ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.658.4

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ВОПРОСЫ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕСОВМЕСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Л. Д. Попов, В. Д. Скарин

Рассматриваются задачи выпуклого программирования, про ограничения которых априори не известно, совместны они или нет. Для численного анализа и поиска обобщенных решений таких задач предлагается использовать симметричную регуляризацию классической функции Лагранжа одновременно как по прямым, так и по двойственным переменным. За счет такой регуляризации минимаксные задачи, порождаемые расширенным Лагранжианом исходной задачи, оказываются всегда разрешимыми и при стремлении параметра регуляризации к нулю дают автоматически либо обычное решение исходной задачи (в случае ее собственности, т. е. разрешимости), либо ее обобщенное решение (в несобственном случае); последнее минимизирует изменения, которые необходимо внести в ограничения исходной задачи для обеспечения их совместности, и в то же время оптимизируют значение ее целевой функции в релаксированной допустимой области. Такие минимаксные задачи могут быть положены в основу формирования новых схем двойственности, по крайней мере для несобственных постановок. Приведены схемы регуляризации, доказаны теоремы сходимости и численной устойчивости метода, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения. Работа развивает ранее опубликованные результаты авторов, полученные ими для задач линейного программирования.

Ключевые слова: выпуклое программирование, двойственность, обобщенные решения, метод регуляризации, метод штрафных функций, лексикографический оптимум.

L. D. Popov, V. D. Skarin. Regularization methods and issues of lexicographic correction for convex programming problems with inconsistent constraints.

We consider convex programming problems for which it is unknown in advance whether their constraints are consistent. For the numerical analysis of these problems, we propose to apply a multistep symmetric regularization of the classical Lagrange function with respect to both primal and dual variables and then to solve the arising minimax problems with a small parameter. The latter problems are always solvable and give either normal decisions of the original problems in the case of their propriety or, in the improper case, generalized solutions that minimize the discrepancies of the constraints and optimize the value of the objective function asymptotically with respect to the parameter. Minimax problems can also form a basis for the construction of new duality diagrams in convex programming, at least for improper settings. Regularization diagrams are provided, a primal minimax setting is written, theorems on the convergence and numerical stability of the method are proved, and an informal interpretation of the generalized solutions is given. The study develops the authors' earlier results obtained for linear programming problems.

Keywords: convex programming, duality, generalized solutions, regularization method, penalty function method.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-214-223

Введение

Задачи условной оптимизации с несовместными системами ограничений представляют собой важный подкласс так называемых несобственных задач математического программирования (МП), систематическое и планомерное изучение которых было начато в 80-х годах прошлого века в монографии [1] и продолжено в целом ряде отечественных и зарубежных публикаций (см. [2–7] и др.). Несовместность ограничений в оптимизационных моделях часто встречается на практике как следствие неточности задания их исходных данных, рассогласования их целей и имеющихся средств для их достижения, наличия у моделируемого объекта реальных

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-07-00266).

противоречий в развитии и функционировании и пр. Центральными пунктами исследований несобственных задач МП являются альтернативные схемы построения двойственности для таких задач [1], связь этих схем с анализом поведения классических численных методов оптимизации в ситуациях, когда модель, к которой они применяются, оказывается несобственной. Для классических методов важно, насколько полную и структурированную информацию они дают прикладному специалисту в качестве помощи ему в организации корректировки структуры модели и/или ее исходных данных, которую ему неизбежно предстоит провести. Особенно интересны численные методы, в которых оптимальная корректировка исходных данных задачи проводится с помощью формальных процедур, учитывающих те или иные критерии качества коррекции, и совмещается с процессом оптимизации целевой функции на релаксированном допустимом множестве [2–4]. В предлагаемой вниманию работе инструментом такого совмещения будут служить симметричная регуляризация функции Лагранжа для исходных постановок [8; 9] и идеи последовательной (лексикографической) оптимизации при построении релаксированого множества [10; 11]. Работа развивает ранее опубликованные результаты авторов, полученные ими для задач линейного программирования (см. [13] и библиографию к ней).

1. Постановка задачи

В качестве исходной рассмотрим задачу нелинейного (выпуклого) программирования, ограничения которой, возможно, несовместны:

$$\min\{f_0(x)\colon f_j(x) \le 0 \ (j = 1, \dots, m), \ x \in \Omega\}; \tag{1}$$

здесь функции $f_j(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, m)$ конечны и выпуклы, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт.

Множество Ω моделирует так называемые “директивные” ограничения, т. е. ограничения, не подлежащие корректировке. Все прочие ограничения-неравенства предполагаются “факультативными”, т. е. в случае противоречивости можно корректировать их правые части, тем самым ослабляя их и формируя непустое релаксированное допустимое множество.

Предположим, что множество индексов $J = \{1, \dots, m\}$ факультативных ограничений разбито на ряд непустых подмножеств J_i $(i = 0, 1, \dots, m_0)$ следующим образом:

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_{m_0}, \qquad J_i \cap J_j = \varnothing \text{ при } i \ne j. \tag{2}$$

Будем считать, что приведенное разбиение отражает приоритетность (важность) соответствующих ограничений для выполнения, причем приоритет падает с ростом номера подсистемы. Коррекция каждой из подсистем означает внесение в них изменений, по-возможности минимальных.

Приоритетность влияет на то, что вначале должны вноситься минимально необходимые изменения в подсистемы с более высоким приоритетом (если такие изменения вообще требуются) и лишь затем — в подсистемы, приоритеты которых ниже. Иными словами, будут последовательно строиться релаксированные множества:

$$\begin{gathered} X_0 = \arg\min\{\|F_0(x)^+\|\colon x \in \Omega\}, \\ X_1 = \arg\min\{\|F_1(x)^+\|\colon x \in X_0\}, \dots, X_{m_0} = \arg\min\{\|F_{m_0}^+(x)\|\colon x \in X_{m_0-1}\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $F_i(x) = (f_j(x))_{j \in J_i}$ — вектор-функции, составленные из левых частей ограничений, входящих в i-ю подсистему $(i = 0, 1, \dots, m_0)$, $a^+ = \max\{0, a\}$ для числа a и $h^+ = (h_1^+, h_2^+, \dots, h_n^+)$ для вектора $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Заключительное множество серии X_{m_0} играет роль допустимого (аппроксимационного или релаксированного) множества в скорректированной исходной постановке

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X_{m_0}\}; \tag{4}$$

при этом одно из решений $\hat{x}$ задачи (4), например минимальное по норме, объявляется аппроксимационным (обобщенным) решением исходной несобственной задачи (1).

Предлагаемая схема развязки “узких” мест противоречивой системы ограничений исходной задачи тесно связана с лексикографическим (последовательным) программированием [10; 11]. Заметим, что требование компактности множества Ω и выпуклости функций $f_i(x)$ обеспечивает достижимость минимумов в задачах (3), так что построение множеств (3) корректно.

Построение релаксационных множеств в геометрическом плане эквивалентно последовательному решению серии задач поиска евклидовых проекций нуль-вектора на выпуклые замкнутые множества:

$$U_0 = \{u\colon \exists x \in \Omega \;\; F_0(x) \le u\},$$
$$U_1 = \{u\colon \exists x \in X_0 \;\; F_1(x) \le u\}, \ldots, U_{m_0} = \{u\colon \exists x \in X_{m_0-1} \;\; F_{m_0}(x) \le u\}.$$

В силу единственности таких проекций найдутся (также единственные и, очевидно, неотрицательные) векторы $\hat{u}_0 = \pi_{U_0}(0)$, $\hat{u}_1 = \pi_{U_1}(0), \ldots, \hat{u}_{m_0} = \pi_{U_{m_0}}(0)$ такие, что множества (3) можно представить в виде

$$\begin{gathered} X_0 = \{x\colon F_0(x) \le \hat{u}_0,\ x \in \Omega\}, \\ X_1 = \{x\colon F_1(x) \le \hat{u}_1,\ x \in X_0\}, \ldots, X_{m_0} = \{x\colon F_{m_0}(x) \le \hat{u}_{m_0},\ x \in X_{m_0-1}\}; \end{gathered} \tag{5}$$

здесь $\pi_B(\cdot)$ — оператор евклидового проектирования на множество B. В частности, заключительное множество серии окажется представимо в виде

$$X_{m_0} = \{x\colon F_0(x) \le \hat{u}_0,\ F_1(x) \le \hat{u}_1, \ldots, F_{m_0}(x) \le \hat{u}_{m_0},\ x \in \Omega\}.$$

Поэтому предлагаемая схема релаксация “факультативных” ограничений действительно сводится к корректировке их правых частей, т. е. к их ослаблению.

Введем дополнительные ограничения на рассматриваемые нами задачи.

Поскольку множество X_{m_0} ограничено, задача (4), аппроксимирующая исходную неразрешимую постановку, заведомо разрешима, а ее оптимальное множество ограничено. Будем также предполагать для задачи (4) выполненными классические условия оптимальности Куна — Таккера, т. е. считать, что функция Лагранжа задачи (4)

$$\hat{L}(x, y) = f_0(x) + \sum_{i=0}^{m_0} (y_i, F_i(x) - \hat{u}_i)$$

имеет седловую точку относительно области $\Omega \times \mathbb{R}^m_+$; здесь вектор $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{m_0}) \in \mathbb{R}^m$ разбит на подвекторы в соответствии с разбиением (2), $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Также будем предполагать выполнимость аналогичных условий Куна — Таккера для решений подзадач (3), записанных в виде

$$\min\bigl\{1/2\,\|F_i(x)^+\|^2 \colon F_0(x) \le \hat{u}_0, \ldots, F_{i-1}(x) \le \hat{u}_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}, \tag{6}$$

и тесно связанных с ними линеаризованных по целевой функции подзадач

$$\min\bigl\{(\hat{u}_i, F_i(x)^+) \colon F_0(x) \le \hat{u}_0, \ldots, F_{i-1}(x) \le \hat{u}_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}, \tag{7}$$

т. е. предполагать, что их стандартные функции Лагранжа также имеют седловые точки в своих областях определения (здесь $i = 1, \ldots, m_0$).

Задачи (7) сконструированы искусственно по задачам (6) таким образом, что имеют одинаковые с ними решения, т. е. если x' — оптимальный вектор задачи (7), то $F_i(x')^+ = \hat{u}_i$, и наоборот. Это следует из свойств евклидовой проекции на выпуклое замкнутое множество. Отмеченное свойство позволяет легко показать, что на самом деле седловые точки функций $\hat{L}(x, y; i)$ и $\hat{L}_0(x, y; i)$ совпадают, так что последние два предположения на самом деле сливаются в одно.

2. Симметричная регуляризация функции Лагранжа

Векторы $\hat{u}_0$, $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{m_0}$ и минимальное по норме решение $\hat{x}$ задачи (4) можно искать последовательно, исходя из их формального определения, данного выше, т. е. решая конечную серию обычных задач выпуклого программирования. Однако эти процессы можно эффективно объединить в один общий вычислительный процесс, и инструментом такого объединения станет функция Лагранжа исходной задачи, симметрично регуляризированная по прямым и двойственным переменным.

Вслед за [4; 13] рассмотрим функцию

$$\mathcal{L}(x, y; \sigma) = L(x, y) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - \frac{\beta_0}{2}\|y_0\|^2 - \frac{\beta_1}{2}\|y_1\|^2 - \ldots - \frac{\beta_{m_0}}{2}\|y_{m_0}\|^2, \tag{8}$$

где $L(x, y) = f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j f_j(x)$ — функция Лагранжа задачи (1), $\sigma = [\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}]$ — набор положительных параметров регуляризации, $\sigma \to +0$.

Функция (8) стандартным образом порождает пару минимаксных задач:

$$P_\sigma\colon \quad \min_{x\in\Omega}\max_{y\geq 0} \mathcal{L}(x, y; \sigma) \qquad \text{и} \qquad D_\sigma\colon \quad \max_{y\geq 0}\min_{x\in\Omega} \mathcal{L}(x, y; \sigma).$$

Поскольку регуляризированная функция Лагранжа (8) сильно выпукла по x при всех фиксированных y и сильно вогнута по y при всех фиксированных x, то задачи P_σ и D_σ находятся в отношении совершенной двойственности [12], т. е. обе они разрешимы, а их оптимальные значения совпадают вне зависимости от того, разрешима или нет исходная задача. Оптимальные векторы задач P_σ и D_σ образуют седловую точку функции (8) относительно области $\Omega \times \mathbb{R}^m_+$.

Ниже мы будем исследовать первую из выписанных минимаксных задач, т. е. задачу

$$P_\sigma\colon \quad \min_{x\in\Omega} \Phi_\sigma(x), \qquad \sigma \to +0, \tag{9}$$

в которой, как нетрудно проверить,

$$\Phi_\sigma(x) = \max_{y\geq 0} \mathcal{L}(x, y; \sigma) = f_0(x) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \sum_{i=0}^{m_0} \frac{1}{2\beta_i}\|F_i^+(x)\|^2.$$

Целью исследования является нахождение таких условий на поведение параметров регуляризации $\sigma = [\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}] \to 0$, которые бы гарантировали сходимость решений x^σ задач P_σ к решению аппроксимирующей задачи (4). Как оказалось, такие условия совпадают с теми, что были найдены авторами ранее для несобственных задач линейного программирования.

3. Вспомогательные оценки

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Взглянем подробнее на аппроксимационную задачу (4), заменив в ней фиксированные правые части ограничений на параметры:

$$\min\{f_0(x)\colon F_0(x) \leq u_0,\ F_1(x) \leq u_1, \ldots, F_{m_0}(x) \leq u_{m_0},\ x \in \Omega\}. \tag{10}$$

В силу компактности Ω функция оптимума этой задачи $v_0(\cdot)$ определена, непрерывна и выпукла на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{U}_*$ всех таких наборов $u = [u_0, u_1, \ldots, u_{m_0}]$, которые обеспечивают совместность ее ограничений. При этом оптимальный вектор коррекции $\hat{u} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{m_0}]$, определяемый соотношениями (4)–(5), лежит в $\mathcal{U}_*$ и $v_0(\hat{u}) = f_0(\hat{x})$.

Оценим значение функции $f_0(x)$ в произвольной точке $x \in \Omega$.

Лемма 1. *Пусть $\hat{x}$ — решение задачи* (4). *Существует такая константа N_0, что при всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство*

$$f_0(\hat{x}) - f_0(x) \le N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

Доказательство. В самом деле, по предположению (см. разд. 1) разрешима не только задача (4), но и задача, двойственная к ней. Пусть $\hat{y} = [\hat{y}_0, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{m_0}]$ — ее минимальный по норме оптимальный вектор. Поскольку всякий оптимальный вектор двойственной задачи ЛП определяет один из субградиентов функции оптимума прямой задачи, то

$$\upsilon_0(u) \ge \upsilon_0(\hat{u}) - \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, u_s - \hat{u}_s) = f_0(\hat{x}) - \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, u_s - \hat{u}_s).$$

Но вектор x удовлетворяет всем ограничениям задачи (10) при $u_s(x) = \hat{u}_s + (F_s(x) - \hat{u}_s)^+$. Следовательно,

$$f_0(x) \ge \upsilon_0(u(x)) \ge \upsilon_0(\hat{u}) - \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, (F_s(x) - \hat{u}_s)^+) \ge \upsilon_0(\hat{u}) - N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|,$$

где $N_0 = \max_s \|\hat{y}_s\|$, что и требовалось. □

Далее рассмотрим задачи (6)

$$\min\bigl\{1/2\,\|F_i(x)^+\|^2 \colon F_0(x) \le u_0, \ldots, F_{i-1}(x) \le u_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}$$

и вспомогательные задачи (7)

$$\min\bigl\{(F_i(x), \hat{u}_i) \colon F_0(x) \le u_0,\ F_1(x) \le u_1, \ldots, F_{i-1}(x) \le u_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}; \tag{11}$$

здесь $i = 1, \ldots, m_0$ и фиксированные правые части $\hat{u}_s$ ограничений также заменены на параметры u_s. Функции оптимума этих задач $v_i(u)$ и $w_i(u)$ (которые для простоты обозначений также будем считать зависящими от полного набора векторов u_s) являются выпуклыми и непрерывными на $\mathcal{U}_*$. При этом $\hat{u} = [\hat{u}, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{m_0}] \in \mathcal{U}_*$ и $2v_i(\hat{u}) = w_i(\hat{u}) = \|\hat{u}_i\|^2$.

В разд. 1 мы предполагали для задач (7) наличие множителей Лагранжа (двойственных переменных) и выполнение для них условий оптимальности в форме условий Куна — Таккера. Это предположение позволяет оценить значение целевой функции задачи (11) в произвольных точках компакта Ω.

Лемма 2. *Константу N_0 из предыдущей леммы можно сделать настолько большой, что при всех $x \in \Omega$ и всех $i = 1, \ldots, m_0$ будут выполнены также неравенства*

$$\|\hat{u}_i\|^2 - (F_i(x), \hat{u}_i) \le N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

Доказательство данной леммы дословно следует схеме, использованной при доказательстве леммы 1.

В заключение оценим поведение отклонений $\|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|$.

Лемма 3. *Пусть константа N_0 определена так, как в предыдущей лемме. Тогда при всех $x \in \Omega$ и всех $i = 1, \ldots, m_0$ выполнены неравенства*

$$\|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|^2 \le \|F_i(x)\|^2 - \|\hat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проследить следующую цепочку соотношений со ссылкой на лемму 2:

$$\|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|^2 \le \|F_i(x)^+ - \hat{u}_i\|^2 = \|F_i(x)^+\|^2 + \|\hat{u}_i\|^2 - 2(F_i(x)^+, \hat{u}_i)$$

$$\le \|F_i(x)^+\|^2 - \|\hat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

□

Значение последней леммы состоит в том, что отклонения $\delta_i(x) = \|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|$ для систем ограничений-неравенств с большими индексами (приоритетом) оценены через точно такие же отклонения для систем ограничений-неравенств с меньшими индексами (приоритетами).

Приведенные леммы несколько модифицированы по сравнению с аналогичными утверждениями, применяемыми авторами при анализе задач линейного программирования.

4. Условия сходимости метода

Как уже отмечалось, условия на поведение параметров регуляризации остаются теми же, что и для задач линейного программирования (см. уже упоминавшуюся работу [13] и библиографию к ней). А именно, параметры регуляризации $\alpha,\ \beta_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$ должны быть бесконечно малыми положительными величинами и

$$\gamma_s = \beta_{s-1}/\beta_s \to 0 \qquad (0 < s \le m_0). \tag{12}$$

Для удобства дальнейшего изучения и, желая подчеркнуть связь предлагаемого подхода с методом линейной свертки критериев в задачах лексикографической оптимизации, перепишем целевую функцию задачи (9) в виде

$$\Psi_\omega(x) = 2\beta_0\Phi_\sigma(x) = \omega_0\|F_0^+(x)\|^2 + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s\|F_s^+(x)\|^2 + \omega_{m_0+1}f_0(x) + \omega_{m_0+2}\|x\|^2,$$

где $\omega_0 = 1,\ \omega_1 = \beta_0/\beta_1,\ \omega_2 = \beta_0/\beta_2, \ldots, \omega_{m_0} = \beta_0/\beta_{m_0},\ \omega_{m_0+1} = 2\beta_0,\ \omega_{m_0+2} = \alpha\beta_0$. В силу условий (12) параметры ω_s также являются бесконечно малыми положительными величинами и также

$$\omega_s/\omega_{s-1} \to 0 \qquad (s = 2, 3, \ldots, m_0 + 2). \tag{13}$$

Перейдем к анализу свойств последовательности x^σ решений задач (9).

Сразу оговорим, что все последующие доказательства в целом следуют схеме аналогичных доказательств, проведенных авторами ранее при анализе линейного случая. Изменения и дополнения касаются включения в эти схемы свойств операции положительной срезки векторов (операции евклидовой проекции вектора на неотрицательный ортант соответствующего евклидова пространства), что необходимо при переходе от задач с ограничениями-равенствами, рассматриваемыми в линейном случае, к оптимизационным задачам с ограничениями-неравенствами, рассматриваемыми в данной работе. Также были приняты несколько иные исходные предположения (в частности, предположения об ограниченности директивной области Ω), позволяющие избежать ссылки на лемму Хоффмана, существенно используемую при анализе линейного случая, но неприменимую для нелинейных задач. Роль указанных изменений и дополнений будет отчетливо видна уже при доказательстве первой из последующих лемм.

Покажем вначале, что $\|(F_s(x^\sigma) - \hat{u}_s)^+\| \to 0$ $(0 \le s \le m_0)$, где $\hat{u}_s$ взяты из (4), (5). Для этого, как и ранее, воспользуемся методом математической индукции.

Базой этой индукции служит следующая лемма (доказывается полностью).

Лемма 4. *Пусть параметры регуляризации* $\alpha,\ \beta_0,\ \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$ *являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие* (12). *Тогда оптимальный вектор* x^σ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $\delta_0(\sigma) = \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в линейном случае, начнем с того, что по определению элементов x^σ имеем: $\Psi_\omega(x^\sigma) = \min\limits_{x\in\Omega} \Psi_\omega(x) \le \Psi_\omega(\hat{x})$, откуда вытекает неравенство

$$\|F_0^+(x^\sigma)\|^2 - \|\hat{u}_0\|^2 \le \omega_{m_0+1}(f(\hat{x}) - f(x^\sigma)) + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|F_s^+(x^\sigma)\|^2 + \omega_{m_0+2}\|\hat{x}\|^2.$$

Поскольку вектор $\hat{u}_0$ является евклидовой проекцией нуль-вектора на выпуклое замкнутое множество $U_0 = \{u\colon \exists x \in \Omega\ \ F_0(x) \le u\}$, то имеем еще одно неравенство

$$\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\|^2 \le \|F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0\|^2 \le \|F_0(x^\sigma)^+\|^2 - \|\hat{u}_0\|^2.$$

Отметим, что в нем мы дополнительно воспользовались свойствами операции положительной срезки векторов.

Далее применяем лемму 1 (она адаптирована к нелинейным задачам с ограничениями-неравенствами). Получаем третье неравенство

$$\omega_{m_0+1}(f(\hat{x}) - f(x^\sigma)) \le \omega_{m_0+1} N_0 \Big(\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|F_s^+(x^\sigma)\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|\hat{u}_s\| \Big).$$

Наконец, выделяя полные квадраты, получаем

$$\omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \|F_s^+(x^\sigma)\| - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|F_s^+(x^\sigma)\|^2$$

$$= \omega_{m_0+1} \left[N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} - \sum_{s=1}^{m_0} \left(\sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_{m_0+1}}} \|F_s^+(x^\sigma)\| - N_0 \sqrt{\frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}} \right)^2 \right]$$

$$\le \omega_{m_0+1} N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}.$$

Складывая отдельно левые и правые части четырех выписанных выше неравенств, приходим к соотношению

$$\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\|^2$$

$$\le \omega_{m_0+1} N_0 \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 + \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \left(\|\hat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \right) + \omega_{m_0+2}\|\hat{x}\|^2.$$

По условиям (12), (13) и в виду ограниченности множества Ω найдется такая константа N_1, что последние три слагаемые не превосходят $N_1\omega_1$. Поэтому

$$\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\|^2 \le \omega_{m_0+1} N_0 \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| + N_1\omega_1,$$

и значит найдется такая константа N_2, что

$$\delta_0(\sigma) = \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| \le \frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2}\right)^2 + N_1\omega_1} \le N_2\sqrt{\omega_1} \to 0.$$

Здесь также применены условия (12), (13). □

Перейдем к обоснованию шага индукции.

Следующую лемму приведем уже без доказательства (оно проводится по схеме, сходной с доказательством соответствующих лемм в линейном случае с уже продемонстрированными выше поправками и изменениями, вызванными наличием в исходной задаче ограничений-неравенств).

Лемма 5. *Пусть выполнены предположения предыдущей леммы и оптимальный вектор x^σ задачи* (9) *удовлетворяет соотношениям*

$$\delta_s(\sigma) = \|(F_s(x^\sigma) - \hat{u}_s)^+\| \to 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, k < m_0).$$

Тогда $\delta_{k+1}(\sigma) = \|(F_{k+1}(x^\sigma) - \hat{u}_{k+1})^+\| \to 0.$

Леммы 4, 5 завершают математическую индукцию и с учетом компактности Ω позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть параметры регуляризации* α, β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$ *являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие* (12)*. Тогда оптимальный вектор x^σ задачи* (9) *удовлетворяет соотношению*

$$\rho(x^\sigma, X_{m_0}) \to 0.$$

Исследуем теперь поведение величин $f_0(x^\sigma)$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1*. Тогда оптимальный вектор x^σ задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $f(x^\sigma) \to f(\hat{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\hat{x}(u^\sigma)$ — минимальное по норме решение задачи (10), отвечающее правым частям $u_s = u_s^\sigma = F_s(x^\sigma)^+$, где $s = 0, 1, \ldots, m_0$. Поскольку вектор x^σ удовлетворяет ограничениям этой задачи, то $f(x^\sigma) \geq \upsilon_0(u^\sigma)$. Вместе с тем

$$\Psi_\omega(x^\sigma) = \min_{x \in \Omega} \Psi_\omega(x) \leq \Psi_\omega(\hat{x}(u^\sigma)).$$

Отсюда, с учетом того что первые $m_0 + 1$ слагаемых в выражениях для $\Psi_\omega(x^\sigma)$ и $\Psi_\omega(\hat{x}(u^\sigma))$ связаны неравенствами $\omega_s \|F_s(\hat{x}(u^\sigma))^+\| \leq \omega_s \|F_s(x^\sigma)^+\|$ $(s = 0, 1, \ldots, m_0)$, получаем

$$0 \leq f(x^\sigma) - \upsilon_0(u^\sigma) \leq \frac{\omega_{m_0+2}}{\omega_{m_0+1}} (\|\hat{x}(u^\sigma)\|^2 - \|x^\sigma\|^2).$$

Осталось перейти к пределу в левой и правой частях этого соотношения и учесть теорему 1, непрерывность функции оптимума $\upsilon_0(\cdot)$ и условия на параметры регуляризации (13). □

Соединяя утверждения теоремы 1 и леммы 6, получаем итоговое утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $[x^\sigma, y^\sigma]$ *— седловая точка симметрично регуляризованной функции Лагранжа* (8) *относительно области* $\Omega \times \mathbb{R}^m_+$*. Тогда вектор x^σ является решением задачи* (9) *и выполняются соотношения:*

$$f(x^\sigma) \to f(\hat{x}), \qquad \beta_s y_s^\sigma = F_s(x^\sigma)^+ = u_s^\sigma \to \hat{u}_s \qquad (s = 0, 1, \ldots, m_0),$$

где $\hat{x}$ — нормальное решение задачи (4)*, векторы $\hat{u}_s$ взяты из соотношений* (4), (5).

5. Заключение

В работе результаты авторов по применению симметричной регуляризации классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным к поиску обобщенных решений несобственных задач линейного программирования перенесены на задачи нелинейного (выпуклого) программирования. Показано, что метод автоматически приводит к обычному решению нелинейной задачи в случае совместности ее ограничений и к ее обобщенному решению в случае, когда ее ограничения противоречивы. Приведены теоремы сходимости и содержательная интерпретация обобщенного решения в лексикографической постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Ватолин А. А.** Множества разрешимости и коррекция седловых функций и систем неравенств: препринт / Ин-т математики и механики УрО АН СССР. Свердловск, 1989. 90 с.
3. **Попов Л. Д.** Линейная коррекция несобственных минимаксных выпукло-вогнутых задач по максиминному критерию // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 9. С. 1100–1110.
4. **Скарин В. Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
5. **McCormick S. T.** How to compute least infeasible flows // Math. Programming. 1997. Vol. 78, no. 2. P. 179–194.
6. **Vada J., Slupphaug O., Johansen T. A.** Optimal prioritized infeasibility handling in model predictive control: parametric preemptive multiobjective linear programming approach // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 109, no. 2. P. 385–413.
7. **Leon T., Liern V., Vercher E.** Viability of infeasible portfolio selection problems: a fuzzy approach // European J. Oper. Res. 2002. Vol. 139, no. 1. P. 178–189.
8. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
9. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
10. **Еремин И. И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 124–129.
11. **Федоров В. В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
12. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
13. **Popov L.D., Skarin V.D.** On alternative duality and lexicographic correction of right-hand-side vector in improper linear programs of the 1st kind // Proc. V Internat. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2014; Petrovac, Montenegro, September 28 – October 4, 2014). Moscow, 2014. P. 152–153.

Поступила 25.03.2017

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: popld@imm.uran.ru

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi linejnogo i vypuklogo programmirovanija* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 336 p.
2. Vatolin A.A. *Mnozhestva razreshimosti i korrektsiya sedlovykh funktsii i sistem neravenstv* [Solvability sets and correction of saddle functions and inequality systems]. Preprint, Inst. Mat. Mech. Ural Branch Acad. Sci. USSR, Sverdlovsk, 1989, 90 p.
3. Popov L.D. Linear correction of ill-posed convex-concave minimax problems on a maximin criterion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 5, pp. 30–39. doi: 10.1016/0041-5553(86)90037-6 .

4. Skarin V.D. An approach to the analysis of improper problems of linear programming. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 2, pp. 73–79. doi: 10.1016/0041-5553(86)90011-X.
5. McCormick S.T. How to compute least infeasible flows. *Math. Programming*, 1997, vol. 78, no. 2, pp. 179–194. doi: 10.1007/BF02614370.
6. Vada J., Slupphaug O., Johansen T.A. Optimal prioritized infeasibility handling in model predictive control: parametric preemptive multiobjective linear programming approach. *J. Optim. Theory Appl.*, 2001, vol. 109, no. 2, pp. 385–413. doi: 10.1023/A:1017570507125.
7. Leon T., Liern V., Vercher E. Viability of infeasible portfolio selection problems: a fuzzy approach. *European J. Oper. Res.*, 2002, vol. 139, no. 1, pp. 178–189. doi: 10.1016/S0377-2217(01)00175-8.
8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
9. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ehkstremal'nykh zadach. Zadachi minimizatsii v funktsional'nykh prostranstvakh, regulyarizatsiya, approksimatsiya. Uchebnoe posobie* [Methods for solving extremal problems. Minimization problems in function spaces, regularization, approximation. Textbook.] Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p.
10. Eremin I.I. Problems of successive programming. *Siberian Math. J.*, 1973, vol. 14, no. 1, pp. 36–43. doi: 10.1007/BF00967264.
11. Fedorov V.V. *Chislennye metody maksimina* [Numerical methods of maximin]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 280 p.
12. Gol'shtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematical programming and its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 352 p.
13. Popov L.D., Skarin V.D. On alternative duality and lexicographic correction of right-hand-side vector in improper linear programs of the 1st kind. *Proc. V Internat. Conf. on Optimization Methods and Applications* (*OPTIMA*-2014) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 4, 2014), Moscow, 2014, pp. 152–153.

The paper was received by the Editorial Office on March 25, 2017.

Leonid Denisovich Popov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: popld@imm.uran.ru.

Vladimir Dmitrievich Skarin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru.