ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 514.8, 515.12

# О ДЕНДРИТАХ, ЗАДАННЫХ СИСТЕМАМИ ПОЛИЭДРОВ, И ИХ ТОЧКАХ ВЕТВЛЕНИЯ[1]

**А. В. Тетенов, М. Самуэль, Д. А. Ваулин**

В статье изучаются методы задания и геометрические свойства самоподобных дендритов в пространстве $\mathbb{R}^d$ — вопросы, еще не разработанные в теории самоподобных фракталов. Для этого строится и исследуется класс $P$-полиэдральных дендритов в $\mathbb{R}^d$. Такие дендриты $K$ мы определяем как аттракторы систем $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих подобий в $\mathbb{R}^d$, переводящих заданный полиэдр $P \subset \mathbb{R}^d$ в полиэдры $P_i \subset P$, попарные пересечения которых либо пусты, либо одноточечны и являются общими вершинами этих полиэдров, а гиперграф попарных пересечений полиэдров $P_i$ ацикличен. Мы доказываем, что для счетного плотного в $K$ множества $G_{\mathcal{S}}(V_P)$ локальная структура окрестности всякой его точки $x$ задается некоторым набором непересекающихся телесных углов с вершиной в $x$, конгруэнтных углам при вершинах $P$. Из этого утверждения мы получаем, что все точки ветвления $P$-полиэдрального дендрита $K$ имеют конечный порядок, верхняя оценка которого зависит только от полиэдра $P$. Нами доказано, что геометрия и размерность множества $CP(K)$ разбивающих точек дендрита $K$ определяются его главным деревом — минимальным подконтинуумом в $K$, содержащим все вершины $P$, а потому размерность $\dim_H CP(K)$ множества $CP(K)$ меньше размерности $\dim_H(K)$ дендрита $K$ и совпадает с последней тогда и только тогда, когда $K$ — жорданова дуга.

Ключевые слова: самоподобное множество, дендрит, полиэдральная система, главное дерево, точка ветвления, хаусдорфова размерность.

**A. V. Tetenov, M. Šamuel, D. A. Vaulin. On dendrites generated by polyhedral systems and their ramification points.**

The methods of construction of self-similar dendrites in $\mathbb{R}^d$ and their geometric properties are considered. These issues have not yet been studied in the theory of self-similar fractals. We construct and analyze a class of $P$-polyhedral dendrites $K$ in $\mathbb{R}^d$, which are defined as attractors of systems $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ of contracting similarities in $\mathbb{R}^d$ sending a given polyhedron $P$ to polyhedra $P_i \subset P$ whose pairwise intersections either are empty or are singletons containing common vertices of the polyhedra, while the hypergraph of pairwise intersections of the polyhedra $P_i$ is acyclic. We prove that there is a countable dense subset $G_{\mathcal{S}}(V_P) \subset K$ such that for any of its points $x$ the local structure of a neighbourhood of $x$ in $K$ is defined by some disjoint family of solid angles with vertex $x$ congruent to the angles at the vertices of $P$. Therefore, the ramification points of a $P$-polyhedral dendrite $K$ have finite order whose upper bound depends only on the polyhedron $P$. We prove that the geometry and dimension of the set $CP(K)$ of the cutting points of $K$ are defined by its main tree, which is a minimal continuum in $K$ containing all vertices of $P$. That is why the dimension $\dim_H CP(K)$ of the set $CP(K)$ is less than the dimension $\dim_H(K)$ of $K$ and $\dim_H CP(K) = \dim_H(K)$ if and only if $K$ is a Jordan arc.

Keywords: self-similar set, dendrite, polyhedral system, main tree, ramification point, Hausdorff dimension.

**MSC:** 28A80

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-281-291

## Введение

Хотя топологические свойства дендритов изучаются специалистами по общей топологии более 75 лет (см. [5]), исследования геометрических свойств самоподобных дендритов сводятся лишь к нескольким эпизодам.

В 1985 г. М. Хата [7], исследуя вопросы связности самоподобных множеств, показал, что если дендрит является аттрактором системы слабо сжимающих отображений, то множество его концов бесконечно. В 1990 г. К. Бандт в своем неопубликованном препринте [2] доказал, что

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00414).

жордановы дуги, связывающие пары точек посткритически конечного самоподобного дендрита, являются самоподобными множествами, а их возможные размерности пробегают конечное множество значений. При построении гармонического анализа на фракталах Д. Кигами [8; 9] получил ряд результатов, связанных с метриками на дендритах, Д. Кройдон [6] построил семейство случайных деревьев и получил для него оценки ядра оператора теплопроводности.

В разных работах [3; 4; 13] приводятся различные примеры самоподобных дендритов, но до сих пор не были исследованы явные алгоритмы их построения, не были указаны справедливые для них топологические ограничения, не ставился вопрос о свойствах морфизмов самоподобных дендритов и их классификации.

В нашей работе для решения этих вопросов мы исходим из простейших и самых очевидных конструкций. Мы рассматриваем системы $\mathcal{S}$ сжимающих подобий пространства $\mathbb{R}^d$, определяемые некоторым полиэдром $P \subset \mathbb{R}^d$, которые называем *стягиваемыми $P$-полиэдральными системами*. Такой подход применял Р. Стричарц [10] для исследования изопериметрической задачи в частном случае полигаскетов. В значительно более общей форме он изложен работах К. Бандта [2; 3], но, к сожалению, не получил затем должного развития.

Мы доказываем, что аттрактор всякой такой системы есть дендрит $K$ в $\mathbb{R}^d$ (теорема 4), что проколотые окрестности каждой точки $x$ в $K$ распадаются в конечные дизъюнктные объединения подмножеств телесных углов $\Omega_l$, равных телесным углам при вершинах $P$ (теорема 3); показываем, что порядки ветвления точек $x \in K$ ограничены сверху константой, зависящей только от полиэдра $P$ (теорема 6), и что хаусдорфова размерность множества $CP(K)$ разбивающих точек дендрита $K$, отличного от жордановой дуги, не превосходит размерности множества $EP(K)$ его концов (теорема 7).

## 1. Предварительные сведения

**Дендриты**. *Дендритом* называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг.

Порядок $Ord(p, X)$ точки $p$ относительно континуума $X$ в случае дендритов равен числу связных компонент множества $X \setminus \{p\}$. При этом точки порядка 1 называются *концами* в $X$, а разбивающие точки делятся на обычные точки, если $Ord(p, X) = 2$, и *точки ветвления*, если $Ord(p, X) \geq 3$.

Следуя замечательному обзору Я. Харатоника и В. Харатоника, перечислим несколько свойств топологических дендритов, которыми мы будем пользоваться [5, Theorem 1.1]. Для континуума $X$ следующие свойства эквивалентны: $X$ — дендрит; любые две различные точки в $X$ разделяются третьей; всякая точка $p \in X$ — либо конец, либо разбивающая точка; всякий невырожденный подконтинуум в $X$ содержит несчетное множество разбивающих точек в $X$; для любого $p \in X$ число компонент в $X \setminus p$ равно $Ord(x, P)$ (если одно из них конечно); пересечение любых двух связных подмножеств в $X$ связно; $X$ односвязно, и для любых двух точек $x, y \in X$ существует единственная кривая $\gamma$, соединяющая $x$ и $y$.

**Самоподобные множества.** Пусть $(X, d)$ — полное метрическое пространство.

Отображение $F : X \to X$ называется *сжимающим*, если $\operatorname{Lip} F < 1$. Отображение $S : X \to X$ называется *подобием*, если $d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$ для любых $x, y \in X$ и некоторого $r > 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ — система инъективных сжимающих отображений полного метрического пространства $(X, d)$. Непустой компакт $K \subset X$ называется *инвариантным множеством* системы $\mathcal{S}$, если $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$.

Множество $K \subset X$ называют также *самоподобным* относительно $\mathcal{S}$.
В данной статье $X$ — пространство $\mathbb{R}^d$ и отображения $S_i \in \mathcal{S}$ являются подобиями.

О б о з н а ч е н и я. $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ — множество индексов, $I^* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I^n$ — множество состоящих из них конечных слов, или мультииндексов, $\mathbf{j} = j_1 j_2 \ldots j_n \in I^*$, где $\mathbf{ij}$ означает конкатенацию соответствующих мультииндексов; пишут, что $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$, если $\mathbf{i} = i_1 \dots i_n$ — начальный отрезок в $\mathbf{j} = j_1 \dots j_{n+k}$ или $\mathbf{j} = \mathbf{ik}$ для некоторого $\mathbf{k} \in I^*$; если $\mathbf{i} \not\sqsubset \mathbf{j}$ и $\mathbf{j} \not\sqsubset \mathbf{i}$, то $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ *не сравнимы*; мы будем записывать $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1 j_2 \dots j_n} = S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_n}$ и для множества $A \subset X$ обозначать $S_{\mathbf{j}}(A)$ через $A_{\mathbf{j}}$; при этом $G_{\mathcal{S}} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$ — полугруппа, порожденная $\mathcal{S}$; $I^\infty = \{\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots, \ \ \alpha_i \in I\}$ — индексное пространство, и $\pi : I^\infty \to K$ — *индексное отображение*, сопоставляющее последовательности $\alpha$ точку $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$.

О п р е д е л е н и е 2. Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *условию открытого множества* (OSC), если существует такое непустое открытое множество $O \subset X$, что все $S_i(O)$, $1 \le i \le m$, содержатся в $O$ и попарно не пересекаются.

Мы говорим, что самоподобное множество $K$, определенное системой $\mathcal{S}$, удовлетворяет *свойству одноточечного пересечения*, если для любых $i \ne j$ пересечение $S_i(K) \cap S_j(K)$ содержит не более одной точки.

Мы используем следующий критерий связности аттрактора системы $\mathcal{S}$ [7; 9].

**Теорема 1** [9, теорема 1.6.2]. *Пусть $K$ — инвариантное множество системы сжимающих отображений $\mathcal{S}$ в полном метрическом пространстве $(X, d)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *для любых $i, j \in I$ существуют такие $\{i_0, i_1, \dots, i_n\} \subset I$, что $i_0 = i$, $i_n = j$ и $S_{i_k}(K) \bigcap S_{i_{k+1}}(K) \ne \varnothing$ для любых $k = 0, 1, \dots, n-1$;*

2) *$K$ линейно связно*;

3) *$K$ связно.*

**Предложение 1** [9, предложение 1.6.4]. *Если самоподобное множество $K$ связно, то оно локально связно.*

**Зипперы и мультизипперы**. Наиболее простой способ построения самоподобных кривых состоит в том, чтобы выбрать некоторую ломаную и последовательно заменять ее сегменты на уменьшенные копии этой ломаной; эта конструкция была изучена В. В. Асеевым в [1] и называется циппером.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $X$ — полное метрическое пространство. Система $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих отображений $X$ в себя называется *циппером* с вершинами $\{z_0, .., z_m\}$ и сигнатурой $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \varepsilon_i \in \{0, 1\}$, если $S_i(z_0) = z_{i-1+\varepsilon_i}$ и $S_i(z_m) = z_{i-\varepsilon_i}$ для $i = 1 \dots m$.

Более общий подход к построению самоподобных кривых и континуумов дает граф-ориентированный вариант конструкции цipперов [11].

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\{X_u, u \in V\}$ — набор пространств, изоморфных $\mathbb{R}^d$. Пусть в каждом $X_u$ задано конечное семейство точек $\{x_0^{(u)}, \dots, x_{m_u}^{(u)}\}$. Предположим, что для каждого $u \in V$ и $0 \le k \le m_u$ заданы такие $v(u, k) \in V$, $\varepsilon(u, k) \in \{0, 1\}$ и отображения $S_k^{(u)} : X_v \to X_u$, что $S_k^{(u)}(x_0^{(v)}) = x_{k-1}^{(u)}$ или $x_{k-1}^{(u)}$ и $S_k^{(u)}(x_{m_v}^{(v)}) = x_k^{(u)}$ или $x_{k-1}^{(u)}$(в зависимости от сигнатуры $\varepsilon(u, k)$. Граф-ориентированная система функций ($IFS$), определенная отображениями $S_k^{(u)}$, называется *мультициппером* $\mathcal{Z}$.

*Аттрактор мультициппера* $\mathcal{Z}$ — набор связных и линейно связных компактных множеств $K_u \subset X_u$, удовлетворяющих системе уравнений

$$K_u = \bigcup_{k=1}^{m_u} S_k^{(u)}(K_v(u, k)), \quad u \in V.$$

Множества $K_u$ называются *компонентами аттрактора* $\mathcal{Z}$.

Компоненты $K_u$ аттрактора мультициппера $Z$ являются жордановыми дугами при выполнении следующих условий:

**Теорема 2** [12, теорема 2.2.4]. *Пусть $\mathcal{Z}_0 = \{S_k^{(u)}\}$ — мультициппер с узловыми точками $x_k^{(u)}$ и сигнатурой $\varepsilon = \{(v(u,k), \varepsilon(u,k)), u \in V, k = 1, \dots, m_u\}$. Если для любого $u \in V$ и любых $i, j \in \{1, 2, \dots, m_u\}$ пересечение $K_{(u,i)} \cap K_{(u,j)}$ пусто при $|i-j| > 1$ и является одноточечным множеством при $|i-j| = 1$, то всякая линейная параметризация $\{f_u : I_u \to K_u\}$ есть гомеоморфизм и каждое множество $K_u$ есть жорданова дуга с концами $x_0^{(u)}$, $x_m^{(u)}$.*

## 2. Стягиваемые полиэдральные системы

Пусть $P$ — конечный гомеоморфный $d$-мерному шару полиэдр в $\mathbb{R}^d$ и $V_P = \{A_1, \dots, A_{n_P}\}$ — множество его вершин, $\Omega(P, A_i)$ — телесные углы в вершинах $P$, а $\theta(\Omega(P, A_i))$ обозначает $(d-1)$-мерную лебегову меру угла $\Omega(P, A_i)$. Рассмотрим систему подобий $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ в $\mathbb{R}^d$, задающих полиэдры $P_i = S_i(P)$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(**D1**) $P_i \subset P$ для любого $i \in I$;

(**D2**) для любых $i, j \in I$, $i \neq j$, пересечение $P_i \cap P_j$ либо пусто, либо является общей вершиной полиэдров $P_i$ и $P_j$;

(**D3**) $V_P \subset \bigcup\limits_{i \in I} S_i(V_P)$;

(**D4**) множество $\widetilde{P} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$ стягиваемо.

О п р е д е л е н и е 5. Система $\mathcal{S}$, удовлетворяющая условиям (**D1**)–(**D4**), называется *стягиваемой $P$-полиэдральной системой подобий.*

Все подобия $S_i \in \mathcal{S}$ являются сжимающими, поэтому система $\mathcal{S}$ обладает аттрактором $K$; система $\mathcal{S}$ порождает полугруппу $G_{\mathcal{S}} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$ и тем самым задает множество полиэдров $G_{\mathcal{S}}(P) = \{P_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$. Свойства этой системы измельчающихся полиэдров определяют геометрические свойства аттрактора $K$. Перечислим те из них, которые вытекают только из условий (**D1**)–(**D3**). Обратим особое внимание на взаимное расположение телесных углов полиэдров $P_{\mathbf{j}}$.

**Теорема 3.** *Пусть $\mathcal{S}$ — $P$-полиэдральная система подобий. Справедливы следующие утверждения.*

(a) *Система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию открытого множества* (OSC).

(b) *$P_{\mathbf{j}} \subset P_{\mathbf{i}}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{j} \sqsupset \mathbf{i}$.*

(c) *Если $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$, то $S_{\mathbf{i}}(V_P) \cap P_{\mathbf{j}} \subset S_{\mathbf{j}}(V_P)$.*

(d) *Для любых не сравнимых $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$, $\#(P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}}) \leq 1$ и $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}} = S_{\mathbf{i}}(V_P) \cap S_{\mathbf{j}}(V_P)$.*

(e) *Множество $G_{\mathcal{S}}(V_P)$ вершин полиэдров из $C_{\mathcal{S}}(P)$ содержится в $K$.*

(f) *Если $x \in K \backslash G_{\mathcal{S}}(V_P)$, то $\#\pi^{-1}(x) = 1$.*

(g) *Для любого $x \in G_{\mathcal{S}}(V_P)$ существует такое $\varepsilon > 0$ и такая конечная система $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$, где $n = \#\pi^{-1}(x)$, непересекающихся телесных углов с вершиной $x$, что если $x \in P_{\mathbf{j}}$ и $\operatorname{diam} P_{\mathbf{j}} < \varepsilon$, то $\Omega(P_{\mathbf{j}}, x) = \Omega_k$ для некоторого $k \leq n$. Обратно, для любого $\Omega_k$ существует такой мультииндекс $\mathbf{j} \in I^*$, что $\Omega(P_{\mathbf{j}}, x) = \Omega_k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) Из условий (**D1**), (**D2**) следует, что таким открытым множеством для (OSC) служит внутренность полиэдра $P$.

(b) вытекает из (OSC).

(c) Заметим, что из условий (**D2**) и (**D3**) следует утверждение (**D3a**): для любого $i \in I$, $P_i \cap V_P \subset S_i(V_P)$. В самом деле, если $x \in P \backslash V_p$ и $S_i(x) = A \in V_P$, то, поскольку существует такое $j \in I$, что $A \in S_j(V_P)$, $P_i \cap P_j \notin S_i(V_P)$, а это противоречит (**D3**).

Рассуждая по индукции, из (**D3 a**) мы получим, что $P_{\mathbf{k}} \cap V_P \subset S_{\mathbf{k}}(V_P)$ для любого $\mathbf{k} \in I^*$.

Пусть теперь $\mathbf{j} = \mathbf{ik}$ и $A \in S_{\mathbf{i}}(V_P) \cap S_{\mathbf{i}}(P_{\mathbf{k}})$. Это значит, что $S_{\mathbf{i}}^{-1}(A) \in V_P \cap P_{\mathbf{k}}$, и потому $S_{\mathbf{i}}^{-1}(A) \in S_{\mathbf{k}}(V_P)$, т. е. $A \in S_{\mathbf{j}}(V_P)$.

(d) Пару несравнимых мультииндексов представим в виде $\mathbf{ki}, \mathbf{kj}$, где $i_1 \neq j_1$. Так как $P_{\mathbf{ki}} \cap P_{\mathbf{kj}} \neq \varnothing$, $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}} \neq \varnothing$. Но $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}} \subset P_{i_1} \cap P_{j_1}$. Последнее пересечение непусто и потому является общей вершиной полиэдров $P_{i_1}$ и $P_{j_1}$, которая в силу (c) также является общей вершиной полиэдров $P_{\mathbf{i}}$ и $P_{\mathbf{j}}$; поэтому $P_{\mathbf{ki}} \cap P_{\mathbf{kj}} = S_{\mathbf{ki}}(V_P) \cap S_{\mathbf{kj}}(V_P)$.

(e) Для любой вершины $A \in V_P$ существуют $A_1 \in V_P$ и $\alpha_1 \in I$ такие, что $S_{\alpha_1}(A_1) = A$. Рассуждая по индукции, получим, что для любого $n$ существуют такие $A_n \in V_P$ и $\alpha_1 \dots \alpha_n \in I^n$, что $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A_n) = A$. В таком случае $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(P) = \{A\}$ и $A \in K$. Значит, $V_P \subset K$, а потому и $G_{\mathcal{S}}(V_P) \subset K$.

(f) Если $\pi^{-1}(x)$ содержит два неравных элемента $\alpha, \beta \in I^\infty$, то для некоторого $n$, $\alpha_1 \dots \alpha_n$ и $\beta_1 \dots \beta_n$ не сравнимы; поэтому $x \in P_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \cap P_{\beta_1 \dots \beta_n}$ и $x \in G_{\mathcal{S}}(V_P)$.

(g) Пусть сначала $\alpha \in I^\infty$ и $\pi(\alpha) = A \in V_P$. Как и в утверждении (e), для любого $n$, $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A_n) = A$ и $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\Omega(P, A_n)) \subset \Omega(P, A)$. Более того, телесные углы $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\Omega(P, A_n))$ образуют невозрастающую последовательность. Так как множество $\{\Omega(P, B), B \in V_P\}$ конечно, существуют такие $\Omega_\alpha$ и $N \in \mathbb{N}$, что $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\Omega(P, A_n)) = \Omega_\alpha$ при $n > N$. При этом $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(P) \subset \Omega_\alpha$. Если $\beta \neq \alpha$ и $\pi(\beta) = A$ для некоторого $\beta \in I^\infty$, то в силу (d) $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta = \{A\}$. Таким образом, множество $\pi^{-1}(A)$ однозначно отображается на семейство попарно непересекающихся телесных углов $\Omega_k$ с вершиной в $A$.

Мера $\theta(\Omega_k)$ угла $\Omega_k$ больше или равна $\theta_{\min} = \min\{\theta(\Omega(P, A)), A \in V_P\}$, поэтому число различных $\alpha \in I^\infty$ таких, что $\pi(\alpha) = A$, не превосходит $\theta(\Omega(P, A))/\theta_{\min}$, если $A \in V_P$, и $\theta_F/\theta_{\min}$, если $A \in \dot{P}$, где $\theta_F$ — мера полного телесного угла в $\mathbb{R}^d$. □

Применяя оператор Хатчинсона $T(A) = \bigcup\limits_{i \in I} S_i(A)$ системы $\mathcal{S}$ к полиэдру $P$, получим множество $\widetilde{P} = \bigcup\limits_{i \in I} P_i$. Будем обозначать $\widetilde{P}^{(1)} = T(P), \widetilde{P}^{(n+1)} = T(\widetilde{P}^{(n)})$. Тем самым мы получим убывающую последовательность $\widetilde{P}^{(1)} \supset \widetilde{P}^{(2)} \supset \dots \supset \widetilde{P}^{(n)} \supset \dots$ компактных множеств, в пересечении дающую $K$. □

Композиция стягиваемых $P$-полиэдральных систем является системой такого же вида.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ — стягиваемые $P$-полиэдральные системы подобий. Тогда $\mathcal{S}'' = \{S_i \circ S'_j, S_i \in \mathcal{S}, S_j \in \mathcal{S}'\}$ — также стягиваемая $P$-полиэдральная система подобий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (**D1**) очевидно, так как $S_i \circ S'_j(P) \subset S_i(P) \subset P$.

(**D2**) Пусть $Q_1 = S_{i_1} \circ S'_{j_1}(P)$ и $Q_2 = S_{i_2} \circ S'_{j_2}(P)$ — два полиэдра в $\mathcal{S}''$. Рассмотрим их пересечение:

если $i_1 \neq i_2$, то $Q_1 \cap Q_2 \subset P_{i_1} \cap P_{i_2}$, где правая часть либо пуста, либо для некоторых $A_1, A_2 \in V_P$ $P_{i_1} \cap P_{i_2} = \{S_{i_1}(A_1)\} = \{S_{i_2}(A_2)\}$. Так как $A_1 \in S'_{j_1}(V_P)$ и $A_2 \in S'_{j_2}(V_P)$, $Q_1 \cap Q_2 = S_{i_1} \circ S'_{j_1}(V_P) \cap S_{i_2} \circ S'_{j_2}(V_P)$;

если $i_1 = i_2$, то $Q_1 \cap Q_2 = S_{i_1}(P'_{j_1} \cap P'_{j_2})$, где правая часть — пустое или одноточечное подмножество в $S'_{j_1}(V_P) \cap S'_{j_2}(V_P)$.

(**D3**) выполняется, так как для любой вершины $A \in V_P$ существуют такие $A_1 \in V_P$ и $S_{i_1} \in \mathcal{S}$, что $S_{i_1}(A_1) = A$; в свою очередь, существуют такие $S'_{i_2} \in \mathcal{S}'$ и $A_2 \in V_P$, что $S'_{i_2}(A_2) = A_1$; поэтому $S_{i_1} S'_{i_2}(A_2) = A$. Снова, если $x \in P$ и $S_{i_1} S'_{i_2}(x) = A$, то $S'_{i_2}(x) \in V_P$, а значит, и $x \in V_P$.

(**D4**) Множества $\widetilde{P} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} P_i$ и $\widetilde{P}' = \bigcup\limits_{i=1}^{m'} P'_i$ — сильные деформационные ретракты полиэдра $P$, содержащие множество $V_P$. Пусть $\varphi' = \varphi'(X, t) : P \times [0, 1] \to P$ — деформационная ретракция из $P$ в $\bigcup\limits_{i=1}^{m'} P'_i$. Отображение $\varphi'$ удовлетворяет следующим условиям: $\varphi'(x, 0) = Id$, $\varphi'(x, 1)(P) = \widetilde{P}'$ и $\varphi'(x, t)|_{\widetilde{P}'} = Id_{\widetilde{P}'}$ для любого $t \in [0, 1]$.

Определим отображение $\varphi'_i : P_i \times [0, 1] \to P_i$ формулой

$$\varphi'_i(x, t) = S_i \circ \varphi'(S_i^{-1}(x), t).$$

Каждое отображение $\varphi'_i$ является деформационной ретракцией из $P_i$ в $S_i(\widetilde{P}')$.

Заметим, что все вершины $S_i(A_k)$ полиэдра $P_i$ — неподвижные точки отображений $\varphi'_i$ соответственно. Значит, мы можем определить сильную деформационную ретракцию $\widetilde{\varphi}(x,t):$ $\widetilde{P}\times[0,1]\to\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i(\widetilde{P}')=\widetilde{P}$ формулой $\widetilde{\varphi}(x,t)=\varphi'_i(x,t)$ для $x\in P_i$. Отображение $\widetilde{\varphi}$ всюду определено и непрерывно, так как если $P_i\cap P_j=\{S_i(A_k)\}=\{S_j(A_l)\}$ для некоторых $k$ и $l$, то $\varphi'_i(S_i(A_k),t)\equiv\varphi'_j(S_j(A_l),t)\equiv S_i(A_k)$.

Более того, $\widetilde{\varphi}(x,0)=x$ на $\widetilde{P}$, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{P},1)\equiv\bigcup\limits_{i=1}^{m}S_i(\widetilde{P}')$ и $\widetilde{\varphi}(x,t)|_{\widetilde{P}''}\equiv Id$. Значит, $\widetilde{\varphi}(x,t)$ — сильная деформационная ретрация $\widetilde{P}$ на $\widetilde{P}''$. Следовательно, множество $\widetilde{P}''=\bigcup S_i\circ S'_j(P)$ стягиваемо. □

**Следствие 1.** *Если $\mathcal{S}$ — стягиваемая $P$-полиэдральная система, то это же верно и для $\mathcal{S}^{(n)}=\{S_{\mathbf{j}},\mathbf{j}\in I^n\}$.*

Из стягиваемости множества $\widetilde{P}$ и условия (**D2**) следует, что всякая замкнутая жорданова кривая в $\widetilde{P}$ лежит в одном из полиэдров $P_i$. Чтобы убедиться в этом, докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** *Пусть $B_i, i=1,\dots,n,$ — такое конечное семейство топологических шаров, что для любых $i,j$ пересечение $B_i\cap B_j$ состоит не более чем из одной точки и множество $X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$ односвязно. Тогда всякая замкнутая жорданова кривая в $X$ лежит в одном из шаров $B_i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем в каждом $B_i$ точку $O_i\in\dot{B}_i$ и для всех $\{p_{ij}\}=B_i\cap B_j$ возьмем жорданову дугу $\gamma_{ij}$ с концами $O_i$ и $p_{ij}$. Пусть $\Gamma$ — граф с вершинами $O_i$ и $p_{ij}, i,j=1,\dots,n$. Так как для всякого $i$ объединение $\bigcup\limits_{j}\gamma_{ij}$ является сильным деформационным ретрактом шара $B_i$, граф $\Gamma$ является сильным деформационным ретрактом $X$, и потому $\Gamma$ является деревом.

Пусть $l$ — некоторая жорданова кривая в $X$. Будем считать, что $l$ находится в общем положении, и потому $p_{ij}\in l$ тогда и только тогда, когда $l\cap\dot{B}_i\neq\varnothing$ и $l\cap\dot{B}_j\neq\varnothing$. Каждая точка $p_{ij}$ разбивает $X$ на не менее чем две компоненты. Поэтому, если $l\ni p_{ij}$, то кривая $l$ незамкнута. Значит, всякая простая замкнутая кривая в $X$ лежит целиком в одном из шаров $B_i$. □

**Теорема 4.** *Аттрактор $K$ стягиваемой $P$-полиэдральной системы подобий $\mathcal{S}$ является дендритом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По следствию 1 множества $\widetilde{P}^{(n)}$ стягиваемы, компактны и удовлетворяют включениям $\widetilde{P}^{(1)}\supset\widetilde{P}^{(2)}\supset\widetilde{P}^{(3)}\dots$. Диаметр связных компонент внутренности каждого из $\widetilde{P}^{(n)}$ не превосходит $\mathrm{diam}P\cdot q^n$, где $q=\max\mathrm{Lip}(S_i)$. Значит, множество $K=\cap\widetilde{P}^{(n)}$ связно и имеет пустую внутренность. Так как аттрактор $K$ связен, он локально связен и линейно связен [9, теорема 1.6.2, предложение 1.6.4].

Пусть $l$ — некоторая жорданова кривая в $K$. Поскольку $l\subset\widetilde{P}^{(n)}$ для любого $n\in\mathbb{N}$, из леммы 2 следует, что если $l$ имеет ненулевой диаметр, то она незамкнута. Таким образом, $K$ является дендритом. □

Дендрит $K$ лежит в полиэдре $P$. Вообще говоря, его пересечение с границей $P$ может быть несчетно и даже содержать какие-то из ребер полиэдра $P$. Это также верно и для пересечения дендрита $K$ с каждым подполиэдром $S_{\mathbf{j}}(P)$, $\mathbf{j}\in I^*$. Тем не менее в силу условия **D2** подконтинуумы в $K$ “проникают” в подполиэдры $S_{\mathbf{j}}(P)$ только через их вершины, а именно справедливо

**Предложение 2.** *Пусть $\mathbf{j}\in I^*$ — мультииндекс. Для любого континуума $L\subset K$, пересечение которого как с $P_{\mathbf{j}}$, так и с его внешностью $\dot{CP_{\mathbf{j}}}$ непусто, имеем $\overline{L\setminus P_{\mathbf{j}}}\cap P_{\mathbf{j}}\subset S_{\mathbf{j}}(V_P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для любого полиэдра $P_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^k$, множество $\widetilde{P}^{(k)} \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)$ несвязно и $P_{\mathbf{j}} \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)$ — его связная компонента, пересечение которой с $K$ совпадает с $S_{\mathbf{j}}(K \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)$. Значит, множество $L \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)$ также несвязно.

Континуум $L$ содержится в $\widetilde{P}^{(k)}$. Если $L \cap (P_{\mathbf{j}} \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)) = \varnothing$, то $L \cap P_{\mathbf{j}} \subset S_{\mathbf{j}}(V_P)$ и $L \cap P_{\mathbf{j}}$ состоит из единственной вершины $A$ полиэдра $P_{\mathbf{j}}$, поэтому $\overline{L \backslash P_{\mathbf{j}}} \cap P_{\mathbf{j}} = \{A\}$.

Допустим теперь, что $L \cap (P_{\mathbf{j}} \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)) \neq \varnothing$. Так как $L \backslash P_{\mathbf{j}} \subset P_{\mathbf{j}}^c$, имеем

$$\overline{L \backslash P_{\mathbf{j}}} \cap P_{\mathbf{j}} \subset P_{\mathbf{j}}^c \cap P_{\mathbf{j}} \ \subset \ S_{\mathbf{j}}(V_P).$$

Множество в левой части непусто, так как $L$ пересекает и $P_{\mathbf{j}} \backslash S_{\mathbf{j}}(V_P)$, и $\widetilde{P}^{(k)} \backslash P_{\mathbf{j}}$. □

## 3. Главное дерево и точки ветвления

Так как аттрактор $K$ — дендрит, для любых вершин $A_i, A_j \in V_P$ существует единственная соединяющая их дуга $\gamma_{ij} \subset K$. Как было доказано К. Бандтом [2], эти дуги образуют аттрактор граф-ориентированной системы подобий. Покажем, что эта система является жордановым мультициппером (см. [11; 12]).

**Теорема 5.** *Дуги $\gamma_{ij}$ являются компонентами инвариантного множества некоторого жорданова мультициппера $\mathcal{Z}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы говорим, что полиэдры $P_{i_1}, \ldots, P_{i_s}, i_k \in I$, образуют цепь, соединяющую точки $x$ и $y$, если $x \in P_{i_1}, y \in P_{i_s}$, а пересечение $P_{i_k} \cap P_{i_l}$ пусто при $|l-k| > 1$, и является общей вершиной полиэдров $P_{i_k}$ и $P_{i_l}$ при $|l-k| = 1$. Для вершин $A_i, A_j$ существует единственная соединяющая их цепь подполиэдров в $P$-полиэдральной системе $\mathcal{S}$, которая состоит из тех $P_k$, для которых $\#P_k \cap \gamma_{ij} \geq 2$; обозначим составляющие ее подполиэдры и отображения через $P'_{ijk} = S'_{ijk}(P), k = 1, \ldots m_{ij}$. При этом будем иметь в виду, что все отображения $S'_{ijk} \in \mathcal{S}$.

Пусть $u(i,j,k)$ и $v(i,j,k)$ — такие номера вершин полиэдра $P$, что $S'_{ijk}(A_u) = P'_{ij(k-1)} \cap P'_{ijk} = z_{ij(k-1)}$ и $S'_{ijk}(A_v) = P'_{ijk} \cap P'_{ij(k+1)} = z_{ijk}$ при $1 < k < m_{ij}$ и $u(i,j,1) = A_i = z_{ij0}$ и $v(i,j,m_{ij}) = A_j = z_{ijm_{ij}}$ при $k = 1$ или $k = m_{ij}$. Тем самым для каждой тройки $(i,j,k)$, где $1 \leq k \leq m_{ij}$, заданы такие индексы $u, v \in \{1, \ldots, n_P\}$, что $S'_{ijk}(z_{uv0}) = z_{ij(k-1)}$ и $S'_{ijk}(z_{uvm_{uv}}) = z_{ijk}$.

Следовательно, система $\{S'_{ijk}\}$ — мультициппер $\mathcal{Z}$ с вершинами $z_{ijk}$.

При этом, поскольку выполняются соотношения

$$\gamma_{ij} = \bigcup_{i=1}^{m_{ij}} S'_{ijk}(\gamma_{u(i,j,k),v(i,j,k)}) = \bigcup_{i=1}^{m_{ij}} \gamma_{ijk},$$

дуги $\gamma_{ij}$ образуют полный набор компонент аттрактора мультициппера $\mathcal{Z}$.

Так как каждая дуга $\gamma_{ijk}$ лежит в $P_{ijk}$, имеем

$$\gamma_{ijk} \cap \gamma_{ijl} = \varnothing \text{ при } |k-l| > 1 \ \text{ и } \ \gamma_{ijk} \cap \gamma_{ijl} = \{z_{ijk}\} \text{ при } l = k \pm 1.$$

Поэтому система $\mathcal{Z}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и является жордановым мультициппером. □

Множество $\hat{\gamma} = \bigcup\limits_{i \neq j} \gamma_{ij}$ — подконтинуум дендрита $K$ и потому является дендритом. Так как все концы множества $\hat{\gamma}$ содержатся в $V_P$, $\hat{\gamma}$ является конечным дендритом, или топологическим деревом [5, **A.17**]. Пусть $n_E$ — число концов множества $\hat{\gamma}$. Как было отмечено Кигами [8], $\hat{\gamma}$ можно представить как объединение не более чем $(n_E - 1)$ жордановых дуг, внутренности которых попарно не пересекаются.

О п р е д е л е н и е 6. Объединение $\hat{\gamma} = \bigcup\limits_{i \neq j} \gamma_{ij}$ называется *главным деревом* дендрита $K$. Точки ветвления дерева $\hat{\gamma}$ называются *главными точками ветвления* дендрита $K$.

Следующее утверждение устанавливает соотношения между множествами вершин $V_P$, концов $EP(\hat{\gamma})$ и разбивающих точек $CP(\hat{\gamma})$ главного дерева $\hat{\gamma}$.

**Предложение 3.** *Пусть $x \in K$. Справедливы следующие утверждения*:
(a) $\hat{\gamma} \subset \bigcup\limits_{A_j \in V_P} \gamma_{A_j x}$, *при этом, если* $\hat{\gamma} \subset \bigcup\limits_{A_j \in V_P} \gamma_{A_j x}$, *то* $x \in \hat{\gamma}$;
(b) $EP(\hat{\gamma}) = V_P \backslash CP(\hat{\gamma})$;
(c) $x \in CP(\hat{\gamma})$ *тогда и только тогда, когда найдутся вершины* $A_i$, $A_j$, *лежащие в разных компонентах множества* $K \backslash \{x\}$;
(d) *если* $x \in CP(K)$, *то* $Ord(x, K) = Ord(x, \hat{\gamma})$ *тогда и только тогда, когда* $C_l \cap V_P \neq \varnothing$ *для каждой компоненты* $C_l$ *множества* $K \backslash \{x\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $A_i, A_j \in V_P$ справедливо включение $\gamma_{A_i A_j} \subset \gamma_{A_i x} \cup \gamma_{A_j x}$, что сразу дает (a). Чтобы получить (b), заметим, что если $x \in \hat{\gamma}$ не является вершиной, то $x$ лежит внутри некоторой дуги $\gamma_{A_i A_j}$, значит, $x$ является разбивающей точкой $\hat{\gamma}$, и потому $x \notin EP(\hat{\gamma})$.

(c) Так как $\gamma_{A_i x} \cap \gamma_{A_j x} = \{x\}$, имеем $\gamma_{x A_i} \cup \gamma_{x A_j} = \gamma_{A_i A_j}$. Значит, $x$ — разбивающая точка дуги $\gamma_{A_i A_j}$ и, следовательно, главного дерева $\hat{\gamma}$.

(d) Необходимость очевидна, докажем достаточность. Согласно (c), $x \in CP(\hat{\gamma})$. Так как число компонент в $K \backslash \{x\}$ не превосходит $n_P$, порядок $Ord(x, K)$ конечен. Пусть $C_l$, где $l = 1, \ldots, k$, а $k = Ord(x, K)$ — компоненты в $K \backslash \{x\}$. Из (c) также следует, что $x \in \hat{\gamma}$ и две вершины $A_i$ и $A_j$ лежат в одной и той же компоненте $C_l$ тогда и только тогда, когда $x \notin \gamma_{A_i A_j}$. Значит, все вершины полиэдра $P$, принадлежащие одной и той же компоненте $C_l$ множества $K \backslash \{x\}$, также лежат в одной компоненте в $\hat{\gamma} \backslash \{x\}$. Следовательно, $Ord(x, \hat{\gamma}) = Ord(x, K)$. □

Чтобы оценить порядок $Ord(x, K)$ точек $x \in K$, мы должны прежде получить оценки порядка $Ord(A, K)$ для вершин $A \in V_P$. В следующем предложении мы покажем, что порядок вершины $A$ связан с числом прообразов $n_A = \#\pi^{-1}(A)$ точки $A$ в индексном пространстве $I^\infty$ и оценивается через меры телесных углов в вершинах полиэдра $P$.

Введем необходимые обозначения. Пусть $\theta_A = \theta(\Omega(P, A))$ — мера телесного угла в вершине $A$, $\theta_{\max} = \max\{\theta_A, A \in V_P\}$, а $\theta_{\min} = \min\{\theta_A, A \in V_P\}$. Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $\lceil t \rceil$ величину $Ceil(t)$, т. е. наименьшее целое число, большее или равное $t$.

**Предложение 4.** *Пусть $A \in V_P$. Справедливы следующие утверждения*:
(a) *если* $\#\pi^{-1}(A) = 1$, *то существуют такие* $\mathbf{i} \in I^*$ *и* $A' \in V_P$, *что* $A = S_{\mathbf{i}}(A')$ *и* $Ord(A, K) = Ord(A', \hat{\gamma})$; *при этом* $Ord(A, K) \leq n_P - 1$;
(b) *если* $n_A = \#\pi^{-1}(A) > 1$, *то существуют такие* $\mathbf{i}_k \in I^*$ *и* $A'_k \in V_P$, *где* $k = 1, \ldots, n_A$, *что* $A_k = S_{\mathbf{i}_k}(A'_k)$ *и* $Ord(A, K) = \sum_{k=1}^{n_A} Ord(A'_k, \hat{\gamma})$; *при этом*

$$Ord(A, K) \leq (n_P - 1)\Big(\Big\lceil \frac{\theta_A}{\theta_{\min}} \Big\rceil - 1\Big) \leq (n_P - 1)\Big(\Big\lceil \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \Big\rceil - 1\Big). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\#\pi^{-1}(A) = 1$ и $\{C_l, l = 1, \ldots, k\}$ — некоторое множество компонент в $K \backslash \{A\}$. Так как $\{A\}$ есть пересечение единственной последовательности полиэдров $P_{j_1} \supset P_{j_1 j_2} \supset \ldots \supset P_{j_1 .. j_s} ..$, существует такое $s$, что $\operatorname{diam} P_{j_1 .. j_s} < \operatorname{diam} C_l$ для любого $l = 1, \ldots, k$. Поэтому ввиду предложения 2 каждая компонента $C_l$ содержит вершину подполиэдра $P_{j_1 .. j_s}$, отличную от $A$. Значит, $k \leq n_P - 1$ и $Ord(A, K) \leq n_P - 1$.

Поскольку порядок $Ord(A, K)$ конечен, мы можем полагать, что $k = Ord(A, K)$, а $\{C_1, \ldots, C_k\}$ — полный набор компонент $K \setminus \{A\}$.

Пусть $\mathbf{j} = j_1 \ldots j_s$ и $A = S_{\mathbf{j}}(A')$. Множество $\{C_l \cap P_{\mathbf{j}}, l = 1, \ldots, k\}$ совпадает с множеством всех компонент в $K_{\mathbf{j}} \backslash \{A\}$. Так как $(K \cap P_{\mathbf{j}}) \backslash \{A\} = S_{\mathbf{j}}(K \backslash \{A'\})$, множество $K \backslash \{A'\}$ состоит из $k$

компонент $C_l'$ таких, что $S_{\mathbf{j}}(C_l') = C_l \cap P_{\mathbf{j}}$. Так как каждая компонента $C_l'$ содержит вершины $P$, из предложения 3(d) следует, что $Ord(A', \hat{\gamma}) = Ord(A', K) = Ord(A, K) \le n_P - 1$.

Предположим, что $n_A = \#\pi^{-1}(A) > 1$. По теореме 3(g) существует семейство $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_{n_A}\}$ непересекающихся телесных углов с вершиной $A$ и соответствующих им полиэдров $P_{\mathbf{j}_k} \ni A$ таких, что $P_{\mathbf{j}_k} \subset \Omega_k$ и $\Omega(P_{\mathbf{j}_k}, A) = \Omega_k$.

Обозначим через $A_k$ ту вершину полиэдра $P$, для которой $S_{\mathbf{j}_k}(A_k) = A$. Обратим внимание на то, что $\#\pi^{-1}(A_k) = 1$. Рассуждая, как в (a), мы можем выбрать такие мультииндексы $\mathbf{j}_k$ и вершины $A_k'$, что $Ord(A', K) = Ord(A_k', \hat{\gamma})$, поэтому $Ord(A, K_{\mathbf{j}_k}) = Ord(A_k, K) \le n_P - 1$ и $Ord(A, K) \le n_A(n_P - 1)$. Учитывая неравенство $n_A \le \left\lceil \dfrac{\theta_A}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1 \le \left\lceil \dfrac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1$, получаем неравенство (1). □

Теперь мы оценим порядки разбивающих точек в $K$ и увидим, что каждая из них лежит в некотором образе $S_{\mathbf{j}}(\hat{\gamma})$ главного дерева.

**Теорема 6.** *Пусть $y \in CP(K)$. Справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $y \notin G_{\mathcal{S}}(V_P)$, то существуют такие $\mathbf{j} \in I^*$ и $x \in CP(\hat{\gamma})$, что $y = S_{\mathbf{j}}(x)$ и $Ord(y, K) = Ord(x, \hat{\gamma}) \le n_P$;*

(ii) *если $y \in G_{\mathcal{S}}(V_P)$, то существуют такие наборы мультииндексов $\{\mathbf{j}_k, k = 1, .., s\}$ и вершин $\{A_1', \ldots, A_s'\}$, что для любого $k$, $S_{\mathbf{j}_k}(A_k') = y$ и для любого $l \ne k$ пересечение $S_{\mathbf{j}_k}(P) \cap S_{\mathbf{j}_l}(P)$ есть $\{y\}$, при этом*

$$Ord(y, K) = \sum_{k=1}^{s} Ord(A_k', \hat{\gamma}) \le (n_P - 1)\Big(\left\lceil \frac{\theta_F}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1\Big),$$

*где $\theta_F$ — мера полного телесного угла в $\mathbb{R}^d$;*

(iii) *$CP(K) \subset G_{\mathcal{S}}(\hat{\gamma})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Пусть $\{C_1, \ldots, C_k\}$ — некоторый набор компонент в $K \setminus \{y\}$, а $\rho$ — наименьший из диаметров компонент $C_l$ этого набора. Выберем такой мультииндекс $\mathbf{j} \in I^*$, что $y \in P_{\mathbf{j}}$ и $\operatorname{diam}(P_{\mathbf{j}}) < \rho$.

Из предложения 2 следует, что для любого $l$ пересечение $C_l \cap S_{\mathbf{j}}(V_P)$ непусто, поэтому $k \le n_P$. Значит, $Ord(y, K) \le n_P$. Поскольку порядок точки $y$ конечен, мы можем предполагать, что $k = Ord(y, K)$ и $\{C_1, \ldots, C_k\}$ — множество всех компонент $K \setminus \{y\}$.

Пусть $x = S_{\mathbf{j}}^{-1}(y)$. Тогда множества $C_l' = S_{\mathbf{j}}^{-1}(C_l \cap P_{\mathbf{j}})$, где $l = 1, \ldots, k$, дают полный набор компонент в $K \setminus \{x\}$, причем для любого $l$ пересечение $C_l' \cap V_P$ непусто. Поэтому из предложения 3 вытекает, что

$$Ord(x, \hat{\gamma}) = Ord(x, K) = Ord(y, K) \le n_P.$$

(ii) Пусть $n_y = \#\pi^{-1}(y)$. По теореме 3(g) существует семейство $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_{n_y}\}$ непересекающихся телесных углов с вершиной $y$ и соответствующих им полиэдров $P_{\mathbf{j}_k} \ni y$ таких, что $P_{\mathbf{j}_k} \subset \Omega_k$ и $\Omega(P_{\mathbf{j}_k}, y) = \Omega_k$.

Рассуждая, как и в предложении 4(b), мы получаем, что $Ord(y, K) \le n_y(n_P - 1)$. Тогда, выбирая полиэдры $P_{\mathbf{j}_k}$ достаточно малого диаметра, мы приходим к выводу, что $y \in S_{\mathbf{j}_k}(\hat{\gamma})$ для любого $k$, причем $Ord(y, K_{\mathbf{j}_k}) = Ord(y, S_{\mathbf{j}_k}(\hat{\gamma})$. Это дает оценку

$$Ord(y, K) \le (n_P - 1)\Big(\left\lceil \frac{\theta_F}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1\Big).$$

(iii) Как в случае (i), так и в случае (ii), имеем $y \in G_{\mathcal{S}}(\hat{\gamma})$. □

Так как множество разбивающих точек дендрита $K$ есть счетное объединение образов главного дерева, размерности множеств $CP(K)$ и $\hat{\gamma}$ совпадают. Следующая теорема показывает, что почти все точки невырожденного самоподобного дендрита являются его концами, а множество разбивающих точек является множеством нулевой меры в $K$.

**Теорема 7.** *Пусть* $(P, \mathcal{S})$ *— стягиваемая P-полиэдральная система и K — ее аттрактор.*
(i) $\dim_H(CP(K)) = \dim_H(\hat{\gamma}) \le \dim_H EP(K) = \dim_H(K)$.
(ii) $\dim_H(CP(K)) = \dim_H(K)$ *тогда и только тогда, когда K — жорданова дуга.*

Доказательство. Так как $CP(K) = G_{\mathcal{S}}(\hat{\gamma})$, имеем $\dim_H(CP(K)) = \dim_H(\hat{\gamma})$. Если дендрит $K$ не является жордановой дугой, то множество его концов $EP(K)$ бесконечно и поэтому содержит точку $x \notin \hat{\gamma}$. Заметим, что $d(x, \hat{\gamma}) > 0$. Пусть $\varepsilon < d(x, \hat{\gamma})/2$. Возьмем такое $n$, что для любого мультииндекса $\mathbf{j} \in I^n$ диаметр $P_{\mathbf{j}}$ меньше $\varepsilon$. Тогда множество $\mathcal{J} = \{\mathbf{j} \in I^n : P_{\mathbf{j}} \cap \hat{\gamma} \neq \varnothing\}$ отлично от $I^n$, поскольку $x \notin P_{\mathbf{j}}$ для любого $\mathbf{j} \in \mathcal{J}$. Пусть $\mathcal{S}' = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in \mathcal{J}\}$ и $K'$ — аттрактор системы $\mathcal{S}'$. Так как полиэдры $\{P_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in \mathcal{J}\}$ покрывают $\hat{\gamma}$, имеем $K' \supset \hat{\gamma}$. В то же время, размерность подобия $\dim_s(\mathcal{S}')$ системы $\mathcal{S}'$ строго меньше размерности подобия системы $\mathcal{S}^{(n)}$. Кроме того, $\dim_s(\mathcal{S}^{(n)}) = \dim_s(\mathcal{S}) = \dim_H(K)$. Таким образом, $\dim_H(\hat{\gamma}) \le \dim_H(K') < \dim_H(K)$. Так как $EP(K) = K \backslash CP(K)$, имеем $\dim_H(EP(K)) = \dim_H(K)$. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Асеев В.В., Тетенов А.В., Кравченко А.С.** О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, №3. С. 481–492.
2. **Bandt C., Keller K.** Self-similar sets 2. A simple approach to the topological structure of fractals // Math. Nachrichten. 1991. Vol. 154. P. 27–39. doi: 10.1002/mana.19911540104 .
3. **Bandt C., Stahnke J.** Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals: preprint. Greifswald, 1990.
4. **Barnsley M.F.** Fractals everywhere. Boston: Acad. Press, 1988. 396 p. ISBN: 0-12-079062-9 .
5. **Charatonik J., Charatonik W.** Dendrites // Aportaciones Mat. Comun. 1998. Vol. 22. P. 227–253.
6. **Croydon D.** Random fractal dendrites. Ph.D. Thesis, St. Cross College, University of Oxford. Trinity, 2006. 161 p.
7. **Hata M.** On the structure of self-similar sets // Japan. J. Appl. Math. 1985. Vol. 3. P. 381–414. doi: 10.1007/BF03167083 .
8. **Kigami J.** Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites // J. Funct. Anal. 1995. Vol. 128, no. 1. P. 48–86. doi: 10.1006/jfan.1995.1023 .
9. **Kigami J.** Analysis on fractals. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2001, 226 p. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 143). ISBN: 0-521-79321-1 .
10. **Strichartz R. S.** Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351. P. 1705–1752. doi: 10.1090/S0002-9947-99-01999-6 .
11. **Тетенов А.В.** Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, №5. С. 1147–1159.
12. **Тетенов А.В.** Структурные теоремы в теории самоподобных фракталов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Горно-Алтайск, 2010. 216 с.
13. **Zeller. R.** Branching dynamical systems and slices through fractals. Ph.D. Thesis. University of Greifswald, 2015.



Тетенов Андрей Викторович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры математики и методики преподавания математики
Горно-Алтайского госуниверситета
e-mail: atet@mail.ru


Поступила 27.06.2017


Самуэль Мери
Бхарата Мата Колледж
Кочин, Керала, Индия
e-mail: marysamuel2000@gmail.com

Ваулин Дмитрий Алексеевич
ст. преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики
Горно-Алтайского госуниверситета
e-mail: d_warrant@mail.ru

**REFERENCES**

1. Aseev V.V., Tetenov A.V., Kravchenko A.S. On self-similar Jordan curves on the plane. *Sib. Math. J.*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 379–386. doi: 10.1023/A:1023848327898 .
2. Bandt C., Stahnke J. *Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals.* Preprint, Greifswald, 1990.
3. Bandt C., Keller K. Self-similar sets 2. A simple approach to the topological structure of fractals. *Math. Nachrichten*, 1991, vol. 154, pp. 27–39. doi: 10.1002/mana.19911540104 .
4. Barnsley M.F. *Fractals Everywhere* Academic Press, 1988, 396 p. ISBN: 0-12-079062-9 .
5. Charatonik J., Charatonik W. Dendrites. *Aportaciones Mat. Comun.*, 1998, vol. 22, pp. 227–253.
6. Croydon D. *Random fractal dendrites.* Ph.D. Thesis, St. Cross College, University of Oxford, Trinity, 2006. 161 p.
7. Hata M. On the structure of self-similar sets. *Japan. J. Appl. Math*, 1985, vol. 3, pp. 381–414. doi: 10.1007/BF03167083 .
8. Kigami J. Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites. *J. Funct. Anal.*, 1995, vol. 128, no. 1, pp. 48–86. doi: 10.1006/jfan.1995.1023 .
9. Kigami J. *Analysis on fractals.* Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2001, Ser. Cambridge Tracts in Math., vol. 143, 226 p. ISBN: 0-521-79321-1 .
10. Strichartz R.S. Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 351, no. 5, pp. 1705–1752. doi: 10.1090/S0002-9947-99-01999-6 .
11. Tetenov A. V. Self-similar Jordan arcs and the graph directed systems of similarities. *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 5, pp. 940–949. doi: 10.1007/s11202-006-0105-7 .
12. Tetenov A. V. Structural theorems in the theory of self-similar fractals : Habilitation Thesis. Gorno-Altaisk state university, Gorno-Altaisk, 2011. 216 p.
13. Zeller. R. *Branching dynamical systems and slices through fractals*, Ph.D. Thesis, University of Greifswald, 2015.

The paper was received by the Editorial Office on June 27, 2017.

*Andrei Viktorovich Tetenov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia, e-mail: atet@mail.ru .

*Mary Samuel*, Department of Mathematics, Bharata Mata College, Kochi, India,
e-mail: marysamuel2000@gmail.com .

*Dmitrii Alekseevich Vaulin,* Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia,
e-mail: d_warrant@mail.ru .