ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 514+519.1

ПРОБЛЕМА ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ГРОМОВА — ХАУСДОРФА: СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ[1]

А. О. Иванов, Н. К. Николаева, А. А. Тужилин

Изучается проблема Штейнера в пространстве Громова — Хаусдорфа, т. е. в пространстве компактных метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии) с расстоянием Громова — Хаусдорфа. Так как это пространство не является ограниченно компактным, вопрос существования кратчайшей сети, соединяющей конечное множество точек в этом пространстве, открыт. В работе доказано, что каждое конечное семейство конечных метрических пространств соединяется некоторой кратчайшей сетью. Более того, оказалось, что в рассматриваемом случае среди кратчайших деревьев найдется дерево, все вершины которого суть конечные метрические пространства. Получена оценка числа элементов в этих пространствах. В качестве примера разобран случай трехточечных метрических пространств. Также показано, что пространство Громова — Хаусдорфа не реализует минимальные заполнения, т. е. кратчайшие деревья в нем не обязаны быть минимальными заполнениями своих границ.

Ключевые слова: проблема Штейнера, кратчайшая сеть, минимальное дерево Штейнера, минимальное заполнение, пространство Громова — Хаусдорфа, расстояние Громова — Хаусдорфа.

A. O. Ivanov, N. K. Nikolaeva, A. A. Tuzhilin. Steiner's problem in the Gromov–Hausdorff space: the case of finite metric spaces.

We study Steiner's problem in the Gromov–Hausdorff space, i.e., in the space of compact metric spaces (considered up to isometry) endowed with the Gromov–Hausdorff distance. Since this space is not boundedly compact, the problem of the existence of a shortest network connecting a finite point set in this space is open. We prove that each finite family of finite metric spaces can be connected by a shortest network. Moreover, it turns out that there exists a shortest tree all of whose vertices are finite metric spaces. A bound for the number of points in such metric spaces is derived. As an example, the case of three-point metric spaces is considered. We also prove that the Gromov–Hausdorff space does not realise minimal fillings, i.e., shortest trees in it need not be minimal fillings of their boundaries.

Keywords: Steiner's problem, shortest network, Steiner's minimal tree, minimal filling, Gromov–Hausdorff space, Gromov–Hausdorff distance.

MSC: 58E10, 49K35, 05C35, 05C10, 30L05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-152-161

Введение

“Пространства подмножеств” интенсивно изучаются специалистами не только благодаря своей очевидной теоретической значимости, но и в силу важности таких приложений, как сравнение и распознавание образов, построение деформации одного геометрического объекта в другой и т. д. (см., например, [1]). Один из возможных подходов к изучению таких пространств — определить функцию расстояния между подмножествами как “меру несхожести” соответствующих объектов. В 1914 г. Ф. Хаусдорф [2] ввел в рассмотрение неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней грани таких чисел r, что одно множество содержится в r-окрестности другого и наоборот. Эта функция превращает семейство замкнутых ограниченных подмножеств X в метрическое пространство. Позднее Д. Эдвардс [3] и независимо М. Громов [4] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех метрических компактов, используя их

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16–01–00378) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-7962.2016.1).

изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства (см. определение ниже). Полученная функция называется расстоянием по Громову — Хаусдорфу, а соответствующее метрическое пространство метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, — пространством Громова — Хаусдорфа, или суперпространством и обозначается через $\mathcal{M}$. Геометрия этого пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается в последнее время. Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное пространство, а также что $\mathcal{M}$ не является ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова — Хаусдорфа можно найти в [5, гл. 7]. Недавно авторами было показано (см. [6]), что пространство $\mathcal{M}$ является геодезическим, т. е. любые две его точки соединяет кратчайшая кривая, длина которой равна расстоянию между этими точками. В данной работе мы изучаем "разветвленные геодезические" в пространстве Громова — Хаусдорфа, т. е. кратчайшие, деревья, соединяющие конечные подмножества в $\mathcal{M}$.

Задачи об оптимальном соединении, к которым относится и проблема Штейнера о кратчайших деревьях, активно изучаются на протяжении многих лет не только благодаря своей математической красоте и нетривиальности, но и в силу очевидной прикладной значимости. Напомним, что проблема Штейнера в классической постановке требует найти кратчайшее дерево, соединяющее данное фиксированное конечное множество точек плоскости (при этом дерево может иметь дополнительные, не входящие в исходное множество, вершины). Уже эта классическая задача оказывается чрезвычайно сложной благодаря "комбинаторному взрыву" — экспоненциально быстро растущему числу возможных структур деревьев-кандидатов. Обобщенная проблема Штейнера о поиске кратчайших сетей в других метрических пространствах тем более нетривиальна. В частности, неизвестен общий критерий существования кратчайшей сети. Если объемлющее пространство ограниченно компактно, то теорема существования доказывается стандартными методами. В общем случае кратчайшее дерево может и не существовать. Например, в [7, гл. 7] построен пример трехточечного подмножества полного метрического пространства, для которого кратчайшего дерева не существует (в книге [7] также можно найти подробное введение в общую теорию минимальных сетей). По-видимому, первый такой пример для банаховых пространств был построен в [8] (см. также [9] и [10]). В данной работе изучается проблема Штейнера в пространстве Громова — Хаусдорфа, которое не является ограниченно компактным.

В работе показано, что если конечное подмножество $M \subset \mathcal{M}$ состоит только из конечных метрических пространств, то M соединяется некоторым минимальным деревом Штейнера. Более того, в этом случае среди кратчайших деревьев существует такое, что все его дополнительные вершины также являются конечными метрическими пространствами, а также получена оценка сверху на возможное количество точек в них. В качестве примера разобран случай трехточечных метрических пространств. Также показано, что пространство Громова — Хаусдорфа не реализует минимальные заполнения, т. е. кратчайшие деревья в нем не обязаны быть минимальными заполнениями своих границ.

В случае общих метрических компактов авторами была решена проблема Штейнера только для двухэлементных границ [6], где она равносильна существованию кратчайших кривых, соединяющих произвольную пару точек пространства. Для большего числа граничных точек попытки применить предельный переход с использованием критерия предкомпактности Громова к успеху не привели.

Предварительная версия данной статьи была выложена в архиве библиотеки Корнельского университета (см. [11]). Также результаты работы были анонсированы в обзоре [12].

1. Необходимые определения и предварительные результаты

1.1. Пространство Громова — Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy|$. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств X.

Для $A,\,B\in\mathcal{P}(X)$ положим
$$d_H(A,B)=\max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|,\,\sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ab|\bigr\}.$$
Величина $d_H(A,B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*.

Отметим, что $d_H(A,B)$ может равняться бесконечности (например, когда $X=A=\mathbb{R}$ и $B=\{0\}\subset\mathbb{R}$), а также нулю на неравных A и B (например, когда $X=\mathbb{R}$, $A=[a,b]$ и $B=[a,b)$).

Пусть $\mathcal{H}(X)\subset\mathcal{P}(X)$ обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X. Хорошо известно (см., например, [5, гл. 7]), что d_H задает метрику на $\mathcal{H}(X)$.

Далее, пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X',Y',Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). Положим
$$d_{GH}(X,Y)=\inf\bigl\{r:\text{существует такая реализация } (X',Y',Z),\text{ что } d_H(X',Y')\le r\bigr\}.$$
Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется *расстоянием Громова — Хаусдорфа между X и Y*. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Тогда (см., например [5, гл. 7]) расстояние d_{GH} является метрикой на $\mathcal{M}$.

Расстояние Громова — Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Положим $\mathcal{P}(X,Y)=\mathcal{P}(X\times Y)$. Элементы из $\mathcal{P}(X,Y)$ называются *отношениями* между X и Y. Если $X'\subset X$ и $Y'\subset Y$ — непустые подмножества, а $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$, то положим
$$\sigma|_{X'\times Y'}=\bigl\{(x,y)\in\sigma: x\in X',\,y\in Y'\bigr\}.$$
Отметим, что $\sigma|_{X'\times Y'}$ может оказаться пустым и тем самым не принадлежащим $\mathcal{P}(X',Y')$.

Пусть $\pi_X\colon(x,y)\mapsto x$ и $\pi_Y\colon(x,y)\mapsto y$ — канонические проекции. Отношение $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если ограничения π_X и π_Y на σ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого отношения $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ определено его искажение
$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|:(x,y),\,(x',y')\in\sigma\bigr\}.$$
Хорошо известен следующий результат (см., например, [5, гл. 7]).

Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда $d_{GH}(X,Y)=\dfrac12\inf\bigl\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\bigr\}$.

Для метрического пространства X через $\operatorname{diam}X$ обозначим его диаметр: $\operatorname{diam}X=\sup\bigl\{|xy|:x,\,y\in X\bigr\}$. Нам понадобится следующая оценка (см., например, [5, гл. 7]).

Для любых метрических пространств X и Y таких, что диаметр по крайней мере одного из них конечен, имеем
$$d_{GH}(X,Y)\ge\frac12|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|. \tag{1}$$

Соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y)=\dfrac12\operatorname{dis}R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$. Справедливо утверждение (см. [13, Theorem 2.6; 14]):

Для $X,\,Y\in\mathcal{M}$ имеем
$$\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)\ne\varnothing. \tag{2}$$

Пусть $\mathcal{M}_n\subset\mathcal{M}$ состоит из всех конечных метрических пространств, каждое из которых состоит не более чем из n точек, а $\mathcal{M}(d)\subset\mathcal{M}$ — из всех пространств, диаметры которых не больше d. Положим $\mathcal{M}_n(d)=\mathcal{M}_n\cap\mathcal{M}(d)$. Легко проверить, что имеет место следующий результат (см., например, [5, гл. 7]).

Предложение 1. *Пространство $\mathcal{M}_n(d)$ компактно.*

1.2. Графы и сети. Минимальные деревья, минимальные заполнения

Напомним, что (простой) *граф* $G = (V, E)$ — это совокупность непустого конечного множества вершин $v_i \in V$ и множества ребер — двухэлементных подмножеств $e = \{v_i, v_j\} \in E$ множества вершин. Будем обозначать ребро $\{v_i, v_j\}$ через v_iv_j. Далее будем рассматривать только простые графы. Ребро $e = v_1v_2$ и вершина v_i, $i = 1, 2$, называются *инцидентными*; вершины v_1 и v_2, инцидентные ребру $e = v_1v_2$, называются *смежными*, а также *соединенными ребром* e. *Степенью вершины* называется число инцидентных ей ребер графа. *Маршрутом* называется последовательность вершин $v_1, \dots, v_n$, в которой каждая пара последовательных вершин соединена ребром. *Циклом* называется маршрут, все ребра которого попарно различны и первая и последняя вершина совпадают. *Связным* называется граф, в котором любые две вершины соединены маршрутом. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов.

Мы будем рассматривать граничные задачи, вводя ограничения на те или иные совокупности вершин изучаемых графов. Если некоторое такое семейство вершин выбрано, то его будем называть *границей графа*, а сам граф — *графом с границей.* Мы всегда будем предполагать, что у графа фиксирована некоторая граница (возможно, пустая). Как правило, границу графа G будем обозначать через ∂G. Вершины из ∂G будем называть *граничными*, а все остальные вершины графа G — *внутренними. Бинарным деревом* мы будем называть дерево с границей, степени вершин которого равны 1 или 3, а множество граничных вершин состоит из всех вершин степени 1.

Пусть M — произвольное конечное множество и G — связный граф. Будем говорить, что граф G (с границей ∂G) *соединяет* M, если $\partial G = M$. Определим *сеть* Γ *типа* $G = (V, E)$ в множестве X как отображение $\Gamma\colon V \to X$; граф G называется *параметризующим графом* сети или ее *топологией.* Ограничения отображения Γ на ребра, вершины (граничные, внутренние), границу параметризующего графа называются соответственно *ребрами*, *вершинами* (*граничными, внутренними*), *границей* сети Γ. Границу сети Γ будем обозначать через $\partial\Gamma$. Если множество $M \subset X$ является образом границы $\partial\Gamma$ сети Γ, то говорят, что сеть Γ *соединяет множество* M *по отображению* $\partial\Gamma$, и обозначают $M \subset \Gamma$.

Пусть теперь X — метрическое пространство и Γ — сеть типа $G = (V, E)$ в X. Длина ребра $\Gamma\colon \{v_i, v_j\} \to X$ сети Γ определяется как расстояние $\bigl|\Gamma(v_i)\Gamma(v_j)\bigr|$, а длина сети Γ — как сумма длин всех ее ребер:

$$|\Gamma| := \sum_{v_iv_j \in E} \bigl|\Gamma(v_i)\Gamma(v_j)\bigr|.$$

Сеть называется *невырожденной*, если длины всех ее ребер отличны от нуля.

Пусть теперь M — подмножество в множестве X и граф G соединяет M. Условимся считать, что в этом случае все сети Γ типа $G = (V, E)$ в X удовлетворяют следующему условию: ограничение Γ на M — тождественное отображение. Тем самым, каждая такая сеть Γ однозначно задается положением своих внутренних вершин. Поэтому если $v_1, \dots, v_k$ — внутренние вершины параметризующего графа G, то сеть Γ типа G, соединяющая $M \subset X$, однозначно определяется множеством $\bigl\{\Gamma(v_1), \dots, \Gamma(v_k)\bigr\}$.

Пусть даны два графа G_1 и G_2, соединяющие $M \subset X$, и сети Γ_i типа G_i, $i = 1, 2$. Назовем эти сети *равными*, если существует изоморфизм $\nu : V_1 \to V_2$ графов G_i, тождественный на M и такой, что $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$. Отождествляя Γ_1 и Γ_2 с помощью этого изоморфизма ν, мы будем считать, что равные сети — это сети одного и того же типа, скажем, G_1.

Для фиксированной границы M в метрическом пространстве X рассмотрим связный граф $G = (V, E)$, соединяющий M. Обозначим через $[G, M]$ множество всех сетей Γ типа G (в силу сделанного выше соглашения все сети $\Gamma \in [G, M]$ удовлетворяют условию $\Gamma|_{\partial G} = \mathrm{id}$). Сеть из $[G, M]$, имеющая наименьшую возможную длину среди всех таких сетей, называется *минимальной параметрической сетью типа G, соединяющей M*. Минимальная параметрическая сеть существует не всегда. Тем не менее точная нижняя грань величин $|\Gamma|$ по всем сетям из $\Gamma \in [G, M]$ всегда существует, называется *длиной минимальной параметрической сети* и обозначается через $\mathrm{mpn}[G,M]$.

Длиной минимального дерева Штейнера на M называется величина

$$\mathrm{smt}(M)=\inf_{\Gamma:M\subset\Gamma}|\Gamma|=\inf_{G:\partial G=M}\mathrm{mpn}[G,M],$$

где первый имфимум берется по всевозможным сетям, соединяющим M, а второй — по всем связным графам с границей M. Эти инфимумы могут не достигаться. Если же первый из них достигается на некоторой сети, то, как несложно показать (см., например, [7, гл. 1]), он достигается также и на невырожденной сети. Эта невырожденная сеть является деревом, имеющим не более $n-2$ внутренних вершин, и называется *минимальным деревом Штейнера на M* или *кратчайшим деревом на M*. Множество всех кратчайших деревьев на M в метрическом пространстве X обозначим через $\mathrm{SMT}(M,X)$. Также мы иногда будем писать $\mathrm{smt}(M,X)$ вместо $\mathrm{smt}(M)$, явно указывая объемлющее пространство X.

Задачи, связанные с изучением минимальных деревьев Штейнера, объединяются под общим названием *проблема Штейнера.*

Техника, разработанная в [7, гл. 1] для римановых многообразий, легко обобщается на ограниченно компактные метрические пространства.

Теорема 1. *Пусть X — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для любого его конечного подмножества M в пространстве X существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее M, и для любого связного графа G с границей M существует соединяющая M минимальная параметрическая сеть типа G в X.*

Доказательство. Мы приведем здесь краткую схему доказательства. Начнем с существования минимальной параметрической сети данного типа G. Длина каждой параметрической сети Γ типа G полностью определяется образами ее подвижных вершин, причем, так как расстояние $|xy|$ между точками метрического пространства есть непрерывная функция от x и y, то длина ℓ_Γ параметрической сети типа G есть непрерывная функция на X^k, где k — количество внутренних вершин графа G.

Далее, пусть O — некоторая точка из M. Конечное множество M содержится в некотором шаре $B_r(O)$. Длина параметрической сети Γ типа G, образы всех подвижных вершин которой расположены в этом шаре, не превосходит $2rm$, где m — количество ребер графа G. С другой стороны, если хотя бы одна вершина параметрической сети с границей M находится вне шара $B_{2rm}(O)$, то ее длина больше, чем $2rm$. Поэтому вне шара $B=B_{2rm}(O)$ нет вершин минимальной параметрической сети типа G. Из сказанного вытекает, что минимальная параметрическая сеть типа G соответствует наименьшему значению функции ℓ_Γ на компакте B^k. Это значение достигается по теореме Вейерштрасса, что и требовалось.

Перейдем к существованию кратчайшего дерева. Как отмечалось выше, длина кратчайшего дерева с границей M — это точная нижняя грань длин минимальных параметрических сетей с той же границей M, где инфимум берется по всевозможным связным графам с границей M, параметризующим эти сети. Ясно, что достаточно рассматривать невырожденные сети без циклов, т. е. невырожденные сети, параметризованные деревьями. Каждая такая невырожденная сеть-дерево может быть параметризована бинарным деревом (возможно, вырожденным), множество вершин степени 1 которого совпадает с M. Таких деревьев конечное число, поэтому длина кратчайшей сети с границей M представляет собой минимум длин минимальных параметрических бинарных деревьев с границей M, который достигается на некотором бинарном дереве G. Минимальное параметрическое дерево типа G, которое, как мы только что доказали, существует, и будет в этом случае кратчайшим деревом. Теорема доказана.

Следующий результат вытекает из предложения 1 и теоремы 1.

Следствие 1. *Для любого непустого конечного множества $M\subset\mathcal{M}_n(d)$ существует кратчайшее дерево в $\mathcal{M}_n(d)$, т. е. $\mathrm{SMT}\big(M,\mathcal{M}_n(d)\big)\ne\varnothing$.*

Оказывается, иногда длину кратчайшего дерева “можно уменьшить”, если разрешить менять объемлющее пространство. Соответствующая теория появилась в [15] как обобщение работ М. Громова о минимальных заполнениях римановых многообразий на случай конечных метрических пространств. В качестве аналога заполнений здесь выступают взвешенные графы, которые можно рассматривать как одномерные стратифицировнные римановы многообразия.

Пусть M — конечное метрическое пространство. *Реализацией* пространства M назовем изометричное вложение $\varphi\colon M\to X$ в некоторое метрическое пространство X. Величина

$$\mathrm{mf}(M)=\inf\bigl\{t: \text{существует реализация } \varphi\colon M\to X \text{ такая, что } \mathrm{smt}(\varphi(M),X)\le t\bigr\}$$

называется *весом минимального заполнения* пространства X. Отметим, что в [15] дается комбинаторное определение на языке взвешенных графов. Там же показано, что эта точная нижняя грань достигается для любого конечного метрического пространства. Кратчайшие деревья из $\mathrm{SMT}(\varphi(M),X)$, для которых $\mathrm{smt}(\varphi(M),X)=\mathrm{mf}(M)$ (рассматриваемые как взвешенные деревья, веса ребер которых — суть расстояния между их концами в X), называются *минимальными заполнениями* пространства M.

Встречаются метрические пространства X, в которых каждое конечное подмножество M соединяется кратчайшим деревом, и это дерево является минимальным заполнением своей границы M (здесь M рассматривается как конечное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из X). В этом случае говорят, что X *реализует минимальные заполнения.* Все банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения, были описаны в [16]. Оказалось, что среди конечных нормированных пространств этим свойством обладает только пространство $\mathbb{R}^n_\infty$, т. е. пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty=\max_i|x_i|$ (для пространства $\mathbb{R}^n_\infty$, а также для пространства ℓ_∞ ограниченных последовательностей этот факт был впервые доказан З. Н. Овсянниковым в его курсовой работе, выполненной на механико-математическом факультете МГУ; см. также [17]). Отметим, что если пространство обладает указанным свойством, то поиск минимальной параметрической сети в нем можно свести к задаче линейного программирования (подробности см. в [15]).

2. Случай границ, состоящих из конечных метрических пространств

Как уже отмечалось выше, в пространстве Громова — Хаусдорфа $\mathcal{M}$ теорема 1 не работает. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, гарантирующая существование кратчайших сетей в $\mathcal{M}$ в специальном случае границ, состоящих из конечных метрических пространств.

Теорема 2. *Для каждого $M=\{m_1,\dots,m_k\}\subset\mathcal{M}_n$ выполняется*

$$\mathrm{SMT}(M,\mathcal{M})\ne\varnothing.$$

Доказательство. Положим $r=\mathrm{smt}(M,\mathcal{M})$, и пусть $\mathcal{T}(M)$ состоит из всех деревьев G на $\mathcal{M}$, соединяющих M и таких, что $|G|\le r+1$. По определению длины кратчайшего дерева имеем $\mathcal{T}(M)\ne\varnothing$, и $\mathrm{smt}(M,\mathcal{M})=\inf\bigl\{|G|: G\in\mathcal{T}(M)\bigr\}$.

Лемма 1. *Положим $d=\max_i\{\mathrm{diam}\, m_i\}$ и $\widehat{d}=2r+d+2$. Тогда для произвольного $G=(V,E)\in\mathcal{T}(M)$ имеем $V\subset\mathcal{M}(\widehat{d})$.*

Доказательство. Если существует $v\in V$, диаметр которого больше $\widehat{d}$, то согласно оценке (1) имеем $|G|\ge d_{GH}(v,m_1)\ge\dfrac12|\mathrm{diam}\, v-\mathrm{diam}\, m_1|>\dfrac12(2r+d+2-d)=r+1$, противоречие. Лемма доказана.

К о н с т р у к ц и я. Рассмотрим произвольное дерево $G = (V, E) \in \mathcal{T}(M)$. Для каждого $e = vw \in E$ выберем некоторое $R_e \in \mathcal{R}_{\rm opt}(v, w)$, существующее в силу (2). Положим $m = \sqcup_{i=1}^k m_k$. Для каждого $x \in m$ построим некоторое дерево $T_x = (P_x, F_x)$ следующим образом. В том компакте $m_i \in V$, который содержит x, выберем саму точку x и обозначим через p_{m_i}. Далее в каждом компакте $v \in V$ выберем по одной точке p_v, причем так, что для каждого $vw \in E$ выполняется $p_v p_w \in R_e$. Легко видеть, что это можно сделать, начав с вершины $m_i \ni x$ как с корневой вершины дерева G и последовательно переходя от уровня к уровню. Положим $P_x = \{p_v : v \in V\}$ и $F_x = \{p_v p_w : vw \in E\}$. Отметим, что отображение $v \mapsto p_v$ является изоморфизмом графов G и T_x. Дерево T_x назовем *нитью, выпущенной из* x.

Обозначим через N число точек в m. Для каждого $v \in V$ определим $v' \subset v$ следующим образом:

$$v' = \{y \in v : \text{существует } x \in m, \text{ для которого } y \in P_x\}.$$

Отметим, что для каждого $v \in V$ имеем $v' \in \mathcal{M}_N$.

Пусть $V' = \{v' : v \in V\}$. Через $G' = (V', E')$ обозначим граф, в котором $v'w' \in E'$ тогда и только тогда, когда $vw \in E$. Отображение $v \mapsto v'$ является, очевидно, изоморфизмом графов G и G'. Кроме того, в силу сказанного выше G' — граф на $\mathcal{M}_N$.

Следующее свойство выбранных $v' \subset v$ мгновенно вытекает из построения.

Лемма 2. *Для любого $e = vw \in E$ имеем $R_{e'} := R_e|_{v' \times w'} \in \mathcal{R}(v', w')$ и $\operatorname{dis} R_{e'} \le \operatorname{dis} R_e$. В частности, $|e'| \le |e|$, откуда $|G'| \le |G|$, и, значит, $G' \in \mathcal{T}(M)$.*

Применим леммы 1 и 2.

Следствие 2. *Построенное выше $G' \in \mathcal{T}(M)$ является деревом на $\mathcal{M}_N(\widehat{d})$, и, значит,*

$$\operatorname{smt}(M, \mathcal{M}) = \operatorname{smt}(M, \mathcal{M}_N(\widehat{d})).$$

Осталось применить следствие 1. Теорема полностью доказана.

Следствие 3. *Для каждого $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathcal{M}_n$ существует кратчайшее дерево для M в $\mathcal{M}$, все вершины которого являются конечными метрическими пространствами, количество точек в которых не превосходит $N = \sum_{i=1}^k |m_i| - k + 1$.*

3. Трехточечные метрические пространства и минимальные заполнения

В данном разделе на примере кратчайших деревьев, соединяющих треугольники в пространстве $\mathcal{M}_3$, мы продемонстрируем, как работает следствие 3.

Оказывается, множество классов изометрий трехточечных метрических пространств естественным образом вкладывается в нормированное пространство $\mathbb{R}^3_\infty$. А именно, в работе [18] доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Множество классов изометрий трехточечных метрических пространств с метрикой Громова — Хаусдорфа изометрично многогранному конусу*

$$\big\{(a, b, c) : 0 < a \le b \le c \le a + b\big\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^3_\infty$. Соответствующая изометрия h переводит треугольник со сторонами $a \le b \le c$ в точку $1/2(a, b, c)$.

В той же работе [18] показано, что если T — произвольный “невырожденный” треугольник, т. е. все неравенства треугольника выполняются строго, то любая достаточно малая его шаровая окрестность $U(T)$ в пространстве $\mathcal{M}_3$ реализует минимальные заполнения в следующем смысле: для каждого ее конечного подмножества M каждое кратчайшее дерево $G \in$

$\mathrm{SMT}(M, \mathcal{M})$ является минимальным заполнением. Однако для "больших" граничных множеств в $\mathcal{M}_3$ кратчайшее дерево уже не обязано быть минимальным заполнением.

В качестве примера рассмотрим треугольник (трехточечное множество) $M = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{M}_3$, где классы изометрий треугольников A_i заданы упорядоченными наборами длин сторон:

$$A_1 = (8,\ 22,\ 29.5), \qquad A_2 = (11.5,\ 18,\ 29), \qquad A_3 = (12,\ 21.5,\ 33).$$

С помощью утверждения 1 легко сосчитать, что $|A_i, A_j| = 2$, т. е. треугольник $M \subset \mathcal{M}$ правильный. Поэтому $\mathrm{mf}(M) = 3$ (в качестве минимального заполнения можно взять кратчайшее дерево G для $h(M) \subset \mathbb{R}^3_\infty$ с единственной дополнительной вершиной $S = 1/2(10, 20, 31)$. Легко проверить, что $h^{-1}(S) = \varnothing$, поэтому дереву G не соответствует никакая сеть в $\mathcal{M}$. Но, может быть, также существует дополнительная вершина P в $\mathcal{M}$ такая, что $\sum_i |A_i P| = 3$?

В силу следствия 3 достаточно искать вершину P в пространстве $\mathcal{M}_7$. Эта оценка позволяет перебрать все возможные соответствия между P и A_i и показать, что такой точки $P \in \mathcal{M}$ не существует (см. подробности в [18]). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пространство $\mathcal{M}$ классов изометрий компактных метрических пространств с метрикой Громова — Хаусдорфа не реализует минимальные заполнения. В частности, кратчайшая сеть в $\mathcal{M}$ для построенного выше треугольника $M \subset \mathcal{M}$ не является минимальным заполнением.*

Авторы пользуются случаем поздравить Сергея Владимировича Матвеева с замечательным юбилеем, пожелать ему долгих, успешных и счастливых лет, а также поблагодарить его за внимание и интерес к нашей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Memoli F.** On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison // Proc. Eurographics Symposium on Point Based Graphics 2007 / eds. M. Botsch, R. Pajarola, B. Chen, and M. Zwicker. Prague, 2007. P. 81–90. doi: 10.2312/SPBG/SPBG07/081-090 .
2. **Hausdorff F.** Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit and Company, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949]. 476 p. ISBN: 978-0-8284-0061-9 .
3. **Edwards D.** The structure of superspace // Studies in Topology / eds. N.M. Stavrakas, K.R. Allen. (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, N. C., 1974; dedicated to Math. Sect. Polish Acad. Sci.) N. Y.; London; San Francisco: Academic Press, Inc., 1975. P. 121–133. doi: 10.1016/B978-0-12-663450-1.50017-7 .
4. **Gromov M.** Groups of polynomial growth and expanding maps // Publications Mathematiques I.H.E.S. 1981. Vol. 53, no. 1. P. 53–78. doi: 10.1007/BF02698687 .
5. **Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.** Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2004. 512 с. ISBN: 5-93972-300-4 .
6. **Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А.** Метрика Громова — Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950. doi: 10.4213/mzm11411 .
7. **Иванов А.О., Тужилин А.А.** Теория экстремальных сетей. М., Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2003. 424 p. ISBN: 5-93972-292-X .
8. **Гаркави А.Л., Шматков В.А.** О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 2. С. 272–293.
9. **Бородин П.А.** Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 514–518, doi: 10.4213/mzm8697.
10. **Беднов Б.Б., Стрелкова Н.П.** О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 1. С. 46–54. doi: 10.4213/mzm9228.
11. **Ivanov A., Nikolaeva N., Tuzhilin A.** Steiner problem in Gromov–Hausdorff space: the Case of finite metric spaces [e-resource]. 2016. 5 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1604.02170.pdf .
12. **Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.** Minimal networks: A review // Advances in Dynamical Systems and Control / eds. V.A. Sadovnochiy, M.Z. Zgurovsky. Cham: Springer Switzerland, 2016. pp. 43–80. (Studies in Systems, Decision and Control; vol. 69). doi: 10.1007/978-3-319-40673-2_4 .

13. **Ivanov A., Iliadis S., Tuzhilin A.** Realizations of Gromov–Hausdorff distance [e-source]. 2016. 6 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1603.08850.pdf .
14. **Chowdhury S., Memoli F.** Constructing geodesics on the space of compact metric spaces [e-source]. 2016. 5 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1603.02385.pdf .
15. **Иванов А.О., Тужилин А.А.** Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 5. С. 65–118. doi: 10.4213/sm7777 .
16. **Беднов Б.Б., Бородин П.А.** Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20. doi: 10.4213/sm8264 .
17. Минимальные заполнения псевдометрических пространств / А.О. Иванов, А.А. Тужилин, А.Ю. Еремин, Е.С. Ероховец, А.С. Пахомова, О.В. Рублева, Н.П. Стрелкова, Е.И. Филоненко // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. 2011. Т. 27. С. 83–105.
18. **Ivanov A., Tuzhilin A.** Gromov — Hausdorff distance, irreducible correspondences, Steiner problem, and minimal fillings [e-resource]. 2016. 11 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1604.06116.pdf .

Иванов Александр Олегович
д-р физ.-мат. наук
профессор механико-математического факультета
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступила 23.06.2017

Николаева Надежда Константиновна
преподаватель математики
СОШ НОУ “Православная Свято-Петровская школа”,
г. Москва
e-mail: nadkostnik@mail.ru

Тужилин Алексей Августинович
д-р физ.-мат. наук
профессор механико-математического факультета
Московский государственный университет им.– М. В. Ломоносова,
г. Москва
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

REFERENCES

1. Memoli F. On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison. In: *Proc. Eurographics Symposium on Point Based Graphics 2007*, ed. by M. Botsch, R. Pajarola, B. Chen, and M. Zwicker, Prague, 2007, pp. 81–90, doi: 10.2312/SPBG/SPBG07/081-090 .
2. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, Veit, 1914 [reprinted by AMS Chelsea in 1949], 476 p. ISBN: 978-0-8284-0061-9 .
3. Edwards D. The structure of superspace. *Studies in Topology*, ed. by N.M. Stavrakas, K.R. Allen, Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, N. C., 1974; dedicated to Math. Sect. Polish Acad. Sci., N. Y.; London; San Francisco: Acad. Press, Inc., 1975, pp. 121–133. doi: 10.1016/B978-0-12-663450-1.50017-7 .
4. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps. In: *Publications Mathematiques I.H.E.S.*, 1981, vol. 53, no. 1, pp. 53–78. doi: 10.1007/BF02698687 .
5. Burago D.Yu., Burago Yu.D., Ivanov S.V. *A course in metric geometry*, Ser. Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, Providence: AMS, 2001, 415 p. ISBN: 0821821296 . Translated to Russian under the title *Kurs metricheskoi geometrii*. Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled. Publ., 2004, 512 p.
6. Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 6, pp. 171–173. doi: 10.1134/S0001434616110298 .
7. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Teoriya ekstremal'nykh setei* [Extreme Networks Theory]. Moscow, Izhevsk: IInst. Komp'yut. Issled. Publ., 2003, 424 p. ISBN: 5-93972-292-X .

8. Garkavi A.L., Shmatkov V.A. On the Lamé point and its generalizations in a normed space. *Math. USSR-Sb.*, 1974, vol. 24, no. 2, pp. 267–286. doi: 10.1070/SM1974v024n02ABEH002187 .
9. Borodin P.A. An example of nonexistence of a Steiner point in a Banach space. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 3, pp. 485–488. doi: 10.1134/S0001434610030260 .
10. Bednov B.B., Strelkova N.P. On the existence of shortest networks in Banach spaces. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 1, pp. 41–48. doi: 10.1134/S0001434613070043 .
11. Ivanov A., Nikolaeva N., Tuzhilin A. Steiner problem in Gromov–Hausdorff space: the Case of finite metric spaces [e-resource]. 2016. 5 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1604.02170.pdf .
12. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks: A review. In: *Advances in Dynamical Systems and Control* ed. by V.A. Sadovnochiy, M.Z. Zgurovsky. Cham: Springer Switzerland, 2016, Ser. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 69, pp. 43–80. doi: 10.1007/978-3-319-40673-2_4 .
13. Ivanov A., Iliadis S., Tuzhilin A. Realizations of Gromov–Hausdorff distance [e-resource]. 2016. 6 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1603.08850.pdf .
14. Chowdhury S., Memoli F. Constructing geodesics on the space of compact metric spaces. 2016. 5 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1603.02385.pdf .
15. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. One-dimensional Gromov minimal filling problem. *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 5, pp. 677–726. doi: 10.1070/SM2012v203n05ABEH004239 .
16. Bednov B.B., Borodin P.A. Banach spaces that realize minimal fillings. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 4, pp. 459–475. doi: 10.1070/SM2014v205n04ABEH004383 .
17. A.O. Ivanov, A.A. Tuzhilin, A.Y. Yeremin, E.S. Erokhovets, A.S. Pakhomova, O.V. Rubleva, N.P. Strelkova, E.I. Filonenko. *Minimal'nye zapolneniya psevdometricheskikh prostranstv* [Minimum fillings of pseudometric spaces]. *Tr. seminara po vektornomu i tenzornomu analizu s ikh prilozheniyami k geometrii, mekhanike i fizike* [Proc. Seminar on Vector and Tensor Analysis with their Applications to Geometry, Mechanics and Physics]. 2011, vol. 27, pp. 83–105. ISBN: 978-5-211-06253-5.
18. Ivanov A., Tuzhilin A. Gromov — Hausdorff distance, irreducible correspondences, Steiner problem, and minimal fillings. 2016. 11 p. Available at: https://arxiv.org/pdf/1604.06116.pdf .

The paper was received by the Editorial Office on June 23, 2017.

A. O. Ivanov. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: aoiva@mech.math.msu.su .

N. K. Nikolaeva. Mathematics Teacher, SOSh NOU "Orthodox Saint-Peter School", Moscow, 109028, Tessinskiy per., 3 Russia, e-mail: nadkostnik@mail.ru .

A. A. Tuzhilin. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: tuz@mech.math.msu.su .