, либо в полуплоскость $\psi_3^*(t_0) < 0$. В первом случае (аналогично варианту 2а)) возникает движение по дуге окружности (его продолжительность меньше 2π) с возможным возвратом на ПП и переходом в полуплоскость $\psi_3^*(t_0) < 0$, где движение идет по прямой. В результате получаем не более одного переключения. Во втором случае переключений нет и движение является прямолинейным в полуплоскости $\psi_3^*(t_0) < 0$ (аналогично варианту 1).

3б) Если начальный вектор скорости на плоскости x, y направлен вдоль ПП, то возникает движение, аналогичное рассмотренному в п. 2в). Здесь также можно ограничиться не более чем двумя переключениями с последовательностью управлений $1, 0, 1$. В качестве подвариантов возможны движения $1, 0$ и $0, 1$. Может быть также случай, когда движение идет только по окружности или только по ПП. $\square$

3.2. Выпуклость φ-сечений множества достижимости

Покажем, что сечения множества $G(t_f)$ по угловой координате φ являются выпуклыми и имеют форму круга либо части круга, отрезанной по хорде. Будем называть такие фигуры круговыми сегментами.

Рассмотрим движение на промежутке $[t_0, t_f]$ с двумя моментами переключения t_1, t_2 и с тремя промежутками постоянства управления. Фазовую точку в начальный момент $t_0 = 0$, как и ранее, возьмем в начале координат. Управление постоянно на промежутках $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, t_f]$. Значения управления на первом и третьем интервалах совпадают.

Теорема 1. *Пусть $u_1 = 0$. Тогда в любую точку на границе множества $G(t_f)$ ведет кусочно-постоянное управление не более чем с двумя переключениями. Каждое φ-сечение, $\varphi \in [0, t_f]$, множества $G(t_f)$ является выпуклым. Для крайних значений $\varphi = 0$ и $\varphi = t_f$ φ-сечение есть точка. При $\varphi \in (0, t_f)$ граница φ-сечения складывается из дуги окружности и отрезка прямой, если $\varphi < 2\pi$, и является окружностью, если $\varphi \geq 2\pi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Выпишем формулы фазового состояния системы (1.1) в момент t_f для варианта с последовательностью управлений $0, 1, 0$. Введем обозначения

$$T_{\text{BL}} = t_1 - t_0, \quad T_{u2} = t_2 - t_1, \quad T_{\text{BR}} = t_f - t_2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} x(t_f) &= T_{\text{BL}} + \sin(T_{u2}) + T_{\text{BR}} \cdot \cos(T_{u2}), \\ y(t_f) &= (1 - \cos(T_{u2})) \ + \ T_{\text{BR}} \cdot \sin(T_{u2}), \\ \varphi(t_f) &= \ T_{u2} \ . \end{aligned}$$

Условимся, что $T_{\text{BL}} > 0$ и $T_{\text{BR}} > 0$.

При фиксированном значении $\varphi(t_f) \in [0, t_f]$ движения, идущие на границу множества достижимости, характеризуются постоянным значением величины T_{u2}. Принимая во внимание равенство

$$T_{\text{BR}} = t_f - T_{u2} - T_{\text{BL}},$$

делаем вывод, что значения $x(t_f)$ и $y(t_f)$ линейно зависят от параметра T_{BL}. Совокупность таких точек образует прямолинейный интервал на плоскости x, y, определяемый допустимым набором значений T_{BL}: $0 < T_{\text{BL}} < (t_f - T_{u2})$.

Отметим, что вариант последовательности управлений 0, 1, 0 рассматривается лишь для $T_{u2} < 2\pi$, как это было отмечено в предложении 2.

2. Рассмотрим вариант с последовательностью управлений 1, 0, 1. На участке $[t_1,\, t_2]$ движение идет по ПП. Введем обозначения

$$T_{\text{SL}} = t_1 - t_0, \quad T_{u1} = t_2 - t_1, \quad T_{\text{SR}} = t_f - t_2.$$

Мы не будем исключать случаи, когда $T_{\text{SL}} = 0$ или $T_{\text{SR}} = 0$.

Интегрируя уравнения динамики (1.1), получим следующие соотношения, определяющие положение системы в момент t_f:

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \sin(T_{\text{SL}} + T_{\text{SR}}) + T_{u1} \cdot \cos(T_{\text{SL}}), \\ y(t_f) &= (1 - \cos(T_{\text{SL}} + T_{\text{SR}})) + T_{u1} \cdot \sin(T_{\text{SL}}), \\ \varphi(t_f) &= T_{\text{SL}} + T_{\text{SR}}. \end{aligned}$$

Здесь для фиксированного значения $\varphi(t_f)$ движения, идущие на границу множества достижимости, характеризуются постоянным значением суммы $T_{\text{SL}} + T_{\text{SR}}$. Величина $T_{u1} = t_f - T_{\text{SL}} - T_{\text{SR}}$ также является постоянной.

Совокупность таких точек $x(t_f), y(t_f)$ (получаемых для одного и того же значения $\varphi(t_f) \in (0, t_f))$ на плоскости x, y определяется изменением параметра T_{SL} в пределах от 0 до $t_f - T_{u1}$. Соответствующий годограф удовлетворяет уравнению окружности. Радиус окружности равен T_{u1}.

Рассмотрев возможный набор значений параметра T_{SL}, получаем либо дугу окружности, либо окружность целиком. Крайние точки дуги окружности соответствуют вариантам управлений $0, 1$ и $1, 0$ не более чем с одним переключением. Геометрическое положение системы (1.1) в момент t_f для данных управлений совпадает с предельными точками прямолинейного участка (на плоскости x, y), полученного ранее для варианта с последовательностью управлений $0, 1, 0$. Таким образом, имеем описание границы φ-сечений множества достижимости $G(t_f)$. Каждое сечение представляет собой либо круговой сегмент (для $\varphi < 2\pi$), либо целый круг (для $\varphi \geq 2\pi$). □

4. Случай $u_1 > 0$. Число переключений управления, ведущего на границу множества достижимости

В данном случае движение по прямой невозможно, а движения, идущие на границу множества $G(t_f)$, представляют собой в проекции на плоскость x, y набор дуг окружностей с радиусами $1/u_1$, $1/u_2$ и конечным числом переключений (предложение 1). Геометрические положения в моменты переключения управлений лежат на ПП. На любых двух соседних участках постоянства управления, *не примыкающих к моментам t_0 и t_f*, угол φ изменяется на постоянную величину, равную 2π (см. рис. 2). Постоянной является суммарная продолжительность движения по двум таким смежным участкам. Ее величина лежит в интервале $(2\pi/u_2, 2\pi/u_1)$.

Сказанное позволяет сформулировать следующее утверждение.

Предложение 3. *Число переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости $G(t_f)$, оценивается сверху величиной*

$$\begin{cases} \dfrac{t_f \cdot u_2}{\pi}\,, & \textit{если } t_f \cdot u_2 \textit{ кратно } 2\pi, \\ 2\Big[\dfrac{t_f \cdot u_2}{2\pi}\Big] + 2 & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь квадратными скобками обозначена целая часть действительного числа. Видно, что с увеличением t_f растет также и возможное число переключений управления (в отличие от разобранного выше случая $u_1 = 0$ и исследованного ранее [13; 15] случая $u_1 < 0$).

5. Случай $u_1 > 0$, $t_f \leq 2\pi$. Выпуклость φ-сечений множества достижимости

Напомним, что $u_2 = 1$.

Теорема 2. *Пусть $u_1 > 0$ и $t_f \leq 2\pi$. Тогда количество переключений управления, ведущего на границу множества достижимости $G(t_f)$, не больше двух. При двух переключениях реализуются лишь два варианта последовательности управлений: $(u_1, u_2, u_1), (u_2, u_1, u_2)$. Каждое φ-сечение, $\varphi \in [t_f \cdot u_1, t_f]$, множества $G(t_f)$ является выпуклым. Для крайних значений $\varphi = t_f \cdot u_1$ и $\varphi = t_f$ φ-сечения являются одноточечными. При $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ граница φ-сечения состоит из двух дуг окружностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху для количества переключений следует из формулы (4.1).

Перейдем к описанию φ-сечений множества $G(t_f)$. Используя последнее уравнение в записи динамики (1.1), получаем отрезок возможных значений φ в множестве $G(t_f)$: $[t_f \cdot u_1, t_f]$. Для крайних значений $\varphi = t_f \cdot u_1$ и $\varphi = t_f$ управление определяется однозначно ($u(t) \equiv u_1$ и $u(t) \equiv u_2 = 1$) и каждое из крайних φ-сечений состоит из одной точки:

$$\begin{cases} (\sin\varphi/u_1, (1-\cos\varphi)/u_1)^{\mathsf{T}}, & \text{если } \varphi = t_f \cdot u_1, \\ (\sin\varphi, (1-\cos\varphi))^{\mathsf{T}}, & \text{если } \varphi = t_f. \end{cases}$$

Ниже считаем, что значение $\varphi \in (t_f{\cdot}u_1, t_f)$ зафиксировано.

1. Рассмотрим движение с одним переключением. Пусть управление на первом участке равно u_1, а на втором совпадает с $u_2 = 1$. Обозначим через T_{u1} длину первого участка постоянства управления, а через T_{u2} — второго. Имеем $T_{u1} < 2\pi$, $T_{u2} < 2\pi$. Справедливы соотношения

$$\varphi = T_{u1}{\cdot}u_1 + T_{u2}, \quad t_f = T_{u1} + T_{u2}.$$

Отсюда получаем, что при фиксированном значении φ величины T_{u1}, T_{u2}, а стало быть и момент переключения, определяются однозначно. Таким образом, в любом φ-сечении множества $G(t_f)$ при $\varphi \in (t_f{\cdot}u_1, t_f)$ для последовательности управлений u_1, u_2 имеем одну точку:

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi + (1/u_1 - 1)\sin(T_{u1}{\cdot}u_1) \\ 1/u_1 - \cos\varphi - (1/u_1 - 1)\cos(T_{u1}{\cdot}u_1) \end{pmatrix}.$$

Аналогично для последовательности управлений u_2, u_1, используя обозначения T_{u2} и T_{u1} длин соответствующих участков управления, получаем координаты точки в рассматриваемом φ-сечении множества $G(t_f)$:

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi/u_1 - (1/u_1 - 1)\sin(T_{u2}) \\ 1 - \cos\varphi/u_1 + (1/u_1 - 1)\cos(T_{u2}) \end{pmatrix}.$$

2a) Рассмотрим вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_1, u_2, u_1. Длину первого участка обозначим через T_{BL}, а последнего участка — через T_{BR}. Пусть T_{u2} — длина среднего участка. Имеем

$$\varphi = T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + T_{u2} + T_{\text{BR}}{\cdot}u_1, \quad t_f = T_{\text{BL}} + T_{u2} + T_{\text{BR}}.$$

Отсюда вытекает

$$T_{u2} = \frac{\varphi - t_f{\cdot}u_1}{1 - u_1}, \quad T_{\text{BL}} + T_{\text{BR}} = \frac{t_f - \varphi}{1 - u_1}.$$

Следовательно, длительность среднего участка и суммарная длительность первого и последнего участков — постоянные величины при фиксированном значении φ. Полученное семейство допустимых управлений является однопараметрическим. В качестве параметра возьмем величину T_{BL} с интервалом возможных значений $T_{\text{BL}} \in (0, T_{\text{B}})$, где $T_{\text{B}} = T_{\text{BL}} + T_{\text{BR}} = \text{const}$.

Соответствующие точки $(x_{\text{BB}}(T_{\text{BL}}), y_{\text{BB}}(T_{\text{BL}}))^{\mathsf{T}}$ φ-сечений множества $G(t_f)$ в результате интегрирования уравнений (1.1) имеют вид

$$\frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1) \\ 1 - \cos(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + T_{u2}) - \sin(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1) \\ \cos(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1) - \cos(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + T_{u2}) \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi - \sin(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + T_{u2}) \\ \cos(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + T_{u2}) - \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$\begin{pmatrix} x_{\text{BB}}(T_{\text{BL}}) \\ y_{\text{BB}}(T_{\text{BL}}) \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1}\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} - 2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right)\sin\left(\frac{T_{u2}}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + \dfrac{T_{u2}}{2}\right) \\ \sin\left(T_{\text{BL}}{\cdot}u_1 + \dfrac{T_{u2}}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Найденный набор точек $(x_{\text{BB}}(T_{\text{BL}}), y_{\text{BB}}(T_{\text{BL}}))^{\mathsf{T}}$, образуемый последовательностью управлений u_1, u_2, u_1 при фиксированных значениях $u_1, \varphi, t_f, T_{u2}$, представляет собой дугу окружности с центром в точке $\left(\dfrac{1}{u_1}\right)\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix}$. Радиус окружности равен

$$2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right)\sin\left(\frac{T_{u2}}{2}\right),$$

а угловой раствор дуги (5.1) определяется диапазоном изменения величины $T_{\text{BL}} \cdot u_1$ и составляет

$$\frac{u_1(t_f - \varphi)}{1 - u_1} \, .$$

2б) Рассмотрим второй вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_2, u_1, u_2. Обозначим длительность соответствующих участков постоянства управления через $T_{\text{SL}}, T_{u1}, T_{\text{SR}}$. По аналогии с исследованным выше первым вариантом последовательности управлений имеем

$$T_{\text{S}} = T_{\text{SL}} + T_{\text{SR}} = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1} \, , \qquad T_{u1} = \frac{t_f - \varphi}{1 - u_1} \, .$$

Получаемый набор точек определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x_{\text{SS}}(T_{\text{SL}}) \\ y_{\text{SS}}(T_{\text{SL}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} + 2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right) \sin\left(\frac{T_{u1} \cdot u_1}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(T_{\text{SL}} + \dfrac{T_{u1} \cdot u_1}{2}\right) \\ \sin\left(T_{\text{SL}} + \dfrac{T_{u1} \cdot u_1}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

и диапазоном возможных значений параметра $T_{\text{SL}} \in (0, T_{\text{S}})$. Это тоже дуга окружности с центром в точке $\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix}$ и радиусом $2\left(\dfrac{1}{u_1} - 1\right) \sin\left(\dfrac{T_{u1} \cdot u_1}{2}\right)$. Угловой раствор дуги определяется диапазоном изменения величины T_{SL} и вычисляется по формуле

$$T_{\text{S}} = \frac{(\varphi - t_f \cdot u_1)}{1 - u_1} \, .$$

3. Нетрудно установить, что построенные дуги (5.1) и (5.2) совпадают в крайних предельных точках. А именно

$$\begin{pmatrix} x_{\text{BB}}(0) \\ y_{\text{BB}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{SS}}(T_{\text{S}}) \\ y_{\text{SS}}(T_{\text{S}}) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_{\text{BB}}(T_{\text{B}}) \\ y_{\text{BB}}(T_{\text{B}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{SS}}(0) \\ y_{\text{SS}}(0) \end{pmatrix}.$$

Указанные предельные точки соответствуют рассмотренному выше управлению с одним переключением.

Итак, анализируя возможные варианты движения системы (1.1), удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, получаем совокупность положений на плоскости x, y в виде замкнутой кривой, образованной двумя дугами окружностей, состыкованными в крайних точках.

4. Рассмотрим перемещение точки по дуге (5.1), определяемое параметром T_{BL}. При увеличении параметра T_{BL} от 0 до T_{B} данное перемещение сопровождается поворотом касательного вектора по часовой стрелке. Аналогично перемещение по дуге (5.2) при уменьшении параметра T_{SL} от T_{S} до 0 также дает поворот по часовой стрелке. Суммарный угловой раствор дуг (5.1) и (5.2) вычисляем по формуле

$$\frac{(\varphi - t_f \cdot u_1)}{1 - u_1} + \frac{u_1(t_f - \varphi)}{1 - u_1} \; = \; \varphi \, .$$

В соответствии с предположением $t_f \leq 2\pi$ и учитывая, что $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$, имеем $\varphi < 2\pi$.

Таким образом, полученная кривая представляет собой границу φ-сечения множества $G(t_f)$. Такое сечение при $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ является строго выпуклым, его граница составляется из двух дуг окружностей. Для крайних значений φ соответствующие сечения являются одноточечными. □

З а м е ч а н и е 1. В формулировках предложений 2, 3 и теорем 1, 2 говорится об управлениях, ведущих на границу множества $G(t_f)$. Однако в доказательствах используется лишь то, что такие движения удовлетворяют ПМП. Стало быть, итоговые формулы, представленные в доказательствах теорем $1, 2$, дают полное описание кривых в каждом φ-сечении, куда приходят движения, удовлетворяющие ПМП. В силу установленного свойства выпуклости такие кривые лежат на границе соответствующего φ-сечения. Таким образом, для исследуемых задач ПМП есть не только необходимое, но и достаточное условие, характеризующее управления, ведущие на границу множества $G(t_f)$.

З а м е ч а н и е 2. Если $u_1 = 0$, то кусочно-постоянное управление, удовлетворяющее ПМП и ведущее в некоторую точку на границе множества $G(t_f)$, не обязательно является единственным. В случае $u_1 > 0$ для каждой точки на границе $G(t_f)$ существует только одно кусочно-постоянное управление, ведущее в эту точку.

6. Заключение

Работа содержит исследование множества достижимости в момент для машины Дубинса при ограничении на поворот, который по постановке задачи возможен лишь в одну сторону. При отсутствии запрета на движения по прямой доказано утверждение, определяющее число переключений (не более двух) и структуру управлений, порождающих границу множества достижимости. Такое утверждение дополняет результаты, полученные ранее при отсутствии запрета на правый и левый повороты. В случае запрета движения по прямой число переключения управлений, ведущих на границу множества достижимости, зависит от времени. Приведена соответствующая оценка сверху.

В рамках принятых предположений доказана выпуклость сечений множества достижимости по угловой координате В дальнейшем для задачи с односторонним поворотом будет сделана попытка доказать выпуклость сечений и в более общем случае. В целом трехмерное множество достижимости в момент выпуклым не является. Это подтверждается результатами численных расчетов.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American J. Math. 1957. Vol. 79, no. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560 .
2. **Марков А.А.** Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. мат. общ. 1889. 2-я сер. Т. 1, вып. 2. С. 250–276.
3. **Isaacs R.** Games of pursuit / Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
5. **Pecsvaradi T.** Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automatic Control. 1972. Vol. 17, no. 6. P. 763–772. doi: 10.1109/TAC.1972.1100160 .
6. **Bakolas E., Tsiotras P.** Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov–Dubins problem // J. Optim. Theory Appl. 2011. Vol. 150, no. 2. P. 233–250. doi: 10.1007/s10957-011-9841-3 .
7. **Choi H.** Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: Dissertation for the degree of doctor of philosophy / University of Michigan. Michigan, 2014. 134 p.
8. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с. ISBN: 978-5-8295-0381-9 .
9. Robot motion planning and control / ed. J.-P. Laumond // Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). ISBN: 978-3-540-76219-5 .
10. **Laumond J.-P., Mansard N., Lasserre J.-B.** Optimality in robot motion: Optimal versus optimized motion // Communications of the ACM. 2014. Vol. 57, no. 9. P. 82–89. doi: 10.1145/2629535 .
11. Автоматизированные системы управления воздушным движением: уч. пос. / Р.М. Ахмедов [и др.]; под ред. С. Г. Пятко, А.И. Красов. СПб.: Политехника, 2004. 446 с. ISBN: 5-7325-0779-5 .

12. **Meyer Y., Shima T., Isaiah P.** On Dubins paths to intercept a moving target // Automatica. 2015. Vol. 53. P. 256–263. doi: 10.1016/j.automatica.2014.12.039 .
13. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
14. **Fedotov A., Patsko V., Turova V.** Reachable sets for simple models of car motion // Recent Advances in Mobile Robotics / ed. A.V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. doi: 10.5772/26278 . URL: http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf.
15. **Симоненко А.С., Федотов А.А.** Множество достижимости для автомобиля Дубинса при несимметричном ограничении на управление [e-resource] // MPMA 2017 (SoProMat 2017), Modern Problems in Mathematics and its Applications: Proc. 48th International Youth School-Conf. (Yekaterinburg, February 5 – February 11, 2017). CEUR-WP, Vol. 1894. P. 79–87. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf .
16. **Takei R., Tsai R.** Optimal trajectories of curvature constrained motion in the Hamilton–Jacobi formulation // J. Sci. Comp. 2013. Vol. 54, no. 2-3. P. 622–644. doi: 10.1007/s10915-012-9671-y .
17. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе [и др.] М.: Наука, 1969. 384 с.
18. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
19. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями (Вена, сентябрь 1967): Тр. Второго Междунар. симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства / ред. Б.Н. Петрова, И.С. Уколова. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
20. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления: сб. науч. тр. / Институт математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1973. С. 91–101.

Пацко Валерий Семенович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Поступила 31.01.2018

Федотов Андрей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: andreyfedotov@mail.ru

REFERENCES

1. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. doi: 10.2307/2372560 .
2. Markoff A.A. Some examples of the solution of special problems on maxima and minima. *Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 1989, série 2, vol. 1, no. 2, pp. 250–276 (in Russian).
3. Isaacs R. *Games of pursuit.* Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. Isaacs R. *Differential games.* N Y, John Wiley and Sons, 1965, 384 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial'nye igry.* Moscow, Mir Publ., 1967, 479 p.
5. Pecsvaradi T. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, vol. 17, no. 6, pp. 763–772. doi: 10.1109/TAC.1972.1100160 .

6. Bakolas E., Tsiotras P. Optimal synthesis of the asymmetric sinistral/dextral Markov–Dubins problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2011, vol. 150, no. 2, pp. 233–250. doi: 10.1007/s10957-011-9841-3 .
7. Choi H. *Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint*. Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, Michigan, University of Michigan, 2014, 134 p.
8. Berdyshev Yu.I. *Nelineinye zadachi posledovatel'nogo upravleniya i ikh prilozhenie*. [Nonlinear Problems in Sequential Control and Their Application]. Ekaterinburg: IMM UB RAS, 2015, 193 p. ISBN: 978-5-8295-0381-9 .
9. Laumond J.-P. (ed.) *Robot motion planning and control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, 354 p. ISBN: 978-3-540-76219-5 .
10. Laumond J.-P., Mansard N., Lasserre J.-B. Optimality in robot motion: Optimal versus optimized motion. *Communications of the ACM*, 2014, vol. 57, no. 9, pp. 82–89. doi: 10.1145/2629535 .
11. Pyatko S.G., Krasov A.I. et al. *Avtomatizirovannye sistemy upravleniya vozdushnym dvizheniem*. [Automated Air Traffic Control System]. Saint Petersburg, Polytechnic Publ., 2004, 446 p. ISBN: 5-7325-0779-5 .
12. Meyer Y., Shima T., Isaiah P. On Dubins paths to intercept a moving target. *Automatica*, 2015, vol. 53, pp. 256–263. doi: 10.1016/j.automatica.2014.12.039 .
13. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comp. Systems Sci. International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
14. Fedotov A., Patsko V., Turova V. Reachable sets for simple models of car motion. *Recent Advances in Mobile Robotics*, A.V. Topalov (ed.). Rijeka, Croatia: InTech, 2011, pp 147–172. doi: 10.5772/26278 . Available at: http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011/Intech_paper.pdf.
15. Simonenko A.S., Fedotov A.A. Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control [e-resource]. MPMA 2017 (SoProMat 2017), *Modern Problems in Mathematics and its Applications*: Proc. 48th International Youth School-Conf., Yekaterinburg, 2017, CEUR-WP, vol. 1894, pp. 79–87 (in Russian). Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf (date of access: 07.01.2018).
16. Takei R., Tsai R. Optimal trajectories of curvature constrained motion in the Hamilton-Jacobi formulation. *J. Sci. Comp.*, 2013, vol. 54, no. 2-3, pp. 622–644. doi: 10.1007/s10915-012-9671-y .
17. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, L.W. Neustadt (ed.), Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., N Y, London, 1962, 360 p. ISBN 2-88124-077-1 . Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 384 p.
18. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N Y: Wiley & Sons, 1967, 589 p. ISBN: 0471522635 . Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*. Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
19. Hamza M.H., Kohlas I., Runggaldier W. Time-optimal trajectories in a pursuit problem. *Control by space vehicles and vessels*, Vien, 1967, Proc. of the 2-nd International IFAC Symposium on Automatic Control on Peace Using the Cosmic Space, B.N. Petrov, I.S. Ukolov (eds.), Moscow, Nauka, 1971, pp. 410–418 (in Russian).
20. Berdyshev Yu.I. Synthesis of optimal control for a third-order system. *Problems of Analysis of Nonlinear Automatic Control Systems*, Sverdlovsk: Inst. Mat. Mekh., UNTs AN USSR, 1973, pp. 91–101 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on January 31, 2018.

Valerii Semenovich Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru .

Andrei Anatol'evich Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: andreyfedotov@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

Н. Н. Петров

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей одного убегающего с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}z_i = az_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (1,2)$ функции f. Множество допустимых управлений V — строго выпуклый компакт, a — вещественное число. Целью группы преследователей является поимка убегающего не менее чем m различными преследователями, при этом моменты поимки могут не совпадать. Терминальные множества — начало координат. Преследователи используют квазистратегии. В терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, многократная поимка, преследователь, убегающий.

N. N. Petrov. A multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives.

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider a problem of pursuing one evader by a group of pursuers with equal capabilities of all participants. The dynamics of the problem is described by the system

$$D^{(\alpha)}z_i = az_i + u_i - v, \quad u_i, v \in V,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of order $\alpha \in (1,2)$ of the function f. The set of admissible controls V is a strictly convex compact set and a is a real number. The aim of the group of pursuers is to catch the evader by at least m different pursuers, possibly at different times. The terminal sets are the origin. The pursuers use quasi-strategies. We obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. The investigation is based on the method of resolving functions, which allows us to obtain sufficient conditions for the termination of the approach problem in some guaranteed time.

Keywords: differential game, group pursuit, multiple capture, pursuer, evader.

MSC: 49N75, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-156-164

Введение

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–4], причем, кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [5–7] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В настоящей работе рассматривается одна задача о многократной поимке группой преследователей одного убегающего при условии, что все участники обладают равными возможностями, а движение игроков описывается уравнениями с дробными по Капуто производными.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки(проект 1.5211.2017/8.9).

Получены достаточные условия поимки. Н. Л. Григоренко [8] получил необходимые и достаточные условия многократной поимки для задачи простого преследования. Условия одновременной многократной поимки для задачи простого преследования с равными возможностями всех участников получены А. И. Благодатских [9]. Задача о многократной поимке убегающего в примере Л.С. Понтрягина представлена в работах [10–13]. Многократная поимка в линейных дифференциальных играх рассматривалась в [2; 14–16]. Задача группового преследования с фазовыми ограничениями и дробными производными порядка $\alpha \in (0,1)$ рассматривалась в [17].

1. Постановка задачи

Определение 1 [18]. Пусть $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ — функция такая, что f' — абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$, $\alpha \in (1,2)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)}f$ вида

$$\big(D^{(\alpha)}f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{f''(s)}{(t-s)^{\alpha-1}}\,ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}\,ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и один убегающий E. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \dot{x}_i(0) = x_i^1, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения убегающего E имеет вид

$$D^{(\alpha)}y = ay + v, \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $\alpha \in (1,2)$, $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y^0$ для всех i.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$D^{(\alpha)}z_i = az_i + u_i - v, \quad z_i(0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0, \quad \dot{z}_i(0) = z_i^1 = x_i^1 - y^1, \quad u_i, v \in V. \tag{1.3}$$

Здесь и всюду далее $i \in I = \{1, \ldots, n\}$. Обозначим $z^0 = \{z_i^0, z_i^1\}$ — вектор начальных позиций. Считаем, что $z_i^1 \neq 0$ для всех i.

Определение 2. Будем говорить, что задана квазистратегия U_i преследователя P_i, если определено отображение U_i, ставящее в соответствие начальным позициям z^0, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

Определение 3. В игре происходит m-кратная поимка (при $m = 1$ — поимка), если существуют момент $T(z^0)$, квазистратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для всякой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V, t \in [0, T(z^0)]$, существуют моменты $\tau_1, \ldots \tau_m \in [0, T(z^0)]$, попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_m \in I$, что $z_{i_s}(\tau_s) = 0, s = 1, \ldots, m$.

Введем следующие обозначения.

$E_\rho(z,\mu)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)}$ — обобщенная функция Миттаг — Лефлера [20, с. 17],

$$f_i(t)=\begin{cases} t^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)z_i^0+t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,2)z_i^1, \text{ если } a<0,\\ \dfrac{z_i^0}{t}+z_i^1, \text{ если } a=0,\end{cases}$$

$$\lambda(z,v)=\sup\{\lambda\geqslant 0\big|\ -\lambda z\in V-v\},\ \gamma=-a\Gamma(2-\alpha),$$

$$\Omega(l)=\{(i_1,\ldots,i_l)\big|\ i_1,\ldots,i_l\in I \text{ и попарно различны}\},$$

$$\delta_0^+=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(z_j^1,v),\quad \delta_0^-=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(-z_j^1,v),$$

$$\delta_t^+=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(f_j(t),v),\quad \delta_t^-=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda(-f_j(t),v),$$

$$\delta_0=\min\{\delta_0^+,\delta_0^-\},\quad \delta_t=\min\{\delta_t^+,\delta_t^-\},$$

$$r(t,s)=\begin{cases}1, \text{ если } E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)\geqslant 0,\\ -1, \text{ если } E_{1/\alpha}(a(t-s)^\alpha,\alpha)<0,\end{cases}$$

$$\overline{E}(t,s)=(t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}\left(a(t-s)^\alpha,\alpha\right).$$

2. Достаточные условия поимки

2.1. Достаточные условия поимки при $a<0$

Лемма 1. *Пусть $a<0,\delta_0>0$. Тогда существует $T>0$ такой, что для всех $t>T$ справедливо неравенство $\delta_t>0.5\gamma\delta_0$.*

Доказательство. При $t\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [19, формула (1.2.4)]:

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)}+O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),$$
$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,2)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(2-\alpha)}+O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),$$

где под $O(g)$ при $t\to+\infty$ понимается конкретная функция G такая, что функция G/g является ограниченной на $(A,+\infty)$ при некотором $A>0$. Следовательно, функции f_i представимы в виде

$$f_i(t)=-\frac{z_i^0}{at\Gamma(1-\alpha)}+\frac{z_i^1}{\gamma}+O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big)$$

и поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty}f_i(t)=\dfrac{z_i^1}{\gamma}$. Так как функция λ непрерывна [2, лемма 1.3.13], для всех $v\in V$ верно $\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(f_i(t),v)=\lambda\Big(\dfrac{z_i^1}{\gamma},v\Big)$. Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\delta_t^+=\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega(m)}\min_{j\in\Lambda}\lambda\Big(\frac{z_j^1}{\gamma},v\Big)=\gamma\delta_0^+.$$

Аналогично $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta_t^-=\gamma\delta_0^-$. Отсюда существует $T>0$ такой, что для всех $t>T$ справедливо неравенство $\delta_t>0.5\gamma\delta_0$. □

Лемма 2. *Пусть* $a < 0, \delta_0 > 0$. *Тогда существует* $T_0 > 0$ *такой, что для любой измеримой функции* $v(\cdot), v(t) \in V$ *найдется множество* $\Lambda \in \Omega(m)$ *такое, что для всех* $j \in \Lambda$ *справедливо неравенство*

$$T_0^{\alpha-1} \int\limits_0^{T_0} \left|\overline{E}(T_0, s)\right| \lambda(f_j(T_0) r(T_0, s), v(s))\, ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1 следует, что существует момент $T_1 > 0$ такой, что для всех $t > T_1$ справедливо неравенство $\delta_t > 0.5\gamma\delta_0$. Пусть $T > T_1$. Рассмотрим функции $(t \in [0, T])$

$$h_i(t) = t^{\alpha-1} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \lambda(f_i(T) r(T, s), v(s))\, ds.$$

Тогда

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} h_j(t) \geqslant \max_{\Lambda\in\Omega(m)} t^{\alpha-1} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \min_{j\in\Lambda} \lambda(f_j(T) r(T, s), v(s)) ds. \tag{2.1}$$

Так как для любых неотрицательных чисел $\{a_\Lambda\}_{\Lambda\in\Omega(m)}$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} a_\Lambda \geqslant \frac{1}{C_n^m} \sum_{\Lambda\in\Omega(m)} a_\Lambda,$$

то из (2.1) следует неравенство

$$\begin{aligned}\max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} h_j(t) &\geqslant \frac{t^{\alpha-1}}{C_n^m} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \sum_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \lambda(f_j(T) r(T, s), v(s)) ds \\ &\geqslant \frac{t^{\alpha-1}}{C_n^m} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \lambda(f_j(T) r(T, s), v(s))\, ds \\ &\geqslant \frac{\delta_0\gamma t^{\alpha-1}}{2C_n^m} \int\limits_0^t \left|\overline{E}(t, s)\right| ds \geqslant \frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m} t^{\alpha-1} \int\limits_0^t \overline{E}(t, s)\, ds.\end{aligned} \tag{2.2}$$

В силу [20, формула (1.15)]

$$\int\limits_0^t \overline{E}(t, s)\, ds = t^\alpha E_{1/\alpha}\left(at^\alpha, \alpha + 1\right).$$

Поэтому из (2.2) получаем

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} h_j(T) \geqslant \frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m} T^{\alpha-1} T^\alpha E_{1/\alpha}(aT^\alpha, \alpha+1) = \frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m} T^{2\alpha-1} E_{1/\alpha}(aT^\alpha, \alpha+1).$$

Из [19, формула (1.2.4)] следует, что при $t \to +\infty$ справедливо асимптотическое представление

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha, \alpha+1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big).$$

Поэтому при $T \to +\infty$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} h_j(T) \geqslant \frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m}\Big(-\frac{T^{\alpha-1}}{a} + O\Big(\frac{1}{T}\Big)\Big).$$

Так как $a < 0,\ \alpha - 1 > 0$, то существует $T_0 > T_1$ такой, что

$$\frac{\delta_0\gamma}{2C_n^m}\Big(-\frac{T^{\alpha-1}}{a} + O\Big(\frac{1}{T}\Big)\Big) \geqslant 1.$$

Получили, что существует $T_0 > 0$ такой, что $\max\limits_{\Lambda\in\Omega(m)} \min\limits_{j\in\Lambda} h_j(T_0) \geqslant 1$. Следовательно, существует $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что $h_j(T_0) \geqslant 1$ для всех $j \in \Lambda_0$. Что и требовалось доказать. □

Определим число

$$\hat{T} = \inf\Big\{t \mid \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} t^{\alpha-1}\int_0^t |\overline{E}(t,s)|\lambda(f_j(t)r(t,s), v(s))\,ds \geqslant 1\Big\}.$$

В силу леммы 2 число $\hat{T} < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $a < 0,\ \delta_0 > 0$. Тогда в игре происходит m-кратная поимка.*

Доказательство. Пусть $v(s),\ s \in [0, \hat{T}]$, — произвольное управление убегающего. Рассмотрим функцию

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \hat{T}^{\alpha-1}\int_0^t |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_j(\hat{T})r(\hat{T},s), v(s))\,ds.$$

Обозначим через $T_0 > 0$ первый корень данной функции. Отметим, что T_0 существует в силу леммы 2 и определения $\hat{T}$. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что для всех $j \in \Lambda_0$

$$1 - \hat{T}^{\alpha-1}\int_0^{T_0} |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_j(\hat{T})r(\hat{T},s), v(s))\,ds \leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $t_j \leqslant T_0, j \in \Lambda_0$, для которых

$$1 - \hat{T}^{\alpha-1}\int_0^{t_j} |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_j(\hat{T})r(\hat{T},s), v(s))\,ds = 0. \tag{2.3}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ обозначим через t_j моменты времени, для которых выполнено условие (2.3), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, полагая

$$u_i(s) = \begin{cases} v(s) - \lambda(f_i(\hat{T})r(\hat{T},s), v(s))f_i(\hat{T})r(\hat{T},s),\ s \in [0, \min\{t_i, \hat{T}\}], \\ v(s),\ s \in [\min\{t_i, \hat{T}\}, \hat{T}]. \end{cases}$$

Тогда решение системы (1.3) представимо в виде [21, формула (19)]

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)z_i^0 + tE_{1/\alpha}(at^\alpha, 2)z_i^1 + \int_0^t \overline{E}(t,s)(u_i(s) - v(s))ds.$$

Отсюда

$$\hat{T}^{\alpha-1}z_i(\hat{T}) = f_i(\hat{T}) + \hat{T}^{\alpha-1}\int\limits_0^{\hat{T}} \overline{E}(\hat{T},s)(u_i(s)-v(s))\,ds$$

$$= f_i(\hat{T}) - \hat{T}^{\alpha-1}\int\limits_0^{\hat{T}} |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_i(\hat{T})r(\hat{T},s),v(s))f_i(\hat{T})\,ds$$

$$= f_i(\hat{T})\left(1 - \hat{T}^{\alpha-1}\int\limits_0^{t_i} |\overline{E}(\hat{T},s)|\lambda(f_i(\hat{T})r(\hat{T},s),v(s))\right)ds = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Следовательно, $z_i(\hat{T}) = 0$ для всех $i \in \Lambda_0$. □

2.2. Достаточные условия поимки при $a = 0$

Лемма 3. *Пусть $a = 0$, $\delta_0^+ > 0$. Тогда существует $T > 0$ такой, что для всех $t > T$ справедливо неравенство $\delta_t^+ > 0.5\delta_0^+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} f_i(t) = z_i^1$, а функция λ непрерывна [2, лемма 1.3.13], то для всех $v \in V$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} \lambda(f_i(t),v) = \lambda(z_i^1,v)$. Поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta_t^+ = \delta_0^+$, откуда получаем требуемое. □

Лемма 4. *Пусть $a = 0$, $\delta_0^+ > 0$. Тогда существует $T_0 > 0$ такой, что для любой измеримой функции $v(\cdot), v(t) \in V$ найдется множество $\Lambda \in \Omega(m)$ такое, что для всех $j \in \Lambda$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0} \overline{E}(T_0,s)\lambda(f_j(T_0),v(s))ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о данной леммы проводится аналогично доказательству леммы 2 с опорой на лемму 3. □

Определим число

$$\hat{T} = \inf\left\{t > 0 \mid \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \overline{E}(t,s)\lambda(f_j(t),v(s))ds \geqslant 1\right\}.$$

В силу леммы 4 число $\hat{T} < +\infty$.

Теорема 2. *Пусть $a = 0$, $\delta_0^+ > 0$. Тогда в игре происходит m-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции

$$H(t) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega(m)} \min_{j\in\Lambda} \frac{1}{\hat{T}}\int\limits_0^t \overline{E}(\hat{T},s)\lambda(f_j(\hat{T}),v(s))ds.$$

Обозначим через T_0 первый корень данной функции. Тогда существует множество $\Lambda_0 \in \Omega(m)$ такое, что для всех $j \in \Lambda_0$

$$1 - \frac{1}{\hat{T}}\int\limits_0^{T_0} \overline{E}(\hat{T},s)\lambda(f_j(\hat{T}),v(s))ds \leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $t_j \leqslant T_0, j \in \Lambda_0$, для которых

$$1 - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{t_j} \overline{E}(\hat{T}, s)\lambda(f_j(\hat{T}), v(s))\, ds = 0. \tag{2.4}$$

Для $j \notin \Lambda_0$ обозначим через t_j моменты времени, для которых выполнено условие (2.4), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, полагая

$$u_i(s) = \begin{cases} v(s) - \lambda(f_i(\hat{T}), v(s)) f_i(\hat{T}), & s \in [0, \min\{t_i, \hat{T}\}], \\ v(s), \ \ s \in [\min\{t_i, \hat{T}\}, \hat{T}]. \end{cases}$$

Тогда решение системы (1.3) представимо в виде [21, формула (19)]

$$z_i(t) = z_i^0 + t z_i^1 + \int\limits_0^t \overline{E}(t, s)(u_i(s) - v(s))ds.$$

Отсюда

$$\frac{z_i(\hat{T})}{\hat{T}} = f_i(\hat{T}) + \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{\hat{T}} \overline{E}(\hat{T}, s)(u_i(s) - v(s))ds = f_i(\hat{T}) - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{\hat{T}} \overline{E}(\hat{T}, s)\lambda(f_i(\hat{T}), v(s))ds \cdot f_i(\hat{T})$$
$$= f_i(\hat{T})\Big(1 - \frac{1}{\hat{T}} \int\limits_0^{t_i} \overline{E}(\hat{T}, s)\lambda(f_i(\hat{T}), v(s))ds\Big) = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Следовательно, $z_i(\hat{T}) = 0$ для всех $i \in \Lambda_0$. □

Обозначим через $\mathrm{Int}A, \mathrm{co}A$ внутренность и выпуклую оболочку множества A.

Лемма 5 [3, утверждение 1.3]. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega(n-m+1)} \mathrm{Intco}\{z_j^1, j \in \Lambda\}. \tag{2.5}$$

Тогда $\delta_0 > 0$.

Теорема 3. *Пусть $a \leqslant 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и выполнено условие* (2.5). *Тогда в игре происходит m-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данной теоремы следует из леммы 5 и теорем 1, 2. □

Следствие. *Пусть $a \leqslant 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \mathrm{Intco}\{z_1^1, \dots, z_n^1\}.$$

Тогда в игре происходит поимка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (2.5) $m = 1$, получаем утверждение следствия. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
3. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
4. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
5. **Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.** Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 11. С. 1566–1583.
6. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.
7. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** О линейных конфликтно-управляемых процессах с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 256–270.
8. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
9. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
10. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
11. **Благодатских А.И.** Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2009. № 2. С. 3–12.
12. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 178–186.
13. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.
14. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 3. С. 433–440.
15. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 212–218.
16. **Благодатских А.И.** Многократная поимка жестко соединенных убегающих// Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46—57.
17. **Петров Н.Н.** Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54—59.
18. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. № 13. P. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
19. **Попов А.Ю., Седлецкий А.М.** Распределение корней функции Миттаг — Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
20. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
21. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповiдi Нацiональноi академii наук України. 2007. № 1. С. 50–55.

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор ИМИТИФ
Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск
e-mail: kma3@list.ru

Поступила 25.09.2017

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston, London, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1997, 403 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy.* Kiev, Naukova Dumka, 1992, 384 p.
3. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami.* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow, Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 197 p. ISBN: 5-211-00954-1 .
4. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov.* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk, Udmurt State University Publ., 2009, 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
5. Eidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukr. Math. J.*, 2000, vol. 52, no. 11, pp. 1787–1806. doi: 10.1023/A:1010439422856 .
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 54–70. doi: 10.1134/S0081543810050056 .
7. Chikrii A.A., Matichin I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 256–270 (in Russian).
8. Grigorenko N.L. A game of simple pursuit – evasion for a group of pursuers and one evader. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. XV*, 1983, no. 1, pp. 41-47 (in Russian).
9. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol 73, no. 1, pp. 36–40. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010 .
10. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6 .
11. Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, no. 2, pp. 3–12.
12. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, no. 1, suppl. 1, pp. 174–182. doi: 10.1134/S0081543816050163 .
13. Petrov N. N., Solov'eva N.A. Multiple Capture in Pontryagin's Recurrent Example. *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 855–861. doi: 10.1134/S0005117916050088 .
14. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007 .
15. Petrov N.N., Solov'eva N.A. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 212–218. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218 .
16. Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 46–57 (in Russian).
17. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 54–59. doi: 10.20537/vm170105 .
18. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x .
19. Popov A.Y., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 190, no. 3, pp. 209–409. doi: 10.1007/s10958-013-1255-3 .
20. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 672 p.
21. Chikrii A.A., Matichin I.I. An analog of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2007, no. 1, pp. 50–55.

The paper was received by the Editorial Office on September 25, 2017.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics, Information Technology and Physics Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР[1]

Л. А. Петросян, Я. Б. Панкратова

Ранее авторами (2002, 2017) были получены условия существования сильного равновесия по Нэшу в бесконечношаговых неантагонистических играх при дополнительном ограничении на возможные отклонения коалиций от выбранных наперед стратегий. Эти ограничения допускали лишь однократные единовременные отклонения всех игроков, входящих в коалицию. Однако очевидно, что в реальных задачах отклонения различных игроков могут происходить в различные моменты времени (на различных шагах игры). Поэтому конструкция стратегий наказания, предложенная авторами ранее, оказывается в общем случае неприменима. Принципиальная трудность заключается в том, что игроки, которым предписано осуществить наказание отклонившейся коалиции, в общем случае не знают ни состава отклонившейся коалиции, ни моментов времени, в которые происходят отклонения отдельных игроков. В данной работе мы предлагаем новую форму стратегий наказания, которая не требует информации о коалиции отклоняющихся игроков, а использует только факт отклонения хотя бы одного из игроков коалиции. Разумеется, реализация такой стратегии наказания возможна лишь при выполнении некоторых дополнительных ограничений на одновременные игры компоненты в бесконечношаговой игре. При выполнении этих дополнительных ограничений установлено, что наказание отклонившейся коалиции может быть действительно осуществлено, что позволило доказать существование сильного равновесия по Нэшу в игре.

Ключевые слова: сильное равновесие по Нэшу, характеристическая функция, многошаговая игра, повторяющаяся игра, дележ, ядро.

L. A. Petrosyan, Ya. B. Pankratova. Construction of a strong Nash equilibrium in a class of infinite non-zero-sum games.

In our previous papers (2002, 2017), we derived conditions for the existence of a strong Nash equilibrium in multistage non-zero-sum games under additional constraints on the possible deviations of coalitions from their agreed-upon strategies. These constraints allowed only one-time simultaneous deviations of all the players in a coalition. However, it is clear that in real-world problems the deviations of different members of a coalition may occur at different times (at different stages of the game), which makes the punishment strategy approach proposed by the authors earlier inapplicable in the general case. The fundamental difficulty is that in the general case the players who must punish the deviating coalition know neither the members of this coalition nor the times when each player performs the deviation. In this paper we propose a new punishment strategy, which does not require the full information about the deviating coalition but uses only the fact of deviation of at least one player of the coalition. Of course, this punishment strategy can be realized only under some additional constraints on simultaneous components of the game in an infinite-stage game. Under these additional constraints it was proved that the punishment of the deviating coalition can be effectively realized. As a result, the existence of a strong Nash equilibrium was established.

Keywords: strong Nash equilibrium, characteristic function, multistage game, repeated game, imputation, core.

MSC: 91A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-165-174

Введение

В теории игр хорошо известны так называемые народные теоремы [4;5], в которых доказывается существование равновесия по Нэшу в бесконечношаговых повторяющихся играх. Идея доказательства заключается в использовании “стратегий наказания”, которые включаются в случае, если один из игроков на каком-то шаге игры отклоняется от согласованного заранее

[1]Работа выполнена при поддержки Российского научного фонда (грант 17-11-01079).

поведения. Однако интересным является вопрос о доказательстве существования сильного равновесия по Нэшу в таких играх, т. е. о доказательстве существования равновесия, устойчивого относительно отклонения коалиции игроков. Для случая, когда допускается лишь однократное и единовременное отклонение всеми игроками коалиции, такой результат получен в [10;11] и там же распространен на случай произвольной бесконечношаговой игры.

Однако использованный там метод построения наказания неприменим к случаю, когда игроки, входящие в коалицию, отклоняются в различные моменты времени, поскольку после первого отклонения невозможно определить, какие игроки могут отклониться в будущем, и поэтому непонятно, против какой коалиции и когда должно быть наказание. Нами предложен новый подход, который не требует информации о всем множестве отклонившихся игроков, а использует информацию лишь об отклонении хотя бы одного игрока. Суть подхода заключается в том, что каждый игрок использует следующую стратегию наказания. Как только на некотором шаге k игрок впервые обнаруживает отклонение какого-то игрока или группы игроков, он на всех последующих шагах использует оптимальную стратегию (как минимизирующий игрок) в антагонистической игре между коалицией остальных игроков, действующих как один игрок, и собой. Разумеется, такой подход не может достаточно объективно наказать всю отклонившуюся коалицию игроков, но при определенных условиях можно сделать отклонение любой коалиции невыгодным для ее участников. Реализация такой стратегии наказания возможна лишь при выполнении некоторых дополнительных ограничений на одновременные игры компоненты в бесконечношаговой игре. При выполнении этих дополнительных ограничений установлено, что наказание отклонившейся коалиции может быть действительно осуществлено, что позволило доказать существование сильного равновесия по Нэшу в игре.

1. Бесконечно повторяющиеся игры

1.1. Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру G с конечной неантагонистической игрой Γ, разыгрываемой на каждом шаге. Введем обозначение

$$\Gamma = \langle N; U_1, \ldots, U_i, \ldots, U_n; K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_n \rangle.$$

Здесь N — множество игроков, U_i — множество стратегий i-игрока, $K_i(u_1, \ldots, u_n)$, $u_i \in U_i$, — функция выигрыша i-го игрока ($i \in N$). Если на шаге k ($1 \le k \le \infty$) выбран набор стратегий $u^k = (u_1^k, \ldots, u_i^k, \ldots, u_n^k)$, то выигрыш i-го игрока в игре G определяется следующим образом:

$$H_i(u_1(\cdot), \ldots, u_i(\cdot), \ldots, u_n(\cdot)) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(u_1^k, \ldots, u_i^k, \ldots, u_n^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(u^k) = H_i(u(\cdot)), \quad i \in N, \tag{1.1}$$

где $u_1(\cdot) = (u_1^1, \ldots, u_1^k, \ldots), \ldots, u_i(\cdot) = (u_i^1, \ldots, u_i^k, \ldots), \ldots, u_n(\cdot) = (u_n^1, \ldots, u_n^k, \ldots)$, $\delta \in (0, 1)$.

Целью i-го игрока в игре G является максимизация своего выигрыша $H_i(u_1(\cdot), \ldots, u_i(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$.

В выражениях для $u_i(\cdot) = (u_i^1, \ldots, u_i^k, \ldots)$, $i \in N$, u_i^k — стратегия выбираемая игроком i в игре Γ, разыгрываемой на шаге k. При этом предполагается, что на шаге k при выборе стратегии u_i^k в игре Γ игрок i знает выборы других игроков на предыдущих шагах и помнит все свои выборы, т. е. u_i^k является функцией истории $h^k = (u_1^1, \ldots, u_1^{k-1}; \ldots; u_i^1, \ldots, u_i^{k-1}; \ldots; u_n^1, \ldots, u_n^{k-1})$. Поэтому формально нужно писать $u_i^k(h^k)$, т. е. u_i^k зависит от предыстории h^k, $k = 1, \ldots$. Однако будем подразумевать это по умолчанию, т. е. считать, что выбор u_i^k игрока i на шаге k в игре Γ делается с учетом информации о предыстории игры h^k.

Рассмотрим набор стратегий $\bar{u}(\cdot) = (\bar{u}_1(\cdot), \ldots, \bar{u}_i(\cdot), \ldots, \bar{u}_n(\cdot))$ такой, что

$$\sum_{i\in N} H_i(\bar{u}) = \max_{u(\cdot)} \sum_{i\in N} H_i(u). \tag{1.2}$$

Очевидно, что подобный набор стратегий всегда существует.

Можно выбрать такой набор $\bar{u}_i(\cdot) = (\bar{u}_i^1, \ldots, \bar{u}_i^k, \ldots,)$, $i \in N$, что

$$\sum_{i\in N} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_i, \ldots, \bar{u}_n) = \max_{u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_n} \sum_{i\in N} K_i(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n), \tag{1.3}$$

и тогда реализуется игра G, в которой $\bar{u}_i^k = \bar{u}_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Из формул (1.1)–(1.3) получаем

$$\sum_{i\in N} H_i(\bar{u}) = \sum_{i\in N} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(\bar{u}_1^k, \ldots, \bar{u}_n^k) \Big)$$

$$= \sum_{i\in N} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) \Big) = \frac{1}{1-\delta} \sum_{i\in N} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n).$$

Стратегии $(\bar{u}_1, \ldots \bar{u}_n)$ будем называть *кооперативными стратегиями* в Γ.

Рассмотрим смешанное расширение игры Γ и обозначим через μ_i смешанную стратегию игрока i в игре Γ. Тогда по аналогии с введенными ранее стратегиями $u_i(\cdot)$ смешанная стратегия поведения [2] $\mu_i(\cdot)$ в G имеет вид $\mu_i(\cdot) = (\mu_i^1, \ldots, \mu_i^k, \ldots)$, где μ_i^k — смешанная стратегия i игрока, выбираемая им на шаге k в игре Γ. Как было отмечено раннее, предполагается, что на шаге k при выборе стратегии μ_i^k в игре Γ игрок i знает выборы других игроков на предыдущих шагах и помнит все свои выборы, т. е. μ_i^k является функцией истории $h^k = (\mu_1^1, \ldots, \mu_1^{k-1}; \ldots; \mu_i^1, \ldots, \mu_i^{k-1}; \ldots; \mu_n^1, \ldots, \mu_n^{k-1})$. Поэтому формально нужно писать $\mu_i^k(h^k)$, т. е. μ_i^k зависит от предыстории h^k, $k = 1, \ldots$. Однако, также как и в случае "чистых стратегий" $u_i(\cdot)$, будем подразумевать это по умолчанию, т. е. считать, что выбор μ_i^k игрока i на шаге k в игре Γ делается с учетом информации о предыстории игры h^k.

Введем характеристическую функцию $V(S)$, $S \subset N$, в игре Γ в классическом смысле [6], т. е. как значение антагонистической игры (математическое ожидание выигрыша в ситуации равновесия, которое всегда существует в классе смешанных стратегий) между игроками S (первый игрок) и $N \backslash S$ (второй игрок). При этом выигрыш первого игрока-коалиции S равен сумме выигрышей ее членов. Тогда мы получаем

$$V(N) = \sum_{i\in N} K_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n),$$

и легко можно показать, что характеристическая функция $W(S)$, $S \subset N$, в повторяющейся игре G будет иметь следующий вид:

$$W(S) = \frac{1}{1-\delta} V(S), \quad S \subset N. \tag{1.4}$$

Действительно, характеристическая функция $W(S)$ в игре G в классическом смысле (так же, как и в игре Γ) из-за повторяющегося характера игры будет иметь вид $\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} V(S)$, откуда и получаем формулу (1.4).

Напомним теперь определение сильного равновесия по Нэшу [8; 10].

О п р е д е л е н и е. Набор стратегий $(\hat{u}_1, \ldots \hat{u}_2, \ldots \hat{u}_n) = \hat{u}$ будем называть сильным равновесием по Нэшу, если для всех $S \subset N$, и всех $u_S = \{u_i, i \in S\}$ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i\in S} K_i(\hat{u}) \geq \sum_{i\in S} K_i(\hat{u}||u_S),$$

где $(\hat{u}||u_S)$ представляет собой набор стратегий, в котором игроки из коалиции $N\backslash S$ используют стратегии $\hat{u}_i$, а игроки из коалиции S произвольные стратегии.

1.2. Ассоциированные антагонистические игры. Рассмотрим семейство антагонистических игр $\Gamma_{N\backslash i,i}$, построенных на основе игры Γ между коалицией $N\backslash i$, действующей как первый игрок, и коалицией, состоящей из одного игрока $\{i\}$, действующей как второй игрок [9]. Выигрыш игрока-коалиции $N\backslash i$ полагаем равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Пусть $(\bar{\mu}_{N\backslash i}, \bar{\mu}_i)$ — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_{N\backslash i,i}$.

Рассмотрим ситуацию

$$\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_i, \ldots, \bar{\mu}_n)$$

и определим

$$\bar{W}(S) = \max_{\mu_S} \sum_{i\in S} E_i(\mu_S; \bar{\mu}_{N\backslash S}),$$

где $\mu_S = \{\mu_i, i \in S\}$, $\bar{\mu}_{N\backslash S} = \{\bar{\mu}_i, i \in N\backslash S\}$ и $E_i(\mu_S; \bar{\mu}_{N\backslash S})$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в ситуации $(\mu_S; \bar{\mu}_{N\backslash S})$. $W(S)$ — это максимальный выигрыш, который может обеспечить себе коалиция S, если остальные игроки используют стратегии $\bar{\mu}_i$, $i \in N\backslash S$, представляющие собой оптимальные стратегии второго игрока в антагонистических играх $\Gamma_{N\backslash i,i}$.

Очевидно имеет место следующее утверждение.

Утверждение. $\bar{W}(S) \geq V(S)$, $\;S \subset N$, $\;\bar{W}(N) = V(N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для всех $\mu(S)$ имеем

$$\sum_{i\in S} E_i(\mu_S, \bar{\mu}_{N\backslash S}) \geq \min_{\mu_{N\backslash S}} \sum_{i\in S} E_i(\mu_S, \mu_{N\backslash S}).$$

Поскольку предыдущее неравенство имеет место для всех μ_S, то, беря максимум по μ_S слева и справа, получаем

$$\bar{W}(S) = \max_{\mu_S} \sum_{i\in S} E_i(\mu_S, \bar{\mu}_{N\backslash S}) \geq \max_{\mu_S} \min_{\mu_{N\backslash S}} \sum_{i\in S} E_i(\mu_S, \mu_{N\backslash S}) = V(S).$$

Равенство $\bar{W}(N) = V(N)$ очевидно. Утверждение доказано.

Предположим, что существует решение системы неравенств

$$\sum_{i\in S} \alpha_i > \bar{W}(S) \;\; \forall S \subset N, \quad S \neq N, \quad \sum_{i\in N} \alpha_i = \bar{W}(N) = V(N). \tag{1.5}$$

Построим модификацию G^α игры G. Разница между G^α и G состоит в выигрышах игр Γ, реализуемых на каждом шаге игры G. Если используются кооперативные стратегии $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n)$, то выигрыши игроков полагаем равными $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α удовлетворяет (1.5). Для всех остальных выбираемых стратегий выигрыши такие же, как в Γ.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.5), *тогда найдется такое* $\delta \in (0,1)$, *что в игре* G^α *будет существовать сильное равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий поведения* [2] *с выигрышами, равными* $\alpha_i \dfrac{1}{1-\delta}$. *Эти выигрыши совпадают с выигрышами в* G^α *в случае кооперативного поведения игроков.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\alpha(S) = \sum_{i\in S} \alpha_i$, и $|S|$ — число игроков в коалиции S. Если игроки из коалиции S придерживаются кооперативных стратегий и в качестве дележа выбрают дележ, удовлетворяющий условию (1.5), то выигрыш коалиции S в игре G^α будет равен $\dfrac{\alpha(S)}{1-\delta}$. Предположим, что игроки из S отклоняются от кооперации, и пусть m — номер последнего шага, на котором происходит отклонение хотя бы одного из игроков коалиции S. Поскольку коалиция S состоит из конечного числа игроков, такое число m всегда существует. Обозначим через M максимально возможный выигрыш игрока из коалиции S при отклонении от кооперации. Тогда очевидно, что при отклонении от кооперации максимальный гарантированный выигрыш отклонившейся коалиции не может превзойти величины

$$\sum_{l=0}^{m}\delta^l|S|M+\sum_{l=m+1}^{\infty}\delta^l\bar{W}(S)=|S|M\sum_{l=0}^{m}\delta^l+\delta^{m+1}\sum_{l=0}^{\infty}\delta^l\bar{W}(S)=|S|M\sum_{l=0}^{m}\delta^l+\delta^{m+1}\frac{\bar{W}(S)}{1-\delta}, \quad (1.6)$$

поскольку начиная с шага $m+1$ и до конца игры игроки, не входящие в S, получив информацию об отклонении хотя бы одним игроком из S на каком-то шаге, на всех последующих шагах могут использовать стратегии $\bar{\mu}_i$, оптимальные в описанной выше ассоциированной антагонистической игре $\Gamma_{N\setminus i,i}$.

В результате начиная с этого шага наибольшее, чего может добиться коалиция S в каждой последующей повторяющейся игре, совпадает с величиной $\bar{W}(S)$ (выигрыш коалиции S при наилучшем ответе игроков из S на стратегии $\bar{\mu}_i$, $i\in N\setminus S$).

В то же время при кооперации выигрыш коалиции S определяется как

$$\frac{\alpha(S)}{1-\delta}=\Big(\sum_{l=0}^{m}\delta^l\Big)\alpha(S)+\delta^{m+1}\frac{\alpha(S)}{1-\delta}. \quad (1.7)$$

Покажем, что существует δ', $0<\delta'<1$, такое, что при всех $\delta\in[\delta',1)$ имеет место

$$\Big(\sum_{l=0}^{m}\delta^l\Big)\alpha(S)+\delta^{m+1}\frac{\alpha(S)}{1-\delta}>|S|M\sum_{l=0}^{m}\delta^l+\delta^{m+1}\frac{\bar{W}(S)}{1-\delta},$$

где слева стоит выигрыш коалиции S при кооперации (1.7), а справа оценка сверху выигрыша коалиции S при отклонении от кооперации (1.6), что дает нам

$$\sum_{l=0}^{m}\delta^l(\alpha(S)-|S|M)+\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta}(\alpha(S)-\bar{W}(S))>0.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta}(\alpha(S)-\bar{W}(S))>\sum_{l=0}^{m}\delta^l(|S|M-\alpha(S)). \quad (1.8)$$

Рассмотрим правую часть неравенства (1.8). Очевидно, что для любого δ, $0<\delta<1$, верно неравенство

$$\sum_{l=0}^{m}\delta^l(|S|M-\alpha(S))<(m+1)(|S|M-\alpha(S)). \quad (1.9)$$

Поэтому если мы покажем, что найдется такое δ', $0<\delta'<1$, $\delta\in[\delta',1)$, что имеет место

$$\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta}(\alpha(S)-\bar{W}(S))>(m+1)(|S|M-\alpha(S)),$$

то из (1.9) тем более будет следовать, что при таких δ справедливо неравенство (1.8).

Обозначим

$$(m+1)\frac{|S|M-\alpha(S)}{\alpha(S)-\bar{W}(S)}=A.$$

Очевидно, что константа A неотрицательна.

Покажем, что всегда найдется такое δ' сколь угодно близкое к 1, $0 < \delta' < 1$, что при любом $\delta \in [\delta', 1)$ и конечном заданном числе A неравенство $\dfrac{\delta^{m+1}}{1-\delta} > A$ выполнено.

Действительно, $\dfrac{\delta^{m+1}}{1-\delta} > 0$ и

$$\lim_{\delta \to 1-0} \frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} = +\infty.$$

Из последнего соотношения следует, что для любого конечного числа A всегда можно найти такое δ', близкое к 1, что для всех δ, $\delta \in [\delta', 1)$, неравенство $\dfrac{\delta^{m+1}}{1-\delta} > A$ справедливо, а следовательно, верно и (1.8). Теорема доказана.

2. Многошаговые игры

2.1. Задан бесконечный древовидный граф $\bar{G} = (Z, T)$, где $T_z \subset Z$, $|T_z| \le n$. В каждой вершине $z \in Z$ задана одновременная конечная игра $\Gamma(z)$. Предположим, что число различных игр $\Gamma(z)$, $z \in Z$, конечно и множество игроков N одно и то же во всех играх $\Gamma(z)$. На первом шаге игры G в корне z_1 дерева $\bar{G}$ реализуется одновременная игра $\Gamma(z_1)$:

$$\Gamma(z_1) = \langle N; U_1^{z_1}, \dots, U_i^{z_1}, \dots, U_n^{z_1}; K_1^{z_1}, \dots, K_i^{z_1}, \dots, K_n^{z_1} \rangle.$$

Пусть в игре $\Gamma(z_1)$ игроки выбрали стратегии $(u_1(z_1), \dots, u_n(z_1))$, $u_i(z_1) \in U_i^{z_1}$, $i \in N$, тогда игра $\Gamma(z_1)$ переходит в вершину $z_2 \in T(z_1)$, где $z_2 = T(z_1; u_1(z_1), \dots, u_n(z_1))$, и в вершине z_2 разыгрывается одновременная игра $\Gamma(z_2)$. В общем случае на шаге $k-1$ в вершине z_{k-1} разыгрывается игра $\Gamma(z_{k-1})$. Пусть в игре $\Gamma(z_{k-1})$ игроки выбрали стратегии $(u_1(z_{k-1}), \dots, u_n(z_{k-1}))$, $u_i(z_{k-1}) \in U_i^{z_{k-1}}$, $i \in N$, тогда игра переходит в вершину

$$z_k = T(z_{k-1}; u_1(z_{k-1}), \dots, u_n(z_{k-1})),$$

и в этой вершине реализуется одновременная игра

$$\Gamma(z_k) = \Gamma(T(z_{k-1}; u_1(z_{k-1}), \dots, u_n(z_{k-1})))$$

и т. д. В результате в G реализуется конечная последовательность одновременных игр

$$\Gamma(z_1), \dots, \Gamma(z_k), \dots .$$

Как и в предыдущем разделе, определим $u_i(\cdot)$ стратегию игрока i в G (как функцию, которая в каждой вершине графа (в каждой игре $\Gamma(z)$) диктует однозначный выбор $u_i(z)$, зависящий от предыстории), т. е. $u_i(\cdot) = u_i(z_k)$ (см. [5; 7; 12]).

Мы предполагаем существование такого набора стратегий $\hat{u}(\cdot) = (\hat{u}_1(\cdot), \dots, \hat{u}_n(\cdot))$, который максимизирует сумму выигрышей игроков в G и называется *кооперативным набором стратегий*, а соответствующая последовательность реализованных одновременных игр (другими словами, последовательность позиций на дереве $\bar{G}$) — *кооперативной траекторией.*

Таким образом, кооперативное поведение порождает последовательность одновременных игр

$$\Gamma(\hat{z}_k) = \Gamma(T(\hat{z}_{k-1}; \hat{u}_1(\hat{z}_{k-1}), \dots, \hat{u}_n(\hat{z}_{k-1}))),$$

где $\hat{u}_1(\hat{z}), \dots, \hat{u}_n(\hat{z})$, $u_i(\hat{z}) \in U_i^{\hat{z}}$, $i = 1, \dots, n$, — кооперативные стратегии игроков и $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, \dots,$ — кооперативная траектория. При кооперативном поведении в каждой одновременной игре $\Gamma(\hat{z}_k)$ суммарный выигрыш игроков определяется как

$$L(\hat{z}_k) = \sum_{i \in N} K_i^{z_k}(\hat{u}_1(\hat{z}_k), \dots, \hat{u}_n(\hat{z}_k)).$$

Пусть
$$L = \min_{k,\ k\in 1,2,\ldots} L(\hat z_k)\,.$$
Очевидно, что минимум достигается, поскольку число различных одновременных игр конечно.

2.2. Ассоциированные антагонистические игры. Рассмотрим семейство антагонистических игр $\Gamma_{N\setminus i,i}(z)$, построенных на основе игры $\Gamma(z)$ между коалицией $N\setminus i$, действующей как первый игрок, и коалицией, состоящей из одного игрока $\{i\}$, действующей как второй игрок. Выигрыш игрока коалиции $N\setminus i$ полагаем равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Пусть $(\bar\mu_{N\setminus i}(z), \bar\mu_i(z))$ — ситуация равновесия в смешанных стратегиях в игре $\Gamma_{N\setminus i,i}(z)$. Рассмотрим ситуацию
$$\bar\mu(z) = (\bar\mu_1(z), \ldots, \bar\mu_i(z), \ldots, \bar\mu_n(z))$$
и определим
$$\bar W(z,S) = \max_{\mu_S(z)} \sum_{i\in S} E_i(\mu_S(z); \bar\mu_{N\setminus S}(z)),$$
где $\mu_S(z) = \{\mu_i, i \in S\}$, $\bar\mu_{N\setminus S}(z) = \{\bar\mu_i(z), i \in N\setminus S\}$ и $E_i(\mu_S(z); \bar\mu_{N\setminus S}(z))$ — математическое ожидание выигрыша игрока i в ситуации $(\mu_S, \bar\mu_{N\setminus S,S})$.

В каждой одновременной игре $\Gamma(z)$ определена функция $\bar W(z,S)$. Введем новую функцию множества
$$\bar{\bar W}(S) = \max_{z\in G} \bar W(z,S) \quad \forall S \subset N, \quad S \neq N. \tag{2.1}$$
Поскольку число различных игр $\Gamma(z)$, $z \in Z$, по предположению конечно, то максимум в (2.1) достигается для всех S. Назовем $\bar{\bar W}(S)$ *обобщенной характеристической функцией в* G. В общем случае $\bar{\bar W}(S)$ не будет супераддитивной, но будет монотонной по S. Очевидно, что $\bar{\bar W}(S) \geq \bar W(z,S)$ для всех S, и предположим, что $\bar W(z,N) \geq \bar{\bar W}(S)$ и $L > \bar{\bar W}(S)$ для всех $z \in Z$, S, $S \subset N$. Обозначим через D множество всех векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таких, что
$$\begin{aligned} &\sum_{i\in S} \alpha_i \geq \bar{\bar W}(S) \quad \forall S \subset N, \quad S \neq N,\\ &\sum_{i\in N} \alpha_i = L. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Предположим, что множество $D \neq \varnothing$ (2.2) и существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что
$$\begin{aligned} &\sum_{i\in S} \alpha_i > \bar{\bar W}(S) \quad \forall S \subset N, \quad S \neq N,\\ &\sum_{i\in N} \alpha_i = L. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для игр $\Gamma(\hat z_k)$ вдоль кооперативной траектории построим векторы $\hat\alpha^{\hat z_k} = (\hat\alpha_1^{\hat z_k}, \ldots, \hat\alpha_n^{\hat z_k})$. Здесь
$$\hat\alpha_i^{\hat z_k} = \alpha_i + \frac{L(\hat z_k) - \sum\limits_{i\in N} \alpha_i}{n},$$
где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ удовлетворяет (2.3).

По аналогии с разд. 1 построим модификацию G^α игры G. Игры G^α и G различаются лишь функциями выигрышей одновременных игр $\Gamma(\hat z_k)$, реализуемых вдоль кооперативной траектории. Если в G используются кооперативные стратегии $(\hat u_1(\cdot), \ldots, \hat u_n(\cdot))$ (следовательно, в играх $\Gamma(\hat z_k)$ — стратегии $(\hat u_1(\hat z_k), \ldots, \hat u_n(\hat z_k))$), то выигрыши при использовании этих стратегий (в ситуации $(\hat u_1(\hat z_k), \ldots, \hat u_n(\hat z_k))$) полагаем равными $\hat\alpha_i^{\hat z_k} = \alpha_i + \dfrac{L(\hat z_k) - \sum_{i\in N}\alpha_i}{n}$, $k = 1, \ldots, l, \ldots$, $i \in N$. Во всех остальных случаях выигрыши в игре $\Gamma(z)$ те же, что и в одновременных играх бесконечношаговой игры G.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2.3), *тогда найдется такое* $\delta \in (0,1)$, *что в игре* G^α *будет существовать сильное равновесие по Нэшу в классе смешанных стратегий поведения* [2] *с выигрышами, равными*

$$\frac{\alpha_i}{1-\delta} + \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \sum\limits_{i \in N} \alpha_i}{n}.$$

Эти выигрыши совпадают с выигрышами в G^α *в случае кооперативного поведения игроков.*

Доказательство. Обозначим $\alpha(S) = \sum_{i \in S} \alpha_i$. Если игроки из коалиции S придерживаются кооперативных стратегий и в качестве выигрыша выбрали вектор, удовлетворяющий условию (2.3), то выигрыш коалиции S в игре G^α будет определяться как

$$\sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i \in S} \hat{\alpha}_i^{\hat{z}_{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i \in S} \left(\alpha_i + \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \sum\limits_{i \in N} \alpha_i}{n} \right).$$

Предположим, что игроки из S отклоняются от кооперации, и пусть m — номер последнего шага, на котором происходит отклонение хотя бы одного игрока из коалиции S. Поскольку коалиция S состоит из конечного числа игроков, такое число m всегда существует. Обозначим, через M максимально возможный выигрыш игрока из коалиции S при отклонении от кооперации. Тогда очевидно, что при отклонении от кооперации максимальный гарантированный выигрыш отклонившейся коалиции не может превзойти величины

$$\sum_{l=0}^{m} \delta^l |S| M + \sum_{l=m+1}^{\infty} \delta^l \bar{\bar{W}}(S) = |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \bar{\bar{W}}(S) = |S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \frac{\bar{\bar{W}}(S)}{1-\delta}, \quad (2.4)$$

поскольку начиная с шага $m+1$ и до конца игры игроки, получив информацию об отклонении хотя бы одного игрока из S на каком-то шаге, на всех последующих шагах могут использовать стратегии $\bar{\mu}_i(z)$, оптимальные в описанной выше ассоциированной антагонистической игре $\Gamma_{N \backslash i, i}$. В результате начиная с этого шага наибольшее, чего может добиться коалиция S в каждой последующей одновременной игре, совпадает с величиной $\bar{\bar{W}}(S)$ (выигрыш коалиции S при наилучшем ответе игроков из S на стратегии $\bar{\mu}_i(z)$, $i \in N \backslash S$).

В то же время при кооперации выигрыш коалиции S можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i \in S} \alpha_i + \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i \in S} \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N)}{n} = \left(\sum_{k=0}^{m} \delta^l \right) \alpha(S) + \delta^{m+1} \frac{\alpha(S)}{1-\delta} + \sum_{l=0}^{\infty} \delta^l \sum_{i \in S} \frac{L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N)}{n}. \quad (2.5)$$

Покажем, что существует δ', $0 < \delta' < 1$, такое, что при всех $\delta \in [\delta', 1)$ выражение в (2.4) меньше выражения (2.5).

Для этого достаточно показать, что

$$|S| M \sum_{l=0}^{m} \delta^l + \delta^{m+1} \frac{\bar{\bar{W}}(S)}{1-\delta} < \left(\sum_{k=0}^{m} \delta^l \right) \alpha(S) + \delta^{m+1} \frac{\alpha(S)}{1-\delta}.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\delta^{m+1}}{1-\delta} (\alpha(S) - \bar{\bar{W}}(S)) > \sum_{l=0}^{m} \delta^l (|S| M - \alpha(S)). \quad (2.6)$$

Проводя рассуждения аналогично приведенным при доказательстве теоремы 1, несложно показать, что всегда найдется такое δ', $0 < \delta' < 1$, что при любом $\delta \in [\delta', 1)$ неравенство (2.6) верно. Следовательно, тем более выполняется неравенство

$$|S|M\sum_{l=0}^{m}\delta^l + \delta^{m+1}\frac{\bar{\bar{W}}(S)}{1-\delta} < \left(\sum_{k=0}^{m}\delta^l\right)\alpha(S) + \delta^{m+1}\frac{\alpha(S)}{1-\delta} + \sum_{l=0}^{\infty}\delta^l\sum_{i\in S}\frac{L(\hat{z}_{l+1})-\alpha(N)}{n},$$

поскольку $L(\hat{z}_{l+1}) - \alpha(N) \geq 0$. Теорема доказана.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

Заключение

В работе нами построено сильное равновесие по Нэшу (равновесие, устойчивое относительно отклонений групп игроков) как для неантагонистических повторяющихся игр, так и для общих многошаговых игр с бесконечной продолжительностью. Это удалось выполнить при определенных ограничениях на структуру одновременных игр, происходящих на каждом шаге основной динамической игры. Однако мы убеждены в том, что этот результат может быть получен и при менее жестких предположениях. Одним из основных требований является то, что в кооперативных вариантах одновременных игр ядра этих игр должны иметь непустое пересечение. Между тем, поскольку построенное сильное равновесие по Нэшу реализует выигрыши игроков при кооперации, это фактически означает, что в рассматриваемом классе динамических игр кооперативная траектория, или кооперативное решение, стратегически поддерживается сильным равновесием по Нэшу. Последнее обстоятельство является далеко не тривиальным. Предложенный в работе подход можно распространить и на дифференциальные игры. В этом случае для построения решений ассоциированных игр необходимо воспользоваться подходом, развитым в школе Н. Н. Красовского [1; 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
2. **Петросян Л.А.** Сигнальные стратегии и стратегии поведения в одном классе бесконечных позиционных игр // Позиционные игры: сб. ст. / ред. Н. Н. Воробьева и И. Н. Рублевской. М.: Наука, 1967. С. 221–230.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Aumann R.J., Maschler M.**. Repeated games with incomplete information. Cambridge: MIT Press, 1995. 360 p. ISBN: 9780262011471.
5. **Fudenberg D., Maskin E.** The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information // Econometrica. 1986. Vol. 54, no. 3. P. 533–554. doi: 10.2307/1911307.
6. **Maschler M., Solan E., Zamir S.** Game theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 1003 p. ISBN: 978-1-107-00548-8.
7. **Myerson R.B.** Multistage games with communication // Econometrica. 1986. Т. 54. P. 323–358. doi: 10.2307/1913154.
8. **Nash J.** Non-cooperative games // Ann. Mathematics. 1951. Vol. 54, no. 2. P. 286–295. doi: 10.2307/1969529.
9. **Neumann J., Morgenstern O.** Theory of games and economic behavior. Princeton, 1947. 641 p. doi: 10.1177/1468795X06065810.
10. **Petrosjan L.A., Grauer L.V.** Strong Nash equilibrium in multistage games // International Game Theory Review. 2002. Vol. 4, no. 3. P. 255–264. doi: 10.1142/S0219198902000689.

11. **Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Ya.** Existence of strong Nash equilibrium in repeated and multistage games // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017; Saint-Petersburg, 2017. P. 255–257. doi: 10.1109/CNSA.2017.7974003 .
12. **Rubinstein A.** Equilibrium in supergames // Essays in Game Theory. 1994. P. 17–28. doi: 10.1007/978-1-4612-2648-2_ 2 .

Петросян Леон Аганесович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Поступила 10.10.2017

Панкратова Ярославна Борисовна
канд. физ.-мат. наук, ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
e-mail: y.pankratova@spbu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow, Fizmatlit Publ., 1974, 456 p.
2. Petrosyan L.A. Signal strategies and behavior strategies in one class of infinite positional games. In: *Positional games, collection of articles*, Vorobyova N.N., Rublevskaya I.N. (eds.), Moscow, Nauka Publ., 1967, pp. 221–230 (in Russian).
3. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
4. Aumann R.J., Maschler M. *Repeated games with incomplete information.* Cambridge, MIT Press, 1995, 360 p. ISBN: 9780262011471 .
5. Fudenberg D., Maskin E. The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information. *Econometrica*, 1986, vol. 54, no. 3, pp. 533–554. doi: 10.2307/1911307 .
6. Maschler M., Solan E., Zamir S. *Game theory.* Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 1003 p. ISBN: 978-1-107-00548-8 .
7. Myerson R.B. Multistage games with communication. *Econometrica*, 1986, vol. 54, no. 2, pp. 323–358. doi: 10.2307/1913154 .
8. Nash J. Non-cooperative games. *Ann. Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. doi: 10.2307/1969529 .
9. Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton, 1947, 641 p. doi: 10.1177/1468795X06065810 .
10. Petrosjan L.A., Grauer L.V.. Strong Nash equilibrium in multistage games. *International Game Theory Review*, 2002, vol. 4, no. 3, pp. 255–264. doi: 10.1142/S0219198902000689 .
11. Petrosyan L., Chistyakov S., Pankratova Ya. Existence of strong Nash equilibrium in repeated and multistage games. *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics* (*Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov*)*, CNSA 2017, Saint-Petersburg*, p. 255–257. doi: 10.1109/CNSA.2017.7974003 .
12. Rubinstein A. Equilibrium in supergames. *Essays in Game Theory*, 1994, pp. 17–28. doi: 10.1007/978-1-4612-2648-2_2 .

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Leon Aganesovich Petrosyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg University, St Petersburg, 199034 Russia, e-mail: l.petrosyan@spbu.ru .

Yaroslavna Borisovna Pankratova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: y.pankratova@spbu.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВЕКТОРНЫХ МЕР[1]

Е. С. Половинкин

В работе исследованы свойства параметризованной последовательности счетно аддитивных векторных мер, имеющих плотность, определенных на компактном пространстве с неотрицательной неатомарной мерой Радона и со значениями, принадлежащими сепарабельному банахову пространству. Каждая векторная мера из этой последовательности непрерывно зависит от параметра, принадлежащего некоторому метрическому пространству. Предполагается, что в метрическом пространстве параметров задано счетное локально конечное открытое покрытие и вписанное в него разбиение единицы. Доказано, что в компактном пространстве носителя векторных мер (с мерой Радона) при каждом значении параметра существует последовательность измеримых (относительно меры Радона на пространстве носителя векторных мер) подмножеств этого компактного пространства, которая образует разбиение этого пространства. При этом последовательность измеримых разбиений равномерно непрерывно зависит от параметра, и при каждом значении параметра и каждом значении индекса последовательности мер относительное значение меры соответствующего подмножества разбиения компактного пространства может быть равномерно приближено соответствующим значением функции разбиения единицы.

Ключевые слова: теорема Ляпунова, счетно аддитивная векторная мера, плотность векторной меры, разбиение единицы, непрерывное отображение.

E. S. Polovinkin. On some properties of vector measures.

We study the properties of a parameterized sequence of countably additive vector measures having a density, defined on a compact space with a nonnegative nonatomic Radon measure, and taking values in a separable Banach space. Each vector measure in this sequence depends continuously on a parameter belonging to some metric space. It is assumed that a countable locally finite open covering and a partition of unity inscribed in it are given in the metric space of the parameters. It is proved that, in the compact support space of the vector measures (with Radon measure), for each value of the parameter, there exists a sequence of measurable (with respect to the Radon measure on the support space of the vector measures) subsets of this compact space that forms a partition of this space. Moreover, the sequence of measurable partitions depends uniformly continuously on the parameter and, for each value of the parameter and for each value of the index of the sequence of measures, the relative value of the measure of the corresponding subset of the partition of the compact space can be approximated uniformly by the corresponding value of the partition function of unity.

Keywords: Lyapunov theorem, countably additive vector measure, density of a vector measure, partition of unity, continuous mapping.

MSC: 28B05, 46G10, 49J53, 49K99

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-175-188

Введение

Из знаменитой теоремы А. А. Ляпунова (см. [1;2; 3, гл. 8]) о векторных мерах, заданных на компактном топологическом пространстве $T = (T, \mathcal{T}, \mu)$ с σ-алгеброй измеримых множеств $\mathcal{T}$ и конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ, следует, что для всякой счетно аддитивной векторной меры $m : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$ и любого числа $\alpha \in [0, 1]$ существует множество $A_\alpha \in \mathcal{T}$ такое, что справедливо равенство $m(A_\alpha) = \alpha\, m(T)$.

Опираясь на это следствие, в нашей работе [4] мы доказали следующее утверждение (см. Lemma 3.1). *Пусть на действительной прямой выбран отрезок* $T := [t_0, t_1]$ *с мерой Лебега* μ *и измеримыми по Лебегу множествами* $\mathcal{T}$ *на нем, и пусть задано семейство счетно аддитивных мер* $m_s : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$*, непрерывно зависящих от параметра* s*, принадлежащего некоторому компактному метрическому пространству* S*, на котором задано произвольное (непрерывное) разбиение единицы* $\{p_j(s)\}_{j=1}^{J}$*. Тогда для любого числа* $\delta > 0$ *найдется*

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00259а) .

набор непрерывно зависящих от $s \in S$ непересекающихся множеств $\{A_j(s)\}_{j=1}^J \subset \mathcal{T}$ таких, что $\bigcup_{j=1}^J A_j(s) = T$ (т. е. при каждом $s \in S$ множества $\{A_j(s)\}_{j=1}^J$ образуют измеримое разбиение пространства T), и при каждом $s \in S$ и $j \in \overline{(1, J)}$ справедливы оценки $\|m_s(A_j(s)) - p_j(s)\, m_s(T)\| < \delta$ и $\mu(A_j(s)) = p_j(s)\, \mu(T)$. Опираясь на данный результат, мы доказали существование непрерывного отображения из некоторого компактного функционального пространства параметров во множество решений дифференциального включения, что, в свою очередь, позволило в работе [5] получить необходимые условия оптимальности решения экстремальной задачи Майера, в которой одним из ограничений является дифференциальное включение с липшицевой правой частью.

В случае, когда вместо евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ берется сепарабельное банахово пространство E, а вместо отрезка $[t_0, t_1]$ — компактное топологическое пространство $T = (T, \mathcal{T}, \mu)$, из соответствующего обобщения теоремы А. А. Ляпунова (см. [6]) следует более слабое утверждение о том, что для любой счетно аддитивной векторной меры $m : \mathcal{T} \to E$, обладающей плотностью, и любых чисел $\alpha \in [0, 1]$ и $\delta > 0$ существует множество $A_\alpha \in \mathcal{T}$ такое, что справедлива оценка в виде неравенства $\|m(A_\alpha) - \alpha\, m(T)\| < \delta$.

В задачах оптимального управления системами в банаховом пространстве возникает потребность для произвольных счетных наборов векторных мер $\{m_j\}_{j=1}^\infty$, $m_j : \mathcal{T} \to E$, обладающих плотностью, и чисел $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$ таких, что $\alpha_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$, для любого числа $\delta > 0$ найти разбиение пространства T на непересекающиеся измеримые подмножества $\{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{T}$, для которых справедливы оценки $\|m_j(A_j) - \alpha_j\, m_j(T)\| < \delta$ для всех $j \in \mathbb{N}$.

Особый интерес представляет случай, когда каждая из векторных мер m_j еще и непрерывно зависит от параметра s, принадлежащего некоторому метрическому пространству S, т. е. имеем меры вида $m_{j,s} : \mathcal{T} \to E$, а числа $\{\alpha_j\}$ зависят от параметра и соответствуют некоторому разбиению единицы $\{p_j(s)\}$ пространства параметров S. При этом для любого числа $\delta > 0$ требуется доказать существование непрерывного по параметру семейства $\{A_j(s)\}_{j=1}^\infty$ измеримых разбиений пространства T такого, что справедливы оценки $\| \sum_{j=1}^\infty m_{j,s}(A_j(s)) - \sum_{j=1}^\infty p_j(s)\, m_{j,s}(T)\| < \delta$. Данная проблема во многом решена в работе [7], что позволило авторам этой работы доказать теорему о релаксации для дифференциальных включений с липшицевой правой частью и со значениями из сепарабельного банахова пространства.

Данная статья посвящена развитию результатов указанных работ. Для счетного семейства векторных мер, обладающих плотностью, непрерывно зависящих от параметра, принадлежащего метрическому пространству, построено счетное семейство измеримых разбиений компактного носителя этого семейства мер, непрерывно параметризованного тем же параметром и дающего приближенное разложение выпуклой комбинации значений мер на единице с более точными равномерными оценками вида $\sum_{j=1}^\infty \|m_{j,s}(A_j(s)) - p_j(s)\, m_{j,s}(T)\| < \delta$.

1. Основные обозначения и определения

Мы в дальнейшем полагаем, что $(T, \mathcal{T}, \mu)$ — компактное топологическое пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств $\mathcal{T}$ и с конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ на них. Также пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть S — сепарабельное метрическое пространство параметров. Через I обозначаем числовой отрезок $I := [0, 1]$.

Напомним, что функция $m : \mathcal{T} \to E$ называется *конечно аддитивной векторной мерой*, если для любых непересекающихся множеств $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ следует, что $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$. Если, дополнительно, для любой последовательности $\{A_n\}$ попарно не пересекающихся множеств из $\mathcal{T}$ имеет место равенство

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\Big) = \sum_{n=1}^\infty m(A_n),$$

где правый ряд сходится по норме в пространстве E, тогда m называется *счетно аддитивной векторной мерой*.

Напомним, что семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется *возрастающим*, если для любых $\alpha,\beta\in I=[0,1]$, $\alpha<\beta$, следует включение $A_\alpha\subset A_\beta$.

Важнейшим примером счетно аддитивных векторных мер является неопределенный интеграл Бохнера. Поясном это. Пусть $f:T\to E$ – интегрируемая по Бохнеру функция. Тогда функция $m_f:\mathcal{T}\to E$ вида

$$m_f(A):=\int\limits_A f(t)d\mu(t),\quad A\in\mathcal{T},$$

является счетно аддитивной и μ — непрерывной векторной мерой ограниченной вариации (см., например, [6]). В этом случае функцию $f(\cdot)\in L^1(T,E)$ называют *плотностью (или производной Радона — Никодима) векторной меры* m_f.

Отметим, что мы будем иметь дело лишь с такими счетно аддитивными векторными мерами, для которых существуют плотности. Совокупность всех таких счетно аддитивных векторных мер, обладающих плотностями, будем обозначать через $\mathcal{M}(T,E)$.

Для каждой векторной меры $m\in\mathcal{M}(T,E)$, обладающей плотностью $f(\cdot)\in L^1(T,E)$, определим *норму этой меры* через норму ее плотности, т. е.

$$\|m\|=\|f(\cdot)\|_{L^1}.$$

Поэтому если для каждого $s\in S$ определена векторная мера $m_s\in\mathcal{M}(T,E)$ с плотностью $f_s(\cdot)\in L^1(T,E)$, то отображение m_s из S в $\mathcal{M}(T,E)$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображение f_s из S в $L^1(T,E)$ непрерывно.

В случае, когда имеется конечный набор векторных мер $m_1,\dots,m_n\in\mathcal{M}(T,E)$, определим *составную векторную меру* вида

$$\widetilde{m}:=(m_1,\dots,m_n)\in\mathcal{M}(T,E\times\dots\times E),$$

норму такой меры определим по формуле

$$\|\widetilde{m}\|:=\max\{\|m_1\|,\dots,\|m_n\|\}.$$

Напомним, что *характеристической функцией произвольного множества* $B\subset T$ называется функция вида $\chi_B(t):=1$, если $t\in B$, и $\chi_B(t):=0$, если $t\notin B$.

Для всякой векторной меры $m\in\mathcal{M}(T,E)$ *сужением меры m на некоторое множество* $B\in\mathcal{T}$ называется следующая мера:

$$m_{|B}(D):=m(D\cap B)\ \ \forall D\in\mathcal{T}.$$

Заметим, что если $f(\cdot)\in L^1(T,E)$ — плотность векторной меры m, то очевидно, что плотностью векторной меры $m_{|B}$ является функция $f(\cdot)\,\chi_B(\cdot)$.

Для измеримых подмножеств пространства T, точнее для классов эквивалентностей из $\mathcal{T}$, можно ввести метрику по формуле

$$\varrho(B,C):=\mu(B\triangle C)\ \ \forall B,C\in\mathcal{T},$$

где $B\triangle C$ означает симметрическую разность множеств B и C.

В смысле этой метрики будем говорить *о непрерывности отображений* вида $A:S\to\mathcal{T}$.

Предложение 1. *Пусть для каждого $s\in S$ заданы векторная мера $m(s)\in\mathcal{M}(T,E)$ и множество $A(s)\in\mathcal{T}$, а также определена векторная мера $\hat{m}(s):=m(s)_{|A(s)}$. Тогда если отображения $m:S\to\mathcal{M}(T,E)$ и $A:S\to\mathcal{T}$ непрерывны, то и отображение $\hat{m}:S\to\mathcal{M}(T,E)$ также непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f(s)(\cdot)\in L^1(T,E)$ — плотность векторной меры $m(s)$ для любого $s\in S$. Выберем точку $s_0\in S$ и произвольное $\varepsilon>0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого $A\in\mathcal{T}$, у которого

$\mu(A) < \delta$, справедливо неравенство $\displaystyle\int_A \|f(s_0)(t)\| d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{3}$. В свою очередь, существует окрестность $U(s_0) \subset S$ точки s_0 такая, что в силу непрерывности мер $s \to m(s)$ и множеств $s \to A(s)$ справедливы неравенства $\|f(s)(\cdot) - f(s_0)(\cdot)\|_{L^1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$ и $\mu(A(s) \triangle A(s_0)) < \delta$ при всех $s \in U(s_0)$. В итоге имеем

$$\|\hat{m}(s) - \hat{m}(s_0)\| = \int\limits_T \|f(s)(t)\, \chi_{A(s)}(t) - f(s_0)(t)\, \chi_{A(s_0)}(t)\| d\mu(t)$$

$$\leq 2 \int\limits_T \|f(s)(t) - f(s_0)(t)\| d\mu(t) + \int\limits_{A(s)\triangle A(s_0)} \|f(s_0)(t)\| d\mu(t) < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство предложения. □

2. Некоторые следствия теоремы Ляпунова

Напомним формулировку теоремы А. А. Ляпунова о векторных мерах [1].

Теорема 1 (А. А. Ляпунов). *Пусть на компактном топологическом пространстве $(T, \mathcal{T}, \mu)$ с конечной неотрицательной неатомарной мерой Радона μ задана интегрируемая по Лебегу вектор-функция $f \colon T \to \mathbb{R}^n$. Определим векторную меру $m : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$ вида*

$$m(A) := \int\limits_A f(t)\, d\mu(t), \quad A \in \mathcal{T}.$$

Тогда множество

$$m(\mathcal{T}) := \{m(A) \mid A \in \mathcal{T}\},$$

т. е. совокупность всех векторов $m(A)$, отвечающих всевозможным измеримым подмножествам A из T, есть выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$.

Заметим, что для произвольного измеримого множества $D_0 \subset T$ меры ноль (например, пустого множества) получаем, что $m(D_0) = 0 \in m(\mathcal{T})$. Аналогично $m(T) \in m(\mathcal{T})$. Поэтому в силу теоремы А. А. Ляпунова получаем, что отрезок $[0, m(T)]$ принадлежит выпуклому компакту $m(\mathcal{T})$, соответственно для любого числа $\alpha \in [0, 1]$ точка $\alpha \cdot m(T)$ также принадлежит этому компакту $m(\mathcal{T})$. В результате получили

Следствие 1. *Пусть вектор-функция $f \colon T \to \mathbb{R}^n$ интегрируема по Лебегу. Тогда для любого числа $\alpha \in [0, 1]$ существует измеримое множество $A_\alpha \subset T$ такое, что $m(A_\alpha) = \alpha \cdot m(T)$,* т. е.

$$\alpha \int\limits_T f(t)\, d\mu(t) = \int\limits_{A_\alpha} f(t)\, d\mu(t).$$

Заметим, что для произвольных счетно аддитивных неатомарных векторных мер со значениями в бесконечномерном пространстве (и не обладающих плотностью) прямое распространение теоремы Ляпунова невозможно.

Для векторной меры, обладающей плотностью, со значениями в сепарабельном банаховом пространстве E известно обобщение теоремы Ляпунова (см. [6]), из которого следует, что в этом случае лишь замыкание совокупности всех векторов $m(D)$, отвечающих всевозможным измеримым подмножествам D из T, является выпуклым компактом в E.

Поэтому из обобщенной теоремы Ляпунова аналогично следствию 1 получаем лишь неравенство, т. е.

Следствие 2. *Пусть функция $f \colon T \to E$ интегрируема по Бохнеру. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ существует измеримое множество $A_\alpha \subset T$ такое, что*

$$\left\| \alpha \int\limits_T f(t)\, d\mu(t) - \int\limits_{A_\alpha} f(t)\, d\mu(t) \right\| < \varepsilon.$$

Объединяя следствия 1 и 2, получаем

Следствие 3. *Пусть функции $f\colon T \to E$ и $g\colon T \to \mathbb{R}^p$ интегрируемы по Бохнеру и по Лебегу соответственно. Определим векторные меры $m : \mathcal{T} \to E$ и $m_0 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^p$ вида*

$$m(A) := \int\limits_A f(t) d\mu(t); \quad m_0(A) := \int\limits_A g(t) d\mu(t) \quad \forall A \in \mathcal{T}. \tag{2.1}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in [0,1]$ существует множество $A_\alpha \in \mathcal{T}$ такое, что $\|m(A_\alpha) - \alpha \cdot m(T)\| < \varepsilon$ и $m_0(A_\alpha) = \alpha \cdot m_0(T)$, т.е.

$$\left\| \alpha \int\limits_T f(t)\, d\mu(t) - \int\limits_{A_\alpha} f(t)\, d\mu(t) \right\| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\alpha \int\limits_T g(t)\, d\mu(t) = \int\limits_{A_\alpha} g(t)\, d\mu(t). \tag{2.3}$$

Отметим, что в следствии 3 ничего не говорится о взаимосвязи полученных в нем измеримых множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и, кроме того, что для них выполнены соотношения (2.2) и (2.3). Нам хотелось бы, чтобы это семейство множеств было еще и возрастающим.

3. Сегменты и ε-сегменты

Определение 1 [8]. Пусть заданы функция $f \in L^1(T, E)$ и соответствующая ей векторная мера $m : \mathcal{T} \to E$ с плотностью f. Возрастающее семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}$, у которого $A_0 = \varnothing$ и $A_1 = T$, называется

1) сегментом для меры m тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in I = [0,1]$ справедливо равенство

$$m(A_\alpha) = \alpha \cdot m(T);$$

2) ε-сегментом для меры m тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha \in I$ справедливо неравенство

$$\|m(A_\alpha) - \alpha \cdot m(T)\| < \varepsilon.$$

В работе [9] доказана следующая теорема, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 2 [9, теорема 15]. *Пусть заданы функции $f \in L^1(T, E)$ и $g \in L^1(T, \mathbb{R}^p)$, а также соответствующие им векторные меры $m : \mathcal{T} \to E$ и $m_0 : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^p$ (см. формулы (2.1)). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует семейство $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}$, которое одновременно является ε-сегментом для векторной меры m и сегментом для векторной меры m_0.*

В дальнейшем нам также потребуются три леммы, которые либо доказаны в работе [9], либо являются небольшой модификацией утверждений из [9]. Для самодостаточности изложения и по согласованию с редакцией мы приводим доказательство ключевых вспомогательных утверждений.

Лемма 1 [8; 9, предложение 18]. *Пусть S — компактное хаусдорфово топологическое пространство, и пусть задано множество векторных мер $\{m_s\}_{s \in S} \subset \mathcal{M}(T, E)$ (т. е. имеющих плотности), которые непрерывно зависят от параметра $s \in S$. Пусть еще задана конечномерная векторная мера $m_0 \in \mathcal{M}(T, \mathbb{R}^p)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует семейство множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}$, которое является сегментом для меры m_0 и ε-сегментом для каждой из векторных мер m_s при $s \in S$.*

Отметим, что для одной и той же векторной меры $m \in \mathcal{M}(T, E)$ можно построить несколько различных ε-сегментов в $\mathcal{T}$. В дальнейшем нам потребуется находить пути непрерывного перехода от одного ε-сегмента такой меры к другому. Небольшое усиление предложения 2 из [7] (или предложения 19 из [9]) (в п. 3)) приводит к следующей лемме.

Лемма 2. *Пусть задана векторная мера* $m \in \mathcal{M}(T, E)$ (*т. е. обладающая плотностью*). *Пусть* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *и* $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ — *два семейства из* $\mathcal{T}$, *каждое из которых является* ε-*сегментом для меры* m *и сегментом для меры* μ. *Тогда существует непрерывное отображение* $D\colon I\times I \to \mathcal{T}$, *обладающее следующими свойствами*:

1) $D(0, \alpha) = A_\alpha$ *и* $D(1, \alpha) = B_\alpha$ *для любого* $\alpha \in I$;

2) *для каждого* $z \in I$ *семейство* $\{D(z, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ *является* $\varepsilon-$ *сегментом как для меры* m, *так и для меры* μ;

3) $\mu(D(z_1, \alpha_1)\triangle D(z_2, \alpha_2)) \le (|z_1 - z_2| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\mu(T), \quad \alpha_1, \alpha_2, z_1, z_2 \in I.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как семейства $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ являются сегментами для меры μ, то отображения $\alpha \to \chi_{A_\alpha}(\cdot)$ и $\alpha \to \chi_{B_\alpha}(\cdot)$ из I в $L^1(T, \mathbb{R}^1)$ непрерывны. Поэтому и отображения $\alpha \to m(A_\alpha)$ и $\alpha \to m(B_\alpha)$ также непрерывны. Следовательно, если определить величину

$$a := \max\{\max_{\alpha\in I} \|m(A_\alpha) - \alpha\, m(T)\|\,;\, \max_{\alpha\in I} \|m(B_\alpha) - \alpha\, m(T)\|\},$$

то получим, что $a < \varepsilon$. Возьмем число $\eta > 0$ такое, что $a + 2\eta < \varepsilon$.

Определим при каждом $\alpha \in I$ векторную меру вида

$$m_\alpha := (m_{|A_\alpha}, m_{|B_\alpha}, \mu_{|A_\alpha}, \mu_{|B_\alpha}) \in \mathcal{M}(T, E \times E \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1). \tag{3.1}$$

В силу предложения 1 отображение $\alpha \to m_\alpha$ непрерывно. Для выбранного числа η по лемме 1 существует семейство $\{C_z\}_{z\in I}$, которое является η-сегментом для каждой меры из семейства $\{m_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и сегментом для меры μ. Определим множества

$$D(z, \alpha) := (B_\alpha \cap C_z) \cup (A_\alpha \cap (T \setminus C_z)). \tag{3.2}$$

Покажем, что это искомое множество. По построению из (3.2) следует, что свойство 1) выполнено. По определению η-сегмента для семейства $\{C_z\}_{z\in I}$ имеем

$$\|m_\alpha(C_z) - z\, m_\alpha(T)\| < \eta \tag{3.3}$$

и поэтому

$$\|m_\alpha(T \setminus C_z) - (1 - z)\, m_\alpha(T)\| < \eta. \tag{3.4}$$

Из неравенства (3.3), в частности, следует для второго компонента в (3.1)

$$\|m(B_\alpha \cap C_z) - z\, m(B_\alpha)\| < \eta.$$

Так как семейство $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ является ε-сегментом для меры m, то

$$\|m(B_\alpha \cap C_z) - z\,\alpha\, m(T)\| \le \|m(B_\alpha \cap C_z) - z\, m(B_\alpha)\|$$
$$+ \|z\, m(B_\alpha) - z\,\alpha\, m(T)\| < \eta + z\, a. \tag{3.5}$$

Аналогично из (3.4) для первого компонента в (3.1) получаем

$$\|m((T \setminus C_z) \cap A_\alpha) - (1 - z)\,\alpha\, m(T)\| < \eta + (1 - z)\, a. \tag{3.6}$$

Суммируя неравенства (3.5) и (3.6), получаем для любого $\alpha \in I$

$$\|m(D(z, \alpha)) - \alpha\, m(T)\| \le 2\,\eta + a < \varepsilon.$$

Аналогично из неравенств (3.3) и (3.4) для последних двух компонентов в (3.1) имеем

$$|\mu(D(z, \alpha)) - \alpha\, \mu(T)| < \varepsilon.$$

Для доказательства непрерывности отображения $D : I \times I \to \mathcal{T}$, точнее свойства 3), отметим равенство

$$D(z,\alpha)\triangle D(y,\alpha) = (A_\alpha \triangle B_\alpha) \cap (C_z \triangle C_y).$$

Так как семейство $\{C_z\}_{z\in I}$ является сегментом для меры μ, то, например, при $z_1 > z_2$ имеем $C_{z_1} \supset C_{z_2}$, откуда $C_{z_1}\triangle C_{z_2} = C_{z_1} \setminus C_{z_2}$. В результате имеем

$$\mu(D(z_1,\alpha)\triangle D(z_2,\alpha)) \le \mu(C_{z_1}\triangle C_{z_2}) \le |z_1 - z_2|\, \mu(T).$$

С другой стороны, из формулы (3.2) следует

$$\mu(D(z,\alpha_1)\triangle D(z,\alpha_2)) = \int\limits_T \bigl|\chi_{D(z,\alpha_1)}(t) - \chi_{D(z,\alpha_2)}(t)\bigr| d\mu(t)$$

$$= \int\limits_T \bigl|\chi_{B_{\alpha_1}\cap C_z}(t) + \chi_{A_{\alpha_1}\cap(T\setminus C_z)}(t) - \chi_{B_{\alpha_2}\cap C_z}(t) - \chi_{A_{\alpha_2}\cap(T\setminus C_z)}(t)\bigr| d\mu(t)$$

$$\le \int\limits_T \bigl|\chi_{B_{\alpha_1}}(t) - \chi_{B_{\alpha_2}}(t)\bigr| \cdot \chi_{C_z}(t) d\mu(t) + \int\limits_T \bigl|\chi_{A_{\alpha_1}}(t) - \chi_{A_{\alpha_2}}(t)\bigr| \cdot \chi_{T\setminus C_z}(t) d\mu(t)$$

$$\le \mu(A_{\alpha_1}\triangle A_{\alpha_2}) + \mu(B_{\alpha_1}\triangle B_{\alpha_2}) \le 2|\alpha_1 - \alpha_2|\, \mu(T).$$

Сложив последние неравенства, получаем свойство 3). □

Лемма 3 [9, теорема 17]. *Пусть* $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ *— произвольная последовательность векторных мер с плотностями, т. е.* $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}(T,E)$, *и пусть мера* $m_0 = \mu$. *Определим векторные меры вида*

$$\widetilde{m}_j := (m_0, m_1, \ldots, m_j) : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^1 \times E \times \cdots \times E \quad \forall j = 0,1,2,\ldots.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ *существует непрерывное отображение* $D : [0,\infty) \times I \to \mathcal{T}$, *обладающее следующими свойствами*:

1) *для каждого* $z \in [0,\infty)$ *семейство множеств* $\{D(z,\alpha)\}_{\alpha\in I}$ *является* ε*-сегментом для меры* $\widetilde{m}_j$ при $j = [z]$;

2) $\mu(D(z_1,\alpha_1)\triangle D(z_2,\alpha_2)) \le (|z_1 - z_2| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\, \mu(T)$ $\forall \alpha_1,\alpha_2 \in I,\ z_1,z_2 \in [0,\infty)$.

Доказательство. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. По теореме 2 для каждого $j = 0,1,2,\ldots$ существует семейство множеств $\{D(j,\alpha)\}_{\alpha\in I}$, которое является ε-сегментом для векторной меры $\widetilde{m}_j$ и сегментом для меры μ. Чтобы расширить это семейство до значений $\{D(z,\alpha)\}_{\alpha\in I}$, определенных при всех $z \in [0,\infty)$, при каждом $j = 0,1,2,\ldots$ применим к паре семейств $\{D(j,\alpha)\}_{\alpha\in I}$ и $\{D(j+1,\alpha)\}_{\alpha\in I}$, являющихся ε-сегментами для векторной меры $\widetilde{m}_j$ и сегментами для меры μ, лемму 2, по которой существует непрерывное отображение $C_j : I \times I \to \mathcal{T}$, соединяющее эту пару семейств. Тогда для всех $z \in [j, j+1)$ определим отображение $D(z,\alpha) := C_j(z - [z], \alpha)$, которое очевидно удовлетворяет свойствам 1) и 2). □

4. Покрытия и разбиения

Далее будем полагать, что $S = (S,d)$ — сепарабельное метрическое пространство с метрикой d. *Открытым покрытием метрического пространства* (S,d) назовем некоторую совокупность непустых открытых множеств $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ таких, что $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = S$ и для любого $\lambda \in \Lambda$ выполнено $V_\lambda \ne S$.

Открытое покрытие $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ сепарабельного метрического пространства (S,d) назовем *локально конечным*, если для любой точки $s_0 \in S$ существует ее окрестность $U(s_0)$ такая, что $V_n \cap U(s_0) \ne \varnothing$ лишь для конечного набора индексов $n \in \mathbb{N}$.

Нам потребуется следующее свойство открытых покрытий.

Лемма 4. *Пусть $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset S$ локально конечное покрытие метрического пространства (S,d). Тогда существует локально конечное покрытие $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства (S,d) такое, что при любом $\lambda \in \Lambda$ выполнено включение $\overline{W}_\lambda \subset V_\lambda$ (где $\overline{W}_\lambda$ — замыкание множества W_λ).*

Доказательство. Для любого $s \in S$ определим множество индексов $\Lambda_s := \{\lambda \in \Lambda \mid s \in V_\lambda\}$. Так как покрытие $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ локально конечное, то каждое множество Λ_s конечно и непусто. Для любого $\lambda \in \Lambda$ определим множество

$$S_\lambda := \{s \in V_\lambda \mid d(s, S\setminus V_\lambda) = \max_{\nu\in\Lambda_s} d(s, S\setminus V_\nu)\}.$$

Таким образом, каждой точке $s \in S$ сопоставили те множества V_λ, в которых она содержится с наибольшим шаром. В результате получили, что для любого $s \in S$ найдется индекс $\lambda \in \Lambda$ такой, что $s \in S_\lambda$, а также $S_\lambda \subset V_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Зафиксируем произвольное $\lambda_0 \in \Lambda$. Рассмотрим произвольную точку $s_1 \in S\setminus V_{\lambda_0}$. По определению покрытия существует индекс $\lambda_1 \in \Lambda$ такой, что $s_1 \in V_{\lambda_1}$. Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_{3\varepsilon}(s_1) \subset V_{\lambda_1}$. Покажем, что $B_\varepsilon(s_1)\cap S_{\lambda_0} = \varnothing$. Если это не так, то существует точка $s_2 \in B_\varepsilon(s_1)\cap S_{\lambda_0}$. Тогда получаем, что $B_{2\varepsilon}(s_2) \subset B_{3\varepsilon}(s_1) \subset V_{\lambda_1}$. Следовательно, $\lambda_1 \in \Lambda_{s_2}$ и справедливы неравенства

$$d(s_2, S\setminus V_{\lambda_0}) \le d(s_2, s_1) \le \varepsilon < 2\varepsilon \le d(s_2, S\setminus V_{\lambda_1}),$$

т. е. $s_2 \notin S_{\lambda_0}$, противоречие. Итак, показали, что любая точка $s_1 \in S\setminus V_{\lambda_0}$ имеет окрестность, не пересекающуюся с S_{λ_0}. Следовательно, справедливо следующее включение:

$$\overline{S_{\lambda_0}} \subset V_{\lambda_0}.$$

Рассмотрим замкнутые множества $\overline{S_{\lambda_0}}$ и $\overline{U}_{\lambda_0} := S\setminus V_{\lambda_0}$. Как только что показали, они не пересекаются. В силу того что всякое метрическое пространство является нормальным пространством, существуют непересекающиеся окрестности $U(\overline{S_{\lambda_0}})$ и $U(\overline{U}_{\lambda_0})$ этих множеств $\overline{S_{\lambda_0}}$ и $\overline{U}_{\lambda_0}$. Обозначим $W_{\lambda_0} := U(\overline{S_{\lambda_0}})$. Тогда по построению $W_{\lambda_0} \subset S\setminus U(\overline{U}_{\lambda_0}) \subset V_{\lambda_0}$, причем множество $S\setminus U(\overline{U}_{\lambda_0})$ замкнуто. Следовательно, W_{λ_0} – открытое подмножество V_{λ_0}, принадлежащее ему вместе со своим замыканием.

Поскольку для любого $s \in S$ существует $\lambda \in \Lambda$ такое, что $s \in S_\lambda \subset W_\lambda$, то таким образом мы построили искомое покрытие $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ пространства S. □

Семейство непрерывных функций $p_n : S \to I$ (где $I := [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$) называется *разбиением единицы, подчиненным локально конечному открытому покрытию* $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ пространства S, если для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\operatorname{supp} p_n \subset V_n$ и для любой точки $s \in S$ справедливо равенство $\sum_{n=1}^\infty p_n(s) = 1$, причем в силу локальной конечности покрытия $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ лишь конечное число слагаемых в данной сумме отлично от нуля. (Напомним, что $\operatorname{supp} f := \overline{\{s \in S \mid f(s) > 0\}}$.)

Измеримым разбиением пространства T называется совокупность измеримых подмножеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{T}$ таких, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $\forall i \ne j$ и $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = T$.

Если $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ — измеримое разбиение пространства T, зависящее от параметра $s \in S$, и если отображения $A_n : S \to \mathcal{T}$ непрерывны при любом $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ — *непрерывное семейство измеримых разбиений пространства* T.

Семейство измеримых разбиений $\{A_n(s)\}_{n=1}^\infty$ пространства T называется *конечным*, если при любом $s_0 \in S$ измеримое разбиение $\{A_n(s_0)\}_{n=1}^\infty$ является конечным, т. е. $\mu(A_n(s_0)) > 0$ лишь для конечного набора индексов $n \in \mathbb{N}$, а для остальных индексов $A_n(s_0) = \varnothing$.

В работе [9] доказана следующая замечательная теорема.

Теорема 3 [9, теорема 18]. *Рассмотрим локально конечное открытое покрытие $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ метрического пространства S, и пусть $\{p_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть для каждого $s \in S$ задана последовательность векторных мер $\{m_{n,s}\}_{n=1}^\infty$ с плотностями, т. е. $\{m_{n,s}\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}(T,E)$, причем при каждом $n \in \mathbb{N}$ отображение $m_{n,\cdot}$:*

$S \to E$ непрерывно. Тогда для любого $\delta > 0$ существует конечное и непрерывное семейство $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}$ измеримых разбиений пространства T такое, что для любого значения $s \in S$ справедливы неравенства

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} m_{n,s}(A_n(s)) - \sum_{n=1}^{\infty} p_n(s) \cdot m_{n,s}(T) \Big\| < \delta,$$

$$|\mu(A_n(s)) - p_n(s)\mu(T)| < \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Наша цель — привести важное для приложений обобщение указанной теоремы.

5. Основной результат

Теорема 4. *Рассмотрим локально конечное открытое покрытие $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства S, и пусть $\{p_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Пусть для каждого $s \in S$ задана последовательность векторных мер $\{m_{n,s}\}_{n=1}^{\infty}$ с плотностями, т. е. $\{m_{n,s}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(T, E)$, причем при каждом $n \in \mathbb{N}$ отображение $m_{n,\cdot} : S \to E$ непрерывно. Тогда для любого $\delta > 0$ существует конечное и непрерывное семейство $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}$ измеримых разбиений пространства T такое, что*

1) *при любых значениях $s \in S$ и $n \in \mathbb{N}$, для которых $\mu(A_n(s)) > 0$, следует, что и $p_n(s) > 0$;*

2) *для любого значения $s \in S$ справедливы соотношения*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|m_{n,s}(A_n(s)) - p_n(s) m_{n,s}(T)\| < \delta, \tag{5.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n(s)) - p_n(s)\mu(T)| < \delta, \tag{5.2}$$

$$\lim_{s' \to s} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n(s') \triangle A_n(s)) = 0. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть $f_n(s)(\cdot) \in L^1(T, E)$ — соответствующие плотности векторных мер $m_{n,s} : \mathcal{T} \to E$. По условию теоремы при каждом $n \in \mathbb{N}$ отображения $f_n : S \to L^1(T, E)$ непрерывны. Для каждого $s \in S$ обозначим

$$N_s := \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(s) > 0\}.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим непрерывные функции $h_n : S \to I$ такие, что $h_n(s) \equiv 1$ при $s \in \operatorname{supp} p_n$ и $\operatorname{supp} h_n \subset V_n$. Определим функцию $r(s) := \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s)$. В силу локальной конечности покрытия $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства S для любого $s \in S$ мощность множества N_s (которую обозначаем $\operatorname{card}\{N_s\}$) конечна, точнее, $\operatorname{card}\{N_s\} \le r(s) < \infty$.

Определим функции $\widetilde{f_n} : S \to L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$ вида $\widetilde{f_n}(s)(\cdot) := (1, f_n(s)(\cdot))$.

Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $s \in S$ определим функцию $k_n(s) : T \to L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$ вида

$$k_n(s)(t) := r(s) \cdot h_n(s) \cdot \widetilde{f_n}(s)(t), \quad t \in T. \tag{5.4}$$

Очевидно, что при всех $s \in S$ имеем $r(s) \ge 1$, также отображения $r : S \to \mathbb{R}^1$ и $k_n : S \to L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$ очевидно непрерывны. Для произвольного $s_0 \in S$ определим множество

$$U_{s_0} := \bigcap_{n \in N_{s_0}} \Big\{ s \in S \big| p_n(s) > 0, \|f_n(s) - f_n(s_0)\|_{L^1} < \frac{\delta}{16 r(s_0)}, 3r(s) < 4r(s_0) \Big\}. \tag{5.5}$$

Очевидно, что семейство множеств $\{U_s\}_{s\in S}$ является открытым покрытием метрического пространства S. В силу паракомпактности пространства S и в силу леммы 4 существует последовательность непрерывных функций $r_i : S \to I$ такая, что семейство множеств $\{\operatorname{int}\operatorname{supp} r_i\}_{i=1}^{\infty}$ является локально конечным подпокрытием покрытия $\{U_s\}_{s\in S}$, причем множества

$$\overline{W}_i := \{s \in S \mid r_i(s) = 1\}$$

все еще покрывают пространство S. Поэтому существуют точки $s_i \in S$ такие, что $\overline{W}_i \subset U_{s_i}$ при $\forall i \in \mathbb{N}$. Определим функции $u_j \in L^1(T, \mathbb{R}^1 \times E)$, $j \in \mathbb{N}$, по формуле

$$u_j(t) := \begin{cases} k_n(s_i)(t), & \text{если } j = 2^i 3^n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{5.6}$$

Через эти функции (как плотности) определим векторные меры $m_j(A) := \int_A u_j(t)d\mu(t)$ при всех $j \in \mathbb{N}$, и пусть $m_0(A) = \mu(A)$ при $A \in \mathcal{T}$. Определим также векторные меры вида

$$\widetilde{m}_j := (m_0, m_1, \ldots, m_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

По лемме 3 для полученной последовательности векторных мер $\{m_j\}_{j=0}^{\infty}$ существует непрерывное отображение $D : [0, \infty) \times I \to \mathcal{T}$, обладающее следующими свойствами:

1) Для каждого $z \in [0, \infty)$ семейство множеств $\{D(z, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для меры $\widetilde{m}_j$ при $j = [z]$;

2) $\mu(D(z_1, \alpha_1) \triangle D(z_2, \alpha_2)) \le (|z_1 - z_2| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\, \mu(T), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in I,\ z_1, z_2 \in [0, \infty)$.

Определим функцию $\tau : S \to \mathbb{R}^1_+$ вида

$$\tau(s) := \sum_{n,\,i=1}^{\infty} r_i(s)\, h_n(s)\, 2^i\, 3^n. \tag{5.7}$$

В силу локальной конечности покрытий $\{\operatorname{supp} r_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства S для любого $s \in S$ сумма в формуле (5.7) конечна и функция $\tau : S \to \mathbb{R}^1_+$ непрерывна.

Определим семейство измеримых множеств из T вида

$$A(s, \alpha) := D(\tau(s), \alpha), \quad s \in S, \quad \alpha \in I. \tag{5.8}$$

По доказанному и из формулы (5.8) получаем, что отображение $A : S \times I \to \mathcal{T}$ непрерывно, и для каждого $s \in S$ семейство $\{A(s, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для векторной меры $\widetilde{m}_j$, у которой $j = [\tau(s)]$, и для любых $s_1, s_2 \in S$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ справедлива оценка

$$\mu(A(s_1, \alpha_1) \triangle A(s_2, \alpha_2)) \le (|\tau(s_1) - \tau(s_2)| + 2|\alpha_1 - \alpha_2|)\, \mu(T).$$

Зафиксируем точку $s \in S$. Чтобы оценить $\tau(s)$ и найти значения $j \le [\tau(s)]$, сделаем следующее. Выберем номер $n \in N_s$, т. е. такой, что $h_n(s) = 1$, и номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что выбранная точка s принадлежит множеству $\overline{W}_m \subset U_{s_m}$. Отсюда $r_m(s) = 1$, и по определению множества U_{s_m} (см. (5.5)) имеем $n \in N_{s_m}$, т. е. $p_n(s_m) > 0$, следовательно, $h_n(s_m) = 1$. Поэтому и из формулы (5.7) получаем, что $\tau(s) \ge r_m(s)\, h_n(s)\, 2^m\, 3^n = 2^m\, 3^n$. Таким образом, выбирая $j = 2^m\, 3^n$, получаем неравенство $j \le [\tau(s)]$, в силу чего семейство $\{A(s, \alpha)\}_{\alpha\in I}$ является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для векторной меры $\widetilde{m}_j$. В частности, оно является $\dfrac{\delta}{4}$-сегментом для векторной меры m_j при $j = 2^m\, 3^n$. Последнее в силу формул (5.4) и (5.6) означает, что плотностью меры m_j является функция

$u_j(\cdot) = k_n(s_m)(\cdot) = r(s_m)\,\widetilde{f_n}(s_m)(\cdot)$, поэтому, деля соответствующее неравенство на $r(s_m) > 0$, получаем (покоординатно) два неравенства

$$|\mu(A(s,\alpha)) - \alpha\,\mu(T)| < \frac{\delta}{4r(s_m)} \quad \forall\alpha \in I, \tag{5.9}$$

и

$$\Bigg\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s_m)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s_m)(t)d\mu(t) \Bigg\| < \frac{\delta}{4r(s_m)} \quad \forall\alpha \in I. \tag{5.10}$$

В свою очередь, для выбранной точки $s \in S$ оценим выражение вида

$$\Bigg\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s)(t)d\mu(t) \Bigg\|$$

$$\le \Bigg\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s_m)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s_m)(t)d\mu(t) \Bigg\| + 2\|f_n(s)(\cdot) - f_n(s_m)(\cdot)\|_{L^1}.$$

Так как выбранная точка удовлетворяет включению $s \in U_{s_m}$, то по формуле (5.5) для U_{s_m} и согласно (5.10) получаем, что последнее выражение меньше, чем

$$\frac{\delta}{4r(s_m)} + 2\,\frac{\delta}{16r(s_m)} = \frac{3\delta}{8r(s_m)} < \frac{\delta}{2r(s)}, \tag{5.11}$$

откуда в итоге получаем, что для любого $s \in S$ и любого $n \in N_s$ справедливо неравенство

$$\Bigg\| \int\limits_{A(s,\alpha)} f_n(s)(t)d\mu(t) - \alpha \int\limits_T f_n(s)(t)d\mu(t) \Bigg\| < \frac{\delta}{2r(s)} \quad \forall\alpha \in I. \tag{5.12}$$

Аналогично из (5.9) и (5.11) для любого $s \in S$ получаем неравенство

$$|\mu(A(s,\alpha)) - \alpha\,\mu(T)| < \frac{\delta}{2r(s)} \quad \forall\alpha \in I, \tag{5.13}$$

Введем обозначения вида $z_0(s) := 0$, $z_n(s) := p_1(s) + \dots + p_n(s)$ и

$$A_n(s) := A(s, z_n(s)) \setminus A(s, z_{n-1}(s)). \tag{5.14}$$

Из этого определения очевидно следует свойство 1), т. е. если $p_n(s) = 0$, то $A_n(s) = \varnothing$. Так как $\{p_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ — локально конечное разбиение единицы на S, то при каждом $s \in S$ последовательность $\{z_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ является неубывающей, причем существует номер n_s такой, что при всех $n \ge n_s$ имеем равенство $z_n(s) = 1$, т. е. семейство $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ образует конечное измеримое разбиение пространства T, при этом $A_n(s) = \varnothing$, если $n \notin N_s$. Более того, так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $z_n : S \to I$ непрерывна, то отображения $s \to A(s, z_n(s))$ непрерывны (из S в $\mathcal{T}$). Отсюда, из (5.14) и из неравенства

$$\mu\Big(\big(A(s_1, z_n(s_1)) \setminus A(s_1, z_{n-1}(s_1))\big) \triangle \big(A(s_2, z_n(s_2)) \setminus A(s_2, z_{n-1}(s_2))\big)\Big)$$

$$\le \mu\big(A(s_1, z_n(s_1)) \triangle A(s_2, z_n(s_2))\big) + \mu\big(A(s_1, z_{n-1}(s_1)) \triangle A(s_2, z_{n-1}(s_2))\big)$$

следует, что и отображения $A_n : S \to \mathcal{T}$ также непрерывны.

Покажем, что множества $A_n(s)$ удовлетворяют неравенствам (5.1) и (5.2). Из формулы (5.14), включения $A(s, z_{n-1}(s)) \subset A(s, z_n(s))$ и неравенств (5.12) и (5.13), взятых при $\alpha = z_n(s)$ и $\alpha = z_{n-1}(s)$, получаем для любого $n \in \mathbb{N}$ неравенства

$$\Bigg\| \int\limits_{A_n(s)} f_n(s)(t)d\mu(t) - p_n(s) \int\limits_T f_n(s)(t)d\mu(t) \Bigg\| < \frac{\delta}{r(s)},$$

$$|\mu(A_n(s)) - p_n(s)\,\mu(T)| < \frac{\delta}{r(s)}.$$

Мощность множества индексов n, для которых $A_n(s) \neq \varnothing$ (т. е. $\operatorname{card}\{n \mid A_n(s) \neq \varnothing\}$), можно оценить сверху, а именно: $\operatorname{card}\{n \mid A_n(s) \neq \varnothing\} = \operatorname{card}\{N_s\} \leq r(s)$. При суммировании последних неравенств по всем $n \in \mathbb{N}$ достаточно брать лишь $n \in N_s$, так как при $n \notin N_s$ имеем $p_n(s) = 0$ и $A_n(s) = \varnothing$. В результате получаем неравенства (5.1) и (5.2).

Поскольку покрытие $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ пространства S является локально конечным, то для любой фиксированной точки $s_0 \in S$ выберем ее окрестность $U(s_0)$ так, что существует конечный набор индексов $N(s_0) \subset \mathbb{N}$ такой, что $V_n \cap U(s_0) \neq \varnothing$ лишь при $n \in N(s_0)$. Пусть мощность этого множества $\operatorname{card}\{N(s_0)\} := \widetilde{r}(s_0)$. Тогда для любого $s \in U(s_0)$ имеем $r(s) \leq \widetilde{r}(s_0) < \infty$. Это означает, что для любого $s \in U(s_0)$ при условии, что $n \notin N(s_0)$, имеем $p_n(s) = 0$, т. е. $A_n(s) = \varnothing$. В результате для любого $s \in U(s_0)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n(s) \triangle A_n(s_0)) = \sum_{n \in N(s_0)} \mu(A_n(s) \triangle A_n(s_0)).$$

Отсюда и из того, что каждое отображение $A_n : S \to \mathcal{T}$ непрерывно, т. е. каждое слагаемое в этой сумме стремится к нулю при $s \to s_0$, а число слагаемых для любого s из окрестности $U(s_0)$ конечно, получаем равенство (5.3). □

В заключение покажем, как по полученному в теореме 5 конечному измеримому разбиению $\{A_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ пространства T, сильно непрерывному по параметру $s \in S$ (в смысле выполнения равенства (5.3)), можно строить непрерывные отображения.

Предложение 2. *Пусть S — сепарабельное метрическое пространство, и пусть для каждого $s \in S$ и $n \in \mathbb{N}$ заданы измеримые подмножества $A_n(s)$ компактного пространства T такие, что справедливы соотношения*

$$\begin{cases} A_{n_1}(s) \cap A_{n_2}(s) = \varnothing \quad \forall n_1 \neq n_2;\ T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n(s); \\ \lim\limits_{s \to s_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n(s) \triangle A_n(s_0)) = 0 \quad \forall s_0 \in S. \end{cases} \tag{5.15}$$

Пусть заданы функции $v_n(\cdot) \in L^1(T, E)$, $n \in \mathbb{N}$, для которых существует функция $k(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^1_+)$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|v_n(t)\| \leq k(t)$ при п.в. $t \in T$. Пусть определено отображение g из S в $L^1(T, E)$ по формуле

$$g(s)(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n(s)}(t) v_n(t), \quad t \in T. \tag{5.16}$$

Тогда отображение g: $S \to L^1(T, E)$ непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.15), (5.16) для любого $s, s_0 \in S$ получаем оценки интеграла

$$\int\limits_T \|g(s)(t) - g(s_0)(t)\|\, d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_T \Big|\chi_{A_n(s)}(t) - \chi_{A_n(s_0)}(t)\Big|\, \|v_n(t)\|\, d\mu(t)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_T \chi_{A_n(s) \triangle A_n(s_0)}(t) k(t)\, d\mu(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n(s) \triangle A_n(s_0)} k(t) d\mu(t),$$

и в силу условия (5.15) при $s \to s_0$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. □

Заключение

Полученный результат позволяет построить непрерывное отображение некоторого множества функций, являющихся приближениями решений дифференциального включения с неограниченной правой частью и значениями в банаховом пространстве, во множество решений этого включения. В свою очередь с помощью такого отображения и других результатов удается обобщить класс оптимизационных задач, для которых удается доказать необходимые условия оптимальности решения в форме Эйлера — Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lapunov A.A.** Sur le fonction-vecteurs completement additives // Izv. Akad.Nauk SSSR. Ser Math. 1940. Vol. 4. P. 465–478.
2. **Lindenstrauss J.** A short proof of Lyapounov's convexity theorem // J. Math. Mech. 1966. Vol. 15. P. 971–972.
3. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
4. **Polovinkin E.S.** The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions // Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty / eds. G. B. Di Masi, A. Gombani, A. B. Kurzhansky. Ser. PSCT 10. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 349–360. doi: 10.1007/978-1-4612-0443-5_23 .
5. **Половинкин Е.С.** Необходимые условия оптимальности с дифференциальными включениями // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 387–400.
6. **Diestel J., J.J.Uhl** Theory of vector measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977. 322 p. (Math. Surveys, No. 15). doi: 10.1090/surv/015 .
7. **Fryszkowski. A., Rzezuchowski, T.** Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem // J. Diff. Eqs. 1992. Vol 94. P. 254–265. doi: 10.1016/0022-0396(91)90092-N .
8. **Fryszkowski, A.** Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps // Studia Math. 1983. Vol. 76, no. 2. P. 163–174.
9. **Fryszkowski, A.** Fixed point theory for decomposable sets. Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 2004. 209 p. doi: 10.1007/1-4020-2499-1 .

Половинкин Евгений Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры высшей математики
Московского физико-технического института (государственного университета),
г. Москва
e-mail: polovinkin.es@mipt.ru
Поступила 25.09.2017

REFERENCES

1. Lapunov A.A. Sur le fonction-vecteurs completement additives. *Izv. Akad.Nauk SSSR, Ser Math.*, 1940, vol. 4, pp. 465–478.
2. Lindenstrauss J. A short proof of Lyapounov's convexity theorem. *J. Math. Mech.*, 1966, vol. 15, pp. 971–972.
3. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Ser. Studies Math. Appl., vol. 6, Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland Publ. Comp., 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.
4. Polovinkin E.S. The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschetzean differential inclusions. In: *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, G.B.Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky (eds.), Ser. PSCT, vol. 10, Boston: Birkhäuser, 1991, pp. 349–360. doi: 10.1007/978-1-4612-0443-5_23 .
5. Polovinkin E.S. Necessary conditions for an optimization problem with a differential inclusion. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 350–361.
6. Diestel J., Uhl J.J. *Theory of vector measures*, Ser. Math. Surveys, no. 15, Providence: Amer. Math. Soc., 1977, 322 p. doi: 10.1090/surv/015 .

7. Fryszkowski. A., Rzezuchowski, T. Continuous version of Filippov–Wazewski relaxation theorem. *J. Diff. Eqs.*, 1992, vol. 94, no. 2, pp. 254–265. doi: 10.1016/0022-0396(91)90092-N .
8. Fryszkowski A. Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps. *Studia Math.*, 1983, vol. 76, no. 2, pp. 163–174.
9. Fryszkowski A. *Fixed point theory for decomposable sets*. Dordrecht, Boston, Kluwer Acad. Publ., 2004, 209 p. doi: 10.1007/1-4020-2499-1 .

The paper was received by the Editorial Office on September 25, 2017.

Evgeny Sergeevich Polovinkin, Dr. Phys.-Math. Sci.„ Prof., Prof. of the Chair of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, 141700 Russia,
e-mail: polovinkin.es@mipt.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.935

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Л. И. Родина

Рассматриваются дифференциальные уравнения и управляемые системы с импульсным воздействием, зависящие от случайных параметров. Стохастическое поведение данных объектов выражается в том, что длины интервалов θ_k между моментами импульсов τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, являются случайными величинами и размеры импульсов также зависят от случайных воздействий. Основным объектом исследования выступает управляемая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x, w_k, v_k),$$

зависящая от случайных параметров $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ и v_k, $k = 0, 1, \ldots$. На множестве Σ всех возможных последовательностей $\big((\theta_0, v_0), \ldots, (\theta_k, v_k), \ldots\big)$ определена вероятностная мера μ. В качестве допустимых управлений $u = u(t)$ берем всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^m$; вектор w_k также является управлением, влияющим на поведение системы в моменты времени τ_k. Рассматривается множество $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) : t \in [0, +\infty),\, x \in M(t)\big\}$, заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа. Основными результатами работы являются достаточные условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$, выполненные с вероятностью единица. Показано, что исследование устойчивости множества с помощью метода функций Ляпунова можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения соответствующего дифференциального уравнения. Также изучается асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, зависящих от случайных параметров. Получены условия, при которых решения уравнений обладают свойствами устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости, выполненными для всех значений случайного параметра и выполненными с вероятностью единица. Результаты работы проиллюстрированы на примерах вероятностной модели популяции, подверженной промыслу и модели конкуренции двух видов с импульсным воздействием.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения и управляемые системы со случайными параметрами, устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.

L. I. Rodina. On asymptotic properties of solutions of control systems with random parameters.

Differential equations and control systems with impulse action and random parameters are studied. These objects are characterized by stochastic behavior: the lengths θ_k of the intervals between the times of the impulses τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, are random variables and the magnitudes of the impulses also depend on random actions. The basic object of research is the control system

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_k} = g(x, w_k, v_k),$$

which depends on random parameters $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ and v_k, $k = 0, 1, \ldots$. A probability measure μ is defined on the set Σ of all possible sequences $\big((\theta_0, v_0), \ldots, (\theta_k, v_k), \ldots\big)$. Admissible controls $u = u(t)$ are bounded measurable functions with values in a compact set $U \subset R^m$, and the vector w_k is also a control affecting the behavior of the system at the times τ_k. We consider the set $\mathfrak{M} = \big\{(t, x) : t \in [0, +\infty),\, x \in M(t)\big\}$ defined by the function $t \mapsto M(t)$, which is continuous in the Hausdorff metric. The main result of the paper is sufficient conditions for the Lyapunov stability and asymptotic stability of the set $\mathfrak{M}$ with probability one. It is shown that the stability analysis of a set by means of the method of Lyapunov functions can be reduced to studying the stability of the zero solution of the corresponding differential equation. We also study the asymptotic behavior of solutions of differential equations with impulse action and random parameters. Conditions are obtained under which the solutions possess the Lyapunov stability and asymptotic stability for all values of the random parameter and with probability one. The results are illustrated by a probability model of a population subject to harvesting and by a model of competition of two kinds with impulse action.

Keywords: differential equations and control systems with random parameters, Lyapunov stability, asymptotic stability.

MSC: 34A60, 37N35, 49J15, 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-189-199

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00346-a).

Введение

Исследуются дифференциальные уравнения и управляемые системы с импульсным воздействием, зависящие от случайных параметров. Стохастический характер данных оъектов проявляется в том, что длины интервалов между моментами импульсов τ_k, $k = 0, 1, \ldots$, и размеры импульсного воздействия суть независимые случайные величины с заданными функциями распределения. Один из примеров таких объектов — уравнение с импульсами, моделирующее динамику популяции, подверженной промыслу; здесь предполагаем, что изменение размера популяции (равное размеру промысловых заготовок) в моменты τ_k, а также и сами эти моменты зависят от различных воздействий внешней среды, поэтому динамика популяции описывается уравнением со случайными параметрами. Другой пример — вероятностная модель, описывающая динамику популяций с типовой или возрастной структурой, в которой предполагается, что переход из одного типа или класса в другой носит скачкообразный характер и осуществляется в случайные моменты времени τ_k. Кроме моделей популяционной динамики, данными уравнениями и системами можно описать различные экономические модели; здесь случайными величинами могут являться размеры и моменты продаж товара; управляющее воздействие — это рекламное воздействие на покупателей. Отметим, что в детерминированном случае, когда моменты τ_k и величины импульсов фиксированы, данные модели описаны в работах [1–5], исследование вероятностных моделей начато в [6; 7].

В данной статье изучается асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений и управляемых систем со случайными параметрами, рассматриваются различные динамические режимы данных объектов. Получены условия, при которых решение дифференциального уравнения является устойчивым по Ляпунову, асимптотически устойчивым и устойчивым с вероятностью единица. Показано, что для управляемых систем при определенных условиях возникает ситуация, когда заданное множество $\mathfrak{M}$ устойчиво с вероятностью единица, но не является устойчивым в классическом смысле. Результаты работы проиллюстрированы на примерах вероятностной модели популяции, подверженной промыслу и модели конкуренции двух видов с импульсным воздействием.

1. Описание вероятностной модели

Рассматривается вероятностная модель, заданная управляемой системой со случайными параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x\big|_{t=\tau_k} &= g(x, w_k, v_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v_k \in \Omega_1$. В качестве допустимых управлений $u = u(t)$ берем всевозможные ограниченные измеримые функции со значениями в компактном множестве $U \subset \mathbb{R}^m$; вектор w_k также является управляющим воздействием, влияющим на поведение системы в моменты времени $t = \tau_k$ и принимает значения в компактном множестве $W \subset \mathbb{R}^p$. Предполагаем, что функция $(t, x, u) \to f(t, x, u)$ непрерывна, для каждого $v_k \in \Omega_1$ функция $(x, w_k) \to g(x, w_k, v_k)$ также непрерывна и решения системы (1.1) непрерывны слева.

В модели (1.1) моменты τ_k, $k = 0, 1, \ldots$ являются моментами скачков для системы с импульсным воздействием; это могут быть моменты появления новой генерации для изолированной популяции или моменты промысловых заготовок для популяции, подверженной промыслу. Предполагаем, что длины $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ интервалов (τ_k, τ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$, являются независимыми случайными величинами со значениями в множестве $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0]$, где $0 < \alpha_0 \leqslant \beta_0 < +\infty$, и величина скачка g в момент τ_k зависит от случайного параметра $v_k \in \Omega_1$, поэтому все параметры принадлежат множеству $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$, причем любое из множеств Ω_0 или Ω_1 может содержать только один элемент. В частном случае, когда все множество Ω состоит из одного элемента, вероятностная модель совпадает с детерминированной, поэтому она является обобщением детерминированной модели. Дополнительно можно предполагать, что при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ функция f зависит от случайного параметра $\gamma_k \in \Omega_2$, тогда $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \Omega_2$; этот случай здесь не будем рассматривать, чтобы не усложнять обозначения.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ как прямое произведение вероятностных пространств $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0, \mu_0)$ и $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$. Здесь Σ_0 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in \Omega_0$, система множеств $\mathfrak{A}_0$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\theta \in \Sigma_0 \colon \theta_0 \in I_0, \ldots, \theta_k \in I_k\}, \quad \text{где} \;\; I_i \doteq (t_i, s_i], \;\; i = 0, 1, \ldots, k,$$

а вероятностная мера μ_0 определена следующим образом. Для каждого промежутка I_i, $i = 0, 1, \ldots$, определим вероятностную меру $\widetilde{\mu}_0(I_i) = F(s_i) - F(t_i)$ с помощью функций распределения $F(t)$. На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde{\mu}_0(E_k) = \widetilde{\mu}_0(I_0) \cdot \widetilde{\mu}_0(I_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}_0(I_k),$$

тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [8, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma_0, \mathfrak{A}_0)$ существует единственная вероятностная мера μ_0, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}_0$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_0$.

Далее, пусть задано множество Ω_1 с сигма-алгеброй подмножеств $\widetilde{\mathfrak{A}}_1$, на которой определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}_1$. Обозначим через Σ_1 множество последовательностей

$$\Sigma_1 \doteq \{v \colon v = (v_0, \ldots, v_k, \ldots),\, v_k \in \Omega_1\},$$

через $\mathfrak{A}_1$ обозначим наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{v \in \Sigma_1 \colon v_0 \in A_0, \ldots, v_k \in A_k\}, \quad \text{где} \quad A_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}_1, \;\; i = 0, 1, \ldots, k,$$

определим меру $\widetilde{\mu}_1(D_k) = \widetilde{\mu}_1(A_0)\widetilde{\mu}_1(A_1) \ldots \widetilde{\mu}_1(A_k)$ и меру μ_1 как продолжение меры $\widetilde{\mu}_1$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_1$.

Отметим, что $\Sigma = \Sigma_0 \times \Sigma_1 = \{\sigma \colon \sigma = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)\}$, где $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega$. Зададим сигма-алгебру $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \times \mathfrak{A}_1$ и меру $\mu = \mu_0 \times \mu_1$, которая является прямым произведением вероятностных мер μ_0 и μ_1. Это означает, что $\mu(A \times B) = \mu_0(A)\mu_1(B)$ для всех $A \in \mathfrak{A}_0$, $B \in \mathfrak{A}_1$.

2. Асимптотические свойства решений уравнения со случайными параметрами

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, построенное в предыдущем разделе, и дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{z} &= q(t, z), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta z\big|_{t=\tau_k} &= \ell(z, v_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $(t, z, v_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega_1$. Предполагаем, что функция $(t, z) \to q(t, z)$ определена и непрерывна вместе с производной $q'_z(t, z)$ на множестве $(0, \infty) \times \mathbb{R}$; для каждого $v \in \Omega_1$ функция $z \to \ell(z, v)$ непрерывно дифференцируемая и функция $z \to \ell(z, v) + z$ неубывающая. Решения уравнения (2.2) предполагаем непрерывными слева.

Исследуются условия, при которых решения (2.2) обладают свойствами устойчивости по Ляпунову и асиптотической устойчивости, выполненными для всех значений случайного параметра и выполненными с вероятностью единица. Полученные результаты представляют самостоятельный интерес, а также служат для исследования поведения решений управляемой системы со случайными параметрами.

Уравнению (2.2) поставим в соответствие вспомогательное детерминированное уравнение

$$\begin{aligned} &\dot z = q(t,z), \quad t \neq k\theta, \\ &\Delta z\big|_{t=k\theta} = \ell(z,v), \quad k = 0,1,\ldots, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $(\theta, v) \in \Omega = \Omega_0 \times \Omega_1$. Отметим, что уравнение (2.3) можно рассматривать как частный случай уравнения со случайными параметрами (2.2) при фиксированном значении $\sigma = ((\theta,v),(\theta,v),\ldots) \in \Sigma$.

Обозначим через $\varphi(t,z_0)$ решение уравнения $\dot z = q(t,z)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,z_0) = z_0$. Пусть $\omega = (\theta, v) \in \Omega$. Введем в рассмотрение функцию

$$H(\omega,z) = H(\theta,v,z) \doteq \ell\big(\varphi(\theta,z),v\big) + \varphi(\theta,z).$$

Отметим, что если для любого $z \in \mathbb{R}$ решение $\varphi(t,z)$ продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$, то для каждого $\omega \in \Omega$ функция $z \to H(\omega,z)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $H'_z(\omega,z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$; это следует из непрерывной дифференцируемости функции $z \to \ell(z,v)$ и теоремы о дифференцируемости решений уравнения $\dot z = q(t,z)$ по начальным условиям.

Пусть $z(t,\sigma,z_0)$ является решением уравнения (2.2), удовлетворяющим начальному условию $z(0,\sigma,z_0) = z_0$.

О п р е д е л е н и е 1. Решение $z(t,\sigma,z_*)$ уравнения (2.2) назовем *устойчивым по Ляпунову равномерно относительно множества* $\widetilde\Sigma \subseteq \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \widetilde\Sigma) > 0$, что для всякого $\sigma \in \widetilde\Sigma$ решение $z(t,\sigma,z_0)$ уравнения (2.2) такое, что $|z_0 - z_*| < \delta$, удовлетворяет неравенству $|z(t,\sigma,z_0) - z(t,\sigma,z_*)| < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

О п р е д е л е н и е 2. Решение $z(t,\sigma,z_*)$ уравнения (2.2) назовем *асимптотически устойчивым равномерно относительно множества* $\widetilde\Sigma$, если оно устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $\widetilde\Sigma$ и существует $\Delta > 0$ такое, что для всякого $\sigma \in \widetilde\Sigma$ решение $z(t,\sigma,z_0)$ уравнения (2.2) такое, что $|z_0 - z_*| < \Delta$, удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} |z(t,\sigma,z_0) - z(t,\sigma,z_*)| = 0$.

Обозначим через $O_\Delta(z_*) = (z_* - \Delta, z_* + \Delta)$ окрестность точки z_* радиусом $\Delta > 0$.

Теорема 1. *Предположим, что существует $z_* \in \mathbb{R}$ такое, что $q(t,z_*) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\ell(z_*,v) = 0$ для всех $v \in \Omega_1$. Тогда*

1. *Если найдется $\Delta > 0$ такое, что $\sup\limits_{\omega\in\Omega}\big|H'_z(\omega,z)\big| \leqslant 1$ для всех $z \in O_\Delta(z_*)$, то решение $z(t,\sigma,z_*) \equiv z_*$ уравнения (2.2) устойчиво по Ляпунову равномерно относительно Σ.*

2. *Если $\varlimsup\limits_{z\to z_*} \sup\limits_{\omega\in\Omega}\big|H'_z(\omega,z)\big| < 1$, то решение $z(t,\sigma,z_*) \equiv z_*$ асимптотически устойчиво равномерно относительно множества Σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $q(t,z_*) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$, то уравнение $\dot z = q(t,z)$ имеет решение $\varphi(t,z_*) \equiv z_*$. Далее, поскольку $\ell(z_*,v) = 0$ для всех $v \in \Omega_1$, то $z(t,\sigma,z_*) \equiv z_*$ является решением уравнения (2.2) для любого $\sigma \in \Sigma$. Для каждого $\omega \in \Omega$ найдем

$$H(\omega,z_*) = H(\theta,v,z_*) \doteq \ell\big(\varphi(\theta,z_*),v\big) + \varphi(\theta,z_*) = z_*.$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$z_{k+1} = H(\omega_k, z_k), \quad (\omega_k, z_k) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{2.4}$$

где $\omega_k = (\theta_k, v_k)$. Обозначим через $z_k(\sigma,z_0)$ решение уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $z_0(\sigma,z_0) = z_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$z(\tau_k,\sigma,z_0) = z_k(\sigma,z_0) \quad \text{для всех} \ \ \sigma \in \Sigma, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{2.5}$$

Действительно, $z(\tau_0, \sigma, z_0) = z_0(\sigma, z_0) = z_0$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Пусть равенство (2.5) верно при некотором $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$z(\tau_{k+1}, \sigma, z_0) = \varphi\big(\theta_k, z(\tau_k, \sigma, z_0)\big) + \ell\big(\varphi(\theta_k, z(\tau_k, \sigma, z_0)), v_k\big)$$
$$= \varphi\big(\theta_k, z_k(\sigma, z_0)\big) + \ell\big(\varphi(\theta_k, z_k(\sigma, z_0)), v_k\big) = H(\omega_k, z_k(\sigma, z_0)) = z_{k+1}(\sigma, z_0).$$

В силу леммы 1 работы [9] из первого условия теоремы следует, что положение равновесия z_* уравнения (2.4) является устойчивым по Ляпунову равномерно относительно множества Σ. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого $\sigma \in \Sigma$ решение $z_k(\sigma, z_0)$ уравнения (2.4) такое, что $|z_0 - z_*| < \delta$, удовлетворяет неравенству $|z_k(\sigma, z_0) - z_*| < \varepsilon$ для всех $k = 0, 1, \ldots$. Следовательно, $|z(\tau_k, \sigma, z_0) - z_*| < \varepsilon$ для любого $\sigma \in \Sigma$ при всех $k = 0, 1, \ldots$. Поскольку $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ и $0 < \alpha_0 \leqslant \beta_0 < \infty$, то устойчивость по Ляпунову решения $z(t, \sigma, z_*) \equiv z_*$ уравнения (2.2), равномерная относительно множества Σ, следует из теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения $\dot{z} = q(t, z)$ от начальных условий.

Второе утверждение теоремы получаем аналогично, при помощи теоремы 1 работы [9]. $\square$

О п р е д е л е н и е 3. Решение $z(t, \sigma, z_*)$ уравнения (2.2) назовем *устойчивым по Ляпунову с вероятностью единица* (*асимптотически устойчивым с вероятностью единица*), если существует множество $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$ и $z(t, \sigma, z_*)$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) равномерно относительно множества Σ_0.

У с л о в и е 1. Пусть $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0]$, где $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \beta_0 < +\infty$. Кроме того, если $\alpha_0 = 0$, то существуют постоянные $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ такие, что для функции распределения $F(t)$ случайных величин $\theta_0, \theta_1, \ldots$ имеет место неравенство

$$F(t) \leqslant bt^a \quad \text{при} \;\; t \in (0, c). \tag{2.6}$$

Если $\alpha_0 = 0$ и выполнено (2.6), то найдется множество $\widetilde{\Sigma}_0 \subset \Sigma_0$ такое, что $\mu(\widetilde{\Sigma}_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \widetilde{\Sigma}_0$ точки $\tau_k = \tau_k(\sigma)$, $k = 0, 1, \ldots$, изолированы (см. лемму 19.1 работы [10]). Понятно, что если $\alpha_0 > 0$, то точки $\tau_k(\sigma)$ изолированы при любом $\sigma \in \Sigma_0$.

Буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины. Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству теоремы 1 и использует теорему 2 работы [9].

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* 1 *и существует $z_* \in \mathbb{R}$ такое, что $q(t, z_*) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\ell(z_*, v) = 0$ для всех $v \in \Omega_1$. Если найдется $\Delta > 0$ такое, что*

$$M\Big(\ln \sup_{z \in O_\Delta(z_*)} \big|H'_z(\omega, z)\big|\Big) < 0,$$

то решение $z(t, \sigma, z_*) \equiv z_*$ уравнения (2.2) *асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

3. О существовании асимптотически устойчивых решений в вероятностной модели популяции, подверженной промыслу

Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок и размеры этих заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot{z} = z(1 - z)$ и в случайные моменты времени τ_k некоторая доля биомассы v_k изымается из популяции. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} &\dot{z} = z(1 - z), \quad t \neq \tau_k, \\ &\Delta z\big|_{t=\tau_k} = -v_k z, \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $(z, v_k) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega_1$. Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ между моментами заготовок τ_k и доли заготовок v_k, $k = 0, 1, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, все $\theta_0, \theta_1, \ldots$ принимают значения в множестве $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset (0, \infty)$ и имеют одинаковое распределение F; $v_0, v_1, \ldots$ принадлежат отрезку $\Omega_1 = [\alpha_1, \beta_1] \subset (0, 1)$ и имеют одинаковое распределение G. Таким образом, $\Omega = [\alpha_0, \beta_0] \times [\alpha_1, \beta_1]$, $\omega_k = (\theta_k, v_k) \in \Omega$, $k = 0, 1, \ldots$. Вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ определим так же, как в первом разделе.

Пусть начальный объем биомассы популяции равен z_0, найдем $\varphi(t, z_0)$ — решение уравнения $\dot{z} = z(1 - z)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, z_0) = z_0$:

$$\varphi(t, z_0) = \frac{z_0 e^t}{z_0(e^t - 1) + 1}.$$

Выпишем функцию $H(\omega, z)$, заданную равенством (2):

$$H(\omega, z) = H(\theta, v, z) \doteq \ell\bigl(\varphi(\theta, z), v\bigr) + \varphi(\theta, z) = \frac{z e^{\theta}(1 - v)}{z(e^{\theta} - 1) + 1}.$$

Обозначим через Θ и Ψ независимые случайные величины с распределениями F и G соответственно.

Предложение 1. *Имеют место следующие утверждения*:

1. *Если* $e^{\beta_0}(1 - \alpha_1) \leqslant 1$, *то решение* $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ *уравнения* (3.7) *устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества* Σ.

2. *Если* $e^{\beta_0}(1 - \alpha_1) < 1$, *то решение* $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ *уравнения* (3.7) *асимптотически устойчиво равномерно относительно* Σ.

3. *Если* $e^{\beta_0}(1 - \alpha_1) \geqslant 1$, *но* $M\Theta + M\ln(1 - \Psi) < 0$, *то* $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ *асимптотически устойчиво с вероятностью единица* (*при этом* $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$, *но* $\widetilde{\Sigma} \neq \Sigma$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что для всех $z \geqslant 0$ выполнены равенства

$$\sup_{\omega \in \Omega} \bigl| H'_z(\omega, z) \bigr| = \sup_{\omega \in \Omega} \bigl| H'_z(\omega, 0) \bigr| = \sup_{\omega \in \Omega} \bigl(e^{\theta}(1 - v) \bigr) = e^{\beta_0}(1 - \alpha_1),$$

поэтому первое и второе утверждения следуют из теоремы 1. Далее, так как

$$M\Bigl(\ln \sup_{z \geqslant 0} \bigl| H'_z(\omega, z) \bigr| \Bigr) = M \ln\bigl(e^{\Theta}(1 - \Psi)\bigr) = M\Theta + M\ln(1 - \Psi), \tag{3.8}$$

то третье утверждение является следствием теоремы 2. $\square$

4. Устойчивые по Ляпунову и асимптотически устойчивые множества управляемой системы со случайными параметрами

Рассмотрим управляемую систему с импульсным воздействием (1.1). Поставим в соответствие системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{4.9}$$

где для каждой фиксированной точки $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x)$ состоит из всех предельных значений функции $f\bigl(t_i, x_i, U\bigr)$ при $(t_i, x_i) \to (t, x)$. Предполагаем, что при фиксированных (t, x) множество $F(t, x)$ непусто, выпукло и компактно и функция $(t, x) \to F(t, x)$ полунепрерывна сверху.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \bigl\{(t, x)\colon t \in \mathbb{R}_+,\ x \in M(t)\bigr\}$, заданное функцией $t \mapsto M(t)$, непрерывной в метрике Хаусдорфа. Введем следующие обозначения:

$$O_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| \leqslant r\}, \quad M^r(t) = M(t) + O_r(0), \quad N^r(t) = M^r(t) \setminus M(t);$$

построим множество $\mathfrak{N}^r = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+,\ x \in N^r(t)\}$.

О п р е д е л е н и е 4 (см. [11]). Скалярная функция $V(t,x)$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества $\mathfrak{M}$), если функция $(t,x) \to V(t,x)$ локально липшицева и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(t,x) = 0$ для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}$;

2) $V(t,x) > 0$ для некоторого $r > 0$ и всех $(t,x) \in \mathfrak{N}^r$.

Функция Ляпунова $V(t,x)$ называется *определенно положительной*, если для любого $\varepsilon \in \in (0,r)$ найдется такое $\delta > 0$, что $V(t,x) > \delta$ для всех

$$(t,x) \notin \mathfrak{M}^\varepsilon \doteq \big\{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+,\ x \in M^\varepsilon(t)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 5. Для локально липшицевой функции $V(t,x)$ *обобщенной производной* в точке $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $d = (1,p)$, $p \in \mathbb{R}^n$ (производной Ф. Кларка [12, с. 17]) называется предел

$$V^o(t,x;p) \doteq \limsup_{(\varepsilon,y)\to(0+0,x)} \frac{V(t+\varepsilon, y+\varepsilon p) - V(t,y)}{\varepsilon},$$

а выражения $V^o_{\min}(t,x) \doteq \inf\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$, $V^o_{\max}(t,x) \doteq \sup\limits_{p\in F(t,x)} V^o(t,x;p)$ называются *нижней* и *верхней производными* функции V в силу дифференциального включения (4.9).

О п р е д е л е н и е 6. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *устойчивым по Ляпунову* равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \widetilde{\Sigma}) > 0$, что для любого решения $\varphi(t,\sigma,x_0)$ системы (1.1) из условия $x_0 \in N^\delta(0)$ следует, что $(t, \varphi(t,\sigma,x_0)) \in \mathfrak{M}^\varepsilon$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $\sigma \in \Sigma_0$.

Пусть $\varrho(x,M) \doteq \inf\limits_{y\in M} |x-y|$ — расстояние от точки x до множества M в $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 7. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *асимптотически устойчивым* равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$, если оно устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $\widetilde{\Sigma}$ и существует такое число $r > 0$, что для каждого решения $\varphi(t,\sigma,x_0)$, $\sigma \in \widetilde{\Sigma}$, системы (1.1), удовлетворяющего условию $x_0 \in N^r(0)$, имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\big(\varphi(t,\sigma,x_0), M(t)\big) = 0$.

Условия устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости множества $\mathfrak{M}$ относительно систем с импульсным воздействием приведены в работах [13; 14]. Далее мы исследуем свойства устойчивости, выполненные с вероятностью единица.

О п р е д е л е н и е 8. Множество $\mathfrak{M}$ назовем *устойчивым по Ляпунову с вероятностью единица* (*асимптотически устойчивым с вероятностью единица*), если существует множество $\widetilde{\Sigma} \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde{\Sigma}) = 1$ и $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) равномерно относительно множества $\widetilde{\Sigma}$.

Теорема 3. *Предположим, что существуют определенно положительная функция Ляпунова $V(t,x)$ и функции $q(t,z)$, $\ell(z,v)$ такие, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, $v \in \Omega_1$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\max}(t,x) \leqslant q\big(t, V(t,x)\big), \tag{4.10}$$

$$\sup_{w\in W} V\big(t, x + g(x,w,v)\big) \leqslant \ell\big(V(t,x), v\big) + V(t,x). \tag{4.11}$$

Тогда если уравнение (2.2) *имеет решение $z(t,\sigma,0) \equiv 0$, устойчивое по Ляпунову с вероятностью единица, то множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированного $\sigma \in \Sigma$ исследуем решение $\varphi(t,\sigma,x_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0) = x_0$, где $x_0 \in N^\delta(0)$. Рассмотрим функцию $v(t) = V(t, \varphi(t,\sigma,x_0))$. Функция $v(t)$ является липшицевой на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$, в силу леммы 3 работы [11]; тогда по теореме Радемахера (см.

[15, с. 234]), она дифференцируема при почти всех t. В точках дифференцируемости функции $v(t)$ имеют место следующие неравенства (см. [11]): $\dot v(t) \leqslant V^o_{\max}\bigl(t, \varphi(t,\sigma,x_0)\bigr)$; поэтому из (4.10) получаем, что $\dot v(t) \leqslant q(t, v(t))$ на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k = 0, 1, \ldots$.

Пусть $z(t) = z(t, \sigma, z_0)$ является решением уравнения (2.2), удовлетворяющим начальному условию $z(0, \sigma, z_0) = v(0)$. В силу (4.11) для любых $w_0 \in W$ и $v_0 \in \Omega_1$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} v(0+0) &= V\bigl(0+0, \varphi(0+0,\sigma,x_0)\bigr) = V\bigl(0, \varphi(0,\sigma,x_0) + g(\varphi(0,\sigma,x_0), w_0, v_0)\bigr) \\ &\leqslant \ell\bigl(V(0,\varphi(0,\sigma,x_0)), v_0\bigr) + V(0,\varphi(0,\sigma,x_0)) = \ell\bigl(v(0), v_0\bigr) + v(0) \\ &= \ell\bigl(z(0), v_0\bigr) + z(0) = z(0+0). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Отметим, что $\dot z(t) = q(t, z(t))$ при $t \in (\tau_0, \tau_1)$, где $\tau_0 = 0$, тогда $\dot v(t) \leqslant \dot z(t)$ при $t \in (\tau_0, \tau_1)$. Из этого неравенства, учитывая (4.12), в силу теоремы С. А. Чаплыгина [16] получаем, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [\tau_0, \tau_1]$; следовательно, $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$.

Далее аналогично (4.12), для любого $v_1 \in \Omega_1$ выполнено неравенство

$$v(\tau_1 + 0) \leqslant \ell\bigl(v(\tau_1), v_1\bigr) + v(\tau_1).$$

Поскольку для каждого $v \in \Omega_1$ функция $z \to \ell(z, v) + z$ неубывающая, то из $v(\tau_1) \leqslant z(\tau_1)$ следует, что $\ell\bigl(v(\tau_1), v_1\bigr) + v(\tau_1) \leqslant \ell\bigl(z(\tau_1), v_1\bigr) + z(\tau_1) = z(\tau_1 + 0)$. Таким образом, $v(\tau_1 + 0) \leqslant z(\tau_1 + 0)$. Применяя далее теорему Чаплыгина на каждом из отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Решение $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица, поэтому существует множество $\widetilde\Sigma \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\widetilde\Sigma) = 1$ и $z(t, \sigma, 0)$ устойчиво по Ляпунову равномерно относительно $\widetilde\Sigma$. Аналогично доказательству теоремы 2 работы [17] получаем, что $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества $\widetilde\Sigma$, т. е. устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица. □

Теорема 4. *Предположим, что существуют определенно положительная функция Ляпунова $V(t,x)$ и функции $q(t,z)$, $\ell(z,v)$ такие, что для всех $(t,x) \in \mathfrak{M}^r$, $v \in \Omega_1$ выполнены неравенства* (4.10), (4.11). *Тогда если уравнение* (2.2) *имеет решение $z(t,\sigma,0) \equiv 0$, асимптотически устойчивое с вероятностью единица, то множество $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t, \sigma, x_0)$ является решением системы (1.1), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, \sigma, x_0) = x_0$, где $x_0 \in N^r(0)$; $v(t) = V(t, \varphi(t, \sigma, x_0))$. Из доказательства теоремы 3 следует, что $v(t) \leqslant z(t)$ для всех $t \in [0, +\infty)$.

Множество $\mathfrak{M}$ устойчиво по Ляпунову с вероятностью единица в силу теоремы 3. Докажем, что $\mathfrak{M}$ асимптотически устойчиво с вероятностью единица. Пусть $\widetilde\Sigma$ является подмножеством Σ таким, что $\mu(\widetilde\Sigma) = 1$, и решение $z(t, \sigma, 0) \equiv 0$ уравнения (2.2) асимптотически устойчиво равномерно относительно множества $\widetilde\Sigma$. Если $z(t) = z(t, \sigma, z_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\sigma \in \widetilde\Sigma$, то из неравенства $0 \leqslant v(t) \leqslant z(t)$, $t \in [0, +\infty)$, следует, что $v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Покажем, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \varrho\bigl(\varphi(t, \sigma, x_0), M(t)\bigr) = 0$. Предположим, что это не так, тогда существуют постоянная $\varepsilon \in (0, r)$ и последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $t_k \to +\infty$ и $\varrho\bigl(\varphi(t_k, \sigma, x_0), M(t_k)\bigr) > \varepsilon$. Следовательно, $(t_k, \varphi(t_k, \sigma, x_0)) \notin \mathfrak{M}^\varepsilon$, и, поскольку функция V определенно положительная, найдется такое $\delta > 0$, что $V(t_k, \varphi(t_k, \sigma, x_0)) \geqslant \delta$. Это противоречит тому, что для всех $\sigma \in \widetilde\Sigma$ выполнено равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t, \varphi(t, \sigma, x_0)) = \lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$. □

5. Асимптотическое поведение решений в вероятностной модели конкуренции двух видов с импульсным воздействием

Отметим, что в детерминированном случае данная модель исследуется в работе [18]. Рассмотрим систему, представляющую собой конкуренцию двух видов, численности которых равны x_1, x_2. Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при встрече численность как одного, так и другого вида уменьшается. В случайные моменты времени τ_k на систему оказывается внешнее воздействие, в результате которого численности обоих видов сокращаются. Предполагаем, что данная модель задана следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, & t \neq \tau_k, \\ \dot{x_2} = x_2 - x_2^2 - bx_1x_2, & t \neq \tau_k, \end{cases} \tag{5.13}$$

$$\Delta x_1|_{t=\tau_k} = -w_k^1 x_1, \quad \Delta x_2|_{t=\tau_k} = -w_k^2 x_2, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{5.14}$$

Здесь $a > 0$, $b > 0$ — коэффициенты межпопуляционного взаимодействия видов, причем оба вида могут сосуществовать, если произведение этих коэффициентов $ab < 1$.

Предполагаем, что длины интервалов $\theta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ между моментами импульсного воздействия и доли заготовок w_k^1, w_k^2, $k = 0, 1, \ldots$, являются независимыми случайными величинами, все $\theta_0, \theta_1, \ldots$ принимают значения в множестве $\Omega_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset (0, \infty)$ и имеют распределение F; $w_k^1 \in [w_{11}, w_{12}] \subset (0, 1)$, $w_k^2 \in [w_{21}, w_{22}] \subset (0, 1)$. Пусть $\Omega_1 = [w_{11}, w_{12}] \times [w_{21}, w_{22}]$, тогда $\Omega = [\alpha_0, \beta_0] \times \Omega_1$, $\omega_k = (\theta_k, w_k^1, w_k^2) \in \Omega$.

Исследуем условия, при которых множество $\mathfrak{M} = \{(t, x) : t \in \mathbb{R}_+, x = 0\}$ является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым относительно системы (5.13), (5.14). Обозначим через Θ и Ψ независимые случайные величины такие, что Θ имеет распределение F, распределение Ψ совпадает с распределением случайных величин $v_k = \min(w_k^1, w_k^2)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Предложение 2. *Выполнены следующие утверждения*:

1. *Если* $e^{\beta_0}\big(1 - \min(w_{11}, w_{21})\big) \leqslant 1$, *то множество* $\mathfrak{M}$ *устойчиво по Ляпунову равномерно относительно множества* Σ.

2. *Если* $e^{\beta_0}\big(1 - \min(w_{11}, w_{21})\big) < 1$, *то* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво равномерно относительно множества* Σ.

3. *Если* $M\Theta + M\ln(1 - \Psi) < 0$, *то* $\mathfrak{M}$ *асимптотически устойчиво с вероятностью единица.*

Доказательство. В работе [18] показано, что решения системы (5.13), (5.14) неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях (x_1^0, x_2^0); поэтому для исследования устойчивости множества $\mathfrak{M}$ можно воспользоваться функцией Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, определенной на множестве $\mathbb{R}_+^2 \doteq [0, +\infty) \times [0, +\infty)$. Найдем производную функции V в силу системы (5.13) при $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$: $V^o(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - (a + b)x_1x_2$. Пусть $c = \min(a, b)$, $d = \max(a, b)$, тогда $c^2 \leqslant cd = ab < 1$, поэтому $c \in (0, 1)$. Далее,

$$V^o(x_1, x_2) \leqslant x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 - 2cx_1x_2 \leqslant x_1 + x_2 - \frac{c+1}{2}(x_1 + x_2)^2$$
$$= V(x_1, x_2) - \frac{c+1}{2}V^2(x_1, x_2).$$

Оценим значение функции $V(x + g(x, w))$:

$$V(x+g(x,w)) = x_1 - w^1x_1 + x_2 - w^2x_2 \leqslant x_1 + x_2 - \min(w^1, w^2)(x_1 + x_2) = V(x_1, x_2) - vV(x_1, x_2),$$

где $v = \min(w^1, w^2)$. Таким образом, $q(t, z) = z - \dfrac{c+1}{2}z^2$, $\ell(z, v) = -vz$.

Решением уравнения $\dot{z} = z - \dfrac{c+1}{2}z^2$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, z_0) = z_0$, является функция $\varphi(t, z_0) = \dfrac{z_0 e^t}{\frac{c+1}{2}z_0(e^t - 1) + 1}$, следовательно,

$$H(\omega, z) = H(\theta, v, z) \doteq \ell\big(\varphi(\theta, z), v\big) + \varphi(\theta, z) = \frac{ze^\theta(1 - v)}{\frac{c+1}{2}z(e^\theta - 1) + 1}.$$

В силу теоремы 1 нужно найти

$$\sup_{\omega\in\Omega}\bigl|H_z'(\omega,z)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl|H_z'(\omega,0)\bigr| = \sup_{\omega\in\Omega}\bigl(e^{\theta}(1-v)\bigr) = e^{\beta_0}\bigl(1-\min(w_{11},w_{21})\bigr),$$

откуда получаем первое и второе утверждения предложения. Третье утверждение следует из равенства (3.8). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Недорезов Л.В.** Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. 161 с.
2. **Недорезов Л.В., Назаров И.Н.** Непрерывно-дискретные модели динамики изолированной популяции и двух конкурирующих видов // Мат. структуры и моделирование. 1998. Вып. 2. С. 77–91.
3. **Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В.** Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 650–659.
4. **Bainov D.D.** Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population // Appl. Math. Comp. 1990. Vol. 39, № 1. P. 37–48.
5. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
6. **Родина Л.И.** О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные. науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124. doi: 10.20537/vm130411 .
7. **Родина Л.И.** Об инвариантных множествах управляемых систем со случайными коэффициентами // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные. науки. 2014. Вып. 4. С. 109–121. doi: 10.20537/vm140409 .
8. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
9. **Родина Л.И., Тютеев И.И.** Об асимптотических свойствах решений разностных уравнений со случайными параметрами // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные. науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 79–86. doi: 10.20537/vm160107 .
10. **Родина Л.И.** Инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Изв. ИМИ УдГУ. 2012. Вып. 2(40). С. 3–164.
11. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 202–221.
12. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
13. **Ларина Я.Ю.** Функции Ляпунова и теоремы сравнения для управляемых систем с импульсным воздействием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 1. С. 51–59. doi: 10.20537/vm150106 .
14. **Ларина Я.Ю., Родина Л.И.** Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 4. С. 490–502. doi: 10.20537/vm160404 .
15. **Федерер Г.** Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 761 с.
16. **Чаплыгин С.А.** Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.; Ленинград: Гостехиздат, 1950. 102 с.
17. **Панасенко Е.А., Тонков Е.Л.** Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 185–201.
18. **Ларина Я.Ю.** О слабой асимптотической устойчивости управляемых систем с импульсным воздействием // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 68–78. doi: 10.20537/vm160106 .

Родина Людмила Ивановна
д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры
функционального анализа и его приложений
Владимирский государственного университета
им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых,
г. Владимир
e-mail: LRodina67@mail.ru

Поступила 30.09.2017

REFERENCES

1. Nedorezov L.V. *Kurs lektsii po matematicheskoi ekologii.* [Course of lectures on ecological modeling]. Novosibirsk, Sibirskii Khronograf Publ., 1997, 161 p. ISBN: 5-87550-031-X .
2. Nedorezov L.V., Nazarov I.N. Continuous-discrete models of the dynamics of an isolated population and of two competitive species. Guts A.K. (ed.), *Mathematical structures and modelling. Vol. 2. Collection of scientific works.* Omsk, Omskij Gosudarstvennyj Universitet Publ., 1998, pp. 77–91 (in Russian).
3. Nedorezov L.V., Utyupin Yu.V. A discrete-continuous model for bisexual population dynamics. *Sib. Math. J.*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 511–518. doi: 10.1023/A:1023821016511 .
4. Bainov D.D. Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population. *Appl. Math. Comp.*, 1990, vol. 39, no. 1, pp. 37–48.
5. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami.* [Optimal impulse equation with applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. ISBN: 5-9221-0097-1 .
6. Rodina L.I. On some probability models of dynamics of population growth. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 109–124 (in Russian). doi: 10.20537/vm130411 .
7. Rodina L.I. On the invariant sets of control systems with random coefficients. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 4, pp. 109–121. doi: 10.20537/vm140409 (in Russian).
8. Shiryaev A.N. *Probability.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 95. N Y etc.: Springer-Verlag,1995, 624 p. ISBN: 0387945490 . Original Russian text published in Shiryaev A.N. *Veroyatnost'.* Moscow, Nauka Publ., 1989, 580 p.
9. Rodina L.I., Tyuteev I.I. On the asymptotic properties of the solutions of difference equations with random parameters. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 79–86. doi: 10.20537/vm160107 . (in Russian)
10. Rodina L.I. Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems. *Izv. IMI UdGU*, 2012, no. 2(40), pp. 3–164 (in Russian).
11. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Invariant and stably invariant sets for differential inclusions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, no. 1, 194–212. doi: 10.1134/S0081543808030164 .
12. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis.* N Y, Wiley, 1983, 308 p. Translated to Russian under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
13. Larina Ya.Yu. Lyapunov functions and comparison theorems for control systems with impulsive actions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 1, pp. 51–59 (in Russian). doi: 10.20537/vm150106 .
14. Larina Ya.Yu., Rodina L.I. Asymptotically stable sets of control systems with impulse action. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 490–502 (in Russian). doi: 10.20537/vm160404 .
15. Federer H. *Geometric measure theory.* Berlin: Heidelberg, Springer, 1969, 677 p. ISBN: 3540045058 . Translated to Russian under the title *Geometricheskaya teoriya mery*, Moscow, Nauka Publ., 1987, 761 p.
16. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravnenii.* [A new method of approximate integration of differential equations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950, 102 p.
17. Panasenko E.A., Tonkov E.L. Extension of E.A. Barbashin's and N.N. Krasovskii's stability theorems to controlled dynamical systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 204–221. doi: 10.1134/S0081543810050159 .
18. Larina Ya.Yu. On the weak asymptotic stability of control systems with impulse action. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 68–78 (in Russian). doi: 10.20537/vm160106 .

The paper was received by the Editorial Office on September 30, 2017.

Lyudmila Ivanovna Rodina, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Vladimir State University, Vladimir, 600000 Russia, e-mail: LRodina67@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 515.126.83

ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЗАМКНУТЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

А. А. Толстоногов

Рассматривается пространство непрерывных многозначных отображений, определенных на локально компактном пространстве $\mathcal{T}$ со счетной базой. Значениями этих отображений являются замкнутые, не обязательно ограниченные множества из метрического пространства $(X, d(\cdot))$, в котором замкнутые шары являются компактами. Пространство $(X, d(\cdot))$ локально компактно и сепарабельно. Пусть Y — счетное плотное множество из X. Расстояние $\rho(A, B)$ между множествами A, B из семейства $CL(X)$ всех непустых, замкнутых подмножеств из X определяется как

$$\rho(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|d(y_i, A) - d(y_i, B)|}{1 + |d(y_i, A) - d(y_i, B)|},$$

где $d(y_i, A)$ — расстояние от точки $y_i \in Y$ до множества A. Это расстояние не зависит от выбора множества Y, и функция $\rho(A, B)$ является метрикой на пространстве $CL(X)$. Сходимость последовательности множеств $A_n, n \geq 1$, из метрического пространства $(CL(X), \rho(\cdot))$ эквивалентна сходимости последовательности $A_n, n \geq 1$, по Куратовскому. Доказаны полнота и сепарабельность метрического пространства $(CL(X), \rho(\cdot))$ и даны необходимые и достаточные условия компактности множеств в этом пространстве. Пространство $C(\mathcal{T}, CL(X))$ всех непрерывных отображений из $\mathcal{T}$ в $(CL(X), \rho(\cdot))$ наделено топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathcal{T}$. Доказаны полнота, сепарабельность пространства $C(\mathcal{T}, CL(X))$ и даны необходимые и достаточные условия компактности множеств в пространстве $C(\mathcal{T}, CL(X))$. Эти результаты переформулированы для пространства $C(T, CCL(X))$, где $T = [0, 1]$, X — конечномерное евклидово пространство и $CCL(X)$ — пространство всех непустых, замкнутых выпуклых множеств из X с метрикой $\rho(\cdot)$. Это пространство играет большую роль при изучении процессов выметания. Приведен контрпример, показывающий существенность предположения компактности замкнутых шаров из X.

Ключевые слова: неграниченные множества, сходимость по Куратовскому, компактность.

A. A. Tolstonogov. Space of continuous set-valued mappings with closed unbounded values.

We consider a space of continuous multivalued mappings defined on a locally compact space $\mathcal{T}$ with countable base. Values of these mappings are closed not necessarily bounded sets from a metric space $(X, d(\cdot))$ in which closed balls are compact. The space $(X, d(\cdot))$ is locally compact and separable. Let Y be a dense countable set from X. The distance $\rho(A, B)$ between sets A and B from the family $CL(X)$ of all nonempty closed subsets of X is defined as

$$\rho(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|d(y_i, A) - d(y_i, B)|}{1 + |d(y_i, A) - d(y_i, B)|},$$

where $d(y_i, A)$ is the distance from a point $y_i \in Y$ to the set A. This distance is independent of the choice of the set Y, and the function $\rho(A, B)$ is a metric on the space $CL(X)$. The convergence of a sequence of sets A_n, $n \geq 1$, from the metric space $(CL(X), \rho(\cdot))$ is equivalent to the Kuratowski convergence of this sequence. We prove the completeness and separability of the space $(CL(X), \rho(\cdot))$ and give necessary and sufficient conditions for the compactness of sets in this space. The space $C(\mathcal{T}, CL(X))$ of all continuous mappings from $\mathcal{T}$ to $(CL(X), \rho(\cdot))$ is endowed with the topology of uniform convergence on compact sets from $\mathcal{T}$. We prove the completeness and separability of the space $C(\mathcal{T}, CL(X))$ and give necessary and sufficient conditions for the compactness of sets in this space. These results are reformulated for the space $C(T, CCL(X))$, where $T = [0, 1]$, X is a finite-dimensional Euclidean space, and $CCL(X)$ is the space of all nonempty closed convex sets from X with the metric $\rho(\cdot)$. This space plays a crucial role in the study of sweeping processes. A counterexample showing the significance of the assumption of the compactness of closed balls from X is given.

Keywords: unbounded sets, Kuratowski convergence, compactness.

MSC: 58C06

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-200-208

1. Введение

Пусть $(X, d(\cdot))$ — метрическое пространство, в котором замкнутые шары компактны. Очевидно, что X является локально компактным и сепарабельным. Примером пространства X является конечномерное пространство. Обозначим через $CL(X)$ совокупность всех непустых, замкнутых множеств из X. Пусть $\{y_i, i \geq 1\} \subset X$ — счетное плотное множество. Для $A, B \in CL(X)$ положим

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|d(y_i, A) - d(y_i, B)|}{1 + |d(y_i, A) - d(y_i, B)|}, \tag{1.1}$$

где $d(y_i, A)$ — расстояние от точки y_i до множества A. Функция $\rho(\cdot, \cdot)$, определенная равенством (1.1), является метрикой на пространстве $CL(X)$. В дальнейшем считаем, что пространство $CL(X)$ наделено метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$. Мы доказываем полноту, сепарабельность пространства $CL(X)$ и даем необходимые и достаточные условия компактности множеств в этом пространстве.

Пусть T — локально компактное пространство со счетной базой. Примером такого пространства является числовая прямая $\mathbb{R}$. Обозначим через $C_c(T, CL(X))$ пространство всех непрерывных отображений из T в $CL(X)$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из T. Для этого пространства мы доказываем полноту, сепарабельность и формулируем необходимые и достаточные условия компактности множеств в $C_c(T, CL(X))$.

Дана конкретизация полученных результатов к пространствам $CL(E)$, $CCL(E)$ и $C_c(T, CL(E))$, $C_c(T, CCL(E))$, где E — конечномерное евклидово пространство, $CCL(E)$ — совокупность всех непустых, выпуклых и замкнутых подмножеств из E, а $T = [0, 1]$ — отрезок числовой прямой.

Изучение вопросов, затронутых в статье, не только представляет самостоятельный интерес, но и вызвано потребностями исследования управляемых процессов выметания (sweeping process) [1; 2].

Пространству всех замкнутых подмножеств 2^X, включая пустое множество, топологического пространства X и различным топологиям на нем посвящено огромное количество работ. Наиболее распространенные топологии на этом пространстве и его свойства приведены в [3]. Пространство непустых замкнутых подмножеств $CL(X)$ топологического пространства X обычно рассматривают как подмножество пространства 2^X с индуцированной топологией. Но, как правило, пространство $CL(X)$ не наследует, кроме, быть может, сепарабельности, основных свойств пространства 2^X. Пространству $CL(X)$ подмножеств из метрического пространства X посвящено ограниченное число исследований. Среди последних следует отметить работы [4; 5], в которых изучались вопросы полноты и сепарабельности этого пространства при наделении его соответствующей метрикой. В настоящей работе дается полное изложение результатов, анонсированных в публикации [6].

2. Основные обозначения, определения и вспомогательные результаты

В этом разделе, если не оговорено противное, $(X, d(\cdot))$ — сепарабельное метрическое пространство, $X_s \subset X$ — счетное плотное множество с элементами y_i, $i \geq 1$, $CL(X)$ — совокупность всех непустых замкнутых множеств из X. Пространство $CL(X)$ наделено метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$, определенной по формуле (1.1).

Пусть $C(X)$ — пространство непрерывных числовых функций. Через $C_p(X)$, $C_{ps}(X)$ и $C_c(X)$ мы обозначаем пространство $C(X)$, наделенное топологией поточечной сходимости, топологией поточечной сходимости на счетном плотном множестве X_s и топологией равномерной сходимости на компактах из X. Функцию $f \in C(X)$ будем называть *функцией расстояния*, если существует элемент $A \in CL(X)$ такой, что $f(x) = d(x, A)$, $x \in X$, где $d(x, A)$ —

расстояние от точки x до множества A. Совокупность всех функций расстояния мы будем обозначать через $Cd(X)$. Если T — локально компактное пространство со счетной базой, то через $C(T, CL(X))$ мы будем обозначать пространство всех непрерывных функций из T в $CL(X)$. Это пространство, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из T, мы обозначаем через $C_c(T, CL(X))$. Если T — компакт, то для пространства $C_c(T, CL(X))$ мы используем обозначение $C(T, CL(X))$. Так как для любых $u, v \in X$ и любого $A \in CL(X)$ имеет место неравенство

$$|d(v, A) - d(u, A)| \leq d(v, u), \tag{2.1}$$

то множество $Cd(X)$ функций расстояния является равностепенно непрерывным подмножеством пространства $C(X)$. Поскольку на каждом равностепенно непрерывном множестве топологии пространств $C_p(X)$, $C_{ps}(X)$ и $C_c(X)$ совпадают [7, гл. X, § 2, п. 4], то на множестве $Cd(X)$, не оговаривая специально, мы будем рассматривать любую из этих топологий. Поэтому отображение Γ из T в $CL(X)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда функция $t \to d(x, \Gamma(t))$ непрерывна для любого $x \in X$.

Через $\operatorname{comp} X$ мы будем обозначать пространство всех непустых, компактных подмножеств из X, наделенное метрикой Хаусдорфа $\operatorname{Dist}(\cdot, \cdot)$.

Если X — нормированное пространство, то $\operatorname{conv} X$ — совокупность всех непустых, выпуклых, компактных подмножеств из X с метрикой Хаусдорфа. Пространство всех непрерывных отображений из T в $\operatorname{comp} X$, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах из T, мы обозначаем как $C_c(T, \operatorname{comp} X)$.

Нижний $\mathop{Li}\limits_{n\to\infty} A_n$ и верхний $\mathop{Ls}\limits_{n\to\infty} A_n$ пределы последовательности множеств $A_n \subset X$, $n \geq 1$, определяются следующим образом [8]:

$$\mathop{Li}_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;\ x = \lim_{n\to\infty} x_n,\ x_n \in A_n,\ n \geq 1\},$$

$$\mathop{Ls}_{n\to\infty} A_n = \{x \in X;\ x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k},\ x_{n_k} \in A_{n_k},\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}.$$

Ясно, что $\mathop{Li}\limits_{n\to\infty} A_n \subset \mathop{Ls}\limits_{n\to\infty} A_n$. Если $\mathop{Li}\limits_{n\to\infty} A_n = \mathop{Ls}\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то говорят, что последовательность множеств $A_n \subset X$, $n \geq 1$, сходится к множеству A в смысле Куратовского. Известно, что A является замкнутым множеством [8].

3. Пространство непустых замкнутых множеств

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, X — метрическое пространство, в котором замкнутые шары являются компактами. Пусть $\theta \in X$ — фиксированный элемент. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\theta \in X_s$.

Теорема 3.1. *Для пространства $CL(X)$, наделенного метрикой* (1.1)*, справедливы следующие утверждения*:

1) *последовательность $A_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, сходится к $A \in CL(X)$ в метрике* (1.1) *тогда и только тогда, когда последовательность A_n, $n \geq 1$, сходится к A по Куратовскому*;

2) *пространство $CL(X)$ является полным*;

3) *пространство $CL(X)$ является сепарабельным*;

4) *множество $\mathcal{H} \subset CL(X)$ является относительно компактным тогда и только тогда, когда*

$$\sup\{d(\theta, \Gamma);\ \Gamma \in \mathcal{H}\} < \infty. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1) вытекает из теоремы 2.3 в [9]. Докажем полноту пространства $CL(X)$. Пусть $\Gamma_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, — фундаментальная последовательность. Тогда из (1.1) вытекает, что последовательность $d(y_i, \Gamma_n)$, $n \geq 1$, фундаментальна для каждого y_i, $i \geq 1$, из счетного плотного множества $X_s \subset X$. Поэтому последовательность функций

$f_n(x) = d(x, \Gamma_n),\ n \geq 1$, будет фундаментальной для каждого $x \in X$ и, следовательно, сходится в топологии пространства $C_c(X)$ к некоторой функции $f \in C(X)$. Покажем, что $f \in Cd(X)$. Пусть точка $x \in X$ фиксирована и точки $z_n \in \Gamma_n,\ n \geq 1$, удовлетворяют равенству

$$f_n(x) = d(x, \Gamma_n) = d(x, z_n), \quad n \geq 1. \tag{3.2}$$

Из сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ и (3.2) вытекает, что последовательность $z_n,\ n \geq 1$, принадлежит некоторому замкнутому шару с центром в точке x. Поэтому последовательность $z_n,\ n \geq 1$, относительно компактна в X. Не нарушая общности, мы можем считать, что $z_n \to z,\ n \to \infty$. Так как $f_n(z_n) = 0,\ n \geq 1$, и $f_n(z_n) \to f(z)$, то $f(z) = 0$.

Положим

$$\Gamma = \{v \in X;\ f(v) = 0\}.$$

Так как $f(z) = 0$ и функция $f \in C(X)$, то множество $\Gamma \in CL(X)$. Покажем, что

$$f(x) = d(x, \Gamma). \tag{3.3}$$

Из (3.2) вытекает, что $f(x) = d(x, z)$. Так как $z \in \Gamma$, то

$$d(x, \Gamma) \leq f(x). \tag{3.4}$$

Пусть $v \in \Gamma,\ d(x, \Gamma) = d(x, v)$ и $v_n \in \Gamma_n,\ n \geq 1$, таковы, что $d(v, \Gamma_n) = d(v, v_n)$. Тогда

$$f_n(x) = d(x, \Gamma_n) \leq d(x, v_n) \leq d(x, v) + d(v, v_n) = d(x, \Gamma) + f_n(v).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что $f(v) = 0$, мы получим

$$f(x) \leq d(x, \Gamma).$$

Из этого неравенства и (3.4) вытекает равенство (3.3). Следовательно, последовательность $d(x, \Gamma_n),\ n \geq 1$, сходится к $d(x, \Gamma)$ в топологии пространства $C_c(X)$. Поэтому последовательность $\Gamma_n \in CL(X),\ n \geq 1$, сходится к $\Gamma \in CL(X)$ в пространстве $CL(X)$. Тем самым утверждение 2) теоремы доказано.

Пусть $\operatorname{comp} X_s$ — совокупность всех непустых, конечных подмножеств из X_s. Хорошо известно, что $\operatorname{comp} X_s$ является счетным плотным подмножеством пространства $\operatorname{comp} X$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $A \in CL(X)$. Пусть номер $k \geq 1$ такой, что $\sum_{i=k+1}^{\infty} 1/2^i \leq \varepsilon/2$. Выберем точки $v_i \in A,\ i = 1, \ldots, k$, так, чтобы имело место равенство

$$d(y_i, v_i) = d(y_i, A), \quad y_i \in X_s, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Положим $V = \{v_i;\ i = 1, \ldots, k\}$. Очевидно, что $d(y_i, A) = d(y_i, V),\ i = 1, \ldots, k$. Тогда

$$\rho(A, V) \leq \varepsilon/2. \tag{3.5}$$

Поскольку $V \in \operatorname{comp} X$, то существует элемент $W \in \operatorname{comp} X_s$ такой, что

$$\operatorname{Dist}(V, W) \leq \varepsilon/2. \tag{3.6}$$

Воспользовавшись хорошо известным равенством $\operatorname{Dist}(V, W) = \sup\limits_{x \in X} |d(x, V) - d(x, W)|$ и неравенствами (3.5), (3.6), мы получим

$$\rho(A, W) \leq \rho(A, V) + \rho(V, W) \leq \rho(A, V) + \operatorname{Dist}(V, W) \leq \varepsilon.$$

Тем самым утверждение 3) теоремы доказано.

Из утверждения 2) нашей теоремы вытекает, что $Cd(X)$ является замкнутым подмножеством пространства $C_c(X)$. Так как любое подмножество пространства $Cd(X)$ является равностепенно непрерывным, то согласно следствию 3 [7, гл. X, § 2, п. 5] множество функций $\{d(x,\Gamma);\Gamma\in\mathcal{H}\}\subset C_c(X)$ является относительно компактным подмножеством пространства $C_c(X)$ тогда и только тогда, когда $\sup\{d(x,\Gamma);\ \Gamma\in\mathcal{H}\}<\infty\ \forall x\in X$. Так как $d(\theta,\Gamma)\le d(x,\Gamma)+d(\theta,x)\ \forall x\in X$ и пространство $CL(X)$ гомеоморфно пространству $Cd(X)$, наделенному топологией поточечной сходимости на счетном плотном множестве X_s, то утверждение 4) доказано. Тем самым теорема доказана.

Следствие 3.1. *Множество $\mathcal{H}\subset CL(X)$ является компактом тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (3.1) *и для любого $i\ge 1$ множество*

$$R_i=\{r_i;\ r_i=d(y_i,\Gamma),\ \Gamma\in\mathcal{H}\},\quad y_i\in X_s,$$

замкнуто в $\mathbb{R}$.

Так как множество $\mathcal{F}\subset Cd(X)$ замкнуто в $Cd(X)$ с топологией равномерной сходимости на компактах из X тогда и только тогда, когда множество $\{f(y_i);\ f\in\mathcal{F}\},\ y_i\in X_s$ замкнуто в $\mathbb{R}$, то следствие вытекает из теоремы 3.1.

4. Пространство непрерывных многозначных отображений с замкнутыми значениями

В этом разделе T — локально компактное пространство со счетной базой. Пусть $G\subset C(T,CL(X))$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{R}_i=\{d(y_i,\Gamma)(\cdot),\ \Gamma\in G\}\subset C(T,\mathbb{R}),\quad y_i\in X_s, \tag{4.1}$$

где $d(y_i,\Gamma)(t)=d(y_i,\Gamma(t))$.

Лемма 4.1. *Множество $G\subset C(T,CL(X))$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда для любого $i\ge 1$ семейство* (4.1) *числовых функций равностепенно непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $i\ge 1$ и $\delta>0$. Поскольку $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}2^i\varepsilon/(1-2^i\varepsilon)=0$, то существует $\varepsilon>0$ такое, что

$$2^i\varepsilon/(1-2^i\varepsilon)<\delta. \tag{4.2}$$

Пусть $G\subset C(T,CL(X))$ равностепенно непрерывно и $t\in T$. Тогда существует окрестность $V(t)$ точки t такая, что для любого $\Gamma\in G$

$$\rho(\Gamma(t),\Gamma(\tau))<\varepsilon,\quad \tau\in V(t).$$

Из этого неравенства, (1.1) и (4.2) вытекает, что для любого $\Gamma\in G$

$$|d(y_i,\Gamma(t))-d(y_i,\Gamma(\tau))|\le 2^i\varepsilon/(1-2^i\varepsilon)<\delta,$$

$\tau\in V(t)$. Тем самым семейство $\mathcal{R}_i$ (4.1) равностепенно непрерывно в точке $t\in T$. Поскольку точка $t\in T$ произвольна, то семейство $\mathcal{R}_i$ равностепенно непрерывно.

Докажем обратное. Пусть $t\in T,\ \varepsilon>0$ произвольны и для любого $i\ge 1$ семейство $\mathcal{R}_i$ равностепенно непрерывно. Выберем $k\ge 1$ так, чтобы

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3}$$

Так как семейство $\mathcal{R}_i,\ i \geq 1$, равностепенно непрерывно, то существует окрестность $V(t)$ точки t такая, что для любых $\Gamma \in G,\ i = 1, \dots, k$, будет иметь место неравенство

$$|d(y_i, \Gamma(t)) - d(y_i, \Gamma(\tau))| \leq \varepsilon/2, \quad \tau \in V(t). \tag{4.4}$$

Теперь из (1.1) и (4.3), (4.4) непосредственно вытекает, что

$$\rho(\Gamma(t), \Gamma(\tau)) < \varepsilon, \quad \Gamma \in G, \quad \tau \in V(t).$$

Так как $t \in T$ и $\varepsilon > 0$ произвольны, то это неравенство означает, что семейство $G \subset C(T, CL(X))$ равностепенно непрерывно. Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Пространство $C_c(T, CL(X))$ является метризуемым, полным и сепарабельным. Множество $G \subset C_c(T, CL(X))$ относительно компактно тогда и только тогда, когда*

1) *для каждого $i \geq 1$ семейство $\mathcal{R}_i$* (4.1) *равностепенно непрерывно*;

2) *для каждого $t \in T$*

$$\sup\{d(\theta, \Gamma(t));\ \Gamma \in G\} < \infty. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия к предложению 16 [7, гл. IX, § 2] вытекает, что пространство T метризуемо и счетно в бесконечности [10], т. е. является счетным объединением компактных множеств. Поскольку метризуемый компакт является сепарабельным, то пространство T сепарабельно. Согласно предложению 15 [10, гл. 1, § 9] существует последовательность $K_n,\ n \geq 1$, относительно компактных открытых множеств, образующих покрытие пространства T и таких, что $\overline{K}_n \subset K_{n+1},\ n \geq 1$, где $\overline{K}_n$ означает замыкание K_n. Более того, для любого компактного множества $K \subset T$ существует $n \geq 1$ такое, что $K \subset K_n$. Поэтому топология пространства $C_c(T, CL(X))$ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах $\overline{K}_n,\ n \geq 1$. Последняя в соответствии с теоремой 1 [11, § 44, VII] метризуема с помощью метрики

$$\operatorname{dist}(\Gamma, F) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\operatorname{dist}_i(\Gamma, F)}{1 + \operatorname{dist}_i(\Gamma, F)},$$

где $\operatorname{dist}_i(\Gamma, F) = \sup_{t \in \overline{K}_i} \rho(F(t), \Gamma(t)),\ F, \Gamma \in C(T, CL(X))$. Так как пространство $CL(X)$ является полным и сепарабельным, то полнота и сепарабельность пространства $C_c(T, CL(X))$ вытекает из теоремы 3 [11, § 44, VII].

Критерий относительной компактности множества $G \subset C_c(T, CL(X))$ вытекает из утверждения 4) теоремы 3.1, леммы 4.1 нашей работы и следствия 3 в [7, гл. X, § 2, п. 5]. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Множество $G \subset C_c(T, CL(X))$ компактно тогда и только тогда, когда*

1) *для каждого $i \geq 1$ семейство $\mathcal{R}_i$* (4.1) *равностепенно непрерывно*;

2) *имеет место неравенство* (4.5);

3) *для любого $i \geq 1$ множество*

$$\mathcal{R}_i(t) = \{d(y_i, \Gamma(t)); \quad \Gamma \in G\}, \quad t \in T, \quad y_i \in X_s, \tag{4.6}$$

замкнуто в $\mathbb{R}$.

Так как на каждом равностепенно непрерывном множестве $G \subset C_c(T, CL(X))$ топология равномерной сходимости на компактах из T совпадает с топологией поточечной сходимости на T, то следствие вытекает из следствия 3.1 и теоремы 4.1.

Если пространство T дополнительно является связным, то критерий относительной компактности множества $G \subset C_c(T, CL(X))$ допускает уточнение.

Теорема 4.2. *Пусть T — локально компактное, связное пространство со счетной базой. Множество $G \subset C_c(T, CL(X))$ является относительно компактным тогда и только тогда, когда*

1) *для каждого $i \geq 1$ семейство $\mathcal{R}_i$ равностепенно непрерывно*;

2) *для фиксированного $s \in T$*

$$\sup\{d(\theta, \Gamma(s));\ \Gamma \in G\} < \infty. \tag{4.7}$$

Доказательство. Нам достаточно показать, что из (4.7) следует (4.5). Так как $\theta \in X_s$, то существуют открытые окрестности $V(t)$ точек $t \in T$ такие, что

$$|d(\theta, \Gamma(t)) - d(\theta, \Gamma(\tau))| < 1, \quad \Gamma \in G, \quad \tau \in V(t). \tag{4.8}$$

Поскольку $\{V_i(t),\ t \in T\}$ — открытое покрытие пространства T, то согласно теореме 8 [11, § 46, II] каждую пару точек (s,t), $t \in T$, можно соединить цепью со звеньями, принадлежащими этому покрытию, т. е. каждой паре (s,t) соответствует конечное число точек $t_1, \dots, t_n$ таких, что

$$s \in V(t_1), \quad V(t_k) \cap V(t_{k+1}) \neq \varnothing, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad t \in V(t_n). \tag{4.9}$$

Теперь неравенство (4.5) вытекает из (4.7)–(4.9). Теорема доказана.

Если E — конечномерное евклидово пространство, то мы можем рассмотреть пространства $CCL(E)$ и $C(T, CCL(E))$. Так как $CCL(E)$ является замкнутым подмножеством пространства $CL(E)$ с метрикой (1.1), то все утверждения данного раздела, касающиеся пространств $CL(X)$ и $C_c(T, CL(X))$, сохраняют свою силу для пространств $CCL(E)$ и $C_c(T, CCL(E))$. В частности, счетным плотным подмножеством пространства $CCL(E)$ будут выпуклые оболочки элементов из счетного плотного множества пространства $CL(E)$. Если $T = \mathbb{R}$, то для пространств $CL(E)$, $CCL(E)$ в качестве θ мы можем взять нулевой элемент пространства E, а в качестве элемента $s \in T$ в (4.7) — элемент $s = 0$.

Комментарии. Как уже говорилось, метрическое пространство, в котором замкнутые шары компактны, является локально компактным и сепарабельным. Пусть X — локально компактное, сепарабельное, метрическое пространство, $C, C_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, и для каждого $x \in X$ последовательность $d(x, C_n)$, $n \geq 1$, сходится к $d(x, C)$. Тогда последовательность C_n, $n \geq 1$, сходится к C в смысле Куратовского [9]. Отметим, что для произвольного локально компактного, сепарабельного, метрического пространства X обратное утверждение неверно.

Пример [12]. Пусть $X = (0,2)$ — интервал числовой прямой $\mathbb{R}$, рассматриваемый как самостоятельное пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}$. Тогда X — локально компактное, сепарабельное, метрическое пространство, в котором не всякий замкнутый шар является компактом.

Пусть $C_n = (0,1] \cup \{2 - 1/n\}$. Ясно, что последовательность множеств $C_n \in CL(X)$, $n \geq 1$, сходится в смысле Куратовского к множеству $C = (0,1]$ из пространства $CL(X)$. Однако для точки $x = 7/4 \in X$ мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} d(7/4, C_n) = 1/4 < 3/4 = d(7/4, C).$$

Этот пример показывает, что предложение 1.2.5 в [13] неверно. В нем утверждается, что для произвольного локально компактного, сепарабельного, метрического пространства X для сходимости последовательности $C_n \in 2^X$, $n \geq 1$, в смысле Куратовского, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ последовательность $d(x, C_n)$ сходилась в $\overline{R}_+ = [0, +\infty]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Толстоногов А.А.** Исследование нового класса управляемых систем // Докл. АН. 2012. Т. 443, № 1. С. 26–28.
2. **Tolstonogov A.A.** Control sweeping processes // J. Convex Analysis. 2016. Vol. 23, no. 4. P. 1099–1123.
3. **Shouchuan Hu, Papageorgiou N.S.** Handbook of multivalued analysis. Theory. Vol. 1. Dordrecht; Boston; London: Kluwer, 1997. 968 p. (Math. Its Appl., vol. 149).
4. **Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л.** Пространство clcv (R^n) с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и дифференциальные включения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 162–177.
5. **Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A.** On multivalued maps with images in the space of closed subset of a metric space // Fixed Point Theory. Appl. 2013. Vol. 10. 21 p. doi: 10.1186/1687-1812-2013-10.
6. **Толстоногов А.А.** Компактность в пространстве многозначных отображений с замкнутыми значениями // Докл. АН. 2014. Т. 456, № 2. С. 146–149.
7. **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975. 408 p.
8. **Куратовский К.** Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
9. **Beer G.** Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets // Bull. Australian Math. Soc. 1987. Vol. 35, № 1. P. 81–96.
10. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 275 с.
11. **Куратовский К.** Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969. 624 с.
12. **Beer G.** On convergence of closed sets in a metric space and distance functions // Bull. Australian Math. Soc. 1985. Vol. 31. P. 421–432. doi: 10.1017/S0004972700009370.
13. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир. 1978. 320 с.

Поступила 25.09.2017

Толстоногов Александр Александрович
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН),
г. Иркутск
e-mail: aatol@icc.ru

REFERENCES

1. Tolstonogov A.A. Investigation of a new class of control systems. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 2, pp. 178–180. doi: 10.1134/S1064562412020056.
2. Tolstonogov A.A. Control sweeping processes. *J. Convex Analysis*, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 1099–1123.
3. Shouchuan Hu, Papageorgiou N.S. *Handbook of multivalued analysis. Theory. Vol. 1.* Ser. Math. Its Appl., vol. 149, Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 1997, 964 p. ISBN: 0792346823.
4. Panasenko E.A., Rodina L.I., Tonkov E.L. The space clcv(R^n) with the Hausdorff-Bebutov metric and differential inclusions. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 121–136. doi: 10.1134/S0081543811090094.
5. Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On multivalued maps with images in the space of closed subset of a metric space. *Fixed Point Theory. Appl.*, 2013, no. 10, 21 p. doi: 10.1186/1687-1812-2013-10.
6. Tolstonogov A.A. Compactness in the space of set-valued mappings with closed values. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 89, no. 3, pp. 293–295. doi: 10.1134/S1064562414030120.
7. Bourbaki N. *Éléments de Mathématique, Premièr partie, Livre III, volume Topologie Générale.* Paris: Hermann, 1960, 366 p. ISBN: 2903684002X. Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Ispol'zovanie veshchestvennykh chisel v obshchei topologii. Funktsional'nye prostranstva. Svodka rezul'tatov.* Moscow, Nauka Publ., 1975, 408 p.
8. Kuratowski K. *Topology. Vol. I.* N Y, London: Acad. Press, 1966, 560 p. ISBN: 978-0-12-429201-7. Translated to Russian under the title *Topologiya. T. 1.* Moscow, Mir Publ., 1966, 594 p.
9. Beer G. Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bull. Australian Math. Soc.*, 1987, vol. 35, no. 1, pp. 81–96. doi: 10.1017/S000497270001306X.

10. Bourbaki N. *Eléments de mathématique, Fascicule II, Livre III, Topologie générale, Chap. 1, Structures topologiques, Chap. 2, structures uniformes*. Paris: Hermann, 1965, 255 p. ISBN(1971 ed.): 3-540-33936-1 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury.* Moscow, Nauka Publ., 1968, 275 p.
11. Kuratowski K. *Topology. Vol. II.* N Y, London: Acad. Press, 1968, 608 p. ISBN: 978-0-12-429202-4 . Translated to Russian under the title *Topologiya. T. 2.* Moscow, Mir Publ., 1969, 624 p.
12. Beer G. On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bull. Australian Math. Soc.*, 1985, vol. 31, pp. 421–432. doi: 10.1017/S0004972700009370 .
13. Matheron G. *Random sets and integral geometry.* New York: Wiley, 1975, 261 p. ISBN: 978-0-471-57621-1 . Translated to Russian under the title *Sluchainye mnozhestva i integral'naya geometriya.* Moscow, Mir Publ., 1978, 318 p.

The paper was received by the Editorial Office on September 25, 2017.

Aleksandr Aleksandrovich Tolstonogov, RAS Corresponding Member, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: aatol@icc.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 519.857

ИМПУЛЬСНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СО СМЕШАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВЫБОР УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВОГО ИГРОКА[1]

В. И. Ухоботов, И. В. Изместьев

Рассматривается линейная дифференциальная игра, в которой первый игрок имеет как импульсное управление, так и управление, стесненное геометрическим ограничением. Возможности первого игрока определяются запасом ресурсов, который он может использовать при формировании своего импульсного управления. В отдельные моменты времени возможно отделение части запаса ресурсов, что может привести к “мгновенному” изменению фазового вектора; это усложняет задачу. Управление второго игрока стеснено геометрическим ограничением. Вектограммы игроков описываются одним и тем же шаром с разными радиусами, зависящими от времени. Терминальным множеством в игре является шар с заданным радиусом. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в заданный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна. Найдены необходимые и достаточные условия встречи с терминальным множеством в заданный момент времени. Построены соответствующие управления игроков, которые гарантируют достижение поставленных перед ними целей. Приведено решение примера, иллюстрирующего теорию.

Ключевые слова: дифференциальная игра, управление, импульсное управление, поимка.

V. I. Ukhobotov, I. V. Izmest’ev. Impulse differential game with a mixed constraint on the choice of the control of the first player.

We consider a linear differential game in which the first player can choose both an impulse control and a control subject to a geometric constraint. The first player can use a prescribed amount of resource to form the impulse control. Portions of this amount can be separated at certain times, thus producing “instantaneous” changes of the state vector and complicating the problem. The control of the second player is subject to a geometric constraint. The vectograms of the players are described by the same ball with different time-dependent radii. The terminal set is a ball with fixed radius. The aim of the first player is to bring the state vector to the terminal set at a given time. The aim of the second player is opposite. Necessary and sufficient conditions for meeting the terminal set at the given time are found, and the corresponding controls of the players guaranteeing the achievement of their goals are constructed. A solution of an example illustrating the theory is given.

Keywords: differential game, control, impulse control, capture.

MSC: 49N70, 49N75, 91A23, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-209-222

Введение

К задачам импульсного управления сводятся задачи управления механическими системами переменного состава, когда в отдельные моменты времени может отделяться конечное количество реактивной массы [1]. Если на механическую систему воздействуют неконтролируемые силы, о которых известны только области их возможных значений, то задача управления может быть рассмотрена в рамках теории дифференциальных игр.

Анализ задач импульсного управления усложняется тем, что траектории управляемой системы могут быть разрывными.

Н. Н. Красовским (см. [2]) предложен метод решения игровых задач преследования, основанный на принципе поглощения областей достижимости. Возможность применения этого метода к задачам импульсного управления рассматривалась, например, в работах [3; 4]. В статье [4] приводится пример импульсной “мягкой” встречи двух управляемых материальных точек, когда первый игрок не может поддерживать требуемое включение областей достижимости, а

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00264_а).

также обсуждается вопрос о возможности применения метода динамического программирования к задачам импульсной встречи. В публикации [5] этот метод применяется при решении конкретных задач импульсной встречи.

В работе [6] доказана теорема об альтернативе для дифференциальных игр с импульсными управлениями в предположении, что целевые координаты вектора состояния меняются непрерывно. В [7;8] исследуются задачи импульсного управления в условиях неполной информации о фазовом состоянии, в [9;10] — задачи группового преследования при импульсных ограничениях на управления. В статьях [11–13] рассматриваются линейные дифференциальные игры преследования, в которых используемые импульсные управления выражаются при помощи дельта-функции Дирака. В работах [14–16] при построении импульсного управления игроков применяются процедуры корректировки управлений, причем в каждый момент коррекции управление строится как решение некоторой проблемы моментов. В работе [17] импульсные дифференциальные игры изучаются в рамках теории выживаемости (viability theory).

Важным классом дифференциальных игр являются такие задачи, когда в правой части уравнений стоит только сумма управлений первого и второго игроков, значения которых принадлежат шарам с радиусами, зависящими от времени. Для таких однотипных игр в случае, если терминальное множество является шаром заданного радиуса, в работе [18] построен альтернированный интеграл, а в [19] построены оптимальные позиционные стратегии игроков.

В [20] рассматривается дифференциальная игра этого класса, в которой на управление первого игрока наложено импульсное ограничение.

В настоящей статье рассмотрена однотипная дифференциальная игра, в которой первый игрок обладает как импульсным управлением, так и управлением, стесненным геометрическим ограничением.

1. Постановка задачи

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = -c(t)\dot{\phi}(t)w - a(t)u + b(t)v, \quad t \le p, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь $c : (-\infty, p] \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная функция; $a : (-\infty, p] \to \mathbb{R}_+$ и $b : (-\infty, p] \to \mathbb{R}_+$ — суммируемые на каждом отрезке из полуоси $(-\infty, p]$ функции. Посредством $\mathbb{R}_+$ обозначено множество неотрицательных чисел.

Управлением первого игрока является тройка функций [15, с. 74] $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $w(t, z) \in \mathbb{R}^n$, $u(t, z) \in \mathbb{R}^n$. На выбор функции $\phi(t)$ накладывается импульсное ограничение [1]

$$\mu(t) = \mu(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} |d\phi(r)| \ge 0,$$

где $t_0 < p$ — начальный момент времени, $\mu(t_0) \ge 0$ — начальный запас ресурсов, который первый игрок сможет использовать при формировании функции $\phi(t)$. Произвольные функции $w : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $u : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют геометрическим ограничениям

$$\|w(t, z)\| = 1, \quad \|u(t, z)\| \le 1. \tag{1.2}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Управлением второго игрока является произвольная функция $v : (-\infty, p] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая ограничению

$$\|v(t, z)\| \le 1. \tag{1.3}$$

При выборе функции $\phi(t)$ первый игрок может в отдельные моменты времени осуществлять ее коррекцию [15, с. 74], которая производится следующим образом. Он выбирает моменты коррекций $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = p$. В момент времени τ_i, зная реализовавшиеся $z(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ и $\mu(\tau_i) \geq 0$, он выбирает абсолютно–непрерывную неубывающую функцию $\phi_i : [\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathbb{R}$ и число $\Delta_i \geq 0$ такие, что

$$\mu(t) = \mu(\tau_i) - \Delta_i - \int\limits_{t_i}^{t} \dot{\phi}_i(r)dr \geq 0, \quad \tau_i < t \leq \tau_{i+1}. \tag{1.4}$$

Движение системы (1.1), порожденное выбранными управлениями (1.2) и (1.3), определяется на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega : \tau_i = t^{(0)} < t^{(1)} < \ldots < t^{(k+1)} = \tau_{i+1}, \quad d(\omega) = \max_{0 \leq j \leq k} (t^{(j+1)} - t^{(j)}). \tag{1.5}$$

Построим ломаную

$$z_\omega(t^{(0)}) = z(\tau_i) - \Delta_i c(\tau_i) w(\tau_i, z(\tau_i)) = z(\tau_i + 0),$$

$$z_\omega(t) = z_\omega(t^{(j)}) - \left(\int\limits_{t^{(j)}}^{t} c(r)\dot{\phi}_i(r)dr \right) w(t^{(j)}, z(t^{(j)}))$$

$$- \left(\int\limits_{t^{(j)}}^{t} a(r)dr \right) u(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})) + \left(\int\limits_{t^{(j)}}^{t} b(r)dr \right) v(t^{(j)}, z_\omega(t^{(j)})) \tag{1.6}$$

при $t^{(j)} \leq t \leq t^{(j+1)}$, $j = \overline{0, k}$.

Семейство ломаных (1.6) на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ является [15, с. 46] равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы Арцела [21, с. 236]. Под движением $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ будем понимать равномерный предел последовательности ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметр разбиения (1.5) стремится к нулю. Изменение запаса ресурсов $\mu(t)$ определяется формулой (1.4).

Отметим, что так определенное движение $z(t)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ может быть не единственным. Стало быть, множество значений $z(\tau_s)$ в каждый момент коррекции τ_s может содержать несколько точек. Считаем, что первый игрок по своему усмотрению выбирает в момент коррекции τ_s точку $z(\tau_s)$ и о своем выборе сообщает второму игроку.

В ходе коррекций ϕ первый игрок не меняет остальные свои управления $w(t, z)$ и $u(t, z)$. Второй игрок также не может корректировать свое управление $v(t, z)$.

Задано число $\varepsilon \geq 0$. Цель первого игрока заключается в том, чтобы вектор

$$z(p + 0) = z(p) - \Delta c(p) w$$

при некотором числе $\Delta \in [0, \mu(p)]$ и векторе $w \in \mathbb{R}^n$ с $\|w\| = 1$ удовлетворял неравенству $\|z(p + 0)\| \leq \varepsilon$. Цель второго игрока противоположна.

Сформулированную цель первого игрока можно записать в виде неравенства

$$\|z(p)\| \leq \varepsilon + \mu(p)c(p). \tag{1.7}$$

2. Предположения и формулировка основных результатов

Введем в рассмотрение функцию

$$m(t) = \max_{t \leq \tau \leq p} c(\tau), \quad t \leq p. \tag{2.1}$$

Эта функция является непрерывной и удовлетворяет условию монотонности $m(t_1) \le m(t_2)$ при $t_2 \le t_1 \le p$.

Обозначим

$$q_0 = \inf\left\{t < p\colon \varepsilon \ge \max_{t\le\tau\le p}\int_{\tau}^{p}(b(r) - a(r))dr\right\}. \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Для начального момента времени $t_0 = \theta$, $q_0 \le \theta < p$ из начального состояния $z(t_0) = z \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) = \mu \ge 0$ первый игрок может гарантировать выполнение неравенства* (1.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\|z\| \le m(\theta)\mu + \varepsilon - \int_{\theta}^{p}(b(r) - a(r))dr. \tag{2.3}$$

Рассмотрим случай, когда $q_0 > -\infty$. Тогда из (2.2) следует равенство

$$\varepsilon = \int_{q_0}^{p}(b(r) - a(r))dr. \tag{2.4}$$

Далее, существует последовательность чисел $\nu_k < q_0$, $\nu_k \to q_0$ такая, что

$$\int_{\nu_k}^{p}(b(r) - a(r))dr > 0, \quad k \ge 1. \tag{2.5}$$

Предположение 1. *Существует набор чисел $\theta_0 = q_0$, $\theta_{i+1} < \theta_i$, $i \ge 0$ такой, что объединение промежутков $(\theta_{i+1}, \theta_i]$ при $i \ge 0$ совпадает с полуосью $(-\infty, q_0]$ и для каждого $i \ge 0$ для почти всех $r \in (\theta_{i+1}, \theta_i)$ выполнено одно из условий*: $b(r) \ge a(r)$, *либо* $a(r) > b(r)$.

Из этого предположения и из формул (2.4) и (2.5) следует, что $a(r) \le b(r)$ для почти всех $r \in [\theta_1, q_0]$. Обозначим $q_1 = \theta_1$ и

$$q_2 = \inf\left\{t < q_1 : \min_{t\le\tau\le q_1}\int_{\tau}^{q_1}(a(r) - b(r))dr \ge 0\right\}. \tag{2.6}$$

Если $q_2 > -\infty$, то

$$\int_{q_2}^{q_1}(a(r) - b(r))dr = 0 \tag{2.7}$$

и существует последовательность чисел $\nu_k < q_2$, $\nu_k \to q_2$ такая, что

$$\int_{\nu_k}^{q_1}(a(r) - b(r))dr < 0. \tag{2.8}$$

Из предположения 1 и из формул (2.7) и (2.8) следует, что $a(r) \le b(r)$ для почти всех $r \in [\theta_s, q_2]$ при некотором $s > 1$. Положим $q_3 = \theta_s$.

Продолжая эти рассуждения, определим индукцией по $i \ge 1$ конечный или бесконечный набор чисел q_i следующим образом. Пусть $i = 2j - 1$ и $q_i > -\infty$, $j \ge 1$. Определим число q_{i+1} формулой (2.6) с заменой в ней q_1 на q_i. Если $q_{i+1} > -\infty$, то выполнены формулы (2.7) и (2.8) с заменой в них q_1 на q_i и q_2 на q_{i+1}. Поэтому $a(r) \le b(r)$ для почти всех $r \in [\theta_s, q_{i+1}]$ при некотором $s > 1$. Положим $q_{i+2} = \theta_s$.

Таким образом, построен набор чисел q_i, $i \geq 0$ такой, что

$$a(r) \leq b(r) \text{ для почти всех } r \in [q_{2j+1}, q_{2j}], \quad j \geq 0, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_{\tau}^{q_{2j+1}} (a(r) - b(r))dr \geq 0 \text{ при } q_{2j+2} \leq \tau \leq q_{2j+1} \text{ и } \int\limits_{q_{2j+2}}^{q_{2j+1}} (a(r) - b(r))dr = 0, \quad j \geq 0. \tag{2.10}$$

Предположение 2. *При всех $t < q_0$ выполнено неравенство $m(t) > 0$.*

Предположение 3. *Существует набор чисел $\nu_0 = q_0$, $\nu_{i+1} < \nu_i$, $i \geq 0$ такой, что объединение промежутков $(\nu_{i+1}, \nu_i]$ при $i \geq 0$ совпадает с полуосью $(-\infty, q_0]$ и для каждого $i \geq 0$ выполнено одно из условий: $m(t) = c(t)$ при всех $t \in [\nu_{i+1}, \nu_i]$ либо $m(t) = m(\nu_i)$ для любого $t \in [\nu_{i+1}, \nu_i]$.*

Обозначим

$$\eta(t) = \frac{b(t) - a(t)}{m(t)}, \quad \xi(t) = 0 \text{ при } q_{2j+1} \leq t < q_{2j}, \quad j \geq 0; \tag{2.11}$$

$$\eta(t) = 0, \quad \xi(t) = a(t) - b(t) \text{ при } q_{2j+2} \leq t < q_{2j+1}, \quad j \geq 0. \tag{2.12}$$

Из формул (2.10) и (2.11) следует, что

$$\int\limits_{q_{i+1}}^{q_i} \xi(r)dr = 0 \text{ при всех } i \geq 0. \tag{2.13}$$

Теорема 2. *Для начального момента времени $t_0 = \theta < q_0$ из начального состояния $z(t_0) = z \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) = \mu \geq 0$ первый игрок может гарантировать выполнение неравенства* (1.7) *тогда и только тогда, когда*

$$\|z\| \leq m(\theta)\Bigg(\mu - \int\limits_{\theta}^{q_0} \eta(r)dr\Bigg) + \int\limits_{\theta}^{q_0} \xi(r)dr, \quad \mu \geq \int\limits_{\theta}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{2.14}$$

Из (2.4) следует, что при $\theta = q_0$ неравенства (2.3) и (2.14) принимают следующий вид:

$$\|z\| \leq m(q_0)\mu. \tag{2.15}$$

3. Вспомогательные результаты

Обозначим

$$\psi(z) = \frac{z}{\|z\|} \text{ при } z \neq 0 \quad \text{и} \quad \psi(0) \text{ – любое с } \|\psi(0)\| = 1. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Пусть заданы $t_* < \nu \leq p$, $\mu(t_*) \geq 0$ и $z(t_*) \in \mathbb{R}^n$. Управление второго игрока $v(t, z) = \psi(z)$, определяемое при $t_* \leq t \leq \nu$ и $z \in \mathbb{R}^n$ формулой* (3.1), *из начального состояния $z(t_*) \in \mathbb{R}^n$ и $\mu(t_*) \geq 0$ при любом управлении первого игрока, удовлетворяющем ограничениям* (1.2) *и* (1.4), *обеспечивает для любого реализовавшегося состояния $z(\nu)$ и $\mu(\nu)$ выполнение неравенства*

$$\|z(\nu)\| \geq \|z(t_*)\| - (\mu(t_*) - \mu(\nu))m(t_*) + \int\limits_{t_*}^{\nu} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о приведено в [15, лемма 10.1]. □

Рассмотрим игру (1.1), в которой функция $c(t) = 0$, а именно

$$\dot{z} = -a(t)u + b(t)v. \tag{3.3}$$

Лемма 2. *Пусть заданы $t_* < \nu \le p$, $\varepsilon_* \ge 0$ и $z_* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\|z_*\| \le \varepsilon_* - \int\limits_{t_*}^{\nu} (b(r) - a(r))dr, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon_* \ge \max_{t_* \le \tau \le \nu} \int\limits_{\tau}^{\nu} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.5}$$

Тогда управление первого игрока $u(t, z) = \psi(z)$, определяемое при $t_* \le t \le \nu$ и $z \in \mathbb{R}^n$ формулой (3.1), из начального состояния $z(t_*) = z_*$ при любом управлении (1.3) второго игрока обеспечивает для любого реализовавшегося движения $z(t)$ системы (3.3) выполнение неравенства $\|z(\nu)\| \le \varepsilon_*$.

Доказательство. В работе [15, теорема 8.1] показано, что управление $u(t, z) = \psi(z)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\|z(\nu)\| \le \max \left\{ \max_{t_* \le \tau \le \nu} \int\limits_{\tau}^{\nu} (b(r) - a(r))dr; \|z_*\| + \int\limits_{t_*}^{\nu} (b(r) - a(r))dr \right\}.$$

Отсюда и из неравенства (3.4) и (3.5) следует, что $\|z(\nu)\| \le \varepsilon_*$. □

Лемма 3. *Пусть заданы $t^* < q \le p$, $\varepsilon^* \ge 0$, $\mu^* \ge 0$, $\delta \ge 0$ и $z^* \in \mathbb{R}^n$ такие, что*

$$\|z^*\| \le m(t^*)(\mu^* - \delta) + \varepsilon^* - \int\limits_{t^*}^{q} (b(r) - a(r))dr, \quad \mu^* \ge \delta, \tag{3.6}$$

$$\varepsilon^* \ge \max_{t^* \le \tau \le q} \int\limits_{\tau}^{q} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.7}$$

Тогда первый игрок, выбирая функции $w(t, z) = u(t, z) = \psi(z)$, определяемые при $t^* \le t \le q$ и $z \in \mathbb{R}^n$ формулой (3.1), и используя не более трех моментов коррекций $t^* = \tau_0 \le \tau_1 \le \tau_2 = q$, может обеспечить при любом управлении (1.3) второго игрока выполнение неравенств

$$\|z(q)\| \le m(q)(\mu(q) - \delta) + \varepsilon^*, \quad \mu(q) \ge \delta. \tag{3.8}$$

Здесь $z(t)$ и $\mu(t)$ —любая реализация движения системы (1.1) с начальными условиями $z(t^*) = z^*$, $\mu(t^*) = \mu^*$.

Доказательство. Пусть $m(t^*) = m(q)$. Первый игрок выбирает моменты коррекции $\tau_0 = t^*$, $\tau_1 = q$, функцию $\phi(t) = 0$ при $t^* \le t \le q$ и число $\Delta_0 = 0$. Тогда согласно формуле (1.4) $\mu(q) = \mu^* \ge \delta$. Из неравенств (3.6) и (3.7) следуют неравенства (3.4) и (3.5) при

$$t_* = t^*, \quad \nu = q, \quad \varepsilon_* = m(q)(\mu(q) - \delta) + \varepsilon^*.$$

Согласно лемме 2 будет выполнено первое неравенство в (3.8).

Пусть $m(t^*) > m(q)$. Тогда из (2.1) следует, что $m(t^*) = c(\theta)$ при некотором $t^* \le \theta < q$.

Рассмотрим случай, когда $\theta = t^*$. Первый игрок выбирает $\tau_0 = t^*$, $\tau_1 = q$, $\phi(t) = 0$ при $t^* \le t \le q$.

Пусть

$$\|z^*\| \le \varepsilon^* - \int\limits_{t^*}^{q} (b(r) - a(r))dr. \tag{3.9}$$

Первый игрок берет $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(q) = \mu^* \geq \delta$. Из неравенств (3.7) и (3.9) следуют неравенства (3.4) и (3.5) при $t_* = t^*$, $\nu = q$, $\varepsilon_* = \varepsilon^*$. Применяя лемму 2, получим неравенство $\|z(q)\| \leq \varepsilon^*$, из которого следует требуемое неравенство (3.8).

Пусть неравенство (3.9) не выполнено. Первый игрок берет

$$0 \leq \Delta_0 = \frac{1}{c(t^*)}\left(\|z^*\| - \varepsilon^* + \int\limits_{t^*}^{q}(b(r) - a(r))dr\right) \leq \mu^* - \delta.$$

Тогда $\mu(q) = \mu^* - \Delta_0 \geq \delta$ и

$$\|z(t^* + 0)\| = \|z^* - \Delta_0 c(t^*)\psi(z^*)\| = \varepsilon^* - \int\limits_{t^*}^{q}(b(r) - a(r))dr.$$

Стало быть, при $t_* = t^*$, $\nu = q$, $\varepsilon_* = \varepsilon^*$ и $z^* = z(t^* + 0)$ выполнены неравенства (3.4) и (3.5). Применяя лемму 2, получим неравенство $\|z(q)\| \leq \varepsilon^*$, из которого следует неравенство (3.8).

Рассмотрим теперь случай, когда $t^* < \theta < q$. Первый игрок выбирает $\tau_0 = t^*$, $\tau_1 = \theta$, $\tau_2 = q$, $\phi(t) = 0$ при $t^* \leq t \leq \theta$ и $\Delta_0 = 0$. Тогда $\mu(\theta) = \mu^* \geq \delta$. Из неравенства (3.6) следует неравенство (3.4) при

$$t_* = t^*, \quad \|z(t_*)\| = \|z^*\|, \quad \nu = \theta, \quad \varepsilon_* = c(\theta)(\mu^* - \delta) + \varepsilon^* - \int\limits_{\theta}^{q}(b(r) - a(r))dr.$$

Покажем, что выполнено неравенство (3.5). Возьмем любое число $t_* \leq \tau \leq \theta$. Тогда, используя неравенство (3.7), будем иметь, что

$$\varepsilon_* \geq \varepsilon^* - \int\limits_{\theta}^{q}(b(r) - a(r))dr \geq \int\limits_{\tau}^{\theta}(b(r) - a(r))dr.$$

Применяя лемму 2, получим, что

$$\|z(\theta)\| \leq c(\theta)(\mu(\theta) - \delta) + \varepsilon^* - \int\limits_{\theta}^{q}(b(r) - a(r))dr, \quad \mu(\theta) \geq \delta.$$

Далее управление первого игрока строится так же, как и в разобранном выше случае $\theta = t^*$.□

4. Доказательство теорем 1 и 2

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть начальное состояние $q_0 \leq t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$, $\mu(t_0) \geq 0$ таково, что при $\theta = t_0$, $z = z(t_0)$ и $\mu = \mu(t_0)$ выполнено неравенство (2.3). Тогда, учитывая определение числа q_0 (2.2), получим неравенства (3.6) и (3.7) при $z^* = z(t_0)$, $t^* = t_0$, $q = p$, $\varepsilon^* = \varepsilon$, $\mu^* = \mu(t_0)$ и $\delta = 0$. Применяя лемму 3, получим, что первый игрок сможет осуществить неравенства (3.8). Из этих неравенств, учитывая, что $m(p) = c(p)$, получим требуемое неравенство (1.7).

Пусть неравенство (2.3) не выполнено. Второй игрок выбирает управление $v(t, z) = \psi(z)$, которое определяется формулой (3.1) при $t_0 \leq t \leq p$ и $z \in \mathbb{R}^n$. Применим лемму 1 при $t_* = t_0$ и $\nu = p$. Из неравенства (3.2) получим, что

$$\|z(p)\| \geq \|z(t_0)\| - (\mu(t_0) - \mu(p))m(p) + \int\limits_{t_0}^{p}(b(r) - a(r))dr.$$

Отсюда, учитывая, что $m(p) = c(p)$, получим неравенство $\|z(p)\| > \varepsilon + \mu(p)c(p)$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Возьмем число $q_{i+1} \le \theta < q_i$ при $i \ge 0$, вектор $z \in \mathbb{R}^n$ и число $\mu \ge 0$, которые удовлетворяют неравенствам (2.14). Покажем, что первый игрок сможет построить свое управление, стесненное ограничениями (1.2) и (1.4), таким образом, чтобы при любом управлении (1.3) второго игрока любое реализовавшееся на отрезке $[\theta, q_i]$ движение с начальным условием $z(\theta) = z$, $\mu(\theta) = \mu$ в момент времени q_i удовлетворяло неравенству (2.14).

Из формул (2.11)–(2.13) получим, что если $q_{i+1} \le \theta < q_i$ и $i = 2j + 1$ при $j \ge 0$, то неравенства (2.14) принимают следующий вид:

$$\|z\| \le m(\theta)\Big(\mu - \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr\Big) - \int\limits_{\theta}^{q_i} (b(r) - a(r))dr, \tag{4.1}$$

$$\mu \ge \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.2}$$

Если $q_{i+1} \le \theta < q_i$ и $i = 2j$ при $j \ge 0$, то неравенство (2.14) записывается одним неравенством

$$\|z\| \le m(\theta)\Big(\mu - \int\limits_{\theta}^{q_0} \eta(r)dr\Big). \tag{4.3}$$

Из неравенств (4.1)–(4.3), используя равенства (2.10), получим, что при $\theta = q_i$ для любого $i \ge 0$ неравенства (2.14) записываются одним неравенством

$$\|z\| \le m(q_i)\Big(\mu - \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr\Big). \tag{4.4}$$

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$ и $i = 2j+1$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ удовлетворяют неравенствам (4.1), (4.2). Тогда при

$$t^* = \theta, \quad q = q_i, \quad \mu^* = \mu, \quad \varepsilon^* = 0, \quad \delta = \int\limits_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr$$

выполнены неравенства (3.6). Из первого неравенства в (2.10) следует неравенство (3.7). Применяя лемму 3, получим, что первый игрок сможет обеспечить выполнение неравенств (3.8). Стало быть, для $z = z(q_i)$, $\mu = \mu(q_i)$ будет выполнено неравенство (4.4).

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$, $i = 2j$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ удовлетворяют неравенству (4.3). Из формулы (2.9) следует, что $b(r) \ge a(r)$ для почти всех $\theta \le r \le q_i$. Далее, из формул (2.11) и (2.12) получим равенство

$$\int\limits_{\theta_1}^{q_0} \eta(r)dr = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{b(r) - a(r)}{m(r)}dr + \int\limits_{\theta_2}^{q_0} \eta(r)dr \quad \text{при} \;\; \theta \le \theta_1 < \theta_2 \le q_i. \tag{4.5}$$

Используя предположение 3, построим числа $\theta = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_f = q_i$ такие, что для каждого $s = \overline{0, f-1}$ верно одно из утверждений: $m(\tau_s) = m(\tau_{s+1})$ или $m(r) = c(r)$ при всех $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Первый игрок выбирает эти числа в качестве моментов коррекций и берет управления $w(t, z) = u(t, z) = \psi(z)$.

Опишем правило, по которому выбираются числа $\Delta_s \ge 0$ и функции $\phi_s : [\tau_s, \tau_{s+1}] \to \mathbb{R}$ в момент коррекции τ_s.

Из неравенства (4.3) следует, что при $s=0$ выполнено неравенство

$$\|z(\tau_s)\| \le m(\tau_s)\Big(\mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_s}^{q_0} \eta(r)dr\Big). \tag{4.6}$$

Допустим, что неравенство (4.6) выполнено при $s=\overline{0, f-1}$.

Пусть $m(\tau_s) = m(\tau_{s+1})$. Тогда согласно формуле (2.1) $m(r) = m(\tau_{s+1})$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Из (4.5) и (4.6) получим, что

$$\|z(\tau_s)\| \le m(\tau_{s+1})\Big(\mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr\Big) - \int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (b(r)-a(r))dr, \quad \mu(\tau_s) \ge \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.7}$$

Из этих неравенств следует неравенство (3.4) при

$$t_* = \tau_s, \quad \nu = \tau_{s+1}, \quad \varepsilon_* = m(\tau_{s+1})\Big(\mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr\Big), \quad z_* = z(\tau_s).$$

Поскольку $b(r) \ge a(r)$ для почти всех $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$, то неравенство (3.5) принимает следующий вид:

$$\varepsilon_* - \int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} (b(r)-a(r))dr \ge 0.$$

Это неравенство следует из (4.7).

Первый игрок берет число $\Delta_s = 0$ и функцию $\phi_s(r) = 0$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Тогда $\mu(\tau_{s+1}) = \mu(\tau_s)$. Применяя лемму 2, получим, что неравенство (4.6) выполнено при $s+1$.

Пусть $m(r) = c(r)$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Первый игрок выбирает

$$\Delta_s = \frac{\|z(\tau_s)\|}{c(\tau_s)}, \quad \phi_s(t) = \int\limits_{\tau_s}^{t} \frac{b(r)-a(r)}{m(r)}dr. \tag{4.8}$$

Из неравенства (4.6) и из первой формулы в (4.8) следует, что

$$\Delta_s \le \mu(\tau_s) - \int\limits_{\tau_s}^{q_0} \eta(r)dr \le \mu(\tau_s).$$

Отсюда и из формул (1.4), (4.5) и (4.8) имеем, что

$$\mu(\tau_{s+1}) = \mu(\tau_s) - \Delta_s - \int\limits_{\tau_s}^{\tau_{s+1}} \frac{b(r)-a(r)}{m(r)}dr \ge \int\limits_{\tau_{s+1}}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.9}$$

Далее, из формул (3.1) и (4.8) следует, что

$$\|z(\tau_s+0)\| = \|z(\tau_s) - \Delta_s c(\tau_s)\psi(z(\tau_s))\| = 0.$$

Подставим функцию $\phi_s(t)$ (4.8) в уравнение движения (1.1) при $w = u = \psi(z)$. Получим

$$\dot z = -b(t)\psi(z) + b(t)v.$$

Применим лемму 2 при $t_* = \tau_s$, $\nu = \tau_{s+1}$, $\|z_*\| = \|z(\tau_s + 0)\| = 0$, $\varepsilon_* = 0$ и $a(r) = b(r)$ при $\tau_s \le r \le \tau_{s+1}$. Получим $\|z(\tau_{s+1})\| = 0$. Отсюда и из неравенства (4.9) следует, что при $s + 1$ неравенство (4.6) выполнено.

Положим в (4.6) $s = f$. Получим, что для $z = z(q_i)$, $\mu = \mu(q_i)$ требуемое неравенство (4.4) выполнено.

Принимая $\theta = q_i$ и проводя предыдущие рассуждения, получим, что неравенство (4.4) будет выполнено для q_{i-1}, $z(q_{i-1})$ и $\mu(q_{i-1})$. Стало быть, при $i = 0$ для $z = z(q_0)$, $\mu = \mu(q_0)$ будет выполнено неравенство (2.15). Согласно теореме 1 первый игрок сможет осуществить выполнение неравенства (1.7).

Рассмотрим теперь задачу о построении управления второго игрока. Возьмем число $q_{i+1} \le \theta < q_i$ при $i \ge 0$, вектор $z \in \mathbb{R}^n$ и число $\mu \ge 0$, для которых хотя бы одно из неравенств (2.14) не выполнено. Покажем, что управление $v(t, z) = \psi(z)$ гарантирует второму игроку то, что при любом управлении первого игрока, стесненном ограничениями (1.2) и (1.4), любое реализовавшееся на отрезке $[\theta, q_i]$ движение с начальным условием $z(\theta) = z$, $\mu(\theta) = \mu$ в момент времени q_i не удовлетворяет неравенству (4.4).

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$, $i = 2j + 1$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ таковы, что хотя бы одно из неравенств (4.1) и (4.2) не выполнено. Если не выполнено второе неравенство, то не выполнено неравенство

$$\mu(q_i) \ge \int_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.10}$$

Поэтому неравенство (4.4) при $z = z(q_i)$ и $\mu = \mu(q_i)$ не будет выполнено.

Пусть не выполнено неравенство (4.1). Тогда, применяя лемму 1, получим неравенство

$$\|z(q_i)\| > m(\theta)\Big(\mu(q_i) - \int_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr\Big).$$

Отсюда и из неравенства $m(\theta) \ge m(q_i)$ следует, что если неравенство (4.10) выполнено, то неравенство (4.4) при $z = z(q_i)$ и $\mu = \mu(q_i)$ не выполнено.

Пусть $q_{i+1} \le \theta < q_i$, $i = 2j$ при $j \ge 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \ge 0$ таковы, что неравенство (4.4) не выполнено. В работе [15, лемма 7.3, с. 39–41] показано, что

$$\int_{\theta}^{q_i} \frac{b(r) - a(r)}{m(r)} dr = \sup_{\omega} \sum_{s=0}^{l} \frac{1}{m(t_s)} \int_{t_s}^{t_{s+1}} (b(r) - a(r))dr,$$

где ω — произвольный набор чисел $\theta = t_0 < t_1 < \ldots < t_{l+1} = q_i$. Поэтому существует такой набор чисел, что при $f = 0$ выполнено неравенство

$$\|z(t_f)\| > m(t_f)(\mu(t_f) - B_f). \tag{4.11}$$

Здесь при $f = \overline{0, l}$ обозначено

$$B_f = \sum_{s=f}^{l} \frac{1}{m(t_s)} \int_{t_s}^{t_{s+1}} (b(r) - a(r))dr + \int_{q_i}^{q_0} \eta(r)dr. \tag{4.12}$$

Пусть неравенство (4.11) выполнено при некотором $0 \le f \le l$. Покажем, что оно выполнено при $f + 1$. Если $\mu(t_{f+1}) < B_{f+1}$, то неравенство (4.11) выполнено при $f + 1$.

Пусть $\mu(t_{f+1}) \ge B_{f+1}$. Применяя лемму 1, из неравенств (3.2) и (4.11) получим, что

$$\|z(t_{f+1})\| > m(t_f)(\mu(t_{f+1}) - B_f) + \int_{t_f}^{t_{f+1}} (b(r) - a(r))dr.$$

Отсюда и из формулы (4.12) следует, что

$$\|z(t_{f+1})\| > m(t_f)(\mu(t_{f+1}) - B_{f+1}) \geq m(t_{f+1})(\mu(t_{f+1} - B_{f+1}).$$

Положим в (4.11) $f = l + 1$. Получим, что неравенство (4.4) при $z = z(q_i)$ и $\mu = \mu(q_i)$ не выполнено.

При $i = 0$ получим неравенство $\|z(q_0)\| > \mu(q_0)m(q_0)$. Согласно теореме 1 управление $v(t, z) = \psi(z)$ гарантирует невыполнение неравенства (1.7). □

5. Пример

Группа из N точек переменного состава преследует точку переменного состава. Их движение описывается уравнением Мещерского [1, с. 28]

$$\ddot{x}_i = g + \frac{\dot{m}_i(t)}{m_i(t)} u_i, \quad i = \overline{1, N+1}.$$

Здесь $x_i \in \mathbb{R}^n$; u_i — вектор относительной скорости отделяющихся частиц; $m_i(t)$ — масса в момент времени t; $g \in \mathbb{R}^n$ —постоянный вектор.

Ситуация, когда на i-ю точку переменного состава наряду с управляемой реактивной силой действует постоянная сила, равная $m_i(t)g$, возникает при рассмотрении ее движения, например, вблизи поверхности Луны, где отсутствует атмосферное сопротивление.

Заданы числа $\lambda_i \neq 0$, $i = \overline{1, N}$. Цель первого игрока, который управляет точками x_i, $i = \overline{1, N}$, заключается в том, чтобы осуществить неравенство

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i(p) - x_{N+1}(p) \Big\| \leq \varepsilon. \tag{5.1}$$

Здесь $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ — заданные числа. Цель второго игрока, который управляет точкой x_{N+1}, противоположна.

Считаем, что законы изменения реактивных масс $m_i(t)$ для $i = \overline{2, N+1}$ заданы. Управлениями являются относительные скорости u_i, ограниченные по норме. Для этих точек уравнения движения примут вид

$$\ddot{x}_i = g - f_i(t)u_i, \quad \|u_i\| \leq \beta_i, \quad i = \overline{2, N+1}. \tag{5.2}$$

Здесь функции $f_i(t) \geq 0$ и числа $\beta_i > 0$ —заданы.

Обозначим через M неизменяемую часть массы точки x_1. Положим $\phi(t) = \ln(M/m_1(t))$. Тогда $\dot{\phi}(t) = -\dot{m}_1(t)/m_1(t)$. Поскольку $m_1(t)$ убывает, то $\dot{\phi}(t) \geq 0$. Уравнение движения точки x_1 принимает вид

$$\ddot{x}_1 = g - \dot{\phi}(t)u_1. \tag{5.3}$$

Условие неперерасхода топлива $m_1(t) \geq M$ запишем неравенством

$$\mu(t) = \ln \frac{m_1(t)}{M} \geq 0. \tag{5.4}$$

Считаем, что наряду с непрерывным изменением массы $m_1(t)$ в отдельные моменты времени τ может происходить мгновенное отделение конечного количества массы $0 \leq m_1(\tau) - m_1(\tau + 0)$. Это приводит к мгновенному изменению скорости [1, с. 85–87]

$$\dot{x}_1(\tau + 0) = \dot{x}_1(\tau) + \ln \frac{m_1(\tau + 0)}{m_1(\tau)} u_1(\tau).$$

Учитывая обозначение (5.4), перепишем это равенство:

$$\dot{x}_1(\tau+0)=\dot{x}_1(\tau)-\Delta u_1(\tau), \quad \Delta=\mu(\tau)-\mu(\tau+0)\geq 0. \tag{5.5}$$

Считаем, что $\|u_1\|=\beta_1=\text{const}$.

Введем новую переменную

$$z=(p-t)^2\Big(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i-1\Big)\frac{g}{2}-x_{N+1}-(p-t)\dot{x}_{N+1}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x_i+(p-t)\dot{x}_i). \tag{5.6}$$

Неравенство (5.1) будет выполнено тогда и только тогда, когда $\|z(p)\|\leq\varepsilon$. Далее, из уравнений движения (5.2) и (5.3) и из формулы (5.6) получим, что выполнены уравнения (1.1), в которых

$$c(t)=(p-t)|\lambda_1|\beta_1, \quad w=\frac{\text{sign }\lambda_1}{\beta_1}u_1; \quad b(t)=(p-t)\beta_{N+1}f_{N+1}(t), \quad v=\frac{1}{\beta_{N+1}}u_{N+1};$$

$$a(t)=(p-t)a^*(t), \quad u=\sum_{i=2}^{N}\frac{\lambda_i f_i(t)}{a^*(t)}u_i, \quad \text{где } a^*(t)=\sum_{i=2}^{N}|\lambda_i|\beta_i f_i(t). \tag{5.7}$$

Из соотношений (5.5) следует формула для определения $z(\tau_i+0)$ в (1.6).

Из формул (5.7) получим, что управления игроков, решающие поставленные перед ними задачу, определяются как

$$u_1(t,x_1,\ldots,x_{N+1})=\beta_1\psi(z)\text{sign }\lambda_1, \quad u_{N+1}(t,x_1,\ldots,x_{N+1})=\beta_{N+1}\psi(z),$$

$$\sum_{i=2}^{N}\frac{\lambda_i f_i(t)}{a^*(t)}u_i(t,x_1,\ldots,x_{N+1})=\psi(z).$$

Рассмотрим случай, когда тяги $f_i(t)=\text{const}$, $i=\overline{2,N+1}$. В этом случае из (5.7) получим, что

$$c(t)=(p-t)c, \quad b(t)=(p-t)b, \quad a(t)=(p-t)a, \tag{5.8}$$

где постоянные $c>0$, $b>0$, $a>0$. Будем считать, что $b>a$. Тогда из (2.1) и (2.2) получим, что

$$m(t)=(p-t)c, \quad q_0=p-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{b-a}}. \tag{5.9}$$

Отметим, что функции (5.8) и (5.9) удовлетворяют условиям, сформулированным в предположениях 1–3.

Считаем, что начальный момент $t_0=0$. Тогда если $p\leq\sqrt{2\varepsilon/(b-a)}$, то $q_0\leq t_0$. В этом случае условия (2.3) примут вид $\|z(0)\|\leq pc\mu(0)+\varepsilon-(b-a)p^2/2$. Если $\|z(0)\|\leq\varepsilon-(b-a)p^2/2$, то первый игрок выбирает $\Delta_0=0$ и $\phi_0(t)=0$ при $0\leq t\leq p$. Если $\|z(0)\|>\varepsilon-(b-a)p^2/2$, то первый игрок выбирает

$$\Delta_0=\frac{\|z(0)\|-\varepsilon+(b-a)p^2/2}{pc} \quad \text{и} \quad \phi_0(t)=0 \text{ при } 0\leq t\leq p.$$

Пусть $p>\sqrt{2\varepsilon/(b-a)}$. Тогда из формул (2.11), (5.8) и (5.9) получим, что

$$\eta(t)=\frac{b-a}{c}, \quad \xi(t)=0 \text{ при } t<p-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{b-a}}.$$

Поэтому условия (2.14) примут вид

$$\|z(0)\|\leq pc\Big(\mu(0)-\frac{(b-a)p-\sqrt{2\varepsilon(b-a)}}{c}\Big), \quad \mu(0)\geq\frac{(b-a)p-\sqrt{2\varepsilon(b-a)}}{c}.$$

Из формул (4.8) следует, что первый игрок выбирает

$$\Delta_0=\frac{\|z(0)\|}{pc} \text{ и } \dot{\phi}(t)=\frac{b-a}{c} \text{ при } 0\leq t\leq p-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{b-a}}.$$

Стало быть, первая точка движется с постоянной тягой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. **Красовский Н.Н.** Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 2. С. 244–254.
3. **Красовский Н.Н., Репин Ю.М., Третьяков В.Е.** О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. № 4. С. 3–23.
4. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил // Дифференц. уравнения. 1966. Т 2, № 5. С. 587–599.
5. **Пожарицкий Г.К.** Игровая задача импульсного сближения с противником, ограниченным по энергии // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 579–589.
6. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при ограничениях на импульсы управлений игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 397–406.
7. **Серов В.П., Ченцов А.Г.** О программной линейной игровой задаче наведения при ограничении на импульс управляемой силы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 5. С. 61–74.
8. **Кумков С.И., Пацко В.С.** Информационное множество в задаче импульсного управления // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 195–206.
9. **Петров Н.Н.** Задача группового преследования в классе импульсных стратегий преследователей // Изв-я РАН, Теория и системы управления. 2009. № 2. С. 38–44.
10. **Котлячкова Е.В.** К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий // Изв-я Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 1, № 45. С. 106–113.
11. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 212–224.
12. **Белоусов А.А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Докл. НАН Украины. 2013. № 11. С. 37–42.
13. **Тухтасинов М.** Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 273–282.
14. **Ухоботов В.И.** Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 355–362.
15. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
16. **Ухоботов В.И., Зайцева О.В.** Линейная задача импульсной встречи в заданный момент времени при наличии помехи // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16, № 1. С. 186–198.
17. **Aubin J.-P., Seube N.** Conditional viability for impulse differential games // Annals of Operations Research. 2005. Vol. 137, no. 1. P. 269–297. doi: 10.1109/CDC.2002.1184364 .
18. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
19. **Ухоботов В.И.** Синтез управления в однотипных дифференциальных играх с фиксированным временем // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. Математика, механика. 1996. Вып. 1. С. 178–184.
20. **Ухоботов В.И.** Об одном классе линейных дифференциальных игр с импульсными управлениями // Прикл. математика и механика. 1974. Т. 38, вып. 4. С. 590–598.
21. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

Поступила 31.08.2017

Изместьев Игорь Вячеславович
младший науч. сотрудник
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: j748e8@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem.* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p.
2. Krasovskii N.N. On a problem of tracing. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, no. 1, pp. 363–377.
3. Krasovskii N.N., Repin Yu.M., Tret'yakov V.E. Some game situations in theory of control systems. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1965, no. 4, pp. 3–23 (in Russian)
4. Krasovskii N.N., Tret'yakov V.E. On a pursuit problem in the case of restrictions on the impulses of control forces. *Diff. Uravn.*, 1966, vol. 2, pp. 587–599 (in Russian).
5. Pozharitskii G.K. Game problem of impulse encounter with an opponent limited in energy. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 4, pp. 555–565.
6. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter–evasion differential game with constraints on the momenta of players' controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 376–385. doi: 10.1016/0021-8928(75)90002-7 .
7. Serov V.P., Chentsov A.G. On a programmed linear game-theoretic guidance problem with constraints on the control force impulse. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 5, part 1, pp. 755–768.
8. Kumkov S.I., Patsko V.S. Information sets in the pulse control problem. *Autom. Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 7, part 2, pp. 1224–1234.
9. Petrov N.N. A problem of group pursuit in the class of impulse strategies of pursuers. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, no. 2, pp. 199–205. doi: 10.1134/S106423070902004X .
10. Kotlyachkova E.V. About non-stationary problem of simple pursuit in the class of impulse strategies. *Izv. IMI UdGU*, 2015, no. 1(45), pp. 106–113.
11. Chikrii A.A., Matichin I.I. Linear differential games with impulse control of players. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, suppl. 1, pp. S68–S81.
12. Belousov A.A. Differential games under integral constraints with impulse controls. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2013, no. 11, pp. 37–42.
13. Tukhtasinov M. A linear differential game of pursuit with impulse and integrally constrained controls of the players. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 273–282 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282 .
14. Ukhobotov V.I. A linear differential game with constraints imposed on the control impulses. *J. Appl. Math. Mech.*, 1988, vol. 52, no. 3, pp. 277–283. doi: 10.1016/0021-8928(88)90078-0 .
15. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami.* [Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints]. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University Publ., 2005, 124 p. ISBN: 5-7271-0725-3 .
16. Ukhobotov V.I., Zaitseva O.V. A linear problem of pulse encounter at a given time under interference. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 215–228. doi: 10.1134/S0081543811020167 .
17. Aubin J.-P., Seube N. Conditional viability for impulse differential games. *Annals of Operations Research*, 2005, vol. 137, no. 1, pp. 269–297. doi: 10.1109/CDC.2002.1184364 .
18. Pontryagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815 .
19. Ukhobotov V.I. Synthesis of a control in differential games of one type with fixed time. *Vestnik Chelyabinsk. Univ. Ser. 3 Mat. Mekh.*, 1996, no. 1(3), pp. 178–184 (in Russian).
20. Ukhobotov V.I. On a class of linear differential games with impulse controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1974, vol. 38, no. 4, pp. 550–557.
21. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis* (*International monographs on advanced mathematics and physics*). Delhi, Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501 . Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza.* Moscow, Nauka Publ., 1965, 520 p.

The paper was received by the Editorial Office on August 31, 2017.

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

Igor' Vyacheslavovich Izmest'ev, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: j748e8@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ОБ ОЦЕНКЕ ХАУСДОРФОВА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ МНОЖЕСТВОМ И ЕГО ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКОЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

В. Н. Ушаков, А. А. Ершов

В работе выводятся оценки хаусдорфова расстояния между множествами и их выпуклыми оболочками в конечномерных евклидовых пространствах со стандартным скалярным произведением и соответствующей нормой. В первой части работы данные оценки рассматриваются для α-множеств. Под α-множеством понимается произвольный компакт, у которого параметр, характеризующий степень невыпуклости и вычисляемый определенным образом, равен α. В большинстве случаев упомянутый параметр α представляет собой максимальный возможный угол, под которым видны из точек, не принадлежащих рассматриваемому множеству, их проекции на это множество. α-множества были введены В. Н. Ушаковым для классификации невыпуклых множеств по степени их невыпуклости. Они используются для описания волновых фронтов и других задач, возникающих в теории управления. В работе рассмотрены α-множества только в двумерном пространстве. Доказано, что если α мало, то соответствующие α-множества близки к выпуклым множествам в хаусдорфовой метрике. Это позволяет пренебрегать их невыпуклостью и считать их выпуклыми, если известно, что параметр α мал. Отметим, что таким же образом часто применяется известная теорема Шепли — Фолкмана. Во второй части работы получены некоторое улучшение к оценке из самой теоремы Шепли — Фолкмана. В оригинальной теореме Шепли — Фолкмана утверждается, что сумма Минковского большого количества множеств близка в хаусдорфовой метрике к ее выпуклой оболочке по отношению к величине чебышёвского радиуса суммы. В данной работе рассмотрен частный случай, когда эта сумма состоит из одинаковых слагаемых, т. е. мы складываем некоторое множество M само с собой. Для данного частного случая получено улучшение оценки, которое существенно для множеств в пространствах малой размерности. Кроме того, как и в известном следствии Старра, новая оценка допускает следующее улучшение: мы можем заменить чебышёвский радиус $R(M)$ в правой части оценки на внутренний радиус $r(M)$ множества M. Однако, отметим, что при неограниченном увеличении размерности пространства наша новая оценка асимптотически стремится к оценке, непосредственно вытекающей из теоремы Шепли — Фолкмана.

Ключевые слова: α-множество, сумма Минковского, выпуклая оболочка, хаусдорфово расстояние.

V. N. Ushakov, A. A. Ershov. An estimate of the Hausdorff distance between a set and its convex hull in Euclidean spaces of small dimension.

We derive estimates for the Hausdorff distance between sets and their convex hulls in finite-dimensional Euclidean spaces with the standard scalar product and the corresponding norm. In the first part of the paper, we consider estimates for α-sets. By an α-set we mean an arbitrary compact set for which the parameter characterizing the degree of nonconvexity and computed in a certain way equals α. In most cases, the parameter α is the maximum possible angle under which the projections to this set are visible from points not belonging to the set. Note that α-sets were introduced by V. N. Ushakov for the classification of nonconvex sets according to the degree of their nonconvexity; α-sets are used for the description of wavefronts and for the solution of other problems in control theory. We consider α-sets only in a two-dimensional space. It is proved that, if α is small, then the corresponding α-sets are close to convex sets in the Hausdorff metric. This allows to neglect their nonconvexity and consider such sets convex if it is known that the parameter α is small. The known Shapley–Folkman theorem is often applied in the same way. In the second part of the paper we present some improvements of the estimates from the Shapley–Folkman theorem. The original Shapley–Folkman theorem states that the Minkowski sum of a large number of sets is close in the Hausdorff metric to the convex hull of this sum with respect to the value of the Chebyshev radius of the sum. We consider a particular case when the sum consists of identical terms; i.e., we add some set M to itself. For this case we derive an improved estimate, which is essential for sets in spaces of small dimension. In addition, as in Starr's known corollary, the new estimate admits the following improvement: the Chebyshev radius $R(M)$ on the right-hand side can be replaced by the inner radius $r(M)$ of the set M. However, as the dimension of the space grows, the new estimate tends asymptotically to the estimate following immediately from the Shapley–Folkman theorem.

Keywords: α-set, Minkowski sum, convex hull, Hausdorff distance.

MSC: 52A27, 52A30

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-223-235

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00018 мол_а).

Введение

В первой части данной статьи в частном случае получена оценка хаусдорфова расстояния между α-множеством и его выпуклой оболочкой. Понятие α-множества было введено в начале 2000-х годов в [1], оно сформировалось при рассмотрении некоторых задач управления, относящихся к изучению множеств достижимости управляемых систем. Множества достижимости, как правило, невыпуклы. Для одних систем эти множества мало отличаются от выпуклых, для других — весьма ощутимо. В связи с этим возникла естественная потребность в наведении определенной классификации этих множеств по степеням их невыпуклости. Так появилось понятие α-множества в $\mathbb{R}^n$ (см., например, [2]). При его формулировке мы будем использовать обозначения из [3].

В данной работе введены следующие обозначения:

$\operatorname{co} M$ — выпуклая линейная оболочка множества M;

$\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение h_* и h^* из $\mathbb{R}^n$;

$||h_*|| = \langle h_*, h_* \rangle^{1/2}$ — стандартная норма (порожденная скалярным произведением) в евклидовом пространстве;

$\angle(h_*, h^*) = \arccos \dfrac{\langle h_*, h^* \rangle}{||h_*|| \cdot ||h^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^*;

$\operatorname{con} M = \{h = \lambda(x - x^*) : \lambda \geqslant 0, x \in M\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество M и с вершиной в точке x^*.

Под проекцией p^* точки x^* на множество M мы понимаем ближайшую к x^* точку из M.

Определение 1. Пусть A — компакт в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A$. Через $\Omega_A(z^*)$ мы обозначим множество всех проекций точки z^* на A, через $H_A(z^*) = \operatorname{con}(\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^*)$ — конус, натянутый на множество $\operatorname{co}\Omega_A(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \operatorname{co}\Omega_A(z^*)\}$.

Определим функцию $\alpha_A(z^*) = \max\limits_{h_*, h^* \in H_A(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi]$.

Полагаем $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \backslash A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

Тогда если $\alpha_A = \alpha$, то множество A назовем *α-множеством.*

Отметим, что 0-множество является обычным выпуклым компактом. Примерами π-множеств являются кольцо или множество, состоящее из двух точек.

В работе рассмотрены оценки хаусдорфова расстояния между множествами и их выпуклыми оболочками в пространствах малой размерности. Заметим, что в двумерных и трехмерных пространствах имеется значительная часть приложений такого рода оценок (например, теоремы Шепли — Фолкмана): приближенное описание волнового фронта, невыпуклых экономик, приближенная минимизация суммы нескольких функций и др.

Обозначим:

через $\rho(x, Y) = \sup\limits_{y \in Y} ||x - y||$ расстояние от точки до множества;

через $h(X, Y) = \sup\limits_{x \in X} \rho(x, Y)$ хаусдорфово отклонение множества X от множества Y;

через $d(X, Y) = \max\{h(X, Y), h(Y, X)\}$ хаусдорфово расстояние между множествами X и Y;

через $\lambda(X) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in X} ||x_1 - x_2||$ будем обозначать диаметр множества.

Пусть α-множество $M_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ и имеет достаточно гладкую границу конечной длины. В работе показано, что для такого множества имеет место следующее неравенство:

$$d(M_\alpha, \operatorname{co} M_\alpha) \leqslant \lambda(M_\alpha) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из этой оценки следует, что если α мало, то соответствующие α-множества близки к выпуклым множествам, а именно, это свойство дает возможность считать такие α-множества естественным обобщением выпуклых множеств.

Однако, из теоремы Каратеодори вытекает, что для произвольного множества M хаусдорфово расстояние $d(M, \operatorname{co} M)$ не превосходит его чебышёвского радиуса $R(M)$. В свою очередь, чебышёвский радиус $R(M) \leqslant \lambda(M)/\sqrt{3}$ для любых ограниченных множеств M в $\mathbb{R}^2$ [4, задача 67, с. 75]. То есть в двумерном евклидовом пространстве

$$d(M, \operatorname{co} M) \leqslant \frac{\lambda(M)}{\sqrt{3}},$$

и наша новая оценка может быть полезна только лишь при $\alpha < \pi/3$.

Вторая часть работы посвящена вопросу о том, насколько близка к $\operatorname{co} M$ сумма вида $\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}})$, где M — произвольное множество. Как известно, ответ на данный вопрос в несколько более общем случае дает теорема Шепли — Фолкмана (см., например, [5]), из которой вытекает, что

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant R(M)\frac{\sqrt{\min(n,k)}}{k},$$

где n — размерность пространства, $R(M)$ — чебышёвский радиус [6] множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Нами была получена следующая улучшенная оценка:

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant R(M)\frac{\sqrt{\min(n-1,k)}}{k}.$$

Отметим, что наше улучшение существенно лишь при малых n.

1. Оценка $d(M_\alpha, \operatorname{co} M_\alpha)$ для α-множества M_α в $\mathbb{R}^2$ с границей конечной длины

Введем некоторые вспомогательные определения и утверждения.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть кривая γ — ориентированная непрерывная кусочно-гладкая кривая конечной длины в $\mathbb{R}^2$ с ориентацией от точки A к точке B. Проекцию p^* точки $z^* \notin \gamma$ на кривую γ назовем правой, если z^* остается справа при движении по кривой γ от A к B в момент прохождения через точку p^*. Аналогично проекцию p^* точки $z^* \notin \gamma$ на γ назовем левой, если z^* остается слева при движении по кривой γ от A к B через p^*. Если p^* совпадает с точкой A или B, то тип проекции будем считать нейтральным.

З а м е ч а н и е 1. Определение 2 использует идеологию ориентации замкнутых кривых при вычислении интегралов второго рода. В частности, если замкнутая кривая положительно ориентирована, то говорят, что при движении по ней по направлению ее ориентации все точки внутренности остаются слева. Определение непрерывной кусочно-гладкой кривой сформулировано в [7, гл. 3, §3.1]. В дальнейшем мы будем называть такие кривые *достаточно гладкими*, поскольку мы бы не хотели сосредотачиваться на вопросе минимально допустимой гладкости в данной работе.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что любая ориентированная кривая γ достаточной гладкости разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на три множества точек: L_γ, R_γ и N_γ. Точка $z^* \in L_\gamma$, если у нее есть хотя бы одна левая проекция на кривую γ и ни одной правой; точка $z^* \in R_\gamma$, если у нее есть хотя бы одна правая проекция на γ и ни одной левой; точка $z^* \in N$ во всех остальных случаях, в частности $\gamma \subset N_\gamma$.

В качестве примера рассмотрим положительно ориентированную замкнутую кривую $C = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \cos t, x_2 = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$. В таком случае $L_C = \{x : ||x|| < 1\}$, $R_C = \{x : ||x|| > 1\}$, $N_C = \{x : ||x|| = 1\}$. В случае, если ориентированная кривая γ незамкнута, множества L_γ, R_γ и N_γ могут обладать более сложной геометрией.

О п р е д е л е н и е 4. Назовем ориентированную достаточно гладкую кривую γ левосторонней α-кривой, если

$$\alpha_\gamma^+ = \sup_{z^* \in L_\gamma \cup N_\gamma \setminus \gamma} \alpha_A(z^*) = \alpha.$$

Назовем γ правосторонней α-кривой, если

$$\alpha_\gamma^- = \sup_{z^* \in R_\gamma \cup N_\gamma \setminus \gamma} \alpha_A(z^*) = \alpha.$$

Назовем γ одностронней α-кривой, если она является левосторонней α-кривой или правосторонней α-кривой. Примером односторонней α-кривой может служить ориентированная граница C единичного круга. Ясно, что C является односторонней 0-кривой с внешней стороны (т. е. правосторонней 0-кривой при положительной ориентации C и левосторонней 0-кривой при отрицательной ориентации C) и односторонней π-кривой — с внутренней (то есть левосторонней π-кривой при положительной ориентации C и правосторонней π-кривой при отрицательной ориентации C).

По аналогии с работой [2] будем называть γ левосторонней β_α-кривой, если $\alpha_\gamma^+ \leqslant \alpha$, и правосторонней β_α-кривой, если $\alpha_\gamma^- \leqslant \alpha$.

О п р е д е л е н и е 5. Односторонними овыпуклениями ориентированной достаточно гладкой кривой γ назовем множества $\mathrm{co}_+\gamma = \mathrm{co}\,\gamma \cap \mathrm{cl}\, L_\gamma$ и $\mathrm{co}_-\gamma = \mathrm{co}\,\gamma \cap \mathrm{cl}\, R_\gamma$.

О п р е д е л е н и е 6. Пусть M — односвязное множество в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей ∂M. Назовем *лакуной* участок границы $\gamma \subset \partial M$ с крайними точками A и B такой, что отрезок $AB \subset \partial \mathrm{co}\, M$, $\gamma \cap AB = \{A, B\}$ и при этом область, ограниченная γ и AB, не содержит во внутренности точек из M.

З а м е ч а н и е 2. В монографии [8, §4.1.4] область, ограниченная лакуной γ и крышкой AB, называется *карманом* множества M.

Лемма 1. *Лакуна α-множества является односторонней β_α-кривой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное α-множество M_α с границей ∂M_α, часть которой является лакуной Γ. Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует некоторая точка $O \in \mathbb{R}^2 \setminus M_\alpha$, имеющая две проекции A_1 и A_2 на Γ таких, что

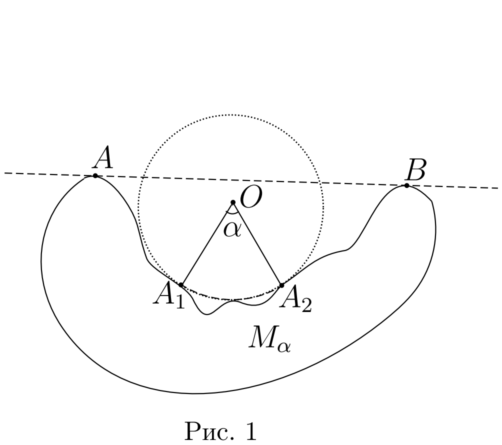


Рис. 1

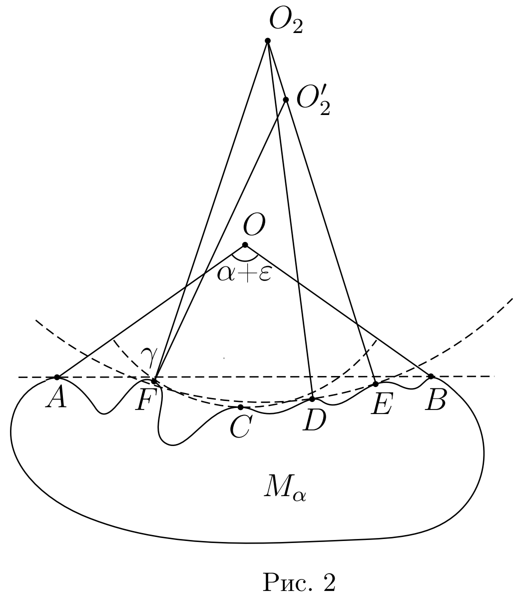


Рис. 2

$\angle A_1OA_2 > \alpha$ (рис. 1). Это возможно только в том случае, если точки A_1 и A_2 не являются в то же время проекциями O на M_α. Следовательно, часть границы $\partial M_\alpha \backslash \Gamma$ должна попадать внутрь круга $\mathbb{B}(O, |OA_1|)$ с центром в точке O и радиуса $|OA_1|$. Покажем, что это невозможно. Действительно, рассмотрим кривую L состоящую из прямой AB, в которой отрезок AB заменен лакуной Γ. Кривая L разделяет плоскость $\mathbb{R}^2$ на две части. В одной из них находится круг $\mathbb{B}(O, |OA_1|)$, а другой — множество M. Следовательно, попадание точек из множества M_α во внутрь круга $\mathbb{B}(O, |OA_1|)$ невозможно.

Лемма 2. *Пусть Γ — лакуна α-множества M_α с концами в точках A и B. Точка O построена на серединном перпендикуляре к отрезку A и B так, что $\angle AOB = \alpha + \varepsilon$ и точка O лежит по другую сторону от отрезка AB от множества M_α (рис. 2), где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \pi - \alpha$. Точка C — одна из ближайших к O точек из Γ, она делит Γ на две части — Γ_1 и Γ_2. Тогда участки границы Γ_1 и Γ_2 являются односторонними β_α-кривыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности достаточно доказать, что $\alpha^+_{\Gamma_2} \leqslant \alpha^+_{\Gamma}$. Для этого покажем, что для каждой точки $O_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma_2$ можно найти такую точку $O'_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, что $\alpha_\Gamma(O'_2) \geqslant \alpha_{\Gamma_2}(O_2)$.

Итак, возьмем произвольную точку $O_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma_2$. Если $\alpha^+_{\Gamma_2}(O_2) = 0$, то в качестве $O'_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$ подойдет любая точка из $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$.

Пусть оказалось, что $\alpha^+_{\Gamma_2}(O_2) > 0$. Тогда рассмотрим два случая.

Первый случай. Проекции точки O_2 на Γ_2 также являются проекциями точки O_2 на Γ. В таком случае в качестве точки O'_2 можно взять саму точку O_2.

Второй случай. Предположим, что это не так (см. рис. 2). Пусть точки D и E — проекции точки O_2 на Γ_2, $\mathbb{B}(O_2, |O_2E|)$ — круг с центром в точке O_2 и радиусом $|O_2E|$. В таком случае пересечение $\mathbb{B}(O_2, |O_2E|) \cap \Gamma_1 = \gamma \neq \varnothing$. При этом расстояние $\rho(O_2, \gamma) < |O_2E|$.

Возьмем точку $O'_2 = O_2$ и будем сдвигать ее по направлению к точке E. Заметим, что круг $\mathbb{B}(O'_2, |O'_2E|)$ с центром в точке O' и радиусом $|O'A_1|$ всегда будет лежать внутри круга $\mathbb{B}(O_2, |O_2E|)$. Кроме того, в некоторый момент $\rho(O'_2, \gamma) = |O'_2E|$. При этом должна существовать хотя бы одна точка $F \in \gamma$ такая, что $\rho(O'_2, \gamma) = |O'_2E|$. Очевидно, что $\angle FO'_2E \geqslant \angle DO_2E$. Отсюда следует, что $\alpha^+_\Gamma(O'_2) \geqslant \alpha^+_{\Gamma_2}(O_2)$.

Лемма 3. *Пусть Γ — лакуна конечной длины некоторого α-множества с концами в точках A_1 и B_1. Тогда хаусдорфово отклонение Γ от отрезка A_1B_1 удовлетворяет неравенству*

$$h(\Gamma, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2},$$

где A_1B_1 — отрезок, соединяющий точки A_1 и B_1 (рис. 3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу леммы 1 лакуна Γ — односторонняя β_α-кривая. Докажем сначала более слабую оценку

$$h(\Gamma, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \operatorname{tg} \frac{\alpha + \varepsilon}{2}, \tag{1.1}$$

где ε — произвольное положительное число такое, что $\alpha + \varepsilon \leqslant \pi$.

Для доказательства (1.1) возьмем произвольную точку $X \in \Gamma$ и покажем, что

$$\rho(X, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \operatorname{tg} \frac{\alpha + \varepsilon}{2}. \tag{1.2}$$

На серединном перпендикуляре к отрезку A_1B_1 построим точку O_1 так, чтобы $\angle A_1O_1B_1 = \alpha + \varepsilon$. Из пересечения $\Gamma \cap \mathbb{B}(O_1, |O_1A_1|)$ выберем точку C_1, ближайшую к точке O_1. Ясно, что точка C_1 не совпадает с A_1 и B_1, иначе бы γ не была бы односторонней β_α-кривой. В силу леммы 2 участки $\gamma_1 \subset \Gamma$ с концами в точках A_1 и C_1 и $\gamma_2 \subset \Gamma$ с концами в точках C_1 и B_1 являются односторонними β_α-кривыми. Пусть для определенности $X \in \gamma_1$. Построим

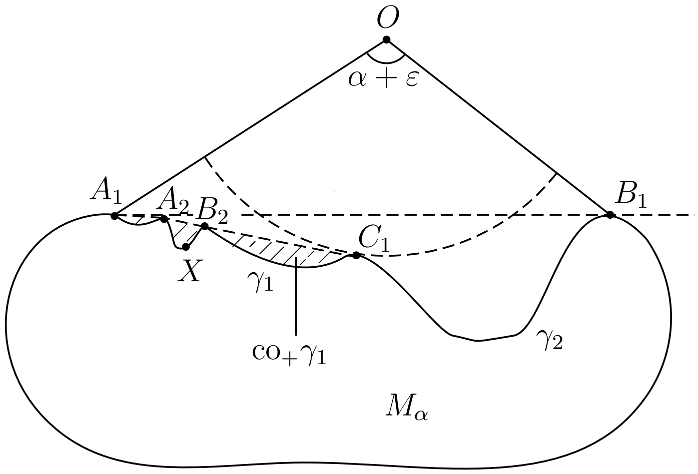


Рис. 3

одностороннее овыпукление $\mathrm{co}_+\gamma_1$ кривой γ_1. Если $X \in \partial\mathrm{co}_+\gamma_1 \cap \gamma_1$, то X попадет внутрь $\mathbb{B}(O_1, |O_1A_1|)$, и тогда оценка (1.2) будет выполняться. Предположим, что X лежит внутри одной из лакун с концами A_2B_2. Заметим, что для отрезка A_2B_2, как и для любого отрезка внутри треугольника $\Delta A_1B_1C_1$, выполняется оценка

$$|A_1B_1| - |A_2B_2| \geqslant h(A_2B_2, A_1B_1)\ \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}. \tag{1.3}$$

Продолжая действовать тем же образом, получим последовательность отрезков $\{A_nB_n\}$, которая в худшем случае бесконечна.

При этом

$$|A_{k-1}B_{k-1}| - |A_kB_k| \geqslant h(A_kB_k, A_{k-1}B_{k-1})\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}, \quad k = \overline{3,n}. \tag{1.4}$$

Складывая оценки (1.3), (1.4) получим, что

$$|A_1B_1| - |A_nB_n| \geqslant \Big(h(A_2B_2, A_1B_1) + \ldots + h(A_nB_n, A_{n-1}B_{n-1})\Big)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}$$

$$\geqslant h(A_nB_n, A_1B_1)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любого n справедливо неравенство

$$h(A_nB_n, A_1B_1) \leqslant (|A_1B_1| - |A_nB_n|)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Как известно, монотонная ограниченная числовая последовательность всегда сходится. В данном случае, с некоторой аналогией, каждая новая новая точка A_n по способу построения смещается в одну сторону по кривой Γ и при этом длина Γ конечна. Следовательно, $A_n \to A_0 \in \Gamma$. Аналогично, $B_n \to B_0 \in \Gamma$. Но тогда в силу непрерывной зависимости точки O_n от точек A_n и B_n последовательность $O_n \to O_0$. Кроме того, в силу способа построения точек A_n и B_n расстояние $\rho(C_n, \{A_0, B_0\}) \to 0$. Действительно, одна из длин кривой между точками A_n и A_{n+1} либо B_n и B_{n+1} всегда больше, чем длина кривой между точками C_n и одной из A_n и B_n. Следовательно, $|C_nO_n| \to |A_0O_0| = |B_0O_0|$. Отметим, что, вообще говоря, отсюда не следует, что последовательность C_n сходится. Возможен случай, когда C_n "прыгает" между точками A_n и B_n, постепенно сокращая расстояние до них.

Предположим, что $|A_0B_0| \neq 0$. Тогда на серединном перпендикуляре к A_0B_0 постороим точку O_0 такую, чтобы $\angle A_0O_0B_0 = \alpha+\varepsilon$ (и чтобы она оставалась слева при движении по Γ от

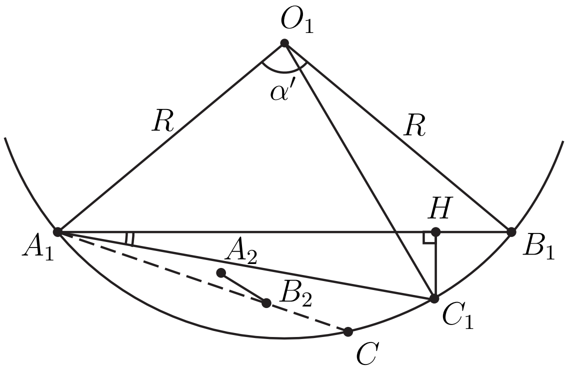


Рис. 4

точки A_0 к B_0). Найдем точку $C_0 \in \mathbb{B}(O_0, |O_0A_0|)$, ближайшую к точке O_0. Однако, поскольку $|C_0O_0| < |A_0O_0|$, $|C_nO_n| \to |A_0O_0|$, $O_n \to O_0$, получим противоречие: $|C_0O_N| < |C_NO_N|$ для достаточно большого N, хотя C_N — ближайшая на участке, включающем участок между точками A_0 и B_0. Следовательно, $|A_0B_0| = 0$. Но тогда по теореме о двух милиционерах $X = A_0 = B_0$, и, значит, для него выполняется оценка

$$\rho(X, A_1B_1) = h(X, A_1B_1) \leqslant |A_1B_1| \operatorname{tg} \frac{\alpha + \varepsilon}{2}.$$

Поскольку X — произвольная точка из Γ, то этой оценки вытекает (1.1). Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е 3. Опишем более подробно доказательство оценки (1.3). Итак, пусть описанный угол $\angle A_1O_1B_1 = \alpha + \varepsilon$ (рис. 4).

Докажем, что любой отрезок A_2B_2, лежащих между дугой $\smile A_1B_1$ и хордой A_1B_1, удовлетворяет соотношению (1.3). Прежде всего, докажем, что

$$|A_1B_1| - |A_1C_1| \geqslant h(A_1C_1, A_1B_1) \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \varepsilon}{2}, \tag{1.5}$$

где C_1 для нас будет произвольной точкой на дуге $\smile A_1B_1$.

Введем обозначения: $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, $R = |O_1A_1| = |O_1B_1|$, величину угла $\angle B_1A_1C_1$ обозначим через β, точка H — проекция точки C_1 на отрезок A_1B_1.

Ясно, что $|A_1B_1| = 2R\sin\dfrac{\alpha'}{2}$. Поскольку $\angle C_1O_1B_1$ — описанный угол, опирающийся на ту жу дугу, что и вписанный угол $\angle B_1A_1C_1$, то $\angle C_1O_1B_1 = 2\angle B_1A_1C_1 = 2\beta$. Следовательно, $0 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{\alpha'}{2}$, $\angle A_1O_1C_1 = \alpha' - 2\beta$, $|A_1C_1| = 2R\sin\Big(\dfrac{\alpha'}{2} - \beta\Big)$.

Заметим, что $h(A_1C_1, A_1B_1) = |HC_1|$. Из прямоугольного треугольника A_1HC_1 получаем, что

$$|HC_1| = |A_1C_1|\sin\beta = 2R\sin\Big(\frac{\alpha'}{2} - \beta\Big)\sin\beta.$$

Вычислим

$$|A_1B_1| - |A_1C_1| = 2R\Big(\sin\frac{\alpha'}{2} - \sin\Big(\frac{\alpha'}{2} - \beta\Big)\Big) = 2R\Big(\sin\frac{\alpha'}{2} - \sin\frac{\alpha'}{2}\cos\beta + \cos\frac{\alpha'}{2}\sin\beta\Big)$$

$$= 2R\Big(\sin\frac{\alpha'}{2}(1 - \cos\beta) + \cos\frac{\alpha'}{2}\sin\beta\Big)$$

$$= 2R\Big(2\sin\frac{\alpha'}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\Big) = 4R\sin\frac{\beta}{2}\cos\Big(\frac{\alpha' - \beta}{2}\Big).$$

Отсюда

$$\frac{|A_1B_1|-|A_1C_1|}{|HC_1|}=\frac{2\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha'-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha'}{2}-\beta\right)\sin\beta}=\frac{\cos\left(\dfrac{\alpha'-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\alpha'}{2}-\beta\right)\cos\dfrac{\beta}{2}}\geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (1.5).

Рассмотрим теперь произвольный отрезок A_2B_2, лежащий внутри фигуры, образованной хордой A_1B_1 и дугой $\smile A_1B_1$. Без ограничения общности (и за исключением некоторых вырожденных случаев) предположим, что $\rho(B_2,A_1B_1)>\rho(A_2,A_1B_1)$, $|A_1B_2|>|A_1A_2|$. Но тогда

$$\frac{|A_1B_1|-|A_2B_2|}{h(A_2B_2,A_1B_1)}\geqslant\frac{|A_1B_1|-|A_1B_2|}{h(A_1B_2,A_1B_1)},\quad h(A_2B_2,A_1B_1)=h(A_1B_2,A_1B_1). \tag{1.6}$$

Продолжим отрезок A_1B_2 до пересечения с дугой $\smile A_1B_1$ в точке C. При этом

$$\frac{|A_1B_2|}{h(A_1B_2,A_1B_1)}=\frac{|A_1C|}{h(A_1C,A_1B_1)},$$

отсюда

$$\frac{|A_1B_1|-|A_1B_2|}{h(A_1B_2,A_1B_1)}\geqslant\frac{|A_1B_1|-|A_1C|}{h(A_1C,A_1B_1)}\geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha'}{2}. \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что

$$|A_1B_1|-|A_2B_2|\geqslant h(A_2B_2,A_1B_1)\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\varepsilon}{2}.$$

Теорема 1. *Пусть M_α — α-множество в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей конечной длины, $\alpha<\pi$. Тогда имеет место следующая оценка*:

$$d(M_\alpha,\operatorname{co}M_\alpha)\leqslant\lambda(M_\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множества M_α и $\operatorname{co}M_\alpha$. Заметим, что M_α — односвязное множество, так как $\alpha<\pi$. Следовательно, ∂M_α состоит из совокупности участков, на которых она совпадает с $\partial\operatorname{co}M_\alpha$, и так называемых лакун. Именно на лакунах возможно отдаление множеств M_α и $\operatorname{co}M_\alpha$ в хаусдорфовой метрике. Пусть участок границы Γ между точками P_1 и P_2 — одна из таких лакун. При этом длина $|P_1P_2|\leqslant\lambda(M_\alpha)$ для любых $P_1,P_2\in\partial M_\alpha$.

В силу леммы 3 выполняется следующая оценка для прогиба границы на участке между точками P_1 и P_2:

$$h(\Gamma,P_1P_2)\leqslant|P_1P_2|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку данная оценка верна для всех лакун, то

$$h(\partial M_\alpha,\partial\operatorname{co}M_\alpha)\leqslant\lambda(M_\alpha)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда следует утверждение теоремы.

Г и п о т е з а. В одном частном разговоре проф. Ю.С. Ледяев высказал предположение, что оценку (1.8) можно улучшить следующей

$$d(M_\alpha,\operatorname{co}M_\alpha)\leqslant\lambda(M_\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. Оценка расстояния между усреднением множества с помощью суммирования по Минковскому и его выпуклой оболочкой

2.1. Вспомогательные утверждения

В работе [6] чебышёвский радиус множества определен следующим образом.

О п р е д е л е н и е 7. Пусть Q — ограниченное множество вещественного банахова пространства B. Элемент $x_0 \in B$ называется чебышёвским центром множества Q, если

$$\sup_{x\in Q} ||x - x_0|| = R_Q = \inf_{y\in B} \sup_{x\in Q} ||x - y||.$$

Величину R_Q мы называем чебышёвским радиусом множества Q. Таким образом, чебышёвский центр множества есть центр шара наименьшего возможного радиуса, содержащего это множество.

Напомним, что вследствие теоремы Каратеодори $d(M, \mathrm{co}M) \leqslant R(M)$.

Из определения хаусдорфова расстояния вытекает следующее его свойство.

Утверждение 1. $d(\bigcup \mathcal{M}_i, \bigcup \Omega_i) \leqslant \sup\limits_i d(\mathcal{M}_i, \Omega_i)$ *для любого набора* $\mathcal{M}_i, \Omega_i \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Здесь через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ обозначено множество всех компактов в $\mathbb{R}^n$.

2.2. Оценки в пространстве размерности $n = 2$

Теорема 2. *Пусть* $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M + \ldots + M}_{k \text{ раз}}), \mathrm{co}\, M\Big) \leqslant \frac{R(M)}{k} \leqslant \frac{\lambda(M)}{\sqrt{3}} \frac{1}{k} \text{ для } k = 2, 3, \ldots .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем оценку при $k = 3$. Для остальных k доказательство аналогичное.

Заметим:

1) $\dfrac{M + M + M}{3} = \bigcup\limits_{\{A,B,C\}\subset M} \dfrac{\{A, B, C\} + \{A, B, C\} + \{A, B, C\}}{3}$;

2) вследствие теоремы Каратеодори $\mathrm{co}\, M = \bigcup\limits_{\{A,B,C\}\subset M} \mathrm{co}\{A, B, C\}$;

3) для любых трех точек A, B, C из M выполняется неравенство

$$d\Big(\frac{\{A, B, C\} + \{A, B, C\} + \{A, B, C\}}{3}, \mathrm{co}\{A, B, C\}\Big) \leqslant \frac{R(M)}{3},$$

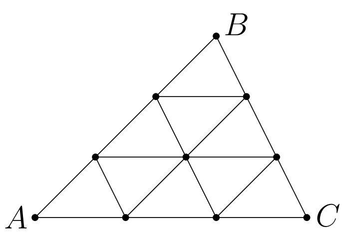


Рис. 5. Множества $\{A, B, C\}$ и $\dfrac{\{A, B, C\} + \{A, B, C\} + \{A, B, C\}}{3}$.

вследствие того что $d\big(\{A,B,C\},\operatorname{co}\{A,B,C\}\big) \leqslant R(\{A,B,C\}) \leqslant R(M)$ и вследствие подобия треугольников с вершинами из $\dfrac{\{A,B,C\}+\{A,B,C\}+\{A,B,C\}}{3}$ треугольнику ΔABC с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{3}$ (см. рис. 5).

Отсюда в силу утверждения 1 следует справедливость теоремы.

З а м е ч а н и е 4. Оценку теоремы 2 можно улучшить, если использовать так называемый внутренний радиус множества (см., например, [5]). Для произвольного множества M из евклидова пространства он определяется следующим образом:

$$r(M) \overset{def.}{=} \sup_{x\in M} \inf_{\substack{T\subset M,\\ x\in\operatorname{co}T}} R(T).$$

Пусть $M \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^2)$. Тогда поскольку

$$\frac{1}{k}\big(\underbrace{M+\ldots+M}_{k\text{ раз}}\big) = \bigcup_{\substack{\{A,B,C\}\subset M,\\ R(\{A,B,C\})\leqslant r(M)}} \frac{1}{k}\big(\underbrace{\{A,B,C\}+\ldots+\{A,B,C\}}_{k\text{ раз}}\big),$$

$$\operatorname{co} M = \bigcup_{\substack{\{A,B,C\}\subset M,\\ R(\{A,B,C\})\leqslant r(M)}} \operatorname{co}\{A,B,C\},$$

$$d\Big(\frac{1}{k}\big(\underbrace{\{A,B,C\}+\ldots+\{A,B,C\}}_{k\text{ раз}}\big),\operatorname{co}\{A,B,C\}\Big) \leqslant \frac{R(\{A,B,C\})}{k},$$

то вследствие утверждения 1

$$d\Big(\frac{1}{k}\big(\underbrace{M+\ldots+M}_{k\text{ раз}}\big),\operatorname{co} M\Big) \leqslant \frac{r(M)}{k} \text{ для } k=2,3,\ldots$$

З а м е ч а н и е 5. Заметим, что $r(M) \geqslant \sup\limits_{x\in\partial\operatorname{co}M} \inf\limits_{\substack{T\subset M,\\ x\in\operatorname{co}T}} R(T)$. То есть максимальное расстояние между концами лакун не превосходит $2r(M)$. Отсюда следует, что оценку из теоремы 1 можно улучшить следующим образом:

$$d(M,\operatorname{co}M) \leqslant 2r(M)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqslant \lambda(M)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

2.3. Оценки в пространстве размерности $n = 3$

Теорема 3. *Пусть* $M \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^3)$. *Тогда*

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M+\ldots+M}_{k\text{ раз}}),\operatorname{co}M\Big) \leqslant R(M)\,\frac{\sqrt{2}}{k} \quad \text{при} \quad k=2,3,\ldots. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если следовать схеме доказательства теоремы 2, то достаточно доказать оценку (2.1) только для всех четырехточечных множеств M.

Неравенство (2.1) при $k = 2$ непосредственно следует из теоремы Шепли — Фолкмана.

Докажем неравенство (2.1) при $k = 3$. Рассмотрим наше произвольное четырехточечное множество $M = \{A,B,C,D\}$ и множество $\dfrac{M+M+M}{3} = \{A,\ A_2,\ A_3,\ B,\ B_2,\ B_3,\ C,\ C_2,\ C_3,\ D,$ $M_1,\ M_2,\ M_3,\ N_1,\ N_2,\ N_3,\ K_1,\ K_2,\ K_3,\ H\}$ (рис. 6).

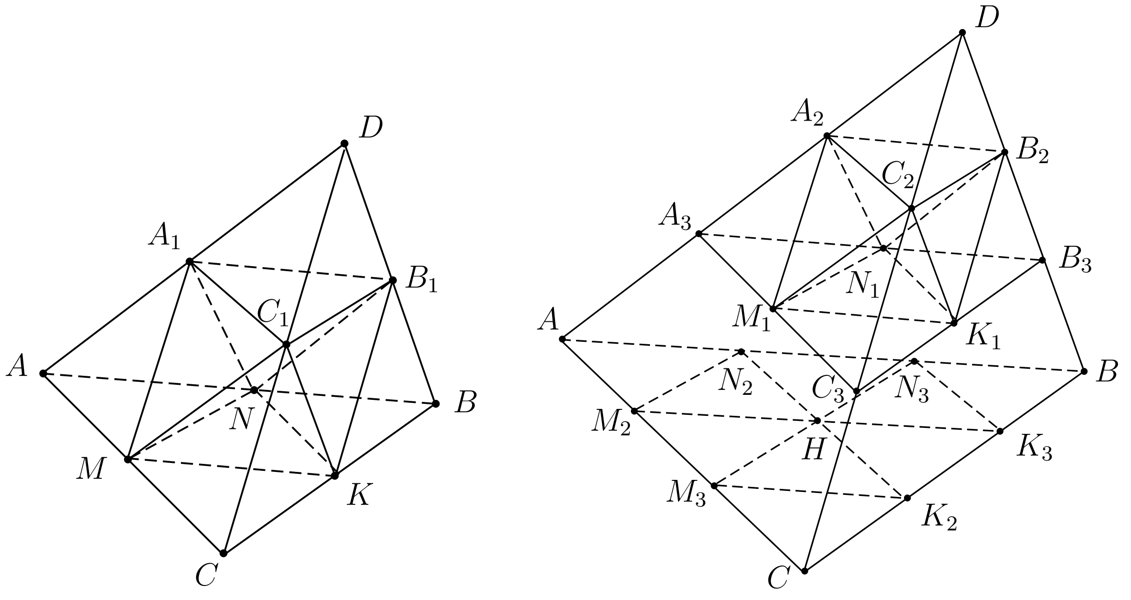


Рис. 6. Множества $M = \{A, B, C, D\}$, $\dfrac{M+M}{2}$ и $\dfrac{M+M+M}{3}$.

Рассмотрим (в некотором смысле вырожденный) многогранник $DA_2A_3B_2B_3C_2C_3M_1N_1K_1$. Он подобен многограннику $ABCDA_1B_1C_1MNK$ на рис. 6 с коэффициентом подобия $\dfrac{2}{3}$. Следовательно,

$$d(\{D, A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3, M_1, N_1, K_1\}, \operatorname{co}\{D, A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3, M_1, N_1, K_1\})$$
$$\leqslant \frac{2}{3}\,\frac{R(M)\sqrt{2}}{2} = R(M)\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

Тоже самое верно для многогранников $AA_2A_3M_1M_2M_3N_1N_2N_3H$, $BB_2B_3K_1K_2K_3N_1N_2N_3H$ и $CC_2C_3M_1M_2M_3K_1K_2K_3H$. Заметим, что объединение этих многогранников целиком накрывает тетраэдр $ABCD$ (при этом тетраэдр $M_1N_1K_1H$ является общим для всех многогранников). Таким образом, оценка (2.1) для $k = 3$ доказана.

Докажем теперь неравенство (2.1) для произвольного k по индукции. Для $k = 2$ и $k = 3$ мы уже доказали. Предположим, что для $k = m$ неравенство (2.1) доказано. Докажем его для $k = m+1$. Пусть $M = \{A, B, C, D\}$. Тогда множество $\dfrac{1}{m}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}}) = \{P_1, P_2, \ldots, P_N\}$, где $N = \overline{C}{}_m^4$ — число сочетаний с повторениями по 4 из m точек. Множество $\dfrac{1}{m+1}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m+1\text{ раз}})$ можно представить в виде объединения четырех множеств $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, где $M_1 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{A\} + (\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}})\big)$, $M_2 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{B\} + (\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}})\big)$, $M_3 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{C\} + (\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}})\big)$, $M_4 = \dfrac{1}{m+1}\big(\{D\} + (\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}})\big)$.

Заметим, что многогранники с вершинами из множеств M_j, $j = \overline{1,4}$, подобны многограннику с вершинами из множества $\dfrac{1}{m}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}})\big)$ с коэффициентом подобия $\dfrac{m}{m+1}$. Следовательно,

$$d(M_j, \operatorname{co} M_j) = \frac{m}{m+1}\, d\Big(\frac{1}{m}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}}), \operatorname{co}\frac{1}{m}(\underbrace{M + \ldots + M}_{m\text{ раз}})\Big)$$

$$\leqslant \frac{m}{m+1}\frac{R(M)\sqrt{2}}{m} = R(M)\frac{\sqrt{2}}{m+1}.$$

Однако эти четыре многогранника с вершинами из M_j, $j = \overline{1,4}$, полностью покрывают множество $\frac{1}{m+1}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m+1 \text{ раз}})$. Следовательно, аналогично случаю $k=3$

$$d\Big(\frac{1}{m+1}(\underbrace{M+\ldots+M}_{m+1 \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant R(M)\,\frac{\sqrt{2}}{m+1}\,.$$

З а м е ч а н и е 6. Также, как и в случае $n=2$, мы можем заменить чебышёвский радиус на внутренний и тем самым получить улучшенную оценку для произвольного $M \subset \operatorname{comp}(\mathbb{R}^3)$:

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M+\ldots+M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant r(M)\,\frac{\sqrt{2}}{k}\,.$$

З а м е ч а н и е 7. Действуя аналогично как в случае $n=3$, можно доказать, что в пространстве произвольной размерности $n \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$d\Big(\frac{1}{k}(\underbrace{M+\ldots+M}_{k \text{ раз}}), \operatorname{co} M\Big) \leqslant r(M)\,\frac{\sqrt{n-1}}{k} \leqslant R(M)\,\frac{\sqrt{n-1}}{k}\,.$$

3. Заключение

Нами были получены некоторые оценки расстояний между множествами и их выпуклыми оболочками. Для улучшения оценок мы использовали дополнительную информацию о структуре множеств. Данные оценки могут найти применение в экономике, теории управления и других областях, использующих теорему Шепли — Фолкмана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н.** α-множества и их свойства / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с.
2. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2016. Т. 26, № 1. С. 95–120. doi: 10.20537/vm160109 .
3. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 438 с.
4. **Яглом И.М., Болтянский В.Г.** Выпуклые фигуры. М.: ГТТИ, 1951. 344 с.
5. **Starr R.M.** Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences // Econometrica. 1969. Vol. 37, iss. 1. P. 25–38. doi: 10.2307/1909201 .
6. **Гаркави А.Л.** О чебышёвском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 6. С. 139–145.
7. **Бугров Я.С., Никольский С.М.** Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3 т. Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Дрофа, 2004. 512 с.
8. **Препарата Ф., Феймос М.** Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. 478 с.

Поступила 10.09.2017

Ушаков Владимир Николаевич
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
доцент
Челябинский государственный университет, г. Челябинск
e-mail: ale10919@yandex.ru

REFERENCES

1. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Fomin A.N. *α-mnojestva i ih svoistva.* [α-sets and their properties]. Yekaterinburg, Russia: Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2004, 62 p. (in Russian).
2. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. α-sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, iss. 1, pp. 95–120. doi: 10.20537/vm160109.
3. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza.* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 438 p.
4. Yaglom I.M., Boltyanskii V.G. *Vypuklye figury.* [Convex figures]. Moscow: GTTI Publ., 1951, 344 p.
5. Starr R.M. Quasi-equilibria in markets with non-convex preferences. *Econometrica*, 1969, vol. 37, iss. 1, pp. 25–38. doi: 10.2307/1909201 .
6. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and the convex hull of the set. *Uspehi Mat. Nauk*, 1964, vol. 14, no. 6, pp. 139–145 (in Russian).
7. Bugrov Ja.S. *Nikol'skii Higher mathematics: Vysshaya matematika: Uchebnik dlya vuzov. Vol. 3: Differentsial'nyye uravneniya. Kratnyye integraly. Ryady. Funktsii kompleksnogo peremennogo.* [Textbook for high schools: 3 volums. Vol. 3: Differential equations. Multiple integrals. Rows. Functions of a complex variable.] Moscow, Dropha Publ., 2004, 512 p. (in Russian).
8. Preparata F., Shamos M. Computational Geometry: An Introduction. N Y, Berlin, Heidelberg, Tokyo: Springer-Verlag, 1985, 398 p. Translated to Russian under the title *Vychislitel'naja geometrija: Vvedenie.*, Moscow, Mir Publ., 1989, 478 p.

The paper was received by the Editorial Office on September 10, 2017.

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: ushak@imm.uran.ru .

Aleksandr Alekseevich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru .

Том 24 № 1 2018

УДК 533.911.5

МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

И. А. Финогенко

Исследуются функционально-дифференциальные уравнения $\dot{x} = f(t, \phi(\cdot))$ с кусочно-непрерывными правыми частями. Предполагается, что множества M точек разрыва правых частей обладают свойством граничности, а не является множествами нулевой меры, как для дифференциальных уравнений без запаздывания. Такое предположение связано прежде всего с бесконечномерностью области определения функции f. Решения исследуемых уравнений понимаются в смысле А.Ф. Филиппова. Основные результаты относятся к теоремам об асимптотическом поведении решений. Они формулируются с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова со знакопостоянными производными. Трудности исследований неавтономных систем связаны с тем, что ω-предельные множества их решений не обладают свойствами типа инвариантности и множества нулей производных функционалов Ляпунова могут зависеть от переменной t и выходить за рамки пространства переменных $\phi(\cdot)$. Для разрывных неавтономных систем возникает еще проблема построения предельных дифференциальных уравнений с использованием сдвигов $f^\tau(t+\tau, \phi(\cdot))$ функции f. В данной статье вводятся понятия предельных дифференциальных включений без использования предельных переходов на последовательностях сдвигов разрывных или многозначных отображений. Изучаются их свойства с учетом специфики построения. Устанавливаются свойства типа инвариантности ω-предельных множеств решений и аналоги принципа инвариантности Ж. Ла-Салля.

Ключевые слова: предельное функционально-дифференциальное включение, асимптотическое поведение решений, функционал Ляпунова, принцип инвариантности.

I. A. Finogenko. Method of limiting differential inclusions for nonautonomous discontinuous systems with delay.

Functional–differential equations $\dot{x} = f(t, \phi(\cdot))$ with piecewise continuous right-hand sides are studied. It is assumed that the sets M of discontinuity points of the right-hand sides possess the boundedness property in contrast to being zero-measure sets, as in the case of differential equations without delay. This assumption is made largely because the domain of the function f is infinite-dimensional. Solutions to the equations under consideration are understood in Filippov's sense. The main results are theorems on the asymptotic behavior of solutions formulated with the use of invariantly differentiable Lyapunov functionals with fixed-sign derivatives. Nonautonomous systems are difficult to deal with because ω-limiting sets of their solutions do not possess invariance-type properties, whereas sets of zeros of derivatives of Lyapunov functionals may depend on the variable t and extend beyond the space of variables $\phi(\cdot)$. For discontinuous nonautonomous systems, there arises the issue of constructing the limiting differential equations with the use of shifts $f^\tau(t+\tau, \phi(\cdot))$ of the function f. We introduce the notion of limiting differential inclusion without employing limit passages on sequences of shifts of discontinuous or multivalued mappings. The properties of such inclusions are studied. Invariance-type properties of ω-limiting sets of solutions and analogs of LaSalle's invariance principle are established.

Keywords: limiting functional–differential inclusion, asymptotic behavior of solutions, Lyapunov's functional, invariance principle.

MSC: 34D05, 34K09

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-236-246

Введение

Впервые функции Ляпунова со знакопостоянной производной применялись в работах А. М. Ляпунова, Е. А. Барбашина, Н. Н. Красовского [1] при исследовании асимптотической устойчивости положения равновесия автономного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x), \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00505) и в рамках Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

где $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область. Впоследствии основные свойства решений, которые вытекают лишь из знакопостоянства производной функции Ляпунова, были аккумулированы в теореме Ла-Салля (см. [2, с. 190]), известной в настоящее время как принцип инвариантности.

Теорема 1 (J. P. LaSalle). *Пусть $x(t)$ — решение уравнения* (0.1) *с непрерывной функцией $f(x)$ в правой части, $V(x)$ — локально липшицевая функция, такая что $D^+V(x) \le 0$. Тогда пересечение ω-предельного множества $\Lambda^+(x)$ решения $x(t)$ с областью Ω определения функции $f(x)$ содержится в объединении всех непродолжимых орбит из множества $E = \{x \in \Omega \colon D^+V(x) = 0)\}$.*

Принцип инвариантности в том или ином виде распространен и на другие классы автономных систем, таких как функционально-дифференциальные уравнения [3, с. 110; 4, с. 147], функционально-дифференциальные включения [5] и ряд других.

При рассмотрении неавтономных систем

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{0.2}$$

возникают трудности, связанные с отсутствием свойств типа инвариантности у ω-предельных множеств решений и с описанием множества нулей производной функции Ляпунова. Один из возможных путей преодоления этих трудностей основан на рассмотрении сдвигов $f^\tau(t, x) = f(t + \tau, x)$ функции $f(t, x)$. При условии, что существуют в том или ином смысле пределы $f'(t, x)$ последовательностей вида $f(t + t_k, x)$, аналоги принципа инвариантности и условия устойчивости исходных систем (0.2) могут быть получены в терминах предельных уравнений

$$\dot{x} = f'(t, x).$$

Этот подход в настоящее время известен как метод предельных уравнений [6], начало которому положили работы Дж. Селла [7] и З. Артштейна [8] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений. В статье [9] метод предельных уравнений распространяется на неавтономные функционально-дифференциальные уравнения. Но при рассмотрении неавтономных дифференциальных включений или неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью возникают еще проблемы, связанные с построением предельных дифференциальных соотношений на основе последовательностей сдвигов многозначных отображений, так как нет подходящих теорем математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости возникающих функциональных последовательностей [10; 11]. В особенности это касается разрывных систем с решениями в смысле А. Ф. Филиппова, которые приводят к дифференциальным включениям [12].

В данной статье предлагается метод предельных дифференциальных включений для изучения асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \tag{0.3}$$

где $f : \mathbb{R}^1 \times C_\tau \to \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная по совокупности переменных функция, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, C_τ — пространство всех непрерывных функций $\phi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau, 0]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ с обычной sup-нормой $\|\phi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|\phi(\theta)\|$, $\tau \ge 0$ — произвольное вещественное число. Полученные результаты, обобщающие теорему Ла-Салля на уравнение (0.3), носят форму аналогов принципа инвариантности. Отметим, что здесь возникает предварительная задача об определении и существовании решения уравнения (0.3). Предельные дифференциальные включения будут строиться на основе теоремы Дэви [13] о сходимости последовательностей абсолютно непрерывных функций $y_k(t)$, что позволит избежать проблем, связанных со сходимостью последовательностей многозначных отображений.

Теорема 2 (J.L. Davy). *Пусть последовательность* $\{y_k(\cdot)\}$ *абсолютно непрерывных функций* $y_k : I \to \mathbb{R}^n$, $I = [a, b]$, *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $y_k(t) \to y(t)$ *при любом фиксированном* $t \in I$;

2) $\|\dot{y}_k(t)\| \le g(t)$ *для почти всех* $t \in I$, *где* $g : I \to \mathbb{R}^1$ — *суммируемая по Лебегу функция.*

Тогда $y(t)$ — *абсолютно непрерывная функция, такая что*

$$\dot{y}(t) \in \cap_{n\ge 1}\overline{co} \cup_{k\ge n} \dot{y}_k(t) \tag{0.4}$$

для почти всех $t \in I$, *где* $\overline{co}$ — *символ выпуклой замкнутой оболочки множества.*

Применение теоремы Дэви приводит, вообще говоря, к предельным дифференциальным включениям даже в случае функционально-дифференциальных уравнений (0.3) с непрерывной правой частью. Но тем не менее предлагаемый метод хорошо согласуется с известными подходами, обобщает их и может использоваться в тех ситуациях, когда известные методы предельных уравнений неприменимы. (Детальный сравнительный анализ см. в [10–12].)

1. Функционально-дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывными правыми частями

Определение 1. Функцию $f(t, \phi(\cdot))$ будем называть *кусочно-непрерывной* в пространстве $D = \mathbb{R}^1 \times C_\tau$, если его можно представить в виде объединения конечного числа областей D_j, $j = 1, \dots, m$, в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M, состоящего из точек границ этих областей. Функция $f(t, \phi(\cdot))$ называется *непрерывной вплоть до границы*, если в каждой точке $(t, \phi(\cdot)) \in M$ она имеет конечные пределы по каждому из множеств D_j, для которых точка $(t, \phi(\cdot))$ является граничной. Величина $\tilde{f}_j$ называется пределом функции $f(t', \psi'(\cdot))$ в точке $(t, \psi(\cdot)) \in M$ по множеству D_j, если для любой последовательности $(t_k, \psi_k(\cdot)) \to (t, \psi(\cdot))$ такой, что $(t_k, \psi_k(\cdot)) \in D_j$ для всех $k = 1, 2, \dots$, выполняется $\lim_{k\to\infty} f(t_k, \psi_k(\cdot)) = \tilde{f}_j$.

Отметим, что в областях D_j функция f непрерывна и область — открытое связное множество.

Определение 2. Решением уравнения (0.3) с начальной функцией $x_{t_0}(\cdot) = \phi_0(\cdot)$ называется непрерывная функция $x(t)$, определенная на некотором отрезке $[t_0 - \tau, t_1]$, $t_1 > t_0$, абсолютно непрерывная на отрезке $[t_0, t_1]$ и для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяющая дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t(\,\cdot\,)), \tag{1.1}$$

где $F(t, \phi(\cdot))$ — выпуклая оболочка всех предельных значений функции $f(t', \phi'(\cdot))$ в каждой фиксированной точке $(t, \phi(\cdot))$ при условии, что $(t', \phi'(\cdot)) \to (t, \phi(\cdot))$.

Определение 2 решения уравнения (0.3) соответствует определению решения уравнения (0.2) в смысле А. Ф. Филиппова для разрывных уравнений без запаздывания [14]. Но имеются и существенные отличия. Остановимся на некоторых из них.

Для систем без запаздывания множество M — это множество нулевой меры в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$, как правило, состоящее из конечного числа гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$. В пространстве D структура множества M может оказаться гораздо более сложной. Но в общем случае оно должно обладать свойством граничности, т. е. дополнение к M должно быть всюду плотным в пространстве D (или, эквивалентно, M должно иметь пустую внутренность). Тогда множество $F(t, \phi(\cdot))$ будет определено в каждой фиксированной точке $(t, \phi(\cdot)) \in D$. Множество M будем называть *множеством точек разрыва функции* f, в которых она может быть не определена. В точках из M множество $F(t, \phi(\cdot))$ в общем случае — многогранник, а в точках непрерывности функции f — одноточечное множество, состоящее из значения функции $f(t, \phi(\cdot))$. При этом многозначное отображение $F(t, \phi(\cdot))$ имеет замкнутый график и является локально ограниченным. Поэтому оно полунепрерывно сверху (см. [15]), т. е.

в каждой точке $(t, \phi(\cdot))$ для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, t, \phi(\cdot)) > 0$ такое, что для всех $(t', \phi'(\cdot))$, удовлетворяющих неравенствам $|t' - t| < \delta$, $\|\psi'(\cdot) - \psi(\,\cdot\,)\|_C < \delta$, выполняется $F(t', \phi'(\,\cdot\,)) \subset F^\epsilon(t, \phi(\,\cdot\,))$, где $F^\epsilon(t, \phi(\,\cdot\,))$ — ϵ- окрестность множества $F(t, \phi(\,\cdot\,))$.

Для произвольной функции $\psi(\cdot) \in C_\tau$ и произвольного числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\psi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Psi(\cdot)$ функции $\psi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$. Для каждой функции $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ и числа $\xi \in [0, \Delta)$ через $\Psi_\xi(\theta)$ обозначим $\Psi_\xi(\theta) = \Psi(\xi + \theta)$, где $-\tau \le \theta \le 0$.

Введем в рассмотрение определения (см. [16]).

О п р е д е л е н и е 3. Функционал $W\colon C_\tau \to \mathbb{R}^1$ имеет *инвариантную производную* $\partial_\psi W$ в точке $\psi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\xi) = W(\Psi_\xi(\cdot))$ имеет в нуле конечную правую производную $\partial Y_\Psi/\partial\xi\big|_{\xi=+0}$, инвариантную относительно функций $\Psi(\cdot)$. Последнее означает, что значение правой производной в нуле одно для всех $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$.

О п р е д е л е н и е 4. Функционал $W : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau \to R$ *инвариантно дифференцируем* в точке $p = (t, x, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\partial W/\partial t, \nabla_x W, \partial_\psi W$ и для любой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ выполняется равенство

$$W(t + \zeta, x + z, \Psi_\xi(\cdot)) - W(t, x, \psi(\cdot))$$

$$= \frac{\partial W[p]}{\partial t}\,\zeta + \langle \nabla_x W[p], z\rangle + \partial_\psi W[p]\,\xi + o\left(\sqrt{\|z\|^2 + \zeta^2 + \xi^2}\right)$$

при каждых $z \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in [0, \Delta]$, $\zeta \ge 0$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x W$ — градиент функционала W по переменной x, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения).

О п р е д е л е н и е 5. Функционал $W : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau \to \mathbb{R}$ *инвариантно непрерывен в точке* $p = (t, x, \psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times C_\tau$, если для каждой $\Psi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$ функция $Y_\Psi(\zeta, z, \xi) = W(t+\zeta, x+z, \Psi_\xi(\cdot))$ непрерывна в нуле (непрерывность по ζ и ξ справа) и предельное значение $Y_\Psi(0, 0, 0)$ инвариантно относительно $\Psi(\cdot)$.

Для того чтобы функционал W был инвариантно дифференцируем в точке $p = (t, x, \psi(\cdot))$, необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\partial W/\partial t$, $\nabla_x W$, $\partial_\psi W$, и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p (см. [16, с. 44]).

З а м е ч а н и е 1. Многие задачи общей и качественной теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом требуют вычисления производных функционалов Ляпунова вдоль решений исследуемых систем, что предполагает (по крайней мере в рамках формальных теорий) знание самих решений. В общем случае это невозможно. Аппарат инвариантно дифференцируемых функционалов, развитый в книге [16], удобен для описания производных функционалов Ляпунова. Но инвариантно дифференцируемые функционалы могут применяться и для описания множества точек разрыва функции $f(t, \phi(\cdot))$ в виде объединения $M = \cup_i^k M_i$ конечного числа многообразий вида $M_i = \{(t, \psi(\cdot))\colon W_i(t, \psi(0), \psi(\cdot)) = 0\}$, где W_i — непрерывные, инвариантно дифференцируемые функционалы. При условии, что $\nabla_x W_i \ne 0$ в каждой точке $(t, \psi(0), \psi(\cdot))$ для всех обратившихся в этой точке в нуль функционалов W_i, множество M будет обладать свойством граничности. Но при этом выявляются и другие важные факты.

Пусть $W(t, x, \psi(\cdot))$ — непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал. Обозначим через

$$M = \{(t, \psi(\cdot))\colon W(t, \psi(o), \psi(\cdot)) = 0\} \tag{1.2}$$

множество точек разрыва кусочно-непрерывной функции $f(t, \phi(\cdot))$ с областями непрерывности $D^+ = \{(t, \psi(\cdot))\colon W(t, x, \psi(\cdot)) > 0\}$ и $D^- = \{(t, \psi(\cdot))\colon W(t, x, \psi(\cdot)) < 0\}$. Тогда для любой точки $(t, \psi(\cdot)) \in M$ справедливо равенство

$$W(t + h, \psi(0) + hz, y_h(\cdot)) = \frac{\partial W}{\partial t} h + \langle \nabla_x W, z\rangle h + \partial_\psi W h + o(h) \tag{1.3}$$

для любых фиксированных векторов $z \in \mathbb{R}^n$ и функций $y(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$, продолженных из точек $\psi(0)$ линейно в направлении вектора z (т. е. $y(t) = \psi(0)+tz$ при $t \in [0,\Delta]$) при достаточно малых $h > 0$.

Предположим, что $\nabla_x W \neq 0$, и обозначим

$$\sigma = \partial W/\partial t + \partial_\psi W.$$

Тогда, очевидно, найдутся такие векторы z^1 и z^2, что

$$\langle \nabla_x W, z^1\rangle + \sigma > 0, \quad \langle \nabla_x W, z^2\rangle + \sigma < 0$$

соответственно. Из (1.3) вытекает, что в любой достаточно малой окрестности точки $(t,\psi(\cdot))$ найдутся такие точки $(t',\psi'(\cdot))$, для которых значения функционала $W(t',\psi'(0),\psi'(\cdot))$ будут как больше так и меньше нуля. Следовательно, множество M обладает свойством граничности и точка $(t,\psi(\cdot))$ – граничная точка для множеств D^+ и D^-. Тогда существуют пределы функции $f(t',\psi'(\cdot))$ в точке $(t,\psi(\cdot))$ по множествам D^+ и D^-, которые обозначим f^+ и f^- соответственно. Но справедлива также формула

$$W(t,\psi(0)+hz, y_h(\cdot)) = \langle \nabla_x W, z\rangle h + \partial_\psi W h + o(h)$$

при фиксированном t, из которой вытекает, что в любой достаточно малой окрестности точки $(t,\psi(\cdot))$ найдутся точки $(t,\psi'(\cdot))$, для которых значения функционала $W(t,\psi'(\cdot))$ будут соответственно больше и меньше нуля. Тогда в силу кусочной непрерывности функции f и единственности ее пределов по областям D^+ и D^- заключаем, что пределы функции $f(t,\psi'(\cdot)$ (т. е. при фиксированном t) по областям D^+ и D^- существуют и совпадают с пределами f^+ и f^- соответственно.

Из всего изложенного выше вытекает, что справедлива

Лемма 1. *Пусть множество M точек разрыва кусочно-непрерывной функции $f(t,\psi(\cdot))$ определяется конечным набором многообразий M_i вида (1.2), в свою очередь определяемых инвариантно дифференцируемыми функционалами $W_i(t,x,\psi(\cdot))$, $1 \le i \le k$. Обозначим*

$$I(t,x,\psi(\cdot)) = \{i \in (1,\dots,k) \colon W_i(t,x,\psi(\cdot)) = 0\}$$

и предположим, что для каждого $i \in I(t,x,\psi(\cdot))$ выполняется $\nabla W_i(t,x,\psi(\cdot)) \neq 0$. Тогда $F_0(t,\psi(\cdot)) = F(t,\psi(\cdot))$ во всех точках рассматриваемой области переменных $(t,\psi(\cdot))$, где $F_0(t,\psi(\cdot))$ — выпуклая оболочка пределов функции $f(t,\psi'(\cdot))$ по областям D_j при $\psi'(\cdot) \to \psi(\cdot)$ при фиксированном t, а $F(t,\psi(\cdot))$ — выпуклая оболочка пределов функции $f(t',\psi'(\cdot))$ по этим же областям D_j при $(t',\psi'(\cdot)) \to (t,\psi(\cdot))$.

Исследование устойчивости решений для включения

$$\dot{x} \in F_0(t,\psi(\cdot)) \tag{1.4}$$

удобней, чем для включения (1.1). Но изучение вопросов существования и общих свойств решений проще для включения (1.1). В дальнейшем мы предполагаем, что эти два включения равносильны, т. е. $F_0(t,\psi(\cdot)) = F(t,\psi(\cdot))$. В частности, это будет справедливо при выполнении условий леммы 1.

2. Предельные функционально-дифференциальные включения

Через $A^\epsilon = \{x : d(x,A) < \epsilon\}$ обозначается ϵ-окрестность множества A, $\overline{A}$ — замыкание множества A, $\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ — совокупность всех непустых компактных выпуклых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot,\cdot)$, тогда отображение $G : X \to$

$\mathrm{comp}\,\mathbb{R}^n$ будем называть *полунепрерывным сверху* в точке x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x, x_0) < \delta$, выполняется $G(x) \subset (G(x_0))^\epsilon$.

Для отображения $F : \mathbb{R}^1 \times C_\tau \to \mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение два вида многозначных отображений, которые будем называть предельными для многозначного отображения F:

$$F^*(t, \phi(\cdot)) = \cap_{b\geq 0}\overline{co}\cup_{a\geq b} F(t+a, \phi(\cdot)), \tag{2.1}$$

$$F'(t, \phi(\cdot)) = \cap_{n\geq 1}\overline{co}\cup_{k\geq n} F(t+t_k, \phi(\cdot)), \tag{2.2}$$

где $t_n \to +\infty$ — произвольная последовательность (одна и та же для любых $(t, \phi(\cdot))$).

Свойства предельных отображений, которые вытекают непосредственно из формул (2.1) и (2.2), приведены в лемме 1 из статьи [11]. Одно из этих свойств состоит в том, что отображение F^* не зависит от переменной t. Поэтому в дальнейшем переменную t не пишем, сохраняя прежнее обозначение F^*.

О п р е д е л е н и е 6. Функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(\phi(\cdot)) \tag{2.3}$$

называется *предельным* для включения (1.1), и функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, \phi(\cdot)) \tag{2.4}$$

называется *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ для включения (1.1).

Здесь мы вначале рассматриваем функционально-дифференциальное включение (1.1) при следующих общих условиях:

A1. *Для каждых фиксированных* $(t, \phi(\cdot))$ *множество* $F(t, \phi(\cdot))$ *непустое, выпуклое и компактное.*

A2. *Многозначное отображение* $F(t, \phi(\cdot))$ *полунепрерывно сверху по совокупности аргументов.*

A3. *Для любого ограниченного множества* $Q \subset C_\tau$ *существует константа* L *такая, что для любых* $(t, \phi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times Q$ *и* $f \in F(t, \phi(\cdot))$ *выполняется неравенство* $\|f\| \leq L$.

При выполнении условий A1–A3 задача (1.1) для любой начальной функции имеет локальное решение (см., например, [11]). При этом любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0 - \tau, \omega)$ и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Предельные функционально-дифференциальные включения (2.3) и (2.4) изучаются при дополнительном условии:

A4. *Для любых* $\phi(\cdot)$ *и* $\epsilon > 0$ *существуют числа* $\delta > 0$ *и* $\gamma > 0$ *такие, что*

$$F(t, \psi(\cdot)) \subset (F(t, \phi(\cdot)))^\epsilon \tag{2.5}$$

для всех $t > \gamma$ *и* $\|\psi(\cdot) - \phi(\cdot)\|_C < \delta$.

Отметим, что условие (2.5) выполняется, если отображение $F(t, \phi(\cdot))$ полунепрерывно сверху по $\phi(\cdot)$, равномерно относительно t.

Если для многозначного отображения F выполняются условия A1–A4, то для предельных многозначных отображений F^* и F' выполняются условия A1–A3 (см. [11, лемма 2]) и поэтому для предельных дифференциальных включений (2.3) и (2.4) справедлива теорема о существовании и продолжимости решений, аналогичная теореме для включения (1.1).

Многозначное отображение F из правой части дифференциального включения (1.1), порожденного функционально-дифференциальным уравнением (0.3), представим формулой

$$F(t, \psi(\cdot)) = \bigcap_{\delta>0} \overline{co}\, f((t^\delta, \psi^\delta(\cdot))\backslash M), \tag{2.6}$$

где t^δ и $\psi^\delta(\cdot)$ — δ-окрестности точки t и функции $\psi(\cdot)$ соответственно. Опишем некоторую специфику предельных многозначных отображений (2.1) и (2.2) и соответствующих им предельных функционально-дифференциальных включений применительно к многозначному отображению (2.6).

Лемма 2. *Пусть функция $f(t,\psi(\cdot))$ является кусочно-непрерывной и для каждого ограниченного множества $Q \subset C_\tau$ существует константа L такая, что для любых $(t,\psi(\cdot)) \in (\mathbb{R}^1 \times Q)\backslash M$ выполняется*

$$\|f(t,\psi(\cdot))\| \le L. \tag{2.7}$$

Тогда для многозначного отображения $F(t,\psi(\cdot))$, определенного формулой (2.6), *выполняются условия* A1–A3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство A1 вытекает непосредственно из определения множества $F(t,\psi(\cdot))$. Полунепрерывность сверху многозначного отображения F следует из его локальной ограниченности и замкнутости графика. Свойство A3 вытекает из условия (2.7) леммы, так как предельные переходы и переход к выпуклой оболочке не меняют константы L. $\square$

Через $Z(t,\psi(\cdot))$ обозначим множество все предельных значений функции $f(t',\psi'(\cdot))$ в каждой точке $(t,\psi(\cdot)) \in \mathbb{R}^1 \times C_\tau$ при условии, что $(t',\psi'(\cdot)) \to (t,\psi(\cdot))$, $(t',\psi'(\cdot)) \notin M$. Тогда

$$Z(t,\psi(\cdot)) = \bigcap_{\delta>0} \overline{f((t^\delta,\psi^\delta(\cdot))\backslash M)}. \tag{2.8}$$

Лемма 3. *Пусть множество областей непрерывности D_j, $j = 1,\ldots,m$, кусочно-непрерывной функции $f(t,\psi(\cdot))$ конечно и функция $f(t,\psi(\cdot))$ непрерывна вплоть до границы равномерно относительно достаточно больших значений переменной t. Это означает следующее*: *при любом фиксированном $\psi(\cdot)$ для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ и $\gamma = \gamma(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ такие, что*

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{f((t,\psi^\delta(\cdot))\backslash M)} \subset Z^\epsilon(t,\psi(\cdot)) \tag{2.9}$$

для всех $t > \gamma$. Тогда для многозначного отбражения $F(t,\psi(\cdot))$ выполняется свойство A4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы вытекает, что в каждой точке $\psi(\cdot)$ для любого $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta = \delta(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ и $\gamma = \gamma(\epsilon,\psi(\cdot)) > 0$ такие, что

$$\overline{f((t,\psi^\delta(\cdot))\backslash M)} \subset Z^\epsilon(t,\psi(\cdot)) \tag{2.10}$$

для всех $t > \gamma$.

Отметим, что при выполнении неравенства $\|\psi'(\cdot) - \psi(\cdot)\|_C < \delta$ справедливо включение

$$F(t,\psi'(\cdot)) \subset \overline{co}\, \overline{f((t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)}. \tag{2.11}$$

Действительно, множество $\overline{co}\, \overline{f((t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)}$ содержит выпуклую оболочку всех пределов функции f по любому множеству D_j в каждой точке $(t',\psi'(\cdot)) \in (t,\psi(\cdot))^\delta$ независимо от того, принадлежит точка $(t'\psi'(\cdot))$ множеству M или нет. Тогда (2.11) выполняется в силу определения множества $F(t,\psi'(\cdot))$. Так как $\overline{co}\, \overline{f((t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)} = co\, \overline{f(t,\psi^\delta(\cdot)\backslash M)}$, то из (2.11) и (2.10) вытекает, что

$$F(t,\psi'(\cdot)) \subset co\, Z^\epsilon(t,\psi(\cdot)) = (co\, Z(t,\psi(\cdot)))^\epsilon. \tag{2.12}$$

Непосредственно из определений следует, что для многозначного отображения, определенного равенством (2.6), выполняется $F(t,\psi(\cdot)) = co\, Z(t,\psi(\cdot))$, и теперь утверждение леммы вытекает из (2.12). $\square$

Отметим, что включение (2.9) выполняется, если каждая функция $f_j(t,\psi(\cdot))$ удовлетворяет на множестве $\overline{D}_j$ условию Липшица по переменной $\psi(\cdot)$ с постоянной константой Липшица.

Из лемм 2 и 3 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция f является кусочно-непрерывной с конечным множеством областей непрерывности и для нее справедливо условие* (2.7)*. Тогда для любых начальных данных существует решение уравнения* (0.3)*, любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования и любое ограниченное непродолжимое решение определено на бесконечном промежутке $[t_0-\tau,+\infty)$. Если дополнительно выполняется условие* (2.9)*, то этими же свойствами обладают включения* (2.1) *и* (2.2)*.*

3. Принцип инвариантности

Определение 7. Будем говорить, что множество $D\subset C_\tau$ *полуинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot)\in D$ существует решение $y(t)$ включения (2.3) такое, что $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot)\in D$ для всех $t\geq 0$. Множество $D\subset C_\tau$ *квазиинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot)\in D$ существует решение $y(t)$ включения (2.4) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t,\phi(\cdot))$ в правой части такое, что $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot)\in D$ для всех $t\geq 0$.

Как обычно, функцию $\psi(\cdot)$ назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (1.1), определенного на промежутке $[t_0-\tau,+\infty)$, если существует последовательность $t_n\to+\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot)\to\psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим через $\Lambda^+(x)$.

Из [11, теорема 3] вытекает, что при выполнении условий лемм 2 и 3 для любого ограниченного решения $x(t)$ уравнения (0.3) с кусочно-непрерывной функцией f в правой части множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d(x_t(\cdot),\Lambda^+(x))\to 0$ при $t\to+\infty$, где d означает расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.

Замечание 2. Определение предельных отображений по формуле (2.2) очевидным образом связано с формулой (0.4) из теоремы 2. Эта связь лежит в основе доказательства свойства квазиинвариантности решений уравнения (0.3). Если последовательность сдвигов $F(t+t_k,\phi(\cdot))$ сходится хотя бы поточечно к некоторому отображению $f'(t,\phi(\cdot))$, то $F'(t,\phi(\cdot))=f'(t,\phi(\cdot))$ и, таким образом, предлагаемый подход обобщает известный метод предельных дифференциальных уравнений.

Верхнюю производную $\dot V^+(t,\phi(\cdot))$ инвариантно дифференцируемого функционала $V(t,x,\phi(\cdot))$ в точке $(t,\phi(0),\phi(\cdot))$ в силу дифференциального включения (1.1) определим следующим равенством: $\dot V^+(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F(t,\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V,y\rangle+\partial_\phi V+\partial_t V)\Big|_{x=\phi(0)}$.

Непосредственно из результатов статьи [11] (теоремы 4–6) и лемм 2, 3 вытекают следующие основные теоремы, обобщающие принцип инвариантности на уравнение (0.3) с кусочно-непрерывной правой частью.

Теорема 4. *Пусть f — кусочно-непрерывная функция, выполняются условие* (2.9) *и неравенство* (2.7) *и существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал $V(t,x,\phi(\cdot))$, ограниченный снизу на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1\times K[0]\times K$, где $K\subset C_\tau$ — компактное множество, $K[0]=\{\phi[0]\colon \phi(\cdot)\in K\}$ такой, что для всех $\phi(\cdot)$ и почти всех t выполняется неравенство*

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot))\leq -w(t,\phi(\cdot)),$$

где $w(t,\phi(\cdot))\geq 0$ — измеримый по t, непрерывный по $\phi(\cdot)$ и ограниченный на каждом множестве вида $\mathbb{R}^1\times K$ функционал, удовлетворяющий равенству

$$\lim_{t\to+\infty,\phi'(\cdot)\to\phi(\cdot)}\|w(t,\phi'(\cdot))-w(t,\phi(\cdot))\|=0.$$

Тогда ω-предельное множество $\Lambda^+(x)$ любого ограниченного решения уравнения (0.3) *принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w=\{\phi(\cdot)\colon \alpha(\phi(\cdot))=0\},\tag{3.1}$$

где $\alpha=\lim\limits_{b\to+\infty}\inf_{t\in(b,+\infty)}w(t,\phi(\cdot))$.

Отметим, что так как $w(t,\psi(\cdot))\geq 0$, то формуле (3.1) можно придать другой вид, а именно

$$E_w=\{\phi(\cdot):\exists t_k\to+\infty,\ \lim_{k\to+\infty}w(t_k,\phi(\cdot))=0\}.$$

Пусть функционал $V=V(x,\phi(\cdot))$ не зависит от t. Введем обозначения:

$$\dot V^*(\phi(\cdot))=\sup_{y\in F^*(\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V(x,\phi(\cdot)),y\rangle+\partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))|_{\ x=\phi(0)},$$

$$\dot V'(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F'(t,\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V(x,\phi(\cdot)),y\rangle+\partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))|_{\ x=\phi(0)}.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условие* (2.9) *и неравенство* (2.7) *и* $x(t)$ *— ограниченное решение уравнения* (0.3) *с* ω*-предельным множеством* $\Lambda^+(x)$. *Предположим, что существует непрерывный, инвариантно дифференцируемый функционал* $V(x,\phi(\cdot))$ *такой, что для всех* $\phi(\cdot)$ *и почти всех* t *выполняется неравенство*

$$\dot V^+(t,\phi(\cdot))=\sup_{y\in F(t,\phi(\cdot))}(\langle\nabla_x V(x,\phi(\cdot)),y\rangle+\partial_\phi V(x,\phi(\cdot)))|_{\ x=\phi(0)}\ \leq 0.$$

Тогда справедливы утверждения:

1. *Для любой функции* $\psi(\cdot)\in\Lambda^+(x)$ *существуют предельное относительно некоторой последовательности* $\{t_k\}$ *отображение* $F'(t,\phi(\cdot))$ *и решение* $y(t)$ *включения* (2.4) *с начальной функцией* $y_0(\cdot)=\psi(\cdot)$ *такое, что выполняется*

$$\dot V'(t,y_t(\cdot))=0,\quad \dot V^*(y_t(\cdot))=0$$

для почти всех $t\geq 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E(\dot V^*=0)\triangleq\{\psi(\cdot)\colon \dot V^*(\psi(\cdot))=0\}. \tag{3.2}$$

Теоремы 4 и 5 позволяют утверждать, что множества (3.2) и (3.1) соответственно являются притягивающими для ограниченных решений уравнения (0.3) и дают некоторую оценку для ω-предельных множеств. Для более точных оценок, а также для выявления структуры этих множеств нужна дополнительная информация. При дополнительных условиях на функционалы Ляпунова или на множества (3.2) и (3.1) теоремы 4 и 5 могут использоваться для изучения асимптотической устойчивости решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
2. **Руш Н., Абетс М., Лалуа М.** Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
3. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. **Сурков А.В.** Об устойчивости функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, №8. С. 1055–1063.
6. **Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А.** Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.
7. **Sell G.R.** Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 22. P. 241–283.
8. **Artstein Z.** The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. Vol. 25. P. 184–202.

9. **Андреев А.С.** Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
10. **Финогенко И.А.** Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–284.
11. **Финогенко И.А.** Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–284.
12. **Финогенко И.А.** Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 4. С. 913–927.
13. **Davy J.L.** Properties of solution set of a generalized differential equation // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 379–398.
14. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
15. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
16. **Ким А.В.** i-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. 233 с.

Финогенко Иван Анатольевич
Поступила 10.10.2017
д-р физ.-мат. наук, профессор
старший науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск
e-mail: fin@icc.ru

REFERENCES

1. Barbashin E.A. *Funktsii Lyapunova.* [The Lyapunov functions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 240 p.
2. Rouche N., Habets P., Laloy M. *Stability theory by Lyapunov's direct method.* N Y, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977, 412 p. Translated to Russian under the title *Pryamoi metod Lyapunova v teorii ustoichivosti*, M.: Mir Publ., 1980, 300 p.
3. Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Ustoichivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeistviem.* [Stability and periodic regimes of controlled systems with aftereffect]. M.: Nauka Publ., 1981, 448 p.
4. Hale J. *Theory of functional differential equations.* 366 p., N Y: Springer-Verlag, 1977. doi: 10.1007/978-1-4612-9892-2 . Translated to Russian under the title *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii*, M., Mir, 1984, 421 p.
5. Surkov A.V. On the stability of functional-differential inclusions using invariantly differentiable Lyapunov functionals. *Differ. Equ.*, 2007, vol. 43, no. 8, pp. 1079–1087.
6. Martynyuk A.A. Kato D., Shestakov A.A. *Ustoichivost' dvizheniya: metod predel'nykh uravnenii.* [Stability of motion: method of limiting equations]. Kiev, Naukova Dumka, 1990, 256 p.
7. Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 22, pp. 241–283.
8. Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations. *J. Differ. Equations*, 1977, vol. 25, pp. 184–202.
9. Andreev A.S. The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations. *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 9, pp. 1438–1486.
10. Finogenko I.A. Limit differential inclusions and the invariance principle for nonautonomous systems. *Sib. Math. J.*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 372–386. doi: 10.1134/S0037446614020190 .
11. Finogenko I.A. The invariance principle for nonautonomous functional differential inclusions. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 271–284.
12. Finogenko I.A. The invariance principle for nonautonomous differential equations with discontinuous right-hand side. *Sib. Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 715–725. doi: 10.1134/S0037446616040133 .
13. Davy J.L. Properties of solution set of a generalized differential equation. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1972, vol. 6, pp. 379–398.

14. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p.
15. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklyuchenii.* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions]. Moscow, KomKniga, 2005, 215 p.
16. Kim A.V. i-*gladkii analiz i funktsional'no-differentsial'nye uravneniya.* [i-smooth analysis and functional-differential equations]. Ekaterinburg, 1996. 233 p.

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Ivan Anatol'evich Finogenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: fin@icc.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

О НЕОБХОДИМЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ГРАДИЕНТАХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

Д. В. Хлопин

В работе исследуются необходимые условия оптимальности в задачах управления на бесконечном промежутке. В качестве критерия оптимальности выбран обгоняющий критерий (overtaking optimality). В предположении, что все градиенты платежной функции ограничены, для сопряженной переменной построено необходимое для оптимальности условие в терминах предельных точек градиентов $\frac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ при $\xi \to \tilde{x}(0), T \to \infty$. В случае непрерывности на бесконечности градиента платежной функции вдоль оптимальной траектории (единственности такой предельной точки) это условие, дополняя систему принципа максимума до полной системы соотношений, выделяет единственное решение. Показано, что при этом сопряженная переменная данного решения может быть явно выписана с помощью формулы (типа Коши), предложенной ранее в работах А. М. Асеева и А. В. Кряжимского. Также показано, что найденное решение автоматически удовлетворяет еще одному условию (уже на гамильтониан), предложенному недавно А. О. Беляковым для поиска оптимальных в смысле обгоняющего критерия решений. Отмечено, что в случае более слабого требования — существования предела $\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, T)$ при $T \to \infty$ — формула типа Коши может оказаться несовместной с условием максимизации гамильтониана, а значит и с принципом максимума Понтрягина. Ключевая идея доказательства — применение в рамках схемы Халкина теоремы о сходимости субдифференциалов для последовательности равномерно сходящихся функций.

Ключевые слова: задача управления на бесконечном промежутке, необходимые условия, условия трансверсальности на бесконечности, принцип максимума Понтрягина, сходимость субдифференциалов.

D. V. Khlopin. On necessary limit gradients in control problems with infinite horizon.

We study necessary optimality conditions in control problems with infinite horizon and an overtaking optimality criterion. Under the assumption that all gradients of the payoff function are bounded, we construct a necessary optimality condition for the adjoint variable in terms of the limit points of the gradients $\frac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ as $\xi \to \tilde{x}(0), T \to \infty$. In the case when the gradient of the payoff function is continuous at infinity along an optimal trajectory (the limit point is unique), this condition supplements the system of the maximum principle to a complete system of relations and defines a unique solution. It is shown that the adjoint variable of this solution can be written explicitly with the use of the (Cauchy type) formula proposed earlier by A. M. Aseev and A. V. Kryazhimskii. It is also shown that the solution automatically satisfies one more condition (on the Hamiltonian) proposed recently by A. O. Belyakov for finding solutions optimal with respect to the overtaking criterion. We note that, in the case of the weaker requirement of the existence of the limit $\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, T)$ as $T \to \infty$, a Cauchy type formula may be inconsistent with the Hamiltonian maximization condition and, hence, with Pontryagin's maximum principle. The key idea of the proof is the application of the theorem on the convergence of subdifferentials for a sequence of uniformly convergent functions within Halkin's scheme.

Keywords: infinite horizon control problem, necessary conditions, transversality conditions at infinity, Pontryagin maximum principle, convergence of subdifferentials.

MSC: 49J52, 49K15, 91B62

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-247-256

Введение

Необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке в максимально общей постановке были доказаны Х. Халкиным в виде принципа максимума Понтрягина в [1, § 4], но показанные соотношения не содержали какого-либо краевого условия на бесконечности и не позволяли выделить единственное решение сопряженной системы.

В данной статье предлагается модификация предложенной Х. Халкиным общей схемы построения необходимых условий оптимальности, при этом начальное значение сопряженной переменной описывается как предельный градиент платежной функции, а условие трансверсальности напрямую следует из теорем о сходимости субдифференциалов. Для простоты изложения в работе предполагается ограниченность градиентов платежной функции (что автоматически подразумевает также нормальность системы принципа максимума), а в качестве критерия оптимальности принят обгоняющий критерий (overtaking optimality). При дополнительных предположениях на систему, а именно при непрерывности градиента платежной функции от начального условия, показано, что указанное условие трансверсальности выделяет единственное решение принципа максимума, т. е. дополняет систему принципа максимума до полной системы соотношений.

Сама работа построена следующим образом. В первых двух разделах приведены постановка задачи, соотношения принципа максимума и все необходимые определения, в том числе из выпуклого анализа. В следующем разделе даны необходимые условия для критерия обгоняющей оптимальности в предположении ограниченности градиента платежной функции (теорема 1) и точная формула для сопряженной переменной в предположении непрерывности градиента платежной функции (теорема 2). Там же приведен пример, уточняющий применимость этой формулы. Последний раздел посвящен доказательству теорем 1 и 2.

Сходные предположения исследовались также в работах [2; 3, §4; 4–7]. Показанные там результаты не покрывают ни теоремы 1, ни теоремы 2.

Предварительная версия данной статьи была выложена в архиве библиотеки Корне́ллского университета (см. [8]).

1. Базовые определения и постановки

Зафиксируем фазовое пространство исходной управляемой системы — некоторое конечномерное евклидово пространство $\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим задачу минимизации на бесконечном промежутке

$$l(b) + \int\limits_0^\infty f_0(t,x,u)\,dt \to \min, \tag{1.1a}$$

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U, \tag{1.1b}$$

$$x(0) \in \mathcal{C}. \tag{1.1c}$$

Здесь функции l, f_0 скалярны; x — это фазовая переменная, принимающая значения в $\mathbb{X}$, а u — некоторый управляющий параметр из некоторого замкнутого подмножества U конечномерного евклидового пространства. Обозначим через $\mathcal{U}$ множество всех ограниченных на каждом компактном промежутке измеримых по Борелю отображений $u : [0,\infty) \to U$.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

- $\mathcal{C}$ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{X}$;
- l — локально липшицевая скалярная функция от $x \in \mathbb{X}$;
- для всякого $u \in \mathcal{U}$ функции $[0,\infty) \times \mathbb{X} \ni (t,x) \mapsto f(t,x,u(t)) \in \mathbb{X}$, $[0,\infty) \times \mathbb{X} \ni (t,x) \mapsto f_0(t,x,u(t)) \in \mathbb{R}$ вместе со своими производными по x измеримы по Борелю по t, локально липшицевы по x и удовлетворяют условию подлинейного роста по x.

Теперь для любых допустимого управления $u \in \mathcal{U}$, момента времени $\theta \geq 0$ и начальной позиции $b \in \mathbb{X}$ найдется решение $y(b,\theta,u;\cdot)$ системы (1.1b) с начальным условием $x(\theta) = b$, можно считать это решение заданным на всей полуоси $[0,\infty)$. Введем теперь скалярную функцию J правилом:

$$J(b,\theta;u,T) \stackrel{\triangle}{=} \int\limits_\theta^T f_0\big(t, y(b,\theta,u;t), u(t)\big)\,dt \quad \forall b \in \mathbb{X}, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \theta \geq 0, \quad T > \theta.$$

Наложенных выше условий также достаточно, чтобы гарантировать как гладкость отображения J по x, так и принцип максимума Понтрягина [9, Theorem 5.2.1] для задачи минимизации $J(b,\theta;u,T)$ на любом конечном промежутке времени $[\theta,T]\subset[0,\infty)$.

Пару $(x,u)\in C([0,\infty),\mathbb{X})\times\mathfrak{U}$ назовем допустимым управляемым процессом, если $x(0)\in\mathcal{C}$, $x(\cdot)=y(x(0),0,u;\cdot)$.

Определение 1 [10]. Назовем допустимый процесс $(\tilde{x},\tilde{u})$ обгоняюще оптимальным (overtaking optimal) для задачи (1.1a)–(1.1c), если для любого допустимого процесса (x,u) выполнено

$$\liminf_{T\to\infty}\left[l(x(0))-l(\tilde{x}(0))+\int\limits_0^T[f_0(t,x(t),u(t))-f_0(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))]\,dt\right]\geq 0.$$

Всюду далее мы будем предполагать, что некоторый допустимый управляемый процесс $(\tilde{x},\tilde{u})$ является обгоняюще оптимальным для задачи (1.1a)–(1.1c). Для краткости мы также введем для платежных функций и траекторий, порожденных управлением $\tilde{u}$, следующие обозначения:

$$\tilde{J}(b;T)\stackrel{\triangle}{=}J(b,0;\tilde{u},T),\quad \tilde{y}(b;T)\stackrel{\triangle}{=}y(b,0,\tilde{u};T)\quad\forall T>0,\quad b\in\mathbb{X}.$$

Нам понадобятся простейшие определения невыпуклого анализа [11]. Для всякой липшицевой функции $g:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ и точки $\xi\in\mathbb{X}$ через $\hat{\partial}g(\xi)$ будем обозначать субдифференциал Фреше этой функции в точке $\xi\in\mathbb{X}$; он состоит из всех градиентов $h'(\xi)\in\mathbb{X}^*$ по всем таким дифференцируемым (по Фреше) функциям $h:\mathbb{X}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, что $g(\xi)=h(\xi)$, а кроме того, $h(\xi')\leq g(\xi')$ для всех $\xi'\in\mathbb{X}$. Предельный субдифференциал функции g в точке ξ, обозначаемый далее через $\partial g(\xi)$, состоит из всех таких элементов $\zeta\in\mathbb{X}^*$, что для некоторых последовательностей элементов $y_n\in\mathbb{X},\zeta_n\in\hat{\partial}g(y_n)$ выполнено

$$y_n\to\xi,\quad \zeta_n\to\zeta,\quad g(y_n)\to g(\xi).$$

Обозначим также через $N^{\mathcal{C}}(\xi)$ предельный нормальный конус множества $\mathcal{C}$ в точке ξ.

2. Принцип максимума Понтрягина и его краевые условия

Зададим функцию Гамильтона — Понтрягина $H:\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*\times U\times[0,\infty)^2\mapsto\mathbb{R}$ правилом

$$H(x,\psi,u,\lambda,t)\stackrel{\triangle}{=}\psi f\big(t,x,u\big)-\lambda f_0\big(t,x,u\big)\quad\forall(x,\psi,u,\lambda,t)\in\mathbb{X}\times\mathbb{X}^*\times U\times[0,\infty)^2.$$

Нам понадобятся соотношения принципа максимума Понтрягина:

$$\dot{x}(t) = f\big(t,x(t),\tilde{u}(t)\big); \tag{2.1a}$$
$$-\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t),\psi(t),\tilde{u}(t),\lambda,t\big); \tag{2.1b}$$
$$\sup_{u'\in U}H\big(x(t),\psi(t),u',\lambda,t\big) = H\big(x(t),\psi(t),\tilde{u}(t),\lambda,t\big). \tag{2.1c}$$

Как следует из [1], для всякого обгоняюще оптимального процесса найдется нетривиальное решение принципа максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c). Тем не менее в этой системе необходимых для оптимальности соотношений не хватает еще одного краевого условия на сопряженную переменную, соответствующего условию трансверсальности на бесконечности. Такое условие можно построить, в частности, в случае, если известна функция цены (см., например, [12–14]). Еще один подход связан с использованием подходящих соболевских пространств (см. например, [7; 15]). В отличие от этих работ, полученное в данной работе условие трансверсальности опирается на следующее определение.

Определение 2. Будем говорить, что нетривиальное решение $(\tilde{x},\tilde{\psi},\tilde{\lambda})$ системы (2.1a)–(2.1b) является точным предельным, если для некоторых последовательностей $y_n \in \mathbb{X}, t_n \geq 0, \lambda_n > 0$ выполнено

$$t_n \to \infty, \quad y_n \to \tilde{x}(0), \quad \lambda_n \to \tilde{\lambda},$$
$$-\lambda_n \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(y_n;t_n) \to \tilde{\psi}(0), \quad \tilde{J}(y_n;t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n) \to 0. \tag{2.2}$$

Как показано в [6, Proposition 2.1] всякому слабо равномерно обгоняюще оптимальному [10] для задачи (1.1a)–(1.1c) процессу $(\tilde{x},\tilde{u})$ соответствует точное предельное решение $(\tilde{\psi},\tilde{\lambda})$ принципа максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c) с $\tilde{\lambda} \in \{0,1\}$. В данной работе мы перенесем полученный в [6, Proposition 2.1] результат на обгоняющий критерий оптимальности. Отметим, что ни слабо равномерно обгоняющий критерий [10], ни обгоняющий критерий не вкладываются друг в друга.

Принципиальной сложностью для получения в задачах управления на бесконечном промежутке дополнительных условий, условий трансверсальности, является необходимость нахождения для сопряженной системы такой асимптотики, что была бы выполнена хотя бы для одного, но и не для континуального числа решений. Отметим, что точных предельных решений может быть в общем случае и континуум, следовательно дополнительное требование точного предельного решения принципа максимума не гарантирует полной системы соотношений. Тем не менее в ряде задач удается найти условие, выделяющее каждому оптимальному процессу в точности одно решение сопряженной системы. Для того чтобы выразить это решение явно, нам понадобится формула Коши для сопряженной системы.

Обозначим через $\mathbb{L}$ линейное пространство всех действительнозначных $m\times m$ матриц; здесь $m = \dim \mathbb{X}$. Всякому вектору $\xi \in \mathbb{X}$ соответствует решение $A(\xi;\cdot) \in C([0,\infty),\mathbb{L})$ задачи Коши

$$\frac{dA(\xi;t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\tilde{y}(\xi;t),\tilde{u}(t)\big)A(\xi;t), \quad A(\xi;0) = 1_{\mathbb{L}}. \tag{2.3}$$

Теперь для всех $\xi \in \mathbb{X}, T \geq 0$ выполнено

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(\xi;T) = A(\xi;T), \quad \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) = \int\limits_0^T \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(t,\tilde{y}(\xi;t),\tilde{u}(t)\big)\, A(\xi;t)\, dt, \tag{2.4}$$

и у каждого положительного λ соответствующее ему решение (x,ψ) системы (2.1a)–(2.1b) удовлетворяет формуле Коши:

$$\psi(t)A(x(0);t) - \psi(0) = \lambda \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(x(0);t) \quad \forall t \geq 0. \tag{2.5}$$

В работах [2;3] а затем [4;7;16] найден ряд предположений на асимптотики функций f, f_0, J и их производных, при выполнении которых решение принципа максимума однозначно (по $(\tilde{x},\tilde{u})$) восстанавливается правилами

$$-\tilde{\psi}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);T) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big)\, A(\tilde{x}(0);t)\, dt, \quad \tilde{\lambda} = 1. \tag{2.6}$$

Другие представления этого условия смотрите, например, в [5;6].

Мы исследуем применимость условий (2.2),(2.6) в предположении лишь ограниченности $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}$. Кроме того, на основе условия (2.6) мы покажем необходимость еще одного условия: для всех $u \in U$ и почти всех $t \geq 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \Big[H\big(\tilde{x}(t), -\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(t),t;\tilde{u},T),\tilde{u}(t),1,t\big) - H\big(\tilde{x}(t), -\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(t),t;\tilde{u},T),u,1,t\big)\Big] \geq 0. \tag{2.7}$$

Такое условие было предложено в [16] для поиска обгоняюще оптимального управления.

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть дан некоторый обгоняюще оптимальный для задачи* (1.1a)–(1.1c) *процесс* $(\tilde{x}, \tilde{u})$ *такой, что для любой ограниченной окрестности* Ξ *точки* $\tilde{x}(0)$, *для всех* $T > 0, \xi \in \Xi$ *градиенты* $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi; T) = \dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ *равномерно ограничены.*

Тогда существует точное предельное решение $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, 1)$ *принципа максимума Понтрягина* (2.1a)–(2.1c), *для которого*

$$\tilde{\psi}(0) \in \partial l(\tilde{x}(0)) + N^{\mathcal{C}}(\tilde{x}(0)). \tag{3.1}$$

В частности, $-\tilde{\psi}(0)$ *является частичным пределом градиентов* $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T)$ *при* $\xi \to \tilde{x}(0)$, $T \to \infty$.

Более того, при любом выборе неограниченно возрастающей последовательности моментов времени t_n *найдется удовлетворяющее* (3.1) *точное предельное решение* $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, 1)$ *принципа максимума Понтрягина* (2.1a)–(2.1c), *для которого* $-\tilde{\psi}(0)$ *является частичным пределом градиентов* $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, t_n)$ *при* $\xi \to \tilde{x}(0), n \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *также существует конечный предел*

$$\lim_{\xi \to \tilde{x}(0), T \to \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(\xi, 0; \tilde{u}, T). \tag{3.2}$$

Тогда несобственный интеграл в (2.6) *сходится, а система соотношений* (2.1a)–(2.1c), (2.6) *имеет в точности одно решение. Кроме того, это решение также удовлетворяет условию* (2.7).

Доказательство этих утверждений вынесено в следующий раздел.

Покажем, что в общем случае условие (3.2) в теореме 2 отбросить нельзя. Для этого приведем пример, в котором все отображения $x \mapsto \tilde{J}(x; T)$ являются 1-липшицевыми, в точке $\tilde{x}(0)$ их градиенты по x сходятся, т. е. существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, T), \tag{3.3}$$

более того, условие (2.6) выделяет решение системы (2.1a)-(2.1b), но тем не менее это решение не удовлетворяет условию максимума гамильтониана (2.1c).

В работе [17] рассмотрена задача управления

$$\int_1^2 \frac{1}{2} \sin(2x)\, dt + \int_2^\infty \left[\frac{x}{t} \cos(tx) - \frac{1}{t^2} \sin(tx)\right] dt \to \min,$$
$$\dot{x} = u 1_{[0,1]}(t), \quad u \in [-1, 1],$$
$$x(0) = 0,$$

в которой любой допустимый процесс (x, u) является обгоняюще оптимальным (а также сильно оптимальным [10] и классическим оптимальным [18]), соответствующая любому управлению платежная функция 1-липшицева по x, таким образом для всякого произвольного допустимого процесса $(\tilde{x}, \tilde{u})$ все условия теоремы 1 выполнены.

При этом для обгоняюще оптимального процесса $(\tilde{x}, \tilde{u}) \equiv 0$ результат теоремы 2 не имеет места, а именно $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0), 0; \tilde{u}, t) = 1$ при $t > 2$ (в частности, выполнено и (3.3)), однако решение $(\tilde{x}, \tilde{\psi}, 1)$ соотношений (2.1a)–(2.1c), удовлетворяющее начальному условию $\tilde{\psi}(0) = -1$, не удовлетворяет соотношению (2.1c) на промежутке $[0, 1]$.

Таким образом, как показывает построенный выше пример, в общем случае условие (3.2) в теореме 2 отбросить или хотя бы ослабить до (3.3) нельзя.

4. Доказательство теорем

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Поскольку для всякой ограниченной компактной окрестности Ξ точки $\tilde{x}(0)$ отображения

$$\Xi \ni \xi \mapsto \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T), \quad \Xi \ni \xi \mapsto \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);T) \quad \forall T > 0$$

равномерно (по $T > 0$) ограничены, то отображения $\Xi \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;T) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);T) (\forall T > 0)$ равностепенно непрерывны. Поскольку при $\xi = \tilde{x}(0)$ эти отображения обращаются в ноль, все они также равномерно ограничены на каждом компакте. Отсюда, семейство этих отображений на каждом компакте предкомпактно в равномерной метрике, т. е. семейство отображений $\{\mathbb{X} \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;T) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);T) \,|\, T > 0\}$ предкомпактно на $\mathbb{X}$ в компактно-открытой топологии.

Теперь выберем произвольную, неограниченно возрастающую последовательность положительных чисел t_n. Проредив ее при необходимости, можно считать, что отображения $\mathbb{X} \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)$ равномерно на каждом компакте сходятся к некоторому локально липшицевому отображению.

Заметим, что для всех $\xi \in \mathbb{X}, T \geq 0, t_k > T$ выполнено

$$\tilde{J}(\xi;T) = \tilde{J}(\xi,t_k) - J(\tilde{y}(\xi,T),T;\tilde{u},t_k). \tag{4.1}$$

Поскольку для всех $\xi \in \mathbb{X}, t \geq 0$ найдется такое $\xi_1 = y(\xi,t,\tilde{u};0) \in \mathbb{X}$, что $\xi = \tilde{y}(\xi_1,t)$, то имеем

$$\begin{aligned} J(\xi,t;\tilde{u},t_k) - J(\tilde{x}(t),t;\tilde{u},t_k) &= J(\xi_1,0;\tilde{u},t_k) - J(\xi_1,0;\tilde{u},t) - J(\tilde{x}(0),0;\tilde{u},t_k) + J(\tilde{x}(0),0;\tilde{u},t) \\ &= \tilde{J}(y(\xi,t,\tilde{u};0);t_k) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_k) - \big(\tilde{J}(y(\xi,t,\tilde{u};0);t) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t)\big); \end{aligned}$$

тогда для любого положительного t в силу выбора последовательности моментов времени t_k существует предел

$$J_*(\xi,t) \ \stackrel{\triangle}{=} \ \lim_{k\to\infty} \big[J(\xi,t;\tilde{u},t_k) - J(\tilde{x}(t),t;\tilde{u},t_k)\big] \quad \forall \xi \in \mathbb{X}, \tag{4.2}$$

и, из ограниченности и локальной липшицевости отображения $\xi \mapsto y(\xi,t,\tilde{u};0)$ следует также, что этот предел равномерен на каждом компакте и является локально липшицевой функцией.

Кроме того, при любых $\xi \in \mathbb{X}, T > 0$ для всех достаточно больших t_k имеем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\xi;T) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);T) \ &\stackrel{(4.1)}{=} \ \tilde{J}(\xi;t_k) - J(\tilde{y}(\xi,T),T;\tilde{u},t_k) - \big(\tilde{J}(\tilde{x}(0);t_k) - J(\tilde{x}(T),T;\tilde{u},t_k)\big) \\ &= \ J_*(\xi,0) - J_*(\tilde{y}(\xi,T),T). \end{aligned}$$

Рассмотрим предельный субдифференциал $\partial_x J_*(\xi;0)$ отображений $\xi \mapsto J_*(\xi;0)$. Заметим, что, поскольку отображения $\xi \to \tilde{J}(\xi;T)$ непрерывно дифференцируемы, из [11, Proposition 1.107(ii)] в силу показанного выше имеем

$$\partial_x J_*(\xi,0) = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) + \partial_\xi\big(J_*(\tilde{y}(\xi,T),T)\big) \quad \forall \xi \in \mathbb{X}, \quad T > 0.$$

Напомним также, что отображения $\mathbb{X} \ni \xi \to \tilde{y}(\xi;T)$ непрерывно дифференцируемы, а их производные $\dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{y}(\xi;T) = A(\xi;T)$ являются сюрьективными операторами как решения линейной сопряженной системы (2.3) с условием $A(\xi;0) = 1_{\mathbb{L}}$. Отсюда, воспользовавшись цепным правилом [11, Proposition 1.112(i)], получаем

$$\partial_x J_*(\xi,0) = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi;T) + \partial_x J_*(\tilde{y}(\xi,T),T) A(\xi;T) \quad \forall \xi \in \mathbb{X}, \quad T > 0. \tag{4.3}$$

Вернемся к задаче оптимизации. Напомним, что $\tilde{u}$ — обгоняюще оптимальное решение, в частности

$$\liminf_{n\to\infty} \big[l(b) + J(b,0;u,t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)\big] \geq l(\tilde{x}(0)) \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad b \in \mathcal{C}.$$

Тогда это справедливо и для таких $u \in \mathcal{U}$, что $u|_{[t_n,\infty)} = \tilde{u}|_{[t_n,\infty)}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, откуда

$$\begin{aligned} l(\tilde{x}(0)) &\leq \liminf_{k\to\infty} \big[l(b) + J(b,0;u,t_n) + J(\tilde{y}(b;t_n),t_n;\tilde{u},t_k) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_k)\big] \\ &= l(b) + J(b,0;u,t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n) + J_*(\tilde{y}(b;t_n),t_n) \end{aligned}$$

при всех $u \in \mathcal{U}$, $b \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для всякого $n \in \mathbb{N}$ оптимальное значение задачи

$$l(x(0)) + \int_0^{t_n} \big[f_0\big(t,x(t),u(t)\big) - f_0\big(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)\big)\big]dt + J_*(x(t_n),t_n) \to \min$$

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U,$$
$$x(0) \in \mathcal{C}$$

не меньше $l(\tilde{x}(0))$. Следовательно, процесс $(\tilde{x},\tilde{u})$ оптимален в такой задаче для всякого натурального n.

Теперь для всякого $n \in \mathbb{N}$ по [9, Theorem 5.2.1] найдутся такие $\psi_n \in C([0,\infty),\mathbb{X}^*)$, что каждая тройка $(\tilde{x},\psi_n,1)$ удовлетворяет почти всюду на $[0,t_n]$ принципу максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c) с краевыми условиями

$$\psi_n(0) \in \partial l(\tilde{x}(0)) + N^{\mathcal{C}}(\tilde{x}(0)), \tag{4.4}$$

$$-\psi_n(t_n) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(t_n),t_n). \tag{4.5}$$

В частности, ψ_n как решение сопряженного уравнения (2.1b) удовлетворяет формуле Коши (2.5); далее, последовательно применяя (2.5),(4.5),(4.3), имеем

$$\begin{aligned} -\psi_n(0) &\overset{(2.5)}{=} -\psi_n(t_n)A(\tilde{x}(0);t_n) + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(t_n),t_n)A(\tilde{x}(0);t_n) + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n) \\ &\overset{(4.3)}{=} \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0) - \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n) + \frac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t_n) = \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0), \end{aligned}$$

т. е. $-\psi_n(0) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$.

Поскольку J_* локально липшицево по x, нами показана ограниченность векторов $\psi_n(0)$. Теперь, переходя при необходимости от последовательности моментов времени t_n к их подпоследовательности, можно считать, что $\psi_n(0)$ сходятся. Отсюда по теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий, последовательность решений ψ_n сходится на $[0,\infty)$ к некоторому решению $\tilde{\psi}$ сопряженной системы (2.1b), причем сходится равномерно на всяком компактном промежутке времени. Но тогда и тройка $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$ удовлетворяет соотношениям (2.1a)–(2.1c) на всей полуоси $[0,\infty)$, более того, условие (3.1) для $\tilde{\psi}$ следует из (4.4), а из $-\psi_n(0) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ мы имеем $-\tilde{\psi}(0) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$.

Осталось показать, что $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$ является точным предельным решением системы (2.1a)–(2.1b). Напомним, что $J_*(\xi;0)$ является равномерным в каждой компактной окрестности точки $\tilde{x}(0)$ пределом последовательности отображений $\xi \mapsto \tilde{J}(\xi;t_n) - \tilde{J}(\tilde{x}(0);t_n)$. Как показано в [19, Theorem 6.1(ii)], тогда каждый элемент субдифференциала Фреше $\hat{\partial}_x J_*(z,0)$ (для всех $z \in \mathbb{X}$) может быть представлен в виде предела градиентов $\dfrac{\partial\tilde{J}}{\partial x}(\xi_i;t_{n(i)}) = \dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_i,0;\tilde{u},t_{n(i)})$ для некоторых последовательностей $\xi_i \to z, n(i) \to \infty$. В силу определения предельного субдифференциала всякий элемент из $\partial_x J_*(z,0)$ (для всех $z \in \mathbb{X}$) также может быть представлен в виде предела элементов из $\hat{\partial}_x J_*(\xi_i,0)$ для некоторой сходящейся к z последовательности ξ_i, но тогда ко всякому элементу из $\partial_x J_*(z,0)$ сходятся градиенты $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi_i;t_{n(i)}) = \dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_i,0;\tilde{u},t_{n(i)})$ для некоторых последовательностей $\xi_i \to z$, $n(i) \to \infty$. В силу $-\tilde{\psi}(0) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ найдутся некоторая сходящаяся к $\tilde{x}(0)$ последовательность ξ_i и неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел $n(i)$, для которых $-\psi^*(0) = \lim_{i\to\infty} \dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_i,0;t_{n(i)})$. Теперь осталось лишь заметить, что за счет общей константы Липшица у отображений $\Xi \ni \xi \mapsto \tilde{J}(\xi;t)$ в любой ограниченной области $\Xi \subset \mathbb{X}$ из $\|\xi_i - \tilde{x}(0)\| \to 0$ автоматически следует $|J(\xi_i,0;\tilde{u},t_{n(i)}) - J(\tilde{x}(0),0;\tilde{u},t_{n(i)})| \to 0$. Таким образом тройка $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$ является точным предельным решением максимума Понтрягина, что и требовалось. □

Доказательство теоремы 2. Сходимость несобственного интеграла в (2.6) следует непосредственно из (2.4) и (3.2). По доказанной теореме 1 для всякой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени t_n мы найдем решение $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$ принципа максимума (2.1a)–(2.1c), для которого $-\tilde{\psi}(0)$ является частичным пределом градиентов $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\xi_n;t_n)$ для некоторой сходящейся к $\tilde{x}(0)$ последовательности векторов ξ_n. Тогда из (3.2) $-\tilde{\psi}(0)$ является пределом градиентов $\dfrac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);t)$ при $t \to \infty$, в частности не зависит от выбора t_n. Теперь из (2.4) следует, что (2.6) выполнено для $(\tilde{x},\tilde{\psi},1)$. При этом равенство (2.1c) имеет место для всех неотрицательных t, кроме некоторого нулевого (возможно пустого) подмножества $N \subset [0,\infty)$. Зафиксируем это множество.

Покажем условие (2.7). Пусть оно не имеет места. Тогда для некоторого $\tau \in [0,\infty)\setminus N$, для некоторого $u \in P$ найдутся такие неограниченно возрастающая последовательность моментов времени t'_n и положительное число ε, что

$$H\Big(\tilde{x}(\tau), -\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(\tau),\tau;\tilde{u},t'_n),\tilde{u}(\tau),1,\tau\Big) \le H\Big(\tilde{x}(\tau), -\frac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(\tau),\tau;\tilde{u},t'_n),u,1,\tau\Big) - \varepsilon. \qquad (4.6)$$

Вновь перейдя к подпоследовательности, можно также считать, что при $n \to \infty$ последовательность градиентов $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(0),0;\tilde{u},t'_n)$ сходится, а отображения $\xi \mapsto J(0,\xi;\tilde{u},t'_n)$ сходятся равномерно на всяком компакте.

Теперь по теореме 1 уже для моментов времени $t_n = t'_n$ мы получаем ту же сопряженную переменную $\tilde{\psi}$, при этом $-\tilde{\psi}(0) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ для заданного в (4.2) равномерного на всяком компакте предела J_*. В силу [19, Theorem 6.1(ii)] любой элемент субдифференциала $\partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ является частичным пределом градиентов $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\xi_n,0;\tilde{u},t'_n)$ для некоторых сходящихся к $\tilde{x}(0)$ векторов ξ_n. Отсюда, благодаря (3.2), множество $\partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ — синглетон, но тогда синглетоном будет и $\partial_x J_*(\tilde{x}(\tau),\tau)$ в силу показанного в условиях теоремы 1 равенства (4.3).

Покажем теперь, что выполнено $\{-\tilde{\psi}(\tau)\} = \partial_x J_*(\tilde{x}(\tau),\tau)$. В силу невырожденности $A(\tilde{x}(0);\tau)$ для этого достаточно показать $-\tilde{\psi}(\tau)A(\tilde{x}(0);\tau) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(\tau),t)A(\tilde{x}(0);\tau)$. Действительно, последовательно применяя (2.5), $-\tilde{\psi}(0) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0)$ и (4.3), имеем

$$-\tilde{\psi}(\tau)A(\tilde{x}(0);\tau) \overset{(2.5)}{=} -\tilde{\psi}(0) - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);\tau) \in \partial_x J_*(\tilde{x}(0),0) - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}(\tilde{x}(0);\tau) \overset{(4.3)}{=} \partial_x J_*(\tilde{x}(\tau),\tau)A(\tilde{x}(0);\tau).$$

Теперь, вновь воспользовавшись [19, Theorem 6.1(ii)] для заведомо сходящейся последовательности градиентов $\dfrac{\partial J}{\partial x}(\tilde{x}(\tau),\tau;\tilde{u},t'_n)$, мы получаем, что они сходятся к некоторому элементу из $\partial_x J_*(\tilde{x}(\tau),\tau)$, т. е. к $-\tilde{\psi}(\tau)$. Переходя к пределу в (4.6), мы имеем для так выбранного момента времени $\tau \in [0,\infty) \setminus N$ неравенство

$$H\big(\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau),\tilde{\psi}(\tau),1,\tau\big) \le H\big(\tilde{x}(\tau),u,\tilde{\psi}(\tau),1,\tau\big) - \varepsilon,$$

что противоречит выполненному на $[0,\infty) \setminus N$ равенству (2.1c). Условие (2.7) показано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Halkin H.** Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. Vol. 42. P. 267–272. doi: 10.2307/1911976 .
2. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V.** The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255. doi: 10.1134/2FS0081543807020010 .
3. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K.** Infinite-horizon optimal control problems in economics // Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67. P. 195–253. doi:10.1070/RM2012v067n02ABEH004785 .
4. **Aseev S.M., Veliov V.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and optimal control problems on unbounded domains / ed. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: AMS, 2014. P. 1–17.
5. **Khlopin D.V.** Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // J. Dyn. Con. Sys. 2013. Vol. 19, no. 4. P. 519–552. doi: 10.1007/s10883-013-9192-5 .
6. **Khlopin D.V.** Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 11. P. 2417–2440. doi: 10.1080/02331934.2014.971413 .
7. **Tauchnitz N.** The pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 167, no. 1. P. 27–48. doi: 10.1007/s10957-015-0723-y .
8. **Khlopin D**. On transversality condition for overtaking optimality in infinite horizon control problem [e-resource]. 2017. 9 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1704.03053v1.pdf .
9. **Clarke F.** Necessary conditions in dynamic optimization. Providence: AMS, 2005. 113 p.
10. **Carlson D.A.** Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 1. P. 55–69. doi: 10.1007/BF00940022 .
11. **Mordukhovich B.S.** Variational analysis and generalized differentiation I. Basic theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 579 p.
12. **Cannarsa P., Frankowska H.** Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control // J. Math. Anal. Appl. 2018. Vol. 457. P. 1188–1217. doi: 10.1016/j.jmaa.2017.02.009 .
13. **Khlopin D.V.** On Lipschitz continuity of value functions for infinite horizon problem // Pure Appl. Funct. Anal. 2017. Vol. 2, no. 3. P. 535–552.
14. **Sagara N.** Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems // Set-Valued Var. Anal. 2010. Vol. 18. P. 1–28. doi: 10.1007/2Fs11228-009-0132-1 .
15. **Aubin J., Clarke F.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17. P. 567–586. doi: 10.1137/0317040 .
16. **Belyakov A.O.** Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited [e-resource]. 2017. 19 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1512.01206.pdf .
17. **Khlopin D.V.** On boundary conditions at infinity for infinite horizon control problem // IEEE Xplore. (Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics, dedicated to the memory of V.F. Demyanov, CNSA). 2017. P. 1–3. doi: 10.1109/CNSA.2017.7973969 .
18. **Bogusz, D.** On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem // J. Optim. Theory Appl. 2013. Vol. 156. P. 650–682. doi: 10.1007/s10957-012-0126-2 .
19. **Ledyaev Y.S., Treiman J.S.** Sub-and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions // Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67. P. 345–373. doi: 10.1070/RM2012v067n02ABEH004789 .

Хлопин Дмитрий Валерьевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила 7.12.2017

REFERENCES

1. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. *Econometrica*, 1974, vol. 42, pp. 267–272. doi: 10.2307/1911976 .
2. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi:10.1134/2FS0081543807020010 .
3. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, pp. 195–253. doi:10.1070/RM2012v067n02ABEH004785 .
4. Aseev S.M., Veliov V. Needle variations in infinite-horizon optimal control. *Variational and optimal control problems on unbounded domains*, eds. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: AMS, 2014, pp. 1–17.
5. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems. *J. Dyn. Con. Sys.*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 519–552. doi: 10.1007/s10883-013-9192-5 .
6. Khlopin D.V. Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 11, pp. 2417–2440. doi:10.1080/02331934.2014.971413 .
7. Tauchnitz N. The pontryagin maximum principle for nonlinear optimal control problems with infinite horizon. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 167, no. 1, pp. 27–48. doi: 10.1007/s10957-015-0723-y .
8. Khlopin D. On transversality condition for overtaking optimality in infinite horizon control problem [e-resource], 2017, 9 p. Preprint available at https://arxiv.org/pdf/1704.03053v1 .
9. Clarke F. *Necessary conditions in dynamic optimization.* Providence: AMS, 2005, 113 p.
10. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable. *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, vol. 64, no. 1, pp. 55–69. doi: 10.1007/BF00940022 .
11. Mordukhovich B.S. *Variational analysis and generalized differentiation I. Basic theory.* Berlin: Springer-Verlag, 2006, 579 p.
12. Cannarsa P., Frankowska H. Value function, relaxation, and transversality conditions in infinite horizon optimal control. *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 457, pp. 1188–1217. doi:10.1016/j.jmaa.2017.02.009 .
13. Khlopin D.V. On Lipschitz continuity of value functions for infinite horizon problem. *Pure Appl. Funct. Anal.*, 2017, vol. 2, no. 3, pp. 535–552.
14. Sagara N. Value functions and transversality conditions for infinite-horizon optimal control problems. *Set-Valued Var. Anal.*, 2010, vol. 18, pp. 1–28. doi:10.1007/2Fs11228-009-0132-1 .
15. Aubin J., Clarke F. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 1979, vol. 17, pp. 567–586. doi:10.1137/0317040 .
16. Belyakov A.O. Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. 2017. 19 p. Preprint available at https://arxiv.org/pdf/1512.01206.pdf .
17. Khlopin D.V. On boundary conditions at infinity for infinite horizon control problem. In: Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov)(CNSA), *IEEE Xplore*, 2017, pp. 1–3. doi: 10.1109/CNSA.2017.7973969 .
18. Bogusz D. On the existence of a classical optimal solution and of an almost strongly optimal solution for an infinite-horizon control problem. *J. Optim. Theory Appl.*, 2013, vol. 156, pp. 650–682. doi: 10.1007/s10957-012-0126-2 .
19. Ledyaev Y.S., Treiman J.S. Sub-and supergradients of envelopes, semicontinuous closures, and limits of sequences of functions. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, pp. 345–373. doi: 10.1070/RM2012v067n02ABEH004789 .

The paper was received by the Editorial Office on December 7, 2017.

Dmitrii Valer'evich Khlopin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: khlopin@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 519.6

БИТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ[1]

А. Г. Ченцов

Исследуются вопросы структуры пространств ультрафильтров и максимальных сцепленных систем. Рассматривается широко понимаемое измеримое пространство: фиксируются непустое семейство подмножеств заданного множества — "единицы", замкнутое относительно конечных пересечений и содержащее данную "единицу", а также пустое множество (π-система с "нулем" и "единицей"). На данном пространстве конструируются ультрафильтры (максимальные фильтры) и максимальные сцепленные системы. Возникающие при этом пространства оснащаются каждое парой сравнимых топологий. Получающиеся при этом битопологические пространства оказываются согласованными в следующем смысле: пространство ультрафильтров является всякий раз подпространством соответствующего пространства максимальных сцепленных систем. При этом пространство максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа суперкомпактно и, в частности, компактно. Возможными вариантами π-системы являются решетки, полуалгебры и алгебры множеств, топологии и семейства замкнутых множеств топологических пространств.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, топологическое пространство, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems.

Issues of the structure of spaces of ultrafilters and maximal linked systems are studied. We consider a widely understood measurable space (a π-system with zero and one) defined as follows: we fix a nonempty family of subsets of a given set closed under finite intersections and containing the set itself ("one") and the nonempty set ("zero"). Ultrafilters (maximal filters) and maximal linked systems are constructed on this space. Each of the obtained spaces is equipped with a pair of comparable topologies. The resulting bitopological spaces turn out to be consistent in the following sense: each space of ultrafilters is a subspace of the corresponding space of maximal linked systems. Moreover, the space of maximal linked systems with Wallman-type topology is supercompact and, in particular, compact. Possible variants of the π-systems are lattices, semialgebras and algebras of sets, topologies, and families of closed sets of topological spaces.

Keywords: maximal linked system, topological space, ultrafilter.

MSC: 54A09, 54A10, 54B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272

1. Введение

Статья продолжает работы [1–3] и посвящена изучению некоторых абстрактных аналогов суперрасширений топологических пространств (ТП); см. [4–7] и др. Рассматривается π-система [8, с. 14] с "нулем" и "единицей", т. е. семейство, состоящее из подмножеств фиксированного множества, играющего роль упомянутой "единицы". Данная π-система используется в качестве основной измеримой структуры (итак, исследуется более общий случай в сравнении с [1–3], где применялись решетки множеств). Предметом исследования являются пространства ультрафильтров (у/ф) и максимальных сцепленных систем (МСС) данной π-системы. Каждое из этих пространств рассматривается как битопологическое: естественная (и понимаемая расширительно) топология волмэновского типа дополняется топологией, которая в идейном отношении подобна используемой при построении пространства Стоуна (семейство у/ф алгебры множеств). В статье показано, что упомянутые топологии сравнимы: топология волмэновского типа, именуемая далее для краткости волмэновской, всегда слабее топологии,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 18-01-00410).

являющейся, по смыслу, стоуновской. При этом каждое из получающихся пространств у/ф является подпространством соответствующего пространства МСС. Определяя естественным образом битопологические пространства (БТП) у/ф и МСС, получаем, что первое БТП (т. е. БТП с "единицей" в виде множества всех у/ф исходной π-системы) может рассматриваться как подпространство БТП, "составленного" из МСС. Пространство МСС с волмэновской топологией оказывается суперкомпактным (обладает замкнутой предбазой со свойством непустого пересечения всякой своей сцепленной подсистемы) и может рассматриваться в качестве абстрактной версии суперрасширения топологического пространства (ТП). Заметим, что в [2] традиционный вариант суперрасширения также рассматривался в оснащении двумя топологиями. В связи с битопологическими пространствами см. монографию [9].

Среди работ [4–7] по суперрасширениям и суперкомпактным пространствам особо отметим [6], где установлено свойство суперкомпактности метризуемых компактов (т. е. компактных T_2-пространств). Систематическое исследование вопросов, связанных с суперкомпактностью и суперрасширениями ТП, содержится в [7, гл. VII, § 4]. В связи с вопросами теории у/ф, и в частности, пространств Стоуна, отметим исследования А. А. Грызлова и его учеников; см. [10–12].

В настоящей статье исследуется, таким образом, постановка, существенно отличающаяся как от работ [4–7], связанных с суперрасширениями ТП (как правило, T_1-пространств), так и от предыдущих исследований автора (см. [1–3]), где рассматривались у/ф и МСС на решетке множеств; π-система является, по сути дела, "полурешеткой" (постулируется замкнутость семейства множеств только относительно одной решеточной операции). Последнее обстоятельство повлияло на способ изложения и конструкции доказательств. Среди π-систем, не являющихся решетками, можно отметить полуалгебры множеств, играющие важную роль в теории меры и теории вероятностей.

2. Общие определения и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество; def заменяет фразу "по определению", $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. *Семейством* называется множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x — какой-либо объект, то через $\{x\}$ обозначаем синглетон со свойством $x \in \{x\}$. Если же z — упорядоченная пара, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые равенством $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$.

Если X — множество, то $\mathcal{P}(X)$ — это def семейство всех п/м X и $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; кроме того, $\mathrm{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м X. В качестве X может использоваться семейство. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то полагаем

$$\{\bigcup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\Big\}, \qquad \{\bigcap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\Big\},$$
$$\{\bigcup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcup_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\}, \quad \{\bigcap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \Big\{\bigcap_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\},$$

получая четыре семейства п/м объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$; ясно, что каждое из этих семейств содержит $\mathfrak{X}$. Для всякого множества $\mathbb{M}$ и семейства $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть двойственное по отношению к $\mathcal{M}$ семейство п/м $\mathbb{M}$. Если S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$, то $\mathbf{C}_S[\mathbf{C}_S[\mathcal{S}]] = \mathcal{S}$. Для непустого семейства $\mathcal{A}$ и множества B

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{2.1}$$

есть след семейства $\mathcal{A}$ на множество B. Если U и V — множества, то V^U есть def множество всех отображений из U в V. При $f \in V^U$ и $W \in \mathcal{P}(U)$ в виде $f^1(W) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in W\} \in \mathcal{P}(V)$ имеем образ множества W при действии f; $f^1(W) \neq \varnothing$ при $W \neq \varnothing$. Отметим еще одно соглашение: если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то $[\mathcal{H}](S) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{H} | S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$. Как обычно, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$ (натуральный ряд); при $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1,n} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\}$. Полагаем также, что натуральные числа не являются множествами. С учетом этого для всяких множества S и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $S^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение S^n, что (при нашем соглашении) не приводит к двусмысленности.

Специальные семейства. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Элементы $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$ суть непустые семейства п/м $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \,\&\, (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \,\&\, (A \cap B \in \mathcal{I} \;\; \forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{2.2}$$

имеем непустое семейство всех π-систем [8, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с “нулем” и “единицей”; π-системы из семейства $\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I} \;\; \forall x \in \mathbf{I} \setminus L \;\; \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda) \,\&\, (\Lambda \cap L = \varnothing)\}$ называем *отделимыми*. Кроме того, пусть

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \,\big|\, \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\big\} \quad \forall \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \tag{2.3}$$

((2.3) — семейство всех непустых центрированных подсемейств соответствующей π-системы). Частными случаями π-систем (см. (2.2)) являются алгебры и полуалгебры п/м $\mathbf{I}$, топологии на $\mathbf{I}$, семейства замкнутых множеств в ТП (иначе, замкнутые топологии). Отметим простой пример π-системы, не являющийся ни одним из вышеупомянутых семейств.

Итак, пусть в пределах данного примера $\mathbf{I} =]0,1[$ (открытый единичный интервал), а $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ есть def семейство всех интервалов $]a,b[\stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} \mid (a < \xi) \,\&\, (\xi < b)\}$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая), т. е. $\mathcal{I} = \{\,]\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [0,1] \times [0,1]\}$, где пустое множество также рассматривается как интервал: в частности, $\varnothing =]1,0[$.

Элементы топологии. Через $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]\colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$. Пусть

$$(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \,\big|\, \big(\mathbf{I} = \bigcup_{B \in \beta} B\big) \,\&$$

$$(\forall B_1 \in \beta \;\; \forall B_2 \in \beta \;\; \forall x \in B_1 \cap B_2 \;\; \exists B_3 \in \beta\colon (x \in B_3) \,\&\, (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\big\}; \tag{2.4}$$

ясно, что $\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \;\; \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Семейства — элементы (2.4) — (открытые) базы топологий на $\mathbf{I}$; при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\beta)\}$ имеем семейство всех баз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Через $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех (открытых) предбаз топологий на $\mathbf{I}$; $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ есть семейство всех $\kappa \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$ таких, что объединение всех множеств из κ совпадает с $\mathbf{I}$. Последнее условие исчерпывающим образом характеризует предбазы (открытых) топологий. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\}$ есть семейство всех (открытых) предбаз ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Соответственно,

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \,\big|(\mathbf{I} \in \beta) \& \big(\bigcap_{B \in \beta} B = \varnothing\big) \,\&$$

$$(\forall B_1 \in \beta \;\; \forall B_2 \in \beta \;\; \forall x \in \mathbf{I} \setminus (B_1 \cup B_2) \;\; \exists B_3 \in \beta\colon (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \,\&\, (x \notin B_3))\big\}$$

есть семейство всех замкнутых баз; при этом $\{\cap\}(\mathfrak{B}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \;\forall B \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то в виде элементов семейства

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] = \{\cap\}(\beta)\}$$

имеем замкнутые базы конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Семейство $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\}$ определяет совокупность замкнутых предбаз топологий на $\mathbf{I}$; если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \mid \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]\}$$

есть семейство всех замкнутых предбаз ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. При $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$, то $N^0_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и, кроме того, $N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{ H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in N^0_\tau(x)\colon G \subset H\}$.

3. Фильтры и ультрафильтры π-систем

В дальнейшем фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (по мере надобности на $\mathcal{L}$ могут накладываться те или иные дополнительные условия). Через $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ обозначаем соответственно семейства всех фильтров и всех у/ф π-системы $\mathcal{L}$:

$$\begin{gathered}\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F})\, \& \\ (\forall F \in \mathcal{F} \ \ \forall L \in \mathcal{L} \ \ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F})\big\},\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) &\stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\big\} \\ &= \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{U})\big\} \\ &= \big\{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\big\};\end{aligned}$$

$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \neq \varnothing$. Введем тривиальные (фиксированные) фильтры π-системы $\mathcal{L}$: $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E$. Известно [13, (5.9)], что

$$((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E) \Longleftrightarrow (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]).$$

Если $L \in \mathcal{L}$, то $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\}$. При этом $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$, и, в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$. Топология $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$ превращает $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ в нульмерное [14, 6.2] T_2-пространство

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \tag{3.2}$$

(если $\mathcal{L}$ является алгеброй п/м E, то (3.2) есть нульмерный компакт — пространство Стоуна). При этом [15, (1.10)]

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]]. \tag{3.3}$$

В случае, когда $(E, \mathcal{L})$ есть измеримое пространство (ИП) с алгеброй множеств, последнее вложение превращается в равенство (см. [16, замечание 3.3]).

Заметим, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $A \in \mathcal{P}(E)$ определены $(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A) = \{(\mathcal{L}-\mathrm{triv})[x]\colon x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ и $\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$, причем (см. [13, предложение 1])

$$\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid A \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}\};$$

если же $A \in \mathcal{L}$, то определено множество $\Phi_{\mathcal{L}}(A)$ и при этом $\mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(A)$. Наконец, в данном случае (при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$) $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}((\mathcal{L}-\mathrm{triv})[\cdot]^1(E), \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E])$ (реализуется вложение E в $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ в виде всюду плотного п/м).

Вернемся к общему случаю $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U} \colon U \subset H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(E). \tag{3.4}$$

Тогда, в частности, $\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|E \setminus L] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \Phi_{\mathcal{L}}(L)\ \ \forall L \in \mathcal{L}$. Как следствие (см. (3.4)), получаем по двойственности, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]].$$

Таким образом, имеем следующее очевидное равенство:

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] = \{\cap\}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]). \tag{3.5}$$

Ясно, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|E] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]$ и $\varnothing = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\varnothing] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]$. Рассмотрим некоторые следствия (3.5), учитывая, что

$$\mathbf{F} = \bigcap_{\mathbb{F} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]](\mathbf{F})} \mathbb{F} \qquad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]]. \tag{3.6}$$

С учетом (3.3) и (3.6) получаем, что при $L \in \mathcal{L}$ множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ совпадает с пересечением всех множеств из $[\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]](\Phi_{\mathcal{L}}(L))$. При этом, как легко видеть, $\forall L \in \mathcal{L}\ \ \forall \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$

$$(L \subset \Lambda) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]). \tag{3.7}$$

Отметим также, что при $L \in \mathcal{L}$ в виде $[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)$ имеем непустое семейство.

Предложение 3.1. *Если $L \in \mathcal{L}$ и $\Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, то $(L \subset \Lambda) \Longleftrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda])$.*

Доказательство. Пусть $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]$. Допустим, однако, что $L \setminus \Lambda \neq \varnothing$. Пусть $x_* \in L \setminus \Lambda$. При этом $\Lambda = E \setminus N$, где $N \in \mathcal{L}$. Рассмотрим фильтр $\mathcal{V} \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$; тогда для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеем вложение $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Ясно, что $L \in \mathcal{W}$, а потому $\mathcal{W} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$. Следовательно, $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]$. С учетом (3.4) имеем для некоторого $W \in \mathcal{W}$ свойство $W \subset \Lambda$.

Кроме того, $N = E \setminus \Lambda$, а тогда $x_* \in N$, что доставляет включение $N \in \mathcal{V}$ и, стало быть, $N \in \mathcal{W}$. Тогда $(W \in \mathcal{W})\&(N \in \mathcal{W})$, а потому $W \cap N \neq \varnothing$ по аксиомам фильтра. Но $W \cap N \subset \Lambda \cap N = \varnothing$. Полученное противоречие показывает, что свойство $L \setminus \Lambda \neq \varnothing$ невозможно и, стало быть, $L \subset \Lambda$. Установлена импликация, противоположная (3.7), что и требовалось доказать. □

В качестве следствия предложения 3.1 получаем весьма очевидное свойство: если $L \in \mathcal{L}$, то

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}]](\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda] :\ \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)\}. \tag{3.8}$$

Предложение 3.2. *Если $L \in \mathcal{L}$, то справедливо равенство* $\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \bigcap\limits_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]$.

Доказательство следует из (3.6), (3.8).

Заметим, что (3.7) допускает обобщение: при $L \in \mathcal{L}$ и $H \in \mathcal{P}(E)$

$$(L \subset H) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \subset \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H]). \tag{3.9}$$

Отображение $H \longmapsto \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \colon \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$ является изотонным. С учетом данного свойства, а также (3.8) и (3.9) проверяется (см. предложение 3.2)

Предложение 3.3. *Если $L \in \mathcal{L}$, то множество $\Phi_{\mathcal{L}}(L)$ таково, что*

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}\big[\mathcal{L} \,\big|\, \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda\big].$$

Из предложения 3.3 вытекает в свою очередь, что при $L \in \mathcal{L}$

$$\Big(\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\Big) \Longrightarrow (\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]).$$

Частный случай: открытые ультрафильтры. До конца настоящего раздела полагаем, что $\mathcal{L} = \tau$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Тогда, как легко видеть (см. предложение 3.3), $\Phi_\tau(G) = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\tau|\mathrm{cl}(G,\tau)] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\tau]\ \ \forall G \in \tau$. С учетом [17, (8.5)] имеем свойство

$$\mathbb{F}^*_0(\tau) \setminus \Phi_\tau(G) = \Phi_\tau(E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau)) \quad \forall G \in \tau. \tag{3.10}$$

В свою очередь с учетом (3.10) устанавливается следующая теорема.

Теорема 3.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}^*_0(\tau) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\tau) \mid \forall G \in \tau\ \ (G \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \mathcal{U})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение множество

$$\Omega \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\tau) \mid \forall G \in \tau\ \ (G \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(G,\tau) \in \mathcal{U})\}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) легко следует, что $\mathbb{F}^*_0(\tau) \subset \Omega$ (см. определения в начале раздела). Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$ и, в частности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\tau)$. Покажем, что, в действительности, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathcal{V} \notin \mathbb{F}^*_0(\tau)$. Тогда для некоторого фильтра $\mathcal{W} \in \mathbb{F}^*(\tau)$

$$(\mathcal{V} \subset \mathcal{W}) \,\&\, (\mathcal{V} \neq \mathcal{W}). \tag{3.12}$$

Отсюда $\mathcal{W} \in \mathcal{P}'(\tau)$. Согласно (3.12) $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем множество

$$W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}. \tag{3.13}$$

Поскольку $W \in \tau$, получаем согласно (3.11), что по выбору $\mathcal{V}$

$$(W \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau) \in \mathcal{V}). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) вытекает, что на самом деле $E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau) \in \mathcal{V}$, а тогда согласно (3.12) $E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau) \in \mathcal{W}$. Поскольку $W \in \mathcal{W}$ (см. (3.13)), то в силу (3.1)

$$W \cap (E \setminus \mathrm{cl}(W,\tau)) \neq \varnothing,$$

что невозможно, так как $W \subset \mathrm{cl}(W,\tau)$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_0(\tau)$, чем и завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbb{F}^*_0(\tau)$, а, стало быть, и требуемого равенства $\mathbb{F}^*_0(\tau) = \Omega$. □

Заметим, что характеристическое свойство открытых у/ф, указанное в теореме, подобно в логическом отношении следующему: если $\mathcal{A}$ — алгебра п/м E, то $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A}\ \ (A \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus A \in \mathcal{U})\}$.

4. Максимальные сцепленные подсемейства π-систем

Напомним определение сцепленности (см. [4–7]): семейство $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ называется *сцепленным*, если $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing\ \ \forall H_1 \in \mathcal{H}\ \ \forall H_2 \in \mathcal{H}$. Тогда

$$(\mathrm{link})[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\} \tag{4.1}$$

есть семейство всех непустых сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Ясно, что $\varnothing \notin \mathcal{E}\ \ \forall \mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E]$. Всюду в дальнейшем фиксируем произвольную π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и полагаем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \triangleq \{\mathcal{E} \in (\mathrm{link})[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{L}\}; \tag{4.2}$$

ясно, что $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. Имеем, кроме того, в виде

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] &\triangleq \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\big\}\\ &= \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\big\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

множество всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, именуемых ниже МСС. При этом $(E, \mathcal{L})$ рассматривается как широко понимаемое измеримое пространство (ИП);

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \quad \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing. \tag{4.4}$$

С использованием леммы Цорна проверяется, что

$$\forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \exists \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \colon \mathcal{S} \subset \mathcal{E}. \tag{4.5}$$

Свойства (4.4), (4.5) дополняются очевидным следствием (4.3):

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (\Sigma \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}).$$

Кроме того, (4.4) допускает следующее уточнение: $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall A \in \mathcal{U}\ \ \forall B \in \mathcal{U}\}$. При этом $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. В частности, $\{E\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ и, как следствие, $\mathcal{E} \cup \{E\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. С учетом (4.3) имеем теперь, что

$$E \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{4.6}$$

Если $L \in \mathcal{L}$, то полагаем, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\}$. Тогда (см. (4.1), (4.6))

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\varnothing] = \varnothing)\,\&\,(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]). \tag{4.7}$$

Ясно, что зависимость $L \longmapsto \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])$ изотонна. Введем, кроме того, $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset H\}\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E)$. Тогда получаем следующие два простых свойства:

$$\begin{gathered}(\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E))\,\&\\ (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E \setminus L] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L]\ \ \forall L \in \mathcal{L}).\end{gathered} \tag{4.8}$$

Введем в рассмотрение семейства

$$\begin{gathered}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \colon L \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])))\,\&\\ (\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]))).\end{gathered} \tag{4.9}$$

Как следствие (см. (4.8)), получаем равенство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]]; \tag{4.10}$$

итак, семейства (4.9) находятся в естественной двойственности. Ясно также, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\varnothing] = \varnothing$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. Заметим, наконец, с учетом последнего равенства, что $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$. Как следствие, определена база $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$, порождающая топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]. \tag{4.11}$$

Семейство $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ есть предбаза получающегося ТП

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle), \tag{4.12}$$

т. е. реализуется следующее свойство:

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]. \tag{4.13}$$

В свою очередь, из (4.10)–(4.13) по двойственности получаем

Предложение 4.1. *Семейство $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ является замкнутой предбазой ТП* (4.12):

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

5. Суперкомпактность пространства максимальных сцепленных систем

Напомним ряд общих положений [4–7], связанных с суперкомпактными ТП, фиксируя непустое множество $\mathbb{X}$. Полагаем, что

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}] \overset{\triangle}{=} \Big\{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) \,\Big|\, \mathbb{X} = \bigcup_{X\in\chi} X\Big\} \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X})),$$

получая всякий раз соответствующее семейство покрытий множества $\mathbb{X}$. По аналогии с (4.1) конструируем семейство $(\mathrm{link})[\mathbb{X}]$ всех сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ (используемое здесь обозначение повторяет (4.1) при замене E на $\mathbb{X}$). Подобным образом по аналогии с (4.2) вводим семейство $\langle\mathfrak{X}-\mathrm{LINK}\rangle[\mathbb{X}] \overset{\triangle}{=} \{\kappa \in (\mathrm{link})[\mathbb{X}] \mid \kappa \subset \mathfrak{X}\}$ всех сцепленных подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{X})$, содержащихся в $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$. Тогда полагаем

$$((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[\mathbb{X};\tau] \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathfrak{X} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{X};\tau] \,\Big|\, \bigcap_{X\in\chi} X \neq \varnothing \ \forall \chi \in \langle\mathfrak{X}-\mathrm{LINK}\rangle[\mathbb{X}]\Big\} \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}]. \tag{5.1}$$

В (5.1) введено семейство замкнутых бинарных предбаз соответствующего ТП с “единицей” $\mathbb{X}$. Тогда (см. [7, гл. VII, §4]) с учетом соотношений двойственности имеем в виде

$$\begin{aligned}((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{X}] &\overset{\triangle}{=} \big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}] \mid ((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[\mathbb{X};\tau] \neq \varnothing\big\} \\ &= \big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{X}] \mid \\ \exists \mathcal{S} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{X};\tau] \ \forall \mathcal{G} &\in (\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{S}] \ \exists \mathbb{G}_1 \in \mathcal{G} \ \exists \mathbb{G}_2 \in \mathcal{G}\colon \mathbb{X} = \mathbb{G}_1 \cup \mathbb{G}_2\big\}\end{aligned} \tag{5.2}$$

семейство всех топологий, превращающих $\mathbb{X}$ в суперкомпактное пространство. Вернемся к построениям, связанным с (4.3) для общего случая $\mathcal{L} \in \pi[E]$.

Предложение 5.1. *Семейство $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ есть замкнутая бинарная предбаза ТП* (4.12):

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \in ((\mathrm{p},\mathrm{bin})-\mathrm{cl})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Схема д о к а з а т е л ь с т в а в значительной степени подобна рассуждению в [7, 4.13], но мы все же ее приведем, поскольку здесь рассматривается существенно более общий случай.

Учтем предложение 4.1. Пусть $\mathfrak{A} \in \langle \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] - \mathrm{LINK})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$. Тогда $\mathfrak{A}$ сцеплено и при этом $\mathfrak{A} \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$. Для $\mathfrak{V} \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \in \mathfrak{A}\}$ имеем $\mathfrak{V} \neq \varnothing$; при этом

$$\mathfrak{U} \stackrel{\triangle}{=} \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \colon L \in \mathfrak{V}\} = \mathfrak{A} \tag{5.3}$$

(проверка подобна [1, предложение 4.1]). Для $V_1 \in \mathfrak{V}$ и $V_2 \in \mathfrak{V}$ имеем в силу (5.3) и сцепленности $\mathfrak{A}$, что $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Как следствие, $\mathfrak{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ и $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$ для некоторого $\mathfrak{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ (см. (4.5)). Легко видеть, что

$$\mathfrak{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \quad \forall L \in \mathfrak{V}.$$

Тогда $\mathfrak{W} \in \chi \ \ \forall \chi \in \mathfrak{A}$. В итоге пересечение всех множеств из $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$ непусто. □

С учетом (5.2) получаем, что $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а ТП (4.12) суперкомпактно. Как следствие (см. (5.2)), имеем, что

$$\forall \mathfrak{C} \in (\mathrm{COV})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]] \ \exists \mathbb{C}_1 \in \mathfrak{C} \ \exists \mathbb{C}_2 \in \mathfrak{C} \colon \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2.$$

Последнее свойство означает, что $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}])$

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|G]) \Longrightarrow$$
$$\big(\exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G} \colon \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|G_1] \cup \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|G_2]).$$

Предложение 5.2. *Если* $L_1 \in \mathcal{L}$ *и* $L_2 \in \mathcal{L}$, *то*

$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longleftrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2] = \varnothing).$$

Доказательство. Пусть $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2] = \varnothing$. Покажем, что $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. В самом деле, допустим противное: $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Пусть $x_* \in L_1 \cap L_2$. Тогда $\mathcal{X} \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x_*] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и для некоторого $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеем $\mathcal{X} \subset \mathcal{V}$. При этом $L_1 \in \mathcal{V}$ и $L_2 \in \mathcal{V}$, а потому в силу (4.4) $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2]$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает истинность импликации

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L_2] = \varnothing) \Longrightarrow (L_1 \cap L_2 = \varnothing).$$

Противоположная импликация очевидна (см. (4.1)). □

Отметим очевидное дополнение предложения 5.2: если $\Lambda_1 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$ и $\Lambda_2 \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]$, то

$$(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda_2] = \varnothing).$$

Напомним, что $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. Как следствие получаем, что $\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ совпадает с объединением всех семейств из $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, а также с объединением всех семейств из $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$.

Возвращаясь к рассмотрению у/ф (см. разд. 3), отметим, что $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Тогда $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и определена топология

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{5.4}$$

Ясно, что $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]$, причем, как легко видеть,

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{5.5}$$

В свою очередь, из (5.5) вытекает (см. (5.4)) следующее предложение.

Предложение 5.3. *В виде* $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle)$ *имеем подпространство ТП* (4.12):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}.$$

В связи с общими свойствами ТП (4.12) отметим также, что

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\Sigma] = \{\mathcal{E}\} \quad \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{5.6}$$

В свою очередь, из предложения 4.1 и (5.6) получаем, что (4.12) является T_1-пространством (при $\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ синглетон $\{\mathcal{E}\}$ замкнут в ТП (4.12)). Итак, (4.12) есть суперкомпактное T_1-пространство.

В заключение раздела отметим ряд простых свойств, связываемых далее с T_1-отделимостью. Так, при $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$

$$(\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow ((\mathcal{E}_1\setminus\mathcal{E}_2\neq\varnothing)\,\&\,(\mathcal{E}_2\setminus\mathcal{E}_1\neq\varnothing));$$

кроме того, имеем следующую очевидную эквиваленцию:

$$(\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2) \Longleftrightarrow (\exists\Sigma_1\in\mathcal{E}_1\ \exists\Sigma_2\in\mathcal{E}_2\colon \Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing).$$

Для любых двух непустых семейств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ полагаем $(\mathrm{Dis})[\mathcal{V};\mathcal{W}] \overset{\triangle}{=} \{z\in\mathcal{V}\times\mathcal{W} \mid \mathrm{pr}_1(z)\cap\mathrm{pr}_2(z)=\varnothing\}$; в частности, определено $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$, где $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ суть МСС из $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$. Если $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$, то

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E\setminus\mathrm{pr}_2(z)]\in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_1)\colon \mathcal{E}_2\notin\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|E\setminus\mathrm{pr}_2(z)]. \tag{5.7}$$

С учетом (5.6) получаем при $\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2$ свойство $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$, а тогда (5.7) реализует конкретный вариант T_1-отделимости в ТП (4.12).

6. Максимальные сцепленные системы как точки нульмерного T_2-пространства

Из (4.7) и (4.9) вытекает, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ (объединение всех множеств из $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ совпадает с $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, так как $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\in\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ в силу (4.7)). Как следствие, $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])\in(\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ и определена топология

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]))\in(\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]. \tag{6.1}$$

Разумеется, $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]\subset\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, что позволяет использовать множества первого из семейств в (4.9) для построения открытых окрестностей МСС. С учетом предложения 5.2 получаем, что при $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_1(z)]\cap\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_2(z)]=\varnothing. \tag{6.2}$$

Если при этом $\mathcal{E}_1\neq\mathcal{E}_2$, то $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$, что позволяет использовать (6.2) для установления T_2-отделимости ТП

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{6.3}$$

Предложение 6.1. *В виде* (6.3) *реализуется T_2-пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно: при $\mathcal{E}_1\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, $\mathcal{E}_2\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\{\mathcal{E}_1\}$ применяем (6.2), учитывая получающееся при этом свойство $(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]\neq\varnothing$; при $z\in(\mathrm{Dis})[\mathcal{E}_1;\mathcal{E}_2]$

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_1(z)]\in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_1),\quad \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_2(z)]\in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_2),$$
$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_1(z)]\cap\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\mathrm{pr}_2(z)]=\varnothing.$$

Предложение 6.2. *Если* $L\in\mathcal{L}$, *то справедливо равенство*

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]=\{\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\mid L\cap\Sigma\neq\varnothing\ \ \forall\Sigma\in\mathcal{E}\}. \tag{6.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω есть def множество в правой части (6.4). Требуется установить равенство $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]=\Omega$. Если $\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]$, то $L\in\mathcal{S}$ и (по свойству сцепленности $\mathcal{S}$) $L\cap\Sigma\neq\varnothing\ \forall\Sigma\in\mathcal{S}$. Итак, $\mathcal{S}\in\Omega$, чем завершается проверка вложения $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]\subset\Omega$. Пусть $\mathcal{V}\in\Omega$, т.е. $\mathcal{V}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и при этом $L\cap\Sigma\neq\varnothing\ \forall\Sigma\in\mathcal{V}$. Тогда в силу (4.3) получаем, что $L\in\mathcal{V}$, а потому (см. разд. 4) $\mathcal{V}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]$. Тем самым установлено, что $\Omega\subset\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]$, чем и завершается проверка равенства $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]=\ \Omega$. □

Предложение 6.3. *Если* $L\in\mathcal{L}$, *то* $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]\in\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $L\in\mathcal{L}$ и полагаем, что $\mathbb{L}\overset{\triangle}{=}\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]$. Пусть $\mathcal{V}\in\mathbb{L}$, тогда (см. разд. 4) $\mathcal{V}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и при этом $L\cap V=\varnothing$ для некоторого $V\in\mathcal{V}$ (см. предложение 6.2). В частности, $V\in\mathcal{L}$ и $\mathcal{V}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|V]$. Пусть $\mathcal{W}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|V]$, тогда $V\in\mathcal{W}$. Поэтому $\exists\Sigma\in\mathcal{W}\colon L\cap\Sigma=\varnothing$. В силу предложения 6.2 $\mathcal{W}\notin\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]$, а потому $\mathcal{W}\in\mathbb{L}$. Поскольку выбор $\mathcal{W}$ был произвольным, установлено, что $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|V]\subset\mathbb{L}$, где согласно (4.9) $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|V]\in\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$, и в частности

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|V]\in\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]).$$

Таким образом, установлено, что $\forall\mathcal{E}\in\mathbb{L}\ \exists\mathbb{B}\in\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])\colon(\mathcal{E}\in\mathbb{B})\,\&\,(\mathbb{B}\subset\mathbb{L})$. По свойствам (открытой) базы $\mathbb{L}\in\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ (см. (6.1)), а потому $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]=\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\mathbb{L}\in\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. □

Используя свойства замкнутых множеств, получаем

$$\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])\subset\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle\cap\mathbf{C}_{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle] \tag{6.5}$$

(см. (6.1)), где $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])\in(\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$. Итак (см. предложение 6.1), (6.3) есть T_2-пространство с базой открыто-замкнутых множеств, т.е. справедливо следующее предложение.

Предложение 6.4. *В виде* (6.3) *имеем нульмерное* T_2*-пространство.*

Предложение 6.5. *Посредством* (3.2) *реализуется подпространство ТП* (6.3):

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]=\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}. \tag{6.6}$$

Действительно, из определений разд. 2, 3 следует, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L)=\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]\cap\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\quad\forall L\in\mathcal{L}, \tag{6.7}$$

см. также (4.4). С учетом (4.9) и (6.7) получаем (6.6) (см. (2.1) и определение $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]$ в разд. 3).

Пусть $\mathbb{G}\in\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$. Тогда (см. [13, § 2]) $\mathbb{G}\in\mathcal{P}(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}))$ и при этом

$$\forall\mathcal{U}\in\mathbb{G}\quad\exists U\in\mathcal{U}\colon\Phi_{\mathcal{L}}(U)\subset\mathbb{G}. \tag{6.8}$$

Ясно, что $(\mathbb{G} = \varnothing) \Longrightarrow (\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})})$ по аксиомам топологии. Пусть теперь $\mathbb{G} \neq \varnothing$. Введем в рассмотрение семейство

$$\mathfrak{C} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{C} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \mid \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C} \subset \mathbb{G}\}. \tag{6.9}$$

С учетом (6.8) и (6.9) получаем (см. (6.7)), что $\mathfrak{C} \neq \varnothing$, а тогда $\mathfrak{C} \in \mathcal{P}'(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$ и потому (см. (6.1))

$$\tilde{\mathbb{G}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} \mathbb{C} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \tag{6.10}$$

(учитываем, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$). Из (6.9), (6.10) вытекает, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \tilde{\mathbb{G}} = \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}) \subset \mathbb{G}. \tag{6.11}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{G}$. Согласно (6.8) имеем для $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ следующее свойство: для некоторого $V \in \mathcal{V}$ реализуется вложение

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) \subset \mathbb{G}, \tag{6.12}$$

где $V \in \mathcal{L}$ и $\Phi_{\mathcal{L}}(V) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. При этом $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ согласно (4.9). Тогда в силу (6.12)

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \colon \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{G}.$$

С учетом (6.9) получаем, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \in \mathfrak{C}$. В этом случае из (6.11) следует

$$\Phi_{\mathcal{L}}(V) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|V] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}),$$

а потому имеем по выбору $\mathcal{V}$, что (поскольку $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(V)$)

$$\mathcal{V} \in \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}). \tag{6.13}$$

Итак (см. (6.13)), установлено, что

$$\mathbb{G} \subset \bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{C}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \Big(\bigcup_{\mathbb{C}\in\mathfrak{C}} \mathbb{C}\Big) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \tilde{\mathbb{G}}. \tag{6.14}$$

Из (6.11) и (6.14) следует, что $\mathbb{G} = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \tilde{\mathbb{G}}$. Тогда в силу (2.1) и (6.10) $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ и в случае $\mathbb{G} \neq \varnothing$. Итак, имеем, что во всех возможных случаях $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{6.15}$$

Выберем произвольно $\Omega \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$. Тогда $\Omega = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \Gamma$, где $\Gamma \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$.

Пусть $\mathfrak{U} \in \Omega$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и вместе с тем $\mathfrak{U} \in \Gamma$. В силу (6.1) для некоторого $\mathbb{B} \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$ имеем

$$(\mathfrak{U} \in \mathbb{B}) \,\&\, (\mathbb{B} \subset \Gamma).$$

При этом для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{B}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]^n$ имеем равенство $\mathbb{B} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{B}_i$. Как следствие получаем очевидное равенство

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_i), \tag{6.16}$$

где согласно (6.6) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_j \in (\mathbb{UF}[E;\mathcal{L}] \;\; \forall j \in \overline{1,n}$. В частности (см. разд. 2), $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}_j \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ при $j \in \overline{1,n}$. С учетом (6.16) и аксиом топологии

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]. \tag{6.17}$$

По выбору $\mathbb{B}$ имеем, что $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B}$, откуда с учетом (6.17) следует, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} \in N^0_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathfrak{U})$, причем $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{B} \subset \Omega$. Это означает, что $\Omega \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathfrak{U})$. Поскольку выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что $\Omega \in N_{\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]}(\mathcal{U}) \;\; \forall \mathcal{U} \in \Omega$. Это означает, что $\Omega \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ (см. [18, с. 19]). Итак, установлено, что $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. С учетом (6.15) получаем требуемое утверждение: (3.2) есть подпространство ТП (6.3). $\square$

7. Битопологическое пространство максимальных сцепленных систем

Согласно (4.11) и (6.1) определены две топологии непустого множества $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. Каждое из получающихся при этом ТП (см. (4.12) и (6.3)) определяет соответствующее подпространство у/ф π-системы $\mathcal{L}$. Сейчас рассмотрим вопрос о сравнимости топологий (4.11) и (6.1).

Предложение 7.1. *Топологии* $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ *сравнимы, и при этом*

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle.$$

Доказательство. Напомним, что (см. предложение 4.1) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ есть замкнутая предбаза ТП (4.12), а тогда

$$\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Как следствие (см. разд. 3), получаем равенство

$$\mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle] = \{\cap\}(\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])). \tag{7.1}$$

Пусть $\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. Тогда согласно (7.1) для некоторого $\varkappa \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]))$ имеем равенство

$$\mathbb{F} = \bigcap_{\mathbb{X}\in\varkappa} \mathbb{X}. \tag{7.2}$$

Итак, $\varkappa \neq \varnothing$ и $\varkappa \subset \{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])$. Заметим, что согласно (6.5)

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \subset \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]. \tag{7.3}$$

Заметим также, что из (7.3) вытекает (по свойствам замкнутых множеств), что

$$\{\cup\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]) \subset \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle].$$

Поэтому $\varkappa \subset \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$, а тогда в силу (7.2) $\mathbb{F} \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]$. Тем самым установлено вложение

$$\mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle] \subset \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]. \tag{7.4}$$

Как следствие, из (7.4) вытекает, что

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle]] \subset \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle]] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle.$$

Предложение доказано. □

Таким образом, в виде триплета

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{7.5}$$

реализуется БТП. В силу предложений 5.3, 6.5 и 7.1 имеем вложение $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. Как следствие, получаем в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{7.6}$$

индуцированное из (7.5) БТП. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *Для БТП* (7.5) *и* (7.6) *имеет место свойство*: (7.6) *есть подпространство БТП* (7.5):

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E].$$

8. Частный случай: π-система является решеткой множеств

Коснемся случая, исследуемого в [1;3], когда π-система $\mathcal{L}$ обладает дополнительным свойством $A \cup B \in \mathcal{L}\ \ \forall A \in \mathcal{L}\ \ \forall B \in \mathcal{L}$. Итак, полагаем, что $\mathcal{L}$ является решеткой п/м E с "нулем" и "единицей" (имеется в виду оснащение $\mathcal{P}(E)$ упорядоченностью по включению, в смысле которой и понимаются решеточные операции). В обозначениях [1, (3.1), (3.6)] имеем (см. (4.9)) равенства $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}_0^*[E;\mathcal{L}]$ и $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}] = \mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}]$. Тогда согласно (4.11) в терминах [1, (3.8)] получаем цепочку равенств

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}])) = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^0[E;\mathcal{L}])) = \mathbb{T}_0(E|\mathcal{L}). \tag{8.1}$$

Аналогичным образом, используя [1, (6.2)], получаем следующую цепочку равенств:

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_{\mathrm{op}}^*[E;\mathcal{L}])) = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{C}_{\mathrm{op}}^*[E;\mathcal{L}])) = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}). \tag{8.2}$$

В результате БТП (7.5) сводится к БТП [1, (6.20)]; мы учитываем здесь же, что согласно (4.3) и [1, (2.9)] в рассматриваемом сейчас случае решетки множеств $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = (\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E]$. Итак, получаем совпадение БТП:

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) = ((\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E], \mathbb{T}_0(E|\mathcal{L}), \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})). \tag{8.3}$$

Из предложения 5.3, (8.1) и [1, предложение 5.4] вытекает, что (см. [1, (2.5)])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]. \tag{8.4}$$

Аналогичным образом из предложения 6.5 и [1, предложение 6.4] следует, что (см. (8.2))

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L})|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}.$$

С учетом (8.4) получаем, что БТП (7.6) сводится к БТП [1, (2.7)]:

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E], \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \tag{8.5}$$

Построения разд. 2–7 являются (см. (8.3), (8.5)) существенным обобщением аналогичных построений [1]. В этой связи совсем кратко коснемся положений [1–3]. Прежде всего, в [1;3] были исследованы случаи, когда БТП (8.3), (8.5) оказываются вырожденными, что приводит, в частности, к реализации суперкомпакта на основе (8.3). Имеются в виду случаи, когда $\mathcal{L}$ является алгеброй п/м E или топологией на E. Точнее, в каждом из упомянутых двух случаев

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E], \quad \mathbb{T}_0(E|\mathcal{L}) = \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}).$$

Второе из упомянутых равенств соответствует реализации суперкомпакта, так как

$$((\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E], \mathbb{T}_0(E, \mathcal{L})) = ((\mathcal{L} - \mathrm{link})_0[E], \mathbb{T}_*(E|\mathcal{L}))$$

(см. [1, §§ 8, 9]); см. также (8.1) и (8.2), а также положения разд. 5 и 6 о суперкомпактности и T_2-отделимости.

В то же время (см. [1, § 7]) в случае, когда $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ порождает T_1-пространство, при $\tau \neq \mathcal{P}(E)$ (т. е. в случае, когда ТП (E,τ) не является дискретным) каждое из БТП (8.3), (8.5) является невырожденным; в [3] приведен целый ряд содержательных примеров такого рода. Кроме того, в упомянутом случае замкнутых у/ф в T_1-пространстве, не являющимся дискретным, $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0[E]$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ также различны (см. [1, следствие 7.1]); в частности, упомянутое различие имеет место в случае, когда $E = [0,1]$, а τ есть обычная $|\cdot|$-топология E. Итак, решетка замкнутых множеств в T_1-пространстве типично приводит к ситуации невырожденности упомянутых БТП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 3. С. 365–388. doi: 10.20537/vm170307 .
2. **Ченцов А. Г.** Суперрасширение как битопологическое пространство // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 49. С. 55–79. doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03 .
3. **Chentsov A. G.** Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 100–121. doi: 10.15826/umj.2017.2.012 .
4. **de Groot. J.** Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
5. **Mill J. van.** Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam, 1977. 238 p. (Amsterdam. Math. Center Tract; vol. 85).
6. **Strok M., Szymanski A.** Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. vol. 89, no. 1. P. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
7. **Федорчук В. В., Филиппов В. В.** Общая топология. Основные конструкции. М: Физматлит, 2006. 336 с.
8. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
9. **Dvalishvili B. P.** Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applicatiSer. Amsterdam; Boston; Heidelberg; London, N Y: Elsevier, 2005. 422 p. (Nort-Holland Mathematics Studies; vol. 199.) ISBN: 9780444517937 .
10. **Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А.** О точках одного бикомпактного расширения N // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. doi: 10.20537/vm100302 .
11. **Грызлов А. А., Головастов Р. А.** О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. doi: 10.20537/vm130102 .
12. **Головастов Р. А.** О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24. doi: 10.20537/vm120303 .
13. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101. doi: 10.20537/vm140108 .
14. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
15. **Ченцов А. Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 90–109. doi: 10.20537/vm140309 .
16. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
17. **Ченцов А. Г., Пыткеев Е. Г.** Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №4. С. 312–329.
18. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 11.01.2018

REFERENCES

1. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365–388 (in Russian). doi: 10.20537/vm170307 .

2. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03 .
3. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100–121. doi: 10.15826/umj.2017.2.012 .
4. de Groot.J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications.* Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. pp. 89–90.
5. Mill J. van. *Supercompactness and Wallman spaces.* Amsterdam, 1977, Ser. Math. Centre Tracts, vol. 85, 238 p.
6. Strok M., Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
7. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii.* [General topology. Basic constructions.] Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. ISBN: 5-9221-0618-X .
8. Bulinskij A.V., Shirjaev A.N. *Teorija sluchajnyh processov* [Theory of random processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
9. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam, Boston, Heidelberg, London, N Y: Elsevier, 2005, Ser. Nort-Holland Mathematics Studies, vol. 199, 422 p. ISBN: 9780444517937 .
10. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian). doi: 10.20537/vm100302 .
11. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian). doi: 10.20537/vm130102 .
12. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 19–24 (in Russian). doi: 10.20537/vm120303 .
13. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian). doi: 10.20537/vm140108 .
14. Engelking R. *General topology.* Warszawa, Polish Scientific Publ., 1977, 626 p. ISBN: 0800202090 . Translated to Russian under the title *Obshhaja topologija.* Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
15. Chentsov A.G. To the validity of constraints in the class of generalized elements. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 90–109 (in Russian). doi: 10.20537/vm140309 .
16. Chentsov A.G.. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, Suppl. 1, pp. S12–S39. doi: 10.1134/S0081543811090021 .
17. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, Suppl. 1, pp. S36–S54. doi: 10.1134/S0081543816020048 .
18. Bourbaki N. *Eléments de mathématique, Fascicule II, Livre III, Topologie générale, Chapitre 1, Structures topologiques, Chapitre 2, structures uniformes.* Paris: Hermann, 1965, 255 p. ISBN(1971 ed.): 3-540-33936-1 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury.* Moscow, Nauka Publ., 1968, 272 p.

The paper was received by the Editorial Office on January 11, 2018.

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий

Рассматривается конфликто-управляемый процесс сближении траектории с цилиндрическим терминальным множеством. Предлагаемая формализация охватывает широкий круг квазилинейных функционально-дифференциальных систем. С использованием техники многозначных отображений и их селекторов получены достаточные условия завершения игры за конечное время. Идейно методика близка к схеме, связанной со временем первого поглощения. В качестве иллюстрации исследуются квазилинейные интегро-дифференциальные игры. Получено представление решения в виде аналога формулы Коши. Конкретные вычисления проведены для системы с простой матрицей. В качестве областей управления игроков выступают шары с центром в нуле, а терминальное множество — линейное подпространство. В зависимости от соотношений между начальным состоянием и параметрами процесса получены условия окончания игры. В одном из случаев найден явный вид гарантированного времени.

Ключевые слова: конфликтно-управлямый процесс, селектор многозначного отображения, интеграл Ауманна, опорная функция, интегро-дифференциальное уравнение.

A. A. Chikrii, G. Ts. Chikrii. Game problems of approach for quasilinear systems of general form.

We study a conflict-controlled process of the approach of a trajectory to a cylindrical terminal set. The problem statement encompasses a wide range of quasilinear functional–differential systems. We use the technique of set-valued mappings and their selections to derive sufficient conditions for the game termination in a finite time. The methodology used is close to the scheme that involves the time of the first absorption. By way of illustration, quasilinear integro-differential games are examined. For this purpose, their solutions are presented in the form of an analog of the Cauchy formula. The calculations are performed for the case of a system with a simple matrix; the control sets of the players are balls centered at the origin and the terminal set is a linear subspace. Depending on the relations between the initial state of the system and the parameters of the process, sufficient conditions for the game termination are derived. An explicit form of the guaranteed time is found in one specific case.

Keywords: conflict-controlled process, selection of a set-valued mapping, Aumann's integral, support function, integro-differential equation.

MSC: 49N70, 91A25, 49N90, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-273-287

Введение

Широкий спектр исследований посвящен задачам управления в условиях конфликта и неопределенности. Одним из центральных в этом направлении является позиционный подход [1; 2]. Построение управлений по позиции зачастую требует их непрерывной зависимости от фазовой переменной [3], чтобы обеспечить существование решения соответствующего уравнения. Иногда это условие можно ослабить, переходя к рассмотрению дифференциальных включений. Упомянутые условия регулярности позволяют использовать для решения некоторые вспомогательные задачи программного управления. Эта идеология положена, в частности, в основу метода программных итераций А. Г. Ченцова [4].

Плодотворный позиционный подход в сочетании с иными идеями стал источником для развития методов решения многих задач управления и связанных с ними проблем [5–7].

Заметим также, что в ряде случаев при иных информационных предположениях удается обойти вопрос, связанный с существованием решения конфликтно-управляемого процесса. Так дело обстоит при определенной дискриминации игрока с использованием ε-стратегий [8; 9], квазистратегий [4] и стробоскопических стратегий [10;11], предписывающих контруправления.

В данной работе в свете вышесказанного рассматриваются игровые задачи для систем, у которых при представлении решения блок управления отделен от блока начальных данных. При этом охватываются процессы различной природы, включая системы с дробными производными и импульсным воздействием.

Для иллюстрации подхода выбрана игровая задача, в которой динамика описывается системой интегро-дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи, вспомогательные построения

Пусть состояние конфликтно-управляемого процесса в произвольный момент времени t, $t \geq t_0 \geq 0$, описывается вектором

$$z(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi\,(t, s, u(s), v(s))\, ds. \tag{1.1}$$

Здесь $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $g(t)$, $g\colon\ [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, — непрерывная вектор-функция; функция $\varphi(t, s, u, v)$, $\varphi\colon \Delta(t_0) \times U \times V \to \mathbb{R}^n$, непрерывна по совокупности переменных.

Обозначим $\Delta(t_0) = \{(t, s)\colon t_0 \leq s \leq t < +\infty\}$, области управления $U \in K(\mathbb{R}^n)$, $V \in K(\mathbb{R}^n)$. Допустимые управления $u(s)$, $v(s)$ — измеримые функции, принимающие значения из компактов U и V соответственно. Обозначим

$$\Omega_U = \{u(s) : u(s) \in U,\ s \in [t_0, +\infty)\}, \quad \Omega_V = \{v(s) : v(s) \in V,\ s \in [t_0, +\infty)\}.$$

Элементы множеств Ω_U и Ω_V — это $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$.

Кроме динамики задано терминальное множество M^*, $M^* \subset \mathbb{R}^n$, имеющее цилиндрический вид:

$$M^* = M_0 + M, \tag{1.2}$$

где M_0 — линейное подпространство из $\mathbb{R}^n$, а M — выпуклый компакт из подпространства L, $L \subset \mathbb{R}^n$, которое является ортогональным дополнением к M_0 в $\mathbb{R}^n$, т.е. $M \in \mathrm{co}K(L)$. Будем считать, что $g(t_0) \notin M^*$.

Целью преследователя (u) является вывод траектории объекта (1.1) на терминальное множество M^*. Цель убегающего (v) — уклонить траекторию от встречи с терминальным множеством. Игра заканчивается в момент времени T, $T > t_0$, такой, что $z(T) \in M^*$или $\pi\, z(T) \in M$, где π — ортопроектор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в L.

Станем на сторону преследователя и найдем гарантированное время окончания игры. Пусть игроки на интервале времени $[t_0, t)$ и далее применили допустимые управления

$$u_t(\cdot) = \{\, u(s) : s \in [t_0, t)\}, \quad v_t(\cdot) = \{\, v(s) : s \in [t_0, t)\}, \quad u(\cdot) \in \Omega_U, \quad v(\cdot) \in \Omega_V.$$

Тогда для произвольных конечных моментов T и t, $t_0 \leq t \leq T$,

$$z(T) = z(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)) + \int_{t}^{T} \varphi(T, s, u(s), v(s))\, ds,$$

где

$$z(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)) = g(T) + \int_{t_0}^{t} \varphi\,(T, s, u(s), v(s))\, ds. \tag{1.3}$$

Заметим, что $z(T, t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)) = g(T)$.

Обозначив $\zeta = z\,(T, t, u_t\,(\cdot)\,, v_t\,(\cdot))$, введем в рассмотрение функцию

$$W\,(T, t, \zeta;\ p) = (\zeta, p) + \int\limits_t^T \min_{v\in V} \max_{u\in U} \left(\varphi\ (T, s, u, v)\,, p\right)\,ds, \quad t_0 \le t \le T, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Ее градиент по t, ζ имеет вид

$$\nabla_{t,\zeta} W\,(T, t, \zeta;\ p) = \begin{pmatrix} \nabla_t W\,(T, t, \zeta;\ p) \\ \nabla_\zeta W\,(T, t, \zeta;\ p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\min\limits_{v\in V} \max\limits_{u\in U}\ (p, \varphi\ (T, t, u, v)) \\ p \end{pmatrix}$$

и является непрерывной функцией переменных T, t, p в силу непрерывности функции $\varphi\,(t, s, u, v)$ по совокупности переменных.

Рассмотрим опорную функцию множества M^*:

$$C\,(M^*;\ p) = \begin{cases} C\,(M;\ p)\,, & p \in L, \\ +\infty\,, & p \notin L. \end{cases}$$

Подпространство L является барьерным конусом множества M^* [12]. Поскольку M — компакт из L, то функция $C\,(M;\ p)$ непрерывна на множестве L. Введем функцию

$$\lambda\,(T, t, \zeta) = \min_{\|p\|=1, p\in L} \left[W\,(T, t, \zeta;\ p) + C\,(M;\ -p)\right]. \tag{1.4}$$

Обозначим

$$T\,(t, u_t\,(\cdot)\,, v_t\,(\cdot)) = \min\left\{T \ge t\colon \lambda\,(T, t, z\,(T, t, u_t\,(\cdot)\,, v_t\,(\cdot))) = 0\right\}, \tag{1.5}$$

$$\Gamma\,(T, t, \zeta) = \left\{p\colon p \in L,\ \|p\| = 1,\ W\,(T, t, \zeta;\ p) + C\,(M;\ -p) = \lambda\,(T, t, \zeta)\right\}. \tag{1.6}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$W\,(T, t) = \bigcap_{v(\cdot)\in\Omega_V} \left(M - \int\limits_t^T \pi\ \varphi\ (T, s, U, v\,(s))\ ds\right). \tag{1.7}$$

В это выражение входит интеграл от многозначного отображения — интеграл Ауманна [12]. Отображение $W\,(T, t)$ выпуклозначно в силу его свойств. Определим время

$$T_0 = \min\left[\,T\colon T \ge t_0,\ \pi\ g\,(T) \in W\,(T, t_0)\right].$$

Будем считать, что минимум достигается.

Вычислим опорную функцию множества $W\,(T, t_0)$:

$$C\,(W\,(T, t_0)\,;\ p) = \mathrm{co}\left[C\,(M;\ p) + \int\limits_{t_0}^T \min_{v\in V} \max_{u\in U} \left(-p, \varphi\ (T, s, u, v)\right) ds\right],$$

где знак co обозначает овыпукление функции [12].

Очевидно, что $g\,(T) \in W\,(T, t_0)$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{p\in L, \|p\|=1} \left[C\,(W\,(T, t_0)\,;\ -p) + (p, g\,(T))\right] \ge 0.$$

Поскольку минимум функции совпадает с минимумом ее овыпукления, то

$$\min_{p\in L, \|p\|=1} \left[C\,(W\,(T, t_0)\,;\ -p) + (p, g\,(T))\right] = \lambda\,(T, t_0, g\,(T))\,.$$

Это означает, что

$$T_0 = T\left(t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right) = \min\left[T \geq t_0 \colon \lambda\left(T, t_0, g\left(T\right)\right) = 0\right].$$

Будем считать, что минимум достигается и конечен. Включение $\pi\, g\left(T_0\right) \in W\left(T_0, t_0\right)$ означает, что T_0 — минимальное время, за которое преследователь может при помощи выбора своего управления гарантированно вывести траекторию системы (1.1) на множество M^*, зная наперед управление убегающего. Покажем, что $T_0 > t_0$. Используя обозначения (1.4), (1.7), имеем

$$\lambda\left(t_0, t_0, z\left(t_0, t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right)\right) = \min_{\|p\|=1, p\in L}\left[W\left(t_0, t_0, g\left(t_0\right), p\right) + C\left(M;\ -p\right)\right].$$

Поскольку $g\left(t_0\right) \notin M$, то $\lambda\left(t_0, t_0, g\left(t_0\right)\right) < 0$, поэтому $T_0 \neq t_0$.

Лемма 1. *Если $T\left(t, u_t(\cdot),\ v_t(\cdot)\right) = t$, то $\pi z\left(t\right) \in M$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на интервале $[t_0, t)$ игроки применили управления $u_t(\cdot)$, $v_t(\cdot)$. Если $T\left(t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t$, то из выражения (1.4) следует, что

$$\lambda\left(t, t, z\left(t, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)\right) \geq 0,$$

а с учетом формулы (1.3)

$$z\left(t, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right) = g\left(t\right) + \int_{t_0}^{t} \varphi\left(t, s, u\left(s\right), v\left(s\right)\right)\, ds$$

получим $\{\pi z\left(t\right)\} \cap M \neq \varnothing$.

Лемма доказана.

2. Достаточные условия завершения игры

Обозначим $T_t = T\left(t,\ u_t\left(\,\cdot\,\right),\ v_t\ \left(\,\cdot\,\right)\right)$. Текущей позицией в игре будем считать пару $\left(t,\ z\ \left(T_t,\ t,\ u_t\ \left(\,\cdot\,\right),\ v_t\ \left(\,\cdot\,\right)\right)\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \geq t_0$, начальной позицией игры является пара

$$\left(t_0,\ z\left(T_0, t_0, u_{t_0}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right)\right) = \left(t_0, g\left(T_0\right)\right).$$

Далее будут установлены условия, при которых, пользуясь лишь информацией о текущей позиции игры, можно закончить игру не позже времени T_0.

Теорема 1. *Пусть в игре сближения* (1.1), (1.2) *выполнены следующие условия*:

1) *образы отображения $W\left(T, t\right)$ являются непустыми для $t_0 \leq t \leq T \leq T_0 < +\infty$;*

2) *для любой позиции $\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$, $t_0 \leq t^* \leq T_0$, такой, что $T_{t^*} \leq T_0$, существует окрестность $\Omega\ \left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$ точки $\left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$, такая, что для всех $(t, \zeta) \in \Omega\ \left(t^*, z\left(T_{t^*}, t^*, u_{t^*}(\cdot), v_{t^*}(\cdot)\right)\right)$ множество $\Gamma(T_{t^*}, t, \zeta)$ состоит из единственного элемента $p(T_{t^*}, t, \zeta)$.*

Тогда при произвольном допустимом управлении убегающего преследователь может закончить игру из начального состояния не позже, чем в момент T_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t^* = t_0$. При произвольном фиксованном $T \geq t_0$ функция $z\left(T, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right),\ t_0 \leq t \leq T$, непрерывна по t. Учитывая условие 2), можно утверждать, что существует момент времени $t_1,\ t_1 > t_0$, такой, что для всех возможных $z\left(T_0, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right),\ t \in [t_0, t_1)$, множество $\Gamma\left(T_0,\ t,\ z\left(T_0,\ t,\ u_t\left(\,\cdot\,\right),\ v_t\left(\,\cdot\,\right)\right)\right)$ (1.6) состоит из единственного элемента $p_0\ \left(T_0,\ t,\ z\ \left(T_0,\ t,\ u_t\ \left(\,\cdot\,\right),\ v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U^e\left(T_0, p_0\left(T_0, t, \zeta\right), t, v\left(t\right)\right) = \Big\{u\colon u \in U,\ \max_{u\in U}\left[p_0\left(T_0, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_0, t, u, v\left(t\right)\right)\right] \tag{2.1}$$

$$= \left(p_0\left(T_0, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_0, t, u, v\left(t\right)\right)\right)\Big\}, \quad t \in \left[t_0, t_1\right),$$

где

$$\zeta = z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right).$$

В силу допущений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1.1) многозначное отображение (2.1) является компактнозначным и полунеперерывным сверху по переменным (p, t, v) [14]. Поэтому, в силу теоремы об измеримом выборе можно утверждать, что отображение $U^e\left(T_0, p_0, t, v\right)$ имеет хотя бы один борелевский селектор $u^e\left(p_0, t, v\right)$ [13].

Учитывая непрерывную зависимость $z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)$ от t, можно утверждать, что $p_0\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$ непрерывно зависит от $t, t \in \left[t_0, t_1\right)$. Из измеримости управления $v\left(t\right), t \in \left[t_0, t_1\right)$, и непрерывности по t функции $p_0\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right)$ следует, что селектор $u^e\left(p_0, t, v\right)$ есть суперпозиционно измеримая функция, а значит,

$$u^e\left(t\right) = u^e\big(p_0\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_t\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right), v\left(t\right)\big), \quad t \in \left[t_0, t_1\right),$$

является измеримой функцией. Управление преследователя на полуинтервале $[t_0, t_1)$ будем выбирать в виде селектора $u^e\left(t\right),\ t \in \left[t_0, t_1\right)$.

Согласно свойствам функции минимума при каждом фиксированном $T,\ T \geq t_0$, функция $\lambda\left(T, t, \zeta\right),\ t_0 \leq t \leq T,\ \zeta \in \mathbb{R}^n$, как функция t, ζ является дифференцированной вдоль любого направления. К тому же, поскольку в некоторой окрестности $\Omega\left(t^*, \zeta^*\right)$ точки $\left(t^*, \zeta^*\right)$ множество $\Gamma\left(T, t, \zeta\right)$ состоит из единственного элемента $p\left(T, t, \zeta\right)$ для всех $\left(t, \zeta\right)$ из этой окрестности, то $p\left(T, t, \zeta\right)$ непрерывно зависит от $\left(t, \zeta\right)$ и

$$\partial_{t,\zeta}\lambda\left(T, t, \zeta\right) = \begin{pmatrix} -\min\limits_{v\in V}\max\limits_{u\in U}\left[p\left(T, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T, t, u, v\right)\right] \\ p\left(T, t, \zeta\right) \end{pmatrix} \quad \forall\left(t, \zeta\right) \in \Omega\left(t^*, \zeta^*\right).$$

Применив управление $u^e\left(t\right),\ t \in \left[t_0, t_1\right)$, и произвольное допустимое управление $v\left(t\right),\ t \in \left[t_0, t_1\right)$, получим позицию $\left(t_1, z\left(T_{t_1}, t_1, u_{t_1}\left(\cdot\right), v_{t_1}\left(\cdot\right)\right)\right)$, причем $T_0 \geq T_{t_1}$. Оценим производную

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right), \quad t \in \left[t_0, t_1\right).$$

Обозначим $z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = \zeta^e$. Учитывая выражение (1.3), получим

$$\frac{d}{dt}z\left(T, t, u_{\mathrm{t}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = \varphi\left(T, t, u\left(t\right), v\left(t\right)\right).$$

Далее, имеем

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_0, t, \zeta^e\right) = -\min_{v\in V}\max_{u\in U}\left[p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\left(T_0, t, u\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right]$$
$$+ \left(p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\ \left(T_0, t, u^e\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right)$$
$$= -\min_{v\in V}\left[p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\ \left(T_0, t, u^e\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right] + \left(p_0\left(T_0, t, \zeta^e\right), \varphi\ \left(T_0, t, u^e\left(t\right), v\left(t\right)\right)\right) \geq 0,$$

Заметим, что при дифференцировании функции $\lambda\left(T_0, t, \zeta^e\right)$ по t существенно использовалось условие 2) теоремы.

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right)\right) \geq 0, \quad t \in \left[t_0, t_1\right).$$

Иначе говоря, функция $\lambda\left(T_0, t, z\left(T_0, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right)\right)$ на интервале $[t_0, t_1)$ не убывает. Поскольку $\lambda\left(T_0, t_0, z\left(T_0, t_0, u_{t_0}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_0}(\cdot)\right)\right) \geq 0$, то $\lambda\left(T_0, t_1, z\left(T_0, t_1, u_{t_1}^{e}(\cdot), v_{t_1}(\cdot)\right)\right) \geq 0$. Последнее неравенство свидетельствует, что согласно (1.5)

$$T_{t_1} \leq T_0, \quad T\left(t_1, u_{t_1}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_1}(\cdot)\right) \leq T_0.$$

Не исключено, что на полуинтервале $[t_0, t_1)$ будет иметь место равенство $T\left(t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t$. Это будет означать, что в силу леммы 1 игра завершена. Если нет, то согласно условиям теоремы найдется момент времени $t_2,\ t_2 > t_1$, такой что на интервале $[t_1, t_2)$ можно повторить процедуру нахождения селектора многозначного отображения

$$U^e\left(T_{t_1}, p_0\left(T_{t_1}, t, \zeta\right), t, v(t)\right) = \Big\{u\colon u \in U,\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_{t_1}, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_{t_1}, t, u, v(t)\right)\right]$$

$$= \left(p_0\left(T_{t_1}, t, \zeta\right), \varphi\left(T_{t_1}, t, u, v(t)\right)\right)\Big\}, \quad t \in [t_1, t_2).$$

где $\zeta = z\left(T_{t_1}, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)$.

Возможно, на отрезке $[t_1, t_2)$ реализуется равенство $T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right) = t$. Тогда игра завершена. Если нет, то найдется момент времени $t_3, t_3 > t_2$, такой, что на полуинтервале $[t_2, t_3)$ можно повторить описанную выше процедуру построения управления. Продолжая этот процесс, получим последовательность полуинтервалов $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $[t_2, t_3)$, $\ldots$. На каждом из них управление преследователя выбирается в виде суперпозиционно измеримого селектора многозначного отображения

$$U^e\left(T_{t_k}, p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right), t, v(t)\right) \tag{2.2}$$
$$= \Big\{u\colon u \in U,\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u, v(t)\right)\right] = \left(p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right),\ \varphi\left(T_{t_k}, t, u, v(t)\right)\right)\Big\},$$

где $\zeta = z\left(T_{t_k}, t, u_t(\cdot), v_t(\cdot)\right)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_{k+1} \leq T_{t_k}$.

Поскольку многозначное отображение $U^e\left(T, p_0, t, v\right)$ является компактнозначным и при любом T полунепрерывным сверху по (p_0, t, v), то в нем существует борелевский селектор $u^e\left(p_0, t, v\right)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Учитывая, что $p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta\right)$ и $\zeta = \zeta(t)$ непрерывны по t, можно сделать вывод, что $p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta(t)\right)$ непрерывна по t, а значит, контруправление — селектор отображения (2.2); $u^e(t)$ — измеримая функция на каждом из полуинтервалов $[t_k, t_{k+1})$.

Согласно [15] построенная функция $u^e(t)$ измерима на каждом из полуинтервалов $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, измерима на их счетном объединении, т. е. при $t \geq t_0$.

Покажем, что

$$T\left(t_k, u_{\mathrm{t}_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right) \geq T\left(t_{k+1}, u_{\mathrm{t}_k+1}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_{k+1}}(\cdot)\right). \tag{2.3}$$

Для этого оценим производную

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_{t_k}, t, z\left(T_{t_k}, t, u_{t_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right)\right), \quad t \in [t_k, t_{k+1}).$$

Обозначим $z\left(T_{t_k}, t, u_{t_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right) = \zeta_k^e$. Аналогично предыдущему

$$\frac{d}{dt}\lambda\left(T_{t_k}, t, \zeta^e\right)$$
$$= -\min_{v \in V}\ \max_{u \in U}\left[p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u, v\right)\right] + \left(p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u^e(t), v\right)\right)$$
$$= -\min_{v \in V}\left[p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u^e(t), v\right)\right] + \left(p_0\left(T_{t_k}, t, \zeta_k^e\right), \varphi\left(T_{t_k}, t, u^e(t), v\right)\right) \geq 0.$$

Таким образом, $\dfrac{d}{dt}\lambda\left(T_{t_k},\ t,\ z\left(T_{t_k},\ t,\ u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot),\ v_t(\cdot)\right)\right) \geq 0$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, т. е. функция $\lambda\left(T_{t_k}, t, z\left(T_{t_k}, t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_t(\cdot)\right)\right)$ на полуинтервале $[t_k, t_{k+1})$ не убывает. Согласно определению $\lambda\left(T_{t_k}, t_k, z\left(T_{t_k}, t_k, u_{t_k}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_k}(\cdot)\right)\right) \geq 0$, поэтому

$$\lambda\left(T_{t_k}, t_{k+1}, z\left(T_{t_k}, t_{k+1}, u_{t_{k+1}}^{\mathrm{e}}(\cdot), v_{t_{k+1}}(\cdot)\right)\right) \geq 0.$$

Отсюда имеем неравенство (2.3), а с ним и тот факт, что

$$T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) \leq T_0, \quad t_0 \leq t \leq T_0.$$

С другой стороны, согласно (1.5) $T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) \geq t$, $t_0 \leq t \leq T_0$. Таким образом,

$$t \leq T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) \leq T_0, \quad t_0 \leq t \leq T_0. \tag{2.4}$$

Следовательно, равенство

$$T\left(t, u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_t\left(\cdot\right)\right) = t, \tag{2.5}$$

означающее в силу леммы 1 окончание игры, реализуется не позже времени T_0.

Продолжая построение управления указанным способом, получим последовательность полуинтервалов $[t_0, t_1), [t_1, t_2), [t_2, t_3), \ldots$. При этом $t_k < T_0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Если на одном из них реализовалось равенство (2.5), то процесс обрывается. В противном случае заметим, что последовательность $\{t_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является монотонно возрастающей и ограниченной сверху, поэтому существует предел $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = \bar{t}$. Очевидно, что $T\left(\bar{t}, u_{\bar{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_{\bar{t}}\left(\cdot\right)\right) \leq T_0$. Начиная с момента $\bar{t}$ и позиции $\left(\bar{t}, z\left(T_{\bar{t}}, \bar{t}, u_{\bar{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right), v_{\bar{t}}\left(\cdot\right)\right)\right)$, можно продолжить построение управления.

Очевидно, что для всех движений, которые осуществляются под влиянием управлений $u_{\mathrm{t}}^{\mathrm{e}}\left(\cdot\right)$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо двойное неравенство (2.4), согласно которому условие (2.5) будет иметь место не позже момента времени T_0.

Теорема доказана.

3. Интегро-дифференциальные игры сближения

Рассмотрим задачу сближения для конфликтно-управляемого процесса, эволюция которого описывается системой интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{z}\left(t\right) = A\left(t\right)\, z\left(t\right) + \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s\right)\, z\left(s\right)\, ds + B\left(t\right)\, \varphi_1\left(u\left(t\right), v\left(t\right)\right)$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} C\left(t, s\right)\, \varphi_2\left(u\left(s\right), v\left(s\right)\right) ds + f\left(t\right). \tag{3.1}$$

Здесь $z\left(t_0\right) = z_0, t \geq t_0 \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^n$; $A\left(t\right), B\left(t\right)$ — матричные функции размеров $n \times n_1$ и $n \times n_2$ соответственно, они непрерывны на полуоси $R_{t_0} = \{t : t \geq t_0\}$; $f\left(t\right)$ — непрерывная на R_{t_0} вектор-функция; $K\left(t, s\right), C\left(t, s\right)$ — матричные функции размеров $n \times n$, $n \times n_2$, являющиеся непрерывными в треугольнике Δ_{t_0}; $\varphi_1\left(u, v\right) : U \times V \to \mathbb{R}^{n_1}$, $\varphi_2\left(u, v\right) : U \times V \to \mathbb{R}^{n_2}$ — непрерывные по совокупности переменных вектор-функции; U и V — заданные компакты, $U \subset \mathbb{R}^{r_1}$, $V \subset \mathbb{R}^{r_2}$. Терминальное множество имеет вид (1.2).

Лемма 2. *Пусть функция $g\left(t\right)$ непрерывна на отрезке $[t_0, T)$. Тогда уравнение*

$$\dot{z}\left(t\right) = A\left(t\right)\, z\left(t\right) + \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s\right)\, z\left(s\right)\, ds + g\left(t\right) \tag{3.2}$$

имеет единственное, непрерывное на $[t_0, T)$ решение:

$$z\left(t\right) = \tilde{g}\left(t\right) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{R}\left(t, s\right)\, \tilde{g}\left(s\right) ds.$$

Здесь

$$\tilde{g}(t) = H(t, t_0)\ z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ g(\tau)\, d\tau, \tag{3.3}$$

$H(t, s)$ — *матрицант однородной системы*

$$\dot{z}(t) = A(t)\ z(t), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \in [t_0, T);$$

$\tilde{R}(t, s)$ — *резольвента матрицы* $\tilde{K}(t, s)$, *являющаяся непрерывной на множестве* $\Delta_{t_0}^{T} = \{(t, s) : t_0 \le s \le t \le T\}$ *матричной функцией, определяемой равномерно сходящимся на* $\Delta_{t_0}^{T}$ *рядом, где*

$$\tilde{R}(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_n(t, s), \tag{3.4}$$

$$\tilde{K}_1(t, s) = \tilde{K}(t, s), \quad \tilde{K}_n(t, s) = \int\limits_{s}^{t} \tilde{K}(t, \tau)\, \tilde{K}_{n-1}(\tau, s)\, d\tau, \tag{3.5}$$

$$n = 2, 3, \ldots, \quad \tilde{K}(t, s) = \int\limits_{s}^{t} H(t, \tau)\ K(\tau, s)\, d\tau.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность непрерывного решения уравнения (3.2) вытекает из предположений относительно параметров системы (3.1) [16]. Введем функцию

$$F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s)\ z(s)\ ds + g(t)$$

и рассмотрим задачу Коши для системы

$$\dot{z}(t) = A(t)\ z(t) + F(t), \quad z(t) = z_0, \quad t \in [t_0,\ T).$$

Она имеет единственное решение

$$z(t) = H(t, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ F(\tau)\, d\tau.$$

Подставим в эту формулу значение $F(t)$. Тогда

$$z(t) = H(t, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{\tau} H(t, \tau)\ K(\tau, s)\, z(s)\ ds\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ g(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда с учетом формулы Дирихле [17] имеем

$$z(t) = H(t, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{\tau} H(t, \tau)\ K(\tau, s)\, z(s)\ d\tau \right) z(s)\, ds + \int\limits_{t_0}^{t} H(t, \tau)\ g(\tau)\, d\tau.$$

Это выражение в силу (3.3), (3.5) является уравнением Вольтерра второго рода:

$$z(t) = \tilde{g}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{K}(t, s)\ z(s)\, ds, \quad t \in [t_0,\ T),$$

где $\tilde{K}(t,s)$, $\tilde{g}(t)$ — функции, непрерывные в областях своего определения. Это уравнение имеет единственное решение [17]: $z(t) = \tilde{g}(t) + \int_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{g}(s)\,ds,\ t \in [t_0,\ T)$, где $\tilde{g}(t)$ и $\tilde{R}(t,s)$ задаются выражениями (3.3)–(3.5) соответственно.

Лемма доказана.

Следствие. *На произвольном отрезке* $[t_0, T]$ *уравнение* (3.2) *имеет единственное непрерывное решение, которое может быть представлено в виде*

$$z(t) = g_0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} M(t,s)\ \varphi_1(u(s), v(s))\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} N(t,s)\ \varphi_2(u(s), v(s))\,ds. \tag{3.6}$$

Здесь

$$g_0(t) = f_0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ f_0(s)\,ds, \tag{3.7}$$

$$f_0(t) = H(t,t_0)\,z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t,s)\ f(s)\,ds, \quad t \in [t_0,\ T); \tag{3.8}$$

$$M(t,s) = \tilde{B}(t,s) + \int\limits_{s}^{t} \tilde{R}(t,\tau)\ \tilde{B}(\tau,s)\,d\tau, \tag{3.9}$$

$$\tilde{B}(t,s) = H(t,s)\,B(s); \tag{3.10}$$

$$N(t,s) = \tilde{C}(t,s) + \int\limits_{s}^{t} \tilde{R}(t,\tau)\ \tilde{C}(\tau,s)\,d\tau, \tag{3.11}$$

$$\tilde{C}(t,s) = \int\limits_{s}^{t} H(t,\tau)\ C(\tau,s)\,d\tau. \tag{3.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность вытекает из леммы 2. Положим

$$g(t) = B(t)\ \varphi_1(u(s), v(s)) + \int\limits_{t_0}^{t} C(t,s)\ \varphi_2(u(s), v(s))\ ds + f(t).$$

Тогда согласно лемме 2

$$z(t) = \tilde{g}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{g}(s)\,ds, \quad t \in [t_0,\ T),$$

где

$$\tilde{g}(t) = H(t,t_0)\,z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} H(t,s)\ f(s)\,ds + \int\limits_{t_0}^{t} H(t,s)\ B(s)\ \varphi_1(u(s), v(s))\,ds$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{s}^{t} H(t,\tau)\ C(\tau,s)\,d\tau \right) \varphi_2(u(s), v(s))\,ds.$$

Перепишем последнюю формулу, используя обозначения (3.8), (3.10), (3.12):

$$\tilde{g}(t) = f_0(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{B}(t,s)\ \varphi_1(u(s), v(s))\, ds + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{C}(t,s)\ \varphi_2(u(s), v(s))\, ds.$$

Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{g}(s)\, ds = \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{R}(t,s)\ f_0(s)\, ds + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\, \tilde{B}(s,\tau)\ \varphi_1(u(\tau), v(\tau))\, d\tau\ ds$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{C}(s,\tau)\ \varphi_2(u(\tau), v(\tau))\ d\tau\, ds.$$

Применим формулу Дирихле к двум последним членам суммы:

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{B}(s,\tau)\ \varphi_1(u(\tau), v(\tau))\, d\tau\ ds = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{s}^{t} \tilde{R}(t,\tau)\ \ \tilde{B}(\tau,s)\, d\tau \right) \varphi_1(u(s), v(s))\, ds,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} \tilde{R}(t,s)\ \tilde{C}(s,\tau)\ \varphi_2(u(\tau), v(\tau))\, d\tau\ ds = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\int\limits_{s}^{t} \tilde{R}(t,\tau)\ \ \tilde{C}(\tau,s)\, d\tau \right) \varphi_2(u(s), v(s))\, ds.$$

Учитывая (3.9), (3.11), получим формулу (3.6).
Следствие доказано.

Таким образом, решение уравнения (3.1) представлено в виде (1.1), где $g(t) = g_0(t)$ задается формулой (3.7), а

$$\varphi(t,s,u,v) = M(t,s)\ \varphi_1(u,v) + N(t,s)\ \varphi_2(u,v), \tag{3.13}$$
$$(t,s) \in \Delta(t_0), \quad u \in U, \quad v \in V.$$

Эти функции удовлетворяют всем условиям, наложенным на систему (1.1), и, следовательно, к анализу интегро-дифференциальной игры (3.1) применима теорема 1. Ее эффективность проиллюстрируем на примере конкретной интегро-дифференциальной игры, когда аналитические вычисления можно провести до конца.

4. Пример

Рассмотрим игровую задачу сближения для системы

$$\dot{z}(t) = \lambda z(t) + u(t) - v(t) + \int\limits_{0}^{t} (u(s) - v(s))\ ds; \quad t_0 = 0, \quad z(0) = z_0, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Терминальное множество — линейное подпространство M_0. В предыдущих обозначениях $r_1 = r_2 = n_1 = n_2 = n$, области управления

$$U = \{\, u : u \in \mathbb{R}^n,\ \|u\| \le a,\ a > 1\}; \quad V = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ \|v\| \le 1\}.$$

Кроме того, $A(t) = \lambda E$, $B(t) = E$, $C(t,s) = E$, где E — единичная матрица порядка n; $\varphi_1(u,v) = \varphi_2(u,v) = u - v$, $f(t)$ – нулевой n-мерный вектор-столбец, λ — число.

В данном примере $K(t,s)$ — нулевая матрица порядка n, в силу (3.5) таковой является и матрица $\tilde{K}(t,s)$, причем $H(t,s) = e^{\lambda(t-s)}E$. Исследуем два случая.

С л у ч а й I. $\lambda \neq 0$. Тогда из формул (3.7), (3.8) вытекает, что $f_0(t) = g_0(t) = e^{\lambda t} z_0$, а из (3.10), (3.12) следует

$$\tilde{B}(t,s) = e^{\lambda(t-s)} E, \quad \tilde{C}(t,s) = \left(\int\limits_s^t e^{\lambda(t-\tau)} d\tau \right) E = \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda(t-s)} - 1 \right) E.$$

Используя выражения (3.9), (3.11), находим

$$M(t,s) = e^{\lambda(t-s)} E, \quad N(t,s) = \frac{1}{\lambda} \left(e^{\lambda(t-s)} - 1 \right) E.$$

Из выражения (3.6) получим

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 + \int\limits_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u(s) - v(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Согласно формуле (3.13) имеем

$$\varphi(t,s,u,v) = \left(e^{\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u - v),$$

$$\zeta = z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot)) = e^{\lambda T} z_0 + \int\limits_0^t \left(e^{\lambda(t-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u(s) - v(s))\, ds, \quad t \geq 0.$$

Функция $W(T,t,\zeta,p)$ имеет вид

$$W(T,t,\zeta,p) = (\zeta,p) + \int\limits_t^T \left\{ \min_{v \in S} \max_{u \in aS} \left[p, \left(e^{\lambda(T-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) (u - v) \right] \right\} ds,$$

$$S = \{ v : \|v\| \leq 1 \}.$$

Поскольку $\left(e^{\lambda(T-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) \geq 0$, $s \in [0,T]$ при любом λ, $\lambda \neq 0$, то

$$W(T,t,\zeta,p) = (\zeta,p) + (a-1)\, \|p\| \int\limits_t^T \left(e^{\lambda(T-s)} \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \right) ds$$

$$= (\zeta,p) + (a-1)\, \|p\| \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right).$$

Далее по схеме получим

$$\lambda(T,t,z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot)))$$

$$= \min_{p \in L, \|p\|=1} \left[(z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot)), p) + (a-1) \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right) \right]$$

$$= -\|\pi\, z(T,t,u_t(\cdot), v_t(\cdot))\| + (a-1) \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right).$$

По определению $T_t(t, u_t(\cdot), v_t(\cdot))$ является наименьшим положительным корнем относительно T уравнения

$$\|\pi\, z(T,t,u(\cdot), v(\cdot))\| = (a-1) \frac{1}{\lambda} \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \left(e^{\lambda(T-t)} - 1 \right) - (T-t) \right), \quad T > t. \tag{4.2}$$

Положив в (4.2) $t = 0$, получим уравнение для нахождения времени окончания игры:

$$\left\|\pi e^{\lambda T} z_0\right\| = (a-1)\,\frac{1}{\lambda}\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\left(e^{\lambda T}-1\right)-T\right). \tag{4.3}$$

Заметим, что $\|\pi\, z_0\| \neq 0$. Перепишем уравнение (4.3) в виде

$$e^{\lambda T}\left((a-1)\,\frac{1}{\lambda}\Big(1+\frac{1}{\lambda}\Big)-\|\pi\, z_0\|\right) = (a-1)\,\frac{1}{\lambda}T + (a-1)\,\frac{1}{\lambda}\,\Big(1+\frac{1}{\lambda}\Big). \tag{4.4}$$

Решим относительно λ неравенство $(a-1)\,\dfrac{1}{\lambda}\Big(1+\dfrac{1}{\lambda}\Big)-\|\pi\, z_0\| \geq 0$. Последнее эквивалентно неравенству $\|\pi z_0\|\,\lambda^2-(a-1)\,\lambda-(a-1)\leq 0$. Его решение

$$\lambda\in\Big[\frac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|},0\Big)\bigcup\Big(0,\frac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big),$$

где $d=\sqrt{(a-1)^2+4\,\|\pi z_0\|\,(a-1)}$.

Уравнение (4.4) имеет вид

$$e^{\lambda T}\,(b-\|\pi z_0\|) = kT+b, \quad T>0, \tag{4.5}$$

где $b=(a-1)\,\frac{1}{\lambda}\Big(1+\dfrac{1}{\lambda}\Big),\ k=(a-1)\,\dfrac{1}{\lambda}$.

Введем обозначения $f_1\,(T)=e^{\lambda T}\,(b-\|\pi z_0\|)\,,\ f_2\,(T)=kT+b$ и запишем уравнение (4.5) в виде

$$f_1\,(T)=f_2\,(T)\,,\quad T>0. \tag{4.6}$$

Возможны следующие случаи.

1) $\lambda\in\Big(0,\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big)$. Тогда в уравнении (4.5) $b-\|\pi z_0\|>0,\quad k>0$, а следовательно, функции $f_1\,(T)\,,\ f_2\,(T)$ монотонно возрастают, $T>0$, $f_1\,(T)$ экпоненциально, $f_2\,(T)$ линейно, причем $f_1\,(0)<f_2\,(0)$, поскольку $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|\,,\ f_2\,(0)=b$. Поэтому существует единственный корень уравнения (4.6).

2) $\lambda=\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}$. Тогда в уравнении (4.5) $b-\|\pi z_0\|=0$, $k>0$, $f_1\,(T)\equiv 0,\ \ T\geq 0$, $f_2\,(0)=b$, а при $T>0$ $f_2\,(T)$ монотонно возрастает. В этом случае уравнение (4.5) не имеет корней.

3) $\lambda>\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}$. Тогда $b-\|\pi z_0\|<0$, $k>0$, $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|\,,\ f_2\,(0)=b$, $f_1\,(T)$ монотонно убывает, а $f_2\,(T)$ монотонно возрастает при $T>0$. Очевидно, уравнение (4.6) также не имеет корней.

4) $\lambda\in\Big[\dfrac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|},0\Big)$. Тогда $b-\|\pi z_0\|>0$, $k<0$, $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|<b$, $f_1\,(0)<f_2\,(0)=b$. При $T\geq 0$ $f_1\,(T)$ монотонно убывает, стремясь к нулю, а $f_2\,(T)$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности. Поэтому уравнение (4.6) имеет положительный корень.

5) $\lambda=\dfrac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|}$. Тогда $b-\|\pi z_0\|=0$, $k<0$, $f_1\,(T)\equiv 0$, а функция $f_2\,(T)$ монотонно убывает и $f_2\,(0)=b>0$. Уравнение (4.6) имеет единственный корень.

6) $\lambda\in\Big(-\infty,\dfrac{a-1-d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big)$. Тогда в (4.5) $b-\|\pi z_0\|<0$, $k<0$, функция $f_1\,(T)$ монотонно убывает, стремясь к нулю, а $f_2\,(T)$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности, $f_1\,(0)=b-\|\pi z_0\|<b=f_2\,(0)$. Существует единственный корень уравнения (4.6).

Анализ случаев 1)–6) показывает, что уравнение (4.3) имеет решение, если

$$\lambda\in(-\infty,0)\bigcup\Big(0,\frac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big).$$

Если $\|\pi z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\,\| \neq 0$, то минимум в выражении для $\lambda\,(T,t,z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot)))$ достигается на единственном элементе

$$p_0\,(T,t,z\,(T_0,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))) = -\frac{1}{\|\pi z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\,\|}\,\pi z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\,, \tag{4.7}$$

если же $\|\pi z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\,\| = 0$, то на произвольном векторе p, $p \in L$.

Пусть t — произвольный момент времени, когда игра еще не завершена, т. е. $z(t) \notin M_0$. Тогда по лемме 1 и определению (1.5) $T_t > t$. Имеет место неравенство

$$(a-1)\,\frac{1}{\lambda}\,\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\,\left(e^{\lambda(T_t-t)}-1\right)-(T_t-t)\right) > 0.$$

Так как T_t — корень уравнения (4.2), то $\|\,\pi\,z\,(T_t,\,t,\,u_t\,(\cdot)\,,\,v_t\,(\cdot))\,\| > 0$. Поскольку функция $z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))$ непрерывным образом зависит от t, то в некоторой окрестности текущего состояния выполнено условие 2) с вектором (4.7).

С л у ч а й II. $\lambda = 0$. Очевидно, $H(t,s) = E$. Из формул (3.7), (3.8) имеем $f_0(t) = z_0$, $g_0(t) = z_0$, из формул (3.10), (3.12) получим $\tilde{C}(t,s) = (t-s)\,E$, $\tilde{B}(t,s) = E$, поскольку $B(t) = E$, $C(t,s) = E$, а из формул (3.8), (3.9) получим $M(t,s) = E$, $N(t,s) = (t-s)\;E$. Тогда траектория системы (3.6) в случае (4.1) имеет вид

$$z\,(t) = z_0 + \int\limits_0^t (t-s+1)\;(u\,(s)-v\,(s))\;ds, \quad t \geq 0.$$

По формуле (3.13) $\varphi\;(t,s,u,v) = (t-s+1)\;(u-v)$,

$$z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot)) = z_0 + \int\limits_0^t (T-s+1)\;(u\,(s)-v\,(s))\;ds.$$

Функция $W(t,s,\zeta;p)$ имеет вид

$$W\,(T,t,\zeta,p) = (\zeta,p) + \int\limits_t^T \Big(\min_{v\in S}\max_{u\in aS}\,(p,(T-s+1))\;(u-v)\Big)\,ds.$$

Поскольку $T-s+1 > 0$ для $0 \leq t \leq s \leq T$, то

$$W\,(T,t,\zeta,p) = (\zeta,p) + (a-1)\;\|p\|\int\limits_t^T (T-s+1)\;ds = (\zeta,p) + (a-1)\;\|p\|\;(T-t)\;\Big(\frac{T-t}{2}+1\Big).$$

Тогда по формуле (4.2), учитывая, что $M = \{0\}$, получим

$$\lambda\Big(T,t,z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\Big)$$

$$= \min_{\|p\|=1,p\in L}\Big[\;(z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\,,p) + (a-1)\;(T-t)\;\Big(\frac{T-t}{2}+1\Big)\Big]$$

$$= -\,\|\pi\,z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\| + (a-1)\;(T-t)\;\Big(\frac{T-t}{2}+1\Big).$$

Согласно формуле (4.2) $T\,(t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))$ определяется как первый корень относительно переменной T следующего уравнения:

$$(a-1)\;(T-t)\;\Big(\frac{T-t}{2}+1\Big) = \|\pi\,z\,(T,t,u_t\,(\cdot)\,,v_t\,(\cdot))\,\|\,, \quad T \geq t.$$

Таким образом, время окончания игры является первым положительным корнем уравнения $(a-1)\,T\left(\dfrac{T}{2}+1\right)=\|\pi\,z_0\|\,,\; T>0.$

Отсюда

$$T_0=-1+\sqrt{1+\frac{2\,\|\pi\,z_0\|}{a-1}}.$$

Видим, что время является конечным, с какого бы состояния z_0, $\|\pi\,z_0\|<\infty$, ни начиналась игра. Объединив случаи I и II, приходим к выводу, что если $\lambda\in\Big(-\infty,\dfrac{a-1+d}{2\,\|\pi z_0\|}\Big)$, где $d=\sqrt{(a-1)^2+4\,\|\pi z_0\|\,(a-1)}$, то сближение может быть завершено в момент времени, меньший или равный T_0.

В работе получены достаточные условия приведения траектории квазилинейного конфликтно-управляемого процесса общего вида на цилиндрическое терминальное множество. Результаты иллюстрируются на примере интегро-дифференциальной игры сближения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Пшеничный Б.Н.** Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 65–78.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 456 с.
7. **Chentsov A.G., Morina S.J.** Extensions and relaxations. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
8. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988, Т. 2. 576 с.
9. **Пшеничный Б.Н.** Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184, № 2. С. 285–287.
10. **Hajek O.** Pursuit games. N Y: Acad. Press, 1975. T. 12. 266 p.
11. **Chikrii A.A.** Conflict-controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p. ISBN: 9401711364 .
12. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
13. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990. 461 p. ISBN: 0817634789 .
14. **Обен Ж.-П., Экланд И.** Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
15. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
16. **Михлин С.Т.** Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 304 с.
17. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 4, ч. 1. 236 с.

Поступила 4.10.2017

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Украины
зав. отделом
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН У, г. Киев
e-mail:chik@d165.icyb.kiev.ua

Чикрий Грета Цолаковна д-р физ.-мат. наук,
вед. научный сотрудник
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН У, г. Киев
e-mail:g.chikrii@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii.* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Pshenichnyi B.N. Linear differential games. *Automat. Remote Control*, 1968, no. 1, pp. 55–67.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya.* [Optimization of a guarantee in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions.* Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
6. Kurzhanskii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti.* [Control and Observation Under the Conditions of Uncertainty]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 456 p.
7. Chentsov A.G., Morina S.J. Extensions and relaxations. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
8. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. T.* 2. [Selected Scientific Works, Vol. 2]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 576 p.
9. Pshenichnyi B.N. The structure of differential games. *Dokl. AN USSR*, 1969, vol. 184, no. 2, pp. 285–287 (in Russian).
10. Hajek O. *Pursuit games.* N Y, Acad. Press, 1975, 266 p. ISBN: 0123172608 .
11. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston, London, Dordrecht, Springer Science and Busines Media, 2013, 424 p. ISBN: 9401711364 .
12. Rockafellar R. *Convex analysis.* Princeton, Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864 . Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz*, Moscow, Mir Publ., 1973, 470 p.
13. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston, Basel: Berlin, Birkhäuser, 1990, 461 p. ISBN: 0817634789 .
14. Aubin J.P., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis.* N Y, Wiley-Interscience, 1984, 518 p. ISBN: 0-471-05998-6 . Translated to Russian under the title *Prikladnoi nelineinyi analiz.* Moscow, Mir Publ., 1988, 512 p.
15. Natanson I.P. *Theory of functions of a real variable.* N Y, Frederick Ungar Publishing Co., 1955, 277 p. (Translation of chapters I to IX of the 1st edition). Original Russian text (3rd ed.) published in *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p.
16. Mikhlin S.G. *Linear Integral Equations.* Delhi, Hindustan Publ. Corp., 1960, 223 p. Original Russian text published in *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam.* Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 304 p.
17. Smirnov V.I. *A course of higher mathematics. Vol. IV*. [Integral equations and partial differential equations]. Oxford: N Y, Pergamon Press 1964, 811 p. ISBN: 9781483194714 . Original Russian text (6th ed.) published in *Kurs vysshei matematiki.* Moscow, Nauka Publ., 1974, vol. 4, Ch. 1, 236 p.

The paper was received by the Editorial Office on October 4, 2017.

Arkadii Alekseevich Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of National Academy of Sciences of Ukraine, Glushkov Cybernetics Institute of NASU, Kiev, 03187 Ukraine, e-mail:chik@d165.icyb.kiev.ua .

Greta Tsolakovna Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Senior Scientific Researcher, Glushkov Cybernetics Institute of NASU, Kiev, 03187 Ukraine, e-mail:g.chikrii@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 1 2018

УДК 517.977

ОБ УРАВНЕНИЯХ МЕТОДА ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ[1]

С. В. Чистяков

Неразрывно связанный с именем А.Г.Ченцова метод программных итераций возник в процессе исследования так называемых нерегулярных антагонистических дифференциальных игр. Первоначально рассматривалась лишь одна из двух возможных, двойственных итеративных процедур — максиминная процедура. В значительной мере это объясняется особым интересом, проявляемым к так называемой функции программного максимина, которая в играх преследования имеет привлекательную геометрическую интерпретацию. Вместе с тем не меньший интерес представляет и двойственная к ней минимаксная итеративная процедура. Одно из главных значений метода программных итераций состоит в том, что на его основе может быть построена теория дифференциальных игр в замкнутой и весьма компактной форме. Ранее это было проиллюстрировано для одной из версий метода, базирующейся на определенной модификации итерационных операторов. Ключевую роль в этой теории играет теорема о существовании и единственности решения уравнения, порождаемого парой упомянутых операторов. При этом максиминная итеративная процедура используется для описания ε-оптимальных, а в ряде случаев и оптимальных позиционных стратегий 1-го игрока, а минимаксная — для описания ε-оптимальных, а иногда и оптимальных позиционных стратегий 2-го игрока. В настоящей статье исследована структура множества решений обобщенного уравнения Айзекса — Беллмана, полученного с использованием исторически первых, а не модифицированных операторов метода программных итераций. При определенных предположениях доказана теорема о существовании и единственности его решения, удовлетворяющего естественному краевому условию. Тем самым показано, что исходная версия метода программных итераций, также может быть использована для построения теории дифференциальных игр в замкнутой форме. Однако при этом используются не позиционные, а так называемые рекурсивные стратегии, которые вместе с самим методом программных итераций играют существенную роль в исследовании бескоалиционных дифференциальных игр.

Ключевые слова: антагонистическая дифференциальная игра, терминальный выигрыш, метод программных итераций, обобщенное уравнение Айзекса — Беллмана.

S. V. Chistyakov. On equations of the program iteration method.

The program iteration method, which is inseparably associated with the name of A. G. Chentsov, first appeared in the study of the so-called zero-sum differential games. At early stages, only one of the two possible dual iterative procedures was considered — the maximin procedure. This can be explained by the special interest of the researchers in the so-called program maximin function, which is conveniently interpreted in geometric terms in games of pursuit. Nevertheless, the dual minimax iterative procedure is of no less interest. The program iteration method is mainly significant because it may be used as the basis for the development of a differential game theory in a closed compact form, which was shown earlier for a version of the method based on a certain modification of iterative operators. The key role in this theory belongs to the theorem that states the existence and uniqueness of a solution of the equation induced by a pair of such operators. In this case, the maximin iterative procedure is used to describe ε-optimal (in some cases, optimal) positional strategies of the first player, while the minimax procedure is used to describe ε-optimal (in some cases, optimal) positional strategies of the second player. This paper investigates the structure of the solution set of the generalized Isaacs–Bellman equation obtained with the use of historically first (not modified) operators of the program iteration method. A theorem that states the existence and uniqueness of the solution to this equation meeting a natural boundary condition is proved under certain assumptions. Thus, it is shown that the original version of the program iteration method can also be used in designing a closed-form differential game theory. However, here we use the so-called recursive strategies rather than positional ones. Such strategies, together with the program iteration method, play an essential role in the analysis of coalition-free differential games.

Keywords: zero-sum differential game, terminal payoff, program iteration method, generalized Isaacs–Bellman equation.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-288-296

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-51-53030).

1. Введение

Как и в первых работах [1; 2], посвященных методу программных итераций, рассмотрим следующую антагонистическую дифференциальную игру:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v) \tag{1.1}$$

$$(x \in \mathbb{R}^n, u \in P \in \operatorname{Comp} \mathbb{R}^k, v \in Q \in \operatorname{Comp} \mathbb{R}^l),$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

$$H(x(T)) \to \min_{(u)} \max_{(v)} / \max_{(v)} \min_{(u)} \tag{1.3}$$

$$(T \geq t_0).$$

В ней первый игрок распоряжается управлением v и стремится максимизировать терминальный выигрыш $H(x(T))$, а второй игрок распоряжается управлением u и стремится его минимизировать. Всюду далее, обычно не оговаривая особо, предполагается, что выполняются следующие условия:

(a) $f(\cdot) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times P \times Q)$;

(b) $f(\cdot)$ локально липшицева по x;

(c) $\exists \lambda > 0$ такое, что $\forall (t, x, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$

$$||f(t, x, u, v)|| \leq \lambda(1 + ||x||);$$

(d) $H(\cdot) \in C(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $A(t_0, x_0)$ — множество всех абсолютно непрерывных решений задачи Коши (1.1), (1.2) на отрезке $[t_0, T]$, которые соответствуют всевозможным измеримым по Лебегу программным управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяющим соответственно условиям: $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ при почти всех t. Указанные здесь программные управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, будем называть допустимыми. Множество всех допустимых программных управлений $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$ обозначим через $L(P)$ $(L(Q))$. Далее, пусть

$$D(t_0, x_0) = \big\{(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \ \big| \ x = x(t), \ x(\cdot) \in A(t_0, x_0)\big\}$$

— отрезок интегральной воронки системы (1.1), исходящей из позиции (t_0, x_0). Множество $D \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ будем называть пространством позиций системы (1.1), если из того, что $(t_*, x_*) \in D$ следует $D(t_*, x_*) \subset D$.

Пусть $D \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ — произвольное ограниченное пространство позиций и $(t_0, x_0) \in D$, а стало быть и $D(t_0, x_0) \subset D$. В принципе можно считать, что $D = D(t_0, x_0)$. Из условий (a)–(c) следует, что это пространство позиций ограничено. Легко убедиться также, что если $G \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество, то объединение всех множеств $D(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in G$, будет ограниченным пространством позиций. Наряду с игрой (1.1)–(1.3), обозначаемой символом $\Gamma(t_0, x_0)$, будем рассматривать семейство аналогичных игр

$$\Gamma(D) = \{\, \Gamma(t_*, x_*) \mid (t_*, x_*) \in D\} \,,$$

которые отличаются от нее только начальными данными, т.е. только начальной позицией игры. Семейство игр $\Gamma(D)$ далее также будем называть игрой.

2. Базовые итеративные процедуры и рекурсивные стратегии

Для заданного ограниченного пространства позиций $D \subset (-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ рассмотрим множество $M(D)$ всех, ограниченных на нем функций $w(\cdot) : D \to \mathbb{R}$. Пространство $M(D)$ наделим sup-нормой и отношением частичного порядка $\geq$, считая, в частности, что если $w_1(\cdot), w_2(\cdot) \in M(D)$ и $w_1(t,x) \geq w_2(t,x)$ $\forall (t,x) \in D$, то $w_1(\cdot) \geq w_2(\cdot)$ или, что то же самое, $w_2(\cdot) \leq w_1(\cdot)$. Пусть $UC(D)$ — подпространство пространства $M(D)$, составленное из всех равномерно непрерывных на множестве D функций $w(\cdot) \in M(D)$.

Рассмотрим операторы $\Phi_-, \Phi_+ : M(D) \to M(D)$, такие, что $\forall w(\cdot) \in M(D)$ и $\forall (t_*, x_*) \in D$

$$\Phi_- \circ w(t_*, x_*) = \sup_{t \in [t_*, T]} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))),$$

а

$$\Phi_+ \circ w(t_*, x_*) = \inf_{t \in [t_*, T]} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Здесь $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ — решение системы (1.1) с начальными данными t_*, x_*, которое соответствует допустимым управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$.

Нетрудно убедиться, что на пространстве $UC(D)$ в определении оператора Φ_- (соответственно Φ_+) операцию супремума (инфимума) по $t \in [t_*, T]$ можно заменить на операцию максимума (минимума) по тому же множеству. Введенные операторы, допускающие различные по форме определения, или их естественные аналоги, рассматривались в первоначальной версии метода программных итераций [1–4], которая зародилась при исследовании так называемых нерегулярных дифференциальных игр [5, § 22].

Известно, что 1) пространство $UC(D)$ инвариантно относительно каждого из операторов Φ_- и Φ_+ [6, теорема 3.1], 2) на пространстве $UC(D)$ эти операторы непрерывны в топологии равномерной сходимости [6, теорема 3.3], 3) операторы Φ_- и Φ_+ сохраняют порядок [6, лемма 3.2], т. е. если $w_1(\cdot), w_2(\cdot) \in M(D)$ и $w_1(\cdot) \geq w_2(\cdot)$, то

$$\Phi_- \circ w_1(\cdot) \geq \Phi_- \circ w_2(\cdot) \quad \text{и} \quad \Phi_+ \circ w_1(\cdot) \geq \Phi_+ \circ w_2(\cdot).$$

Рассмотрим теперь уравнения

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = w(\cdot), \tag{2.1}$$

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) = w(\cdot) \tag{2.2}$$

и их последовательные приближения

$$w_-^{(n)}(\cdot) = \Phi_- \circ w_-^{(n-1)}(\cdot), \tag{2.3}$$

$$w_+^{(n)}(\cdot) = \Phi_+ \circ w_+^{(n-1)}(\cdot), \tag{2.4}$$

считая, что начальными приближениями для них являются соответственно функция программного максимина

$$w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))), \quad (t_*, x_*) \in D, \tag{2.5}$$

и функция программного минимакса

$$w_+^{(0)}(t_*, x_*) = \inf_{u(\cdot) \in L(P)} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))), \quad (t_*, x_*) \in D. \tag{2.6}$$

Легко убедиться, что $w_-^{(0)}(\cdot) \in UC(D)$ и $w_+^{(0)}(\cdot) \in UC(D)$, а так как пространство $UC(D)$ инвариантно относительно каждого из операторов Φ_- и Φ_+, то $w_-^{(n)}(\cdot) \in UC(D)$ и $w_+^{(n)}(\cdot) \in UC(D)$ для любого $n = 0, 1, \ldots$.

Известно, что последовательные приближения (2.3), (2.5) образуют неубывающую последовательность

$$w_-^{(0)}(\cdot) \leq w_-^{(1)}(\cdot) \leq \dots \leq w_-^{(n)}(\cdot) \leq \dots ,$$

а последовательные приближения (2.4), (2.6) — невозрастающую

$$w_+^{(0)}(\cdot) \geq w_+^{(1)}(\cdot) \geq \dots \geq w_+^{(n)}(\cdot) \geq \dots ,$$

при этом на любом ограниченном пространстве позиций каждая из этих последовательностей сходится равномерно [6, лемма 3.4, теорема 3.5].

Последовательные приближения (2.3), (2.5) и (2.4), (2.6) для семейства игр $\Gamma(D)$ дают естественную основу введения описываемых ниже рекурсивных стратегий. В этом классе стратегий каждое из последовательных приближений (2.3), (2.5) может быть названо функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$, а каждое из последовательных приближений (2.4), (2.6), взятое со знаком минус, — функцией гарантированного выигрыша 2-го игрока в этой игре. Проиллюстрируем это на примере последовательных приближений (2.3), (2.5).

Очевидно, что если в игре $\Gamma(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in D$, при произвольно заданном $\varepsilon > 0$ 1-й игрок до конца игры будет использовать управление $v_\varepsilon(\cdot) \in L(Q)$, на котором с точностью до ε достигается супремум по $v(\cdot) \in L(Q)$ в правой части равенства (2.5), то какое бы управление $u(\cdot) \in L(Q)$ ни было выбрано 2-м игроком, выигрыш 1-го игрока разве лишь на ε будет меньше, чем $w_-^{(0)}(t_*, x_*)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и позиции $(t_*, x_*) \in D$ это и позволяет назвать функцию $w_-^{(0)}(\cdot)$ функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$.

Далее, если в игре $\Gamma(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in D$, имеет место равенство $w_-^{(1)}(t_*, x_*) = w_-^{(0)}(t_*, x_*)$, то, как следует из сказанного выше, 1-й игрок с любой степенью точности может гарантировать себе выигрыш, равный $w_-^{(1)}(t_*, x_*)$. То же имеет место и в случае, если $w_-^{(1)}(t_*, x_*) > w_-^{(0)}(t_*, x_*)$. Для доказательства этого заметим, что в данном случае, очевидно, максимум по $t \in [t_*, T]$ в правой части равенств

$$w_-^{(1)}(t_*, x_*) = \Phi_- \circ w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \max_{t \in [t_*, T]} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} w_-^{(0)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$$

не может достигаться в концах отрезка $[t_*, T]$. Пусть этот максимум достигается в точке $t_1 \in (t_*, T)$. Тогда если до момента времени $t_1 \in (t_*, T)$ 1-й игрок будет использовать управление $v_\varepsilon^{(1)}(\cdot) \in L(Q)$, с точностью до $\varepsilon/2$ доставляющее супремум по $v(\cdot) \in L(Q)$ в правой части равенств

$$w_-^{(1)}(t_*, x_*) = \Phi_- \circ w_-^{(0)}(t_*, x_*) = \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} w_-^{(0)}(t_1, x(t_1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))),$$

а затем с момента времени t_1 и до конца игры будет использовать управление $v_\varepsilon^{(0)}(\cdot) \in L(Q)$, с точностью до $\varepsilon/2$ гарантирующее выигрыш $w_-^{(0)}(t_1, x_1)$, где (t_1, x_1) — та позиция, в которую к моменту времени t_1 перейдет игра, то, очевидно, в игре $\Gamma(t_*, x_*)$ 1-й игрок с точностью до $\varepsilon > 0$ будет гарантировать себе выигрыш, равный $w_-^{(1)}(t_*, x_*)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и позиции $(t_*, x_*) \in D$ это позволяет назвать функцию $w_-^{(1)}(\cdot)$, так же как и функцию $w_-^{(0)}(\cdot)$, функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$.

Опираясь на равенство (2.4) и определение оператора Φ_-, индукцией по n легко устанавливаем теперь, что каждое из последовательных приближений $w_-^{(n)}(\cdot)$ также представляет собой функцию гарантированного выигрыша 1-го игрока в игре $\Gamma(D)$. При этом стратегия 1-го игрока, с точностью до произвольно заданного $\varepsilon > 0$ гарантирующая ему, в той или иной игре $\Gamma(t_*, x_*),\ (t_*, x_*) \in D$, выигрыш, равный $w_-^{(n)}(t_*, x_*)$, неформально представляет собой процедуру последовательного выбора не более n моментов времени $\tau_i (i = \overline{1, k},\ k \leq n)$ — моментов коррекции управления,

$$t_* < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = T,$$

и допустимых программных управлений $v^{(i)}(\cdot) \in L(Q)$, которые он использует между двумя последовательными моментами коррекции управления. При этом очередной момент коррекции τ_i и управление $v^{(i)}(\cdot) \in L(Q)$ выбираются им в предшествующий момент коррекции τ_{i-1} на основе информации о достигнутой в этот момент времени позиции $(\tau_{i-1}, x(\tau_{i-1}))$. Начальный $\tau_0 = t_*$ и конечный $\tau_k = T$ моменты времени для удобства описания здесь также условно причисляются к моментам коррекции управления. Описанную стратегию 1-го игрока будем называть рекурсивной его стратегией (с не более чем n коррекциями управления).

На более формальном определении рекурсивных стратегий здесь останавливаться не будем. В частном случае, когда игрок между двумя последовательными моментами коррекции выбирает постоянное допустимое программное управление, это определение приведено в [7, с. 38, 39].

3. Основное уравнение и теорема о существовании и единственности его решения

Как установлено [6, лемма 3.7], система двух уравнений (2.1) и (2.2) равносильна уравнению

$$\Phi_- \circ w(\cdot) = \Phi_+ \circ w(\cdot), \tag{3.1}$$

т. е. всякая общая неподвижная точка операторов Φ_- и Φ_+ является решением этого уравнения и, наоборот, всякое его решение является общей неподвижной точкой этих операторов. Далее это уравнение будем называть *основным* уравнением. В [6, лемма 3.6] отмечалось также, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ справедливы равенства

$$\Phi_- \circ w_+^{(n)}(\cdot) = w_+^{(n)}(\cdot), \tag{3.2}$$

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(\cdot) = w_-^{(n)}(\cdot). \tag{3.3}$$

Доказательство этих равенств в [5] было опущено. Поэтому приведем здесь краткий его набросок. Докажем, например, равенство (3.3).

Поскольку каждая рекурсивная стратегия 1-го игрока вместе с тем или иным допустимым программным управлением 2-го игрока порождает некоторое допустимое программное управление 1-го игрока, а каждая из функций $w_-^{(n)}(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, является функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в классе рекурсивных стратегий, то нетрудно убедиться, что каково бы ни было $n = 0, 1, 2, \ldots$ для любых $(t_*, x_*) \in D$, $\varepsilon > 0$, $t \in [t_*, T]$ и $u(\cdot) \in L(P)$ существует такое $v(\cdot) \in L(Q)$, что

$$w_-^{(n)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \geq w_-^{(n)}(t_*, x_*) - \varepsilon.$$

Тем более, для любых $(t_*, x_*) \in D$, $\varepsilon > 0$, $t \in [t_*, T]$ и $u(\cdot) \in L(P)$

$$\sup_{v(\cdot) \in L(Q)} w_-^{(n)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \geq w_-^{(n)}(t_*, x_*) - \varepsilon.$$

Поэтому для любых $(t_*, x_*) \in D$ и $\varepsilon > 0$

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(t_*, x_*) = \min_{t \in [t_*, T]} \inf_{u(\cdot) \in L(P)} \sup_{v(\cdot) \in L(Q)} w_-^{(n)}(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \geq w_-^{(n)}(t_*, x_*) - \varepsilon.$$

В силу произвольности $(t_*, x_*) \in D$ и $\varepsilon > 0$ это означает, что

$$\Phi_+ \circ w_-^{(n)}(\cdot) \geq w_-^{(n)}(\cdot).$$

Но вместе с тем из определения оператора Φ_+ следует, что $\forall w(\cdot) \in M(D)$

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) \leq w(\cdot).$$

Следовательно, имеет место равенство (3.3). Аналогично устанавливается и равенство (3.2).

Положим

$$w_-(\cdot) = \lim_{n\to\infty} w_-^{(n)}(\cdot), \quad w_+(\cdot) = \lim_{n\to\infty} w_+^{(n)}(\cdot).$$

Очевидно, каждая из функций $w_-^{(n)}(\cdot)$ и $w_+^{(n)}(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяет краевому условию

$$w(T, x) = H(x). \tag{3.4}$$

Поэтому ему удовлетворяют и обе функции $w_-(\cdot)$ и $w_+(\cdot)$.

Лемма. *Функции $w_-(\cdot)$ и $w_+(\cdot)$ являются решениями уравнения* (3.1)*, при этом*

$$w_-(\cdot) \le w_+(\cdot). \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку операторы Φ_- и Φ_+ непрерывны в топологии равномерной сходимости, а последовательность $\{w_-^{(n)}(\cdot)\}$ сходится равномерно на множестве D, то, переходя в равенствах (2.3) и (3.3) к пределу, получим соответственно

$$\Phi_- \circ w_-(\cdot) = w_-(\cdot) \ \text{ и } \ \Phi_+ \circ w_-(\cdot) = w_-(\cdot).$$

Следовательно, функция $w_-(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (3.1). Аналогично, используя равенства (2.4) и (3.2), устанавливаем, что функция $w_+(\cdot)$ также является решением уравнения (3.1).

Далее, в силу известного неравенства для минимаксов, из определения функций $w_-^{(0)}(\cdot)$ и $w_+^{(0)}(\cdot)$ следует, что

$$w_-^{(0)}(\cdot) \le w_+^{(0)}(\cdot).$$

Применяя n кратно к этому неравенству оператор Φ_- с учетом того, что он сохраняет порядок и имеет место равенство (3.2), получим

$$w_-^{(n)}(\cdot) \le w_+^{(0)}(\cdot).$$

В свою очередь, применяя n кратно оператор Φ_+ к последнему неравенству, в силу того что он также сохраняет порядок и имеет место равенство (3.3), получим

$$w_-^{(n)}(\cdot) \le w_+^{(n)}(\cdot).$$

Предельный переход в этом неравенстве приводит к неравенству (3.5). □

Теорема 1. *Для любого решения $w(\cdot) \in M(D)$ уравнения* (3.1) *с краевым условием* (3.4) *справедливы неравенства*

$$w_-(\cdot) \le w(\cdot) \le w_+(\cdot). \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, например, правое из неравенств (3.6). Так как функция $w(\cdot)$ по условию теоремы удовлетворяет краевому условию (3.4), то для любых $(t_*, x_*) \in D$, $u(\cdot) \in L(P)$ и $v(\cdot) \in L(Q)$ имеем

$$w(T, x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) = H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Следовательно, для любой позиции $(t_*, x_*) \in D$

$$\inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} w(T, x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) = \inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} H(x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))).$$

Тем более, для любой позиции $(t_*, x_*) \in D$

$$\inf_{t\in[t_*,T]} \inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \le \inf_{u(\cdot)\in L(P)} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} H(T, x(T, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))),$$

т. е.

$$\Phi_+ \circ w(\cdot) \le w_+^{(0)}(\cdot).$$

А так как по условию функция $w(\cdot)$ является решением уравнения (3.1), то, как отмечалось выше, она является неподвижной точкой оператора Φ_+ . Поэтому предыдущее неравенство можно записать в виде

$$w(\cdot) \le w_+^{(0)}(\cdot).$$

Применяя n-кратно к этому неравенству оператор Φ_+, с учетом того что он сохраняет порядок, а функция $w(\cdot)$ является его неподвижной точкой, будем иметь

$$w(\cdot) \le w_+^{(n)}(\cdot).$$

Переходя здесь к пределу, получим правое из неравенств (3.6).

Левое из неравенств (3.6) получается аналогично с использованием оператора Φ_-. ☐

С учетом леммы из этой теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *Функция $w_-(\cdot)$ является минимальным решением уравнения* (3.1), *удовлетворяющим краевому условию* (3.4), *а функция $w_+(\cdot)$ — максимальным таким его решением.*

Вместе с уравнением (3.1) рассмотрим еще и уравнение

$$\Phi_-^c \circ w(\cdot) = \Phi_+^c \circ w(\cdot), \tag{3.7}$$

где операторы $\Phi_-^c, \Phi_+^c : M(D) \to M(D)$ определены так, что $\forall\, w(\cdot) \in M$ и $\forall\, (t_*, x_*) \in D$

$$\Phi_-^c \circ w(t_*, x_*) = \sup_{t\in[t_*,T]} \sup_{v\in Q} \inf_{u(\cdot)\in L(P)} w(t, x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v)),$$

$$\Phi_+^c \circ w(t_*, x_*) = \inf_{t\in[t_*,T]} \inf_{u\in P} \sup_{v(\cdot)\in L(Q)} w(t, x(t, t_*, x_*, u, v(\cdot))).$$

Уравнение (3.7) будем называть *модифицированным основным* уравнением.

Как установлено в [8, теорема 1], условие

(e) $\max\limits_{v\in Q} \min\limits_{u\in P} \langle l, f(t, x, u, v)\rangle = \min\limits_{u\in P} \max\limits_{v\in Q} \langle l, f(t, x, u, v)\rangle \;\; \forall l \in \mathbb{R}^n, \; \forall (t, x) \in (-\infty, T] \in \mathbb{R}^n$

вместе с условиями (a)–(d) гарантирует существование и единственность решения уравнения (3.7), удовлетворяющего краевому условию (3.4).

Теорема 2. *Если наряду с условиями* (a)–(d) *выполняется и условие* (e), *то уравнение* (3.1) *с краевым условием* (3.4) *имеет единственное решение $w^*(\cdot)$, которое совпадает с единственным решением уравнения* (3.7) *с тем же краевым условием, и, кроме того,*

$$w^*(\cdot) = w_-(\cdot) = w_+(\cdot). \tag{3.8}$$

Доказательство. По лемме множество решений уравнения (3.1) с краевым условием (3.4) непусто. Вместе с тем из определения операторов Φ_-, Φ_+, Φ_-^c и Φ_-^c следует, что для любой функции $w(\cdot) \in M(D)$ справедливы неравенства

$$\Phi_- \circ w(\cdot) \ge \Phi_-^c \circ w(\cdot) \ge w(\cdot) \ge \Phi_+^c \circ w(\cdot) \ge \Phi_+ \circ w(\cdot).$$

Следовательно, всякое решение уравнения (3.1) является и решением уравнения (3.7). Но так как уравнение (3.7) с краевым условием (3.4) имеет единственное решение $w^*(\cdot)$, то оно является также и единственным решением уравнения (3.1) с тем же краевым условием. Поэтому в силу теоремы 1 имеют место равенства (3.8). ☐

Из установленной в ходе доказательства этой теоремы равносильности уравнений (3.7) и (3.1) и из того, что на пространстве непрерывно дифференцируемых функций уравнение (3.7) равносильно уравнению Айзекса — Беллмана [9, теорема 2], следует, что на том же пространстве ему равносильно также и уравнение (3.1). Поэтому как модифицированное основное уравнение (3.7), так и само основное уравнение (3.1) могут быть названы обобщенными уравнениями Айзекса — Беллмана.

4. Заключение

В силу определения функций $w_-(\cdot)$ и $w_+(\cdot)$ равенства (3.8) в теореме 2 означают, что единственное решение уравнения (3.1), удовлетворяющее условию (3.7), с одной стороны, является равномерным пределом последовательных приближений (2.3), (2.5), а с другой — равномерным пределом последовательных приближений (2.4), (2.6). Но так как каждое из последовательных приближений (2.3), (2.5) является функцией гарантированного выигрыша 1-го игрока в классе рекурсивных стратегий, а каждое из последовательных приближений (2.4), (2.6), взятое со знаком минус, в свою очередь, является функцией гарантированного выигрыша 2-го игрока в таком же классе стратегий, то из теоремы 2 следует, что каждая игра $\Gamma(t_*, x_*), (t_*, x_*) \in D$, имеет решение в классе рекурсивных стратегий. Это наряду с другими результатами, полученными в рамках метода программных итераций, доказывает, что базовая версия метода программных итераций, связанная с операторами Φ_- и Φ_+, как и модифицированная его версия, связанная с операторами Φ_-^c и Φ_+^c, может быть положена в основу построения теории дифференциальных игр в замкнутой форме. При этом в одних случаях [2; 10; 11] более удобным является использование операторов Φ_- и Φ_+ , уравнения (10) и соответствующих итеративных процедур, а в других [9; 12; 13] — операторов Φ_-^c и Φ_+^c, уравнения (3.7), и соответствующих этим операторам итеративных процедур.

Помимо того, что условие (d) вместе с условиями (a)–(c) и (e) гарантирует существование и единственность решения уравнения (3.7) с краевым условием (3.4), значение условия (d) в теореме 2 и лемме обусловлено также и тем, что гарантируя, вместе с условиями (a)–(c), равномерную непрерывность функций $w_-^{(0)}(\cdot)$ и $w_+^{(0)}(\cdot)$ на любом ограниченном пространстве позиций, оно гарантирует на нем существование решения уравнения (3.1) с тем же краевым условием. Последнее утверждение вытекает из доказательства теоремы 3.5 в [6], а также из теоремы 3.3 и леммы 3.6 в той же статье [6].

Отметим наконец, что метод программных итераций и рекурсивные стратегии успешно использовались ранее как инструмент исследования бескоалиционных дифференциальных игр [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ченцов А.Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
2. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, вып. 3. С. 394–420.
3. **Чистяков С.В., Петросян Л.О.** Об одном подходе к решению игр преследования // Вестн. ЛГУ. 1977. Вып. 1. С. 77–82.
4. **Чистяков С.В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 5. С. 825–832.
5. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
6. **Chistyakov S., Nikitin F.** On value operators in differential games // Appl. Math. Sci. 2015. Vol. 9, no. 59. P. 2941–2952.
7. **Чистяков С.В.** Операторы значения антагонистических дифференциальных игр. СПб: Изд-во СПбГУ, 1999. 62 с.
8. **Никитин Ф.Ф., Чистяков С.В.** Теорема существования и единственности решения обобщенного уравнения Айзекса — Беллмана // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 743–752.
9. **Чистяков С.В.** О функциональных уравнениях в играх сближения в заданный момент времени // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 5. С. 874–877.
10. **Chentsov A.G., Subbotin A.I.** An iterative procedure for constructing minimax and viscosity solutions to the Hamilton–Jacobi equations and its generalization // Proc. Steklov Inst. Math. 1999. Vol. 224. P. 286–309.
11. **Chistyakov S.V., Nikitin F. F.** On regular differential games of persuit with fixed duration // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. 2014. Iss. 4. P. 17–24.

12. **Чистяков С.В.** Программные итерации и универсальные ε-оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 6. С. 1333–1335.
13. **Nikitin F.F.** Viscosity solutions and programmed iteration method for Isaacs-Bellman equation // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. 2014. Iss. 2. P. 84–92.
14. **Чистяков С.В.** О бескоалиционных дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 5. С. 1052–1055.

Сергей Владимирович Чистяков
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург
e-mail: svch50@mail.ru

Поступила 10.10.2017

REFERENCES

1. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence. *Soviet Math. Dokl.*, 1976 (1975), vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
2. Chentsov A.G. On a game problem of converging at a given instant of time. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 3, pp. 353–376. doi: 10.1070/SM1976v028n03ABEH001657 .
3. Chistyakov S.V., Petrosyan L.A. On an approach to the solution of pursuit games. *Vestnik Leningrad. Univ. Math.*, 1977, no. 1, pp. 77–82 (in Russian).
4. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 41, no. 5, pp. 845–852. doi: 10.1016/0021-8928(77)90167-8 .
5. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii.* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 420 p.
6. Chistyakov S., Nikitin F. On value operators in differential games. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 59, pp. 2941–2952.
7. Chistyakov S.V. *Operatory znachenija antagonisticheskih differencial'nyh igr.* [Value operators in antagonistic differential games]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University Publ., 1999, 62 p.
8. Nikitin F.F., Chistyakov S.V. Existence and uniqueness theorem for a generalized Isaacs–Bellman equation. *Diff. Eq.*, 2007, vol. 43, no. 6, pp. 757–766. doi: 10.1134/S0012266107060031 .
9. Chistyakov S.V. On functional equations in games of encounter at a prescribed instant. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 704–706. doi: 10.1016/0021-8928(82)90023-5 .
10. Chentsov A.G., Subbotin A.I. An iterative procedure for constructing minimax and viscosity solutions to the Hamilton–Jacobi equations and its generalization. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1999, vol. 224, pp. 286–309.
11. Chistyakov S.V., Nikitin F.F. On regular differential games of persuit with fixed duration. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2014, no. 4, pp. 17–24 (in Russian).
12. Chistyakov S.V. Programmed iterations and universal ε-optimal stratagies in a positional differential game. *Soviet Math. Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 1, pp. 354–357.
13. Nikitin F.F. Viscosity solutions and programmed iteration method for Isaacs–Bellman equation. *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2014, no. 2, pp. 84–92 (in Russian).
14. Chistyakov S.V. On coalition-free differential games. *Soviet Math. Dokl.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 166–169.

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2017.

Sergey Vladimirovich Chistyakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: svch50@mail.ru .

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале "Труды Института математики и механики УрО РАН" публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

"Труды Института математики и механики УрО РАН" являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы в виде математических утверждений и доказаны (нетривиальность и новизна). В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В "Труды Института математики и механики" не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла "Трудов Института математики и механики").

Для решения вопроса о целесообразности публикации в "Трудах Института математики и механики" редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

С 2000 г. статьи журнала (по решению редколлегии) выходят на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК "НАУКА/INTERPERIODICA" под названием "Selected articles from Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN" как приложение к "Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics".

Автор представляет в редакцию электронный вариант статьи (tex-формат и pdf-формат).

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо в отсканированном виде от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Информация со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Правила оформления рукописей:

• В статье должны быть сформулированы и доказаны НОВЫЕ результаты в виде теорем, утверждений, предложений.

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в "Труды Института математики и механики УРО РАН" статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация (не менее 10-15 предложений) должна быть информативной (не содержать общих слов), оригинальной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований), структурированной. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул. После аннотации должен быть указан код MSC от 1 до 5 значений (Mathematics Subject Classification).

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Включение рисунков в статью теоретического характера носит исключительный характер и должно быть обосновано. Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

• Файлы со статьей — tex-источник и pdf-вариант статьи — высылаются на адрес e-mail: trudy@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 **№ 1** **2018**

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редакторы Н. Н. Моргунова, Н. М. Юркова
TEX-редактор Г. Ф. Корнилова

Отв. за выпуск А. Е. Эльберт

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 3.03.18. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 35, 1. Уч.-изд. л. 31,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226