

УДК 515.162

ВИРТУАЛЬНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СЛОЖНОСТИ 1 и 2¹

Е. А. Сбродова, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова

В 2009 г. С. В. Матвеев ввел понятие виртуального трехмерного многообразия, обобщающее понятие классического трехмерного многообразия. Виртуальное многообразие есть класс эквивалентности так называемых специальных полиэдров. Каждое виртуальное многообразие определяет трехмерное многообразие с непустым краем и $\mathbb{R}P^2$ -особенностями. Многие инварианты многообразий, например, инварианты Тураева — Виро, допускают продолжение на множество виртуальных многообразий. Сложность виртуального трехмерного многообразия равна k , если его класс эквивалентности содержит специальный полиэдр с k истинными вершинами и не содержит специальных полиэдров с меньшим числом истинных вершин. В данной работе приводится полный список виртуальных многообразий сложности 1 и даны двусторонние оценки на число виртуальных многообразий сложности 2. Вопрос о полной классификации виртуальных многообразий сложности 2 по-прежнему остается открытым.

Ключевые слова: виртуальные трехмерные многообразия, классификация, сложность.

E. A. Sbrodova, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh, E. V. Shumakova. Virtual 3-manifolds of complexity 1 and 2.

Matveev in 2009 introduced the notion of virtual 3-manifold, which generalizes the classical notion of 3-manifold. A virtual manifold is an equivalence class of so-called special polyhedra. Each virtual manifold determines a 3-manifold with nonempty boundary and $\mathbb{R}P^2$ -singularities. Many invariants of manifolds, such as Turaev–Viro invariants, can be extended to virtual manifolds. The complexity of a virtual 3-manifold is k if its equivalence class contains a special polyhedron with k true vertices and contains no special polyhedra with a smaller number of true vertices. In this paper we give a complete list of virtual 3-manifolds of complexity 1 and present two-sided bounds for the number of virtual 3-manifolds of complexity 2. The question of the complete classification for virtual 3-manifolds of complexity 2 remains open.

Keywords: virtual 3-manifold, classification, complexity.

MSC: 57N10, 57M27

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-257-264

*Посвящается 70-летию юбилею
академика РАН
Сергея Владимировича Матвеева*

Введение

С. В. Матвеев [1] определил виртуальное трехмерное многообразие как специальный полиэдр, рассматриваемый с точностью до обратимого преобразования T . Это определение мотивировано тем, что любое компактное трехмерное многообразие полностью задается утолщаемым специальным полиэдром (своим спайном), причем любые два специальных спайна одного и того же многообразия (с двумя и более истинными вершинами) можно всегда связать цепочкой преобразований T и T^{-1} . Каждое виртуальное многообразие определяет трехмерное многообразие с непустым краем и $\mathbb{R}P^2$ -особенностями. Таким образом, суть обобщения заключается в переходе к более широкому классу многообразий с особенностями за счет отказа от утолщаемости полиэдров. Отметим, что многие инварианты трехмерных многообразий — группы гомологий и когомологий, а также различные квантовые инварианты (например, инварианты Тураева — Виро) — продолжают на виртуальные многообразия.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00609).

Как и в классическом случае, сложность виртуального многообразия равна k , если его можно задать специальным полиэдром с k истинными вершинами, но нельзя задать полиэдром с меньшим числом истинных вершин [2]. В настоящей работе полностью классифицированы виртуальные многообразия сложности 1 и установлены двусторонние оценки на число виртуальных многообразий сложности 2.

1. Предварительные сведения

Напомним основные факты теории простых и специальных полиэдров, разработанной С. В. Матвеевым (см. [3, гл. 1]). Двумерный компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой точки $x \in P$ гомеоморфен либо окружности (такая точка x называется *неособой*), либо графу, состоящему из двух вершин и трех соединяющих их ребер (такая точка x называется *тройной*), либо полному графу K_4 с четырьмя вершинами (такая точка x называется *истинной вершиной*). Компоненты связности объединения всех тройных точек и объединения всех неособых точек называются соответственно *тройными линиями* и *2-компонентами* полиэдра P . Множество особых точек полиэдра P (т. е. объединение истинных вершин и тройных линий) называется его *особым графом*. Простой полиэдр естественным образом стратифицирован: каждый страт размерности 2 (*2-компонента*) — это связная компонента множества неособых точек; страты размерности 1 — это открытые или замкнутые тройные линии; страты размерности 0 — это истинные вершины.

Простой полиэдр называется *специальным*, если каждый его одномерный страт является открытой 1-клеткой, а каждая 2-компонента является открытой 2-клеткой. Особый граф специального полиэдра имеет по крайней мере одну истинную вершину и является 4-регулярным графом. Поэтому тройные линии специального полиэдра естественно называть *ребрами*.

Для каждого специального полиэдра P , имеющего хотя бы две истинные вершины, определено *преобразование* T , состоящее в удалении собственного подполиэдра $E_T \subset P$ (рис. 1 слева) и замене его на собственный подполиэдр E'_T (рис. 1 справа). Отметим, что преобразование T увеличивает на единицу как число истинных вершин, так и число 2-компонент специального полиэдра, в то время как обратное преобразование T^{-1} уменьшает их на единицу.

Будем говорить, что два специальных полиэдра *эквивалентны*, если один может быть переведен в другой с помощью конечной последовательности преобразований $T^{\pm 1}$. Класс эквивалентности $[P]$ специального полиэдра P будем называть *виртуальным трехмерным многообразием* [1].

Компактный трехмерный полиэдр W называется *трехмерным многообразием с особенностями*, если линк любой точки из W является замкнутой связной поверхностью или диском. Если линк любой точки из W гомеоморфен двумерной сфере, проективной плоскости или диску, то полиэдр W называется *трехмерным многообразием с $\mathbb{R}P^2$ -особенностями*. Точки,

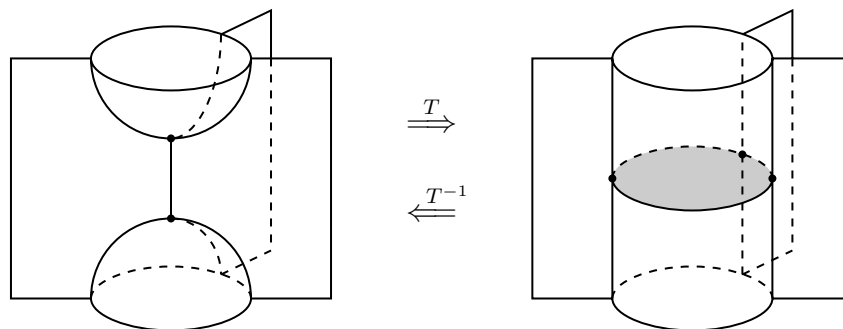


Рис. 1. Преобразования T и T^{-1} .

линки которых гомеоморфны диску, образуют край ∂W многообразия W .

Каждый специальный полиэдр P определяет трехмерное многообразие W_P с непустым краем и $\mathbb{R}P^2$ -особенностями (см. [1; 3, § 1.1.5]). Опишем конструкцию многообразия W_P . Напомним, что для любой 2-компоненты ξ специального полиэдра P имеет место характеристическое отображение $f : D^2 \rightarrow P$, которое гомеоморфно отображает внутренность диска D^2 на ξ и ограничение которого на $S^1 = \partial D^2$ является локальным вложением. Кривая $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow P$ (и ее образ $f|_{\partial D^2}(\partial D^2)$) называется *граничной кривой* 2-компоненты ξ и обозначается через $\partial\xi$. Внутри каждой 2-компоненты ξ полиэдра P выберем точку a_ξ , а внутри каждого ребра e этого полиэдра — точку b_e . Каждую точку a_ξ соединим непересекающимися дугами, лежащими в ξ , со всеми теми точками b_e , которые принадлежат граничной кривой $\partial\xi$. При этом каждому проходу граничной кривой $\partial\xi$ по ребру отвечает своя дуга. Разрежем полиэдр P по всем построенным дугам. Мы получим набор полиэдров R_1, \dots, R_n (n — число истинных вершин полиэдра P), каждый из которых гомеоморфен конусу над полным графом K_4 с четырьмя вершинами. Каждый полиэдр R_j отождествим с объединением линков всех четырех вершин тетраэдра Δ_j в его первом барицентрическом подразделении. Обратно, полиэдр P получается склейкой полиэдров R_1, \dots, R_n . Эта склейка определяет схему \mathcal{D}_P отождествления тетраэдров Δ_j , т. е. разбиение множества всех граней тетраэдров Δ_j на пары и выбор аффинных гомеоморфизмов между гранями каждой пары. Отождествим теперь все грани тетраэдров Δ_j по выбранным гомеоморфизмам. Полученный полиэдр \widehat{W}_P является многообразием с особенностями. Каждая особая точка многообразия \widehat{W}_P получается отождествлением либо вершин, либо барицентров ребер тетраэдров. Вырежем из многообразия \widehat{W}_P окрестности всех точек, получающихся отождествлением вершин тетраэдров. В результате мы получим трехмерное многообразие W_P с непустым краем и $\mathbb{R}P^2$ -особенностями.

Теорема 1 [1, теорема 3]. *Соответствие $P \rightarrow W_P$ индуцирует корректно определенную сюръекцию $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ множества \mathcal{V} всех виртуальных трехмерных многообразий на множество \mathcal{W} всех компактных трехмерных многообразий с непустым краем и $\mathbb{R}P^2$ -особенностями.*

Как было отмечено в [1], многие инварианты трехмерных многообразий продолжаются на виртуальные многообразия. В дальнейшем мы будем использовать следующие инварианты виртуального многообразия $[P]$:

- эйлерову характеристику $\chi(P)$;
- значения инвариантов Тураева — Виро (см. [4]);
- первую группу гомологий $H_1(P)$;
- край ∂W_P многообразия W_P ;
- число $\text{sing}(W_P)$ особых точек многообразия W_P ;
- ориентируемость многообразия W_P .

Отметим, что любое многообразие, имеющее $\mathbb{R}P^2$ -особенности, является неориентируемым, если под этим, как и в случае обычного многообразия, понимать наличие обращаемого ориентацию замкнутого пути. Разумеется, путь не должен проходить через особые точки.

2. Табулирование виртуальных многообразий

2.1. Перечисление специальных полиэдров

Будем табулировать связные виртуальные трехмерные многообразия в порядке возрастания их сложности. Напомним, что *сложность* $cv[P]$ виртуального трехмерного многообразия $[P]$ равна k , если класс эквивалентности $[P]$ содержит специальный полиэдр с k истинными вершинами и не содержит специальных полиэдров с меньшим числом истинных вершин [2].

Идея перечисления специальных полиэдров такова. Сначала для каждого $k \geq 1$ мы перечисляем все связные регулярные графы валентности 4 с k вершинами. Для $k = 1, 2, 3, 4$ число

таких графов равно 1, 2, 4 и 10 соответственно (см. рис. 2). Затем для каждого связного регулярного графа Γ валентности 4 мы перечисляем все специальные полиэдры, особые графы которых изоморфны графу Γ . Более подробное описание построения специальных полиэдров с заданным особым графом см. в [3, гл. 2].

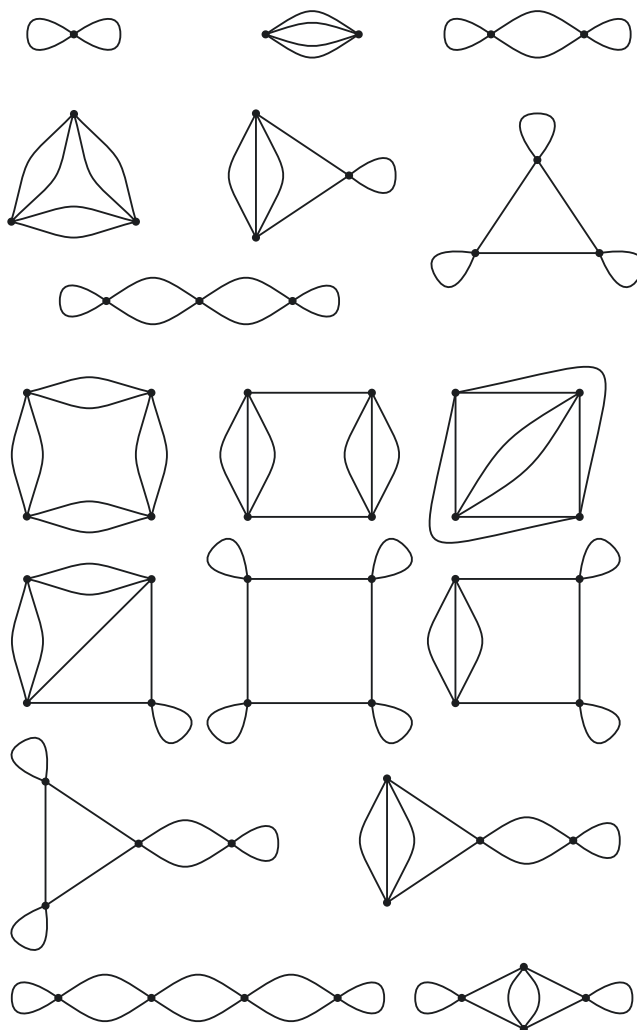


Рис. 2. Регулярные графы валентности 4 с ≤ 4 вершинами.

Приведем результаты компьютерного перечисления специальных полиэдров для $k \leq 4$.

Теорема 2. Число $n(k)$ связных специальных полиэдров с $k \leq 4$ истинными вершинами задается табл. 1:

Т а б л и ц а 1

k	1	2	3	4
$n(k)$	11	169	5959	405607

2.2. Виртуальные многообразия сложности 1

Теорема 3. Существует ровно 11 связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 1.

Т а б л и ц а 2
Виртуальные многообразия сложности 1

	$\sigma(P)$	$\chi(P)$	$sing(W_P)$	W_P	∂W_P
1	$bkaajj$	1	0	$L_{4,1} \setminus D^3$	S^2
2	$bkaagj$	1	0	D^3	S^2
3	$bkaajn$	1	0	$L_{5,2} \setminus D^3$	S^2
4	$bkaagb$	2	0	$S^2 \times [0, 1]$	$S^2 \sqcup S^2$
5	$bkaaid$	0	0	$N1_1$	T^2
6	$bkaaij$	0	1		$\#3\mathbb{R}P^2$
7	$bkaahd$	1	2		$\#2\mathbb{R}P^2$
8	$bkaagd$	1	1		$\mathbb{R}P^2$
9	$bkaahj$	2	3		$\mathbb{R}P^2$
10	$bkaagh$	2	1		$S^2 \sqcup \mathbb{R}P^2$
11	$bkaahh$	3	2		$S^2 \sqcup S^2$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [2, лемма 2] класс эквивалентности $[P]$ любого специального полиэдра P с одной истинной вершиной совпадает с множеством $\{P\}$. Поэтому утверждение теоремы прямо следует из теоремы 2. В табл. 2 для каждого связного виртуально-трехмерного многообразия $[P]$ сложности 1 приведены значения следующих инвариантов: сигнатура $\sigma(P)$ схемы \mathcal{D}_P отождествления тетраэдров Δ_j (подробнее см. в [5]), эйлерова характеристика $\chi(P)$, число особых точек $sing(W_P)$ многообразия W_P , имя многообразия W_P и его край ∂W_P . Эти данные были получены с помощью компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [6].

2.3. Виртуальные многообразия сложности 2

Разобьем множество \mathcal{V} всех виртуальных трехмерных многообразий на три непересекающихся подмножества $\mathcal{V}_{or}, \mathcal{V}_{nor}, \mathcal{V}_{sing}$. Виртуальное многообразие $[P]$ лежит в \mathcal{V}_{or} , если соответствующее ему многообразие W_P ориентируемо и не имеет $\mathbb{R}P^2$ -особенностей. Виртуальное многообразие $[P]$ лежит в \mathcal{V}_{nor} , если многообразие W_P является неориентируемым и не имеет $\mathbb{R}P^2$ -особенностей. Если же многообразие W_P имеет $\mathbb{R}P^2$ -особенности, то виртуальное многообразие $[P]$ лежит в \mathcal{V}_{sing} .

Теорема 4. 1. Множество \mathcal{V}_{or} содержит ровно 29 связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2.

2. Число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве \mathcal{V}_{nor} , находится в пределах от 10 до 23.

3. Число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве \mathcal{V}_{sing} , находится в пределах от 73 до 98.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы является конструктивным и получено с использованием компьютера. Как было замечено в [2, лемма 2], если специальный полиэдр P имеет ровно две истинные вершины, то $sv[P] = 2$. Поэтому для классификации всех связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2 достаточно разбить множество X^2 всех связных специальных полиэдров с двумя истинными вершинами (их 169 согласно теореме 2) на классы эквивалентности.

Первый этап доказательства заключается в разбиении множества X^2 на три непересекающихся подмножества $X_{or}^2, X_{nor}^2, X_{sing}^2$ по тому же самому правилу, что и разбиение множества \mathcal{V} всех виртуальных трехмерных многообразий на подмножества $\mathcal{V}_{or}, \mathcal{V}_{nor}, \mathcal{V}_{sing}$. Данное разбиение было выполнено при помощи компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [6], моди-

фицированной авторами для выполнения этой задачи. В результате оказалось, что множество X_{or}^2 содержит 34, множество X_{nor}^2 — 26 и множество X_{sing}^2 — 109 специальных полиэдров.

Рассмотрим ограничение отображения $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ на объединение множеств \mathcal{V}_{or} и \mathcal{V}_{nor} , из которых исключены все виртуальные многообразия сложности 1. Из [3, теорема 1.1.13 и теорема 1.2.5] следует, что это ограничение является биекцией на множество всех компактных трехмерных многообразий с непустым краем. Поэтому задача классификации виртуальных многообразий, лежащих в множествах \mathcal{V}_{or} и \mathcal{V}_{nor} , эквивалентна задаче классификации соответствующих компактных трехмерных многообразий с непустым краем.

Второй этап доказательства заключается в классификации всех ориентируемых трехмерных многообразий с краем, задаваемых специальными полиэдрами из множества X_{or}^2 . Классификация была выполнена с помощью компьютерных программ 3-Manifold Recognizer [6], SnapPy [7] и работы [8]. Оказалось, что 34 специальных полиэдра из множества X_{or}^2 задают 29 трехмерных многообразий с краем:

- 8 гиперболических многообразий с геодезическим краем, описанных в работе [8];
- 2 гиперболических многообразия $M_{2,1}$, $M_{2,2}$ с каспами из списка [9], одно из которых является дополнительным пространством узла восьмерки;
- 4 многообразия, получающиеся из сферы S^3 удалением k открытых шаров, $k = 1, 2, 3, 4$;
- 4 многообразия, получающиеся из проективного пространства $\mathbb{R}P^3$ и линзового пространства $L_{3,1}$ удалением одного или двух открытых шаров;
- 4 многообразия, получающиеся из многообразий $L_{5,1}$, $L_{7,2}$, $L_{8,3}$ и $S^2 \times S^1$ удалением одного открытого шара;
- 2 многообразия: полноторие и полноторие с удаленным открытым шаром;
- 3 многообразия Зейферта с базой диск D^2 и двумя особыми слоями каждое: $(D^2, (2, 1), (3, 1))$, $(D^2, (3, 1), (3, 1))$ и $(D^2, (3, 1), (3, -1))$;
- многообразии Зейферта $(D^2, (2, 1), (2, 1), (2, -1))$ с удаленным открытым шаром;
- граф-многообразии Вальдхаузена, получающиеся склейкой двух многообразий Зейферта $(A^2, (2, 1))$ и $(D^2, (2, 1), (3, -2))$, где A^2 — кольцо, по гомеоморфизму, задаваемому матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку все вышеперечисленные многообразия различны, множество \mathcal{V}_{or} содержит ровно 29 связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2.

Третий этап доказательства заключается в установлении двусторонних оценок на число виртуальных многообразий, определяемых специальными полиэдрами из множества X_{nor}^2 . Нами была написана компьютерная программа, которая по заданному числу n и специальному полиэдру P строит множество всех эквивалентных ему специальных полиэдров, получающихся из полиэдра P последовательным применением не более чем n преобразований T и T^{-1} . С помощью этой программы (при $n = 6$) была установлена эквивалентность трех пар специальных полиэдров из множества X_{nor}^2 . Тем самым было доказано, что число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве \mathcal{V}_{nor} , не превосходит 23. Далее для каждого специального полиэдра P из множества X_{nor}^2 мы вычислили значения всех инвариантов, перечисленных в конце разд. 2 (инварианты Тураева — Виро вычислялись до порядка 8 включительно). Совместное использование этих инвариантов оказалось не слишком эффективным: удалось доказать только, что число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве \mathcal{V}_{nor} , не меньше 10.

Четвертый этап доказательства аналогичен третьему этапу и заключается в нахождении двусторонних оценок на число виртуальных многообразий, определяемых специальными полиэдрами из множества X_{sing}^2 . Было установлено, что число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве \mathcal{V}_{sing} , находится в пределах от 73 до 98.

Прделанное нами исследование показало, что имеющийся набор инвариантов не позволяет провести полную классификацию виртуальных трехмерных многообразий сложности 2 и больше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Matveev S.V.** Virtual 3-manifolds // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 518–521.
2. **Веснин А.Ю., Тураев В.Г., Фоминых Е.А.** Сложность виртуальных трехмерных многообразий // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 11. С. 4–24. doi: 10.4213/sm8700.
3. **Matveev S.** Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. 2007. 492 p. (Algorithms and Computation in Mathematics; vol. 9.) doi: 10.1007/978-3-540-45899-9.
4. **Turaev V.G., Viro O.Y.** State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols // Topology. 1992. Vol. 31, iss. 4. P. 865–902. doi: 10.1016/0040-9383(92)90015-A.
5. **Burton B.** The Pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations // Proc. of the Twenty-Seventh Annual Symposium on Computational Geometry (SCG'11). N.Y.: ACM, 2011. P. 153–162. doi: 10.1145/1998196.1998220.
6. Atlas of 3-Manifolds [site]: A free software 3-manifold recognizer. URL: <http://matlas.math.csu.ru/> (дата обращения: 15.09.2017).
7. **Culler M., Dunfield N., Goerner M., Weeks J.** SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds [e-resource]. URL: <http://snappy.computop.org/> (дата обращения: 15.09.2017).
8. **Fujii M.** Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra // Tokyo J. Math. 1990. Vol. 13, iss. 2. P. 353–373. doi: 10.3836/tjm/1270132267.
9. **Callahan P., Hildebrand M., Weeks J.** A census of cusped hyperbolic 3-manifolds // Mathematics of Computation. 1999. Vol. 68, iss. 225. P. 321–332. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01036-4.

Сбродова Елена Александровна

Поступила 30.09.2017

канд. физ.-мат. наук

декан

Челябинский государственный университет

e-mail: sbrodova@csu.ru

Таркаев Владимир Викторович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

старший науч. сотрудник

Челябинский государственный университет

e-mail: v.tarkaev@gmail.com

Фоминых Евгений Анатольевич

д-р физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Челябинский государственный университет

e-mail: efominykh@gmail.com

Шумакова Екатерина Валерьевна

старший преподаватель

Челябинский государственный университет

e-mail: shumakova_kate@mail.ru

REFERENCES

1. Matveev S.V. Virtual 3-manifolds. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 518–521.
2. Vesnin A.Yu., Turaev V.G., Fominykh E.A. Complexity of virtual 3-manifolds. *Sb. Math.*, 2016, vol. 207, no. 11, pp. 1493–1511. doi: 10.1070/SM8700.
3. Matveev S. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. Ser. Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 9, 492 p. doi: 10.1007/978-3-540-45899-9.

4. Turaev V.G., Viro O.Y. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. *Topology*, 1992, vol. 31, no. 4, pp. 865–902. doi: 10.1016/0040-9383(92)90015-A.
5. Burton B. *The Pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations*. Proceedings of the twenty-seventh annual symposium on Computational geometry (SCG'11), ACM, New York. 2011, pp. 153–162. doi: 10.1145/1998196.1998220.
6. *Atlas of 3-Manifolds* [site]: A free software 3-manifold recognizer. Available at: <http://matlas.math.csu.ru/> (Access date: 15.09.2017).
7. Culler M., Dunfield N., Goerner M., Weeks J. *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*. Available at: <http://snappy.computop.org/> (Access date: 15.09.2017).
8. Fujii M. Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra. *Tokyo J. Math.*, 1990, vol. 13, no. 2, pp. 353–373. doi: 10.3836/tjm/1270132267.
9. Callahan P., Hildebrand M., Weeks J. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. *Mathematics of Computation*, 1999, vol. 68, no. 225, pp. 321–332. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01036-4.

The paper was received by the Editorial Office on September 30, 2017.

Elena Aleksandrovna Sbrodova, Cand. Sci.(Phys.-Math.), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: sbrodova@csu.ru.

Vladimir Viktorovich Tarkaev, Cand. Sci.(Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: v.tarkaev@gmail.com.

Evgeny Anatol'evich Fominykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: efominykh@gmail.com.

Ekaterina Valer'evna Shumakova, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: shumakova_kate@mail.ru.