ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ С ПОВОДЫРЕМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИИ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХУ[1]

М. И. Гомоюнов, Д. А. Серков

Рассматривается задача об управлении движением динамической системы в условиях помех на конечном промежутке времени. Значения управления и помехи стеснены компактными геометрическими ограничениями. Условие равновесия в маленькой игре не предполагается выполненным. Целью управления является минимизация заданного терминального показателя качества. В рамках теоретико-игрового подхода ставится задача об оптимизации гарантированного результата управления. Для случая, когда реализации помехи принадлежат некоторому априори не известному компактному подмножеству пространства L_1 (функций, суммируемых по Лебегу с нормой), дана новая дискретная по времени процедура управления с поводырем, разрешающая эту задачу. Близость движений исходной системы и поводыря обеспечивается при помощи динамического восстановления помехи. Качество процесса управления достигается за счет использования в поводыре оптимальной контрстратегии. Указаны условия на уравнения движения, при которых эта процедура обеспечивает достижение оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий. Схема обоснования этого факта позволяет оценить отклонение реализующегося значения показателя качества от величины указанного оптимального результата в зависимости от параметра дискретизации. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: оптимизация гарантии, функциональные ограничения, квазистратегии, управление с поводырем.

M. I. Gomoyunov, D. A. Serkov. Control with a guide in the guarantee optimization problem under functional constraints on the disturbance.

A motion control problem for a dynamic system under disturbances is considered on a finite time interval. There are compact geometric constraints on the values of the control and disturbance. The equilibrium condition in the small game is not assumed. The aim of the control is to minimize a given terminal quality index. The guaranteed result optimization problem is posed in the context of the game-theoretical approach. In the case when realizations of the disturbance belong to some a priori unknown compact subset of L_1 (the space of functions that are Lebesgue summable with the norm), we propose a new discrete-time control procedure with a guide. The proximity between the motions of the system and the guide is provided by the dynamic reconstruction of the disturbance. The quality of the control process is achieved by using an optimal counter-strategy in the guide. Conditions on the equations of motion under which this procedure ensures an optimal guaranteed result in the class of quasi-strategies are given. The scheme of the proof makes it possible to estimate the deviation of the realized value of the quality index from the value of the optimal result depending on the discretization parameter. Illustrative examples are given.

Keywords: guarantee optimization, functional constraints, quasi-strategies, control with a guide.

MSC: 49N35, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-82-94

Введение

В статье рассматривается задача об управлении движением динамической системы в условиях помех на конечном промежутке времени. Значения управления и помехи стеснены геометрическими ограничениями. Управление нацелено на минимизацию заданного терминального показателя качества. В рамках теоретико-игрового подхода [1–4] изучается задача об оптимизации гарантированного результата управления.

Известно [2; 3], что величина Γ^0 оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий (см., например, [2, с. 24]) является наилучшей среди достаточно широкого класса

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 15-16-1-13).

физически реализуемых законов управления. В общем случае, когда не выполнено условие равновесия в маленькой игре (см., например, [3, с. 79]), для достижения этого результата при помощи позиционных способов управления необходимо применять позиционные контрстратегии (см., например, [1, § 82, 83; 3, с. 83]), что на практике требует знания текущих значений помехи, зачастую недоступных для непосредственного измерения. Тем не менее, как показано в [5; 6], результат Γ^0 может быть гарантирован без использования такой информации (в классе стратегий с памятью истории движения [1, гл. XVI; 7]) в случае, когда помеха стеснена дополнительными функциональными ограничениями. А именно, предполагается, что все возможные реализации помехи принадлежат некоторому компактному в пространстве L_1 множеству, причем само это множество может быть неизвестно. Задачи с ограничениями такого сорта возникают в случаях, когда возможные реализации помехи как функции времени, обладают некоторыми дополнительными свойствами, например являются кусочно-постоянными, с ограниченным, но неизвестным количеством точек разрыва, или же равностепенно непрерывными, с неизвестным общим модулем непрерывности.

В работе предложена новая дискретная по времени процедура управления с поводырем, гарантирующая при рассматриваемых функциональных ограничениях на помеху и дополнительном условии на уравнения движения результат Γ^0 (в классе квазистрегий) и не использующая при этом информацию о текущих значениях помехи. Близость движений исходной системы и поводыря обеспечивается при помощи конструкций динамического восстановления помехи, восходящих к [7; 8]. Качество процесса управления достигается за счет использования в поводыре оптимальной контрстратегии. В отличие от [5; 6], где утверждения носят преимущественно качественный характер, предложена новая схема обоснования, которая имеет целью дальнейшие численные приложения и позволяет проследить оценку отклонения реализующегося значения показателя качества от величины Γ^0 в зависимости от параметра дискретизации.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^q. \tag{1.1}$$

Здесь t — время, x — фазовый вектор, u — значение управления, v — значение помехи; t_0 и ϑ — начальный и конечный моменты времени; n, p, $q \in \mathbb{N}$; P и Q — известные компактные множества, определяющие геометрические ограничения на значения управления и помехи. Предполагается, что функция $f : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ непрерывна; для любого ограниченного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ существует такое число $L > 0$, что выполняется неравенство

$$\|f(t, x, u, v) - f(t, x', u, v)\| \leqslant L\|x - x'\|, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, x' \in D, \quad u \in P, \quad v \in Q;$$

существует число $a > 0$, для которого имеет место оценка

$$\|f(t, x, u, v)\| \leqslant a(1 + \|x\|), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Полагая, что отрезок $[t_0, \vartheta]$ снабжен мерой Лебега, допустимыми реализациями $u(\cdot)$ управления и $v(\cdot)$ помехи считаем измеримые функции $u : [t_0, \vartheta] \to P$ и $v : [t_0, \vartheta] \to Q$. Множества всех таких реализаций обозначим через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Позицией системы (1.1) называем пару $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. В силу сделанных предположений относительно функции f для любой начальной позиции (t_0, x_0), $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и любых допустимых реализаций $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ существует единственное движение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.1) — абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ вместе с реализациями $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — уравнению (1.1).

В пространстве позиций $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ системы (1.1) выделим (см., например, [3, с. 40]) такое компактное множество G, что, каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$ и реализации $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, для движения $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.1) выполняются включения $(t, x(t)) \in G$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Пусть качество движения $x(\cdot)$ системы (1.1) оценивается терминальным показателем

$$\gamma = \sigma(x(\vartheta)), \tag{1.2}$$

где функция $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Сторона, формирующая управление, стремится минимизировать значение показателя γ. При этом согласно принципу гарантированного результата [1–4] следует учитывать, что действия помехи неизвестны и, в частности, могут быть нацелены на максимизацию γ.

Исходя из [2, с. 24], квазистратегией $\alpha(\cdot)$ назовем всякое отображение $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, обладающее следующим свойством неупреждаемости: если для момента времени $t \in [t_0, \vartheta]$ и функций $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ при всех $\tau \in [t_0, t]$ справедливо равенство $v(\tau) = v'(\tau)$, то и для соответствующих образов $u(\cdot) = \alpha(v(\cdot))$ и $u'(\cdot) = \alpha(v'(\cdot))$ при всех $\tau \in [t_0, t]$ будет выполняться равенство $u(\tau) = u'(\tau)$. Для начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ определим величину оптимального гарантированного результата управления в классе квазистратегий

$$\Gamma^0(t_0, x_0) = \inf_{\alpha(\cdot)} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} \sigma\Big(x\big(\vartheta; t_0, x_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)\big)\Big). \tag{1.3}$$

Известно (см. в этой связи [1, § 82, 83], а также [3, § 29, теорема 29.3]), что величина $\Gamma^0(t_0, x_0)$ может быть гарантирована при формировании управления с использованием контрстратегий [1, § 82, 83; 3, с. 83]. Другими словами, существует оптимальная контрстратегия

$$U^0(t, x, v, \varepsilon) \in P, \quad (t, x) \in G, \quad v \in Q, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.4}$$

которая при любых t, x и ε является функцией, измеримой по Борелю по v и для которой имеет место следующее утверждение. Для любого числа $\zeta > 0$ существуют такие число $\varepsilon^0 > 0$ и функция $\delta^0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$, что, каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$, число $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и разбиение

$$\Delta = \big\{\tau_j\colon \tau_1 = t_0,\ \tau_j < \tau_{j+1},\ j = \overline{1,k},\ \tau_{k+1} = \vartheta\big\} \tag{1.5}$$

отрезка времени $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $d(\Delta) = \max_{j=\overline{1,k}}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leqslant \delta^0(\varepsilon)$, закон управления $\{U^0(\cdot), \varepsilon, \Delta\}$, формирующий реализацию $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ на базе разбиения Δ согласно правилу

$$u(t) = U^0\big(\tau_j, x(\tau_j), v(t), \varepsilon\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1,k},$$

для любой реализации помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обеспечивает для значения γ показателя качества (1.2) выполнение неравенства

$$\gamma \leqslant \Gamma^0(t_0, x_0) + \zeta. \tag{1.6}$$

Использование контрстратегий на практике зачастую затруднительно в силу недоступности непосредственного измерения текущего значения помехи $v(t)$. С другой стороны, в общем случае, когда не предполагается выполненным условие равновесия в маленькой игре (см., например, [3, с. 79]), величина $\Gamma^0(t_0, x_0)$ не может быть гарантирована при формировании управления без учета информации о значении $v(t)$ (см. в этой связи [3, § 12]). Однако, как показано в [5; 6], величина $\Gamma^0(t_0, x_0)$ может быть гарантирована без использования такой информации в случае, когда помеха удовлетворяет следующему функциональному ограничению.

Обозначим через $L_1 = L_1([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^q)$ пространство (классов эквивалентности) суммируемых функций из $[t_0, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^q$ со стандартной нормой (см., например, [10, п. 3.5]). Будем предполагать, что существует такое компактное в L_1 множество V, что для всех допустимых реализаций $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, которые могут случиться в системе (1.1), выполняется включение $v(\cdot) \in V$. При этом будем считать, что само множество V управляющей стороне неизвестно (в отличие от множества Q, определяющего геометрические ограничения на помеху). Таким образом, при формировании управления следует исходить из того факта, что в системе (1.1) может случиться любая допустимая реализация помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющая включению $v(\cdot) \in V$, где $V \subset L_1$ — неизвестный компакт.

Пусть задана начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$, зафиксированы число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ (1.5). Рассмотрим процедуру управления системой (1.1) с использованием вспомогательного движения $y(\cdot)$ системы (1.1) в качестве поводыря (см., например, [1, § 57]). При этом будем считать, что это движение выходит из той же самой начальной позиции (t_0, x_0), а через $\overline{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $\overline{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ будем обозначать определяющие это движение реализации управления и помехи: $y(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$. Отметим, что для любого такого движения $y(\cdot)$ будут выполнены включения $(t, y(t)) \in G$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Опишем пошаговую схему формирования кусочно-постоянных реализаций

$$u(t) = u_j \in P, \quad \overline{u}(t) = \overline{u}_j \in P, \quad \overline{v}(t) = \overline{v}_j \in Q, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, k}. \tag{1.7}$$

Выберем произвольным образом вектор $u^* \in P$ и положим $u_1 = u^*$. Пусть теперь $j = \overline{1, k}$ и к моменту времени τ_{j+1} известны значения $x(\tau_j)$ и $x(\tau_{j+1})$ фазового вектора системы (1.1), назначенное на промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1})$ управление u_j и состояние поводыря $y(\tau_j)$. Тогда, "восстанавливая" помехи, действовавшие в системе (1.1) на промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1})$, выбираем вектор $\overline{v}_j$ из условия

$$\overline{v}_j \in \operatorname*{argmin}_{v \in Q} \left\| \frac{x(\tau_{j+1}) - x(\tau_j)}{\tau_{j+1} - \tau_j} - f(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), u_j, v) \right\|, \tag{1.8}$$

затем, используя оптимальную контрстратегию (1.4), определяем

$$\overline{u}_j = U^0(\tau_j, y(\tau_j), \overline{v}_j, \varepsilon), \tag{1.9}$$

и далее, если $j < k$, полагаем

$$u_{j+1} = \overline{u}_j. \tag{1.10}$$

Работоспособность данной процедуры управления с поводырем будет обоснована при условии, что выполнено

Предположение 1. *Каковы бы ни были позиция $(t, x) \in G$ и векторы $v, v' \in Q$, если равенство $f(t, x, u, v) = f(t, x, u, v')$ выполняется для некоторого вектора $u = u' \in P$, то это равенство выполняется и для всех векторов $u \in P$.*

Предположение 1 в другой терминологии использовалось в работах [5; 9]. Отметим, что в случае, если это предположение не выполнено, вместо (1.8) следует использовать более сложную схему динамического восстановления помех [6]. Подчеркнем, что предположение 1 заведомо выполняется для любой функции f, которая при каждых фиксированных $(t, x) \in G$ и $u \in P$ инъективна по $v \in Q$.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для любых числа $\zeta > 0$ и компактного в L_1 множества $V \subset \mathcal{V}$ можно указать такие число $\varepsilon^* > 0$ и функцию $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, что, каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$, число $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и разбиение Δ* (1.5) *с постоянным шагом и диаметром $d(\Delta) \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, процедура управления с поводырем* (1.7)–(1.10) *гарантирует выполнение неравенства* (1.6) *для любой реализации помехи $v(\cdot) \in V$.*

Принимая во внимание тот факт, что движение поводыря $y(\cdot)$ формируется при действии оптимальной контрстратегии $U^0(\cdot)$ (см. (1.4), (1.9)), и учитывая непрерывность функции σ, определяющей показатель качества (1.2), для доказательства теоремы достаточно установить справедливость следующей леммы, представляющей также и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для любых числа* $\xi > 0$ *и компактного в* L_1 *множества* $V \subset \mathcal{V}$ *можно указать такое число* $\delta_* > 0$, *что, каковы бы ни были начальная позиция* $(t_0, x_0) \in G$ *и разбиение* Δ (1.5) *с постоянным шагом и диаметром* $d(\Delta) \leqslant \delta_*$, *справедливо следующее утверждение. Пусть движение* $x(\cdot)$ *системы* (1.1) *порождено из позиции* (t_0, x_0) *при действии кусочно-постоянной реализации управления* $u(\cdot)$ *вида* (1.7) *и произвольной реализации помехи* $v(\cdot) \in V$. *Пусть* $y(\cdot)$ — *движение системы* (1.1), *порожденное из позиции* (t_0, x_0) *при действии кусочно-постоянных реализаций* $\overline{u}(\cdot)$ *и* $\overline{v}(\cdot)$ *вида* (1.7), *которые вместе с* $x(\cdot)$ *и* $u(\cdot)$ *удовлетворяют соотношениям* (1.8), (1.10). *Тогда выполняется неравенство*

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \xi, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Доказательство леммы составляет основное содержание статьи и приводится в следующем разделе. Отметим, что для рассматриваемой задачи оптимизации гарантии с функциональными ограничениями на помеху это утверждение представляет собой аналог оценок [1, § 14-15, 82], играющих ключевую роль при обосновании свойств стратегий экстремального сдвига.

З а м е ч а н и я: 1. Несмотря на то что процедура управления с поводырем (1.7)–(1.10) не зависит от множества V, определяющего функциональные ограничения, в согласии с теоремой для обеспечения неравенства (1.6) при заданном ζ один из основных параметров этой процедуры, диаметр разбиения Δ, требуется выбирать уже в зависимости от множества V.

2. В случае произвольного (с переменным шагом) разбиения Δ (1.5) следует, например, по схеме из [9, замечание 4.1] перейти к прореженному, "почти равномерному" разбиению $\Delta' \subset \Delta$ и реализовывать процедуру (1.7)–(1.10) на базе разбиения Δ'.

3. Результат, аналогичный теореме, может быть получен для более широкого класса показателей качества, которые оценивают все движение $x(\cdot)$ системы (1.1), а не только конечное состояние $x(\vartheta)$. При этом в случае позиционного показателя качества (см., например, [4, § 4]) процедура управления (1.7)–(1.10) остается такой же, а в общем случае вместо позиционных контрстратегий (1.4) следует использовать контрстратегии с памятью истории движения (см., например, [1, с. 430]).

2. Доказательство леммы

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству леммы, введем необходимые обозначения и проведем предварительные построения.

С учетом предположений относительно свойств функции f и компактности множеств G, P и Q выберем числа $\varkappa > 0$ и $L > 0$ так, чтобы выполнялись оценки

$$\|f(t,x,u,v)\| \leqslant \varkappa, \quad \|f(t,x,u,v) - f(t,x',u,v)\| \leqslant L\|x - x'\|,$$
$$(t,x), (t,x') \in G, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

и обозначим

$$\begin{aligned}
\mu_t(\delta) &= \max\Big\{\|f(t,x,u,v) - f(t',x,u,v)\| : \ (t,x),(t',x') \in G, \ |t'-t| \leqslant \delta, \ u \in P, \ v \in Q\Big\},\\
\mu_v(\delta) &= \max\Big\{\|f(t,x,u,v) - f(t,x,u,v')\| : \ (t,x) \in G, \ u \in P, \ v, v' \in Q, \ \|v - v'\| \leqslant \delta\Big\},\\
\psi(\delta) &= \mu_t(\delta) + L\varkappa\delta, \quad \delta \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что $\lim_{\delta\downarrow 0} \mu_t(\delta) = \lim_{\delta\downarrow 0} \mu_v(\delta) = 0$ и, каково бы ни было движение $x(\cdot)$ системы (1.1), порожденное из начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ реализациями $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, для любых моментов времени $t, t' \in [t_0, \vartheta]$ и векторов $u \in P$, $v, v' \in Q$ имеет место неравенство

$$\big\|f(t,x(t),u,v) - f(t',x(t'),u,v')\big\| \leqslant \psi(|t-t'|) + \mu_v(\|v - v'\|). \tag{2.1}$$

Положим

$$\mu_{uv}(\delta)=\max\Big\{\|f(t,x,u,v)-f(t,x,u,v')\|:$$

$$(t,x)\in G,\ u,u'\in P,\ v,v'\in Q,\ \|f(t,x,u',v)-f(t,x,u',v')\|\leqslant\delta\Big\},\quad \delta\geqslant 0.$$

Тогда для любых позиции $(t,x)\in G$ и векторов $u,u'\in P$, $v,v'\in Q$ будет справедлива оценка

$$\|f(t,x,u,v)-f(t,x,u,v')\|\leqslant\mu_{uv}\big(\|f(t,x,u',v)-f(t,x,u',v')\|\big). \tag{2.2}$$

Имеет место

Утверждение 1. *Если выполнено предположение* 1, *то* $\lim_{\delta\downarrow 0}\mu_{uv}(\delta)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая от противного, предположим, что существует такое число $\varepsilon_*>0$, что для каждого $k\in\mathbb{N}$ можно указать позицию $(t_k,x_k)\in G$ и векторы $u_k,u'_k\in P$ и $v_k,v'_k\in Q$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|f(t_k,x_k,u'_k,v_k)-f(t_k,x_k,u'_k,v'_k)\|\leqslant 1/k,\quad \|f(t_k,x_k,u_k,v_k)-f(t_k,x_k,u_k,v'_k)\|\geqslant\varepsilon_*.$$

Учитывая компактность множеств G, P и Q, можно считать, что последовательности $\{(t_k,x_k)\}$, $\{u_k\}$, $\{u'_k\}$, $\{v_k\}$ и $\{v'_k\}$ сходятся. Тогда для соответствующих пределов $(t_*,x_*)\in G$, $u_*,u'_*\in P$, и $v_*,v'_*\in Q$ в силу непрерывности функции f будут справедливы соотношения $f(t_*,x_*,u'_*,v_*)=f(t_*,x_*,u'_*,v'_*)$, $f(t_*,x_*,u_*,v_*)\neq f(t_*,x_*,u_*,v'_*)$, противоречащие предположению 1. Утверждение доказано.

Установим следующий вспомогательный факт.

Утверждение 2. *Пусть* $M>0$, *и для каждого числа* $\delta>0$ *и каждого значения параметра* α *из некоторого непустого множества* A *задана измеримая функция* $\varphi_\delta^\alpha:[t_0,\vartheta]\to[0,M]$, *причем выполняется равенство*

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\alpha\in A}\int_{t_0}^{\vartheta}\varphi_\delta^\alpha(t)\mathrm{d}t=0.$$

Тогда для любой неубывающей функции $\mu:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\lim_{\delta\downarrow 0}\mu(\delta)=0$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\sup_{\alpha\in A}\int_{t_0}^{\vartheta}\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задавшись числом $\varepsilon>0$, выберем число $\eta_*>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(\eta_*)\leqslant\varepsilon/(2(\vartheta-t_0))$. Далее выберем число $\delta_*>0$, при котором справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\varphi_\delta^\alpha(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varepsilon\eta_*}{2\mu(M)+1},\quad \delta\in(0,\delta_*],\quad \alpha\in A.$$

Пусть $\delta\in(0,\delta_*]$ и $\alpha\in A$. Положим $E=\{t\in[t_0,\vartheta]:\varphi_\delta^\alpha(t)\geqslant\eta_*\}$, $F=[t_0,\vartheta]\setminus E$. Тогда с учетом неравенства Чебышева (см., например, [10, теорема 3.3.2]) выводим

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t=\int_E\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t+\int_F\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\mu(M)}{\eta_*}\int_{t_0}^{\vartheta}\varphi_\delta^\alpha(t)\mathrm{d}t+(\vartheta-t_0)\mu(\eta_*)\leqslant\varepsilon. \tag{2.3}$$

Утверждение доказано.

Следствие. *Для любого компактного в* L_1 *множества* $V \subset \mathcal{V}$ *и любой неубывающей функции* $\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\lim_{\delta \downarrow 0} \mu(\delta) = 0$, *справедливо равенство*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{v(\cdot) \in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mu\big(\|v(t) - v(t - \delta)\|\big) \mathrm{d}t = 0. \tag{2.4}$$

Отметим, что в равенстве (2.4) и всюду далее предполагается, что $v(t) = 0$ при $t \notin [t_0, \vartheta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу компактности множества V по теореме Рисса (см., например, [11, с. 316, теорема 2]) выполняется соотношение

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{v(\cdot) \in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \|v(t) - v(t - \delta)\| \mathrm{d}t = 0,$$

из которого с учетом утверждения 2 вытекает равенство (2.4). Следствие доказано.

Также при доказательстве леммы будет использоваться

Утверждение 3. *Для любого компактного в* L_1 *множества* $V \subset \mathcal{V}$ *и любой неубывающей функции* $\mu : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\lim_{\delta \downarrow 0} \mu(\delta) = 0$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{v(\cdot) \in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задавшись числом $\varepsilon > 0$, выберем число $\eta_* > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(\eta_*) \leqslant \varepsilon / (2(\vartheta - t_0))$. В силу компактности множества V, применяя усреднения по Стеклову и теорему Колмогорова (см., например, [12, с. 460, теорема 6; 11, с. 316, теорема 2]), можно показать, что справедливо равенство

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{v(\cdot) \in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\| \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t = 0,$$

и стало быть, существует такое число $\delta_* > 0$, что имеет место оценка

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\| \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon \eta_*}{2\mu(2M) + 1}, \quad \delta \in (0, \delta_*], \quad v(\cdot) \in V,$$

где $M = \max_{v \in Q} \|v\|$. Пусть $\delta \in (0, \delta_*]$ и $v(\cdot) \in V$. Для каждого $t \in [t_0, \vartheta]$ по аналогии с оценкой (2.3) имеем

$$\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big) \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{\mu(2M)}{\eta_*} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\| \mathrm{d}\tau + 2\delta \mu(\eta_*),$$

откуда выводим

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big) \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t \leqslant \frac{\mu(2M)}{\eta_*} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\| \mathrm{d}\tau \mathrm{d}t + (\vartheta - t_0) \mu(\eta_*) \leqslant \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Зафиксируем число $\xi > 0$ и компактное в L_1 множество $V \subset \mathcal{V}$. Выберем число $\xi_* > 0$ из условия

$$2\xi_* e^{L(\vartheta - t_0)} \leqslant \xi. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание следствие, выберем такое число $\delta_1 > 0$, что, каковы бы ни были число $\delta \in (0, \delta_1]$ и функция $v(\cdot) \in V$, имеет место неравенство

$$2\varkappa\delta + (\vartheta - t_0)\psi(\delta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mu_v\big(\|v(t) - v(t-\delta)\|\big)\mathrm{d}t \leqslant \xi_*. \tag{2.6}$$

Опираясь на утверждение 2, учитывая при этом утверждения 1 и 3, выберем число $\delta_2 > 0$ так, чтобы для любого числа $\delta \in (0, \delta_2]$ и любой функции $v(\cdot) \in V$ была справедлива оценка

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mu_{uv}\Big(4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu_v\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t \leqslant \xi_*. \tag{2.7}$$

Положим $\delta_* = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ и покажем, что при таком выборе числа δ_* выполняется утверждение леммы. Пусть в согласии с формулировкой леммы зафиксированы позиция (t_0, x_0), разбиение Δ, реализации $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\overline{u}(\cdot)$, $\overline{v}(\cdot)$, а также движения $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ системы (1.1).

Положим $\delta = d(\Delta) \leqslant \delta_*$. Оценим величину $\|x(t) - y(t)\|$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В силу того что движения $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ порождены из одной и той же начальной позиции, имеем

$$\|x(t) - y(t)\| = \Big\|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau\Big\|.$$

При $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau\Big\| \leqslant 2\varkappa\delta.$$

Пусть $t \in [t_0 + \delta, \vartheta]$. Учитывая неравенство (2.1), выводим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0+\delta}^{t} f(\tau-\delta, x(\tau-\delta), u(\tau), v(\tau-\delta))\mathrm{d}\tau\Big\| \\
&\leqslant \int\limits_{t_0+\delta}^{t} \big\|f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau-\delta, x(\tau-\delta), u(\tau), v(\tau-\delta))\big\|\mathrm{d}\tau + \varkappa\delta \\
&\leqslant (t - t_0 - \delta)\psi(\delta) + \int\limits_{t_0+\delta}^{t} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(\tau-\delta)\|\big)\mathrm{d}\tau + \varkappa\delta.
\end{aligned}$$

Из равенства $u(\tau + \delta) = \overline{u}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta - \delta)$, справедливого в силу соотношений (1.7), (1.10) и постоянного шага разбиения Δ, получаем

$$\Big\| \int\limits_{t_0+\delta}^{t} f(\tau-\delta, x(\tau-\delta), u(\tau), v(\tau-\delta))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau \Big\|$$
$$= \Big\| \int\limits_{t_0}^{t-\delta} f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau \Big\|$$
$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \big\| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \mathrm{d}\tau + \varkappa\delta$$
$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \big\| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \mathrm{d}\tau + \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - y(\tau)\|\mathrm{d}\tau + \varkappa\delta.$$

Таким образом, с учетом выбора (2.6) числа δ_1 при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \xi_* + \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - y(\tau)\|\mathrm{d}\tau + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big\| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \mathrm{d}\tau. \tag{2.8}$$

Покажем далее, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \| \mathrm{d}\tau \leqslant \xi_*. \tag{2.9}$$

Для этого в согласии с оценкой (2.2) и выбором (2.7) числа δ_2, достаточно проверить, что при $\tau \in [t_0, \vartheta)$ выполняется оценка

$$\big\| f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \leqslant 4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta} \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(s)\|\big)\mathrm{d}s. \tag{2.10}$$

Пусть $j = \overline{1,k}$ и $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1})$. В силу соотношений (1.7), полагая $a_j = (x(\tau_{j+1}) - x(\tau_j))/\delta$, имеем

$$\big\| f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| = \big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u_j, \overline{v}_j) \big\|$$
$$\leqslant \big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - a_j \big\| + \big\| a_j - f(\tau, x(\tau), u_j, \overline{v}_j) \big\|. \tag{2.11}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых. Для первого слагаемого, принимая во внимание неравенство (2.1), выводим

$$\big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - a_j \big\| \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - f(s, x(s), u_j, v(s)) \big\| \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \psi(\delta) + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(s)\|\big)\mathrm{d}s \leqslant \psi(\delta) + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(s)\|\big)\mathrm{d}s. \tag{2.12}$$

Для второго слагаемого, учитывая выбор (1.8) вектора $\overline{v}_j$ и неравенство (2.1), получаем

$$\big\| a_j - f(\tau, x(\tau), u_j, \overline{v}_j) \big\| \leqslant \big\| a_j - f(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), u_j, \overline{v}_j) \big\| + \psi(\delta)$$

$$\leqslant \big\|a_j - f(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), u_j, v(\tau))\big\| + \psi(\delta) \leqslant \big\|a_j - f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau))\big\| + 2\psi(\delta). \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.11)–(2.13) следует оценка (2.10), а вместе с ней и неравенство (2.9).

Таким образом, в силу неравенств (2.8) и (2.9) имеет место соотношение

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 2\xi_* + \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - y(\tau)\|\mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

из которого, применяя лемму Беллмана — Гронуолла (см., например, [13, лемма 2.1]), с учетом выбора (2.5) числа ξ_* выводим

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 2\xi_* e^{L(t-t_0)} \leqslant 2\xi_* e^{L(\vartheta - t_0)} \leqslant \xi, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{2.14}$$

Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

3. Примеры

Первый пример показывает, что без предположения 1 утверждения теоремы и леммы могут не выполняться. Во втором примере для конкретной динамической системы и двух типов функциональных ограничений на помехи явно выписывается полученная при доказательстве леммы оценка расхождения движений системы и поводыря.

П р и м е р 1. Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)v(t), \quad t \in [0,1], \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \{0,1\}, \quad v(t) \in \{-1,1\}, \tag{3.1}$$

с начальным условием $x(0) = 0$ и показатель качества имеет вид

$$\gamma = x(1). \tag{3.2}$$

Отметим, что для системы (3.1) не выполнено предположение 1. Действительно, при $v = 1$, $v' = -1$ и $u' = 0$ имеем $u'v = u'v' = 0$, однако при $u = 1$ получаем $uv = 1 \neq -1 = uv'$.

Можно показать, что в задаче (3.1), (3.2) для величины оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий (1.3) выполняется равенство $\Gamma^0(0,0) = 0$, а контрстратегия $U^0(v) = 0$ при $v = 1$ и $U^0(v) = 1$ при $v = -1$ является оптимальной.

Пусть компактное множество V, задающее функциональные ограничения на допустимые реализации помехи, состоит из одной функции $v(t) = 1$, $t \in [0,1]$. Зафиксируем разбиение Δ отрезка времени $[0,1]$ с постоянным шагом $\delta = d(\Delta)$. В согласии с (1.7) определим кусочно-постоянные реализации $u(\cdot)$, $\overline{u}(\cdot)$ и $\overline{v}(\cdot)$ по правилу

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ четно},\\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \overline{u}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ четно},\\ 1, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \overline{v}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ четно},\\ -1, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad j = \overline{1, k+1}.$$

Можно проверить, что такие $u(\cdot)$, $\overline{u}(\cdot)$ и $\overline{v}(\cdot)$ удовлетворяют соотношениям (1.8)–(1.10) при $v(t) = 1$, $t \in [0,1]$.

Подставляя реализации $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ в систему (3.1), получаем $\gamma = x(1) \geqslant 1/2 - \delta/2$. Таким образом, в задаче (3.1), (3.2) процедура управления с поводырем (1.7)–(1.10) не гарантирует показателю качества γ значение $\Gamma^0(0,0) = 0$, т. е. не выполняется утверждение теоремы. Далее, подставляя в систему (3.1) реализации $\overline{u}(\cdot)$ и $\overline{v}(\cdot)$, для движения поводыря $y(\cdot)$ имеем $y(1) \leqslant -1/2 + \delta/2$, откуда выводим $x(1) - y(1) \geqslant 1 - \delta$. Стало быть, в данном примере утверждение леммы также не выполняется.

П р и м е р 2. Пусть движение динамической системы описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = u_1(t)\big(v_1^2(t) + v_2^2(t)\big), & t \in [0,1], \quad x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big) \in \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u_2(t)v_1(t)v_2(t), & u(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big) \in P, \quad v(t) = \big(v_1(t), v_2(t)\big) \in Q, \end{cases} \tag{3.3}$$

с начальным условием $x(0) = (0,0)$ и геометрические ограничения имеют вид

$$P = \big\{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1-\beta \leqslant u_i \leqslant 1+\beta,\ i=1,2\big\}, \quad Q = \big\{(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leqslant v_1^2 + v_2^2 \leqslant 4\big\},$$

где $\beta \in [0,1)$ — параметр. Можно проверить, что, несмотря на то что функция, определяющая правую часть системы (3.3), не является инъективной по $v = (v_1, v_2)$, для нее выполнено предположение 1. Кроме того, отметим, что система (3.3) не удовлетворяет условию равновесия в маленькой игре (см., например, [3, с. 79]).

Для системы (3.3) вычислим основные величины, участвующие в полученной при доказательстве леммы оценке (см. (2.6), (2.7) и (2.14)) расходимости движений системы $x(\cdot)$ и поводыря $y(\cdot)$. Можно показать, что имеют место соотношения

$$\mu_v(\delta) \leqslant 2\sqrt{5}(1+\beta)\delta, \quad \psi(\delta) = 0, \quad \mu_{uv}(\delta) \leqslant \frac{1+\beta}{1-\beta}\delta, \quad \delta \in [0,1).$$

Рассмотрим случай, когда реализации помехи $v(\cdot)$ являются кусочно-постоянными функциями с количеством точек разрыва, не превосходящем фиксированного числа $l \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\int\limits_0^1 \mu_v\big(\|v(t) - v(t-\delta)\|\big)\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{5}(1+\beta)(l+1)2\max_{v\in Q}\|v\|\delta = 8\sqrt{5}(1+\beta)(l+1)\delta,$$

$$\int\limits_0^1 \mu_{uv}\Big(4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\mu_v\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t \leqslant 4\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\|v(t) - v(\tau)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 4\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}(l+1)2\max_{v\in Q}\|v\|\delta = 16\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}(l+1)\delta, \quad \delta \in [0,1).$$

Оценивая эти же величины для случая, когда реализации $v(\cdot)$ равностепенно непрерывны с общим модулем непрерывности ω, получаем

$$\int\limits_0^1 \mu_v\big(\|v(t) - v(t-\delta)\|\big)\mathrm{d}t \leqslant \mu_v\big(\omega(\delta)\big) \leqslant 2\sqrt{5}(1+\beta)\omega(\delta),$$

$$\int\limits_0^1 \mu_{uv}\Big(4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\mu_v\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t \leqslant 8\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}\omega(\delta), \quad \delta \in [0,1).$$

Таким образом, приведенное доказательство леммы позволяет в некоторых случаях выписывать явные оценки расходимости движений системы и поводыря при использовании схемы управления (1.7)–(1.10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.

4. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. ISBN 0-8176-3698-6 .
5. **Серков Д.А.** Гарантированное управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 71–95.
6. **Серков Д.А.** О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 204–217.
7. **Kryazhimskii A.V.** The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute. New York; London; Munich etc.: World Scientific Publ. Co, 1991. P. 636–675.
8. **Кряжимский А.В, Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР: Техн. кибернет. 1983. № 2. С. 51–60.
9. **Серков Д.А.** Оптимальное по риску управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 1. С. 74–103.
10. **Богачев В.И., Смолянов О.Г.** Действительный и функциональный анализ: университетский курс / Институт компьютерных исследований. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 724 с. ISBN: 978-5-93972-742-6 .
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
12. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
13. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Поступила 30.06.2017

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: serkov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games], Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p. ISBN 0-8176-3698-6 .
5. Serkov D.A. Guaranteed control under functional constraints on the distrubance. *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 71–95 (in Russian).
6. Serkov D.A. On the unimprovability of full-memory strategies in problems of guaranteed result optimization. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 157–172. doi: 10.1134/S0081543815090114 .
7. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies. *Constantin Caratheodory: An International Tribute.* New York, London, Munich etc.: World Scientific Publ. Co, 1991, pp. 636–675. ISBN: 9814506923 .
8. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system. *Engrg. Cybernetics*, 1983, vol. 21, iss. 2, pp. 38–47.

9. Serkov D.A. Optimal risk control under functionally restricted disturbances. *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 74–103 (in Russian).
10. Bogachev V.I., Smolyanov O.G. *Deistvitel'nyi i funktsional'nyi analiz: universitetskii kurs* [Real and functional analysis: a university course]. Moscow: RCD Publ., 2009, 724 p. ISBN: 978-5-93972-742-6 .
11. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 752 p.
12. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
13. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations.* New York, London: Academic Press, 1963, 462 p. ISBN-10: 012410973X . Translated under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya*, Moscow: Mir Publ., 1967, 548 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 30, 2017.

Mihail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University named after B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com.

Dmitrii Aleksandrovich Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University named after B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: serkov@imm.uran.ru.