ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 515.126.27+517.988.523

# О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК РАЗЛОЖИМЫХ МОНОТОННЫХ СУБОДНОРОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

**Вл. Д. Мазуров**[1] **А. И. Смирнов**

Анализируется структура множества нетривиальных равновесий монотонной субоднородной дискретной динамической системы на неотрицательном ортанте конечномерного евклидова пространства при возможно более слабых дополнительных предположениях. При этом используется введенное авторами понятие локальной неразложимости нелинейного отображения. Показано, что необходимыми условиями существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на различных лучах, выходящих из начала координат, являются разложимость отображения хотя бы в одной из них и положительная однородность части компонент отображения на содержащих положительные неподвижные точки участках этих лучей. В частности, для вогнутых отображений это означает разложимость отображения в нуле. Как следствие, получено обобщение теоремы о единственности луча, содержащего положительные неподвижные точки такого отображения, использующее в качестве дополнительного условия лишь неразложимость отображения на множестве его положительных неподвижных точек. В этом случае множество всех положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения образует сплошную часть некоторого луча, выходящего из начала координат.

Ключевые слова: монотонное отображение, субоднородное отображение, локальная неразложимость отображения, неподвижные точки.

**Vl. D. Mazurov, A. I. Smirnov. The structure of the fixed point set of a reducible monotone subhomogeneous mapping.**

We analyze the structure of the set of nontrivial equilibria for a monotone subhomogeneous discrete-time dynamical system on the nonnegative orthant of a finite-dimensional Euclidean space under as weak additional assumptions as possible. We use the notion of local irreducibility of a nonlinear mapping introduced by the authors. It is shown that, if a monotone subhomogeneous mapping has positive fixed points lying on different rays starting at the origin, then this mapping is reducible at at least one of them and a part of the components of the mapping are positively homogeneous on segments of these rays containing the positive fixed points. In particular, for concave mappings, this means the reducibility of the mapping at zero. As a result, we obtain a generalization of the theorem on the uniqueness of the ray containing the positive fixed points of such a mapping with the only additional assumption that the mapping is irreducible on the set of its positive fixed points. In this case, the set of all positive fixed points of a monotone subhomogeneous mapping forms a continuous part of some ray starting at the origin.

Keywords: monotone mapping, subhomogeneous mapping, local irreducibility of a mapping, fixed points.

**MSC:** 47N05, 37N25, 37N40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-222-231

## 1. Постановка задачи и основные определения

Рассматривается итерационный процесс

$$x_{t+1} = F(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^q_+$ пространства $\mathbb{R}^q$. Предполагается, что отображение $F$ имеет нулевую неподвижную точку: $F(0) = 0$. Асимптотические свойства итерационного процесса (1)

---

[1] *25 лет назад* вышла первая в нашем журнале статья Владимира Даниловича:

Мазуров Вл. Д. Модели интерпретации противоречивых данных и метод комитетов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 193–203.

для некоторых классов нелинейных отображений изучены для монотонных положительно однородных отображений в работах [1; 2], для монотонных субоднородных отображений в банаховых пространствах — в работе [3] (соответствующие определения будут даны ниже; обзор результатов по субоднородным отображениям можно найти в работах [3–7]). В частности, известно, что при достаточно сильных предположениях имеет место сходимость итерационного процесса (1) к положительной неподвижной точке отображения $F$ в случае ее существования.

Условия существования ненулевой неподвижной точки монотонного субоднородного отображения изучались в работе [5]; в частности, получен критерий ее существования и единственности. Здесь же изучена структура множества неподвижных точек глобально неразложимого монотонного субоднородного отображения в ситуации, когда ненулевая неподвижная точка не является единственной.

Равенство $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ $(0 < \alpha \neq 1)$, выполненное для ненулевой неподвижной точки $x$, означает существование еще по крайней мере одной ненулевой неподвижной точки отображения $F$ на бесконечном луче $R_x = \{\alpha x \colon \alpha \in [0, +\infty)\}$, содержащем точку $x$, который далее будем кратко называть просто *луч*. Поэтому при характеристике структуры множества неподвижных точек субоднородного отображения имеет смысл прежде всего рассмотреть случай, когда они лежат на одном луче.

Для некоторых классов отображений эта ситуация не имеет альтернативы: при некоторых дополнительных предположениях можно показать отсутствие положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на *разных* лучах, т. е. на лучах, имеющих только одну общую точку — начало координат. Это свойство первоначально было получено для класса монотонных субоднородных примитивных сепарабельных преобразований неотрицательного ортанта евклидова пространства [8], в работах [9; 10] оно установлено для сильно монотонной дискретной динамической системы в банаховом пространстве. В работе [3] для доказательства соответствующего утверждения помимо условий монотонности и субоднородности используется условие типа локальной примитивности отображения. В работе [5] для доказательства единственности луча, содержащего неподвижные точки, использовалось более слабое условие глобальной неразложимости.

Таким образом, необходимым условием существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на разных лучах, является условие его разложимости. В связи с этим возникает необходимость более тонкого анализа самого понятия глобальной неразложимости для того, чтобы получить более содержательные необходимые условия существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на разных лучах. Для решения этой задачи оказывается полезным введенное в работе [11] понятие локальной неразложимости отображения.

Цель данной работы — получение необходимых условий существования неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на разных лучах, в терминах локальной неразложимости отображения, а также исследование структуры множества положительных неподвижных точек этого класса отображений при возможно более слабых дополнительных требованиях к отображению.

Будем использовать следующие обозначения: $x \leqq y$ означает $y - x \in \mathbb{R}^q_+$, $x < y$ означает $y - x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^q_+$; пишем $x \leq y$ в случае $x \leqq y,\ x \neq y$.

Векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ и $F(x) = (f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_q(x))$ будут кратко записываться в виде $x = (x_i)$ и $F(x) = (f_i(x))$ соответственно. Итерации отображения $F$ обозначаются $F^t(x)$ $(t = 1, 2, \ldots)$, $F^0(x) \equiv x$. Для числа элементов конечного множества $M$ используется обозначение $|M|$.

Используемые далее термины и понятия определены в работе [12]. Приведем здесь только определение основного требования к отображению $F$, которым в данной работе является свойство его субоднородности. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *субоднородным*, если выполнено условие

$$F(\alpha x) \geqq \alpha F(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^q_+,\ \alpha \in [0, 1]). \tag{2}$$

Нетрудно показать, что субоднородность отображения равносильна свойству

$$F(\beta x) \leqq \beta F(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^q_+,\ \beta \in [1, +\infty)). \tag{3}$$

Заметим, что вогнутое на $\mathbb{R}^q_+$ отображение является монотонным и субоднородным.

## 2. Понятие локальной неразложимости нелинейного отображения

Существуют различные обобщения понятия неразложимости (irreducibility, indecomposability) матрицы для нелинейных отображений (их обзор и некоторые свойства приведены в работах [11; 12]). В настоящее время классическим является определение неразложимости М. Моришимы [1]. Удобно ввести это определение с использованием следующих обозначений:

$$I^+(x,y) = \{j \in \overline{1,q}\colon x_j > y_j\}, \qquad I^0(x,y) = \{j \in \overline{1,q}\colon x_j = y_j\},$$

$$I^+(x) = \{i \in \overline{1,q}\colon x_i > 0\}, \qquad I^0(x) = \{i \in \overline{1,q}\colon x_i = 0\}.$$

Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым*, если

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^q_+\colon \qquad x \geq y, \qquad I^0(x,y) \neq \varnothing, \qquad I^0(x,y) \subseteq I^0(F(x), F(y)).$$

Соответственно отображение $F$ называется *неразложимым*, если оно не является разложимым. Для монотонного отображения это означает следующее:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+\colon \qquad x \geq y, \qquad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \cap I^+(F(x), F(y)) \neq \varnothing. \tag{4}$$

Поскольку далее используется также понятие неразложимости отображения в точке, будем называть неразложимое в смысле (4) отображение *глобально неразложимым* на $\mathbb{R}^q_+$.

Как уже отмечалось выше, наряду с классическим определением понятия глобальной неразложимости существует его локальный аспект [11]. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым в точке* $y \in \mathbb{R}^q_+$, если

$$\exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon \qquad x \geq y, \qquad I^0(x,y) \neq \varnothing, \qquad I^0(x,y) \subseteq I^0(F(x), F(y)). \tag{5}$$

Отображение, разложимое в каждой точке множества $M$, называется *разложимым на* $M$.

Соответственно монотонное отображение $F$ является *неразложимым в точке* $y$, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon \qquad x \geq y, \qquad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \cap I^+(F(x), F(y)) \neq \varnothing.$$

Отображение, неразложимое в каждой точке множества $M$, называется *неразложимым на* $M$.

Отдельно рассмотрим случай неразложимости отображения в точке $y = 0$. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым в нуле*, если

$$\exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon \qquad x \geq 0, \qquad I^0(x) \neq \varnothing, \qquad I^0(x) \subseteq I^0 F(x). \tag{6}$$

Соответственно монотонное отображение $F$ является *неразложимым в нуле*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon \qquad x \geq 0, \qquad I^0(x) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x) \cap I^+ F(x) \neq \varnothing.$$

Понятно, что глобальная неразложимость отображения означает неразложимость в любой точке $\mathbb{R}^q_+$ и, в частности, неразложимость в нуле. Условия локальной неразложимости субоднородных отображений и их свойства рассмотрены в работе [12], как и некоторые условия совпадения понятий неразложимости в нуле и глобальной неразложимости.

Для монотонных субоднородных отображений неразложимость в нуле является более слабым свойством по сравнению с примитивностью в нуле [5, лемма 2.1.12]. Тем не менее неразложимость в нуле также гарантирует положительность ненулевых неподвижных точек.

Это важное свойство справедливо для любых неразложимых в нуле отображений. Действительно, предположив $I^0(\bar{x}) \neq \varnothing$ для некоторого вектора $\bar{x} \geq 0$, из равенств $f_i(\bar{x}) = \bar{x}_i$ получаем $I^0(\bar{x}) \subseteq I^0(F(\bar{x}))$, что в соответствии с (6) означает разложимость отображения $F$ в нуле. Поэтому $I^0(\bar{x}) = \varnothing$, т. е. $\bar{x} > 0$.

## 3. Характеристика структуры множества неподвижных точек субоднородных монотонных отображений

В дополнение к требованиям монотонности и субоднородности предположим выполненным следующее естественное требование, исключающее возможность наличия тождественно нулевых компонент отображения $F(x) = (f_i(x))$:

$$\forall i \in \overline{1,q} \qquad \exists x \in \mathbb{R}^q_+ \colon f_i(x) > 0.$$

Это свойство всегда выполнено, например, для неразложимых в нуле отображений. Как показано в работе [12, замечание], это предположение гарантирует положительность образа всякого положительного вектора при монотонном субоднородном преобразовании: $F(\operatorname{int}\mathbb{R}^q_+) \subseteq \operatorname{int}\mathbb{R}^q_+$, что дает возможность использовать так называемую метрику Биркгофа—Томпсона [3; 13; 14]. Эта метрика, заданная на внутренности положительного конуса, весьма эффективна в исследованиях субоднородных динамических систем (см. обзоры [3; 5]). Субоднородное монотонное отображение является нерасширяющим в метрике Биркгофа—Томпсона (и, следовательно, непрерывно) на внутренности положительного конуса в банаховом пространстве [3, lemma 2.1.7]. Более того, субоднородное монотонное отображение всегда имеет непрерывное расширение, в данном случае, на весь конус $\mathbb{R}^q_+$ [3, theorem 5.1.2], поэтому можно считать субоднородное монотонное отображение непрерывным на всем $\mathbb{R}^q_+$.

Пусть $N_F$ обозначает множество ненулевых неподвижных точек отображения $F$, $N_F^+$ — множество положительных неподвижных точек отображения $F$, множество $N_F^0 = N_F \cup \{0\}$ содержит все его неподвижные точки, включая нулевую. Как мы видели выше, для неразложимых в нуле отображений справедливо равенство $N_F = N_F^+$.

Далее нам понадобятся следующие свойства субоднородных функций [5, теорема 2.1.1], определенных на $\mathbb{R}^q_+$ $(f(0) = 0)$:

$$f(\alpha_0 x) = \alpha_0 f(x), \qquad 0 < \alpha_0 < 1 \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad (\forall \alpha \in [\alpha_0, 1]), \tag{7}$$

$$f(\beta_0 x) = \beta_0 f(x), \qquad \beta_0 > 1 \Rightarrow f(\beta x) = \beta f(x) \qquad (\forall \beta \in [1, \beta_0]). \tag{8}$$

Для вогнутой на $\mathbb{R}^q_+$ функции $f(x)$ $(f(0) = 0)$ справедливо более сильное свойство:

$$f(\alpha_0 x) = \alpha_0 f(x), \qquad 0 < \alpha_0 \neq 1 \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad (\forall \alpha \in [0, \alpha_0]). \tag{9}$$

Следующее утверждение дает необходимые условия существования положительных неподвижных точек монотоного субоднородного отображения на разных лучах. Напомним, что под лучом, определяемым точкой $x \neq 0$, понимается множество $R_x = \{\alpha x \colon \alpha \in [0, +\infty)\}$.

**Теорема.** *Пусть отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ является монотонным и субоднородным, $F(0) = 0$. Если существуют положительные неподвижные точки $\bar{x}$, $\bar{y}$ отображения $F$, лежащие на разных лучах, то отображение $F$ разложимо хотя бы в одной из этих неподвижных точек и часть его компонент имеет участки положительной однородности на лучах $R_{\bar{x}}$, $R_{\bar{y}}$ :*

$$\exists\, I,\ \varnothing \neq I \neq \overline{1,q} \colon \qquad f_i(\alpha x) = \alpha f_i(x) \qquad (\forall i \in I,\ x \in \{\bar{x}, \bar{y}\},\ \alpha \in \Delta_x), \tag{10}$$

*где $\Delta_x$ — некоторый интервал числовой оси.*

*Более того, если отображение $F$ разложимо в точке $x \in \{\bar{x}, \bar{y}\}$, то оно разложимо также и на всем множестве $H_x = \{\alpha x \colon \alpha \in \Delta_x\}$.*

Доказательство. Введем величины

$$a = \max\{\alpha \colon \bar{y} \geqq \alpha \bar{x}\}, \qquad b = \max\{\beta \colon \bar{x} \geqq \beta \bar{y}\}. \tag{11}$$

В силу положительности векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$ эти величины также положительны. Справедливы также неравенства $\bar{y} \geqq a\bar{x}$, $\bar{x} \geqq b\bar{y}$, причем $\varnothing \neq I^0(\bar{y}, a\bar{x}) \neq \overline{1,q}$, $\varnothing \neq I^0(\bar{x}, b\bar{y}) \neq \overline{1,q}$, по определению величин $a, b$ и в силу предположения $R_{\bar{x}} \cap R_{\bar{y}} = \{0\}$. Хотя бы одна из этих величин, очевидно, строго меньше единицы.

Если $a \in (0,1)$, то из неравенства $\bar{y} \geqq a\bar{x}$ в силу монотонности и субоднородности отображения $F$, благодаря неравенству (3), для всех $i \in I = I^0(\bar{y}, a\bar{x})$ получаем

$$\bar{x}_i = a^{-1}\bar{y}_i = a^{-1}f_i(\bar{y}) \geqslant f_i(a^{-1}\bar{y}) \geqslant f_i(\bar{x}) = \bar{x}_i,$$

т. е. $f_i(a^{-1}\bar{y}) = f_i(\bar{x})$ и $f_i(a^{-1}\bar{y}) = a^{-1}f_i(\bar{y})$. Первое равенство означает, согласно (5), разложимость отображения $F$ в точке $\bar{x}$, второе, в силу свойства (8), — положительную однородность компонент $f_i(x)$ $(i \in I)$ на участке $\mathrm{co}\{\bar{y}, a^{-1}\bar{y}\}$ луча $R_{\bar{y}}$, т. е. свойство (10) выполнено для точки $x = \bar{y}$ при $\Delta_{\bar{y}} = (1, a^{-1})$.

Далее, точно так же используя монотонность и субоднородность отображения $F$, с учетом неравенства (2) получаем цепочку неравенств

$$\bar{y}_i = a\bar{x}_i = af_i(\bar{x}) \leqslant f_i(a\bar{x}) \leqslant f_i(\bar{y}) = \bar{y}_i.$$

Отсюда следуют равенства $f_i(\bar{y}) = f_i(a\bar{x})$ и $f_i(a\bar{x}) = af_i(\bar{x})$, означающие разложимость отображения $F$ в точке $a\bar{x}$ и, на этот раз в силу свойства (7), положительную однородность компонент $f_i(x)$ $(i \in I)$ отображения $F$ на участке $\mathrm{co}\{a\bar{x}, \bar{x}\}$ луча $R_{\bar{x}}$, так что свойство (10) выполнено и для точки $x = \bar{x}$ при $\Delta_{\bar{x}} = (a, 1)$.

Покажем разложимость отображения $F$ также в точках $\tilde{x} = \alpha\bar{x}$ при $\alpha \in (a, 1)$. Действительно, для вектора $\tilde{y} = \beta\bar{y}$, где $\beta = \alpha a^{-1} \in [1, a^{-1}]$, имеем $I^0(\tilde{x}, \tilde{y}) = I^0(a\bar{x}, \bar{y}) = I$. Для всех $i \in I$, $\alpha \in (a, 1)$ с учетом доказанных равенств $f_i(\alpha\bar{x}) = \alpha f_i(\bar{x})$, $f_i(\beta\bar{y}) = \beta f_i(\bar{y})$, $f_i(\bar{x}) = f_i(a^{-1}\bar{y})$ получаем

$$f_i(\tilde{x}) = f_i(\alpha\bar{x}) = \alpha f_i(\bar{x}) = \alpha f_i(a^{-1}\bar{y}) = \alpha a^{-1} f_i(\bar{y}) = \beta f_i(\bar{y}) = f_i(\beta\bar{y}) = f_i(\tilde{y}),$$

т. е. $f_i(\tilde{x}) = f_i(\tilde{y})$ и, следовательно, $I^0(\tilde{x}, \tilde{y}) \subseteq I^0(F(\tilde{x}), F(\tilde{y}))$. С учетом неравенства $\tilde{y} \geq \tilde{x}$ это означает, согласно (5), разложимость отображения $F$ в точке $\tilde{x} \in H_{\bar{x}} = \{\alpha\bar{x} \colon \alpha \in (a, 1)\}$.

Аналогично в случае $b \in (0,1)$ из неравенства $\bar{x} \geqq b\bar{y}$ следует разложимость отображения $F$ в точках $\bar{y}$, $b\bar{y}$, справедливость свойства (10) для точек $x = \bar{x}$ (при $\Delta_{\bar{x}} = (1, b^{-1})$) и $x = \bar{y}$ (при $\Delta_{\bar{y}} = (b, 1)$), а также разложимость отображения $F$ на множестве $H_{\bar{y}} = \{\beta\bar{y} \colon \beta \in (b, 1)\}$.

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что если для положительной неподвижной точки $\bar{x}$ существует положительная неподвижная точка $\bar{y}$, которая либо несравнима с ней, либо является ее минорантой, то для величины $a$ из (11) справедливо неравенство $a < 1$, которое имеет следствием разложимость отображения $F$ в точке $\bar{x}$. Это означает, что монотонное субоднородное отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ $(F(0) = 0)$ всегда разложимо на множестве

$$D^+_F = \{x \in N^+_F \mid \exists y \in N^+_F,\ y \notin R_x \colon y \ngeqq x\}.$$

Множество положительных неподвижных точек монотонного положительно однородного отображения наряду с каждой положительной неподвижной точкой $y$ содержит весь определяемый ею луч $R_y$, поэтому для такого отображения $D^+_F = N^+_F$. Таким образом, справедливо

**Следствие 1.** *Монотонное положительно однородное отображение, имеющее положительные неподвижные точки, лежащие на разных лучах, разложимо на всем множестве положительных неподвижных точек $N^+_F$.*

Заметим, что всякое монотонное субоднородное отображение, имеющее бесконечную ветвь положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, такую, что для каждой положительной неподвижной точки существует лежащая на другом луче меньшая положительная неподвижная точка, также разложимо на всем множестве положительных неподвижных точек. Далее будет приведен пример, иллюстрирующий теорему, описывающий такую ситуацию для вогнутого отображения.

Обозначим через $S_x$ множество точек отрезка, соединяющего начало координат с точкой $x$: $S_x = \mathrm{co}\{0, x\}$. Уточним заключение теоремы для класса вогнутых отображений.

**Следствие 2.** *Пусть вогнутое на* $\mathbb{R}^q_+$ *отображение* $F$ $(F(0) = 0)$ *имеет положительные неподвижные точки* $\bar{x}$, $\bar{y}$, *лежащие на разных лучах. Тогда это отображение разложимо хотя бы на одном из отрезков* $S_{\bar{x}}$, $S_{\bar{y}}$ *лучей* $R_{\bar{x}}$, $R_{\bar{y}}$ *и часть его компонент положительно однородна на этих отрезках*:

$$\exists\, I,\ \varnothing \neq I \neq \overline{1,q}\colon \qquad f_i(\alpha x) = \alpha f_i(x) \qquad (\forall i \in I,\ x \in \{\bar{x}, \bar{y}\},\ \alpha \in [0,1]).$$

*В частности, отображение* $F$ *является разложимым в нуле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вогнутое на $\mathbb{R}^q_+$ отображение является субоднородным, поэтому для него справедливо заключение доказанной выше теоремы. В частности, согласно свойствам (7)–(9), каждое из множеств $\Delta_{\bar{x}}$, $\Delta_{\bar{y}}$ содержит отрезок $[0,1]$, поскольку отображение $F$ положительно однородно на отрезках $S_{\bar{x}}$, $S_{\tilde{x}}$, где $\tilde{x} = a^{-1}\bar{y}$.

Доказательство разложимости отображения хотя бы на одном из множеств $H_{\bar{x}}$, $H_{\bar{y}}$, где $H_x = \{\alpha x\colon \alpha \in (0,1)\}$, аналогично соответствующему в теореме; осталось показать разложимость отображения $F$ в нуле. Как и выше, приведем доказательство для случая $a \in (0,1)$, где $a$ определено в (11).

Как доказано в теореме, отображение $F$ разложимо в точке $\bar{x}$, поскольку $\tilde{x} \geq \bar{x}$ и $f_i(\tilde{x}) = f_i(\bar{x})$ для всех $i \in I = I^0(\tilde{x}, \bar{x})$. Имеет место также положительная однородность компонент $f_i(x)$ $(\forall i \in I)$ отображения $F$ на отрезке $S_{\tilde{x}}$: $f_i(\alpha\tilde{x}) = \alpha f_i(\tilde{x})$ $(\forall i \in I,\ \alpha \in [0,1])$. В силу вогнутости отображения $F$ имеем: $f_i((\tilde{x} - \bar{x})/2 + \bar{x}/2) \geqslant [f_i(\tilde{x} - \bar{x}) + f_i(\bar{x})]/2$. Отсюда получаем $0 \leqslant f_i(\tilde{x} - \bar{x}) \leqslant 2f_i(\tilde{x}/2) - f_i(\bar{x}) = f_i(\tilde{x}) - f_i(\bar{x}) = 0$ $(\forall i \in I)$. Поэтому для вектора $y = \tilde{x} - \bar{x}$ имеем $y \geq 0$, $f_i(y) = 0$ $(\forall i \in I)$, $I = I^0(y)$, что, согласно (6), означает разложимость отображения $F$ в нуле.

Следствие доказано.

Полученное данным следствием свойство разложимости в нуле монотонного субоднородного отображения (и вогнутого отображения, в частности) достаточно легко проверяемо. Его проверка, как показано в работе [12], может быть сведена к более простой проверке наличия этого свойства у некоторого положительно однородного отображения, сопутствующего исходному субоднородному отображению; так, для сепарабельных монотонных субоднородных отображений разложимость в нуле означает разложимость некоторой матрицы.

Для иллюстрации доказанных выше утверждений рассмотрим вогнутое на $\mathbb{R}^2_+$ отображение $F_a(x) = (x_1/(1 + x_1) + x_2,\ \min\{ax_1, x_2\})$, зависящее от параметра $a \in (0,1]$. Это отображение разложимо на множестве $K_1(a) = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_2 \leqslant ax_1\}$ (в том числе разложимо в нуле) и неразложимо на множестве $K_2(a) = \{x = (x_1, x_2)\colon x_2 > ax_1 \geqslant 0\}$.

В частности, отображение $F_1$ разложимо на множестве $K_1 = \{x = (x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1\}$ и неразложимо на множестве $K_2 = \{x = (x_1, x_2)\colon x_2 > x_1 \geqslant 0\}$. Множество его неподвижных точек имеет вид $N_1 = \{x = (x_1, \varphi(x_1)\colon x_1 \in [0, +\infty))\}$, где $\varphi(x_1) = x_1^2/(1 + x_1)$. Поскольку $\varphi(x_1) \leqslant x_1$, отображение $F_1$ разложимо в каждой своей неподвижной точке и, более того, разложимо на любом луче, содержащем положительную неподвижную точку, что соответствует выводам следствия 2.

Заметим, что каждый такой луч содержит единственную положительную неподвижную точку отображения $F_1$.

Множество положительных неподвижных точек отображения $F_a$ при $a \in (0,1)$ имеет вид $N_a = \{x = (x_1, \varphi(x_1))\colon 0 < x_1 \leqslant a/1 - a\}$. Нетрудно заметить, что $N_a = N_1 \cap K_1(a)$, т.е. множество неподвижных точек отображения $F_a$ получается из множества неподвижных точек отображения $F_1$ удалением тех точек, в которых отображение $F_a$ неразложимо. Таким образом, в полном сответствии с заключением следствия 2 при уменьшении параметра $a$ от единицы до нуля (не достигая последнего) множество неподвижных точек отображения $F_a$, лежащих на разных лучах, сокращается на ту его часть, где отображение $F_a$ становится неразложимым.

Согласно предыдущему утверждению вогнутое на $\mathbb{R}^q_+$ отображение, имеющее положительные неподвижные точки $\bar{x}$, $\bar{y}$ на разных лучах, обязательно разложимо в нуле. С другой стороны ненулевые неподвижные точки неразложимого в нуле отображения $F$ положительны. Поэтому справедливо

**Следствие 3.** *Вогнутое на $\mathbb{R}^q_+$ неразложимое в нуле отображение $F$ ($F(0) = 0$) не может иметь ненулевых неподвижных точек, лежащих на разных лучах*: $R_x = R_y$ ($\forall x, y \in N_F$).

Заметим, что это следствие вполне согласуется с тем фактом, что неразложимость лишь в нуле положительно однородного вогнутого отображения приводит к его неразложимости на всем $\mathbb{R}^q_+$, т. е. к глобальной неразложимости отображения, имеющей следствием единственность луча положительных неподвижных точек [5, теорема 2.2.2].

Используя теорему, требование глобальной неразложимости в указанном выше утверждении об единственности луча положительных неподвижных точек можно существенно ослабить. Справедливо следующее обобщение теоремы 2.2.2 из [5].

**Следствие 4.** *Если монотонное субоднородное отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ ($F(0) = 0$) неразложимо в точках $x \in N_F^+$, $y \in N_F^+$, то $R_x = R_y$.*

Таким образом, для единственности луча, содержащего множество положительных неподвижных точек субоднородного монотонного отображения, достаточно его неразложимости лишь на этом множестве. В частном случае положительно однородного отображения данное утверждение является обобщением классической теоремы об единственности собственного луча, — луча, содержащего собственные векторы положительно однородного отображения, соответствующие доминирующему собственному вектору [2, теорема 10.4].

Неразложимость отображения в нуле, если она имеется, гарантирует положительность его ненулевых неподвижных точек. Но здесь следствие 4 применимо, в отличие от вышеупомянутых результатов из [5], и для разложимых в нуле отображений, ненулевые неподвижные точки которых заведомо положительны. Универсальным примером таких отображений является класс монотонных субоднородных отображений, неразложимых на множестве $\mathbb{R}^q_+ \setminus \{0\}$. Этот класс, в частности, содержит положительно однородные сильно монотонные отображения с компонентами вида $f_i(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_q^{\alpha_q}$, где $\alpha_j \geqslant 0$ ($\forall j \in \overline{1,q}$), $\sum_{j=1}^q \alpha_j = 1$. Такие отображения имеют единственный собственный луч, хотя не удовлетворяют предположениям соответствующих классических утверждений, требующих глобальной неразложимости отображения. Следствие 4 показывает, что понятие локальной неразложимости позволяет прояснить причины этой ситуации.

Существенность требования неразложимости в следствии 4, согласно следствию 1, демонстрирует любое монотонное положительно однородное отображение, разложимое на всем множестве положительных неподвижных точек при существовании хотя бы двух лучей, содержащих часть этих точек. Для иллюстрации существенности требования неразложимости можно привести также пример отображения, которое не является ни положительно однородным, ни вогнутым. Рассмотрим субоднородное монотонное отображение $F$ с компонентами

$$f_1(x) = \min\{\sqrt{(x_1 + x_2)/2}, (x_1 + x_2)/2\}, \qquad f_2(x) = \max\{x_1, x_2\}.$$

Множество неподвижных точек этого отображения состоит из части луча $S = S_{\bar{x}}$, где $\bar{x} = (1, 1)$, и части кривой $T = \{(x_1, \varphi(x_1))\colon x_1 \in (1, +\infty)\}$, где $\varphi(x_1) = 2x_1^2 - x_1$. Данное отображение неразложимо на множестве $K_1 = \{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1\}$, в том числе неразложимо в нуле, и разложимо на множестве $K_2 = \{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_1 < x_2\}$. Как видно, $N_F^+ \cap K_1 = S$, $N_F^+ \cap K_2 = T$, т. е. часть множества положительных неподвижных точек, лежащая в области неразложимости отображения, лежит на луче $R_{\bar{x}}$, а другая его часть, лежащая в области разложимости отображения, содержит неподвижные точки, принадлежащие разным лучам.

## 4. Заключение

Доказанная теорема демонстрирует эффективность понятия локальной неразложимости отображения при анализе последствий существования положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах. Оказывается, полученная в [5] глобальная разложимость отображения обусловлена его разложимостью хотя бы в одной из этих неподвижных точек.

Другим интересным и в какой-то степени неожиданным заключением теоремы, еще требующим своего осмысления, является положительная однородность части компонент отображения на отрезках лучей, содержащих положительные неподвижные точки.

Хотя в теореме речь идет лишь о существовании положительных неподвижных точек, в которых имеет место разложимость отображения, как показывают следствие 1 и приведенные примеры, возможны ситуации, когда отображение разложимо на всем множестве положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах. Примечательно, что это справедливо, в частности, для всякого монотонного положительно однородного отображения.

Для вогнутого на $\mathbb{R}^q_+$ отображения следствием существования положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, является разложимость отображения в нуле (следствие 2). Последнее свойство замечательно тем, что не требует какой-либо информации о самих положительных неподвижных точках, нахождение которых на разных лучах приводит к этому свойству. Это свойство приводит к простому достаточному условию единственности луча положительных неподвижных точек — неразложимость отображения в нуле (следствие 3).

В качестве еще одного следствия теоремы получено обобщение вышеупомянутого результата из [5] — достаточное условие единственности луча положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, предполагающее неразложимость лишь на множестве этих точек (следствие 4). По-видимому, это предположение является максимально возможным ослаблением требования глобальной неразложимости, сохраняющим справедливость свойства единственности луча положительных неподвижных точек, в классе монотонных субоднородных отображений.

Вместе с тем, ситуация существования положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, требует дальнейшего изучения. Открытыми остаются многие вопросы, в том числе вопрос о числе положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах: может ли множество таких точек при каких-либо условиях быть конечным или, как в приведенных примерах, всегда имеется бесконечная ветвь положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, в случае существования хотя бы двух таких точек. Решение этих вопросов потребует дальнейшего развития аппарата локально неразложимых отображений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Моришима М.** Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972. 280 с.
2. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 518 с.
3. **Lemmens B., Nussbaum R. D.** Nonlinear Perron–Frobenius Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. 323 p. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 189).
4. **Krause U.** Positive dynamical systems in discrete time: theory, models and applications. Berlin; Munich; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015. 363 p.
5. **Смирнов А. И.** Равновесие и устойчивость субоднородных монотонных дискретных динамических систем. Екатеринбург: Изд-во УИЭУиП, 2016. 318 с.
6. **Смирнов А. И.** Субоднородные монотонные отображения в мультипликативной и аддитивной нелинейной теории Перрона — Фробениуса // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 2(35). С. 8–25.
7. **Смирнов А. И.** Субоднородные отображения в теории монотонных динамических систем // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 1 (34). С. 68–80.
8. **Смирнов А. И.** Анализ развития популяции в условиях нестационарной среды // Методы для нестационарных задач математического программирования / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. С. 94–103.

9. **Takač P.** Asymptotic behavior of discrete-time semigroups of sublinear, strongly increasing mappings with applications to biology // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 1990. Vol. 14(1). P. 35–42.
10. **Hirsch M. W., Smith H. L.** Monotone Dynamical Systems // Handbook of Differential Eqns: Ordinary Differential Eqns. / eds. A. Canada, P. Drabek, A. Fonda, B. V. Elsevier Amsterdam, 2005. Vol. II. P. 239–357.
11. **Смирнов А. И.** О некоторых ослаблениях понятия неразложимости // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 2(35). С. 26–30.
12. **Мазуров Вл. Д., Смирнов А. И.** Условия неразложимости и примитивности монотонных субоднородных отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 169–177. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-169-177.
13. **Lemmens B., Roelands M.** Unique geodesics for Thompson's metric // Ann. Institut Fourier. 2015. Vol. 65, № 1. P. 315–348.
14. **Опойцев В. И.** Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. 245 с.

Мазуров Владимир Данилович
д-р физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: mazurov@imm.uran.ru

Поступила 15.03.2017

Смирнов Александр Иванович
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: asmi@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Morishima M. *Equilibrium, Stability and Growth: A Multi-Sectoral Analysis.* Oxford University Press. 1964. 240 p. ISBN: 0-19-828145-5. Translated to Russian under the title *Ravnovesie, ustoichivost', rost.* Moscow, Nauka Publ. 1972. 280 p.
2. Nikaido H. *Convex Structures and Economic Theory.* Mathematics in Science and Engineering. Vol. 51. New York, Academic Press. 1968. 405 p. ISBN: 1483253287. Translated to Russian under the title *Vypuklye struktury i matematicheskaya ekonomika.* Moscow, Mir Publ. 1972. 518 p.
3. Lemmens B., Nussbaum R. D. *Nonlinear Perron—Frobenius Theory.* Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 189. Cambridge, Cambridge Univ. Press. 2012. 323 p. doi: 10.1017/CBO9781139026079.
4. Krause U. *Positive dynamical systems in discrete time: theory, models and applications.* Berlin; Munich; Boston: Walter de Gruyter GmbH. 2015. 363 p. ISBN: 9783110369755.
5. Smirnov A.I. *Ravnovesie i ustoichivost' subodnorodnykh monotonnykh diskretnykh dinamicheskikh sistem* (Equilibrium and stability of subhomogeneous monotone discrete dynamical systems). Ekaterinburg, Izd-vo Ural'skogo instituta ekonomiki upravleniya i prava. 2016. 318 p.
6. Smirnov A.I. The use of subhomogeneous monotone maps in multiplicative and additive nonlinear Perron—Frobenius theory. *Vestn. Ural. inst. ekon. upr. i prava*, 2016, no. 2(35), pp. 8–25. (in Russian)
7. Smirnov A.I. Subhomogeneous maps in the theory of monotone dynamical systems. *Vestn. Ural. inst. ekon. upr. i prava*, 2016, no. 1(34), pp. 68–80. (in Russian)
8. Smirnov A.I. Analysis of population development in conditions of non-stationary medium. In: *Methods for non-stationary problems of mathematical programming.* Sverdlovsk, IMM UNTs AN SSSR. 1979. pp. 94–103. (in Russian)
9. Takač P. Asymptotic behavior of discrete-time semigroups of sublinear, strongly increasing mappings with applications to biology. *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, 1990, vol. 14(1), pp. 35–42.
10. Hirsch M.W., Smith H.L. Monotone Dynamical Systems. In: *Handbook of Differential Eqns: Ordinary Differential Eqns.* Canada A., Drabek P., Fonda A. (Eds.) Amsterdam, Elsevier. 2005, vol. 2, pp. 239–357. doi: 10.1016/S1874-5725(05)80006-9.

11. Smirnov A.I. Some generalizations of the concept of irreducibility for subhomogeneous mappings. *Vestn. Ural. Inst. Ekon. Upr. i Prava*, 2016, no. 2(35), pp. 26–30 (in Russian).
12. Mazurov V.D., Smirnov A.I. Conditions for the irreducibility and primitivity of monotone subhomogeneous mappings. *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 169–177 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-169-177 .
13. Lemmens B., Roelands M. Unique geodesics for Thompson's metric. *Ann. Institut Fourier*, 2015, vol. 65, no. 1, pp. 315–348. doi: 10.5802/aif.2932 .
14. Opoitsev V.I. *Ravnovesie i ustoichivost' v modelyakh kollektivnogo povedeniya* [Equilibrium and stability in models of collective behavior]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 245 p.

The paper was received by the Editorial Office on August 10, 2017.

*Vladimir Danilovich Mazurov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: mazurov@imm.uran.ru .

*Aleksandr Ivanovich Smirnov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: asmi@imm.uran.ru .