

УДК 512.54 +519.17

СИММЕТРИЧЕСКИЕ 2-РАСШИРЕНИЯ 2-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ. II

Е. А. Коновальчик¹, К. В. Костусов

Исследование симметрических q -расширений d -мерной кубической решетки Λ^d представляет интерес для теории групп и теории графов. Для небольших $d \geq 1$ и $q > 1$ (особенно для $q = 2$) исследование симметрических q -расширений решетки Λ^d актуально также в связи с молекулярной кристаллографией и некоторыми физическими теориями. Ранее в работе В.И. Трофимова доказана конечность числа симметрических 2-расширений решетки Λ^d для произвольного целого положительного d . Настоящая статья представляет собой вторую и завершающую часть работы, посвященной описанию всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 (мы доказываем, что имеются 162 такие реализации). В опубликованной ранее первой части нашей работы были перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 , такие что лишь единичный их автоморфизм оставляет на месте все блоки системы импримитивности (87 реализаций). В настоящей, второй части, работы перечисляются остальные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 .

Ключевые слова: симметрическое расширение графа, d -мерная решетка.

E. A. Konoval'chik, K. V. Kostousov. Symmetrical 2-extensions of the 2-dimensional grid. II.

The investigation of symmetrical q -extensions of a d -dimensional cubic grid Λ^d is of interest both for group theory and for graph theory. For small $d \geq 1$ and $q > 1$ (especially for $q = 2$), symmetrical q -extensions of Λ^d are of interest for molecular crystallography and some physical theories. Earlier V. Trofimov proved that there are only finitely many symmetrical 2-extensions of Λ^d for any positive integer d . This paper is the second and concluding part of our work devoted to the description of all, up to equivalence, realizations of symmetrical 2-extensions of Λ^2 (we show that there are 162 such realizations). In the first part of our work, which was published earlier, we found all, up to equivalence, realizations of symmetrical 2-extensions of Λ^2 such that only the trivial automorphism fixes all blocks of the imprimitivity system (87 realizations). In the present paper, we find the remaining realizations of symmetrical 2-extensions of Λ^2 .

Keywords: symmetrical extension of a graph, d -dimensional grid.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-192-211

1. Введение

Под d -мерной решеткой Λ^d для целого положительного числа d далее понимается d -мерная кубическая решетка, т. е. граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы (a_1, \dots, a_d) из d целых чисел, причем две вершины (a'_1, \dots, a'_d) и (a''_1, \dots, a''_d) смежны тогда и только тогда, когда $|a'_1 - a''_1| + \dots + |a'_d - a''_d| = 1$. Следуя [1], назовем связный граф Γ симметрическим расширением решетки Λ^d посредством графа Δ , если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на множестве $V(\Gamma)$ вершин графа Γ , что имеется изоморфизм φ факторграфа Γ/σ на решетку Λ^d и блоки σ порождают в Γ подграфы, изоморфные Δ . Для целого положительного числа q граф Γ называется симметрическим q -расширением решетки Λ^d , если Γ является симметрическим расширением решетки Λ^d посредством некоторого графа Δ , такого что $|V(\Delta)| = q$. Четверка $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами называется реализацией симметрического расширения Γ решетки Λ^d посредством графа Δ или, соответственно, q -расширения Γ решетки Λ^d , а Γ мы будем называть графом этой реализации. Наряду с чисто

¹Работа выполнена при поддержке молодежного гранта ИММ УрО РАН за 2013 г.

математическим интересом симметрические q -расширения решетки Λ^d для небольших $d \geq 1$ и $q > 1$ представляют интерес для молекулярной кристаллографии и некоторых физических теорий (см. [2]). При этом для кристаллографии из всех симметрических q -расширений решеток Λ^d наибольший интерес представляют, по-видимому, симметрические 2-расширения. Они естественным образом возникают при рассмотрении “молекулярных” кристаллов, “молекулы” которых состоят из двух “атомов” или, более общо, имеют выделенную ось.

Естественно рассматривать реализации симметрических q -расширений решетки Λ^d (q и d — целые положительные числа) с точностью до определяемой следующим образом эквивалентности (см. [3]). Назовем две реализации $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ эквивалентными и будем писать $R_1 \sim R_2$, если найдется изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2 , переводящий σ_1 в σ_2 . Реализацию $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического q -расширения решетки Λ^d назовем максимальной, если $G = \text{Aut}_\sigma(\Gamma)$ — группа всех автоморфизмов графа Γ , сохраняющих разбиение σ . Ясно, что каждая реализация симметрического q -расширения решетки Λ^d имеет эквивалентную ей максимальную реализацию.

В [3, теорема 2] В.И. Трофимовым доказана конечность числа реализаций симметрических 2-расширений d -мерной решетки, с точностью до эквивалентности, для произвольного целого положительного числа d , а также предложен алгоритм для построения всех, с точностью до эквивалентности, таких реализаций. Данная работа посвящена описанию всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . В первой части работы (см. [5]) были перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрических 2-расширений решетки Λ^2 , такие что лишь единичный автоморфизм графа Γ оставляет на месте все блоки системы импримитивности σ . Во второй части работы перечислены остальные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . По предложению 4 из [3] такое разбиение всех реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 на два класса совпадает с определенным следующим образом разбиением на классы I и II соответственно.

Для произвольной реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 и произвольной пары смежных вершин B_1, B_2 графа Γ/σ множество ребер графа Γ , один конец которых лежит в B_1 , а другой — в B_2 , будем называть *связью*. Возможны следующие типы связей: *тип 1* — четыре ребра; *тип 2* — два ребра, не имеющие общих концов; *тип 3* — одно ребро; *тип 3̄* — три ребра; *тип 4* — два ребра, имеющие общий конец. Реализациями *класса I* назовем реализации, которые обязательно содержат связи типов, отличных от 1 и 2. Реализациями *класса II* назовем реализации, связи в которых исчерпываются связями типов 1 и 2.

Как в [5], реализацию симметрического расширения решетки Λ^2 посредством графа K_2 (полного графа на двух вершинах) будем называть *насыщенной* реализацией симметрического 2-расширения решетки Λ^2 . Соответственно реализацию симметрического расширения решетки Λ^2 посредством графа, дополнительного к K_2 , будем называть *ненасыщенной* реализацией симметрического 2-расширения решетки Λ^2 .

В [5] нами показано, что, с точностью до эквивалентности, существует в точности 87 реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I, из которых 49 — насыщенные и 38 — ненасыщенные (см. теорему 1 и следствие 1 из [5]). Среди графов насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I имеется в точности 46 попарно неизоморфных; среди графов ненасыщенных реализаций класса I имеется в точности 36 попарно неизоморфных; а среди всех графов реализаций класса I имеется в точности 78 попарно неизоморфных (см. следствие 2 и следствие 3 из [5]). В части II работы нами показано, что, с точностью до эквивалентности, существует в точности 75 реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II, из которых 38 насыщенные и 37 ненасыщенные (см. теорему 1 и следствие 1). Графы всех этих 75 реализаций являются попарно неизоморфными (см. следствие 2). Очевидно, что реализация симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса I не может быть эквивалентна реализации класса II. Однако существует единственная, с точностью до эквивалентности, реализация класса I, граф которой изоморфен графу реализации класса II (см. следствие 2). Таким образом, всего среди графов реализаций симметрических

2-расширений решетки Λ^2 имеется в точности 152 попарно неизоморфных графов. Среди них в точности 84 графа изоморфны графам насыщенных реализаций и 73 графа изоморфны графам ненасыщенных реализаций.

В [5] для каждой, с точностью до эквивалентности, реализации симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса I была найдена эквивалентная ей кристаллографическая реализация. В части II работы мы не занимаемся построением кристаллографических реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II, поскольку не для всех таких реализаций существуют эквивалентные им кристаллографические реализации. Нетрудно показать, например, что для реализации R_{Σ_1, γ_2} (вторая реализация в табл. 3) не существует эквивалентной ей кристаллографической реализации.

Статья структурирована следующим образом. В разд. 3 приведено описание реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II (теорема 1 и следствие 1). Оно получено посредством комбинаторных соображений в разд. 4 и независимо с помощью алгоритма из [3], реализованного в пакете GAP, в разд. 5. В разд. 2 содержатся предварительные результаты.

2. Предварительные результаты

В [5] приведена система представителей $\mathbf{H} = \{H_1, \dots, H_{35}\}$ всех классов сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$. Для реализации $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 произвольный элемент g группы G индуцирует подстановку на σ , которая обозначается через g^σ , и соответственно группа G индуцирует на σ группу подстановок, которая обозначается через G^σ и является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа Γ/σ . Группа $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ сопряжена в $\text{Aut}(\Lambda^2)$ с некоторой группой $H \in \mathbf{H}$. В описанной ситуации будем говорить, что группа $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$ *соответствует* реализации R .

Каждой насыщенной реализации $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ класса II следующим образом сопоставим подграф $\Sigma = \Sigma(R)$ решетки Λ^2 , который назовем *подграфом связей типа 2 реализации R*. Множество вершин графа Σ совпадает с $V(\Lambda^2)$, и две вершины $v_1, v_2 \in V(\Sigma)$ смежны в графе Σ тогда и только тогда, когда в реализации R между блоками $\varphi^{-1}(v_1)$ и $\varphi^{-1}(v_2)$ имеется связь типа 2. Ясно, что при этом граф Σ является допустимым относительно группы $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$, сопряженной в $\text{Aut}(\Lambda^2)$ с некоторой группой $H \in \mathbf{H}$.

Подграф Σ решетки Λ^2 будем называть *допустимым*, если $V(\Sigma) = V(\Lambda^2)$ и он является допустимым относительно некоторой вершинно-транзитивной подгруппы группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$. Два допустимых подграфа Σ_1 и Σ_2 решетки Λ^2 назовем *эквивалентными*, если один из них переходит в другой под действием некоторого автоморфизма из $\text{Aut}(\Lambda^2)$. Очевидно, что подграфы связей типа 2 эквивалентных насыщенных реализаций класса II сами являются эквивалентными.

Непосредственно проверяется, что допустимые подграфы решетки Λ^2 , с точностью до эквивалентности, исчерпываются графами $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{18}$, естественным образом изображенными в табл. 1. Под изображением подграфа Σ_i приводится список групп $H \in \mathbf{H}$, таких что Σ_i является допустимым относительно подгруппы, сопряженной с H в $\text{Aut}(\Lambda^2)$. Переменные χ_1, χ_2, χ_3 , имеющиеся на изображениях, нам понадобятся ниже для нахождения реализаций с такими подграфами связей типа 2.

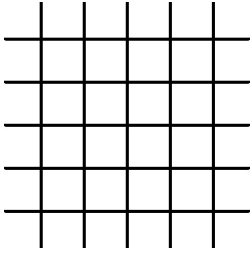
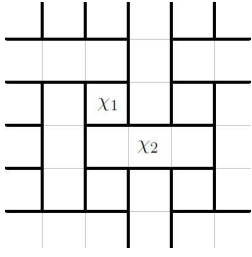
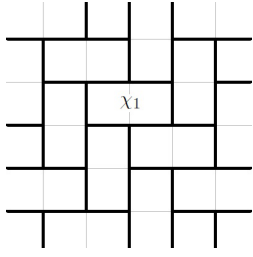
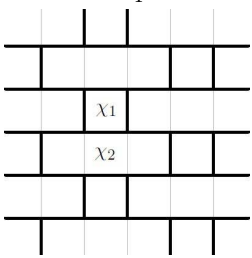
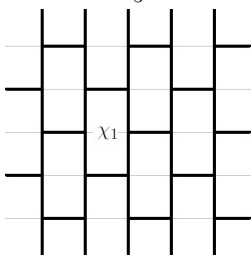
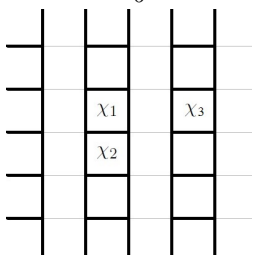
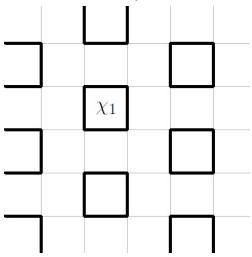
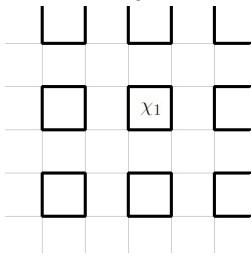
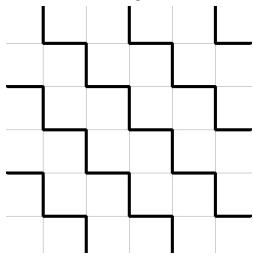
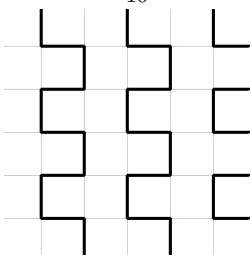
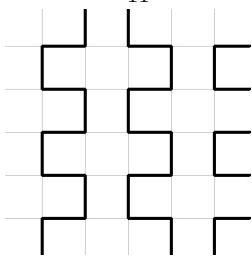
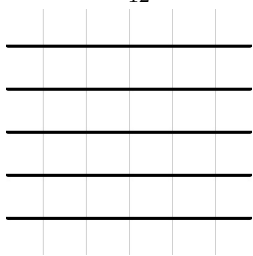
Для произвольных целых чисел i, j подграф решетки Λ^2 , порожденный множеством вершин $\{(i, j), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1)\}$, будем называть *клеткой* решетки Λ^2 .

Множество клеток решетки Λ^2 будем называть *допустимым*, если оно является допустимым относительно некоторой вершинно-транзитивной подгруппы группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$. Два допустимых множества клеток назовем *эквивалентными*, если одно из них переходит в другое под действием некоторого автоморфизма из $\text{Aut}(\Lambda^2)$. Непосредственно проверяется, что в табл. 2 приводятся все, с точностью до эквивалентности, допустимые множества клеток решетки Λ^2 (клетки, входящие в множество, помечены черным цветом). Под каждым изображением допу-

стимого множества клеток приводится список групп $H \in \mathbf{H}$, таких что это множество клеток является допустимым относительно подгруппы, сопряженной с H в $\text{Aut}(\Lambda^2)$.

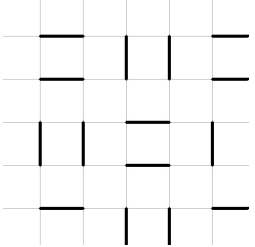
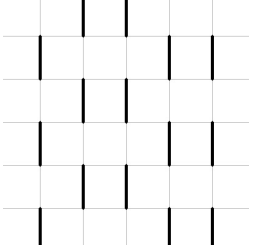
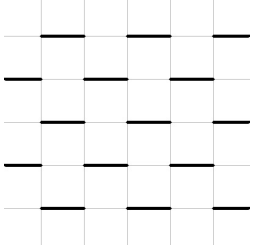
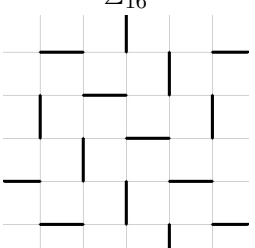
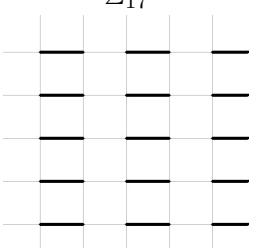
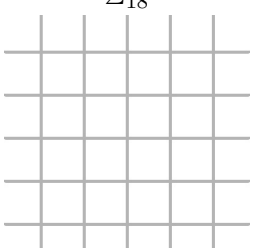
Т а б л и ц а 1

Допустимые подграфы решетки Λ^2

<p style="text-align: center;">Σ_1</p>  <p style="text-align: center;">H_1, \dots, H_{35}</p>	<p style="text-align: center;">Σ_2</p>  <p style="text-align: center;">H_{24}</p>	<p style="text-align: center;">Σ_3</p>  <p style="text-align: center;">H_9</p>
<p style="text-align: center;">Σ_4</p>  <p style="text-align: center;">H_{15}</p>	<p style="text-align: center;">Σ_5</p>  <p style="text-align: center;">$H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$</p>	<p style="text-align: center;">Σ_6</p>  <p style="text-align: center;">$H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16},$ H_{17}, H_{25}, H_{26}</p>
<p style="text-align: center;">Σ_7</p>  <p style="text-align: center;">H_{15}</p>	<p style="text-align: center;">Σ_8</p>  <p style="text-align: center;">$H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$</p>	<p style="text-align: center;">Σ_9</p>  <p style="text-align: center;">H_7, H_8, H_9, H_{30}</p>
<p style="text-align: center;">Σ_{10}</p>  <p style="text-align: center;">H_{14}</p>	<p style="text-align: center;">Σ_{11}</p>  <p style="text-align: center;">H_{15}</p>	<p style="text-align: center;">Σ_{12}</p>  <p style="text-align: center;">$H_3, H_5, H_6, H_8, H_{10},$ $H_{11}, H_{12}, H_{13}, H_{14}, H_{15},$ $H_{16}, H_{17}, H_{20}, H_{21}, H_{22},$ $H_{25}, H_{26}, H_{34}, H_{35}$</p>

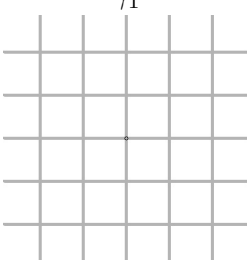
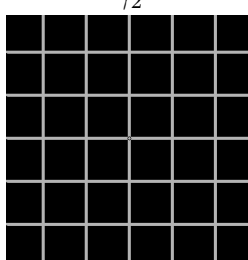
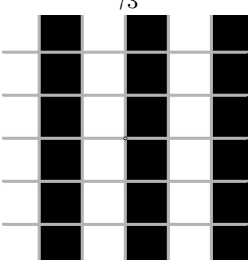
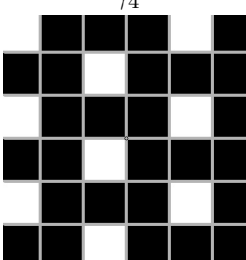
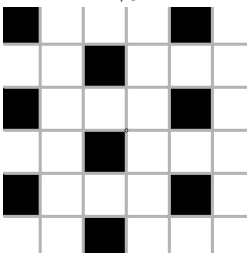
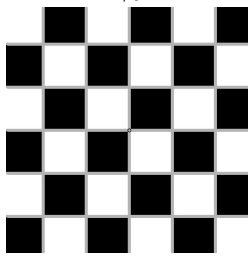
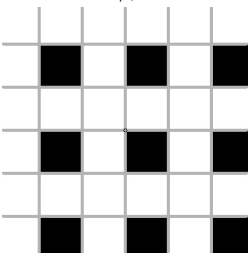
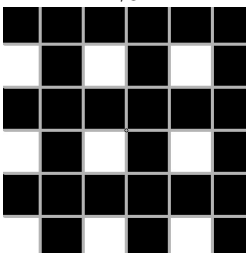
Т а б л и ц а 1 (окончание)

Допустимые подграфы решетки Λ^2

Σ_{13}  H_9	Σ_{14}  H_{24}	Σ_{15}  H_{15}
Σ_{16}  $H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$	Σ_{17}  $H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}$	Σ_{18}  H_1, \dots, H_{35}

Т а б л и ц а 2

Допустимые множества клеток решетки Λ^2

γ_1  H_1, \dots, H_{35}	γ_2  H_1, \dots, H_{35}	γ_3  $H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}$	γ_4  H_{15}
γ_5  H_{15}	γ_6  $H_{19}, H_{20}, H_{22}, H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{31}, H_{32}, H_{33}$	γ_7  $H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$	γ_8  $H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$

3. Основной результат

По [3, предложение 5] задача описания всех, с точностью до эквивалентности, симметрических 2-расширений решетки Λ^2 сводится к задаче описания всех насыщенных симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . А именно, каждую ненасыщенную реализацию симметрического 2-расширения решетки Λ^2 можно получить из некоторой насыщенной реализации путем удаления в ее графе всех ребер, содержащихся внутри блоков. В результате такой операции для произвольной насыщенной реализации либо ее граф остается связным, и мы получаем ненасыщенную реализацию, либо же ее граф становится несвязным. При этом получающиеся ненасыщенные реализации эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны исходные насыщенные реализации.

Теорема. *В табл. 3 (см. ниже) приведены все, с точностью до эквивалентности, насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II (все приведенные в табл. 3 реализации попарно неэквивалентны).*

Полное изображение каждой из приведенных в табл. 3 реализаций получается путем периодического продолжения (с периодом 4 по обоим направлениям) приведенного фрагмента. На фрагментах изображений пары близких вершин образуют блоки из σ , центральный блок соответствует вершине $(0, 0)$ решетки Λ^2 , блок справа от него соответствует вершине $(1, 0)$, блок сверху — вершине $(0, 1)$. В качестве группы автоморфизмов берется группа всех автоморфизмов изображенного графа, сохраняющих блоки. Под изображением перечислены группы из \mathbf{H} , сопряженные в $\text{Aut}(\Lambda^2)$ с гомоморфными образами (возникающими при естественном отображении изображенного графа на решетку Λ^2) всех вершинно-транзитивных подгрупп этой группы. Реализации в таблице 3 обозначаются через $R_{\Sigma, \gamma}$ или $R_{\Sigma(\dots)}$, где Σ — допустимый подграф решетки Λ^2 из табл. 1, являющийся подграфом связей типа 2 данной реализации, γ (если есть) — допустимое множество клеток из табл. 2, которому соответствует данная реализация (в смысле леммы 3 и абзаца перед ней в разд. 4). Аргументы в скобках после Σ (если есть) означают типы расширений циклов графа Σ (см. замечание 2 и абзац перед ним в разд. 4).

Теорема доказывается посредством комбинаторных соображений в разд. 4 и, независимо, с помощью алгоритма из [3], реализованного в пакете GAP, в разд. 5.

Следствие 1. *С точностью до эквивалентности существует 38 насыщенных и 37 ненасыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.*

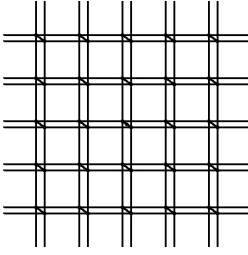
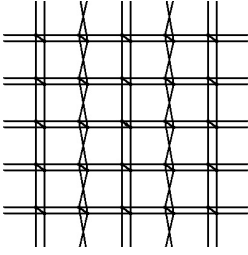
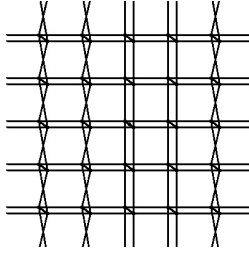
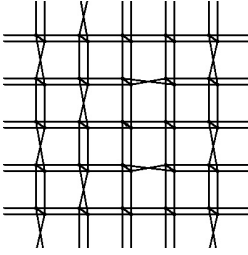
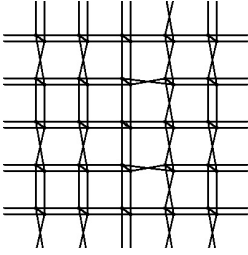
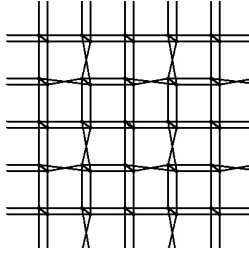
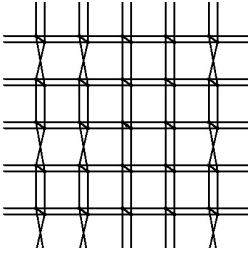
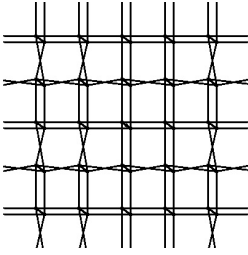
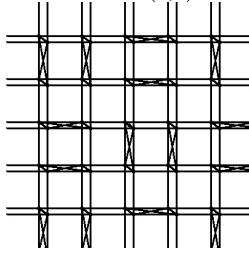
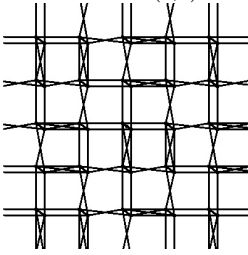
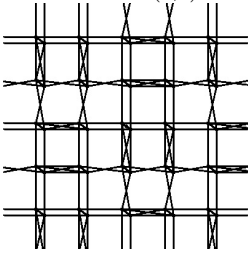
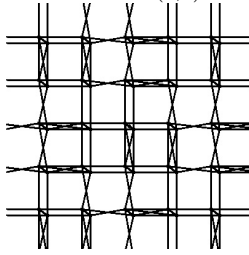
Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждой насыщенной реализации симметрического 2-расширения решетки Λ_2 из табл. 3 сопоставим реализацию, в графе которой внутри каждого блока убрано ребро (см. начало настоящего раздела). При этом только граф первой реализации потеряет связность. \square

Следствие 2. *Графы всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II являются попарно неизоморфными (75 графов). Среди них есть единственный граф — граф реализации 1) R_{Σ_1, γ_1} из табл. 3 — изоморфный графу реализации симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса I — графу $\bar{\Gamma}_{\beta_1(\bar{3}, 2), H_3}$, см. [5, рис. 1b].*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изоморфизм между двумя указанными графами легко строится непосредственно. Для доказательства остальных утверждений следствия 2 при помощи GAP для каждого из 75 графов реализаций класса II из следствия 1, а также для каждого из 78 графов реализаций класса I (см. следствие 2 и следствие 3 из [5]) был построен подграф, порожденный множеством вершин, удаленных от некоторой произвольно выбранной вершины на расстояние ≤ 4 . Среди полученных 153 конечных графов изоморфными оказались только два, соответствующие указанным в формулировке следствия графам. \square

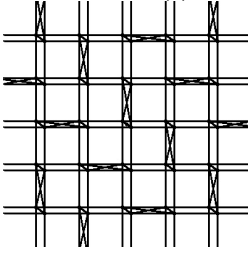
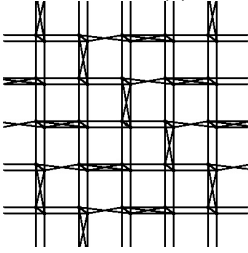
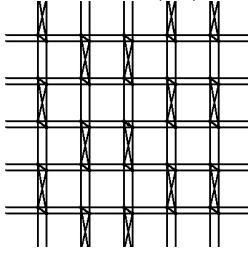
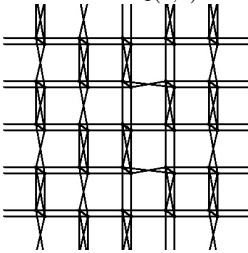
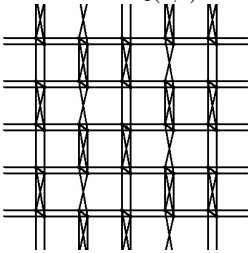
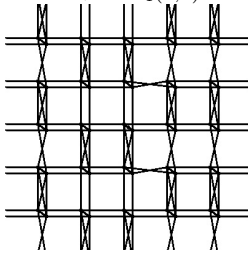
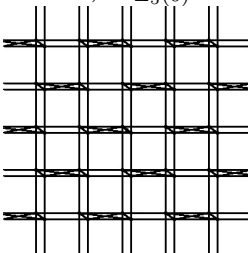
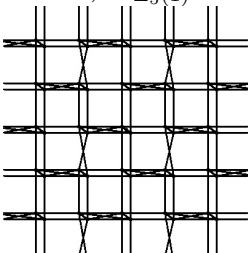
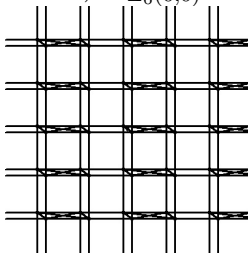
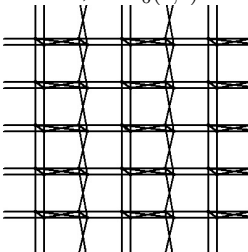
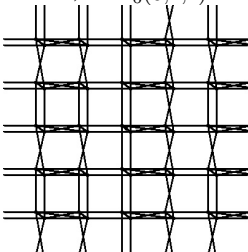
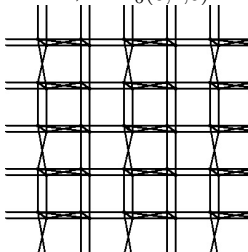
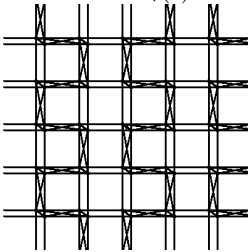
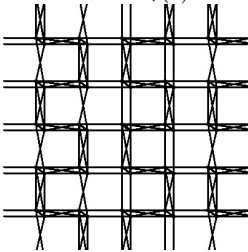
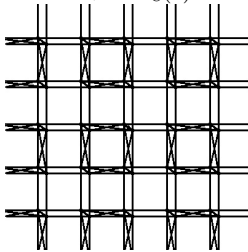
Т а б л и ц а 3

Насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II

<p>1) R_{Σ_1, γ_1}</p>  <p>H_1, \dots, H_{35}</p>	<p>2) R_{Σ_1, γ_2}</p>  <p>H_1, \dots, H_{35}</p>	<p>3) R_{Σ_1, γ_3}</p>  <p>$H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16},$ H_{17}, H_{25}, H_{26}</p>
<p>4) R_{Σ_1, γ_4}</p>  <p>H_{15}</p>	<p>5) R_{Σ_1, γ_5}</p>  <p>H_{15}</p>	<p>6) R_{Σ_1, γ_6}</p>  <p>$H_{19}, H_{20}, H_{22}, H_{23},$ $H_{24}, H_{25}, H_{31}, H_{32}, H_{33}$</p>
<p>7) R_{Σ_1, γ_7}</p>  <p>$H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$</p>	<p>8) R_{Σ_1, γ_8}</p>  <p>$H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$</p>	<p>9) $R_{\Sigma_2(0,0)}$</p>  <p>H_{24}</p>
<p>10) $R_{\Sigma_2(1,0)}$</p>  <p>H_{24}</p>	<p>11) $R_{\Sigma_2(0,1)}$</p>  <p>H_{24}</p>	<p>12) $R_{\Sigma_2(1,1)}$</p>  <p>H_{24}</p>

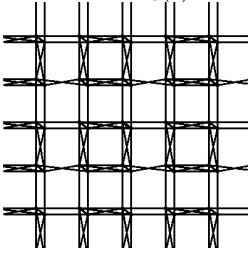
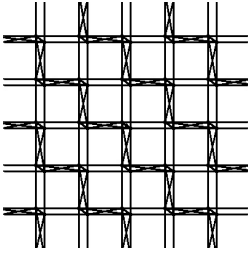
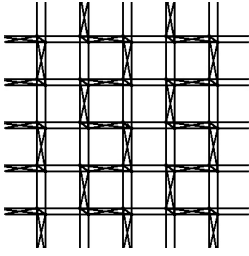
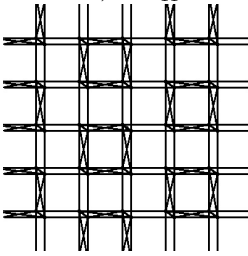
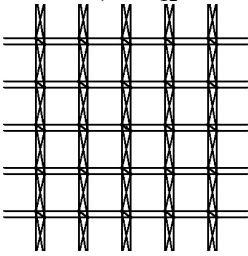
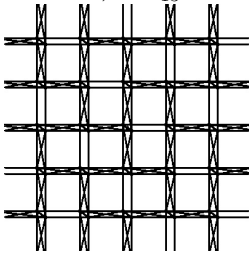
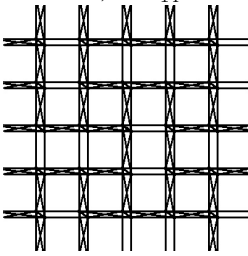
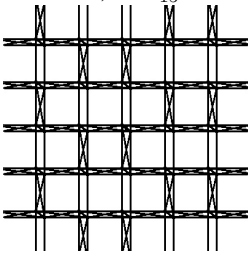
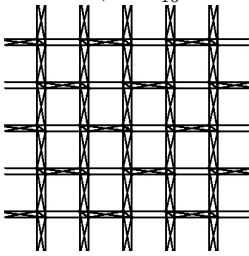
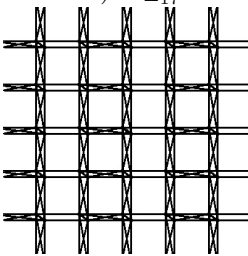
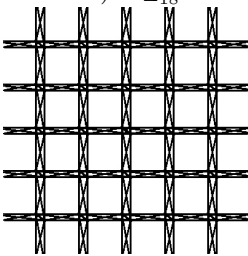
Т а б л и ц а 3 (продолжение)

Насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II

<p>13) $R_{\Sigma_3(0)}$</p>  <p>H_9</p>	<p>14) $R_{\Sigma_3(1)}$</p>  <p>H_9</p>	<p>15) $R_{\Sigma_4(0,0)}$</p>  <p>H_{15}</p>
<p>16) $R_{\Sigma_4(1,0)}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>17) $R_{\Sigma_4(1,1)}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>18) $R_{\Sigma_4(0,1)}$</p>  <p>H_{15}</p>
<p>19) $R_{\Sigma_5(0)}$</p>  <p>$H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$</p>	<p>20) $R_{\Sigma_5(1)}$</p>  <p>$H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$</p>	<p>21) $R_{\Sigma_6(0,0)}$</p>  <p>$H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}$</p>
<p>22) $R_{\Sigma_6(1,1)}$</p>  <p>$H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}$</p>	<p>23) $R_{\Sigma_6(0,1,1)}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>24) $R_{\Sigma_6(0,1,0)}$</p>  <p>H_{25}</p>
<p>25) $R_{\Sigma_7(0)}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>26) $R_{\Sigma_7(1)}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>27) $R_{\Sigma_8(0)}$</p>  <p>$H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$</p>

Т а б л и ц а 3 (продолжение)

Насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II

<p>28) $R_{\Sigma_8(1)}$</p>  <p>$H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$</p>	<p>29) R_{Σ_9}</p>  <p>H_7, H_8, H_9, H_{30}</p>	<p>30) $R_{\Sigma_{10}}$</p>  <p>H_{14}</p>
<p>31) $R_{\Sigma_{11}}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>32) $R_{\Sigma_{12}}$</p>  <p>$H_3, H_5, H_6, H_8, H_{10},$ $H_{11}, H_{12}, H_{13}, H_{14}, H_{15},$ $H_{16}, H_{17}, H_{20}, H_{21}, H_{22},$ $H_{25}, H_{26}, H_{34}, H_{35}$</p>	<p>33) $R_{\Sigma_{13}}$</p>  <p>H_9</p>
<p>34) $R_{\Sigma_{14}}$</p>  <p>H_{24}</p>	<p>35) $R_{\Sigma_{15}}$</p>  <p>H_{15}</p>	<p>36) $R_{\Sigma_{16}}$</p>  <p>$H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$</p>
<p>37) $R_{\Sigma_{17}}$</p>  <p>$H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16},$ H_{17}, H_{25}, H_{26}</p>	<p>38) $R_{\Sigma_{18}}$</p>  <p>H_1, \dots, H_{35}</p>	

4. Комбинаторное доказательство теоремы

Всюду в этом разделе под реализацией R понимается насыщенная реализация симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса II.

Пусть имеется некоторая реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, и Σ — граф ее связей типа 2. Без ограничения общности мы будем считать, что Σ совпадает с одним из графов в таблице 1.

Цикл графа Σ будем называть *элементарным*, если на изображении графа Σ в таблице 1 он ограничивает один из прямоугольников, на которые разбивается плоскость. Цикл $y_0, y_1, \dots, y_l = y_0$ графа Γ , такой что $y_i^\sigma \neq y_{i+1}^\sigma$ для каждого $i = 0, \dots, l-1$ и все y_1, \dots, y_l различны, будем называть *расширением элементарного цикла* $x_0, x_1, \dots, x_m = x_0$ графа Σ (относительно данной реализации R), если $\varphi(y_i^\sigma) = x_{i+k \pmod{m}}$ для некоторого целого k и любого $i = 0, \dots, l-1$. Справедливо следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. Пусть R — реализация, Σ — граф ее связей типа 2 и $x_0, x_1, \dots, x_m = x_0$ — элементарный цикл графа Σ . Тогда этот цикл либо имеет единственное с точностью до циклических перестановок и обращения порядка входящих в него вершин расширение, причем это расширение имеет длину $2m$, либо имеет ровно два с точностью до циклических перестановок и обращения порядка входящих в них вершин расширения, причем оба они имеют длину m и не имеют общих вершин.

Следующее утверждение является ключевым для доказательства теоремы.

Лемма 2. Пусть R_1, R_2 — насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II, такие что $\Sigma(R_1) = \Sigma(R_2) = \Sigma$, и для каждого элементарного цикла графа Σ в R_1 и R_2 реализуется одна и та же возможность из леммы 1 (для разных циклов, возможно, разная). Тогда $R_1 \cong R_2$.

Доказательство. Пусть $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$.

Если $\Sigma \in \{\Sigma_9, \dots, \Sigma_{18}\}$ то эквивалентность R_1 и R_2 очевидна.

Предположим поэтому, что $\Sigma \in \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_8\}$. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_m = x_0$ — некоторый элементарный цикл графа Σ , и пусть $y_0, y_1, \dots, y_l = y_0$ — его расширение относительно реализации R_1 , а $y'_0, y'_1, \dots, y'_l = y'_0$ — его расширение относительно реализации R_2 . По условию имеем $l' = l$. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi_1(y_0^{\sigma_1}) = \varphi_2((y'_0)^{\sigma_2}) = x_0$, $\varphi_1(y_1^{\sigma_1}) = \varphi_2((y'_1)^{\sigma_2}) = x_1$. Начнем строить изоморфизм ψ между графами реализаций R_1 и R_2 , полагая $\psi(y_i) = y'_i$ для $i = 0, \dots, l-1$. Если $l = m$, то аналогичное соответствие устанавливаем между оставшимися расширениями элементарного цикла x_0, x_1, \dots, x_m в R_1 и R_2 .

Если $\Sigma \notin \{\Sigma_7, \Sigma_8\}$, то пусть $z_0, z_1, \dots, z_n = z_0$ — еще один элементарный цикл графа Σ , имеющий общие ребра с циклом x_0, x_1, \dots, x_m . Пусть, без ограничения общности, $z_0, z_1, \dots, z_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ и $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n \notin \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$. Пусть $w_0, w_1, \dots, w_p = w_0$ — расширение этого цикла относительно реализации R_1 , а $w'_0, w'_1, \dots, w'_{p'} = w'_0$ — его расширение относительно реализации R_2 . По условию имеем $p' = p$. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi_1(w_0^{\sigma_1}) = \varphi_2((w'_0)^{\sigma_2}) = z_0$, $\varphi_1(w_1^{\sigma_1}) = \varphi_2((w'_1)^{\sigma_2}) = z_1$. Циклически сдвигая на m , если нужно, обозначения вершин цикла $w'_0, w'_1, \dots, w'_{p'}$, будем считать, что $\psi(w_0) = w'_0$ (и, следовательно, $\psi(w_i) = w'_i$ для $i = 1, \dots, k$). Продолжим строить изоморфизм ψ , полагая $\psi(w_i) = w'_i$ для $i = k+1, \dots, p-1$. Если $n = p$, то аналогичное соответствие устанавливаем между вторыми расширениями элементарного цикла z_0, z_1, \dots, z_n в R_1 и R_2 . Продолжим подобным образом строить изоморфизм ψ , выбирая последующие элементарные циклы графа Σ так, чтобы выполнялись следующие два условия. Во-первых, чтобы пересечение множества вершин каждого последующего цикла с объединением множеств вершин предыдущих циклов являлось собственным подмножеством вершин некоторого подпути этого цикла. Во-вторых, чтобы в объединение вершин выбираемых циклов рано или поздно вошла каждая вершина из компоненты связности графа Σ , содержащей вершину x_0 . Легко видеть, что эти два условия могут быть выполнены. \square

Таким образом мы построим изоморфизм между подграфами графов Γ_1 и Γ_2 , являющимися симметрическими 2-расширениями компоненты связности графа Σ , содержащей вершину x_0 . Повторяя, если нужно (т. е. в случае $\Sigma \in \{\Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8\}$), подобное построение для каждой компоненты связности графа Σ , получим искомым изоморфизм ψ между графами Γ_1 и Γ_2 .

Будем говорить, что реализация R соответствует допустимому подмножеству клеток γ_i ($i = 1, \dots, 8$), если множество клеток, содержащих элементарные циклы длины 4, для которых

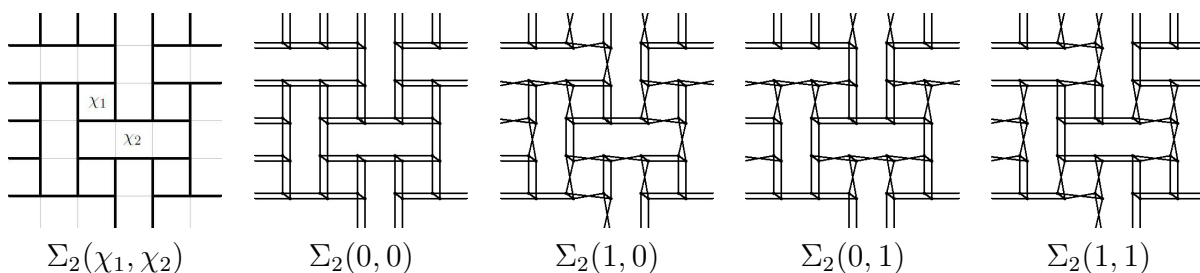


Рис. 1

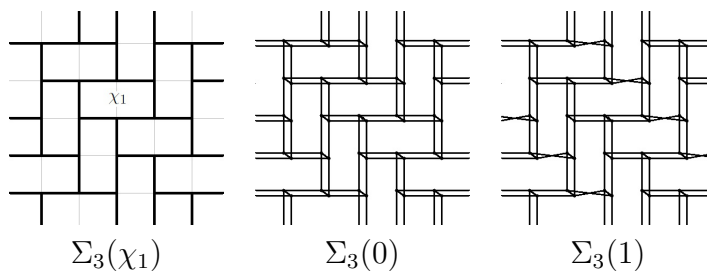


Рис. 2

реализуется первая возможность из леммы 1, переводится в γ_i некоторым автоморфизмом решетки Λ^2 . В табл. 3 реализации, у которых подграф связей типа 2 совпадает с Σ_1 и которые соответствуют допустимому подмножеству клеток γ решетки Λ^2 , обозначаются через $R_{\Sigma_1, \gamma}$. Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть R — реализация и $\Sigma(R) = \Sigma_1$. Тогда

- (1) если каждое расширение каждого элементарного цикла графа Σ_1 является циклом длины 4, то $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_1}$;
- (2) если каждое расширение каждого элементарного цикла графа Σ_1 является циклом длины 8, то $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_2}$;
- (3) если не выполняются условия первых двух случаев, то либо $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_3}$, либо $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_4}$, либо $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_5}$, либо $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_6}$, либо $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_7}$, либо $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_8}$.

В графах $\Sigma_2, \dots, \Sigma_8$ снабдим определенные элементарные циклы переменными $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \{0, 1\}$, как показано в табл. 1. Теперь для каждой реализации, у которой граф связей типа 2 совпадает с одним из этих графов, значения переменных χ_i отражают, какая реализуется возможность из упоминаемых в лемме 1: значение 0 соответствует второй возможности, а значение 1 соответствует первой возможности. Таков принцип обозначения реализаций 9-28 в табл. 3.

Лемма 4. Если $\Sigma(R) = \Sigma_2$, то либо $R \sim R_{\Sigma_2(0,0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_2(1,0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_2(0,1)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_2(1,1)}$.

Доказательство. Элементарные циклы графа Σ_2 имеют длины 4 и 8. Из вершинной симметричности графа реализации R легко следует, что для всех элементарных циклов длины 4 графа Σ_2 реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной χ_1 , а для всех элементарных циклов длины 8 — переменной χ_2 . Из леммы 2 следует, что, придавая переменным χ_1, χ_2 значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, четыре реализации, изображенные на рис. 1. \square

Лемма 5. Если $\Sigma(R) = \Sigma_3$, то либо $R \sim R_{\Sigma_3(0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_3(1)}$.

Доказательство. Элементарные циклы графа Σ_3 имеют длину 6. Из вершинной симметричности графа реализации R легко следует, что для всех элементарных циклов

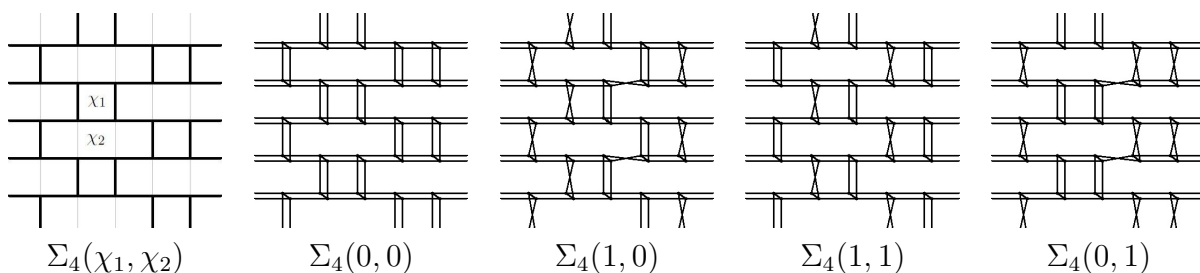


Рис. 3

графа Σ_3 реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной χ_1 . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной χ_1 значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 2. \square

Лемма 6. Если $\Sigma(R) = \Sigma_4$, то либо $R \sim R_{\Sigma_4(0,0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_4(1,0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_4(1,1)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_4(0,1)}$.

Доказательство. Элементарные циклы графа Σ_4 имеют длину 4 или 8. Из вершинной симметричности графа реализации R легко следует, что для всех элементарных циклов длины 4 графа Σ_4 реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной χ_1 , а для всех элементарных циклов длины 8 — переменной χ_2 . Из леммы 2 следует, что, придавая переменным χ_1, χ_2 значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, четыре реализации, изображенные на рис. 3. \square

Лемма 7. Если $\Sigma(R) = \Sigma_5$, то либо $R \sim R_{\Sigma_5(0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_5(1)}$.

Доказательство. Элементарные циклы графа Σ_5 имеют длину 6. Из вершинной симметричности графа реализации R легко следует, что для всех элементарных циклов графа Σ_5 реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной χ_1 . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной χ_1 значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 4. \square

Лемма 8. Если $\Sigma(R) = \Sigma_6$, то либо $R \sim R_{\Sigma_6(0,0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_6(1,1)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_6(0,1,1)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_6(0,1,0)}$.

Доказательство. Приводимое ниже доказательство сопроводим рис. 5. Элементарные циклы графа Σ_6 имеют длину 4. Положим сначала $\chi_1 = \chi_2 = 0$. В силу вершинной симметричности графа реализации R из леммы 2 следует, что $R \cong R_{\Sigma_6(0,0)}$.

Положим теперь $\chi_1 = \chi_2 = 1$. В силу вершинной симметричности графа реализации R из леммы 2 следует, что $R \cong R_{\Sigma_6(1,1)}$.

Положим далее $\chi_1 = 0, \chi_2 = 1$. В силу вершинной транзитивности реализации R имеем либо $\chi_3 = \chi_2$, либо $\chi_3 = \chi_1$. В первом случае реализация может соответствовать только разбиению на клетки γ_5 (см. табл. 2), и из леммы 2 следует $R \cong R_{\Sigma_6(0,1,1)}$. Во втором случае

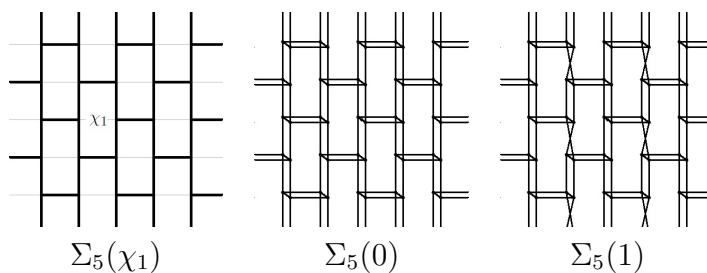


Рис. 4

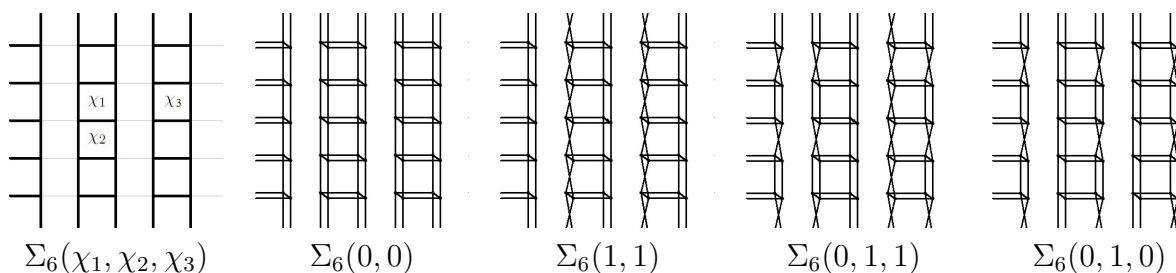


Рис. 5

реализация может соответствовать только разбиению на клетки γ_7 , и из леммы 2 следует $R \cong R_{\Sigma_6(0,1,0)}$.

Наконец, полагая $\chi_1 = 1, \chi_2 = 0$, мы получим реализации, эквивалентные только что рассмотренным. \square

Лемма 9. Если $\Sigma(R) = \Sigma_7$, то либо $R \sim R_{\Sigma_7(0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_7(1)}$.

Доказательство. Элементарные циклы графа Σ_7 имеют длину 4. Из вершинной симметричности графа реализации R легко следует, что для всех элементарных циклов графа Σ_7 реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной χ_1 . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной χ_1 значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 6. \square

Лемма 10. Если $\Sigma(R) = \Sigma_8$, то либо $R \sim R_{\Sigma_8(0)}$, либо $R \sim R_{\Sigma_8(1)}$.

Доказательство. Элементарные циклы графа Σ_8 имеют длину 4. Из вершинной симметричности графа реализации R легко следует, что для всех элементарных циклов графа Σ_8 реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной χ_1 . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной χ_1 значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 7. \square

Наконец, из леммы 2 следует, что для каждого $i \in \{9, \dots, 18\}$, если $\Sigma(R) = \Sigma_i$, то $R \sim R_{\Sigma_i}$. Перебрав все варианты для $\Sigma \in \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{18}\}$, мы получили все реализации из табл. 3. Теорема доказана. \square

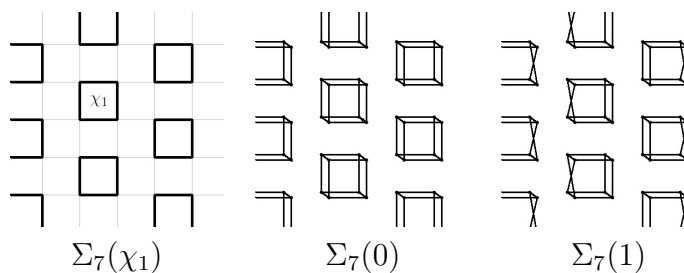


Рис. 6

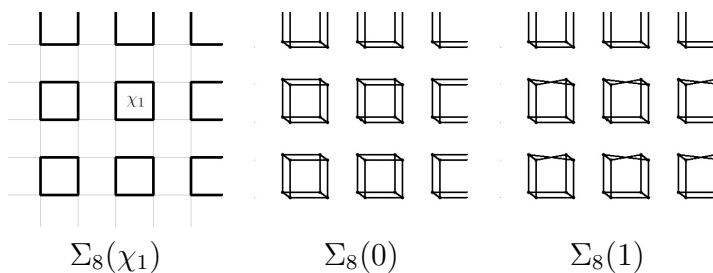


Рис. 7

5. Доказательство теоремы, использующее компьютерную реализацию подхода из [3]

В этом разделе будет дано другое доказательство теоремы, основанное на компьютерной реализации подхода, предложенного в [3], и условно называемого координатизацией симметрических расширений графов. Этот подход представляется применимым для описания реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^d и в случае $d > 2$.

Пусть G — группа и L — ее подгруппа. Пусть, кроме того, \mathcal{P} — некоторое множество двухэлементных подмножеств вида $\{L, aL\}$, $a \in G$, множества G/L левых смежных классов G по L . Тогда через $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ обозначается граф с множеством вершин G/L и множеством ребер $\{\lambda_{G/L}(g)(P) : P \in \mathcal{P}, g \in G\}$, где $\lambda_{G/L}$ — действие группы G на G/L левыми сдвигами. При этом $\lambda_{G/L}(G)$ является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$.

Пусть теперь H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов решетки Λ^2 и G — центральное расширение группы H посредством группы $\langle c' \rangle$ порядка 2. Пусть $K \leq G$ — прообраз $H_{(0,0)}$ при естественном гомоморфизме $G \rightarrow H$ (в частности, $c' \in K$). Пусть L — подгруппа K индекса 2, не содержащая c' (откуда следует $K = L \cup c'L$). Тогда $\sigma := \{\lambda_{G/L}(g)(\{L, c'L\}) : g \in G\}$ есть система импримитивности группы $\lambda_{G/L}(G)$ на G/L . Через φ обозначим взаимнооднозначное отображение σ на $V(\Lambda^2)$, такое что $\varphi(\lambda_{G/L}(g)(\{L, c'L\}))$ совпадает с $\bar{g}((0,0))$, где \bar{g} — образ g при естественном гомоморфизме $G \rightarrow H$, для всех $g \in G$. Пусть, кроме того, \mathcal{P} — некоторое множество двухэлементных подмножеств вида $\{L, aL\}$, $a \in G$. Если граф $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ связан, то четверка $(\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}, \lambda_{G/L}(G), \sigma, \varphi)$ является реализацией симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса II, которую мы будем называть *универсальной реализацией*, соответствующей G, L, \mathcal{P} , и для краткости обозначать через $R_{G,L,\mathcal{P}}$.

Пусть даны допустимый подграф Σ решетки Λ^2 и группа $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$, являющаяся вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа Σ . Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 — такой набор элементов группы H , что $h_1((0,0)) = (1,0)$, $h_2((0,0)) = (-1,0)$, $h_3((0,0)) = (0,1)$, $h_4((0,0)) = (0,-1)$. Положим $J_\Sigma := \{j \in \{1,2,3,4\} : h_j((0,0)) \in \Sigma((0,0))\}$, где $\Sigma((0,0))$ — окрестность $(0,0)$ в графе Σ . Через $\Sigma^{(0,0)}$ обозначим компоненту связности графа Σ , содержащую $(0,0)$. Пусть Q — ограничение стабилизатора множества вершин $V(\Sigma^{(0,0)})$ в группе H на множество $V(\Sigma^{(0,0)})$. Для каждой компоненты связности Σ^* графа Σ , отличной от $\Sigma^{(0,0)}$, выберем в H элемент, переводящий $\Sigma^{(0,0)}$ в Σ^* . Получающийся в результате этого конечный или счетный набор элементов группы H обозначим через T .

Пусть $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ — произвольная реализация, такая что $\Sigma(R) = \Sigma$ и $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = H$. Пусть $\tilde{\Sigma}^{(0,0)}$ — подграф графа Γ , порожденный множеством вершин $\bigcup_{u \in V(\Sigma^{(0,0)})} \varphi^{-1}(u)$. Пусть \tilde{Q} — ограничение стабилизатора множества вершин $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ в группе G на множество $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$. Выберем $v \in \varphi^{-1}((0,0))$ и положим L равным ограничению стабилизатора G_v на множество $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$. Очевидно, что \tilde{Q} действует транзитивно на $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$. отождествим множество левых смежных классов \tilde{Q}/L с $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$, сопоставляя произвольной вершине $u \in V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ смежный класс gL , где g — некоторый элемент группы \tilde{Q} , переводящий v в u . Пусть N — набор представителей всех смежных классов из \tilde{Q}/L , отождествленных с вершинами из $\tilde{\Sigma}^{(0,0)}$. Пусть X — некоторое подмножество множества N и $\mathcal{P} := \{\{L, gL\} : g \in X\}$. Если граф $\Gamma_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}}$ связан, то мы построили реализацию симметрического 2-расширения $R_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}}$ графа $\Sigma^{(0,0)}$ (симметрическое 2-расширение произвольного связного локально-конечного графа определяется аналогично симметрическому 2-расширению решетки Λ^d , см. [3]). Из [3, предложение 6] следует, что $\Gamma_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}} \cong \tilde{\Sigma}^{(0,0)}$. Используя выбранный ранее набор элементов T группы H мы следующим образом достроим эту реализацию до реализации $R' = (\Gamma', G', \sigma', \varphi')$, эквивалентной R .

Отождествим $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ с подмножеством V_0 множества $V = \{(i, j, k) : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{0,1\}\}$ следующим образом. Вершине u поставим в соответствие тройку (i, j, k) , в которой $(i, j) = \varphi(u^\sigma)$, а k выбрано произвольно. При этом множество левых смежных классов \tilde{Q}/L тоже отождествится с V_0 . Построим граф Γ' с множеством вершин V на основе графа реализации $R_0 = R_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}}$ с множеством вершин V_0 следующим образом. Для произвольных $u =$

$(i_1, j_1, k_1), w = (i_2, j_2, k_2) \in V$ есть следующие три возможности 1)–3).

1) $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \Sigma^{(0,0)}$. Если между блоками реализации R_0 , содержащими эти вершины, имеется ровно 2 ребра, то вершины u, w полагаем смежными в Γ' тогда и только тогда, когда они смежны в $\Gamma_{\tilde{Q}, L, \mathcal{P}}$. В противном случае u, w полагаем смежными в Γ' тогда и только тогда, когда (i_1, j_1) и (i_2, j_2) смежны в Λ^2 .

2) $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ лежат в некоторой компоненте связности Σ^* графа Σ , отличной от $\Sigma^{(0,0)}$. Это значит, что $(i_1, j_1) = t((i'_1, j'_1))$ и $(i_2, j_2) := t((i'_2, j'_2))$ для некоторых $(i'_1, j'_1), (i'_2, j'_2) \in V(\Sigma^{(0,0)})$ и некоторого $t \in T$. Полагаем u, w смежными в Γ' тогда и только тогда, когда (i'_1, j'_1, k_1) и (i'_2, j'_2, k_2) смежны в Γ' .

3) $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ лежат в разных компонентах связности графа Σ . Полагаем u, w смежными в Γ' тогда и только тогда, когда (i_1, j_1) и (i_2, j_2) смежны в Λ^2 .

Легко видеть, что $\Gamma' \cong \Gamma$. Пусть $G' = \psi G \psi^{-1}$, где ψ — изоморфизм графа Γ на граф Γ' . Полагая $\sigma' = \{(i, j, 0), (i, j, 1)\} : i, j \in \mathbb{Z}$ и $\varphi'((i, j)^{\sigma'}) = (i, j)$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$, получаем $(\Gamma', G', \sigma', \varphi') \cong (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$. Построенную таким образом реализацию $R' = (\Gamma', G', \sigma', \varphi')$ мы будем называть *гибридной реализацией, соответствующей $\tilde{Q}, L, \mathcal{P}$ и T* .

С использованием этого построения был реализован следующий алгоритм, который генерирует все, с точностью до эквивалентности, насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.

Алгоритм 1. Генерация всех (с точностью до эквивалентности) насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.

Выход: Список реализаций $R_i, i = 1, \dots, n$.

Описание. 1. Перебираем всевозможные Σ из табл. 1.

2. Перебираем всевозможные вершинно-транзитивные подгруппы H группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$, относительно которых Σ является инвариантным.

3. Строим группу Q , как описано выше. Перебираем всевозможные центральные расширения \tilde{Q} группы Q посредством группы $\langle c \rangle$ порядка 2. Для того, чтобы найти все такие расширения, мы строим полициклическое представление группы Q (см. [8]; если $\Sigma^{(0,0)} = \Sigma$, то строим при помощи вызова процедуры `IsomorphismPcpGroup(H)` из GAP-пакета `Cryst` [6; 7], в остальных случаях — вручную). Затем берем множество порождающих элементов g_1, \dots, g_s и соответствующих соотношений $W_1(g_1, \dots, g_s), \dots, W_r(g_1, \dots, g_s)$ этого полициклического представления. К порождающим добавляем еще один элемент c , а множество определяющих соотношений расширяем 2^r способами, как это описывается в доказательстве теоремы 1 из [3]. Получившиеся претенденты на полициклические представления расширения \tilde{Q} , проходят проверку на корректность при помощи процедуры `IsConfluent` из GAP-пакета `Polycyclic` [8].

4. Пусть K — прообраз группы $Q_{(0,0)}$ в \tilde{Q} при естественном гомоморфизме $\tilde{Q} \rightarrow Q$. Перебираем всевозможные подгруппы L индекса 2 группы K , не содержащие c .

5. Перебираем всевозможные подмножества X множества N (см. выше), и выбираем те из них, для которых граф $\Gamma_{\tilde{Q}, L, \mathcal{P}}$ связан (см. выше). Если $\Sigma^{(0,0)} \neq \Sigma$, то проверяем имеет ли граф Γ' вершинно-транзитивную группу автоморфизмов G , индуцирующую группу H на решетке Λ^2 (см. замечание 1 ниже). Если это так, то записываем получившуюся реализацию в выходной список. \square

З а м е ч а н и е 1. Нам во всех случаях удалось показать существование группы G , являющейся центральным расширением группы H посредством группы $\langle c' \rangle$, где c' — автоморфизм графа Γ' , меняющий местами вершины в каждом из блоков. Таким образом, во всех случаях удалось достроить гибридную реализацию до универсальной (см. табл. 5, в строках 1-20 $c' = c$).

Введем обозначения для следующих автоморфизмов Λ^2 :

$$\begin{aligned} r_{\frac{\pi}{2}} : (a, b) &\mapsto (b, -a), & r_{\pi} : (a, b) &\mapsto (-a, -b), & r_{-\frac{\pi}{2}} : (a, b) &\mapsto (-b, a), \\ m_{/} : (a, b) &\mapsto (b, a), & m_{\setminus} : (a, b) &\mapsto (-b, -a), & m_{|} : (a, b) &\mapsto (-a, b), \\ m_{-} : (a, b) &\mapsto (a, -b), & x : (a, b) &\mapsto (a + 1, b), & y : (a, b) &\mapsto (a, b + 1), \end{aligned} \quad \text{где } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Для описания алгоритма 2, проверяющего реализации на эквивалентность, нам понадобится следующее определение из [2]. Реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 удовлетворяет условию $[p_x, p_y]$ -периодичности, где p_x, p_y — положительные целые числа, если найдутся $g_1, g_2 \in G$, такие что $[g_1, g_2] = 1$ и $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = x^{p_x}$, $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = y^{p_y}$. Следующее утверждение помогает находить p_x и p_y .

Лемма 11. Пусть $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ — реализация симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса II, такая что граф $\Sigma(R)$ связан. Пусть n — наименьшее натуральное число, такое что $x^n \in \varphi G \varphi^{-1}$ и m — наименьшее натуральное число, такое что $y^m \in \varphi G \varphi^{-1}$. Тогда R удовлетворяет условию $[n, m]$ -периодичности или условию $[2n, m]$ -периодичности.

Доказательство. По условию найдутся $g_1, g_2 \in G$, такие что $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = x^n$, $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = y^m$. Если $[g_1, g_2] \neq 1$, то $[g_1, g_2] = c'$ и, следовательно $[g_1^2, g_2] = 1$. \square

З а м е ч а н и е 2. Было проверено, что каждая из сгенерированных при помощи алгоритма 1 реализаций $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, таких что граф $\Sigma(R)$ несвязен, удовлетворяет условию $[n, m]$ -периодичности (числа n, m определяются, как лемме 11).

Пусть $R_i = (\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$, — две из сгенерированных при помощи алгоритма 1 реализации. Опишем алгоритм, позволяющий определить, являются ли они эквивалентными. Если реализации эквивалентны, то между их графами существует изоморфизм ψ , сохраняющий блоки и, переводящий $\varphi_1^{-1}((0, 0))$ в $\varphi_2^{-1}((0, 0))$. Пусть ψ^{σ_1} — подстановка $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$, которую индуцирует ψ . Полагая $\bar{\psi} := \varphi_2 \psi^{\sigma_1} \varphi_1^{-1}$, имеем $\bar{\psi} \in \text{Aut}(\Lambda^2)_{(0,0)}$. Нижеописанный алгоритм 2 позволяет определить эквивалентность реализаций в предположении $\bar{\psi} = 1$. В общем случае для проверки реализаций R_i , $i = 1, 2$, на эквивалентность нужно перебрать всевозможные $h \in \text{Aut}(\Lambda^2)_{(0,0)}$ (8 вариантов), и для каждого h сопоставить при помощи алгоритма 2 реализацию R_1 и реализацию $R'_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, h\varphi_2)$. Если хотя бы для какого-то h реализации R_1 и R'_2 окажутся эквивалентными, то $R_1 \cong R_2$.

Алгоритм 2. Проверка двух реализаций на эквивалентность в предположении $\bar{\psi} = 1$.

Вход: Реализации $R_i = (\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$.

Выход: Заключение об их эквивалентности или неэквивалентности.

Описание. Если $\Sigma(R_1) \neq \Sigma(R_2)$, то $R_1 \neq R_2$. В противном случае, используя лемму 11 и замечание 2 после нее, найдем пару (n, m) положительных целых чисел, такую что обе реализации удовлетворяют условию $[n, m]$ -периодичности. Пусть F_i , $i = 1, 2$, — подграф в Γ_i , порожденный множеством вершин

$$\bigcup_{\substack{k \in \{0, \dots, n\}, \\ l \in \{0, \dots, m\}}} \varphi_i^{-1}((k, l)).$$

Перебирая биекции между блоками $\varphi_1^{-1}(k, l)$ и $\varphi_2^{-1}(k, l)$ для всех $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $l \in \{0, \dots, m-1\}$, можно построить 2^{nm} биекций между множествами вершин подграфов F_1 и F_2 (биекция между блоками $\varphi_1^{-1}(n, l)$ и $\varphi_2^{-1}(n, l)$ для $l \in \{0, \dots, m-1\}$ и между блоками $\varphi_1^{-1}(k, m)$ и $\varphi_2^{-1}(k, m)$ для $k \in \{0, \dots, n-1\}$ устанавливается автоматически из условия периодичности). Если среди них найдется биекция, задающая изоморфизм подграфов F_1 и F_2 , то она по периодичности продолжается до изоморфизма графов Γ_i , $i = 1, 2$, и, следовательно, данные реализации эквивалентны. Если же такого соответствия не найдется, то данные реализации неэквивалентны. Перебор 2^{nm} соответствий вершин подграфов убыстряется за счет использования перебора с возвратом. \square

Список реализаций, сгенерированный при помощи алгоритма 1 и прореженный с помощью алгоритма 2, содержит 38 реализаций, эквивалентных реализациям, приведенным в табл. 3. Мы приводим этот список ниже в табл. 4 и 5. В табл. 4 приведены гибридные представления тех реализаций из этого списка, у которых подграф связей типа 2 несвязен. В табл. 5 приведены универсальные представления для всех реализаций из этого списка.

В табл. 4 для каждой гибридной реализации, соответствующей $\tilde{Q}, L, \mathcal{P}$ и T мы приводим соответствующую ей группу $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$, гомоморфные образы порождающих группы \tilde{Q} (за исключением c) в Q (для упрощения обозначений мы приводим их прообразы при естественном гомоморфизме $H \rightarrow Q$), определяющие соотношения группы \tilde{Q} , группу L , множество $X \subset \tilde{Q}$, такое что $\mathcal{P} = \{\{L, gL\} : g \in X\}$, и набор элементов T группы H .

В табл. 5 для каждой универсальной реализации $R_{G,L,\mathcal{P}}$ мы приводим соответствующую ей группу $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$, гомоморфные образы порождающих группы G (за исключением c') в H , определяющие соотношения группы G , группу L и множество $X \subset G$, такое что $\mathcal{P} = \{\{L, gL\} : g \in X\}$.

В табл. 4 и 5 каждое множество X разбито на четыре части тремя символами ";". Первая часть — элементы, гомоморфные образы которых в группе H отображают $(0, 0)$ в $(1, 0)$; вторая часть — в $(0, 1)$; третья часть — в $(-1, 0)$; четвертая часть — в $(0, -1)$. В частности, запись ";;" означает, что соответствующая из четырех частей пуста.

В табл. 4 для реализации 22) из пяти порождающих соотношений $g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2, g_4^{g_1} = cg_4$ и $g_4^{g_2} = g_4^{-1}$ приведено только четвертое, поскольку остальные четыре такие же, как у реализации 21). Четвертое соотношение отличается множителем c в правой части. Во всех реализациях табл. 4 и 5, где мы прибегаем к подобному сокращению, мы приводим только соотношения, отличающиеся наличием множителя c (или c') в правой части соотношений для указанных похожих реализаций.

Т а б л и ц а 4

**Реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.
Гибридные представления**

H	образы порождающих \tilde{Q}	соотношения \tilde{Q}	L	X	$T \cup \{1\}$
1)-20)	$\tilde{Q} = G$ (см. табл. 5)	см. табл. 5	см. табл. 5	см. табл. 5	$\{1\}$
21) H_{13}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_4^{g_1} = cg_4, g_4^{g_2} = g_4^{-1}$	$\langle g_2 \rangle$	$\{; g_4; g_1; g_4^{-1}\}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2$
22)	Все так же, как в 21), кроме	$g_4^1 = cg_4$			
23) H_{15}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_1} = cg_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{; g_2; g_1; g_3^{-1}g_2\}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = yx^2$
24) H_{25}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_1} = cg_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{; g_2; g_1; cg_3^{-1}g_2\}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2$
25) H_{15}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$	1	$\{; g_2; g_1; \}$	$\{t_1^{t_2^i} : i, j \in \mathbb{Z}\},$ где $t_1 = y^2, t_2 = yx^2$
26)	Все так же, как в 25), кроме	$g_2^{g_1} = cg_2$			
27) H_{23}	$\bar{g}_1 = xm_1, \bar{g}_2 = yxm_-,$ $\bar{g}_3 = m_/\$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_3^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_3, g_3^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_2} = g_3$	$\langle g_3 \rangle$	$\{g_1; g_3g_1; ; \}$	$\{t_1^j t_2^i : i, j \in \mathbb{Z}\},$ где $t_1 = x^2, t_2 = y^2$
28)	Все так же, как в 27), кроме	$g_3^{g_2} = cg_3$			
29) H_7	$\bar{g}_1 = ym_-, \bar{g}_2 = m_/,$ $\bar{g}_3 = yx^{-1}$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_2g_3, g_3^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1^{-1}; g_1; ; \}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = y^2$
30) H_{14}	$\bar{g}_1 = ym_-, \bar{g}_2 = xr\pi,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3^{-1},$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{g_2; g_1; ; \}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2$
31) H_{15}	$\bar{g}_1 = xm_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{g_2g_1; g_2; ; \}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2y$
32) H_3	$\bar{g}_1 = m_-, \bar{g}_2 = m_1,$ $\bar{g}_3 = x$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_2, g_3^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{g_3; ; g_3^{-1}; \}$	$\{y^i : i \in \mathbb{Z}\}$
33) H_9	$\bar{g}_2 = xr\pi$	$g_2^2 = 1$	1	$\{g_2; ; ; \}$	$\{t_2^j t_1^i h^k : i, j \in \mathbb{Z},$ $k \in \{0, 1\}\},$ где $h = y^{-1}m_-,$ $t_1 = y^3x, t_2 = y^4$
34) H_{24}	$\bar{g}_3 = xm_1$	$g_3^2 = 1$	1	$\{g_3; ; ; \}$	$\{t_2^j t_1^i h^k : i, j \in \mathbb{Z},$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}\},$ где $h = y^{-1}x^2r,$ $t_1 = y^2x^2, t_2 = y^4$

Т а б л и ц а 4 (окончание)

**Реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.
Гибридные представления**

H	образы порождающих Q	соотношения Q	L	X	$T \cup \{1\}$
35) H_{15}	$\bar{g}_2 = ym_-$	$g_2^2 = 1$	1	$\{g_2; ; ;\}$	$\{t_2^j t_1^k h^i : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{0, 1\}\}$, где $h = x^{-1}m_+$, $t_1 = y^2, t_2 = yx^2$
36) H_6	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; ; ;\}$	$\{t_2^j t_1^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$, $t_1 = yx, t_2 = y^2$
37) H_{13}	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; ; ;\}$	$\{t_2^j t_1^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$, $t_1 = x^2, t_2 = y$
38) H_1	$\bar{g}_1 = m_+, \bar{g}_2 = r,$ $\bar{g}_3 = r_\pi$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = g_3, g_3^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2^{-1}, g_3^{g_1} = g_3$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{; ; ;\}$	$\{y^j x^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$

Т а б л и ц а 5

**Реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.
Универсальные представления**

H	образы порожд. G	соотношения группы G	L	X
1) H_1	$\bar{g}_1 = m_+, \bar{g}_2 = r,$ $\bar{g}_3 = r_\pi, \bar{g}_4 = x,$ $\bar{g}_5 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = g_3, g_3^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2^{-1},$ $g_3^{g_1} = g_3, g_4^{g_1} = g_5, g_5^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_3,$ $g_4^{g_2} = g_5, g_5^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4^{-1},$ $g_5^{g_3} = g_5^{-1}, g_5^{g_4} = g_5$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{g_4; g_5; g_4^{-1}; g_5^{-1}\}$
2) Все так же, как в 1), кроме		$g_5^{g_4} = c'g_5$		
3) H_{13}	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_3 = x^2, \bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2, g_3^2 = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; g_4; g_3^{-1}g_1; g_4^{-1}\}$
4) H_{15}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_+,$ $\bar{g}_2 = xr_\pi,$ $\bar{g}_3 = yx^2, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_4g_3^{-2}g_2, g_3^{g_1} = g_4g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = c'g_4, g_3^{g_2} = g_3^{-1}, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$	1	$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_1; g_3^{-1}g_2g_1\}$
5) Все так же, как в 4), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4g_3^{-1}, g_3^{g_2} = c'g_3^{-1}$		
6) H_{19}	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_+,$ $\bar{g}_3 = m_+, \bar{g}_4 = xy,$ $\bar{g}_5 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_3^2 = 1, g_2^{g_1} = c'g_5^{-1}g_4g_3,$ $g_3^{g_1} = g_4g_2, g_4^{g_1} = g_5g_4^{-1}, g_5^{g_1} = c'g_5,$ $g_2^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_5^{g_2} = g_5g_4^{-2},$ $g_4^{g_3} = c'g_4, g_5^{g_3} = g_5^{-1}g_4, g_5^{g_4} = c'g_5$	$\langle g_2, g_3 \rangle$	$\{g_1; g_5g_4^{-1}g_1;$ $g_5g_4^{-2}g_1; g_4^{-1}g_1\}$
7) H_{23}	$\bar{g}_1 = xm_+,$ $\bar{g}_2 = yxm_+,$ $\bar{g}_3 = m_+, \bar{g}_4 = x^2,$ $\bar{g}_5 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_3^2 = 1, g_2^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_1} = g_2, g_4^{g_1} = g_4^{-1}, g_5^{g_1} = g_5,$ $g_3^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_5^{-1}, g_5^{g_2} = g_4^{-1},$ $g_4^{g_3} = g_5, g_5^{g_3} = g_4, g_5^{g_4} = c'g_5$	$\langle g_3 \rangle$	$\{g_1; g_3g_1;$ $g_4^{-1}g_1; g_5^{-1}g_3g_1\}$
8) Все так же, как в 7), кроме		$g_3^{g_2} = c'g_6$		
9) H_{24}	$\bar{g}_1 = y^{-1}x^2r,$ $\bar{g}_2 = yx^{-2}m_-,$ $\bar{g}_3 = xm_+,$ $\bar{g}_4 = y^2x^2, \bar{g}_5 = y^4$	$g_1^2 = g_3g_2, g_2^2 = g_5g_4^{-2}, g_3^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_5^{-1}g_4g_3, g_3^{g_1} = g_5^{-1}g_4g_2, g_4^{g_1} = g_5g_4^{-1}$ $g_5^{g_1} = g_5g_4^{-2}, g_3^{g_2} = g_5g_4^{-2}g_3, g_4^{g_2} = g_5^{-1}g_4,$ $g_5^{g_2} = g_5^{-1}, g_4^{g_3} = g_5g_4^{-1}, g_5^{g_3} = g_5, g_5^{g_4} = g_5$	1	$\{g_3; g_5g_4^{-1}g_1;$ $g_4^{-1}g_3g_2g_1;$ $g_5^{-1}g_4g_2, c'g_5^{-1}g_4g_2\}$
10) Все так же, как в 9), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_5^{-1}g_4g_2, g_4^{g_1} = c'g_5g_4^{-1},$ $g_5^{g_1} = c'g_5g_4^{-2}, g_3^{g_2} = c'g_5g_4^{-2}g_3,$ $g_4^{g_3} = c'g_5g_4^{-1}$		
11) Все так же, как в 9), кроме		$g_2^2 = c'g_5g_4^{-2}, g_5^{g_1} = c'g_5g_4^{-2},$ $g_3^{g_2} = c'g_5g_4^{-2}g_3, g_4^{g_2} = c'g_5^{-1}g_4$		
12) Все так же, как в 9), кроме		$g_2^2 = c'g_5g_4^{-2}, g_3^{g_1} = c'g_5^{-1}g_4g_2,$ $g_4^{g_1} = c'g_5g_4^{-1}, g_4^{g_2} = c'g_5^{-1}g_4,$ $g_4^{g_3} = c'g_5g_4^{-1}$		
13) H_9	$\bar{g}_1 = y^{-1}m_+,$ $\bar{g}_2 = xr_\pi,$ $\bar{g}_3 = y^3x, \bar{g}_4 = y^4$	$g_1^2 = g_4^{-1}g_3, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_3^{-1}g_2, g_3^{g_1} = g_4^2g_3^{-3}, g_4^{g_1} = g_4^3g_3^{-4},$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2;$ $g_4g_3^{-1}g_1; g_1\}$
14) Все так же, как в 13), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4^2g_3^{-3}, g_4^{g_1} = c'g_4^3g_3^{-4}, g_4^{g_2} = c'g_4^{-1}$		
15) H_{15}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_+,$ $\bar{g}_2 = xr_\pi,$ $\bar{g}_3 = yx^2, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_4g_3^{-2}g_2,$ $g_3^{g_1} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2g_1; g_1;$ $g_3^{-1}g_2g_1, c'g_3^{-1}g_2g_1\}$
16) Все так же, как в 15), кроме		$g_4^{g_1} = c'g_4, g_4^{g_3} = c'g_4$		
17) Все так же, как в 15), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4g_3^{-1}, g_3^{g_2} = c'g_3^{-1}$		
18) Все так же, как в 15), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4g_3^{-1}, g_4^{g_1} = c'g_4,$ $g_3^{g_2} = c'g_3^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$		
19) H_6	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_3 = yx, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_1} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_4^{-1}g_3,$ $g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; g_4g_3^{-1}g_1;$ $g_4g_3^{-2}g_1,$ $c'g_4g_3^{-2}g_1; g_3^{-1}g_1\}$

Т а б л и ц а 5 (окончание)

**Реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса II.
Универсальные представления**

H	образы порожд. G	соотношения группы G	L	X
20)	Все так же, как в 19), кроме	$g_4^{g_1} = c'g_4, g_3^{g_2} = c'g_4^{-1}g_3, g_4^{g_3} = c'g_4$		
21) H_{13}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_3 = x^2, \bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = g_3^{-1}, g_4^{g_1} = g_4,$ $g_3^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_3g_1, c'g_3g_1;$ $g_4; g_1; g_4^{-1}\}$
22)	Все так же, как в 21), кроме	$g_4^{g_1} = c'g_4$		
23) H_{15}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = yx^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = c'g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$	1	$\{g_4g_3^{-1}g_2g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_2; g_1; g_3^{-1}g_2\}$
24) H_{25}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = x^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = c'g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}, g_4^{g_2} = g_4, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_4g_1, c'g_4g_1;$ $g_2; g_1; c'g_3^{-1}g_2\}$
25) H_{15}	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = yx^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_4g_3^{-1}g_2g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_2; g_1;$ $g_3^{-1}g_2, c'g_3^{-1}g_2\}$
26)	Все так же, как в 25), кроме	$g_2^{g_1} = c'g_2$		
27)	Все так же, как в 7), кроме	$g_5^{g_4} = g_5$ и		$\{g_1; g_3g_1;$ $g_4^{-1}g_1, c'g_4^{-1}g_1;$ $g_5^{-1}g_3g_1, c'g_5^{-1}g_3g_1\}$
28)	Все так же, как в 27), кроме	$g_3^{g_2} = c'g_3$		
29) H_7	$\bar{g}_1 = ym_-, \bar{g}_2 = m_/,$ $\bar{g}_3 = yx^{-1}, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2g_3, g_3^{g_1} = g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3^2, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-2}, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1^{-1}; g_1;$ $g_4^{-1}g_3g_1, c'g_4^{-1}g_3g_1;$ $g_1g_4^{-1}, c'g_1g_4^{-1}\}$
30) H_{14}	$\bar{g}_1 = ym_-, \bar{g}_2 = xr\pi,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = x^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3^{-1}, g_3^{g_2} = g_3^{-1}$ $g_4^{g_1} = g_4, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2; g_1;$ $g_2g_4^{-1}, c'g_2g_4^{-1};$ $g_1g_3^{-1}, c'g_1g_3^{-1}\}$
31) H_{15}	$\bar{g}_1 = xm_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = yx^2$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2g_1; g_2;$ $g_1, c'g_1;$ $g_3^{-1}g_2, c'g_3^{-1}g_2\}$
32) H_3	$\bar{g}_1 = m_-, \bar{g}_2 = m_1,$ $\bar{g}_3 = x, \bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = g_3, g_4^{g_1} = g_4^{-1},$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}, g_4^{g_2} = g_4, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{g_3; g_4, c'g_4;$ $g_3^{-1}; g_4^{-1}, c'g_4^{-1}\}$
33)	Все так же, как в 13), кроме			$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2; g_4g_3^{-1}g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_1; g_1, c'g_1\}$
34)	Все так же, как в 9), кроме			$\{g_3; g_5g_4^{-1}g_1,$ $c'g_5g_4^{-1}g_1;$ $g_4^{-1}g_3g_2g_1,$ $c'g_4^{-1}g_3g_2g_1;$ $g_5^{-1}g_4g_2, c'g_5^{-1}g_4g_2\}$
35)	Все так же, как в 15), кроме			$\{g_2, c'g_2; g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_1, c'g_1;$ $g_3^{-1}g_2g_1, c'g_3^{-1}g_2g_1\}$
36)	Все так же, как в 19), кроме			$\{g_1; g_4g_3^{-1}g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_1;$ $g_4g_3^{-2}g_1, c'g_4g_3^{-2}g_1;$ $g_3^{-1}g_1, c'g_3^{-1}g_1\}$
37)	Все так же, как в 3), кроме	$g_4^{g_3} = g_4$ и		$\{g_1; g_4, c'g_4; g_3^{-1}g_1,$ $c'g_3^{-1}g_1; g_4^{-1}, c'g_4^{-1}\}$
38)	Все так же, как в 1), кроме			$\{g_4, c'g_4; g_5, c'g_5;$ $g_4^{-1}, c'g_4^{-1};$ $g_5^{-1}, c'g_5^{-1}\}$

Авторы благодарны В.И. Трофимову за полезное обсуждение результатов данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов В.И.** Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 316–320.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 175–206.

3. Трофимов В.И. Конечность числа симметрических 2-расширений d -мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 290–303.
4. Трофимов В.И. Несколько замечаний о симметрических расширениях графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 284–293.
5. Коновальчик Е.А., Костоусов К.В. Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 159–179.
6. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra. Ver. 4.5.7: [e-resource]. 2012. URL: <http://www.gap-system.org>.
7. Bettina Eick, Franz Gahler, Werner Nickel. GAP package Cryst – Computing with crystallographic groups Cryst. Ver. 4.1: [e-resource]. 2013. URL: <https://www.gap-system.org/Packages/cryst.html>.
8. Bettina Eick, Max Horn, Werner Nickel. GAP package Polycyclic. Ver. 2.11: [e-resource]. 2013. URL: <https://www.gap-system.org/Packages/polycyclic.html>.

Коновальчик Елена Александровна

Поступила 12.01.2017

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

старший преподаватель кафедры высшей математики ФГБОУ ВО

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова,

г. Магнитогорск

e-mail: nega-le@yandex.ru

Костоусов Кирилл Викторович

канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

kkoustousov@gmail.com

REFERENCES

1. Trofimov V.I. Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*. 2012, **279**, suppl. 1, pp. 107–112. doi: 10.1134/S0081543812090088.
2. Neganova E.A., Trofimov V.I. Symmetrical extensions of graphs. *Izv. Math.* 2014, vol. 78, no. 4, pp. 809–835. doi: 10.1070/IM2014v078n04ABEH002707.
3. Trofimov V.I. The finiteness of the number of symmetrical 2-extensions of the d -dimensional lattice and similar graphs. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*. 2014, **285**, suppl. 1, pp. 169–182. doi: 10.1134/S0081543814050198.
4. Trofimov V.I. Some remarks on symmetrical extensions of graphs. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*. 2015, **289**, suppl. 1, pp. 199–208. doi: 10.1134/S0081543815050181.
5. Konovalchik E.A., Kostousov K.V. Symmetrical 2-extensions of a 2-dimensional grid. I. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*. 2016, vol. 22, no. 1, pp. 159–179 (in Russian).
6. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra. Ver. 4.5.7: [e-resource]. 2012. Available at: <http://www.gap-system.org>.
7. Bettina Eick, Franz Gahler, Werner Nickel. *GAP package Cryst – Computing with crystallographic groups Cryst*, Ver. 4.1, e-resource, 2013. Available at: <https://www.gap-system.org/Packages/cryst.html>.
8. Bettina Eick, Max Horn, Werner Nickel. *GAP package Polycyclic*. Ver. 2.11, [e-resource, 2013. Available at: <https://www.gap-system.org/Packages/polycyclic.html>.

The paper was received by the Editorial Office on January 12, 2017.

Elena Aleksandrovna Konoval'chik, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000 Russia, e-mail: asmi@imm.uran.ru.

Kirill Viktorovich Kostousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: asmi@imm.uran.ru.