ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 4 2017

УДК 519.17+512.54

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$[1]

А. Х. Журтов, М. Х. Шерметова

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$ является $AT4$-графом. Его антиподальное частное Γ' имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$ и сильно регулярные первую и вторую окрестности вершин с параметрами $(115, 18, 1, 3)$ и $(276, 75, 10, 24)$. Более того, вторая окрестность вершины в Γ имеет массив пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ и является 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(276, 75, 10, 24)$. Ранее А. А. Махнев, Д. В. Падучих и М. С. Самойленко нашли возможные автоморфизмы графа с параметрами $(392, 115, 18, 40)$ и графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$. В работе найдены автоморфизмы графа Γ с массивом пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$. Доказано также, что группа автоморфизмов графа Γ действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

A. Kh. Zhurtov, M. Kh. Shermetova. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$.

A distance-regular graph Γ with intersection array $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$ is an $AT4$-graph. The antipodal quotient Γ' has parameters $(392, 115, 18, 40)$, and its first and second neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters $(115, 18, 1, 3)$ and $(276, 75, 10, 24)$. Moreover, the second neighborhood of any vertex in $\Gamma_2(u)$ has intersection array $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ and is a 4-cover of a strongly regular graph with parameters $(276, 75, 10, 24)$. Earlier, Makhnev, Paduchikh, and Samoilenko found possible automorphisms of a graph with parameters $(392, 115, 18, 40)$ and of a graph with intersection array $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$. In this paper we find automorphisms of a graph with intersection array $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$. It is proved that the automorphism group of this graph acts intransitively on the set of its antipodal classes.

Keywords: distance-regular graph, automorphism of a graph.

MSC: 05B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-128-135

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$ и $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве его вершин — совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются антиподальными. Антиподальное частное Γ' графа Γ в качестве вершин имеет антиподальные классы графа Γ, и классы u', w' смежны, если u' содержит вершину, смежную с вершиной из w'. Если каждый антиподальный класс содержит ровно r вершин, то r называется *индексом антиподальности*, а Γ — r-накрытием графа Γ'. Если v — число вершин в Γ, то Γ' содержит v/r вершин.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (соответственно $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061-П.

если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w, находящихся на расстоянии i в Γ, для любого $i = 0,\ldots,d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 это степень графа, а $c_1 = 1$ (см. [1]).

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x,y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются через p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ.

Пусть Γ является $AT4(p,p+2,r)$-графом. По [2, предложение 2] число $2p(p+1)(p+2)/r$ четно, $r < p+2$, r делит $2(p+1)$, Γ — граф с массивом пересечений $\{(p^2+4p+2)(p+2),(p+3)(p+1)^2,(r-1)2(p+1)(p+2)/r,1;1,2(p+1)(p+2)/r,(p+3)(p+1)^2,(p^2+4p+2)(p+2)\}$, и для любой вершины $u\in\Gamma$ подграф $\Gamma_2(u)$ является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 4.

Если Γ — $AT4(2,4,3)$-граф и массивом пересечений $\{56,45,24,1;1,12,45,56\}$, то Γ' имеет параметры $(162,56,10,24)$ и неглавные собственные значения $2,-16$, первая и вторая окрестности вершины в Γ' сильно регулярны с параметрами $(56,10,0,2)$ и $(105,32,4,12)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{32,27,8,1;1,4,27,32\}$. В [3] доказана единственность последнего графа.

Если Γ — $AT4(4,6,5)$-граф и массивом пересечений $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$, то Γ' имеет параметры $(800,204,28,60)$ и неглавные собственные значения $4,-36$, первая и вторая окрестности вершины в Γ' сильно регулярны с параметрами $(204,28,2,4)$ и $(595,144,18,40)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$. Автоморфизмы последнего графа найдены в [4].

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{115,96,30,1;1,10,96,175\}$ является $AT4(3,5,4)$-графом. Антиподальное частное Γ' имеет параметры $(392,115,18,40)$, первая и вторая окрестности вершины в Γ' сильно регулярны с параметрами $(115,18,1,3)$ и $(276,75,10,24)$, вторая окрестность вершины в Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{75,64,18,1;1,6,64,75\}$ (являющийся 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(276,75,10,24)$). В [5] (уточнено в [6, следствие 2]) найдены автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{115,96,30,1;1,10,96,175\}$. В [7] (уточнено в [6, теорема 3]) найдены автоморфизмы графа с параметрами $(392,115,18,40)$.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы дистанционно реулярного графа с массивом пересечений $\{75,64,18,1;1,6,64,75\}$ на $v=1104$ вершинах.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{75,64,18,1;1,6,64,75\}$ на $v=304$ вершинах, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,23\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного Γ', $p=2$ и $\alpha_4(g)=v$;*

(2) *Ω — пустой граф, $\alpha_0(g)=\alpha_4(g)=0$, и либо $p=23$, $\alpha_1(g)=92$, $\alpha_2(g)=736$ и $\alpha_3(g)=276$, либо $p=3$, $\alpha_1(g)=60t+15s+3$, $\alpha_2(g)=1056-240s$ и $\alpha_3(g)=-60t+225s+45$, либо $p=2$, $\alpha_1(g)=40t+40s-8$, $\alpha_2(g)=1056-160s$ и $\alpha_3(g)=-40t+120s+56$;*

(3) *Ω' является n-кликой, и либо Ω — антиподальный класс, $p=5$, $\alpha_1(g)=100s+100t+20$, $\alpha_2(g)=800-400t$ и $\alpha_3(g)=-100s+300t+280$, либо $p=2$, $\alpha_0(g)+\alpha_4(g)=16$, $\alpha_1(g)=40s+40t+24-5\alpha_0(g)$, $\alpha_2(g)=992-160t$ и $\alpha_3(g)=120t-40s+72+5\alpha_0(g)$;*

(4) *Ω' является l-кокликой, $3\leqslant l\leqslant 48$, l делится на 3, $p=3$, $\alpha_0(g)+\alpha_4(g)=4l$, $\alpha_1(g)=60s+60t+8l+12-5\alpha_0(g)$, $\alpha_2(g)=1056-240t-16l$ и $\alpha_3(g)=180t+4l+36-60s+5\alpha_0(g)$;*

(5) *Ω' содержит геодезический 2-путь, и либо*

(i) $p=7$, $|\Omega'|=7l+3$, $l\in\{5,6,7,8\}$, либо

(ii) $p=5$, $|\Omega'|=5r+1$, $4\leqslant r\leqslant 17$, либо

(iii) $p=3$, $|\Omega'|=3s$, $3\leqslant s\leqslant 27$, либо

(iv) $p=2$, $|\Omega'|=2t$, $4\leqslant t\leqslant 46$.

Следствие 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве антиподальных классов графа* Γ.

Доказательство теоремы опирается на метод Г. Хигмена.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ с v вершинами обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления $\psi|_{W_i}$. Тогда (см. [9, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

1. Граф с параметрами $(276, 75, 10, 24)$, вершинно симметричный случай

В [8] доказано следующее.

Предложение 1. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(276, 75, 10, 24)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $|\Omega| \leqslant 92$, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф, и либо* $p = 23$, $\alpha_1(g) = 92$, *либо* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 60s + 12$, *либо* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40s + 12$;

(2) Ω *является* n-*кликой, и либо* $n = 1$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100t + 75$, *либо* $n = 4$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40t + 24$;

(3) Ω *является* l-*кокликой,* $3 \leqslant l \leqslant 48$, l *делится на* 3, $p = 3$, *и* $\alpha_1(g) = 60t + 3l + 12$;

(4) Ω *содержит ребро и является объединением* m *изолированных клик,* $m \geqslant 2$, $p = 2$, *и порядок максимальной клики в* Ω *равен* 2 *или* 4;

(5) Ω *содержит геодезический* 2-*путь, и либо*

(*i*) $p = 7$ *и* $|\Omega| \in \{38, 45, 52, 59\}$, *либо*

(*ii*) $p = 5$, $|\Omega| = 5r + 1$, $4 \leqslant r \leqslant 18$, *либо*

(*iii*) $p = 3$, $|\Omega| = 3s$, $3 \leqslant s \leqslant 30$, *либо*

(*iv*) $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $4 \leqslant t \leqslant 46$.

Следствие 2. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(276, 75, 10, 24)$. *Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве его вершин.*

В этом разделе Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(276, 75, 10, 24)$, спектром $75^1, 3^{230}, -17^{45}$, и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. По предложению 1 имеем $\{2, 3, 23\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$.

Лемма 1.1. *Пусть* U — *трехвершинный подграф из* Γ, X_i — *множество вершин из* $\Gamma - U$, *смежных точно с* i *вершинами из* U, $x_i = |X_i|$; *число* $x_0 + x_3$ *равно* 81, *если* U *является кликой, равно* 120, *если* U *является кокликой и равно* 95, *если* U *является геодезическим* 2-*путем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U является кликой a, b, c. Тогда X_2 содержит по $9 - x_3$ вершин из $[a] \cap [b]$, $[b] \cap [c]$ и $[a] \cap [c]$. Далее, X_1 содержит по $55 + x_3$ вершин из $[a]$, $[b]$ и $[c]$. Отсюда $x_0 + x_3 = 276 - 3 - 27 - 165 = 81$. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи.

Лемма доказана.

Лемма 1.2 (см. [8, лемма 2]). *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 230, $g \in G$. Тогда $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 92)/20$, $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^j)$ для любого j, взаимно простого с $|g|$, и если $|g| = p$ — простое число, то число $\chi_1(g) - 230$ делится на p.*

Лемма 1.3. *Пусть f — элемент порядка 23 из G, g — элемент простого порядка $p < 23$ из $C_G(f)$. Тогда $Fix(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 92$ и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\Omega = Fix(g)$ *— пустой граф, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 92$;*

(2) Ω *содержит ребро и является объединением изолированных 2-клик или Ω содержит геодезический 2-путь, $p = 2$, $|\Omega| = 46$ и $\alpha_1(g) = 230$.*

Доказательство. По предложению 1 имеем $Fix(f)$ — пустой граф и $\alpha_1(f) = 92$.

Если $Fix(g)$ — пустой граф, то ввиду леммы 1.2 либо $p = 3$, $\alpha_1(g) = 60s + 12$ и $s = 9$, что противоречиво, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40s + 12$ и $s = 2$.

Если Ω — непустой граф, то 23 делит $|\Omega|$, по предложению 1 имеем

(i) либо Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, $p = 2$, и $|\Omega| = 46, 92$;

(ii) либо Ω содержит геодезический 2-путь, $p = 5$, $|\Omega| = 5r + 1$, $r = 9$ или $p = 3$, $|\Omega| = 3s$, $s = 23$ или $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $t = 23, 46$.

В случае $p = 5$ по лемме 1.2 число $\chi_1(g) = 23(30+\alpha_1(g)/23)/20$ делится на 5, противоречие. В случае $p = 3$ имеем $\chi_1(g) = 23(47 + \alpha_1(g)/23)/20$ и $\alpha_1(g) = 23(20l - 7)$, противоречие.

Наконец, в случае $p = 2$ число $\chi_1(g)$ четно и либо $\chi_1(g) = 23(30 + \alpha_1(g)/23)/20$, и $\alpha_1(g) = 23(40l + 10)$, либо $\chi_1(g) = (64 + \alpha_1(g)/23)/20$ и $\alpha_1(g) = 23(40l + 16)$, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $O_{23'}(G) = O_2(G)$;

(2) G *— расширение $O_2(G)$ с помощью подгруппы из диэдральной группы порядка 46.*

Доказательство. Допустим, что $|O_{23'}(G)|$ делится на 3, и выберем силовскую 3-подгруппу R из $O_{23'}(G)$. Тогда $|R : R_a| = 3$ и R_a фиксирует все три вершины из $U = a^R$. Далее, $|\mathrm{Fix}(R_a)| \leqslant 92$, и для любой вершины $b \in \Gamma - \mathrm{Fix}(R_a)$ каждая вершина из U не смежна ни с одной вершиной или смежна с 3 вершинами из $b^R = b^{R_a}$. Отсюда $X_0(U) \cup X_3(U)$ содержит не менее 181 вершин. Противоречие с леммой 1.1.

Так как $v = 12 \cdot 23$, то $O_{23'}(G) = O_{2,3}(G)$.

Если G — разрешимая группа, то ввиду леммы 1.3 группа G — расширение $O_2(G)$ с помощью подгруппы из диэдральной группы порядка 46.

Пусть G — неразрешимая группа и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_{2,3}(G)$. По [12, теорема 1] из того, что 23 делит $|\bar{T}|$, следует, что 11 делит $|\bar{T}|$, противоречие с тем, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$.

Лемма доказана.

Из леммы 1.4 с учетом делимости $|G|$ на 3, вытекает следствие 2.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Лемма 2.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, k - \lambda - 1, \mu(r - 1), 1; 1, \mu, k - \lambda - 1, k\}$ и спектром $k^1 > n^e > t^f > (-m)^c > (-s)^h$. Тогда вторая* *матрица Q собственных значений графа Γ равна*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & en/k & 0 & -en/(k(r-1)) & -e/(r-1) \\ f & ft/k & -fr\mu(t+1)/(k(k-\lambda-1)) & ft/k & f \\ c & -cm/k & 0 & cm/(k(r-1)) & -c/(r-1) \\ h & -hs/k & hr\mu(s-1)/(k(k-\lambda-1)) & -hs/k & h \end{pmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из доказательства леммы 3 в [10].

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ и спектром $75^1, 15^{207}, 3^{230}, -5^{621}, -17^{45}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $v = 1 + 75 + 800 + 225 + 3 = 1104 = 16 \cdot 3 \cdot 23$.

Лемма 2.2. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 207, и χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 45. Тогда $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g)+3\alpha_1(g)-\alpha_3(g)-5\alpha_4(g))/80$, $\chi_4(g) = (4\alpha_0(g)+\alpha_2(g)+4\alpha_4(g))/80-51/5$. Далее, $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^j)$ для любого j, не кратного p, и числа $\chi_1(g) - 207$, $\chi_4(g) - 45$ делятся на p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2.1 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 207 & 207/5 & 0 & -69/5 & -69 \\ 230 & 46/5 & -69/15 & 46/5 & 230 \\ 621 & -207/5 & 0 & 69/5 & -207 \\ 45 & -51/5 & 18/5 & -51/5 & 45 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g))/80$.

Аналогично, $\chi_4(g) = (75\alpha_0(g) - 17\alpha_1(g) + 6\alpha_2(g) - 17\alpha_3(g) + 75\alpha_4(g))/(368 \cdot 5)$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_4(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 4\alpha_4(g))/80 - 51/5$.

Последнее утверждение леммы следует из леммы 1 в [11].

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного Γ', то $p = 2$ и $\alpha_4(g) = v$. Более того, порядок подгруппы из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы графа Γ', делит 4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $\alpha_i(g)$ может быть не равно 0 только для $i = 0, 4$. Если $u = u^g$, то $[u]$ состоит из неподвижных относительно g вершин. Поэтому g оставляет неподвижной каждую вершину из Γ, противоречие. Значит, $\alpha_4(g) = v$. Так как $r = 4$, то порядок подгруппы из G, индуцирующей тривиальные автоморфизмы графа Γ', делит 4.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа Γ', то выполняется одно из утверждений*

(1) *Ω — пустой граф, $\alpha_0(g) = \alpha_4(g) = 0$, и либо $p = 23$, $\alpha_1(g) = 92$, $\alpha_2(g) = 736$ и $\alpha_3(g) = 276$, либо $p = 3$, $\alpha_1(g) = 60t + 15s + 3$, $\alpha_2(g) = 1056 - 240s$ и $\alpha_3(g) = -60t + 225s + 45$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40t + 40s - 8$, $\alpha_2(g) = 1056 - 160s$ и $\alpha_3(g) = -40t + 120s + 56$;*

(2) *Ω' является n-кликой, и либо Ω — антиподальный класс, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100s+100t+20$, $\alpha_2(g) = 800 - 400t$ и $\alpha_3(g) = -100s + 300t + 280$, либо $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 16$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 40s + 40t + 24 - 5\alpha_0(g)$, $\alpha_2(g) = 992 - 160t$ и $\alpha_3(g) = 120t - 40s + 72 + 5\alpha_0(g)$;*

(3) Ω' *является* l*-кокликой,* $3 \leqslant l \leqslant 48$*,* l *делится на* 3*,* $p = 3$*,* $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 4l$*,* $\alpha_1(g) = 60s + 60t + 8l + 12 - 5\alpha_0(g)$*,* $\alpha_2(g) = 1056 - 240t - 16l$ *и* $\alpha_3(g) = 180t + 4l + 36 - 60s + 5\alpha_0(g)$*;*

(4) Ω' *содержит геодезический* 2*-путь, и либо*

(i) $p = 7$*,* $|\Omega'| = 7l + 3$*,* $l \in \{5, 6, 7, 8\}$*, либо*

(ii) $p = 5$*,* $|\Omega'| = 5r + 1$*,* $4 \leqslant r \leqslant 17$*, либо*

(iii) $p = 3$*,* $|\Omega'| = 3s$*,* $3 \leqslant s \leqslant 27$*, либо*

(iv) $p = 2$*,* $|\Omega'| = 2t$*,* $4 \leqslant t \leqslant 46$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что Ω' — граф из заключения предложения 1.

Если Ω' — пустой граф, то ввиду леммы 2.2 имеем $\alpha_0(g) = \alpha_4(g) = 0$, $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/80$, $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/80 - 51/5$, и либо $p = 23$, $\bar{\alpha}_1(g) = 92$, либо $p = 3$, $\bar{\alpha}_1(g) = 60s + 12$, либо $p = 2$, $\bar{\alpha}_1(g) = 40s + 12$.

В случае $p = 23$ имеем $\bar{\alpha}_2(g) = 184 = \alpha_2(g)/4$, $\bar{\alpha}_1(g) = 92 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$. Отсюда $\chi_4(g) = -1$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 92)/20$ и $\alpha_1(g) = 92$.

В случае $p = 3$ имеем $\bar{\alpha}_2(g) = 264 - 60s = \alpha_2(g)/4$, $\bar{\alpha}_1(g) = 60s + 12 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$. Отсюда $\chi_4(g) = 3 - 3s$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 15s - 3)/20$, $\alpha_1(g) = 60t + 15s + 3$ и $\alpha_3(g) = -60t + 225s + 45$.

В случае $p = 2$ имеем $\bar{\alpha}_2(g) = 264 - 40s = \alpha_2(g)/4$, $\bar{\alpha}_1(g) = 40s + 12 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$. Отсюда $\chi_4(g) = 3 - 2s$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 40s - 12)/20$ нечетно, $\alpha_1(g) = 40t + 40s - 8$ и $\alpha_3(g) = -40t + 120s + 56$.

Если Ω' является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 5$, $\bar{\alpha}_1(g) = 100t + 75$, либо $n = 4$, $p = 2$, $\bar{\alpha}_1(g) = 40t + 24$.

В случае $p = 5$ имеем $\alpha_4(g) = 4$, $\bar{\alpha}_2(g) = 200 - 100t = \alpha_2(g)/4$, $\bar{\alpha}_1(g) = 100t + 75 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$. Отсюда $\chi_4(g) = -5t$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 100t - 80)/20$ сравнимо с 2 по модулю 5, поэтому $\alpha_1(g) = 100s + 100t + 20$ и $\alpha_3(g) = -100s + 300t + 280$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 16$, $\bar{\alpha}_2(g) = 248 - 40t = \alpha_2(g)/4$, $\bar{\alpha}_1(g) = 40t + 24 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$. Отсюда $\chi_4(g) = 3 - 2t$, число $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 40t - 44)/20$ нечетно, $\alpha_1(g) = 40s + 40t + 24 - 5\alpha_0(g)$ и $\alpha_3(g) = 120t - 40s + 72 + 5\alpha_0(g)$.

Если Ω' является l-кокликой, $3 \leqslant l \leqslant 48$, l делится на 3, то $p = 3$, и $bar\alpha_1(g) = 60t + 3l + 12$. В этом случае $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 4l$, $\bar{\alpha}_2(g) = 264 - 60t - 4l = \alpha_2(g)/4$, $\bar{\alpha}_1(g) = 60t + 3l + 12 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$. Отсюда $\chi_4(g) = (15 - 15t)/5$, $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 60t - 8l - 12)/20$, $\alpha_1(g) = 60s + 60t + 8l + 12 - 5\alpha_0(g)$ и $\alpha_3(g) = 180t + 4l + 36 - 60s + 5\alpha_0(g)$.

Пусть Ω' содержит геодезический 2-путь. Тогда либо

(i) $p = 7$, $|\Omega'| = 7l + 3$, $l \in \{5, 6, 7, 8\}$, либо

(ii) $p = 5$, $|\Omega| = 5r + 1$, $4 \leqslant r \leqslant 17$, либо

(iii) $p = 3$, $|\Omega| = 3s$, $3 \leqslant s \leqslant 27$, либо

(iv) $p = 2$, $|\Omega| = 2t$, $4 \leqslant t \leqslant 46$.

Лемма доказана.

Из лемм 2.3, 2.4 следует теорема.

Следствие 1 вытекает из следствия 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Небольшие $AT4$-графы и отвечающие им сильно регулярные подграфы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 220–230.
3. **Soicher L.H.** Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related topics [e-resource]. 2015. 11 с. URL: https://arxiv.org/pdf/1512.05976.pdf .
4. **Нирова М.С.** Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивами пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 178–189.
5. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Самойленко М.С.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ // Докл. АН. 2014. Т. 459, № 2. С. 149–153.

6. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивами пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 182–190.
7. **Махнев А.А., Пономарев Д.Н.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (392,115,18,40) // Докл. АН. 2015. Т. 460, № 1. С. 18–21.
8. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (276,75,10,24) // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 5. С. 516–519.
9. **Cameron P.J.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1999. (London Math. Soc. Student Texts; no. 45). 232 p.
10. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю.** Дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм $Herm(2, q^2)$ // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 3. С. 268–273.
11. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
12. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian. Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Журтов Арчил Хазешович
д-р физ.-мат. наук,
зав. кафедрой
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
г. Нальчик
e-mail: zhurtov_a@mail.ru

Поступила 7.04.2017

Шерметова Марияна Хусейновна
аспирант
Кабардино-Балкарский госуниверситет,
г. Нальчик
e-mail: mariyana1992@mail.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs.* Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Small $AT4$-graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2017, vol. 296, no. 1, pp. 164–174. doi: 10.1134/S0081543817020158 .
3. Soicher L.H. Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related results [e-resource]. 2015. 11 c. Available at: https://arxiv.org/pdf/1512.05976.pdf .
4. Nirova M.C. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. *Siberian. Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 178–189. doi: 10.17377/semi.2017.14.018 .
5. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Samoilenko M.S. Automorphisms of a graph with intersection array $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 692–696. doi: 10.1134/S1064562414060131 .
6. Makhnev A.A., Nirova M.S. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 3, pp. 182–190 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-182-190 .
7. Makhnev A.A., Ponomarev D.N. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (392,115,18,40). *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 12–15. doi: 10.1134/S1064562414070035 .
8. Makhnev A.A., Samoilenko M.S. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (276,75,10,24). *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 485–488. doi: 10.1134/S1064562414050238 .
9. Cameron P.J. *Permutation Groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1999, Ser. London Math. Soc. Student Texts, vol. 45, 232 p. ISBN: 0-521-65302-9 .
10. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Tsiovkina L.Yu. Antipodal distance-regular covers of Hermitian form graphs $Herm(2, q^2)$. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 304–308. doi: 10.1134/S106456241503014X .

11. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., On automorphisms of distance-regular graph with the intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
12. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Siberian. Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on April 7, 2017.

Archil Khazeshovich Zhurtov, Dr. Phys.-Math. Sci., Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: zhurtov_a@mail.ru .

Mariyana Khusenovna Shermetova, doctoral student, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: mariyana1992@mail.ru .