ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 512.7

ГРУППЫ УЗЛОВ И НИЛЬПОТЕНТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ[1]

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

В данной работе изучаются группы классических зацеплений, зацеплений со спайками, виртуальных зацеплений. Во-первых, для классических кос доказывается, что коса и ее автоморфный образ слабо эквивалентны. Отсюда следует положительный ответ о совпадении группы, построенной по косе и ее автоморфному образу. Далее в работе изучается проблема аппроксимируемости групп виртуальных узлов нильпотентными группами. Известно, что в группе классического узла коммутант совпадает с третьим членом нижнего центрального рядом, а потому факторизация по членам нижнего центрального ряда ничего не дает. В работе доказано, что для виртуальных узлов ситуация другая. Построен нетривиальный гомоморфизм группы виртуального трилистника на нильпотентную группу ступени нильпотентности четыре. Используя конструкцию Магнуса представления свободной группы степенными рядами, строится гомоморфизм группы виртуального трилистника в некоторую конечномерную алгебру. Это приводит к нетривиальному линейному представлению группы виртуального трилистника унитреугольными матрицами порядка восемь.

Ключевые слова: виртуальные узлы, зацепления, группы.

V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim. Knot groups and nilpotent approximability.

We study groups of classical links, welded links, and virtual links. For classical braids, it is proved that a braid and its automorphic image are weakly equivalent. This implies the affirmative answer to the question of the coincidence of the groups constructed from a braid and from its automorphic image. We also study the problem of approximability of groups of virtual knots by nilpotent groups. It is known that in a classical knot group the commutator subgroup coincides with the third term of the lower central series, and hence the factorization by the terms of the lower central series yields nothing. We prove that the situation is different for virtual knots. A nontrivial homomorphism of the virtual trefoil group to a nilpotent group of class 4 is constructed. We use the Magnus representation of a free group by power series to construct a homomorphism of the virtual trefoil group to a finite-dimensional algebra. This produces the nontrivial linear representation of the virtual trefoil group by unitriangular matrices of order 8.

Keywords: virtual knots, links, groups.

MSC: 57M25, 57M27, 20F14

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-43-51

Введение

В данной работе изучаются группы классических зацеплений, зацеплений со спайками, виртуальных зацеплений. При этом нас интересуют следующие вопросы.

В о п р о с 1. Пусть β — классическая коса (коса со спайками, виртуальная коса) из группы кос B_n (соответственно из WB_n, VB_n), $\widehat{\beta}$ — зацепление, полученное замыканием косы β, $G(\widehat{\beta})$ — группа зацепления, $\varphi \in \mathrm{Aut}(B_n)$ (соответственно $\varphi \in \mathrm{Aut}(WB_n)$, $\mathrm{Aut}(VB_n)$). Верно ли, что зацепление $\widehat{\varphi(\beta)}$ слабо эквивалентно зацеплению $\widehat{\beta}$? В частности, верно ли, что группа $G(\widehat{\varphi(\beta)})$ изоморфна группе $G(\widehat{\beta})$?

Для ответа на этот вопрос надо знать описание групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}(B_n)$ (соответственно $\mathrm{Aut}(WB_n)$, $\mathrm{Aut}(VB_n)$). Полное описание группы $\mathrm{Aut}(B_n)$ хорошо известно [1], в то же время описание групп $\mathrm{Aut}(WB_n)$ и $\mathrm{Aut}(VB_n)$ далеко от завершения.

Напомним определение группы, аппроксимируемой нильпотентными группами. Пусть G — группа и

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots, \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G], \quad i = 1, 2, \dots,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00414).

ее нижний центральный ряд. Обозначим пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$ всех членов нижнего центрального ряда через $\gamma_\omega(G)$. Говорят, что G *аппроксимируется нильпотентными группами*, если $\gamma_\omega(G) = 1$.

В следующем вопросе под зацеплением мы будем понимать либо классическое зацепление, либо зацепление со спайками, либо виртуальное зацепление. Под группой классического зацепления понимается фундаментальная группа дополнения зацепления в трехмерной сфере, для зацепления со спайками — группа, определенная Кауффманом [2], для виртуального зацепления — одна из групп, определенная в работах [3–6].

Вопрос 2. Пусть L — зацепление, $G(L)$ — его группа. Будет ли $G(L)$ аппроксимироваться нильпотентными группами?

Интерес к этому вопросу продиктован следующими соображениями. Если L — классическое зацепление в трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, то можно найти задание его группы $G(L) = \pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus L)$ в виде системы порождающих и соотношений. Но, имея систему порождающих и соотношений некоторой группы, мы не всегда можем получить полную информацию о ее строении. В этом случае бывает полезным изучить гомоморфизмы нашей группы на группы из некоторого класса. Например, на конечные группы, на разрешимые группы, нильпотентные группы и т. д. Если таких гомоморфизмов оказывается много (группа аппроксимируется данным классом), то мы имеем некоторую информацию об исходной группе. Например, если группа аппроксимируется конечными группами, то в ней разрешима проблема равенства.

Проблема аппроксимируемости нильпотентными группами сводится к изучению фактор-групп по членам нижнего центрального ряда, которые являются инвариантами группы и не зависят от ее задания. Для групп классических узлов существуют только гомоморфизмы на бесконечную циклическую группу, а потому группы узлов не аппроксимируются нильпотентными группами. Более того, коммутант группы узла совпадает с третьим членом ее нижнего центрального ряда.

В настоящей работе мы покажем, что для группы узла со спайками ситуация аналогичная, т. е. для всякой группы узла со спайками ее коммутант совпадает с третьим членом нижнего центрального ряда. Более интересна ситуация для виртуальных узлов. Мы докажем, что для виртуального трилистника T_v и его группы $G(T_v)$, найденной в работах [6; 7], первые пять членов ее нижнего центрального ряда различны. Следовательно, существуют эпиморфизмы группы $G(T_v)$ на нильпотентные группы ступеней 1, 2, 3, 4, 5. Таким образом, у нас возникает новая возможность построения инвариантов виртуальных узлов.

Отметим, что для групп классических зацеплений изучение членов нижнего центрального ряда приводит к построению инвариантов Милнора. Проблеме аппроксимируемости групп классических зацеплений посвящена работа [8].

Одним из первых результатов о нильпотентной аппроксимируемости был результат Магнуса о нильпотентной аппроксимируемости свободной группы (см., например, [9]). Для доказательства этого факта Магнус построил вложение свободной группы в кольцо формальных степенных рядов от некоммутирующих переменных. Используя представление Магнуса, мы построим гомоморфизм группы $G(T_v)$ в некоторую конечномерную алгебру и, используя это представление, найдем линейное представление группы $G(T_v)$. Для классического трилистника представление Магнуса дает гомоморфизм на бесконечную циклическую группу.

Вопрос 3. Какие инварианты виртуальных узлов можно построить, используя представление Магнуса?

Мы благодарим участников семинара “Эварист Галуа” за плодотворные дискуссии.

1. Группы кос и группы зацеплений

Все узлы и зацепления, рассматриваемые в настоящей работе, являются ручными. Два классических ориентированных (неориентированных) зацепления из $\mathbb{S}^3$ называются *эквива-*

лентными (соответственно *слабо эквивалентными*), если существует гомеоморфизм $\mathbb{S}^3$ на себя, сохраняющий ориентацию (соответственно произвольный гомеоморфизм), переводящий одно зацепление в другое. Эквивалентность виртуальных зацеплений (зацеплений со спайками) определяется как эквивалентность соответствующих диаграмм относительно обобщенных преобразований Рейдемейстера (более подробно см. [2]).

Группа виртуальных кос VB_n порождается группой классических кос $B_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ и группой подстановок $S_n = \langle \rho_1, \ldots, \rho_{n-1} \rangle$. Порождающие $\sigma_i, i = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют соотношениям группы B_n

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \end{aligned}$$

а порождающие $\rho_i, i = 1, \ldots, n-1$, удовлетворяют соотношениям группы подстановок S_n

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 && \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \\ \rho_i \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} && \text{при } i = 1, 2 \ldots, n-2. \end{aligned}$$

Остальные определяющие соотношения группы VB_n являются смешанными и имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_i \rho_j &= \rho_j \sigma_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \\ \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \end{aligned}$$

Группа кос со спайками WB_n порождается элементами σ_i, α_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Группа, порожденная элементами σ_i, является классической группой кос B_n. Группа, порожденная элементами α_i, является симметрической группой S_n, и при этом выполняются смешанные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_i \sigma_j &= \sigma_j \alpha_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \\ \alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \alpha_i &= \alpha_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-2. \end{aligned}$$

Сравнивая соотношения групп VB_n и WB_n, мы видим, что WB_n получается из VB_n введением дополнительных соотношений. Следовательно, существует эпиморфизм

$$\varphi_{VW} : VB_n \to WB_n,$$

переводящий σ_i в σ_i и ρ_i в α_i при всех i.

Как хорошо известно [10], группа кос со спайками WB_n изоморфна группе сопрягающих автоморфизмов C_n, которая является подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_n)$ свободной группы F_n. В свою очередь WB_n есть полупрямое произведение $WB_n = WP_n \leftthreetimes S_n$ группы WP_n крашеных кос со спайками и симметрической группы S_n. Группа WP_n изоморфна группе Cb_n сопрягающих базис автоморфизмов, которую изучал Маккул [11]. Как мы знаем, группа автоморфизмов классической группы кос почти совпадает с группой внутренних автоморфизмов.

Существует гомоморфизм группы B_n на группу подстановок S_n, переводящий порождающий σ_i в транспозицию $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашеных кос* и обозначается через P_n. Группа P_n порождается элементами a_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, которые выражаются через порождающие группы B_n следующим образом:

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2,$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Группа P_n разлагается в полупрямое произведение свободных групп

$$P_n = U_n \leftthreetimes (U_{n-1} \leftthreetimes (\ldots \leftthreetimes (U_3 \leftthreetimes U_2))\ldots),$$

где $U_i \simeq F_{i-1}$ — свободная группа ранга $n-1$, $i = 2, 3, \ldots, n$ (см. [12; 13]).

В работе [6] было определено представление $\varphi_M : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n,2n+1})$ группы виртуальных кос, которое обобщает все известные ранее представления. Здесь $F_{n,2n+1} = F_n * \mathbb{Z}^{2n+1}$ — свободное произведение свободной группы ранга n и свободной абелевой группы. Представление φ_M не является продолжением представления Артина $B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_n)$, которое, как хорошо известно, является точным. Представление φ_M равносильно более простому представлению $\widetilde{\varphi}_M$, которое является продолжением представления Артина. Чтобы его определить, положим $F_{n,n} = F_n * \mathbb{Z}^n$, где $F_n = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n\rangle$ — свободная группа ранга n, а $\mathbb{Z}^n = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ — свободная абелева группа ранга n. Представление $\widetilde{\varphi}_M : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(F_{n,n})$, заданное действием на порождающих

$$\widetilde{\varphi}_M(\sigma_i) : \begin{cases} y_i \longmapsto y_i y_{i+1} y_i^{-1}, \\ y_{i+1} \longmapsto y_i, \end{cases} \qquad \widetilde{\varphi}_M(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \longmapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \longmapsto v_i, \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}_M(\rho_i) : \begin{cases} y_i \longmapsto y_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ y_{i+1} \longmapsto y_i^{v_{i+1}}, \end{cases} \qquad \widetilde{\varphi}_M(\rho_i) : \begin{cases} v_i \longmapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \longmapsto v_i, \end{cases}$$

равносильно представлению φ_M, т. е. $\varphi_M(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\varphi}_M(\beta) = 1$, где $\beta \in VB_n$ [6].

В работе [6] описан общий подход, позволяющий по представлению группы виртуальных кос автоморфизмами некоторой группы строить инварианты зацеплений. Напомним его. Предположим, что у нас есть представление $\varphi : VB_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ группы виртуальных кос в группу автоморфизмов некоторой группы $H = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m \parallel \mathcal{R}\rangle$, где $\mathcal{R}$ — соотношения группы H. Сопоставим виртуальной косе $\beta \in VB_n$ группу

$$G_\varphi(\beta) = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m \parallel \mathcal{R}, h_i = \varphi(\beta)(h_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m\rangle.$$

Группа $G_\varphi(\beta)$ будет инвариантом виртуального зацепления $\widehat{\beta}$, если для любой другой косы β' такой, что зацепления $\widehat{\beta}$ и $\widehat{\beta}'$ эквивалентны, группа $G_\varphi(\beta)$ изоморфна $G_\varphi(\beta')$. В работе [6] доказано, что группа $G_{\widetilde{M}}(\beta)$, где $\beta \in VB_n$, является инвариантом зацепления $\widehat{\beta}$.

2. Автоморфизмы группы кос и эквивалентность узлов

Настоящий раздел посвящен первому вопросу, сформулированному во введении. Для классических кос полный ответ дает следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\beta \in B_n$ и $\varphi \in \mathrm{Aut}(B_n)$. Тогда $\varphi(\beta)$ слабо эквивалентно β и, в частности, $G(\widehat{\varphi(\beta)}) \cong G(\widehat{\beta})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как хорошо известно [1], произвольный автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(B_n)$ представим в виде произведения

$$\varphi = \theta^\varepsilon \iota_g, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

где ι_g для $g \in B_n$ — внутренний автоморфизм группы B_n, действующий следующим образом:

$$\iota_g(\beta) = g^{-1}\beta g, \quad \beta \in B_n.$$

Автоморфизм θ задается на порождающих $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ группы B_n формулой

$$\theta(\sigma_k) = \sigma_k^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Пусть $\varepsilon = 0$. Тогда $\varphi(\beta) = g^{-1}\beta g$, и по теореме Маркова [12] зацепление $\widehat{\varphi(\beta)}$ эквивалентно (а потому и слабо эквивалентно) зацеплению $\widehat{\beta}$.

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $\varphi(\beta) = \theta(g^{-1}\beta g) = \theta(g)^{-1}\theta(\beta)\theta(g) = \theta(g)^{-1}\beta^{-1}\theta(g)$. Опять по теореме Маркова $\widehat{\varphi(\beta)}$ эквивалентно $\widehat{\beta^{-1}}$. По определению слабой эквивалентности $\widehat{\varphi(\beta)}$ слабо эквивалентно $\widehat{\beta^{-1}}$. Осталось заметить, что если два зацепления слабо эквивалентны, то их группы изоморфны.

Предложение доказано.

Отметим, что заменить в этом утверждении слабую эквивалентность эквивалентностью нельзя. Действительно, замыкание косы σ^3 является правым трилистником, а замыкание косы σ^{-3} — левым трилистником. Левый и правый трилистники не эквивалентны (но слабо эквивалентны). Тем не менее автоморфизм θ группы $\mathrm{Aut}(B_2)$ переводит σ^3 в σ^{-3}.

В "Коуровской тетради" [14] сформулирован следующий вопрос 10.24: Верно ли, что зацепления, получающиеся замыканием крашеных кос, эквивалентны тогда и только тогда, когда исходные косы сопряжены в группе кос?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Соответствующие примеры можно найти в книге [12].

Для ответа на первый вопрос в случае кос со спайками и виртуальных кос необходимо описать группы $\mathrm{Aut}(WB_n)$ и $\mathrm{Aut}(VB_n)$. Мы предполагаем, что справедливы следующие гипотезы.

Г и п о т е з ы. 1) Группа $\mathrm{Aut}(WB_n)$, $n \geq 3$, совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы WB_n.

2) Группа $\mathrm{Aut}(VB_n)$, $n \geq 2$, порождается группой внутренних автоморфизмов группы VB_n и автоморфизмом θ, который переводит порождающие σ_i в обратные и оставляет порождающие ρ_i на месте.

3. Нильпотентная аппроксимируемость групп узлов

Настоящий раздел посвящен второму вопросу из введения. Вначале рассмотрим группы узлов со спайками. Каждому узлу со спайками Кауффман [2] сопоставил группу, которую назвал его фундаментальной группой. Для этих групп справедлива

Теорема 1. *Если K — узел со спайками, то его фундаментальная группа $G(K)$ обладает свойством*

$$\gamma_2\,(G(K)) = \gamma_3\,(G(K)).$$

В частности, группа $G(K)$ не аппроксимируется нильпотентными группами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем вначале, что если K — узел со спайками, то $G(K)^{ab} \cong \mathbb{Z}$. Действительно, группа WB_n может быть отождествлена с подгруппой сопрягающих базис автоморфизмов свободной группы $F_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Пусть $K = \widehat{\beta}$, где $\beta \in WB_n$. Известно, что β представляется в виде $\beta = ps$, где $p \in WP_n$, $s \in S_n$. Так как K — узел, то s — цикл длины n. Используя, если надо, сопряжение, можно считать, что $s = (12\ldots n)$. Тогда β действует на свободной группе следующим образом:

$$\beta : x_1 \mapsto f_1^{-1}x_2f_1,\ x_2 \mapsto f_2^{-1}x_3f_2, \ldots, x_n \mapsto f_n^{-1}x_1f_n,$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F_n$. Следовательно, $G(K)^{ab} \cong \mathbb{Z}$.

Для завершения доказательства покажем, что если G — произвольная группа, для которой $G^{ab} \cong \mathbb{Z}$, то $\gamma_2\,(G) = \gamma_3\,(G)$. Группа $\gamma_2\,(G)/\gamma_3\,(G)$ лежит в центре группы $G/\gamma_3\,(G)$. Так как $(G/\gamma_3\,(G))/(G/\gamma_2\,(G)) \cong \mathbb{Z}$, то $\gamma_2\,(G) \subseteq \gamma_3\,(G)$.

Теорема доказана.

Так как всякий классический узел можно рассматривать как узел со спайками, то как следствие получаем хорошо известное утверждение для классических узлов.

Следствие 1. *Если K — классический узел, то $\gamma_2(G(K)) = \gamma_3(G(K))$, где $G(K) = \pi_1(S^3 \backslash K)$.*

Для виртуального трилистника T_v группа $G_{\widetilde{M}}(T_v)$ была найдена в [6] (см. также [7]). Для простоты будем обозначать ее через H. Тогда

$$H = \langle y, v \mid\mid y\big(y^{v^{-1}} y^v\big) = \big(y^{v^{-1}} y^v\big)y\rangle.$$

Преобразуем определяющее соотношение для H:

$$1 = y^{-1} y^{-v} y^{-v^{-1}} y y^{v^{-1}} y^v = [y, vyv^{-2}yv] = [y, y^{-2}vyv^{-2}yv] = [y, [yv^{-1}, v^{-1}y]^v]$$
$$= [y, [yv^{-1}, v^{-1}y][yv^{-1}, v^{-1}y, v]] = [y, [yv^{-1}, v^{-1}y, v]] \cdot [y, [yv^{-1}, v^{-1}y]]^{[yv^{-1}, v^{-1}y, v]}.$$

По модулю $\gamma_4(H)$ имеем $[y, [yv^{-1}, v^{-1}y] \equiv [y, [y, v^{-1}][v^{-1}, y]] = 1$.

Поэтому по модулю $\gamma_5(H)$ соотношение принимает вид $1 \equiv [y, [yv^{-1}, v^{-1}y]]$. Далее по модулю $\gamma_5(H)$ имеем

$$[y, [yv^{-1}, v^{-1}y] = [y, [yv^{-1}, y][yv^{-1}, v^{-1}]^y] = [y, [v^{-1}, y][yv^{-1}, v^{-1}][yv^{-1}, v^{-1}, y]]$$
$$\equiv [y, [v^{-1}, y][yv^{-1}, v^{-1}][y, v^{-1}, y]] = [y, [v^{-1}, y][y, v^{-1}][y, v^{-1}, v^{-1}][y, v^{-1}, y]]$$
$$= [y, [y, v^{-1}, v^{-1}][y, v^{-1}, y]] \equiv [y, [y, v, v]] \cdot [y, [y, v, y]]^{-1}.$$

Итак, по модулю $\gamma_5(H)$ определяющее соотношение группы H имеет вид

$$[y, v, v, y] \equiv [y, v, y, y].$$

Так как базисные коммутаторы веса 4 свободной группы $\langle y, v\rangle$ имеют вид $[y, v, v, v]$, $[y, v, v, y]$, $[y, v, y, y]$, то

$$\gamma_4(H)/\gamma_5(H) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Пусть $H = G_{\widetilde{M}}(T_v)$ — группа виртуального трилистника. Тогда фактор-группа $H/\gamma_5(H)$ является нильпотентной ступени 4.*

Так как факторы-группы по членам нижнего центрального ряда являются инвариантами группы, то мы получаем новую возможность для определения инвариантов виртуальных узлов.

В о п р о с 4. Какие виртуальные узлы, полученные замыканием 2-нитиевых виртуальных кос, можно различить, используя факторизацию по членам нижнего центрального ряда?

Заметим, что группу H виртуального трилистника можно представить как расширение свободного произведения с помощью бесконечной циклической группы.

Действительно, положим $y_i = y^{v^i}$, $i \in \mathbb{Z}$. Тогда имеет место разложение $H = H_1 \leftthreetimes \mathbb{Z}$, где $H_1 = \langle y_i \,|\, i \in \mathbb{Z}\rangle$ и $\mathbb{Z} = \langle v\rangle$.

В группе H_1 имеют место соотношения $[y_i, y_{i-1}y_{i+1}] = 1$, $i \in \mathbb{Z}$, и элемент v действует сдвигом $y_i^v = y_{i+1}$. Положим $A_i = \langle y_i, y_{i-1}, y_{i+1} \,\|\, [y_i, y_{i-1}y_{i+1}] = 1\rangle$, $B_i = \langle y_i, y_{i+1}\rangle$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Тогда группа H_1 является бесконечным свободным произведением с объединением

$$H_1 = \ldots \mathop{*}_{B_{-2}} A_{-1} \mathop{*}_{B_{-1}} A_0 \mathop{*}_{B_0} A_1 \mathop{*}_{B_1} \ldots .$$

Легко видеть, что подгруппы A_i изоморфны произведению $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}$ и по теореме Магнуса [9] подгруппы B_i являются свободными двупорожденными группами.

Г и п о т е з а. Группа виртуального узла, построенного по представлению $\varphi_{\widetilde{M}}$, является расширением либо 1) конечно порожденной свободной группы, либо 2) бесконечного свободного произведения с объединением вида

$$\ldots \mathop{*}_{B_{-2}} A_{-1} \mathop{*}_{B_{-1}} A_0 \mathop{*}_{B_0} A_1 \mathop{*}_{B_1} \ldots,$$

с помощью бесконечной циклической группы, где B_i для $i \in \mathbb{Z}$ — свободные подгруппы конечного ранга.

4. Представление Магнуса группы $G_{\widetilde{M}}(T_v)$

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}[[Y,V]]$ формальных степенных рядов с целыми коэффициентами от двух переменных Y, V, удовлетворяющих соотношениям $Y^2 = V^2 = 0$. Хорошо известно [11], что свободная группа $\langle y, v\rangle$ имеет точное представление

$$y \mapsto 1+Y, \quad v \mapsto 1+V$$

в группу обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}[[Y,V]]$. При этом $y^{-1} \mapsto 1-Y, \quad v^{-1} \mapsto 1-V$.

Найдем дополнительные соотношения на переменные Y и V, возникающие при продолжении отображения

$$\Phi : y \mapsto 1+Y, \quad v \mapsto 1+V$$

на группу $G_{\widetilde{M}}(T_v)$. Соотношение $yy^{v^{-1}}y^v = y^{v^{-1}}y^v y$ после подстановки $y = 1+Y$, $v = 1+V$ примет вид

$$(1+Y)(1+V)(1+Y)(1-2V)(1+Y)(1+V) = (1+V)(1+Y)(1-2V)(1+Y)(1+V)(1+Y).$$

Раскрывая скобки и пользуясь соотношениями $Y^2 = V^2 = 0$, получаем

$$(YV)^2(1+YV) = (VY)^2(1+VY).$$

Домножив это равенство на VY, имеем $(VY)^3(1+VY) = 0$. Так как $1+VY$ — обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}[[Y,V]]$, то $(VY)^3 = 0$. Аналогично, $(YV)^3 = 0$ и соотношение принимает вид $(YV)^2 = (VY)^2$. Итак, доказано

Предложение 2. *Группа $H = G_{\widetilde{M}}(T_v)$ допускает представление Φ в группу обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}[[Y,V]]$ формальных степенных рядов с целыми коэффициентами от двух переменных Y, V, которые удовлетворяют соотношениям $Y^2 = V^2 = (YV)^2 - (VY)^2 = 0$.*

Так как $\mathbb{Z}$-алгебра A, порожденная элементами Y, V и заданная соотношениями

$$Y^2 = V^2 = (YV)^2 - (VY)^2 = 0,$$

конечномерна, то представление Φ позволяет построить представление группы H целочисленными конечномерными матрицами.

Возьмем в качестве базиса алгебры A элементы 1, Y, V, YV, VY, YVY, VYV, $(YV)^2$. Группа $H = \langle y, v\rangle$ действует на алгебре A умножением справа, т. е. $w \mapsto wg$, $w \in A$, $g \in H$. При этом действии элементам y, v соответствуют матрицы

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрицы y_0, v_0 порождают нильпотентную группу. Нами доказано

Предложение 3. *Существует линейное представление $H \longrightarrow UT_8(\mathbb{Z})$.*

Аналогичные построения для группы классического трилистника $G(T) = \langle y, v \mid\mid yvy = vyv\rangle$ приводят к $\mathbb{Z}$-алгебре с порождающими Y, V, которые удовлетворяют соотношениям $Y = V$, $Y^2 = 0$. При этом матричное представление $Y \mapsto y_0$, $V \mapsto v_0$, где

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является эпиморфизмом группы $G(T)$ на бесконечную циклическую группу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dyer J., Grossman E.** The automorphism groups of the braid groups // Amer. J. Math. 1981. Vol. 103, no. 6. P. 1151–1169. doi: 10.2307/2374228 .
2. **Kauffman L.H.** Virtual knot theory // Eur. J. Comb. 1999. Vol. 20, no. 7. P. 663–690. doi: 10.1006/eujc.1999.0314 .
3. **Bardakov V.G.** Virtual and welded links and their invariants [e-resource] // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2005. Vol. 2. P. 196–199.
4. **Manturov V.O.** On the recognition of virtual braids // Zap. Nauchn. Sem. S. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. POMI. (Geom. i Topol. 8). 2003. Vol. 299. P. 267–286 (in Russian).
5. **Carter J.S., Silver D., Williams S.** Invariants of links in thickened surfaces // Algebr. Geom. Topol. 2014. Vol. 14, no. 3. P. 1377–1394. doi: 10.2140/agt.2014.14.1377 .
6. **Bardakov V.G., Mikhalchishina Yu.A., Neshchadim M.V.** Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // J. Knot Theory Ramifications. 2017. Vol. 26, no. 1. 1750003. 17 p. doi: 10.1142/S0218216517500031 .
7. **Bardakov V.G., Bellingeri P.** Groups of virtual and welded links // J. Knot Theory Ramifications. 2014. Vol. 23, no. 3. 1450014. 23 p. doi: 10.1142/S021821651450014X .
8. **Бардаков В.Г., Михайлов Р.В.** Об аппроксимационных свойствах групп зацеплений // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 485–495. doi: 10.1007/s11202-007-0042-0 .
9. **Lyndon R.C., Schupp P.E.** Combinatorial group theory. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 339 p. ISBN: 3-540-07642-5 .
10. **Fenn R., Rimanyi R., Rourke C.** The braid-permutation group // Topology. 1997. Vol. 36, no. 1. P. 123–135. doi: 10.1016/0040-9383(95)00072-0 .
11. **McCool J.** On basis–conjugating automorphisms of free groups // Can. J. Math. 1986. Vol. 38, no. 6. P. 1525–1529. doi: 10.4153/CJM-1986-073-3 .
12. **Birman J.S.** Braids, links, and mapping class groups. Princeton: Princeton University Press, 1974. 228 p. (Annals of Math. Studies; vol. 82). ISBN: 0691081492 .
13. **Марков А.А.** Основы алгебраической теории кос // Тр. МИАН. 1945. Т. 16. С. 1–54.
14. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики СО РАН. 14-е изд. Новосибирск, 1999. 134 с.

Поступила 15.06.2017

Бардаков Валерий Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
ведущий науч. сотрудник
Институт математики СО РАН им. С.Л.Соболева,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирский государственный аграрный университет,
г. Новосибирск
e-mail: bardakov@math.nsc.ru

Нещадим Михаил Владимирович
д-р физ.-мат. наук, доцент
ведущий науч. сотрудник
Институт математики СО РАН им. С.Л.Соболева,
Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск
e-mail: neshch@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Dyer J., Grossman E. The automorphism groups of the braid groups. *Amer. J. Math.*, 1981, vol. 103, no. 6, pp. 1151–1169. doi: 10.2307/2374228 .
2. Kauffman L.H. Virtual knot theory. *Eur. J. Comb.*, 1999, vol. 20, no. 7, pp. 663–690. doi: 10.1006/eujc.1999.0314 .

3. Bardakov V.G. Virtual and welded links and their invariants. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2005, vol. 2, pp. 196–199 (electronic).
4. Manturov V.O. On the recognition of virtual braids. *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2005, vol. 131, no. 1, pp. 5409–5419. doi: 10.1007/s10958-005-0415-5 .
5. Carter J.S., Silver D., Williams S. Invariants of links in thickened surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 1377–1394. doi: 10.2140/agt.2014.14.1377 .
6. Bardakov V.G., Mikhalchishina Yu.A., Neshchadim M.V. Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups. *J. Knot Theory Ramifications*, 2017, vol. 26, no. 1, 1750003, 17 p. doi: 10.1142/S0218216517500031 .
7. Bardakov V.G., Bellingeri P. Groups of virtual and welded links. *J. Knot Theory Ramifications*, 2014, vol. 23, no. 3, 1450014, 23 p. doi: 10.1142/S021821651450014X .
8. Bardakov V.G., Mikhailov R.V. On the residual properties of link groups. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 3, pp. 387–394. doi: 10.1007/s11202-007-0042-0 .
9. Lyndon R.C., Schupp P.E. *Combinatorial group theory.* Berlin, Springer-Verlag, 1977, 339 p. ISBN: 3-540-07642-5 .
10. Fenn R., Rimanyi R., Rourke C. The braid-permutation group. *Topology*, 1997, vol. 36, no. 1, pp. 123–135. doi: 10.1016/0040-9383(95)00072-0 .
11. McCool J. On basis–conjugating automorphisms of free groups. *Can. J. Math.*, 1986, vol. 38, no. 6, pp. 1525–1529. doi: 10.4153/CJM-1986-073-3 .
12. Birman J.S. *Braids, links, and mapping class groups.* Princeton, Princeton University Press, 1974, Ser. Annals of Math. Studies, vol. 82. 228 p. ISBN: 0691081492 .
13. Markov A.A. Fundamentals of algebraic theory of braid groups. *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 1945, vol. 16, pp. 1–54 (in Russian).
14. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory.* Ed. by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 14th augm. ed. Russian Academy of Sciences, Siberian Division, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 1999, 134 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 21, 2017.

Valeriy Georgievich Bardakov, Dr. Phys.-Math. Sci., docent, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russian; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russian; Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, 630039 Russian, email: bardakov@math.nsc.ru .

Mikhail Vladimirovich Neshchadim, Dr. Phys.-Math. Sci., docent, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russian; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russian, email:neshch@math.nsc.ru .