ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.85

ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С УЛУЧШЕННОЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТЬЮ[1]

Э. Х. Гимади

Рассматривается сетевая задача размещения с неограниченными объемами производства. В общем случае задача NP-трудна. Известно, что задача точно решается с квадратичной трудоемкостью на древовидной сети. В статье исследуется случай сети, представляемой внешнепланарным графом, т. е. графом, все вершины которого принадлежат одной (внешней) грани. Для точного решения рассматриваемой задачи был известен алгоритм с временной сложностью $O(nm^3)$, где n — число вершин, m — число возможных мест размещения предприятий. При использовании некоторых свойств внешнепланарных графов (бинарных 2-деревьев) и учете существования оптимального решения с совокупностью центрально связных областей обслуживания получены рекуррентные соотношения, позволяющие построить точный алгоритм, решающий задачу с уменьшенной в $\sqrt{m}$ раз временной сложностью.

Ключевые слова: задача размещения, сеть, внешнепланарный граф, точный алгоритм, временная сложность, связность.

E. Kh. Gimadi. An optimal algorithm for an outerplanar facility location problem with improved time complexity.

We consider a network facility location problem with unbounded production levels. This problem is NP-hard in the general case and is known to have an optimal solution with quadratic complexity on a tree network. We study the case of a network representable by an outerplanar graph, i.e., by a graph whose vertices belong to one (outer) face. This problem is known to have an optimal algorithm with time complexity $O(nm^3)$, where n is the number of vertices and m is the number of possible facility locations. Using some properties of outerplanar graphs (binary 2-trees) and the existence of an optimal solution with a family of centrally connected service domains, we obtain recurrence relations for the construction of an optimal algorithm with time complexity that is smaller by a factor of $\sqrt{m}$ than the time complexity of the earlier algorithm.

Keywords: facility location problem, network, outerplanar graph, optimal algorithm, time complexity, connectedness.

MSC: 90B80, 90C10, 90C39, 05C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-74-81

1. Введение

Задача размещения (Facility Location Problem — FLP [1]) может быть сформулирована следующим образом: минимизировать целевую функцию

$$\sum_{i\in M} f_i x_i + \sum_{j\in V}\sum_{i\in M} b_j c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = 1, \quad j\in V,$$

$$x_{ij} \le x_i, \quad i\in M, \quad j\in V,$$

$$x_{ij}, x_i \in \{0,1\},$$

где

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 16-11-10041.

M — множество возможных мест предприятий, $|M| = m$;

V — множество пунктов спроса (потребителей), $|V| = n$;

b_j — объем спроса в пункте j;

f_i — фиксированная стоимость открытия предприятия в пункте i;

c_{ij} — затраты на транспортировку единицы продукции от действующего предприятия в пункте i до потребителя j;

x_i и x_{ij} — переменные выбора и назначения соответственно.

Задачу можно записать более компактно: найти минимум функции

$$\sum_{i\in S} f_i + \sum_{j\in V} b_j \min_{i\in S} c_{ij}$$

по всем непустым подмножествам множества M.

Для анализа задачи FLP оказывается удобной другая компактная формулировка, которая в качестве переменных использует вектор назначения предприятий π: минимизировать функцию

$$\sum_{i\in I(\pi)} f_i + \sum_{j\in V} b_j c_{\pi_j j}$$

по всем векторам $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, где $\pi_j \in M$ — номер пункта-предприятия, обслуживающего пункт-потребителя $j \in V$, и $I(\pi)$ — множество предприятий, содержащееся в решении π.

Известно, что задача размещения NP-трудна в силу очевидной сводимости к ней NP-трудной задачи покрытия множествами.

Сетевая задача размещения определяется посредством простого связного неориентированного взвешенного графа $G = (V, E)$ с множеством вершин V потребителей и множеством ребер коммуникаций, соединяющих эти вершины. Предполагается, что множество возможных мест предприятий $M \subset V$, а транспортные затраты c_{ij} равны сумме длин (весов) ребер в кратчайшем пути, соединяющем пункты i и j (расстояния между i и j).

Задача размещения на древовидной сети была решена В. А. Трубиным [2] за время $O(n^3)$. Позже этот алгоритм был переоткрыт в работе [3]. Одновременно с этим автором статьи был предложен алгоритм с временной сложностью $O(nm)$ [4], что, естественно, не превышает $O(n^2)$. Позже алгоритмы с такой же трудоемкостью были представлены в работах [1; 5].

Алгоритм в [4] использует понятие *связных областей обслуживания.*

Область обслуживания $A \in V$ называется *связной относительно графа* $G = (V, E)$, если подграф, индуцированный этой областью, является связным.

Обозначим через

$$i{\le_v}k, \quad i{<_v}k, \quad i{=_v}k$$

соотношения

$$g_{iv} \le g_{kv}, \quad g_{iv} < g_{kv}, \quad g_{iv} = g_{kv},$$

соответственно. Формулы

$$i{\le_{V'}}k, \quad i{<_{V'}}k, \quad i{=_{V'}}k$$

означают, что соответствующие соотношения выполняются для каждого $v \in V',\ V' \subset V$.

Говорим, что матрица (g_{ij}) $(i \in M,\ j \in V)$ удовлетворяет *свойству связности относительно ациклической сети* G, если для всякой пары $i, k \in M$ существует разбиение (V', V'') такое, что подграфы V' и V'' являются связными и имеют место соотношения $i{\le_{V'}}k$, $i{<_{V''}}k$.

Понятие матрицы (g_{ij}) $(i \in M,\ j \in V)$, *связной относительно произвольного графа* G, рассмотрено в работе [6].

В нижеследующем утверждении используется понятие *центральной связности* [7] матрицы транспортных затрат. Матрица (g_{ij}) называется *центрально-связной относительно сети* G (*короче,* C-*матрица*), если неравенства $g_{i_1,v} < g_{i_2,v}$ для всех $i_1, i_2 \in M$, $v \in V$ влекут неравенства $g_{i_1,j} < g_{i_2,j}$ для всех вершин j в кратчайшем пути, соединяющем вершины i_1 и v:

Для произвольной сетевой задачи размещения с C-матрицей (g_{ij}) существует оптимальное решение с совокупностью центрально-связных областей обслуживания (см. [7]).

В этом случае сетевая задача размещения решается за время $O(nm^2 + |E|)$, если сеть содержит только псевдодревесные квазиблоки, и за время $O(n^2m)$, если число возможных мест открытия предприятий в каждом непсевдодревесном квазиблоке не превышает $\log n$ [7].

Примером C-матрицы является матрица с компонентами $g_{ij} = c_i + \widetilde{c}_{ij}$, где c_i — произвольные веса вершин и $\widetilde{c}_{ij}$ — расстояния между вершинами i и j.

В настоящей работе рассматривается класс задач размещения на внешнепланарном графе. По определению *внешнепланарный граф* (outerplanar graph) есть планарный граф, который имеет укладку на плоскости такую, что все его вершины принадлежат одной грани. Внешнепланарные графы являются подграфами параллельно-последовательных графов. Максимальные внешнепланарные графы — это графы, к которым нельзя добавить ребро без потери внешнепланарности. Это в точности 2-деревья [8].

В работе [9] построено полиномиальное по времени преобразование задачи размещения с матрицей, связной относительно внешнепланарных графов, к задаче размещения с матрицей, связной относительно циклов, что, как следствие, ведет к построению алгоритма с временной сложностью $O(n^3m)$ для решения этих задач. В статье [6] задача размещения на частичных 2-деревьях (включающих последовательно-параллельные сети) решается за время $O(nm^3)$ посредством аналогичной техники, используемой в алгоритмах для задачи размещения на древовидных сетях [4; 7].

Несколько ранее для задачи размещения на последовательно-параллельной сети Hassin и Tamir [10] представили алгоритм с временной сложностью $O(nm^3)$.

Таким образом, для известных алгоритмов решения задачи размещения с линейной (относительно числа потребителей n) временной сложностью имеется существенный разрыв между временами $O(nm)$ и $O(nm^3)$ решения задачи размещения на деревьях и 2-деревьях соответственно.

Ниже мы представим алгоритм решения задачи размещения на внешнепланарных графах, где во временной сложности функция m^3 заменяется на $m^{5/2}$.

2. Основной результат и предварительные рассмотрения

Основным результатом статьи является

Теорема. *Оптимальное решение задачи размещения на внешнепланарном графе может быть найдено за время $O(nm^{2.5})$.*

Для доказательства теоремы представим несколько рекуррентных соотношений, позволяющих построить алгоритм с анонсированной временной сложностью.

Заметим, что внешнепланарная задача размещения может быть сведена к задаче размещения на максимальном внешнепланарном графе добавлением не более $(n-3)$ новых ребер с достаточно большим весом. Максимальный внешнепланарный граф имеет $(2n-3)$ ребер.

Ребро внешнепланарного графа назовем *внешним*, если оно смежно ровно одному треугольнику, и *внутренним* — в противном случае. Ниже нам будет удобно использовать альтернативное определение максимального внешнепланарного графа, а именно *бинарного* 2*-дерева*. Неориентированный граф G называем 2*-деревом*, если G — треугольник либо он может быть достроен из некоторого своего треугольника посредством подсоединения к концам одного из его ребер (p, q) двух новых ребер (p, s), (s, q) с новой вершиной s. *Бинарное* 2*-дерево* есть 2-дерево, каждое ребро которого смежно не более чем с двумя треугольниками.

Выберем в качестве *корневого ребра* данного графа внешнее ребро $e_1 \in E$.

Пусть $V_{pq} \subset V$ означает множество вершин-потомков ребра (p, q) (исключая концевые вершины этого ребра). Для каждого $v \in V_{pq}$ ребро (p, q) содержится в минимальной последовательности реберно-сцепленных треугольников, соединяющих вершину v и корневое ребро $e_1 \in E$.

Положим $N_{pq} = |V_{pq}|$, $V^0_{pq} = V_{pq} \cup \{p\} \cup \{q\}$, $M_{pq} = V_{pq} \cap M$. Назначим номера $\{1,\dots,n\}$ вершинам графа G в противочасовом порядке на внешней грани так, что выбранное ребро e_1 оказалось помечено как $(1,n)$. При этом $p < q$ для всех ребер (p,q). Заметим, что множество V^0_{pq} совпадает с целочисленным сегментом $[p,q]$.

Для каждого внутреннего ребра (p,q) (и внешнего ребра e_1) через $Son(p,q)$ обозначим единственную вершину $s \in [p,q]$ такую, что имеются ребра (p,s) и (s,q). Для каждой вершины $s = Son(p,q)$ через $L(s)$ и $R(s)$ обозначим вершины p и q соответственно.

Рассмотрим семейство следующих задач размещения на подграфах исходного бинарного 2-дерева:

$$\big\{G_{pq}; i,j \,\big|\, \pi_p = i,\ \pi_q = j\big\}, \quad 1 \le p < q \le n, \quad i,j \in M, \tag{2.1}$$

не принимая во внимание стоимости $f_i,\ f_j,\ g_{ip},\ g_{jq}$. Здесь G_{pq} есть подграф, индуцированный множеством вершин, определенных сегментом $[p,q]$. Заметим, что подграф G_{pq} может не быть бинарным 2-деревом, но если $(p,q) \in E$, то G_{pq} является бинарным 2-деревом.

Пусть $\{F_{pq}(i,j)\}$ — оптимумы соответствующих задач (2.1). Тогда, используя обозначение

$$f_k^{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in \{i,\, j\}, \\ f_k & \text{иначе}, \end{cases}$$

для всяких $i,j,k \in M$ получаем, что оптимум исходной задачи

$$F^* = \min_{i \in M}\big\{f_i + g_{i1} + \min_{j \in M}\{f_j^{ii} + g_{jn} + F_{1,n}(i,j)\}\big\}.$$

Лемма 1. *Для всякой вершины $s \in V$ (для $p = L(s),\ q = R(s)$) и пары $(i,j) \in M$ верны следующие рекуррентные соотношения:*

$$F_{pq}(i,j) = \min\big\{D_{pq}(i,j), \min_{k \in \{i,\, j\}}\{F_{ps}(i,k) + g_{ks} + F_{sq}(k,j)\}\big\},$$

где

$$D_{pq}(i,j) = \min_{k \in M_{pq}}\big\{F_{ps}(i,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\big\}. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правильность леммы 1 следует из существования центрально-связного оптимального решения согласно сформулированному выше на с. 76 утверждению и представлению графа G_{pq} с $(p,q) \in E$ в виде двух подграфов G_{ps} и G_{sq}, связанных ребром (p,q) и вершиной $s = Son(p,q)$. □

Посредством этих соотношений мы можем решить внешнепланарную задачу размещения за такое же время $O(nm^3)$, что и в статьях [6; 10]. Временная сложность алгоритма зависит главным образом от вычисления величин $D_{pq}(i,j)$. Ниже мы представим более эффективный способ вычисления этих величин.

3. О некотором свойстве бинарных 2-деревьев

Далее нам понадобится вспомогательное свойство бинарных 2-деревьев, которое для данного целого r, $0 \le r < n/2$, устанавливает верхнюю оценку мощности множества

$$V(n,r) = \big\{s \in V \,\big|\, N_{L(s)s} \ge r,\ N_{sR(s)} \ge r\big\}.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие неравенства*:

$$|V(n,r)| \le \frac{n-1}{r+1} - 1, \quad 0 \le r < n/2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Ясно, что лемма верна для минимального 2-дерева с $n = 3$. Пусть она выполняется для бинарных деревьев с числом вершин, меньшим n. В бинарном n-вершинном 2-дереве $G = G(n)$ выберем бинарные 2-деревья $G(n_1) = G_{1s}$ и $G(n_2) = G_{sn}$, индуцированные множествами вершин V_{1s}^0 и V_{sn}^0 соответственно, где s означает $Son(1, n)$. Положив $n_1 = |V_{1s}^0|$, $n_2 = |V_{sn}^0|$, мы имеем равенство $n_1 + n_2 - 1 = n$. Из этого соотношения и неравенств (3.1) для графов $G(n_1)$ и $G(n_2)$ следует, что

$$|V(n,r)| \le |V(n_1,r)| + |V(n_2,r)| + 1$$

$$\le \left(\frac{n_1-1}{r+1} - 1\right) + \left(\frac{n_2-1}{r+1} - 1\right) + 1 = \frac{n_1+n_2-2}{r+1} - 1 = \frac{n-1}{r+1} - 1. \qquad \square$$

4. Вычисление величины $D_{pq}(i,j)$

4.1. Случай $Son(p,q) \in V(n,r)$

Лемма 3. *Семейство величин*

$$\left\{D_{pq}(i,j) \,\middle|\, Son(p,q) \in V(n,r),\ (p,q) \in E,\ i,j \in M\right\}$$

может быть вычислено за время $O(nm^3/r)$.

Доказательство. Для фиксированных $i, j \in M$ и $(p,q) \in E$ величина $D_{pq}(i,j)$, определенная равенством (2.2), вычисляется за время $O(m)$. По лемме 2 число ребер (p,q) с $Son(p,q) \in V(n,r)$ не превышает n/r. С учетом всех пар i, j вершин (возможных мест предприятий) мы получаем требуемую оценку временной сложности. $\square$

4.2. Случай $Son(p,q) \notin V(n,r)$

Лемма 4. *Семейство величин*

$$\left\{D_{pq}(i,j) \,\middle|\, Son(p,q) \notin V(n,r),\ (p,q) \in E,\ i,j \in M\right\}$$

может быть найдено за время $O(nm^2r + nmr^3)$.

Доказательство. Зафиксируем $s \in V(n,r)$ и положим $p = L(s)$, $q = R(s)$. По утверждению леммы либо $N_{ps} < r$, либо $N_{sq} < r$. Пусть верно первое неравенство.

Для произвольных $i, j \in M$ представим выражение (2.2) в следующей форме:

$$D_{pq}(i,j) = \min\left\{D_{pq}^L(i,j),\ D_{pq}^R(i,j)\right\},$$

где

$$D_{pq}^L(i,j) = \min_{p<k<s}\left\{F_{ps}(i,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\right\},$$

$$D_{pq}^R(i,j) = \min_{s\le k<q}\left\{F_{ps}(i,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\right\}. \tag{4.1}$$

По лемме 1 семейство величин

$$\left\{D_{pq}^L(i,j) \,\middle|\, (p,q) \in E,\ i,j \in M\right\}$$

можно вычислить за время $O(nm^2r)$. Теперь нам нужен подходящий способ отыскания семейства величин

$$\left\{D_{pq}^R(i,j) \,\middle|\, (p,q) \in E,\ i,j \in M\right\} \tag{4.2}$$

в случае $N_{ps} < r$ (что означает $s \le p + r$).

Чтобы закончить доказательство леммы 4, требуется доказать следующую лемму.

Лемма 5. *Семейство величин* (4.2) *может быть вычислено за время* $O(nmr^3)$.

Доказательство леммы основано на следующих двух фактах.

Факт 1. *Для всякого ребра* $(p,q) \in E$ *и пары* $i,j \in M$ *верны следующие рекуррентные соотношения*:

$$D^R_{pq}(i,j) = \min_{p<v<s}\bigl\{\mathcal{F}'_{vs}(i) + \mathcal{F}''_{vs}(j)\bigr\}, \tag{4.3}$$

где $s = Son(p,q)$ *и*

$$\mathcal{F}'_{vs}(i) = \min_{p\le k'<s}\bigl\{F_{pv}(i,k') + f^{ii}_{k'} + g_{k'v}\bigr\}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{F}''_{vs}(j) = \min_{s\le k<q}\bigl\{g_{k,v+1} + F_{v+1,s}(k,k) + f_k + g_{ks} + F_{sq}(k,j)\bigr\}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Для заданной вершины $s \in \{p,q\}$ обозначим через $F^{(s)}_{pq}(i,j)$ оптимум целевой функции задачи размещения на внешнепланарном графе, индуцированном вершинным множеством $\{p,p+1,\ldots,q\}$ при условии, что $\pi_p = i,\ \pi_q = j$ без учета стоимостей f_{π_s} и $g_{\pi_s s}$. Тогда величину $F_{ps}(i,k)$ в (4.1) можно представить в виде

$$F_{ps}(i,k) = \min_{p<v<s}\bigl\{\min_{p<k'\le v} F^{(p)}_{pv}(i,k') + F^{(s)}_{v+1,s}(k,k)\bigr\}.$$

Следовательно, (4.1) может быть записано в виде

$$D^R_{pq}(i,j) = \min_{s\le k<q}\bigl\{\min_{p<v<s}\{\min_{p<k'\le v} F^{(p)}_{pv}(i,k') + F^{(s)}_{v+1,s}(k,k)\} + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\bigr\}.$$

Изменяя порядок минимизации по k и v, получим следующее выражение:

$$D^R_{pq}(i,j) = \min_{p<v<s}\bigl\{\min_{p<k'\le v} F^{(p)}_{pv}(i,k') + \min_{s\le k<q}\{F^{(s)}_{v+1,s}(k,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\}\bigr\}.$$

Наконец, поскольку

$$F^{(p)}_{pv}(i,k') = F_{pv}(i,k') + f^{ii}_{k'} + g_{k'v}, \quad F^{(s)}_{v+1,s}(k,k) = g_{k,v+1} + F_{v+1,s}(k,k),$$

выражение $D^R_{pq}(i,j)$ можно записать в виде (4.3)–(4.5). □

Заметим, что выражение (4.4) не зависит от вершины-предприятия j, а выражение (4.5) — от вершины-предприятия i. Каждая такая вершина может принимать m значений. Вместо этих соотношений получаем зависимость от v и от k' соответственно. Число различных значений v (и k') не превышает r.

Факт 2. *Оба семейства значений*

$$\bigl\{\mathcal{F}'_{vs}(i)\,\big|\, L(s) < v < s,\ s \notin V(n,r),\ i \in M\bigr\} \tag{4.6}$$

и

$$\bigl\{\mathcal{F}''_{vs}(j)\,\big|\, L(s) < v < s,\ s \notin V(n,r),\ j \in M\bigr\} \tag{4.7}$$

можно вычислить за время $O(nmr^3)$.

Доказательство. Рассмотрим семейства (4.6) и (4.7) по отдельности.

Положим $p = L(s)$. Пусть $]a,b[$ означает целочисленный сегмент без концевых точек a и b. Семейство (4.6) обрабатывается за время $O(mnr^2)$, если уже известны величины $F_{vs}(i,k')$ для всяких $v,k' \in]p,s[$. Часть этих величин уже была найдена, а именно для $v,k' \in]p,s'[$, где $s' = Son(p,s)$. Остальные величины $F_{pv}(i,k')$ для $v,k' \in]s',s[$ можно вычислить (используя уже имеющиеся значения $F_{s'v}(i',k')$ для $v,i',k' \in]s',s[$) посредством следующих рекуррентных соотношений:

$$F_{pv}(i,k') = \min_{p<i'<v}\bigl\{F_{ps'}(i,i') + f^{ik'}_{i'} + g_{i's'} + F_{s'v}(i',k')\bigr\}.$$

Это может быть выполнено за время $O(nmr^3)$.

Вычисление (4.7) выполняется за время $O(mnr^2)$, если уже имеются необходимые значения величин $F_{v+1,s}(k,k)$ для всех $v \in]p,s[$ and $k \in]s,q[$. Они могут быть найдены за время $O(nmr)$ с помощью рекуррентных соотношений

$$F_{v,s}(k,k) = g_{k,v} + F_{v,R(v)}(k,k) + F_{R(v),s}(k,k),$$

где $(v, R(v)) \in E,\ v \in]p,s[,\ F_{s,s}(k,k) = 0$.

Следовательно, все значения величин (4.5) могут быть найдены за время $O(nmr^2)$. Общая обработка обоих семейств (4.6) и (4.7) выполняется за время $O(nmr^3)$. $\square$

Таким образом, лемма 5 и предшествующая ей лемма 4 доказаны.

5. Доказательство основного утверждения статьи

Из лемм 3 и 4 следует, что можно найти величины $D_{pq}(i,j)$ для всех $(p,q) \in E,\ i,j \in M$ за время $O(nm\psi_{mr})$, где

$$\psi_{mr} = m^2/r + mr + r^3.$$

Положив параметр $r = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, мы получаем верхнюю оценку $O(m^{1.5})$, близкую к минимуму величины ψ_{mr}. Это позволяет нам оценить временную сложность алгоритма решения внешнепланарной задачи размещения величиной $O(nm^{2.5})$.

Тем самым доказательство теоремы — основного результата статьи — закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Discrete location theory / eds. P. B. Mirchandani, R. L. Francis. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. N.Y.; Chichester; Brisbane; Toronto; Singapour: Wiley and Sons Inc., 1990. 576 p. ISBN: 978-0-471-89233-5.
2. **Трубин В. А.** Эффективный алгоритм решения задачи размещения на сети в форме дерева // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 3. С. 547–550.
3. **Kolen A.** Solving covering problems and the uncapacitated plant location on the trees // Eur. J. Oper. Res. 1983. Vol. 12, no. 3. P. 266–278.
4. **Гимади Э. Х.** Эффективный алгоритм размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1983. Вып. 23. С. 12–23.
5. **Billionet A., Costa M.-C.** Solving the uncapacitated plant location problem on trees // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 49, no. 1–3. P. 51–59.
6. **Агеев А. А.** Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на последовательно-параллельной сети // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1990. Вып. 30. С. 3–16.
7. **Гимади Э. Х.** Задача размещения на сети с центрально-связными областями обслуживания // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1984. Вып. 25. С. 38–47.
8. **Valdes J., Tarjan R., Lawler E.** The recognition of series parallel digraphs // SIAM J. Comput. 1982. Vol. 11, no. 2. P. 298–313.
9. **Агеев А. А.** Графы, матрицы и простейшая задача размещения // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1989. Вып. 29. С. 3–11.
10. **Hassin R., Tamir A.** Efficient algorithm for optimization and selection on series-parallel graphs // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. Vol. 7, № 3. P. 379–389.

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

Поступила 16.05.2017

REFERENCES

1. P. B. Mirchandani, R. L. Francis (eds). *Discrete location theory.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, N.Y., Chichester, Brisbane, Toronto, Singapour: Wiley and Sons Inc., 1990, 576 p. ISBN: 978-0-471-89233-5 .
2. Trubin V.A. An effective algorithm for solving the distribution problem in a network in the form of a tree. *Dokl. AN SSSR (*Soviet Math. Dokl.*)*, 1976, vol. 231, no. 3, pp. 547–550 (in Russian).
3. Kolen A. Solving covering problems and the uncapacitated plant location on the trees. *Eur. J. Oper. Res.*, 1983, vol. 12, no. 3, pp. 266–278.
4. Gimadi E. Kh. Effektivnyi algoritm razmeshcheniya s oblastyami obsluzhivaniya, svyaznymi otnositel'no atsiklicheskoi seti. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1983, no. 23, pp. 12–23 (in Russian).
5. Billionet A., Costa M.-C. Solving the uncapacitated plant location problem on trees. *Discrete Appl. Math.*, 1994, vol. 49, no. 1–3, pp. 51–59.
6. Ageev A.A. Polinomial'nyi algoritm resheniya zadachi razmeshcheniya na posledovatel'no-parallel'noi seti. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1990, no. 30, pp. 3–16 (in Russian).
7. Gimadi E. Kh. Zadacha razmeshcheniya na seti s tsentral'no-svyaznymi oblastyami obsluzhivaniya. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1984, no. 25, pp. 38–47 (in Russian).
8. Valdes J., Tarjan R., Lawler E. The recognition of series parallel digraphs. *SIAM J. Comput.*, 1982, vol. 11, no. 2, pp. 298–313.
9. Ageev A.A. Grafy, matritsy i prosteishaya zadacha razmeshcheniya. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1989, no. 29, pp. 3–11 (in Russian).
10. Hassin R., Tamir A. Efficient algorithm for optimization and selection on series-parallel graphs. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, no. 3. pp. 379–389.

The paper was received by the Editorial Office on May 16, 2017.

Eduard Khairutdinovich Gimadi, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru .