

УДК 515.162.8

КВАЗОИДЫ В ТЕОРИИ УЗЛОВ¹

Ф. Г. Кораблёв

Статья посвящена определению и построению примеров квазоидов — алгебраических объектов, каждый из которых порождает инвариант ориентированных узлов и зацеплений. Этот инвариант может быть выражен в терминах числа правильных раскрасок областей, на которые диаграмма узла разбивает двумерную сферу. Правильность раскраски элементами множества X означает, что в окрестности каждой двойной точки диаграммы цвета всех четырёх областей согласованы посредством функции $Q: X \times X \times X \rightarrow X$. Такая функция Q называется квазоидом над множеством X . В статье строятся примеры двух бесконечных серий квазоидов. Первую серию образуют линейные квазоиды над конечными кольцами. Вторая серия состоит из квазоидов, порожденных конечными биквазилями. Инварианты узлов и зацеплений, порождаемые квазоидами, нетривиальны и могут быть использованы для различения узлов. В статье показывается, что все узлы и зацепления, допускающие диаграммы с не более, чем шестью двойными точками, различаются линейными квазоидами над \mathbb{Z}_n , где $n \leq 11$. Приводятся результаты компьютерного перебора всех различных квазоидов над множествами, мощность которых не превосходит 4.

Ключевые слова: узел, квазоид, биквазиль, инвариант.

F. G. Korablev. Quazoids in knot theory.

This paper is devoted to the definition and construction of quazoids, which are algebraic objects generating invariants of oriented knots and links. Such an invariant can be described in the terms of the number of proper colorings of the regions into which the diagram of a knot decomposes a 2-sphere. A coloring by elements of a set X is proper if the color diagrams of all four regions are matched by means of a function $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ in the neighborhood of each double point. This function is called a quazoid over the set X . In the paper we construct two infinite series of quazoids. The first series is formed by linear quazoids over finite rings. The second series consists of quazoids generated by finite biquasiles. The invariants of knots and links generated by quazoids are nontrivial and can be used to distinguish knots. We show that all knots and links admitting diagrams with at most six double points are distinguished by linear quazoids over \mathbb{Z}_n , where $n \leq 11$. We give results of the computer enumeration of all different quazoids over sets whose cardinality does not exceed 4.

Keywords: knot, quazoid, biquasile, invariant.

MSC: 57M25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-212-221

Введение

Статья посвящена определению квазоидов и построению их примеров над конечными множествами. Квазоиды представляют собой алгебраические объекты, подобные биквандам (см. [1]). Каждый квазоид порождает инвариант узлов, который может быть выражен в терминах числа правильных раскрасок областей, на которые диаграмма узла разбивает двумерную сферу. Правильность раскраски элементами конечного множества означает, что в окрестности каждой двойной точки диаграммы цвета всех четырех областей должны быть согласованы. Понятие квазоида тесно связано с понятием биквазиля, предложенным С. Нельсоном в работе [2]. Фактически квазоиды являются обобщениями биквазиблей.

В разд. 1 дается определение квазоида над конечным множеством. Доказывается, что число правильных раскрасок диаграммы узла (или зацепления) является корректно определенным инвариантом ориентированных узлов и зацеплений. Раздел 2 посвящен построению примера одной бесконечной серии квазоидов. Эти квазоиды рассматриваются над конечными кольцами

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00690).

и называются линейными. Первая половина разд. 3 посвящена описанию того, как каждый конечный биквазиль порождает квазоид. Фактически это дает еще один способ построения квазоидов. Во второй половине разд. 3 описываются результаты эксперимента по различению узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более, чем шестью двойными точками. Оказалось, что все эти узлы и зацепления различаются линейными квазоидами над \mathbb{Z}_n , где $n \leq 11$. С помощью компьютерного перебора были найдены все различные квазоиды над множествами, мощность которых не превосходит 4. С точностью до естественной эквивалентности существует всего 2 квазоида над множеством мощности 2, ровно 7 квазоидов над множеством мощности 3 и 37 квазоидов над множеством мощности 4. Приводятся примеры всех квазоидов над множеством мощности 4, которые не порождаются никакими биквазилями.

1. Понятие квазоида

Пусть K — ориентированный узел (или зацепление) в S^3 и D — его диаграмма на сфере S^2 . Обозначим $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ — множество областей, на которые диаграмма D разбивает сферу S^2 .

О п р е д е л е н и е 1. Пусть X — конечное множество и $Q, \bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$ — два отображения. *Раскраской* диаграммы D элементами множества X называется отображение $\xi: \Delta \rightarrow X$. Раскраска ξ называется *правильной*, если в каждой положительной двойной точке диаграммы D выполняется соотношение

$$Q(\xi(\Delta_i), \xi(\Delta_j), \xi(\Delta_k)) = \xi(\Delta_l),$$

а в каждой отрицательной двойной точке — соотношение

$$\bar{Q}(\xi(\Delta_i), \xi(\Delta_j), \xi(\Delta_k)) = \xi(\Delta_l).$$

Здесь $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$ и Δ_l — области, подходящие к двойной точке так, как изображено на рис. 1 (слева — для положительной двойной точки, справа — для отрицательной).



Рис. 1. Области диаграммы в окрестности двойной точки (положительной слева и отрицательной справа).

Удобно представлять множество X как о множество цветов, которыми красятся области диаграммы узла на двумерной сфере. Естественный вопрос состоит в том, каким соотношениям должны удовлетворять отображения Q и \bar{Q} , чтобы число правильных раскрасок диаграммы D элементами множества X не зависело от диаграммы D , а определялось лишь самим узлом K .

Теорема 1. Пусть X — конечное множество и $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ — отображение, удовлетворяющее двум следующим свойствам:

(Q1) Уравнение $Q(x, a, b) = y$ однозначно разрешимо по каждому из трех аргументов x, a, b ;

(Q2) $\forall x, y, a, b \in X$ выполняются два соотношения:

$$\begin{aligned} Q(Q(x, a, b), a, Q(b, Q(x, a, b), y)) &= Q(x, a, Q(b, x, y)), \\ Q(b, Q(x, a, b), y) &= Q(Q(b, x, y), Q(x, a, Q(b, x, y)), y). \end{aligned}$$

Зададим отображение $\bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$ правилом

$$\forall x, a, b \in X \text{ значение } \bar{Q}(x, a, b) \text{ совпадает с таким } y \in X, \text{ что } Q(y, a, b) = x.$$

Тогда число правильных раскрасок элементами множества X любых двух диаграмм одного ориентированного узла (или зацепления) совпадают.

З а м е ч а н и е 1. Свойство (Q1) означает, что

- 1) $\forall a, b, y \in X \exists! x \in X: Q(x, a, b) = y;$
- 2) $\forall x, b, y \in X \exists! a \in X: Q(x, a, b) = y;$
- 3) $\forall x, a, y \in X \exists! b \in X: Q(x, a, b) = y.$

В частности, отображение \bar{Q} в формулировке теоремы 1 определено корректно. Более того, уравнение $\bar{Q}(x, a, b) = y$ также однозначно разрешимо по каждому из трех аргументов x, a, b .

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. В силу [3, теорема 1.2] достаточно проверить, что число правильных раскрасок диаграммы ориентированного узла (или зацепления) не меняется при каждом из пяти ориентированных движений Рейдемейстера R1.1, R1.2, R2.1, R2.2 и R3 (рис. 2).

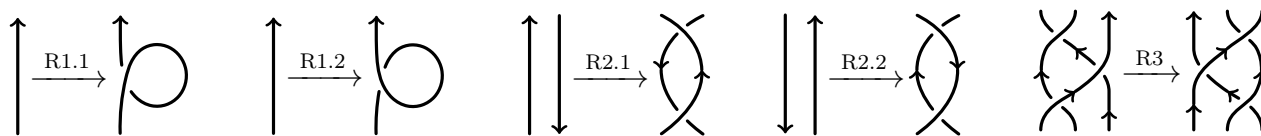


Рис. 2. Ориентированные движения Рейдемейстера.

Движение R1.1. Пусть диаграмма D'' некоторого узла получается из диаграммы D' того же узла в результате движения R1.1. Покажем, что существует естественная биекция между множествами правильных раскрасок диаграмм D' и D'' . Пусть Δ_i, Δ_k — области диаграммы D' , участвующие в движении R1.1, а Δ_j — новая область диаграммы D'' (см. рис. 3). Пусть ξ' — правильная раскраска диаграммы D' . Построим правильную раскраску ξ'' диаграммы D'' . Для этого все области диаграммы D'' , отличные от Δ_i, Δ_j и Δ_k , покрасим теми же элементами множества X , что и соответствующие им области диаграммы D' . Положим $\xi''(\Delta_i) = \xi'(\Delta_i)$, $\xi''(\Delta_k) = \xi'(\Delta_k)$ и $\xi''(\Delta_j) = a$, где цвет $a \in X$ выберем так, чтобы выполнялось равенство $Q(\xi''(\Delta_i), a, \xi''(\Delta_k)) = \xi''(\Delta_i)$. В силу свойства (Q1) цвет a этим правилом определяется однозначно при любых комбинациях цветов $\xi''(\Delta_i)$ и $\xi''(\Delta_k)$. Следовательно, сопоставление $\xi' \mapsto \xi''$ является биекцией.

Движение R1.2. Этот случай аналогичен предыдущему. Биективность сопоставления $\xi' \mapsto \xi''$ следует из однозначной разрешимости уравнения $\bar{Q}(x, a, b) = y$ по аргументу a .

Движение R2.1. Пусть диаграмма D'' получается из диаграммы D' в результате движения R2.1 и $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_l$ — области диаграммы D' , участвующие в этом движении. Обозначим

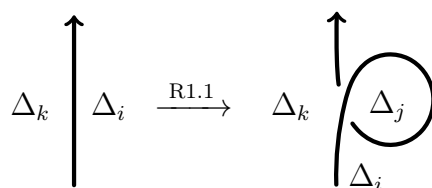


Рис. 3. Области диаграммы D' (слева) и получающейся в результате движения R1.1 диаграммы D'' (справа).

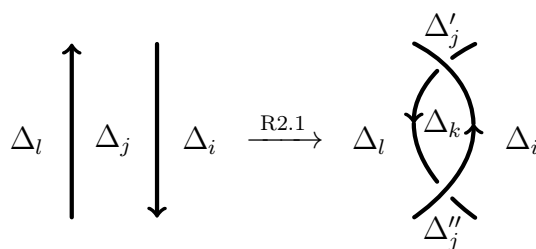


Рис. 4. Области диаграммы D' (слева) и получающейся в результате движения R2.1 диаграммы D'' (справа).

через Δ_k новую область диаграммы D'' и через Δ'_j, Δ''_j — области, на которые разбивается область Δ_j при движении R2.1 (см. рис. 4). Пусть ξ' — правильная раскраска диаграммы D' . Построим правильную раскраску ξ'' диаграммы D'' . Как и в предыдущих случаях, все области диаграммы D'' , отличные от $\Delta_i, \Delta'_j, \Delta''_j, \Delta_k$ и Δ_l , покрасим теми же элементами множества X , что и соответствующие им области диаграммы D' . Положим $\xi''(\Delta_i) = \xi'(\Delta_i)$, $\xi''(\Delta_l) = \xi'(\Delta_l)$ и $\xi''(\Delta'_j) = \xi'(\Delta_j)$. Для правильности раскраски ξ'' достаточно, чтобы цвета $\xi''(\Delta_i), \xi''(\Delta'_j), \xi''(\Delta''_j), \xi''(\Delta_k)$ и $\xi''(\Delta_l)$ удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} Q(\xi''(\Delta_i), \xi''(\Delta'_j), \xi''(\Delta_k)) = \xi''(\Delta_l), \\ \overline{Q}(\xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta''_j), \xi''(\Delta_k)) = \xi''(\Delta_i). \end{cases}$$

В силу свойства (Q1) значение $\xi''(\Delta_k)$ однозначно определяется первым уравнением, а в силу взаимосвязи между отображениями Q и \overline{Q} значения $\xi''(\Delta'_j)$ и $\xi''(\Delta''_j)$ совпадают. Следовательно, сопоставление $\xi' \mapsto \xi''$ является биекцией.

Движение R2.2. Этот случай аналогичен предыдущему. Биективность сопоставления $\xi' \mapsto \xi''$ следует из однозначной разрешимости уравнения $Q(x, a, b) = y$ по аргументу a и взаимосвязи между отображениями Q и \overline{Q} .

Движение R3. Пусть диаграмма D'' получается из диаграммы D' в результате движения R3. Обозначим через $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k, \Delta_l, \Delta_p, \Delta_q, \Delta_r$ области диаграммы D' и через $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k, \Delta_l, \Delta'_p, \Delta'_q, \Delta'_r$ области диаграммы D'' , участвующие в этом движении (см. рис. 5). Пусть ξ' — правильная раскраска диаграммы D' . Построим правильную раскраску ξ'' диаграммы D'' . Как и в предыдущих случаях, все области диаграммы D'' , отличные от $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k, \Delta_l, \Delta'_p, \Delta'_q$ и Δ'_r , покрасим теми же элементами множества X , что и соответствующие им области диаграммы D' . Положим $\xi''(\Delta_i) = \xi'(\Delta_i)$, $\xi''(\Delta_j) = \xi'(\Delta_j)$, $\xi''(\Delta_k) = \xi'(\Delta_k)$ и $\xi''(\Delta_l) = \xi'(\Delta_l)$. Заметим, что значения $\xi'(\Delta_r)$ и $\xi'(\Delta_q)$ однозначно определяются значениями $\xi'(\Delta_i), \xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k)$ и $\xi'(\Delta_l)$. Аналогичным образом значения $\xi''(\Delta'_r)$ и $\xi''(\Delta'_q)$ однозначно определяются значениями $\xi''(\Delta_i), \xi''(\Delta_j), \xi''(\Delta_k)$ и $\xi''(\Delta_l)$. Поэтому для биективности сопоставления $\xi' \mapsto \xi''$ достаточно проверить, что $\xi'(\Delta_q) = \xi''(\Delta'_q)$ и $\xi'(\Delta_r) = \xi''(\Delta'_r)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \xi'(\Delta_q) &= Q\left(\xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_l), Q(\xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_i))\right), \\ \xi'(\Delta_r) &= Q\left(Q(\xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_i)), Q(\xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_l), Q(\xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_i)))\right), \xi'(\Delta_i)), \\ \xi''(\Delta'_q) &= Q\left(Q(\xi''(\Delta_k), \xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta_j)), \xi''(\Delta_l), Q(\xi''(\Delta_j), Q(\xi''(\Delta_k), \xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta_j)), \xi''(\Delta_i)))\right), \\ \xi''(\Delta'_r) &= Q\left(\xi''(\Delta_j), Q(\xi''(\Delta_k), \xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta_j)), \xi''(\Delta_i)\right). \end{aligned}$$

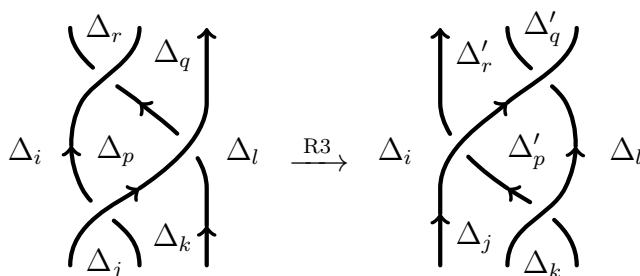


Рис. 5. Области диаграммы D' (слева) и получающейся в результате движения R3 диаграммы D'' (справа).

Требуемые равенства следуют из свойства (Q2) подстановкой $\xi'(\Delta_k) = \xi''(\Delta_k) = x, \xi'(\Delta_i) = \xi''(\Delta_i) = y, \xi'(\Delta_l) = \xi''(\Delta_l) = a$ и $\xi'(\Delta_j) = \xi''(\Delta_j) = b$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть X — конечное множество. Отображение $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ называется *квазоидом над X* , если оно удовлетворяет свойствам (Q1) и (Q2) из формулировки теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. Пусть K — ориентированный узел (или зацепление) и $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ — квазоид над конечным множеством X . Обозначим через $\mathcal{C}_{X,Q}(K)$ число правильных раскрасок диаграммы узла K элементами множества X . Из теоремы 1 следует, что это число является корректно определенным инвариантом узла. Отображение $\bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$ при этом определяется так, как описано в формулировке теоремы 1. В работе [4] строится другой инвариант узлов, основанный на тех же идеях, что использовались при построении квазоидов.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $Q_1, Q_2: X \times X \times X \rightarrow X$ — два квазоида над множеством X . Они называются *эквивалентными*, если существует такая биекция $h: X \rightarrow X$, что для любых $x, a, b \in X$ верно равенство $Q_1(h(x), h(a), h(b)) = h(Q_2(x, a, b))$.

Из определения инварианта $\mathcal{C}_{X,Q}$ следует, что если квазоиды Q_1 и Q_2 над множеством X эквивалентны, то для любого узла (или зацепления) K верно равенство $\mathcal{C}_{X,Q_1}(K) = \mathcal{C}_{X,Q_2}(K)$.

2. Примеры квазоидов

П р и м е р 1. Пусть $X = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Отображение $Q(x, a, b) = x - a + b$ является квазоидом над \mathbb{Z}_3 . Легко вычислить, что в этом случае $\bar{Q}(x, a, b) = x + a - b$.

П р и м е р 2. Пусть Q — квазоид над \mathbb{Z}_3 из примера 1. Значение инварианта $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_3,Q}$ для узла “восьмерка” (узел 4_1 на рис. 8) равно 9. Все девять правильных раскрасок диаграммы изображены на рис. 6.

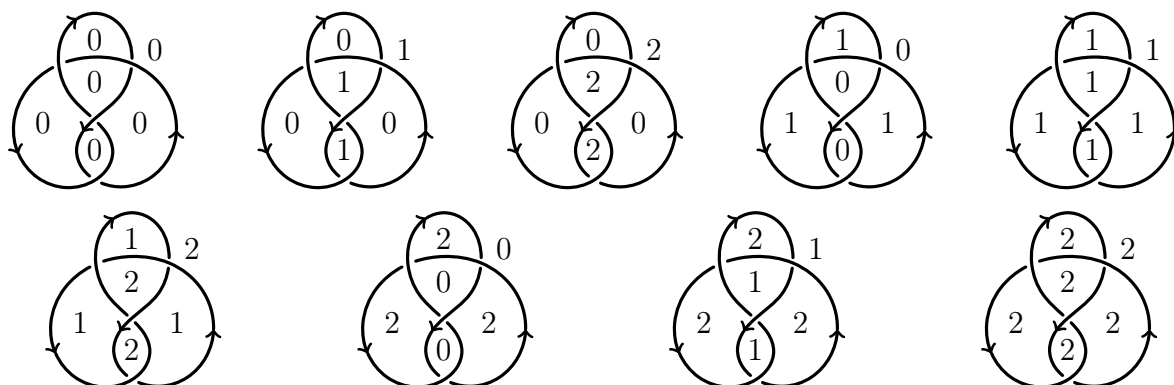


Рис. 6. Все 9 правильных раскрасок узла “восьмерка” квазоидом из примера 1.

Следующая теорема дает обобщение квазоида из примера 1.

Теорема 2. Пусть X — произвольное конечное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и $\alpha, \beta \in X$ — два обратимых элемента. отображение $Q: X \times X \times X \rightarrow X$, заданное формулой

$$Q(x, a, b) = \alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot a + \beta \cdot b,$$

является квазоидом над кольцом X .

Доказательство. Разрешимость уравнения $Q(x, a, b) = y$ по каждому из аргументов x, a, b следует из обратимости элементов $\alpha, \beta \in X$. В самом деле, если $\alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot a + \beta \cdot b = y$, то

$$x = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot y + \frac{1}{\beta} \cdot a - \frac{1}{\alpha} \cdot b, \quad a = \beta \cdot x - \frac{1}{\alpha} \cdot y + \frac{\beta}{\alpha} \cdot b, \quad b = -\alpha \cdot x + \frac{1}{\beta} \cdot y + \frac{\alpha}{\beta} \cdot a.$$

Справедливость свойства (Q2) устанавливается прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} Q(Q(x, a, b), a, Q(b, Q(x, a, b), y)) &= Q(x, a, Q(b, x, y)) = -\alpha \cdot a + \alpha\beta^2 \cdot b + \beta^2 \cdot y, \\ Q(b, Q(x, a, b), y) &= Q(Q(b, x, y), Q(x, a, Q(b, x, y)), y) = \alpha^2 \cdot a - \alpha^2\beta \cdot x + \beta \cdot y. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Определение 4. Квазоид из формулировки теоремы 2 называется *линейным*. Каждый линейный квазоид над кольцом X однозначно задается выбором двух обратимых элементов $\alpha, \beta \in X$. Такой квазоид будем обозначать через $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$.

Замечание 3. Пусть $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ — линейный квазоид над конечным кольцом X и D — диаграмма ориентированного узла (или зацепления). Каждой двойной точке диаграммы сопоставим уравнения

$$\alpha\beta \cdot \Delta_i - \alpha \cdot \Delta_j + \beta \cdot \Delta_k - \Delta_l = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \Delta_i + \frac{1}{\beta} \Delta_j - \frac{1}{\alpha} \cdot \Delta_k - \Delta_l = 0$$

в зависимости от того, является эта точка положительной или отрицательной соответственно. В этих уравнениях $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$ и Δ_l являются формальными неизвестными, отвечающими областям диаграммы D и подходящими к двойным точкам так, как указано на рисунке 1. Значение инварианта $\mathcal{C}_{X, \mathcal{L}_{\alpha, \beta}}(D)$ совпадает с числом решений построенной системы уравнений над кольцом X .

В работе [5] при определении полинома Александра для узлов каждой двойной точке диаграммы сопоставляется уравнения

$$t \cdot \Delta_k - t \cdot \Delta_i + \Delta_j - \Delta_l = 0 \quad \text{или} \quad t \cdot \Delta_l - t \cdot \Delta_k + \Delta_i - \Delta_j = 0$$

в зависимости от того, является эта точка положительной или отрицательной соответственно. Для одной и той же диаграммы узла матрица Александра и матрица коэффициентов системы уравнений, построенной по линейному квазоиду $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$, совпадают при $\alpha = \beta = t = -1$.

3. Связь квазоидов с биквазилями

Существует тесная связь между квазоидами и *биквазилями* (*biquasiles*), предложенными С. Нельсоном в работе [2]. Фактически понятие квазоида является обобщением понятия биквазиля.

Определение 5. Пусть X — множество, на котором заданы две бинарные алгебраические операции $*$: $X \times X \rightarrow X$ и \cdot : $X \times X \rightarrow X$, каждая из которых обладает правой и левой обратимостью. Множество X называется *биквазилем*, если для любых $a, b, x, y \in X$ выполняются два соотношения

$$\begin{aligned}x * (a \cdot (b * (x \cdot y))) &= (x * (a \cdot b)) * (a \cdot (b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y))), \\b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y) &= (b * (x \cdot y)) * ((x * (a \cdot (b * (x \cdot y)))) \cdot y).\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 4. Правая и левая обратимость операций $*$, \cdot : $X \times X \rightarrow X$ означает, что выполняются следующие свойства:

- 1) $\forall a, c \in X \exists! b \in X: a * b = c$. Будем обозначать $b = a \setminus^* c$;
- 2) $\forall b, c \in X \exists! a \in X: a * b = c$. Будем обозначать $a = c /^* b$;
- 3) $\forall a, c \in X \exists! b \in X: a \cdot b = c$. Будем обозначать $b = a \setminus c$;
- 4) $\forall b, c \in X \exists! a \in X: a \cdot b = c$. Будем обозначать $a = c / b$.

Если X — биквазиль, то для любых $x, y \in X$

$$(x * y) /^* y = x = y \setminus^* (y * x) \text{ и } (x \cdot y) / y = x = y \setminus (y \cdot x).$$

Теорема 3. Пусть X — конечный биквазиль с двумя бинарными алгебраическими операциями $*$, \cdot : $X \times X \rightarrow X$. отображение $Q: X \times X \times X \rightarrow X$, заданное формулой

$$Q(x, a, b) = x * (a \cdot b),$$

является квазоидом над X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость свойства (Q1) следует из правой и левой обратимости операций $*$ и \cdot . В самом деле, если $x * (a \cdot b) = y$, то $x = y /^* (a \cdot b)$, $a = (x \setminus^* y) / b$, $b = a \setminus (x \setminus^* y)$.

Справедливость свойства (Q2) проверяется непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned}Q(x, a, Q(b, x, y)) &= x * (a \cdot (b * (x \cdot y))) = (x * (a \cdot b)) * (a \cdot (b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y))) \\&= Q(Q(x, a, b), a, Q(b, Q(x, a, b), y)), \\Q(b, Q(x, a, b), y) &= b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y) = (b * (x \cdot y)) * ((x * (a \cdot (b * (x \cdot y)))) \cdot y) \\&= Q(Q(b, x, y), Q(x, a, Q(b, x, y)), y).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5 Если квазоид $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ над множеством X задан так, как описано в теореме 3, то отображение $\bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$, необходимое для вычисления инварианта $C_{X, Q}$, задается формулой $\bar{Q}(x, a, b) = x /^* (a \cdot b)$.

Пусть $\mathcal{B} = (X, *, \cdot)$ — конечный биквазиль и $Q_{\mathcal{B}}: X \times X \times X \rightarrow X$ — квазоид над X , построенный так, как описано в теореме 3. В этом случае будем говорить, что квазоид $Q_{\mathcal{B}}$ порожден биквазилом \mathcal{B} . Сопоставление каждому конечному биквазилю порожденный им квазоид не является инъективным. Это следует из того, что существует 72 различных биквазиля мощности 3 и только 12 различных квазоидов, образующих 7 классов эквивалентностей (см. определение 3), над множеством из трех элементов. Более того, это сопоставление не является сюръективным. С помощью компьютерного перебора были найдены все различные квазоиды над множеством из четырех элементов. Таких квазоидов ровно 168, и они разбиваются на 37 классов эквивалентностей. С другой стороны, существует 2880 различных биквазилей мощности 4, но они порождают всего 120 различных квазоидов, которые разбиваются на 29 классов эквивалентностей. Оставшиеся 48 квазоидов, образующие 8 классов эквивалентностей, не порождаются никакими биквазилями.

П р и м е р 3. В табл. 1 приведены примеры неэквивалентных квазоидов над множеством $X = \{0, 1, 2, 3\}$, которые не порождаются никакими биквазилями мощности 4. Каждый из квазоидов $Q(x, a, b)$ задается таблицей 4×4 . Строки этой таблицы отвечают различным значениям параметра $x \in X$, столбцы отвечают различным значениям параметра $a \in X$. При фиксированных $x, a \in X$ отображение $Q(x, a, b)$ является биекцией на множестве X . В ячейках таблицы

Т а б л и ц а 1

Примеры квазоидов над множеством $\{0, 1, 2, 3\}$,
которые не порождаются никакими биквазилями

	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)

указаны соответствующие биекции, заданные упорядоченными последовательностями элементов из множества X .

З а м е ч а н и е 6. Пусть X — произвольное конечное ассоциативное кольцо с единицей (с операциями $+$, \cdot), $\alpha, \beta \in X$ — два обратимых элемента и операции $*_X: X \times X \rightarrow X$ и $\cdot_X: X \times X \rightarrow X$ заданы формулами

$$a *_X b = \alpha\beta \cdot a - \alpha \cdot b \text{ и } a \cdot_X b = a - \frac{\beta}{\alpha} \cdot b.$$

Непосредственно проверяется, что $\mathcal{B}_X = (X, *_X, \cdot_X)$ является биквазилием. Квазоид $Q_{\mathcal{B}_X}: X \times X \times X \rightarrow X$, порожденный этим биквазилием \mathcal{B}_X , является линейным квазоидом $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$. В самом деле

$$Q_{\mathcal{B}_X}(x, a, b) = x *_X (a \cdot_X b) = \alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot \left(a - \frac{\beta}{\alpha} \cdot b \right) = \alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

В частности, это означает, что если квазоид не порождается никаким биквазилием, то он не является линейным.



Рис. 7. Правильная раскраска областей диаграммы биквазилием в окрестности двойной точки (положительной слева и отрицательной справа).

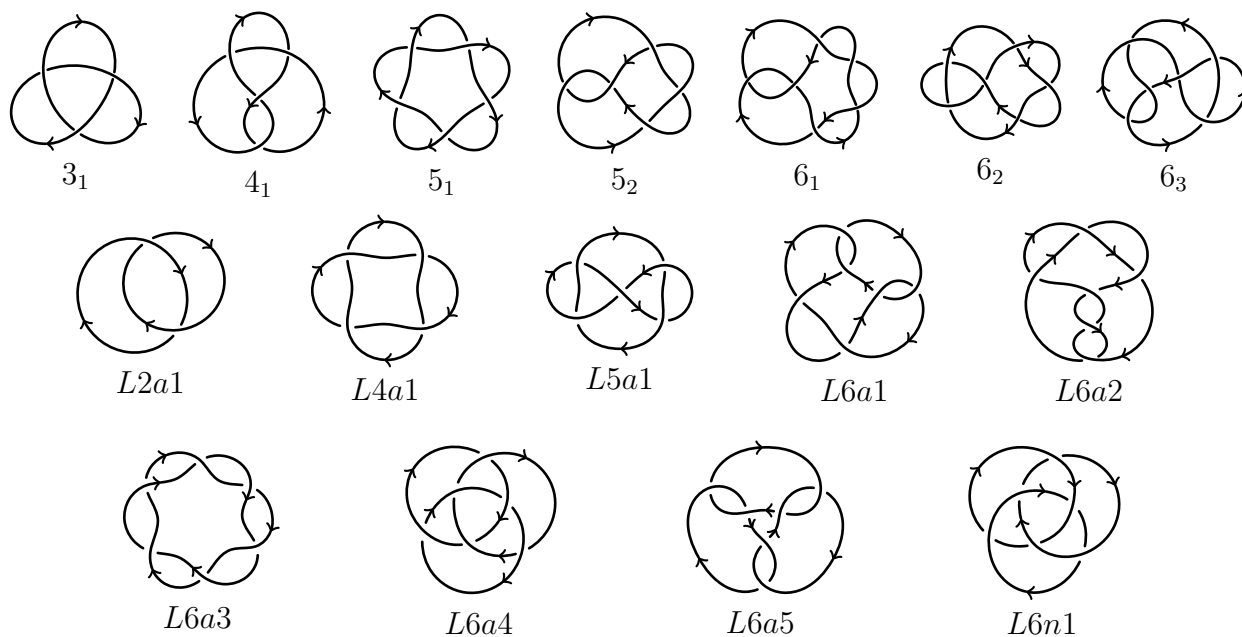


Рис. 8. Ориентированные узлы и зацепления, допускающие диаграммы с не более чем шестью двойными точками.

Т а б л и ц а 2
Значения инварианта $C_{\mathbb{Z}_n, \mathcal{L}_{\alpha, \beta}}$ для узлов

	3_1	4_1	5_1	5_2	6_1	6_2	6_3
$\mathbb{Z}_3, \mathcal{L}_{1,1}$	27	9	9	9	27	9	9
$\mathbb{Z}_4, \mathcal{L}_{1,1}$	16	16	16	16	16	16	16
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,1}$	25	125	125	25	25	25	25
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,2}$	25	25	25	25	125	25	25
$\mathbb{Z}_6, \mathcal{L}_{1,1}$	108	36	36	36	108	36	36
$\mathbb{Z}_7, \mathcal{L}_{1,1}$	49	49	49	343	49	49	49
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,1}$	121	121	121	121	121	1331	121
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,2}$	121	1331	121	121	121	121	121

Т а б л и ц а 3
Значения инварианта $C_{\mathbb{Z}_n, \mathcal{L}_{\alpha, \beta}}$ для зацеплений

	$L2a1$	$L4a1$	$L5a1$	$L6a1$	$L6a2$	$L6a3$	$L6a4$	$L6a5$	$L6n1$
$\mathbb{Z}_3, \mathcal{L}_{1,1}$	9	9	9	27	9	27	9	27	9
$\mathbb{Z}_4, \mathcal{L}_{1,1}$	32	64	64	64	32	32	256	64	64
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,1}$	25	25	25	25	125	25	25	25	25
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,2}$	25	125	25	25	25	25	25	25	25
$\mathbb{Z}_6, \mathcal{L}_{1,1}$	72	72	72	216	72	216	144	432	144
$\mathbb{Z}_7, \mathcal{L}_{1,1}$	49	49	49	49	49	49	49	49	49
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,1}$	121	121	121	121	121	121	121	121	121
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,2}$	121	121	121	121	121	121	121	121	121

В работе [2] С. Нельсон строит инвариант ориентированных зацеплений $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{Z}}(D)$, равный числу правильных раскрасок диаграммы D элементами биквазиля $\mathcal{B} = (X, *, \cdot)$. Этот инвари-

ант аналогичен инварианту $\mathcal{C}_{X,Q}$. Отличие состоит в том, что в случае использования биквазиля раскраска диаграммы считается правильной, если в окрестности каждой двойной точки цвета областей таковы, как изображено на рис. 7. Из теоремы 3 следует, что инварианты $\Phi_B^{\mathbb{Z}}$ и \mathcal{C}_{X,Q_B} совпадают.

Был проведен эксперимент по вычислению значений инварианта $\mathcal{C}_{X,Q}$ для ориентированных узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более чем шестью двойными точками. Все эти узлы и зацепления с фиксированными ориентациями изображены на рис. 8 (используются те же обозначения, что и в “Атласе узлов” [6]). Оказалось, что для различения всех рассмотренных узлов и зацеплений достаточно нескольких линейных квазоидов над кольцами, мощность которых не превосходит 11. Результаты вычислений значений инварианта $\mathcal{C}_{X,Q}$ представлены в табл. 2 и 3. Столбцы этих таблиц отвечают различным узлам и зацеплениям, строки — различным кольцам и линейным квазоидам над ними. В ячейке, стоящей на пересечении строки, отвечающей квазоиду $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ над кольцом \mathbb{Z}_n , и столбца, отвечающего узлу (или зацеплению) K , стоит значение $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_n, \mathcal{L}_{\alpha,\beta}}(K)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fenn R., Jordan-Santana M, Kauffman L.** Biquandles and virtual links // *Topology Appl.* 2004. Vol. 145, no. 1–3. P. 157–175.
2. **Needell D., Nelson S.** Biquasiles and dual graph diagrams // *J. Knot Theory Ramifications.* 2017. Vol. 26, no. 8. 1750048. 18 p. doi: 10.1142/S0218216517500481.
3. **Polyak M.** Minimal generating sets of Reidemeister moves // *Quantum Topology.* 2010. Vol. 1, no. 4. P. 399–411. doi: 10.4171/QT/10.
4. **Yang Z.** Regional knot invariants // *J. Knot Theory Ramifications.* 2017. Vol. 26, no. 6. 1742006. doi: 10.1142/S0218216517420068.
5. **Alexander J. W. Alexander J. W.** Topological invariants of knots and links // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1928. Vol. 30, no. 2. P. 275–306.
6. Knot Allas [site]. URL: http://katlas.org/wiki/Main_Page.

Кораблёв Филипп Глебович

Поступила 31.08.2017

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: korablev@csu.ru

REFERENCES

1. Fenn R., Jordan-Santana M, Kauffman L. Biquandles and virtual links. *Topology Appl.*, 2004, vol. 145, no. 1–3, pp. 157–175.
2. Needell D., Nelson S. Biquasiles and dual graph diagrams. *J. Knot Theory Ramifications*, 2017, vol. 26, no. 8, 1750048, 18 p. doi: 10.1142/S0218216517500481.
3. Polyak M. Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quantum Topology*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 399–411. doi: 10.4171/QT/10.
4. Yang Z. Regional knot invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 2017, vol. 26, no. 6, 1742006. doi: 10.1142/S0218216517420068.
5. Alexander J. W. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1928, vol. 30, no. 2, pp. 275–306.
6. Knot Allas [site]. Available at: http://katlas.org/wiki/Main_Page.

The paper was received by the Editorial Office on August 31, 2017.

Filipp Glebovich Korablev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: korablev@csu.ru.