ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.51

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ БЕРНШТЕЙНА И РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ ПОЛИНОМАМИ[1]

А. Г. Бабенко Ю. В. Крякин

П. Л. Чебышев (1857, 1859) поставил и решил задачу о наименее уклоняющейся от нуля в равномерной метрике на отрезке неправильной рациональной дроби среди рациональных дробей, знаменатель которых фиксирован и представляет собой положительный на отрезке многочлен заданной степени m, а числитель — многочлен заданной степени $n \geq m$ с единичным старшим коэффициентом. А. А. Марков (1884) решил аналогичную задачу в случае, когда в знаменателе расположен корень квадратный из заданного положительного многочлена. В XX в. эта тематика получила развитие в работах С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера и других математиков. Так, Г. Сеге (1964), используя методы комплексного анализа, перенес результат П. Л. Чебышева на случай тригонометрических дробей. В данной статье методами вещественного анализа на основе развития подхода С. Н. Бернштейна удалось найти наилучшее равномерное приближение на периоде тригонометрическими полиномами определенного порядка для бесконечной серии правильных тригонометрических дробей специального вида. Оказалось, что в периодическом случае некоторые результаты естественно формулировать в терминах обобщенного ядра Пуассона $\Pi_{\rho,\xi}(t) = (\cos\xi)P_\rho(t) + (\sin\xi)Q_\rho(t)$, представляющего собой линейную комбинацию ядра Пуассона $P_\rho(t) = (1-\rho^2)/[2(1+\rho^2-2\rho\cos t)]$ и сопряженного ядра Пуассона $Q_\rho(t) = \rho\sin t/(1+\rho^2-2\rho\cos t)$, где $\rho \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$. В настоящей работе найдено наилучшее равномерное приближение на периоде подпространством $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка не выше n следующей линейной комбинации обобщенного ядра Пуассона и его сдвига: $\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi)$. Отсюда при $\xi = 0$ получаются известные результаты С. Н. Бернштейна о наилучшем равномерном приближении на $[-1,1]$ дробей $1/(x^2-a^2)$, $x/(x^2-a^2)$ алгебраическими многочленами, а при $\xi = \pi/2$ — их весовые аналоги (с весом $\sqrt{1-x^2}$). Кроме того, здесь найдена величина наилучшего равномерного приближения на периоде подпространством $\mathcal{T}_n$ специальной линейной комбинации упомянутого выше ядра Пуассона P_ρ и ядра Пуассона K_ρ для бигармонического уравнения в единичном круге.

Ключевые слова: Функции Бернштейна, ядра Пуассона, равномерное приближение.

A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin. Modified Bernstein function and a uniform approximation of some rational fractions by polynomials.

P. L. Chebyshev posed and solved (1857, 1859) the problem of finding an improper rational fraction least deviating from zero in the uniform metric on a closed interval among rational fractions whose denominator is a fixed polynomial of a given degree m that is positive on the interval and numerator is a polynomial of a given degree $n \geq m$ with unit leading coefficient. A. A. Markov solved (1884) a similar problem in the case when the denominator is the square root of a given positive polynomial. In the 20th century, this research direction was developed by S. N. Bernstein, N. I. Akhiezer, and other mathematicians. For example, in 1964 G. Szegő extended Chebyshev's result to the case of trigonometric fractions using the methods of complex analysis. In this paper, using the methods of real analysis and developing Bernstein's approach, we find the best uniform approximation on a period by trigonometric polynomials of certain order for an infinite series of proper trigonometric fractions of a special form. It turned out that, in the periodic case, it is natural to formulate some results in terms of the generalized Poisson kernel $\Pi_{\rho,\xi}(t) = (\cos\xi)P_\rho(t) + (\sin\xi)Q_\rho(t)$, which is a linear combination of the Poisson kernel $P_\rho(t) = (1-\rho^2)/[2(1+\rho^2-2\rho\cos t)]$ and the conjugate Poisson kernel $Q_\rho(t) = \rho\sin t/(1+\rho^2-2\rho\cos t)$, where $\rho \in (-1,1)$ and $\xi \in \mathbb{R}$. We find the best uniform approximation on a period by the subspace $\mathcal{T}_n$ of trigonometric polynomials of order at most n for the linear combination $\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi)$ of the generalized Poisson kernel and its shift. For $\xi = 0$, this yields Bernstein's known results on the best uniform approximation on $[-1,1]$ of the fractions $1/(x^2-a^2)$ and $x/(x^2-a^2)$ by algebraic polynomials. For $\xi = \pi/2$, we obtain the weight analogs (with weight $\sqrt{1-x^2}$) of these results. In addition, we find the value of the best uniform approximation on a period by the subspace $\mathcal{T}_n$ of a special linear combination of the mentioned Poisson kernel P_ρ and the Poisson kernel K_ρ for the biharmonic equation in the unit disk.

Keywords: Bernstein functions, Poisson kernels, uniform approximation.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 2.А03.21.0006 от 27.08.2013).

MSC: 41A10, 42A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-43-57

Введение

П. Л. Чебышев [19, т. 2, с. 146–236] поставил и решил задачу о наименее уклоняющейся от нуля в равномерной метрике на отрезке $[-1,1]$ неправильной рациональной дроби среди рациональных дробей вида P/Q, где числитель P — многочлен заданной степени n с единичным старшим коэффициентом, а знаменатель Q фиксирован и представляет собой положительный на $[-1,1]$ алгебраический многочлен степени $m \le n$. А. А. Марков [12; 13, ст. 11, п. 1–8, с. 244–273] решил аналогичную задачу в случае, когда в знаменателе дроби вместо фиксированного многочлена Q расположен $\sqrt{\psi}$, где ψ — заданный многочлен степени $\ell \le 2n$, положительный на $[-1,1]$. Г. Сеге [17] перенес результат П. Л. Чебышева на случай тригонометрических дробей. Существенный вклад в эту тематику внесли С. Н. Бернштейн, Н. И. Ахиезер и другие математики, используя методы как вещественного, так и комплексного анализа (см. монографию [16], работы [9–11] и приведенную в них библиографию).

В данной статье на основе развития подхода С. Н. Бернштейна найдены наилучшие равномерные приближения на периоде тригонометрическими полиномами определенного порядка для бесконечной серии правильных тригонометрических дробей специального вида, в частности для специальной линейной комбинации обобщенного ядра Пуассона и его сдвига, а также для специальной линейной комбинации ядер Пуассона для гармонического и бигармонического уравнений в единичном круге. При этом решающее значение имеют модифицированные функции Бернштейна $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$, определенные ниже в разд. 2 (в случае $k=1$ эти функции были введены ранее в [3]).

Нули функции Бернштейна $B_n(t,q) = \mathcal{B}_{n,1}(t,q,0)$ (см. ниже формулу (1.6), а также формулу (2.12) при $\xi = 0$, $k=1$) сыграли ключевую роль в решении задачи интегрального приближения характеристической функции произвольного отрезка тригонометрическими полиномами [3]. Кроме того, как оказалось [4], набор точек альтернанса функции $B_n(t,q) = \mathcal{B}_{n,1}(t,q,0)$ совпал с набором нулей известного синус-полинома Геронимуса, в терминах которого выражается решение задачи о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на отрезке в интегральной метрике с двумя фиксированными старшими коэффициентами. Поэтому есть основания предполагать, что модифицированные функции Бернштейна $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$ при $\xi \in \mathbb{R}$, $k \ge 1$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k) \in (-1,1)^k$ найдут еще ряд новых приложений (помимо упомянутых в предыдущем абзаце), тем более что свойства этих функций хорошо анализируются (как численно, так и аналитически) с помощью формул (2.12)–(2.18).

1. История вопроса. Краткие формулировки результатов

Пусть $C[\alpha,\beta]$ — пространство непрерывных функций $f\colon\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C[\alpha,\beta]} = \max\{|f(x)|:\ x \in [\alpha,\beta]\}$; $\mathcal{P}_n$ — подпространство многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ (с вещественными коэффициентами) степени не выше n.

С. Н. Бернштейн [6, ст. 7–9; 7, гл. 2] исследовал задачу о величине

$$E_n(f) = E_n(f)_{C[-1,1]} = \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{C[-1,1]}$$

наилучшего равномерного приближения на $[-1,1]$ аналитической функции f подпространством $\mathcal{P}_n$. Он нашел асимптотику указанной величины для рациональной дроби $1/(x-a)^k$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$ при $n \to \infty$. Постановка задачи о равномерном приближении простейшей дроби

$f_a(x) = 1/(x-a)$, $a > 1$, подпространством $\mathcal{P}_n$ принадлежит П. Л. Чебышеву[2] (1892) [19, т. 3, с. 363–372]. С. Н. Бернштейн [6, ст. 8, § 3] (см. [4, разд. 2]) вычислил величину

$$E_n(f_a) = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{4\rho^{n+2}}{(1-\rho^2)^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}, \tag{1.1}$$

и многочлен наилучшего равномерного приближения; здесь параметры $a > 1$, $\rho \in (0, 1)$ связаны между собой формулой

$$a = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big) = \frac{1+\rho^2}{2\rho}. \tag{1.2}$$

В [7, гл. 2, § 3, (22)] для $F_a(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$, $G_a(x) = \dfrac{x}{x^2-a^2}$, $a > 1$, найдены также величины

$$E_n(F_a) = E_{n+1}(F_a) = \frac{1}{2a^2(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{8\rho^{n+4}}{(1-\rho^4)^2}, \quad n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.3}$$

$$E_n(G_a) = E_{n+1}(G_a) = \frac{1}{2a(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{4\rho^{n+3}}{(1-\rho^4)(1-\rho^2)}, \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.4}$$

Здесь, как и выше, параметры $a > 1$, $\rho \in (0, 1)$ связаны между собой формулой (1.2).

При доказательстве этих результатов ключевую роль играют функции $B_n(t, \rho)$, $B_n(t, \rho_1, \rho_2)$ (см. формулы (1.6), (1.7) ниже), которые (в несколько иной форме) применялись в [6, ст. 7–9] и [7, гл. 2, § 3, (20)–(22)] соответственно. Положим

$$\lambda(t, \rho) = \arccos \frac{2\rho - (1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2 - 2\rho\cos t}, \quad t \in [0, \pi], \quad -1 < \rho < 1. \tag{1.5}$$

Функциями Бернштейна будем называть следующие функции:

$$B_n(t, \rho) = \cos\left[nt - \lambda(t, \rho)\right], \quad t \in [0, \pi], \quad -1 < \rho < 1, \tag{1.6}$$

$$B_n(t, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\ell) = \cos\left[nt - \lambda(t, \rho_1) - \lambda(t, \rho_2) - \ldots - \lambda(t, \rho_\ell)\right], \tag{1.7}$$
$$t \in [0, \pi], \quad -1 < \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\ell < 1.$$

Эти функции после замены $x = \cos t$ преобразуются в алгебраические рациональные дроби с вещественными полюсами, расположенными вне отрезка $[-1, 1]$. Указанные дроби (с точностью до постоянного множителя) являются важным частным случаем дробей Чебышева–Маркова (П. Л. Чебышев (1859) [19, т. 2, с. 186–196], А. А. Марков (1884) [12]); при этом форма записи упомянутых дробей имеет простой вид, что удобно для их исследования и развития. Функции $B_n(t, \rho)$ и $B_n(t, \rho, -\rho)$ приводят соответственно к упомянутым выше результатам (1.1) и (1.3), (1.4), о чем подробнее будет сказано ниже.

Пусть $\rho \in (-1, 1)$. Напомним (см. [8, гл. 3, § 6, (6.2), (6.3)]), что *ядром Пуассона* и *сопряженным ядром Пуассона* называются соответственно функции

$$P_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^\nu \cos\nu t = \frac{1-\rho^2}{2(1+\rho^2-2\rho\cos t)}, \quad Q_\rho(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^\nu \sin\nu t = \frac{\rho\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}, \tag{1.8}$$

а *обобщенным ядром Пуассона* — следующая линейная комбинация ядер P_ρ и Q_ρ:

$$\Pi_{\rho,\xi}(t) = (\cos\xi)P_\rho(t) + (\sin\xi)Q_\rho(t), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

[2]Постановка более общей задачи о наилучшем равномерном приближении произвольной непрерывной функции на отрезке многочленами и рациональными дробями тоже принадлежит П. Л. Чебышеву (1857) [19, т. 2, с. 146, 147, 159].

Заметим, что $P_\rho(t+\pi) = P_{-\rho}(t)$, $Q_\rho(t+\pi) = Q_{-\rho}(t)$, $\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi) = \Pi_{-\rho,\xi}(t)$ при любых $\rho \in (-1,1)$, $t,\xi \in \mathbb{R}$. Для $\rho \in (-1,1)$, $\rho \neq 0$ определим величину (сравните с (1.2))

$$x_\rho = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big) = \frac{1+\rho^2}{2\rho}, \tag{1.10}$$

в терминах которой выражения для P_ρ, $P_{-\rho}$, Q_ρ, $Q_{-\rho}$ перепишутся в виде

$$P_\rho(t) = \frac{1-\rho^2}{4\rho(x_\rho - \cos t)}, \quad P_{-\rho}(t) = \frac{1-\rho^2}{4\rho(x_\rho + \cos t)}, \tag{1.11}$$

$$Q_\rho(t) = \frac{\sin t}{2(x_\rho - \cos t)}, \quad Q_{-\rho}(t) = \frac{-\sin t}{2(x_\rho + \cos t)}. \tag{1.12}$$

Утверждение (1.1) эквивалентно равенству $\inf\limits_{g\in\mathcal{C}_n} \|P_\rho - g\|_{C[0,\pi]} = \dfrac{|\rho|^{n+1}}{1-\rho^2}$, $\rho \in (-1,1)$, где $\mathcal{C}_n$ — подпространство косинус-полиномов порядка не выше n.

Результаты (1.1) и (1.3), (1.4) равносильны соответственно утверждениям, что при любом $\rho \in (-1,1)$ функция $B(t) = B_n(t,\rho)$ (см. (1.6)) не приближается в равномерной норме на $[0,\pi]$ подпространством $\mathcal{C}_n$, а функция $B_n(t,\rho,-\rho)$ не приближается подпространствами $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_{n+1}$, т. е. соответствующие полиномы наилучшего приближения тождественно равны нулю.

Асимптотическое поведение величины наилучшего приближения рациональных дробей общего вида алгебраическими полиномами на отрезке нашел С. Н. Бернштейн [6, ст. 7–9; 7, гл. 2]. Эффективные оценки сверху указанной величины получил Н. И. Ахиезер [1].

Ниже в разд. 2 вводится модифицированная функция Бернштейна $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$, зависящая от $t \in [-\pi,\pi]$, натурального параметра $n \in \mathbb{N}$, вещественного параметра $\xi \in \mathbb{R}$ и многомерного параметра $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ из открытого куба $(-1,1)^k$. Эта функция является обобщением функций Бернштейна (см. (1.6), (1.7)). В частности, $\mathcal{B}_{n,1}(t,\rho,0) = B_n(t,\rho)$ при $t \in [0,\pi]$. Основной результат разд. 2 (теорема 1) заключается в том, что функция $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$ представляет собой неправильную дробь, числитель которой есть тригонометрический полином порядка $n+k$, а знаменатель — косинус-полином порядка $k-m$, где m — число нулевых элементов q_j в наборе q. Указанная дробь имеет $2(n+k)$-точечный альтернанс на периоде $\mathbb{T} = [-\pi,\pi)$, следовательно, она не приближается в равномерной метрике на $\mathbb{T}$ подпространством $\mathcal{T}_{n+k-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n+k-1$ (подробнее см. теорему 2 разд. 3). Выделяя из указанной неправильной дроби ее правильную часть, приходим к утверждению (3.2) о величине наилучшего равномерного приближения на периоде правильной части подпространством $\mathcal{T}_{n+k-1}$ и о соответствующем наилучшем полиноме.

Этим способом в разд. 4 (см. следствие 1) найдено наилучшее равномерное приближение на периоде подпространством $\mathcal{T}_n$ следующей линейной комбинации обобщенного ядра Пуассона и его сдвига: $\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n \Pi_{\rho,\xi}(t+\pi) = \Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n \Pi_{-\rho,\xi}(t)$. Отсюда при $\xi = 0$ получаются результаты (1.3), (1.4) С. Н. Бернштейна, а при $\xi = \pi/2$ — их весовые аналоги (с весом $\sqrt{1-x^2}$). Кроме того, в разд. 4 (см. пример 3, равенства (4.19)) вычислена величина наилучшего равномерного приближения на периоде тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного специальной линейной комбинации ядер Пуассона P_ρ и K_ρ для гармонического и бигармонического уравнений в единичном круге.

2. Модифицированная функция Бернштейна

Пусть $\rho \in (-1,1)$. Помимо функции $\lambda(t,\rho)$, определенной выше формулой (1.5) для $t \in [0,\pi]$, в дальнейшем понадобятся еще две функции $\widetilde{\lambda}(t,\rho)$ и $\mu(t,\rho)$, первая из которых задана на полупериоде $[-\pi,0]$, а вторая — на всем периоде $[-\pi,\pi]$ следующими формулами:

$$\widetilde{\lambda}(t,\rho) = \pi + \lambda(t+\pi,-\rho), \quad t \in [-\pi,0], \tag{2.1}$$

$$\mu(t,\rho) = \begin{cases} \widetilde{\lambda}(t,\rho), & t \in [-\pi,0], \\ \lambda(t,\rho), & t \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{2.2}$$

В частности, если $\rho = 0$, то

$$\mu(t,0) = \pi - t \quad \text{при} \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{2.3}$$

Функция $\mu(t,\rho)$ была введена ранее авторами и использовалась в работе [3, разд. 6, формула (6.17)], где сформулированы кратко некоторые ее свойства. В следующем утверждении помимо упомянутых свойств приводятся новые свойства функции $\mu(t,\rho)$, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма. *При фиксированном $\rho \in (-1,1)$ функция $\mu(t,\rho)$ как функция переменного t обладает следующими свойствами:*

(1) *$\mu(t,\rho)$ — непрерывная и убывающая функцией по t на $[-\pi,\pi]$, причем $\mu(-\pi,\rho) = 2\pi$, $\mu(\pi,\rho) = 0$; более того, $\mu(t,\rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного t в интервале $(-\pi,\pi)$, при этом выполняются равенства*

$$\frac{\partial \mu(t,\rho)}{\partial t} = \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t} = -2P_\rho(t), \quad t \in (-\pi,\pi); \tag{2.4}$$

(2) *для всех $t \in [-\pi,\pi]$ справедливы равенства*

$$\cos\mu(t,\rho) = \frac{2\rho - (1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2 - 2\rho\cos t}, \quad \sin\mu(t,\rho) = \frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Функция $\lambda(t,\rho)$ (см. (1.5)) представима в виде

$$\lambda(t,\rho) = \arccos u(t,\rho), \quad \text{где} \quad u(t,\rho) = \frac{2\rho - (1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Легко проверить, что имеют место равенства

$$1 - u^2(t,\rho) = \frac{(1-\rho^2)^2\sin^2 t}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}, \quad \lambda(0,\rho) = \pi, \quad \lambda(\pi,\rho) = 0. \tag{2.6}$$

С помощью первого равенства в (2.6) находим

$$\sin\lambda(t,\rho) = \sin\{\arccos u(t,\rho)\} = \sqrt{1-u^2(t,\rho)} = \frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u(t,\rho)}{\partial t} = \frac{(1-\rho^2)^2\sin t}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2} = \frac{1-u^2(t,\rho)}{\sin t},$$

$$\frac{\partial \lambda(t,\rho)}{\partial t} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2(t,\rho)}}\frac{\partial u(t,\rho)}{\partial t} = \frac{-\sqrt{1-u^2(t,\rho)}}{\sin t} = \frac{\rho^2-1}{1+\rho^2-2\rho\cos t}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) и последних двух равенств в (2.6) видно, что функция $\lambda(t,\rho)$ монотонно убывает по t на отрезке $[0,\pi]$ от значения $\lambda(0,\rho) = \pi$ до значения $\lambda(\pi,\rho) = 0$. Ясно также, что $\lambda(t,\rho)$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменного t в интервале $(0,\pi)$. Отсюда и из (2.1) следует, что функция $\widetilde{\lambda}(t,\rho)$ монотонно убывает на отрезке $[-\pi,0]$ от значения $\widetilde{\lambda}(-\pi,\rho) = 2\pi$ до значения $\widetilde{\lambda}(0,\rho) = \pi$. Понятно, что $\widetilde{\lambda}(t,\rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного t в интервале $(-\pi,0)$. Таким образом, в силу определения (2.2), заключаем, что функция $\mu(t,\rho)$ как функция переменного t является непрерывной и убывающей функцией на $[-\pi,\pi]$, причем $\mu(-\pi,\rho) = 2\pi$, $\mu(\pi,\rho) = 0$. Кроме того, $\mu(t,\rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного t на объединении двух интервалов $(-\pi,0)\bigcup(0,\pi)$.

Для завершения доказательства свойства (1) осталось установить, что $\mu(t,\rho)$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменного t в точке “склейки” $t=0$. В связи с этим рассмотрим частную производную по t функции $\widetilde{\lambda}(t,\rho)$ в интервале $(-\pi,0)$

$$\frac{\partial\widetilde{\lambda}(t,\rho)}{\partial t}=\frac{\partial\lambda(t+\pi,-\rho)}{\partial t}=\frac{\rho^2-1}{1+\rho^2+2\rho\cos(t+\pi)}=\frac{\rho^2-1}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Сравнивая последнюю часть полученной цепочки равенств с последней частью равенств (2.8), приходим (с учетом (1.8)) к равенствам (2.4), которые и влекут свойство бесконечной дифференцируемости функции $\mu(t,\rho)$ по t не только в точке $t=0$, но и на всем интервале $(-\pi,\pi)$.

Перейдем к доказательству свойства (2). Равенства (2.5) на отрезке $[0,\pi]$ в силу определения (2.2) эквивалентны следующим равенствам:

$$\cos\lambda(t,\rho)=\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t},\quad \sin\lambda(t,\rho)=\frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}\quad\text{при}\quad t\in[0,\pi]. \tag{2.9}$$

Эти равенства вытекают из определения (1.5) и формул (2.7).

Для доказательства равенств (2.5) на отрезке $[-\pi,0]$ достаточно установить справедливость следующих двух равенств:

$$\cos\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t},\qquad \sin\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}\quad\text{при}\quad t\in[-\pi,0]. \tag{2.10}$$

Первое из этих равенств получается с помощью (2.1) и первого равенства в (2.9). Действительно,

$$\cos\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\cos[\pi+\lambda(t+\pi,-\rho)]=-\cos\lambda(t+\pi,-\rho)$$

$$=-\frac{-2\rho-(1+\rho^2)\cos(t+\pi)}{1+\rho^2+2\rho\cos(t+\pi)}=-\frac{-2\rho+(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}=\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Используя определение (2.1) и второе равенство в (2.9), находим

$$\sin\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\sin[\pi+\lambda(t+\pi,-\rho)]=-\sin\lambda(t+\pi,-\rho)$$

$$=-\frac{(1-\rho^2)\sin(t+\pi)}{1+\rho^2+2\rho\cos(t+\pi)}=\frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Первая и последняя части этой цепочки равенств дают второе равенство в (2.10). □

З а м е ч а н и е. Обратим внимание (см. [4, разд. 3, формулы (3.4)–(3.6)]), что

$$\mu(t,\rho)=\psi(t,\rho)\quad\text{при}\quad t\in[-\pi,\pi],\quad \rho\in(-1,1), \tag{2.11}$$

где

$$\psi(t,\rho)=\begin{cases}2\pi, & t=-\pi,\\ \pi-2\operatorname{arctg}\Bigl(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\Bigr), & t\in(-\pi,\pi),\\ 0, & t=\pi.\end{cases}$$

Действительно, легко проверить, что $\dfrac{\partial\mu(t,\rho)}{\partial t}=\dfrac{\partial\psi(t,\rho)}{\partial t}$ при $t\in(-\pi,\pi)$, $\rho\in(-1,1)$. Отсюда с учетом непрерывности функций $\psi(t,\rho)$ и $\mu(t,\rho)$ по переменной t на $[-\pi,\pi]$ и того факта, что значения этих функций совпадают в концевых точках отрезка $[-\pi,\pi]$, вывовродим (2.11).

О п р е д е л е н и е. Натуральному числу $n\in\mathbb{N}$, вещественному числу $\xi\in\mathbb{R}$ и набору $q=(q_1,q_2,\dots,q_k)$, в котором все $q_j\in(-1,1)$, сопоставим функцию

$$\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)=\mathcal{B}_{n,k}\bigl(t,(q_1,q_2,\dots,q_k),\xi\bigr)=\cos\Bigl[nt+\xi-\sum_{j=1}^{k}\mu(t,q_j)\Bigr],\quad t\in[-\pi,\pi], \tag{2.12}$$

которую назовем *модифицированной функцией Бернштейна.*

Теорема 1. *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k) \in (-1,1)^k$, m *— число нулевых элементов* q_j *в наборе* q. *Тогда при всех* $t \in [-\pi, \pi]$ *имеет место представление*[3]

$$\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi) = \frac{R_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\Big(1+q_j^2-2q_j\cos t\Big)}, \tag{2.13}$$

в котором $R_{q,\xi}(t) = R_{n,k,q,\xi}(t)$ *— тригонометрический полином порядка* $n+k$, *определяемый однозначно указанными параметрами* n, k, q, ξ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы (2.3) и определения (2.12) случай $m>0$ сводится к случаю $m=0$ заменой параметра n на параметр $n' = n+m$. Поэтому доказательство теоремы будем проводить, предполагая $m=0$, т. е. считаем, что в наборе $q=(q_1,q_2,\ldots,q_k)$ все элементы $q_j \in (-1,1)$ и $q_j \neq 0$.

Утверждение (2.13) при $k=1$ доказано в [3, разд. 6, формула (6.17)]. Рассмотрим и здесь этот случай, поскольку он будет применяться ниже для случая $k=2$.

Заданной паре чисел $\rho \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$ соответствует функция $\mathcal{B}_{n,1}(t,\rho,\xi)$ (см.(2.12)), которая с помощью стандартных тригонометрических формул преобразуется к виду

$$\mathcal{B}_{n,1}(t,\rho,\xi) = \cos\left[nt+\xi-\mu(t,\rho)\right] = \cos(nt+\xi)\cos\mu(t,\rho) + \sin(nt+\xi)\sin\mu(t,\rho).$$

Отсюда и из (2.5) имеем

$$\mathcal{B}_{n,1}(t,\rho,\xi) = \frac{[2\rho-(1+\rho^2)\cos t]\cos(nt+\xi) + [(1-\rho^2)\sin t]\sin(nt+\xi)}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Таким образом, приходим к представлению

$$\mathcal{B}_{n,1}(t,\rho,\xi) = \frac{R_{\rho,\xi}(t)}{1+\rho^2-2\rho\cos t}, \quad t \in [-\pi,\pi], \tag{2.14}$$

в котором

$$\begin{aligned} R_{\rho,\xi}(t) &= -\cos[(n+1)t+\xi] + 2\rho\cos\left[nt+\xi\right] - \rho^2\cos[(n-1)t+\xi] \\ &= \left[\sin(n+1)t - 2\rho\sin nt + \rho^2\sin(n-1)t\right]\sin\xi \\ &- \left[\cos(n+1)t - 2\rho\cos nt + \rho^2\cos(n-1)t\right]\cos\xi. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Рассмотрим случай $k=2$. В этом случае набор $q=(q_1,q_2)$ состоит из двух элементов $q_1 \in (-1,1)$, $q_2 \in (-1,1)$ и функция (2.12) преобразуется к виду

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \cos\left[nt+\xi-\mu(t,q_1)-\mu(t,q_2)\right]$$

$$= \cos\mu(t,q_2)\cos\left[nt+\xi-\mu(t,q_1)\right] + \sin\mu(t,q_2)\sin\left[nt+\xi-\mu(t,q_1)\right].$$

Отсюда и (2.5) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) &= \frac{2q_2-(1+q_2^2)\cos t}{1+q_2^2-2q_2\cos t}\cos\left[nt+\xi-\mu(t,q_1)\right] + \frac{(1-q_2^2)\sin t}{1+q_2^2-2q_2\cos t}\sin\left[nt+\xi-\mu(t,q_1)\right] \\ &= \frac{2q_2-(1+q_2^2)\cos t}{1+q_2^2-2q_2\cos t}\mathcal{B}_{n,1}(t,q_1,\xi) + \frac{(1-q_2^2)\sin t}{1+q_2^2-2q_2\cos t}\mathcal{B}_{n,1}(t,q_1,\xi-\pi/2). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Применив (2.14), придем к равенству

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \frac{[2q_2-(1+q_2^2)\cos t]R_{q_1,\xi}(t) + [(1-q_2^2)\sin t]R_{q_1,\xi-\pi/2}(t)}{(1+q_1^2-2q_1\cos t)(1+q_2^2-2q_2\cos t)}, \tag{2.17}$$

[3] Если у знака произведения нижний индекс больше верхнего, то такое произведение считается равным единице.

которое вместе с (2.15) влечет утверждение теоремы 1 в случае $k = 2$.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при выводе равенств (2.16), установим реккурентную формулу

$$\mathcal{B}_{n,k+1}\bigl(t,(q_1,\dots,q_k,q_{k+1}),\xi\bigr) = \frac{2q_{k+1} - (1+q_{k+1}^2)\cos t}{1+q_{k+1}^2 - 2q_{k+1}\cos t}\,\mathcal{B}_{n,k}\bigl(t,(q_1,\dots,q_k),\xi\bigr)$$

$$+ \frac{(1-q_{k+1}^2)\sin t}{1+q_{k+1}^2 - 2q_{k+1}\cos t}\,\mathcal{B}_{n,k}\bigl(t,(q_1,\dots,q_k),\xi-\pi/2\bigr), \tag{2.18}$$

где $k \ge 1$, $(q_1,\dots,q_k,q_{k+1}) \in (-1,1)^{k+1}$. С помощью этой формулы доказывается справедливость теоремы 1 в случае $k \ge 3$ по индукции. □

3. Равномерное приближение некоторых тригонометрических дробей тригонометрическими полиномами

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, т. е. $g \in \mathcal{T}_n$, если $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ (все $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$).

Пусть $k,n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $q = (q_1,q_2,\dots,q_k) \in (-1,1)^k$, m — число нулевых элементов q_j в наборе q. Обратим внимание на то, что дробь

$$\frac{R_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\bigl(1+q_j^2-2q_j\cos t\bigr)}, \tag{3.1}$$

расположенная в правой части (2.13), является 2π-периодическим продолжением функции $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$ на всю ось $\mathbb{R}$, поскольку числитель указанной дроби есть тригонометрический полином $R_{q,\xi}(t) = R_{n,k,q,\xi}(t)$ порядка $n+k$, однозначно определяемый параметрами n,k,q,ξ.

Функция $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$, заданная формулой (2.12), имеет $2(n+k)$-точечный альтернанс на $[-\pi,\pi)$. Поэтому в качестве следствия из теоремы 1 получаем утверждение

Теорема 2. *При любых* $k,n \in \mathbb{N}$, $q = (q_1,q_2,\dots,q_k) \in (-1,1)^k$, $\xi \in \mathbb{R}$ *тригонометрическая дробь* (3.1) *не приближается подпространством* $\mathcal{T}_{n+k-1}$ *в равномерной норме на любом полуинтервале вида* $[\alpha,\alpha+2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (*т. е. соответствующий полином наилучшего приближения тождественно равен нулю*).

Хорошо известно, что из неправильной дроби (3.1) можно выделить правильную часть, т. е. представить ее в виде $\dfrac{R_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\bigl(1+q_j^2-2q_j\cos t\bigr)} = \dfrac{r_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\bigl(1+q_j^2-2q_j\cos t\bigr)} - g_{q,\xi}(t)$, где $r_{q,\xi}$ и $g_{q,\xi}$ — тригонометрические полиномы порядка[4] $k-1-m$ и $n+m$ соответственно.

Пусть $0 \le m \le k-1$; в силу теоремы 2 полиномом $g_{q,\xi}$ является полином наилучшего равномерного приближения на периоде для правильной части $\varphi_{q,\xi}(t) = \dfrac{r_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\bigl(1+q_j^2-2q_j\cos t\bigr)}$ дроби (3.1) в каждом из подпространств $\mathcal{T}_j$, $n+m \le j \le n+k-1$, т. е.

$$E_{n+m}(\varphi_{q,\xi})_{C_{2\pi}} = \inf_{g\in\mathcal{T}_{n+m}} \|\varphi_{q,\xi} - g\|_{C_{2\pi}} = \dots = E_{n+k-1}(\varphi_{q,\xi})_{C_{2\pi}} = \|\varphi_{q,\xi} - g_{q,\xi}\|_{C_{2\pi}} = 1. \tag{3.2}$$

Здесь $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических вещественнозначных функций f с равномерной нормой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\}$.

[4]Тригонометрический полином порядка (-1) условимся считать тождественно равным нулю.

4. Примеры

П р и м е р 1. Рассмотрим случай $k = 1$. Утверждение (3.2) в этом случае более детально раскрыто в [3, разд. 6, теоремы 8, 9]. А именно при любых $\rho \in (-1, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_n\big(\Pi_{\rho,\xi}\big)_{C_{2\pi}} = \inf_{g \in \mathcal{T}_n} \|\Pi_{\rho,\xi} - g\|_{C_{2\pi}} = \frac{|\rho|^{n+1}}{1-\rho^2}, \tag{4.1}$$

где $\Pi_{\rho,\xi}$ — обобщенное ядро Пуассона, определенное выше формулой (1.9).

Равенство (4.1) при $\xi = 0$ эквивалентно утверждению (1.1) С. Н. Бернштейна. Отметим, что величина наилучшего равномерного приближения обобщенного ядра Пуассона $\Pi_{\rho,\xi}$ подпространством $\mathcal{T}_n$ не зависит от параметра ξ, в то время как аналогичная величина наилучшего интегрального приближения уже зависит от ξ (см. теорему 1 из работы [5] и приведенную в ней историю вопроса, восходящую к исследованиям Б. Надя и М. Г. Крейна 1938 г.).

П р и м е р 2. Пусть $k = 2$, $q = (\rho, -\rho)$, $\rho \in (-1, 1)$, $\rho \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. В этом случае функция $\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \cos\left[nt + \xi - \mu(t, \rho) - \mu(t, -\rho)\right]$ (см. (2.17)) имеет вид

$$\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \frac{\big[(1-\rho^2)\sin t\big] R_{\rho,\xi-\pi/2}(t) - \big[2\rho + (1+\rho_2^2)\cos t\big] R_{\rho,\xi}(t)}{(1+\rho^2 - 2\rho\cos t)(1+\rho^2+2\rho\cos t)}.$$

После преобразований приходим к представлению $\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \dfrac{W(t)}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2 t}$, где

$$W(t) = \Big[\cos(n+2)t - 2\rho^2\cos nt + \rho^4\cos(n-2)t\Big]\cos\xi - \Big[\sin(n+2)t - 2\rho^2\sin nt + \rho^4\sin(n-2)t\Big]\sin\xi.$$

Отсюда получаем, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство

$$\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \frac{\mathcal{W}_{n+2}(t)}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2 t}\cos\xi - \frac{\mathcal{V}_{n+1}(t)\sin t}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2 t}\sin\xi, \tag{4.2}$$

где $\mathcal{W}_{n+2}$ и $\mathcal{V}_{n+1}$ — следующие косинус-полиномы порядка $n+2$ и $n+1$ соответственно:

$$\mathcal{W}_{n+2}(t) = \cos(n+2)t - 2\rho^2\cos nt + \rho^4\cos(n-2)t, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{V}_{n+1}(t) = \frac{\sin(n+2)t}{\sin t} - 2\rho^2\frac{\sin nt}{\sin t} + \rho^4\frac{\sin(n-2)t}{\sin t}. \tag{4.4}$$

Пусть $n \geq 3$. Функция $\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi)$ при $t \in [0, \pi]$ представима в виде

$$\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \frac{W_{n+2}(x)\cos\xi}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2x^2} - \frac{V_{n+1}(x)\sqrt{1-x^2}\sin\xi}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2x^2}, \quad x = \cos t \in [-1, 1], \tag{4.5}$$

где $W_{n+2}(x) = T_{n+2}(x) - 2\rho^2T_n(x) + \rho^4T_{n-2}(x)$, $V_{n+1}(x) = U_{n+1}(x) - 2\rho^2U_{n-1}(x) + \rho^4U_{n-3}(x)$; здесь T_k и U_k — многочлены Чебышева (степени k) первого и второго рода соответственно, т. е. $T_k(\cos t) = \cos kt$, $U_k(\cos t) = \dfrac{\sin(k+1)t}{\sin t}$.

Выше (см. (1.10)) была определена величина $x_\rho = \dfrac{1}{2}\Big(\rho + \dfrac{1}{\rho}\Big) = \dfrac{1+\rho^2}{2\rho}$, которая неявно содержится в выражении (4.5) для $\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi)$. Действительно, поскольку $(x_\rho - x)(x_\rho + x) = x_\rho^2 - x^2 = \dfrac{(1+\rho^2)^2}{4\rho^2} - x^2 = \dfrac{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2x^2}{4\rho^2}$, то

$$\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \frac{W_{n+2}(x)\cos\xi}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} - \frac{V_{n+1}(x)\sqrt{1-x^2}\sin\xi}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} \quad \text{при} \quad x = \cos t, \quad t \in [0, \pi]. \tag{4.6}$$

Применив известные факты из теории разложений рациональных функций на простейшие дроби (см. [14, гл. 8, § 8.5, § 8.6]), приходим к представлениям

$$\frac{W_{n+2}(x)}{4\rho^2(x_\rho-x)(x_\rho+x)}=\frac{a_1}{x_\rho-x}+\frac{a_2}{x_\rho+x}+p_n(x), \tag{4.7}$$

$$\frac{V_{n+1}(x)}{4\rho^2(x_\rho-x)(x_\rho+x)}=\frac{b_1}{x_\rho-x}+\frac{b_2}{x_\rho+x}+q_{n-1}(x), \tag{4.8}$$

в которых a_1, a_2, b_1, b_2 — некоторые величины, не зависящие от x, а p_n и q_{n-1} — некоторые алгебраические полиномы степени не выше n и $n-1$ соответственно.

Для вычисления величины a_1 домножим обе части равенства (4.7) на $x_\rho-x$, а затем, устремив x к точке x_ρ, получим

$$\frac{W_{n+2}(x_\rho)}{8\rho^2x_\rho}=a_1. \tag{4.9}$$

Как известно (см. [15, гл. 1, §1, (20)]), многочлен Чебышева T_k отображает x_ρ в x_{ρ^k}, т. е.

$$T_k\Big(\frac12\Big(\rho+\frac1\rho\Big)\Big)=\frac12\Big(\rho^k+\frac1{\rho^k}\Big)=\frac{1+\rho^{2k}}{2\rho^k},\quad k\in\mathbb{Z}_+,\quad \rho\in(-1,0)\cup(0,1). \tag{4.10}$$

Отсюда с помощью равенства $W_{n+2}(x)=T_{n+2}(x)-2\rho^2T_n(x)+\rho^4T_{n-2}(x)$ и (4.9) находим

$$W_{n+2}(x_\rho)=\frac{(1-\rho^4)^2}{2\rho^{n+2}},\qquad a_1=\frac{(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}.$$

Используя аналогичные рассуждения, вычислим $a_2=\dfrac{W_{n+2}(-x_\rho)}{8\rho^2x_\rho}=\dfrac{(-1)^n(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}$.

Таким образом, выражение (4.7) преобразуется к виду

$$\frac{W_{n+2}(x)}{4\rho^2(x_\rho-x)(x_\rho+x)}=\frac{(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}\Big[\frac{1}{x_\rho-x}+\frac{(-1)^n}{x_\rho+x}\Big]+p_n(x).$$

Аналогично, с помощью известной формулы (см. [15, гл. 1, §1, формула (21)])

$$\Big(\rho-\frac1\rho\Big)U_k\Big(\frac12\Big(\rho+\frac1\rho\Big)\Big)=\rho^{k+1}-\frac1{\rho^{k+1}},\quad k\in\mathbb{Z}_+,\quad \rho\in(-1,1),\quad \rho\neq0, \tag{4.11}$$

(4.8) преобразуется к виду $\dfrac{V_{n+1}(x)}{4\rho^2(x_\rho-x)(x_\rho+x)}=\dfrac{1-\rho^4}{4\rho^{n+2}}\Big[\dfrac{1}{x_\rho-x}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{x_\rho+x}\Big]+q_{n-1}(x)$.

Принимая во внимание (4.6), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi)=&\Big\{\frac{(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}\Big[\frac{1}{x_\rho-\cos t}+\frac{(-1)^n}{x_\rho+\cos t}\Big]+p_n(\cos t)\Big\}\cos\xi\\&-\Big\{\frac{1-\rho^4}{4\rho^{n+2}}\Big[\frac{1}{x_\rho-\cos t}+\frac{(-1)^{n+1}}{x_\rho+\cos t}\Big]+q_{n-1}(\cos t)\Big\}\sin t\sin\xi,\end{aligned} \tag{4.12}$$

которое справедливо для натуральных $n\ge3$ и любых $t,\xi\in\mathbb{R}$. На самом деле, равенство (4.12) выполняется и при $n=0,1,2$. Для того чтобы убедиться в этом, надо воспользоваться формулами (4.2)–(4.4). При этом любой алгебраический полином q_{-1} степени (-1) считаем тождественно равным нулю. Запишем равенство (4.12) в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi)=&\Big\{\frac{1-\rho^4}{2\rho^{n+2}}\Big[\frac{1-\rho^2}{4\rho(x_\rho-\cos t)}+\frac{(-1)^n(1-\rho^2)}{4\rho(x_\rho+\cos t)}\Big]+p_n(\cos t)\Big\}\cos\xi\\&-\Big\{\frac{1-\rho^4}{2\rho^{n+2}}\Big[\frac{\sin t}{2(x_\rho-\cos t)}+\frac{(-1)^n(-\sin t)}{2(x_\rho+\cos t)}\Big]+(\sin t)q_{n-1}(\cos t)\Big\}\sin\xi.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом формул (1.11), (1.12), (1.9) получаем представление

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi)=\frac{1-\rho^4}{2\rho^{n+2}}\Big[\Pi_{\rho,\xi}(t)+(-1)^n\Pi_{-\rho,\xi}(t)\Big]+\tau_n(t),\quad \tau_n\in\mathcal{T}_n,$$

с помощью которого исходя из (3.2) приходим к утверждению

Следствие 1. *Пусть* $k=2$, $\rho\in(-1,1)$, $\xi\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$E_n\Big(\Pi_{\rho,\xi}+(-1)^n\Pi_{-\rho,\xi}\Big)_{C_{2\pi}}=E_{n+1}\Big(\Pi_{\rho,\xi}+(-1)^n\Pi_{-\rho,\xi}\Big)_{C_{2\pi}}=\frac{2|\rho|^{n+2}}{1-\rho^4}.\tag{4.13}$$

З а м е ч а н и е. При $\xi=0$ утверждение (4.13) равносильно результатам (1.3), (1.4) С. Н. Бернштейна. Утверждение (4.13) в случае $\xi=\pi/2$ позволяет вычислить величины наилучшего взвешенного (с весом $\sqrt{1-x^2}$) равномерного приближения подпространствами $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathcal{P}_n$ для следующей линейной комбинации двух простейших дробей: $H_{n,\rho}(x)=\dfrac{1}{x_\rho-x}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{x_\rho+x}$, где $x_\rho=(\rho+1/\rho)/2$ (см. формулу (1.10)). А именно

$$\widetilde{E}_{n-1}(H_{n,\rho})=\widetilde{E}_n(H_{n,\rho})=\frac{4|\rho|^{n+2}}{1-\rho^4};\quad \text{здесь}\quad \widetilde{E}_n(f)=\inf_{p\in\mathcal{P}_n}\Big\|\big[f(x)-p(x)\big]\sqrt{1-x^2}\Big\|_{C[-1,1]}.$$

Отсюда получаем весовые аналоги результатов (1.3), (1.4):

$$\widetilde{E}_{n-1}\Big(\frac{1}{x_\rho^2-x^2}\Big)=\widetilde{E}_n\Big(\frac{1}{x_\rho^2-x^2}\Big)=\frac{4|\rho|^{n+3}}{(1+\rho^2)(1-\rho^4)},\quad n=2m+1,\ m\in\mathbb{Z}_+,$$

$$\widetilde{E}_{n-1}\Big(\frac{x}{x_\rho^2-x^2}\Big)=\widetilde{E}_n\Big(\frac{x}{x_\rho^2-x^2}\Big)=\frac{2|\rho|^{n+2}}{1-\rho^4},\quad n=2m,\ m\in\mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что $\mathcal{P}_{-1}$ состоит из единственной функции, тождественно равной нулю.

П р и м е р 3. Пусть $k=2$, $q=(\rho,\rho)$, $\rho\in(-1,1)$, $\rho\neq 0$, $\xi=0$. В этом случае функция $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,0)$ (см. (2.12)) имеет вид $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,0)=\cos\left[nt-2\mu(t,\rho)\right]=\dfrac{R(t)}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}$, где

$$\begin{aligned}R(t)=\Big\{2\left[2\rho-(1+\rho^2)\cos t\right]^2-\left[1+\rho^2-2\rho\cos t\right]^2\Big\}\cos nt\\ +2(1-\rho^2)\left[2\rho-(1+\rho^2)\cos t\right]\sin t\sin nt\\ =\cos(n+2)t-4\rho\cos(n+1)t+6\rho^2\cos nt-4\rho^3\cos(n-1)t+\rho^4\cos(n-2)t.\end{aligned}$$

Также как и в предыдущем примере, воспользовавшись известными фактами из теории разложений рациональных функций на простейшие дроби, придем к представлению

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,0)=\frac{A_1}{1+\rho^2-2\rho\cos t}+\frac{A_2}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}+g(t),\quad g\in\mathcal{C}_n,\tag{4.14}$$

где $\mathcal{C}_n$ — подпространство косинус-полиномов порядка не выше n, A_1, A_2 — некоторые величины, не зависящие от t. Поиском этих величин сейчас займемся, исходя из утверждения: *выражение*

$$\frac{\cos(n+2)t-4\rho\cos(n+1)t+6\rho^2\cos nt-4\rho^3\cos(n-1)t+\rho^4\cos(n-2)t}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}$$
$$-\frac{A_1}{1+\rho^2-2\rho\cos t}-\frac{A_2}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}\tag{4.15}$$

представляет собой некоторый косинус-полином порядка не выше n.

Рассмотрим сначала случай $n \geq 3$. Замена $x = \cos t$ позволяет сформулировать утверждение (4.15) в эквивалентной форме: *дробь*

$$\frac{T_{n+2}(x) - 4\rho T_{n+1}(x) + 6\rho^2 T_n(x) - 4\rho^3 T_{n-1}(x) + \rho^4 T_{n-2}(x) - (1+\rho^2-2\rho x)A_1 - A_2}{(1+\rho^2-2\rho x)^2} \tag{4.16}$$

является алгебраическим полиномом степени n.

Напомним, что выше через T_k, U_k были обозначены многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Заметим, что утверждение (4.16) равносильно тому, что многочлен $w(x) = T_{n+2}(x) - 4\rho T_{n+1}(x) + 6\rho^2 T_n(x) - 4\rho^3 T_{n-1}(x) + \rho^4 T_{n-2}(x) - (1+\rho^2-2\rho x)A_1 - A_2$, расположенный в числителе дроби (4.16), имеет в точке $x_\rho = (\rho + 1/\rho)/2$ ноль второго порядка, т.е. $w(x_\rho) = w'(x_\rho) = 0$. Отсюда на основе (4.10), (4.11) и формулы $T'_{k+1}(x) = (k+1)U_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ (см. [15, гл. 1, §1, (13)]), находим $A_1 = \dfrac{\left(1-\rho^2\right)^2\left[(n-2)\,\rho^2 - n - 2\right]}{2\rho^{n+2}}$, $A_2 = \dfrac{\left(1-\rho^2\right)^4}{2\rho^{n+2}}$. Следовательно, при $n \geq 3$ утверждение (4.14) преобразуется к виду

$$\frac{2\rho^{n+2}}{\left(1-\rho^2\right)^2}\cos\left[nt - 2\mu(t,\rho)\right] = \frac{(n-2)\,\rho^2 - n - 2}{1+\rho^2-2\rho\cos t} + \frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{\left(1+\rho^2-2\rho\cos t\right)^2} + g^*(t), \quad g^* \in \mathcal{C}_n. \tag{4.17}$$

Исходя из (4.15) несложно убедиться, что равенство (4.17) справедливо и при $n = 0, 1, 2$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение, в котором используется обозначение

$$f_{\rho,n}(x) = \frac{(n-2)\,\rho^2 - n - 2}{1+\rho^2-2\rho x} + \left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho x}\right)^2. \tag{4.18}$$

Следствие 2. *При любых* $\rho \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *выполняются равенства*

$$E_n(f_{\rho,n})_{C[-1,1]} = E_{n+1}(f_{\rho,n})_{C[-1,1]} = \frac{2|\rho|^{n+2}}{\left(1-\rho^2\right)^2}.$$

Напомним (см. [18, прилож. 7 к гл. 4, с. 398–402; 20, формула (4)]), что ядро Пуассона K_ρ, соответствующее краевой задаче для бигармонического уравнения в единичном круге с нулевой нормальной производной на границе, имеет вид $K_\rho(t) = \dfrac{(1-\rho^2)^2(1-\rho\cos t)}{2(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}$.

М. Ш. Шабозов [20] нашел величины наилучшего интегрального приближения и наилучшего одностороннего интегрального приближения на периоде ядра K_ρ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного.

Ядро K_ρ можно представить в виде [20, формула (8)]

$$K_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)^2}{4(1+\rho^2-2\rho\cos t)} + \frac{(1-\rho^2)^3}{4(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}.$$

Заметим, что $\mathcal{L}_{\rho,n}(t) = f_{\rho,n}(\cos t) = \dfrac{(n-2)\,\rho^2 - n - 2}{1+\rho^2-2\rho\cos t} + \dfrac{\left(1-\rho^2\right)^2}{\left(1+\rho^2-2\rho\cos t\right)^2}$ — линейная комбинация ядер Пуассона для гармонического и бигармонического уравнений, а именно $\mathcal{L}_{\rho,n}(t) = \dfrac{4}{1-\rho^2}K_\rho(t) - \dfrac{2(n-1)(1-\rho^2)+8}{1-\rho^2}P_\rho(t)$. Следствие 2 равносильно тому, что при любых $\rho \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$E_n\Big(K_\rho - \frac{(n-1)(1-\rho^2)+4}{2}P_\rho\Big)_{C_{2\pi}} = E_{n+1}\Big(K_\rho - \frac{(n-1)(1-\rho^2)+4}{2}P_\rho\Big)_{C_{2\pi}} = \frac{|\rho|^{n+2}}{2(1-\rho^2)}. \tag{4.19}$$

Приведем один результат Н. И. Ахиезера, касающийся оценки величины наилучшего равномерного приближения алгебраическими полиномами на отрезке $[-1,1]$ линейной комбинации двух рациональных дробей

$$\Phi_{a,A,A'}(x) = \frac{A(a^2-1)^2}{(x-a)^2} + \frac{A'(a^2-1)}{x-a}. \tag{4.20}$$

Теорема A [2, гл. 2, п. 38]. *Пусть A, A', $a>1$ — данные ненулевые вещественные числа. Тогда при достаточно большом n*

$$E_n(\Phi_{a,A,A'})_{C[-1,1]} = \frac{|A|\sqrt{a^2-1}}{2(a+\sqrt{a^2-1})^n}\left| n + \frac{2aA-A'}{A\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{\Big(n+\frac{2aA-A'}{A\sqrt{a^2-1}}\Big)^2 + \frac{1}{a^2-1}}\right|(1+\varepsilon_n), \tag{4.21}$$

где

$$|\varepsilon_n| < \frac{(a-\sqrt{a^2-1})^n}{4(a-1)\Big(n+\dfrac{2aA-A'}{A\sqrt{a^2-1}}\Big)^2}. \tag{4.22}$$

Преобразуем неравенство (4.22), воспользовавшись формулой (1.2), из которой вытекают равенства $a=\dfrac{1+\rho^2}{2\rho}$, $a^2-1=\Big(\dfrac{1-\rho^2}{2\rho}\Big)^2$, $\sqrt{a^2-1}=\dfrac{1-\rho^2}{2\rho}$, $a+\sqrt{a^2-1}=\dfrac{1}{\rho}$, $a-\sqrt{a^2-1}=\rho$. С помощью этих равенств перепишем (4.21) и (4.22) в терминах параметров $\rho\in(0,1)$, A, A':

$$E_n(\Phi_{a,A,A'})_{C[-1,1]}$$

$$= \frac{|A|\rho^{n-1}(1-\rho^2)}{4}\left| n+2\frac{(1+\rho^2)A-\rho A'}{A(1-\rho^2)} + \sqrt{\Big(n+2\frac{(1+\rho^2)A-\rho A'}{A(1-\rho^2)}\Big)^2 + \Big(\frac{2\rho}{1-\rho^2}\Big)^2}\right|(1+\varepsilon_n),$$

$$|\varepsilon_n| < \frac{\rho^{n+1}}{2\left[n(1-\rho)^2+2(1+\rho^2)-2\rho A'/A\right]^2}. \tag{4.23}$$

Заметим, что при $A=2\rho$, $A'=n+2-(n-2)\rho^2$, $a=\dfrac{1+\rho^2}{2\rho}$, $\rho\in(0,1)$ функции $f_{\rho,n}$, $\Phi_{a,A,A'}$, заданные формулами (4.18), (4.20), связаны равенством $\Phi_{a,A,A'}(x)=\dfrac{1-\rho^2}{2\rho}f_{\rho,n}(x)$, при этом знаменатель дроби в правой части неравенства (4.23) обращается в ноль.

Авторы искренне признательны профессору Ивану Владимировичу Тихонову, внимательно прочитавшему работу и сделавшему ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Akhiezer N.** Sur la valeur asimptoticue de la meilleure approximation de quelques fractions par des polynômes // Compt. Rend. Acad. Sci. 1930. Vol. 191. P. 991–993.
2. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во тех.-теорет. лит-ры, 1947. 323 с.
3. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 19–37.
4. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Об одном результате Геронимуса // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16, вып. 4. С. 54–64.
5. **Барабошкина Н.А.** Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.

6. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений : в 4 т. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). М.: АН СССР, 1952. 581 с.
7. **Бернштейн С.Н.** Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л.; М.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1937. 203 с.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: пер. с англ. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
9. **Dzjadyk V.K.** On a problem of Chebyshev and Markov // Analysis Math. 1977. Vol. 3. P. 171–175. doi: 10.1007/BF02297689 .
10. **Лебедев В.И.** Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 21–66.
11. **Лукашов А.Л.** Алгебраические дроби Чебышева – Маркова на нескольких отрезках // Analysis Math. 1998. Vol. 24. P. 111–130. doi: 10.1007/BF02771077 .
12. **Марков А.А.** Определение некоторой функции по условию наименее уклоняться от нуля // Сообщ. и протоколы заседаний мат. о-ва при Императорском харьковском ун-те, 1884. I. С. 83–92.
13. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
14. **Никольский С.М.** Курс математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1990. 528 с.
15. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: пер.с польск. М.: Наука, 1983. 384 с.
16. **Русак В.Н.** Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979. 176 с.
17. **Szegö G.** On a problem of the best approximation // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1964. Vol. 27, Is. 3. P. 193–198. doi: 10.1007/BF02993216.
18. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики: учеб. пособие для вузов. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.
19. **Чебышев П.Л.** Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, 1948. Т. 2: Математический анализ. 520 с. Т. 3: Математический анализ. 414 с.
20. **Шабозов М.Ш.** Наилучшее и наилучшее одностороннее приближения ядра бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47, № 11. С. 1549–1557.

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Поступила 17.10.2016

Kryakin, Yuriy
dr hab.
Mathematical Institute University of Wroclaw
Wroclaw, Poland
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

REFERENCES

1. Akhiezer N. Sur la valeur asimptoticue de la meilleure approximation de quelques fractions par des polynômes. *Compt. Rend. Acad. Sci.*, 1930, vol. 191, pp. 991–993.
2. Achieser N.I. *Theory of approximation*, Reprint of the 1956, New York: Dover Publ., Inc., 1992, 307 p. ISBN: 0486671291 . Original Russian text published in *Lektsii po teorii approksimatsii.* Moscow, Leningrad: OGIZ Publ., 1947, 323 p.
3. Babenko A.G., Kryakin Yu.V. Integral approximation of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. 19–38. doi: 10.1134/S0081543809050022 .
4. Babenko A.G., Kryakin V.Yu., Yudin V.A. On a result by geronimus. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 37–48. doi: 10.1134/S008154381105004X .
5. Baraboshkina N.A. Approximation of harmonic functions by algebraic polynomials on a circle of radius smaller than one with constraints on the unit circle. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 19, no. 2, 2013, pp. 71–78 (in Russian).

6. Bernstein S.N. Collected Works (Russian): Vol. 1: The constructive theory of functions (1905–1930). U. S. Atomic Energy Commission, Springfield, Va, 1958, 221 p. Sobranie Sochinenii: Tom I. *Konstruktivnaya Teoriya Funktcii* (1905–1930). Transaltion of a publication of the Academy of Sciences of U.S.S.R. Press, 1952, Moscow.
7. Bernstein S.N. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable], Part 1, Moscow, Leningrad: ONTI NKTP SSSR Publ., 1937, 203 p.
8. Zygmund A. *Trigonometric series*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 1959, vol. 1, 383 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady.* Vol. 1, Moscow, Mir Publ., 1965, 616 p.
9. Dzjadyk V.K. On a problem of Chebyshev and Markov. *Analysis Math.*, 1977, vol. 3, pp. 171–175. doi: 10.1007/BF02297689 .
10. Lebedev V.I. Extremal polynomials and methods for the optimization of numerical algorithms. *Sb. Math.*, 2004, vol. 195, no. 9–10, pp. 1413–1459. doi: 10.1070/SM2004v195n10ABEH000852 .
11. Lukashov A.L. The algebraic fractions of Chebyshev and Markov on several segments. *Analysis Math.*, 1998, vol. 24, pp. 111–130 (in Russian). doi: 10.1007/BF02771077 .
12. Markov A.A. Determination of a function with respect to the condition to deviate as little as possible from zero. *Communication and Proceedings of the Mathematical Society of the Imperial University of Kharkov*, 1884, I, pp. 83–92.
13. Markov A.A. *Izbrannye trudy po teorii nepreryvnykh drobei i teorii funktsii, naimenee uklonyayushchikhsya ot nulya* [Selected works on the theory of continued fractions and the theory of functions least deviating from zero]. Moscow, Leningrad: Gostechizdat Publ., 1948, 411 p.
14. Nikol'skij S.M. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. Moscow, Nauka Publ. , 1990, vol. 1, 528 p.
15. Paszkowski S. *Vychislitel'nye primenenija mnogochlenov i rjadov Chebyshjova* [Numerical applications of Chebyshev polynomials and series]. Transl. from Polish to Russian, Moscow, Nauka Publ., 1983, 384 p.
16. Rusak V.N. *Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniya* [Rational functions as approximation apparatus]. Minsk, Beloruss. Gos. Univ. Publ., 1979, 176 p.
17. Szegö G. On a problem of the best approximation. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 1964, vol. 27, iss. 3, pp. 193–198. doi: 10.1007/BF02993216 .
18. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 735 p.
19. Chebyshev P.L. *Complete Set of Works.* Moscow, Leningrad: Izd. Akad. Nauk SSSR, Vol. 2: Mathematical analysis, 1947, 520 p; Vol. 3: Mathematical analysis, 1948, 414 p. (in Russian).
20. Shabozov M.Sh. Best approximation and best unilateral approximation of the kernel of a biharmonic equation and optimal renewal of the values of operators, *Ukr. Math. J.* 1995, vol. 47, iss. 11, pp. 1769–1778.

The paper was received by the Editorial Office on October, 17, 2016.

Aleksandr Grigor'evich Babenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: babenko@imm.uran.ru .

Yuriy Kryakin, dr hab., Mathematical Institute of University of Wroclaw, 48-300 Wroclaw, Poland e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl .