ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518.454, 517.518.832

ПРЯМАЯ ТЕОРЕМА В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

Н. А. Ильясов

В статье исследуется задача о порядковой точности оценки сверху наилучшего приближения в $L_q(\mathbb{T})$ посредством модуля гладкости l-го порядка (модуля непрерывности при $l=1$) в

$$L_p(\mathbb{T})\colon\ E_{n-1}(f)_q \le C(l,p,q)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N},$$

на классе $M_p(\mathbb{T})$ всех функций $f\in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям

$$a_0(f)=0,\ a_n(f)\downarrow 0,\ b_n(f)\downarrow 0\ (n\uparrow\infty),\ \text{где}\ l\in\mathbb{N},\ 1<p<q<\infty,\ l>\sigma=1/p-1/q,\ \mathbb{T}=(-\pi,\pi].$$

В случае l=1 и $p\ge 1$ указанная оценка впервые установлена П. Л. Ульяновым при доказательстве неравенства разных метрик для модулей непрерывности, а в случае $l>1$ и $p\ge 1$ в силу L_p-аналога неравенства Д. Джексона — С. Б. Стечкина доказательство этой оценки сохраняется. Ниже сформулированы основные результаты, полученные в данной работе. Для того, чтобы функция $f\in M_p(\mathbb{T})$ принадлежала $L_q(\mathbb{T})$, где $1<p<q<\infty$, необходимо и достаточно выполнения условия $\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/n)_p<\infty$, при этом имеют место порядковые равенства

(a) $E_{n-1}(f)_q+n^{\sigma}\omega_l(f;\pi/n)_p\asymp\Big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}$, $n\in\mathbb{N}$;

(b) $n^{-(l-\sigma)}\big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\big)^{1/p}\asymp\Big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}$, $n\in\mathbb{N}$.

При оценке снизу в п. (a) второе слагаемое $n^{\sigma}\omega_l(f;\pi/n)_p$, в общем случае, не допускает исключения. Однако, если последовательность $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ либо последовательность $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет $(B_l^{(p)})$-условию Н. К. Бари, равносильному (S_l)-условию С. Б. Стечкина, то

$$E_{n-1}(f)_q\asymp\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q},\ n\in\mathbb{N}.$$

Оценка сверху в пункте (b), имеющая место для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T})$ при условии сходимости ряда, представляет собой усиленный вариант прямой теоремы. Порядковое равенство (b) показывает, что усиленный вариант является точным в смысле порядка на всем классе $M_p(\mathbb{T})$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль гладкости, прямая теорема в разных метриках, тригонометрический ряд Фурье с монотонными коэффициентами, точное в смысле порядка неравенство на классе.

N. A. Il'yasov. The direct theorem of the theory of approximation of periodic functions with monotone Fourier coefficients in different metrics.

We study the problem of order optimality of an upper bound for the best approximation in $L_q(\mathbb{T})$ in terms of the lth-order modulus of smoothness (the modulus of continuity for $l=1$) in

$$L_p(\mathbb{T})\colon\ E_{n-1}(f)_q \le C(l,p,q)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N},$$

on the class $M_p(\mathbb{T})$ of all functions $f\in L_p(\mathbb{T})$ whose Fourier coefficients satisfy the conditions

$$a_0(f)=0,\ a_n(f)\downarrow 0,\ \text{and}\ b_n(f)\downarrow 0\ (n\uparrow\infty),\ \text{where}\ l\in\mathbb{N},\ 1<p<q<\infty,\ l>\sigma=1/p-1/q,\ \text{and}\ \mathbb{T}=(-\pi,\pi].$$

For $l=1$ and $p\ge 1$, the bound was first established by P. L. Ul'yanov in the proof of the inequality of different metrics for moduli of continuity; for $l>1$ and $p\ge 1$, the proof of the bound remains valid in view of the L_p-analog of the Jackson–Stechkin inequality. Below we formulate the main results of the paper. A function

$f \in M_p(\mathbb{T})$ belongs to $L_q(\mathbb{T})$, where $1 < p < q < \infty$, if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/n)_p < \infty$, and the following order inequalities hold:

(a) $E_{n-1}(f)_q + n^{\sigma}\omega_l(f;\pi/n)_p \asymp \big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/q}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $n^{-(l-\sigma)}\big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(l-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\big)^{1/p} \asymp \big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/q}$, $n \in \mathbb{N}$.

In the lower bound in inequality (a), the second term $n^{\sigma}\omega_l(f;\pi/n)_p$ generally cannot be omitted. However, if the sequence $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ or the sequence $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ satisfies Bari's $(B_l^{(p)})$-condition, which is equivalent to Stechkin's (S_l)-condition, then

$$E_{n-1}(f)_q \asymp \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

The upper bound in inequality (b), which holds for any function $f \in L_p(\mathbb{T})$ if the series converges, is a strengthened version of the direct theorem. The order inequality (b) shows that the strengthened version is order-exact on the whole class $M_p(\mathbb{T})$.

Keywords: best approximation, modulus of smoothness, direct theorem in different metrics, trigonometric Fourier series with monotone coefficients, order-exact inequality on a class.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25, 42A32

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-144-158

Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p = \Big(\pi^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$;

$L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$;

$E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in \mathbb{Z}_+$;

$\omega_\ell(f;\delta)_p$ — модуль гладкости ℓ-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, +\infty)$:

$$\omega_\ell(f;\delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^\ell f(\cdot)\|_p \colon h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\},$$

где

$$\Delta_h^\ell f(x) = \sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^{\ell-\nu}\binom{\ell}{\nu} f(x+\nu h), \quad \binom{\ell}{\nu} = \frac{\ell!}{\nu!(\ell-\nu)!}, \quad \nu = \overline{0,\ell}.$$

Следующее утверждение представляет собой прямую теорему в разных метриках теории приближений периодических функций (см., например, [1, теорема B] и библиографию там).

Пусть $1 \le p < q \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$,

$$\gamma(q) = q \quad \text{\textit{при}} \quad q < \infty \quad \text{\textit{и}} \quad \gamma(\infty) = 1, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad \sigma = 1/p - 1/q, \quad \ell > \sigma \tag{0.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\sigma-1}\omega_\ell^\gamma\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p < \infty. \tag{0.2}$$

Тогда f почти всюду совпадает с некоторой функцией из $L_q(\mathbb{T})$ (которую после изменения на множестве меры нуль снова обозначим через f) и справедлива оценка

$$E_{n-1}(f)_q \le C_1(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1}\omega_\ell^\gamma\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $C_j(\ell,p,q,\ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные величины, зависящие только от указанных в скобках параметров. В случаях когда в формулах часто используется величина, зависящая от параметров, для сокращения записи эту зависимость указываем один раз, а затем ее подразумеваем, не оговаривая явно; при этом если указанная упрощенная величина умножается на выражение, стоящее в круглых скобках, то между величиной и скобкой ставится знак умножения. Например, при доказательстве леммы 2 в длинной цепочке неравенств величина C_{19} равна $C_{19}(\beta\sigma)$.

Оценка (0.3) в силу L_p-аналога неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [2, § 2, теорема 1, неравенство (2.5); 3, гл. V, п. 5.11, неравенство (1)])

$$E_{n-1}(f)_p \le C_2(\ell)\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.4}$$

следует (см. [1, введение, абзац после теоремы B]) из неравенства разных метрик для наилучших приближений Конюшкова — Стечкина [4, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)] при $q = \infty$ и П. Л. Ульянова [5, § 4, теорема 4, неравенство (4.3)] при $q < \infty$:

$$E_{n-1}(f)_q \le C_3(p,q)\bigg(n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma\sigma-1}E_{\nu-1}^\gamma(f)_p\Big)^{1/\gamma}\bigg), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Оценка (0.3) при $\ell = 1$ и $q < \infty$ впервые установлена в работе П. Л. Ульянова [5, § 4, неравенство (4.9)] (в силу неравенства (0.4) при $\ell > 1$ доказательство этой оценки сохраняется).

В случае $1 < p < q < \infty$ оценка (0.3) допускает усиление, а именно имеет место следующее утверждение: *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и выполнены условия* (0.1), (0.2). *Тогда справедлива оценка*

$$n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p} \le C_4(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.6}$$

В силу справедливости порядкового равенства (см., например, [1, разд. 2, замечание 7], $1 \le p < q \le \infty$, $\ell > \sigma$, $\alpha \in [1,\infty)$)

$$n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^\alpha(f)_q\bigg)^{1/\alpha} \asymp n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha(\ell-\sigma)-1}\omega_\ell^\alpha\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\bigg)^{1/\alpha} \tag{0.7}$$

оценка (0.6) является следствием аналогичной оценки для модулей гладкости, впервые полученной В. И. Колядой [6, разд. 3, теорема 2, неравенство (3.8)] в случае $\ell = 1$ и отмеченной М. Л. Гольдманом [7, разд. 4, доказательство леммы 6, неравенство (11)] в случае $\ell > 1$. Другое доказательство оценки (0.6) (с показателем $\beta = \beta(p) = \max\{2,p\}$ вместо p в левой части) приведено автором в [1, разд. 2, доказательство теоремы 2].

Далее, как обычно, порядковое равенство $\varphi_n \asymp \psi_n$ означает существование таких постоянных $0 < C_5 \le C_6$, зависящих лишь от заданных параметров (в данном случае l, p, q и α), что $C_5\psi_n \le \varphi_n \le C_6\psi_n$.

З а м е ч а н и е 2. Автором [1, теоремы 1 и 2] доказана точность в смысле порядка оценок (0.3) и (0.6) на классе $H_p^\ell[\omega] = \{f \in L_p(\mathbb{T})\colon \omega_\ell(f;\delta)_p \le \omega(\delta),\ \delta \in (0,\pi]\}$, где $\omega \in \Omega_\ell$ — класс функций $\omega = \omega(\delta)$, определенных на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям: $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ и $\delta^{-\ell}\omega(\delta) \downarrow$ при $\delta \uparrow$. В случае $\ell = 1$ из этих результатов (в силу неравенства (0.4) и порядкового равенства (0.7)) следуют соответствующие утверждения, ранее полученные другим способом в [6, разд. 4, теорема 5, порядковое равенство (4.5); теорема 7, неравенство (4.9); теорема 4, неравенство (4.1)].

Для заданного $p \in [1,\infty]$ обозначим через $M_p(\mathbb{T})$ класс всех функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям $a_0(f) = 0$, $a_n(f) \downarrow 0$, $b_n(f) \downarrow 0$ при

$n \uparrow \infty$. Известно (см., например, [8, гл. 1, § 30]), что ряды Фурье таких функций сходятся всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$, так что почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$. Отметим, что условие $a_0(f) = 0$ не умаляет общности формулируемых результатов, поскольку при $a_0(f) \neq 0$, полагая $\overline{f}(x) = f(x) - (1/2)a_0(f)$, имеем $\omega_\ell(f;\delta)_p = \omega_\ell(\overline{f};\delta)_p$ и $E_n(f)_p = E_n(\overline{f})_p$, $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

В настоящей работе рассматривается задача о точности в смысле порядка неравенств (0.3) и (0.6) на всем классе $M_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < q < \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $\ell \in \mathbb{N}$. *Для того чтобы функция* $f \in M_p(\mathbb{T})$ *принадлежала* $L_q(\mathbb{T})$, *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p < \infty, \tag{0.8}$$

при этом имеют место порядковые равенства:

1) $\|f\|_q \asymp \bigg(\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\dfrac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/q}$;

2) $E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\dfrac{\pi}{n}\Big)_p \asymp \bigg(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\dfrac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}$;

3) $n^{-(\ell-\sigma)}\bigg(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p} \asymp \bigg(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\dfrac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}$;

4) $E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\dfrac{\pi}{n}\Big)_p \asymp n^{-(\ell-\sigma)}\bigg(\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 3. При оценке снизу в пп. 2) и 4) теоремы 1 второе слагаемое $n^\sigma\omega_\ell(f;\pi/n)_p$ в общем случае исключить невозможно, поскольку существует функция $g \in M_p(\mathbb{T})$ такая, что $n^\sigma\omega_\ell(g;\pi/n)_p \neq O(E_{n-1}(g)_q)$ (см. ниже разд. 3, п. 1)). Однако при условии определенной регулярности последовательности $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ либо последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ такое исключение возможно.

Для формулировки соответствующего результата обозначим через $B_k^{(\alpha)}$ класс всех последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ($0 < \varphi_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$), удовлетворяющих условию

$$n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha k-1}\varphi_\nu^\alpha\bigg)^{1/\alpha} = O(\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $k \in (0,\infty)$, $\alpha \in [1,\infty)$. При $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha = 1$ это условие совпадает с известным (B_k)-условием Н. К. Бари, которое равносильно (S_k)-условию С. Б. Стечкина: существует $\varepsilon \in (0,k)$ такое, что последовательность $\{n^{k-\varepsilon}\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти возрастает (см., например, [9, § 2]; там же приведены эквивалентные описания этих условий).

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $f \in M_p(\mathbb{T})$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $\ell \in \mathbb{N}$ *и выполнено условие* (0.8). *Если* $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(p)}$ *либо (равносильное условие)* $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(p)}$, *то имеет место порядковое равенство*

$$E_{n-1}(f)_q \asymp \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.9}$$

З а м е ч а н и е 4. Условие $\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(p)}\big(\Leftrightarrow \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(p)}\big)$ гарантирует справедливость оценки $n^\sigma\omega_\ell(f;\pi/n)_p \le C_7(\ell,p,q)E_{n-1}(f)_q$, $n \in \mathbb{N}$, для любой функции f из $M_q(\mathbb{T})$, где $1 < p < q < \infty$, $\ell \in \mathbb{N}$ (см. ниже разд. 2, оценка (2.8)).

З а м е ч а н и е 5. Равносильность условий $\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)}$ и $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)}$, где $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in [1,\infty)$, при $\alpha = 1$ известна (см., например, [3, теорема 7.1.1]). Для случая $p = \infty$ и $\alpha = 1$ эквивалентные утверждения о равносильности указанных условий, выраженные в терминах заданного порядка убывания величин $E_{n-1}(f)_p$ и $\omega_\ell(f;\delta)_p$, содержатся в [10, теорема 3] и [9, § 4, лемма 7] (там же приведены полное доказательство соответствующего результата и подробная история вопроса). Общий случай $\alpha \ge 1$ сводится к случаю $\alpha = 1$ (см. ниже разд. 3, п. 2)). Последний факт отмечен также в [1, разд. 2, замечание 6].

З а м е ч а н и е 6. В связи с утверждением теоремы 2 отметим также следующий факт, который является очевидным следствием п. 3) в утверждении теоремы 1: *для справедливости порядкового равенства* (0.9) *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{E_{n-1}(f)_q\}_{n=1}^\infty \in B_{\ell-\sigma}^{(p)}$. Кроме того, если $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty \in B_\ell^{(p)}$, то в силу (0.9) имеем $\{E_{n-1}(f)_q\}_{n=1}^\infty \in B_{\ell-\sigma}^{(p)}$. С другой стороны, последнее условие гарантирует лишь

$$\Big\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}\Big\}_{n=1}^\infty \in B_{\ell-\sigma}^{(p)}.$$

1. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Следующий результат, принадлежащий Г. Харди и Дж. Литтлвуду (см., например, [8, гл. X, § 3; 11, т. 2, гл. 12, лемма 6.6] является фундаментальным при исследовании свойств функций из $M_p(\mathbb{T})$ в случае $1 < p < \infty$.

Предложение 1. *Пусть* $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ *и* $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; *тогда* $f \in L_p(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty n^{p-2}(a_n + b_n)^p < \infty$, *где* $1 < p < \infty$. *При этом* $a_n = a_n(f)$, $b_n = b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, *и справедливы оценки*

$$C_9(p)\bigg(\sum_{n=1}^\infty n^{p-2}(a_n(f)+b_n(f))^p\bigg)^{1/p} \le \|f\|_p \le C_8(p)\bigg(\sum_{n=1}^\infty n^{p-2}(a_n(f)+b_n(f))^p\bigg)^{1/p}. \tag{1.1}$$

Предложение 2. *Пусть* $d_\nu \ge 0$, $\nu = 1,2,\dots,$ $1 < \lambda < \infty$, $\tau \ne 1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$ *и* $s_n = \sum_{\nu=1}^n d_\nu$ *при* $\tau > 1$, $s_n = \sum_{\nu=n}^m d_\nu$ *при* $\tau < 1$; *тогда*

$$\sum_{n=1}^m n^{-\tau}s_n^\lambda \le C_{10}(\tau,\lambda)\sum_{n=1}^m n^{-\tau}(nd_n)^\lambda. \tag{1.2}$$

Неравенство (1.2) установлено Г. Харди (см., например, [12, теорема 346]).

Предложение 3. *Пусть* $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, *где* $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, *и* $\sum_{n=1}^\infty n^{p-2}(a_n+b_n)^p < \infty$ *при некотором* $p \in (1,\infty)$. *Тогда* $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f)_p \le C_{11}(p)\Bigg(n^{1-1/p}(a_n+b_n) + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{p-2}(a_\nu+b_\nu)^p\bigg)^{1/p}\Bigg), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

При $p \ge 2$ *в правой части* (1.3) *первое слагаемое можно опустить.*

Неравенство (1.3) доказано А. А. Конюшковым [4, § 1, теорема 4, неравенство (1.21); 13, § 2, неравенство (21)].

Предложение 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и имеет ряд Фурье с коэффициентами* $a_n(f)\downarrow$, $b_n(f)\downarrow$ *при* $n\uparrow$; *тогда справедливы оценки*

$$a_n(f) + b_n(f) \le C_{12}(\ell,p)n^{1/p-1}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad \ell \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}; \tag{1.4}$$

$$a_{2n}(f)+b_{2n}(f)\le C_{13}(p)n^{1/p-1}E_n(f)_p,\quad n\in\mathbb{N};\tag{1.5}$$

$$\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}(a_\nu(f)+b_\nu(f))^p\biggr)^{1/p}\le C_{14}(p)E_{[(n+1)/2]}(f)_p,\quad n\in\mathbb{N},\tag{1.6}$$

где $[t]$ — *целая часть числа* t. *В этой оценке при* $p>2$, *вообще говоря, нельзя заменить* $E_{[(n+1)/2]}(f)_p$ *на* $E_n(f)_p$; *при* $p\le 2$ *такая замена возможна и без предположения* $a_n(f)\downarrow$, $b_n(f)\downarrow$.

Оценка (1.4) установлена в [4, § 1, следствие 2, неравенство (1.19)]. Оценка (1.5) получена в [13, § 2, теорема 5, неравенство (19)] (см. также [4, § 1, теорема 3, неравенство (1.12)]. Оценка (1.6) и последующее утверждение доказаны в [13, § 2, теорема 6].

Предложение 5. *Пусть* $1<p<\infty$, $\ell\in\mathbb{N}$; *тогда для любой функции* $f\in M_p(\mathbb{T})$ *справедливы оценки*

$$C_{16}(\ell,p)n^{-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E^p_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/p}\le\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p$$

$$\le C_{15}(\ell,p)n^{-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E^p_{\nu-1}(f)_p\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{1.7}$$

Доказательство предложения 5 приведено в работе В. М. Кокилашвили [14, § 1, теорема 1.1]. Правой оценке в (1.7) предшествовал результат С. Алянчича [15, теорема 1]: $\omega_2(f;\delta)_p=O(\delta)\Rightarrow\omega_1(f;\delta)_p=O(\delta(\ln(\pi e/\delta))^{1/p})$, $\delta\in(0,\pi]$, если учесть классический результат А. Зигмунда [16, теоремы 8 и 8′]: $\omega_2(f;\delta)_p=O(\delta)$, $\delta\in(0,\pi]\Leftrightarrow E_{n-1}(f)_p=O(n^{-1})$, $n\in\mathbb{N}$, где $1\le p\le\infty$. Отметим, что оценки (1.7) являются уточнениями на классе $M_p(\mathbb{T})$ соответствующих неравенств, установленных М. Ф. Тиманом в [17, теорема 1, неравенства (7)] (правая оценка в (1.7) с показателем $\theta=\min\{2,p\}$ вместо p) и [18, неравенство (2)] (левая оценка в (1.7) с показателем $\beta=\max\{2,p\}$ вместо p) для функций $f\in L_p(\mathbb{T})$.

Лемма 1. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $f\in L_q(\mathbb{T})$, $\sigma=1/p-1/q$, $\ell\in\mathbb{N}$; *тогда справедлива оценка*

$$\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q\le C_{17}(\ell,p,q)\Bigl(E_n(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\Bigr),\quad n\in\mathbb{N}.\tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу известных свойств модулей гладкости имеем $\omega_\ell(f;\pi/n)_q\le\omega_\ell(f(\cdot)-S_n(f;\cdot);\pi/n)_q+\omega_\ell(S_n(f;\cdot);\pi/n)_q\le 2^\ell\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_q+\pi^\ell n^{-\ell}\|S_n^{(\ell)}(f;\cdot)\|_q$, где $S_n(f;x)$ — частная сумма порядка $n\in\mathbb{N}$ ряда Фурье функции f. Привлечение неравенства М. Рисса (см., например, [11, т. 1, гл. 7, теорема 6.4]) приводит к оценкам

$$\|\Delta_h^\ell S_n(f;\cdot)\|_p=\|S_n(\Delta_h^\ell f(\cdot))\|_p\le C_{18}(p)\|\Delta_h^\ell f(\cdot)\|_p\ (h\in\mathbb{R}),$$

$$\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_q\le(1+C_{18}(q))E_n(f)_q.$$

Далее в силу неравенства разных метрик Джексона — Никольского и неравенства Никольского — Стечкина (см., например, [3, гл. 4, п. 4.9.2, неравенство (7); п. 4.8.6, неравенство (18)]) получаем

$$\|S_n^{(\ell)}(f;\cdot)\|_q\le 2n^\sigma\|S_n^{(\ell)}(f;\cdot)\|_p\le 2n^\sigma 2^{-\ell}n^\ell\|\Delta^\ell_{\pi/n}S_n(f;\cdot)\|_p\le 2^{-\ell+1}n^{\sigma+\ell}C_{18}(p)$$

$$\times\|\Delta^\ell_{\pi/n}f(\cdot)\|_p\le 2^{-\ell+1}C_{18}(p)n^{\sigma+\ell}\omega_\ell(f;\pi/n)_p.$$

Учитывая приведенные оценки, окончательно имеем $\omega_\ell(f;\pi/n)_q\le 2^\ell(1+C_{18}(q))E_n(f)_q+2^{-\ell+1}\pi^\ell C_{18}(p)n^\sigma\omega_\ell(f;\pi/n)_p$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le \gamma < \beta < \infty$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$; *тогда справедлива оценка*

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\beta\sigma-1} E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta} \le C_{19}^{1/\beta}(\beta\sigma)\left(n^{\sigma} E_n(f)_p + C_{20}^{1/\gamma}(\gamma\sigma)\left(\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\gamma\sigma-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_p\right)^{1/\gamma}\right). \quad (1.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi_n = E_{n-1}(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $m > n$, то найдется $s \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{s-1}n < m \le 2^s n$. Отсюда, в силу $\varphi_n \downarrow$ $(n \uparrow)$, имеем

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\beta\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\beta}\right)^{1/\beta} \le \left(\sum_{\nu=n+1}^{2^s n} \nu^{\beta\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\beta}\right)^{1/\beta} = \left(\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{\nu=2^j n+1}^{2^{j+1}n} \nu^{\beta\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{s-1}\varphi_{2^j n+1}^{\beta}\sum_{\nu=2^j n+1}^{2^{j+1}n} \nu^{\beta\sigma-1}\right)^{1/\beta} \le C_{19}^{1/\beta}(\beta\sigma)\left(\sum_{j=0}^{s-1}(2^j n)^{\beta\sigma}\varphi_{2^j n+1}^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(\sum_{j=0}^{s-1}(2^j n)^{\gamma\sigma}\varphi_{2^j n+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} = C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\gamma\sigma}\varphi_{n+1}^{\gamma} + \sum_{j=1}^{s-1}(2^j n)^{\gamma\sigma}\varphi_{2^j n+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}$$

$$\le C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\gamma\sigma}\varphi_{n+1}^{\gamma} + C_{20}(\gamma\sigma)\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{\nu=2^{j-1}n+1}^{2^j n}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}$$

$$= C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\gamma\sigma}\varphi_{n+1}^{\gamma} + C_{20}\sum_{\nu=n+1}^{2^{s-1}n}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \le C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\sigma}\varphi_{n+1} + C_{20}^{1/\gamma}\left(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\right),$$

где $C_{19}(\beta\sigma) = 2^{\beta\sigma-1}$ при $\beta\sigma \ge 1$ и $C_{19}(\beta\sigma) = (\beta\sigma)^{-1}(2^{\beta\sigma}-1)$ при $\beta\sigma \le 1$, $C_{20}(\gamma\sigma) = \gamma\sigma(1 - 2^{-\gamma\sigma})^{-1}$ при $\gamma\sigma \ge 1$ и $C_{20}(\gamma\sigma) = 2$ при $\gamma\sigma \le 1$. Лемма 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 7. Оценка (1.9) в случае $\gamma = 1$ и $m = +\infty$ следует (возможно, с другими постоянными) из неравенства (2.6) [5, § 2, лемма 8], в котором надо положить $a_k = E_k(f)_p$, $\alpha = \beta\sigma - 1$, $\nu = \beta$. В приведенном доказательстве леммы 2 с некоторыми изменениями используются соответствующие рассуждения из [5, § 2, лемма 8].

Лемма 3. *Пусть* $1 \le \gamma < \beta < \infty$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *и* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ $(0 < \varphi_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty)$; *тогда*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\beta\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\beta}\right)^{1/\beta} \le C_{21}(\gamma,\beta,\sigma)\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}. \quad (1.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\varphi_n \downarrow$ при $n \uparrow$, то при $1 \le \nu \le m$ имеем $\left(\sum_{\mu=1}^{m}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\mu}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \ge \left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\mu}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \ge \varphi_{\nu}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{\gamma\sigma-1}\right)^{1/\gamma} \ge C_{22}^{-1/\gamma}(\gamma\sigma)\nu^{\sigma}\varphi_{\nu}$, где $C_{22}(\gamma\sigma) = \gamma\sigma$ при $\gamma\sigma \ge 1$ и $C_{22}(\gamma\sigma) = 1$ при $\gamma\sigma \le 1$. Учитывая последнюю оценку, получаем

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\beta\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\beta}\right)^{1/\beta} = \left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\gamma}[\nu^{\sigma}\varphi_{\nu}]^{\beta-\gamma}\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_{22}^{1/\gamma-1/\beta}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\gamma}\left[\left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\mu}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\right]^{\beta-\gamma}\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_{22}^{1/\gamma-1/\beta}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\gamma}\left(\sum_{\mu=1}^{m}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\mu}^{\gamma}\right)^{\beta/\gamma-1}\right)^{1/\beta} = C_{22}^{1/\gamma-1/\beta}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}.$$

Лемма 3 доказана. □

2. Доказательства теоремы 1 и теоремы 2

Для удобства изложения примем $c_n(f) = (a_n^2(f) + b_n^2(f))^{1/2}$, где $a_n(f),\ b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in M_p(\mathbb{T})$. Очевидно, что $c_n(f) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ и $2^{-1}(a_n(f) + b_n(f)) \le c_n(f) \le a_n(f) + b_n(f),\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 1.

1) *Достаточность*: если $f \in M_p(\mathbb{T})$ и сходится ряд (0.8), то в силу правой оценки в (1.1) и оценки (1.4) имеем

$$\|f\|_q \le 2C_8(q)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2} c_n^q(f)\bigg)^{1/q} \le 2C_8 C_{12}(\ell,p)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}\Big(n^{1/p-1}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big)^q\bigg)^{1/q}$$

$$= 2C_8C_{12}\cdot\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/q} = C_{23}(\ell,p,q)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/q}.$$

Необходимость: если $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежит $L_q(\mathbb{T})$, то $f \in M_q(\mathbb{T})$ и в силу правой оценки в (1.7), неравенства (1.2) $(\lambda = q/p > 1,\ \tau = q(\ell-\sigma)+1 > 1)$, неравенства (8) из [19]: $\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}E_{n-1}^q(f)_p\Big)^{1/q} \le C_{24}(p,q)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)\Big)^{1/q}$, левой оценки в (1.1) получаем

$$\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/q} \le C_{15}(\ell,p)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1-q\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{q/p}\bigg)^{1/q}$$

$$\le C_{15}C_{25}(\ell,p,q)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}E_{n-1}^q(f)_p\bigg)^{1/q} \le C_{15}C_{25}C_{24}\cdot\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)\bigg)^{1/q}$$

$$\le C_{15}C_{25}C_{24}C_9^{-1}(q)\|f\|_q.$$

2) *Оценка сверху*: в силу оценок (1.3) и (1.4) имеем

$$E_{n-1}(f)_q \le 2C_{11}(q)\bigg(n^{1-1/q}c_n(f) + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\bigg)^{1/q}\bigg)$$

$$\le 2C_{11}C_{12}(\ell,p)\bigg(n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}\bigg),$$

откуда

$$E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le 2C_{11}C_{12}\cdot\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q} + (1+2C_{11}C_{12})n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\le C_{26}(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q},$$

поскольку $(\omega_\ell(f;\delta_1)_p \le \omega_\ell(f;\delta_2)_p$ и $\delta_2^{-\ell}\omega_\ell(f;\delta_2)_p \le 2^\ell\delta_1^{-\ell}\omega_\ell(f;\delta_1)_p$ при $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty)$

$$\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q} \ge \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q} \ge \omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{2n}\Big)_p\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{q\sigma-1}\bigg)^{1/q}$$

$$\ge 2^{-\ell}C_{27}(p,q)n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

где $C_{27}(p,q) = 2^{\sigma-1/q}$ при $q\sigma \le 1$ и $C_{27}(p,q) = ((2^{q\sigma}-1)(q\sigma)^{-1})^{1/q}$ при $q\sigma \ge 1$.

Оценка снизу: в силу правой оценки в (1.7), неравенства (1.2), неравенства (10) из [19]: $\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\le C_{28}(\ell,p,q)\omega_\ell(f;\pi/n)_q,\ n\in\mathbb{N}$, и левой оценки в (1.7) имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\le C_{15}^q(\ell,p)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1-q\ell}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{p\ell-1}E_{\mu-1}^p(f)_p\Big)^{q/p}$$

$$\le 2^{q/p-1}C_{15}^q\cdot\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-q(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{p\ell-1}E_{\mu-1}^p(f)_p\Big)^{q/p}$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1-q\ell}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\nu}\mu^{p\ell-1}E_{\mu-1}^p(f)_p\Big)^{q/p}\Big)$$

$$\le 2^{q/p-1}C_{15}^q\cdot\Big((q(\ell-\sigma))^{-1}n^{-q(\ell-\sigma)}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{p\ell-1}E_{\mu-1}^p(f)_p\Big)^{q/p}+C_{29}(\ell,p,q)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)$$

$$\le 2^{q/p-1}C_{15}^q\cdot\Big((q(\ell-\sigma))^{-1}C_{16}^{-q}(\ell,p)n^{q\sigma}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+C_{29}C_{28}^q\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\Big),$$

откуда, учитывая оценку (1.8), получим

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/q}\le C_{30}(\ell,p,q)\Big(n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\Big)$$

$$\le C_{30}\cdot\Big(n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+C_{17}\Big(E_n(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big)\Big)\le C_{31}(\ell,p,q)\Big(E_{n-1}(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big).$$

3) *Оценка сверху.* В силу неравенства (0.5) при $1<p<q<\infty$ имеем

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\Big)^{1/p}\le 2^{1-1/p}C_3\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big)^{p/q}\Big)^{1/p}$$

$$\le 2^{1-1/p}C_3\cdot\Big[\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big)^{p/q}\Big)^{1/p}$$

$$+C_{32}(\ell,p,q)n^{\ell-\sigma}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\Big],\tag{2.2}$$

где $C_{32}(\ell,p,q)=(p(\ell-\sigma))^{-1/p}$ при $p(\ell-\sigma)\le 1$ и $C_{32}(\ell,p,q)=1$ при $p(\ell-\sigma)\ge 1$.

Оценим сверху второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (2.2). Применяя оценку (1.9) при $\gamma=p>1,\ \beta=q$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big)^{p/q}$$

$$\le C_{19}^{p/q}(q\sigma)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\nu^\sigma E_\nu(f)_p+C_{20}^{1/p}(p\sigma)\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p\sigma-1}E_\mu^p(f)_p\Big)^{1/p}\Big)^p$$

$$\le 2^{p-1}C_{19}^{p/q}\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_\nu^p(f)_p+C_{20}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p\sigma-1}E_\mu^p(f)_p\Big)$$

$$\le 2^{p-1}C_{19}^{p/q}\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_\nu^p(f)_p+C_{20}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{p\sigma-1}E_\mu^p(f)_p\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big)$$

$$\le 2^{p-1}C_{19}^{p/q}\cdot(1+C_{20}C_{32})\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_\nu^p(f)_p.$$

Учитывая полученную оценку в (2.2), имеем

$$n^{\sigma-\ell}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\Big)^{1/p}$$

$$\le C_{33}(\ell,p,q)\Big[n^{\sigma-\ell}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\Big]. \tag{2.3}$$

Далее, привлекая в (2.3) левую оценку в (1.7), неравенство (0.4) и оценку (2.1), окончательно получаем

$$n^{\sigma-\ell}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\Big)^{1/p}$$

$$\le C_{33}\cdot\Big(C_{16}^{-1}(\ell,p)n^{\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+C_2(\ell)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/q}\Big)$$

$$\le C_{33}\cdot\big(2^{\ell}C_{16}^{-1}C_{27}^{-1}(p,q)+C_2\big)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/q}.$$

Оценка снизу. В силу оценки снизу в порядковом равенстве 2) из утверждения теоремы 1 имеем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/q}\le C_{34}(\ell,p,q)\Big(E_{n-1}(f)_q+n^{\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Требуемая оценка сверху первого слагаемого в правой части (2.4) очевидна, поскольку в силу $E_n(f)_q\downarrow\ (n\uparrow)$ имеем

$$n^{\sigma-\ell}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\Big)^{1/p}\ge C_{35}(\ell,p,q)E_{n-1}(f)_q, \tag{2.5}$$

где $C_{35}(\ell,p,q)=(p(\ell-\sigma))^{-1/p}$ при $p(\ell-\sigma)\ge 1$ и $C_{35}(\ell,p,q)=1$ при $p(\ell-\sigma)\le 1$.

Для оценки сверху второго слагаемого в правой части (2.4) предварительно докажем справедливость неравенства

$$E_{n-1}(f)_p\le C_{36}(\ell,p,q)n^{-\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Действительно, в силу оценки (1.3), оценки (1.4), неравенства (11) из [19]:

$$n^{\sigma}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\le\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N},$$

и неравенства (см. [19, доказательство неравенства (10)]): $\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\le C_{37}(\ell,q)\times\omega_\ell(f;\pi/n)_q$, $n\in\mathbb{N}$, получаем

$$E_{n-1}(f)_p\le 2C_{11}(p)\Big(n^{1-1/p}c_n(f)+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\Big)$$

$$\le 2C_{11}(p)\biggl(C_{12}(\ell,q)n^{-\sigma}\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q+n^{-\sigma}\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\biggr)^{1/q}\biggr)$$

$$\le 2C_{11}(p)\bigl(C_{12}(\ell,q)+C_{37}(\ell,q)\bigr)n^{-\sigma}\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q,$$

откуда и следует требуемое неравенство (2.6).

Далее в силу правой оценки в (1.7), неравенства (2.6) и порядкового равенства (0.7) (полагаем $\alpha=p$) имеем

$$n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\le C_{15}(\ell,p)n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\biggr)^{1/p}\le C_{15}C_{36}n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\omega_\ell^p\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_q\biggr)^{1/p}$$

$$\le C_{15}C_{36}C_{38}(\ell,p,q)n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\biggr)^{1/p},$$

откуда

$$\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\le C_{39}(\ell,p,q)n^{-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\biggr)^{1/p}. \tag{2.7}$$

Учитывая неравенства (2.5) и (2.7) в (2.4), получим требуемую оценку снизу в порядковом равенстве 3):

$$\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q}\le C_{34}\cdot(C_{35}^{-1}+C_{39})n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\biggr)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}.$$

4) Это порядковое равенство следует из сопоставления 2) и 3). Оценка сверху в 4) была непосредственно установлена выше при доказательстве оценки снизу в 3).

Теорема 1 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $1<p<q<\infty$, $f\in M_p(\mathbb{T})$, $\ell\in\mathbb{N}$, $\sigma=1/p-1/q$ и выполнено условие (0.8), обеспечивающее включение $f\in M_q(\mathbb{T})$. Предварительно докажем, что если $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty\in B_\ell^{(p)}$, то имеет место оценка

$$n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\le C_{40}(\ell,p,q)E_n(f)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.8}$$

В силу правой оценки в (1.7) и условия $\{E_{n-1}(f)_p\}\in B_\ell^{(p)}$ имеем

$$n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\le 2^\ell n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{2n}\Bigr)_p\le 2^\ell n^\sigma C_{15}(\ell,p)(2n)^{-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{2n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\biggr)^{1/p}$$

$$\le 2^\ell C_{15}C_{41}(\ell,p)n^\sigma E_{2n-1}(f)_p. \tag{2.9}$$

Оценим сверху $E_{2n-1}(f)_p$. В силу оценки (1.3), оценки (1.5), неравенства (11) из [19] (см. выше доказательство неравенства (2.6)) и оценки (1.6) получаем

$$E_{2n-1}(f)_p\le 2C_{11}(p)\biggl((2n)^{1-1/p}c_{2n}(f)+\biggl(\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\biggr)^{1/p}\biggr)$$

$$\le 2C_{11}\cdot\biggl((2n)^{1-1/p}C_{13}(q)n^{1/q-1}E_n(f)_q+(2n)^{-\sigma}\biggl(\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\biggr)^{1/q}\biggr)$$

$$\le 2C_{11}\cdot\bigl(2^{1-1/p}C_{13}n^{-\sigma}E_n(f)_q+2^{-\sigma}C_{14}(q)n^{-\sigma}E_n(f)_q\bigr)=2C_{11}\cdot\bigl(2^{1-1/p}C_{13}+2^{-\sigma}C_{14}\bigr)n^{-\sigma}E_n(f)_q,$$

откуда
$$n^{\sigma}E_{2n-1}(f)_p \le C_{42}(p,q)E_n(f)_q, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$
Учитывая полученную оценку (2.10) в (2.9), приходим к оценке (2.8).

Требуемая оценка снизу в (0.9) следует из порядкового равенства в п. 2) утверждения теоремы 1 с учетом оценки (2.8):
$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\right)^{1/q} \asymp E_{n-1}(f)_q + n^{\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le \big(1+C_{40}(\ell,p,q)\big)E_{n-1}(f)_q.$$
Оценка сверху в (0.9) содержится в утверждении (0.3) (см. введение), а для случая функций $f \in M_p(\mathbb{T})$ ее доказательство (без привлечения неравенства (0.5)) приведено в п. 2) доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана. $\square$

3. Необходимые комментарии и замечания

1) В общем случае оценка (2.8) не имеет места на всем классе $M_p(\mathbb{T})$, что подтверждается приведенным ниже примером. Положим
$$g(x;p;\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \ \text{где } a_n = a_n(p;\alpha) = n^{-(1/p'+\alpha)}, \ \alpha \in (0,+\infty), \ 1/p + 1/p' = 1.$$
Поскольку
$$a_n \downarrow 0 \ (n\uparrow\infty) \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p\alpha+1)} < \infty,$$
то в силу предложения 1 имеем $g \in M_p(\mathbb{T})$, откуда ввиду оценок (1.3) и (1.5) получаем $E_{n-1}(g)_p \asymp n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$. Для значений $\alpha \in (0,\ell]$ в силу оценок (1.7) имеем $\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-\alpha}$ при $\alpha < \ell$ и $\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-\ell}(\ln(en))^{1/p}$ при $\alpha = \ell$.

Допустим теперь, что $\alpha \in (\sigma,+\infty)$, где $\sigma = 1/p - 1/q, \ 1 < p < q < \infty$. В этом случае
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}Fa_n^q = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(q(\alpha-\sigma)+1)} < \infty,$$
и, следовательно, $g \in M_q(\mathbb{T})$ в силу предложения 1. Далее, в силу оценок (1.3) и (1.5) получаем $E_{n-1}(g)_q \asymp n^{-(\alpha-\sigma)}$, $n \in \mathbb{N}$. Для значений $\alpha \in (\sigma,\ell]$ с учетом оценок (1.7) имеем $\omega_\ell(g;\pi/n)_q \asymp n^{-(\alpha-\sigma)}$, $n \in \mathbb{N}$, поскольку $\alpha \in (\sigma,\ell] \Rightarrow 0 < \alpha-\sigma \le \ell-\sigma < \ell$. Таким образом, при $\sigma < \alpha < \ell$ оценка (2.8) имеет место (в этом случае $\big\{E_{n-1}(g)_p\big\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(p)}$):
$$n^{\sigma}\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-(\alpha-\sigma)} \asymp E_{n-1}(g)_q \asymp \omega_\ell(g;\pi/n)_q, \quad n \in \mathbb{N},$$
а при $\sigma < \alpha = \ell$ оценка (2.8) не имеет места (в этом случае $\{E_{n-1}(g)_p\}_{n=1}^{\infty} \notin B_\ell^{(p)}$):
$$n^{\sigma}\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-(\ell-\sigma)}(\ln(en))^{1/p} \asymp E_{n-1}(g)_q(\ln(en))^{1/p} \asymp \omega_\ell(g;\pi/n)_q(\ln(en))^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2) Условия $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(\alpha)}$ и $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(\alpha)}$ равносильны при любых $\alpha \in [1,\infty)$, $1 \le p \le \infty$, $\ell \in \mathbb{N}$. Как было отмечено в замечании 5, равносильность указанных условий при $\alpha > 1$ сводится к известному случаю $\alpha = 1$. Поэтому достаточно установить, что для любой последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 < \varphi_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty)$ при $\alpha > 1$ имеет место соотношение: $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{\varphi_n\} \in B_\ell^{(1)} \equiv B_\ell$, откуда, полагая $\varphi_n = E_{n-1}(f)_p, \ n \in \mathbb{N}$, либо $\varphi_n = \omega_\ell(f;\pi/n)_p, \ n \in \mathbb{N}$, получим
$$\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(1)} \Leftrightarrow \Big\{\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\} \in B_\ell^{(1)} \Leftrightarrow \Big\{\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\} \in B_\ell^{(\alpha)}.$$

Если $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(1)}$, то с учетом леммы 3 (полагаем $\gamma = 1$, $\beta = \alpha$) имеем $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(\alpha)}$ при любом $\alpha > 1$. С другой стороны, если $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(\alpha)}$ при некотором $\alpha > 1$, то очевидно, что $\{\varphi_n^\alpha\} \in B_{\alpha\ell}^{(1)}$. Последнее условие на последовательность $\{\varphi_n^\alpha\}$ равносильно $(S_{\alpha\ell})$-условию: существует $\varepsilon \in (0, \alpha\ell)$ такое, что $\{n^{\alpha\ell-\varepsilon}\varphi_n^\alpha\}$ почти возрастает и, следовательно, последовательность $\{n^{\ell-\varepsilon/\alpha}\varphi_n\}$ также почти возрастает. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет (S_ℓ)-условию, которое равносильно условию $\{\varphi_n\} \in B_\ell \equiv B_\ell^{(1)}$. Отметим также, что ввиду установленного соотношения имеем

$$\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\beta)}, \quad \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\beta)}$$

при любых $\alpha, \beta \in [1, \infty)$ и, следовательно, $\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\beta)}$.

3) В силу (0.4) из оценки (2.7) следует неравенство ($f \in M_q(\mathbb{T})$, $1 < p < q < \infty$)

$$\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_{43}(\ell,p,q)n^{-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(\ell-\sigma)-1}\omega_\ell^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\bigg)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

С другой стороны, применяя (0.3) в оценке (1.8) и учитывая (2.1), получим неравенство

$$\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q \le C_{44}(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

которое при $\ell = 1$ другим способом установлено П. Л. Ульяновым [5, § 4, теорема 4, неравенство (4.4)] (формулировка приведена ранее в [20, § 3, второе неравенство в (3.6′)]; там же указывается, что это неравенство имеет место и при $\ell > 1$).

Неравенство (3.1) для $f \in M_q(\mathbb{T}) \subset M_p(\mathbb{T})$ является обратным (в смысле оценки сверху $\omega_\ell(f;\delta)_p$ посредством $\omega_\ell(f;\delta)_q$) к неравенству (3.2), имеющему место для любой функции $f \in L_q(\mathbb{T})$ при условии сходимости ряда (0.2). Из неравенства (3.1) можно сделать заключение, что при переходе из класса $M_q(\mathbb{T})$ в $M_p(\mathbb{T})$, где $p < q$, гладкость функции увеличивается на величину, не большую, чем $\sigma = 1/p - 1/q$. Последнее утверждение легко просматривается в степенной шкале порядков убывания модулей гладкости, а именно: если $f \in M_q(\mathbb{T})$ и $\omega_\ell(f;\delta)_q \asymp \delta^\alpha$, где $0 < \alpha \le \ell$, то в силу неравенства (3.1)

$$\omega_\ell(f;\delta)_p = O(\delta^{\alpha+\sigma}) \text{ при } \alpha+\sigma < \ell \text{ и } \omega_\ell(f;\delta)_p = O(\delta^{\alpha+\sigma}(\ln(\pi e/\delta))^{1/p}) \text{ при } \alpha+\sigma = \ell,\ \delta \in (0,\pi].$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение $\omega_\ell(f;\delta)_p \ne O(\delta^{\alpha+\sigma+\varepsilon})$, поскольку в противном случае неравенство (3.2) приводит к оценке $\omega_\ell(f;\delta)_q = O(\delta^{\alpha+\varepsilon})$, что противоречит исходному предположению $\omega_\ell(f;\delta)_q \asymp \delta^\alpha$, $\delta \in (0,\pi]$.

Утверждения, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце, для случая неотрицательных и невозрастающих на отрезке $[0,1]$ функций ранее установлены Э. А. Стороженко [21, § 3, абзац после доказательства теоремы 4]. Отметим, что в [21] рассматривается случай $\ell = 1$, а соответствующие выводы основаны на привлечении первого неравенства в утверждении теоремы 4 [21] и неравенства (3.2) при $\ell = 1$.

Для функции $g(x;q;\alpha) = \sum_{n=1}^\infty n^{-(1/q'+\alpha)}\cos nx$, где $\alpha \in (0,+\infty)$, $1/q + 1/q' = 1$, имеем (необходимые обоснования приведены выше в п. 1) этого раздела): $g \in M_q(\mathbb{T})$ и $E_{n-1}(g)_q \asymp n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, откуда $\omega_\ell(g;\pi/n)_q \asymp n^{-\alpha}$ при $\alpha < \ell$, $\omega_\ell(g;\pi/n)_q \asymp n^{-\ell}(\ln(en))^{1/q}$ при $\alpha = \ell$, и, следовательно,

$$\omega_\ell(g;\delta)_q \asymp \delta^\alpha \text{ при } \alpha < \ell \text{ и } \omega_\ell(g;\delta)_q \asymp \delta^\ell(\ln(\pi e/\delta))^{1/q} \text{ при } \alpha = \ell, \quad \delta \in (0,\pi].$$

Далее, поскольку $g \in M_p(\mathbb{T})$ и $E_{n-1}(g)_p \asymp n^{-(\alpha+\sigma)}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-(\alpha+\sigma)}$ при $\alpha+\sigma < \ell$, $\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-\ell}(\ln(en))^{1/p}$ при $\alpha+\sigma = \ell$, $n \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $\omega_\ell(g;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha+\sigma}$ при $\alpha+\sigma < \ell$ и $\omega_\ell(g;\delta)_p \asymp \delta^\ell(\ln(\pi e/\delta))^{1/p}$ при $\alpha+\sigma = \ell$, $\delta \in (0,\pi]$. Таким образом, при $\alpha+\sigma < \ell$ имеем

$$\omega_\ell(g;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha+\sigma} = \delta^\sigma\delta^\alpha \asymp \delta^\sigma\omega_\ell(g;\delta)_q, \quad \delta \in (0,\pi].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов Н.А.** К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 220–234.
2. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
3. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
4. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
5. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 104–131.
6. **Коляда В.И.** О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 117–136.
7. **Гольдман М.Л.** Критерий вложения разных метрик для изотропных пространств Бесова с произвольными модулями непрерывности // Тр. МИАН. 1992. Т. 201. С. 186–218.
8. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
9. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
10. **Лозинский С.М.** Обращение теорем Джексона // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 645–647.
11. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
12. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
13. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
14. **Кокилашвили В.М.** О приближении периодических функций // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
15. **Aljančić S.** On the integral moduli of continuity in L_p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, no. 2. P. 287–294.
16. **Zygmund A.** Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 47–76.
17. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \le p \le \infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46(88), № 1. С. 125–132.
18. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах L_p // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18, № 1. С. 134–137.
19. **Ильясов Н.А.** Обратная теорема в разных метриках теории приближений периодических функций с монотонными коэффициентами Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 153–162.
20. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
21. **Стороженко Э.А.** Теоремы вложения и наилучшие приближения // Мат. сб. 1975. Т. 97(139), № 2(6). С. 230–241.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
Бакинский государственный университет
г. Баку, Азербайджан
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 15.03.2017

REFERENCES

1. Il'yasov N.A. On the direct theorem of approximation theory of periodic functions in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.,* 1997, vol. 219, pp. 215–230.
2. Stechkin S.B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.,* 1951, vol. 15, no. 3, pp. 219–242 (in Russian).
3. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* Oxford, London, New York, Pergamon Press, 1963, 655 p. This translation has been made from A.F. Timan's book entitled *Teoriya priblizheniya funktsii deystvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.

4. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44(86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
5. Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Math. USSR-Sb.,* 1970, vol. 10, no. 1, pp. 103–126.
6. Kolyada V.I. On relations between moduli of continuity in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 4, pp. 127–148.
7. Goldman M.L. An imbedding criterion for different metrics for isotropic Besov spaces with arbitrary moduli of continuity. *Proc. Steklov Inst. Math.,* 1994, vol. 2, pp. 155–181.
8. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series.* Vols. I, II. Oxford, New York: Pergamon Press, 1964, vol. I, 533 p; vol. II, 508 p. Original Russian text published in *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Fiz.-Mat. Giz. Publ., 1961, 936 p.
9. Bari N.K., Stechkin S.B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Trudy Mosk. Mat. Obsh*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
10. Lozinskii S.M. The converse of Jackson's theorems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 1952, vol. 83, no. 5, pp. 645–647 (in Russian).
11. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959; vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady.* M.: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p; vol. II, 538 p.
12. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press, 1934. 314 p. Translated under the title *Neravenstva*, Moscow, Inostran. Literat. Publ., 1948, 456 c.
13. Konyushkov A.A. On best approximations in the conversion of the Fourier coefficients by the method of arithmetic average and on the Fourier series with non-negative coefficients. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 56–78 (in Russian).
14. Kokilashvili V.M. On approximation of periodic functions. *Tr. Tbilis. Mat. Inst.,* 1968, vol. 34, pp. 51–81 (in Russian).
15. Aljančić S. On the integral moduli of continuity inL_p $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1966, vol. 17, no. 2, pp. 287–294.
16. Zygmund A. Smooth functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, no. 1, pp. 47–76.
17. Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in L_p spaces $(1 \le p \le \infty)$. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 46(88), no. 1, pp. 125–132 (in Russian).
18. Timan M.F. On the Jackson theorem in L_p spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.,* 1966, vol. 18, no. 1, pp. 134–137 (in Russian).
19. Il'yasov N.A. The inverse theorem in different metrics of approximation theory for periodic functions with monotone Fourier coefficients. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 153–162 (in Russian).
20. Ul'yanov P.L. Embedding of certain classes of functions H_p^ω. *Math. USSR–Izv.,* 1968, vol. 2, no. 3, pp. 601–637.
21. Storozhenko E.A. Embedding theorems and best approximations. *Math. USSR–Sb.*, 1975, vol. 26, no. 2, pp. 213–224.

The paper was received by the Editorial Office on March 15, 2017.

Niyazi Aladdin ogly Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan, e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .