

УДК 517.955.8

КОНТАКТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОНТАКТА¹**А. А. Ершов**

Рассмотрено проводящее тело в форме параллелепипеда, по торцам которого подключены малые контакты квадратной формы. Потенциал электрического тока моделируется при помощи краевой задачи для уравнения Лапласа в параллелепипеде. По всей границе задана нулевая нормальная производная, кроме областей границы под контактами, где предполагается, что производная по нормали равна ненулевой постоянной. Физически такое условие соответствует наличию тонкой плохо проводящей плёнки на поверхности контактов. Решение данной задачи получено методом разделения переменных, затем найдено электрическое сопротивление как некоторый функционал от решения в виде суммы двойного ряда. Главной целью работы является исследование зависимости сопротивления от малого параметра, характеризующего размер контактов. Главный член этой асимптотики и есть контактное сопротивление. Математическая проблема заключается в том, что сумма ряда, выражающая сопротивление, зависит от малого параметра сингулярно: при стремлении его к нулю ряд расходится. В качестве метода решения данной задачи использована замена ряда на двумерный интеграл. Найден главный член асимптотики и оценка остатка. Главный вклад в оценку остатка вносит разность между двумерным интегралом и двойной суммой.

Ключевые слова: контактное сопротивление, краевая задача, электрический потенциал, уравнение Лапласа, малый параметр.

A. A. Ershov. Contact resistance of a square contact.

We consider a conductive body in the form of a parallelepiped with small square contacts attached to its ends. The potential of the electric current is modelled by a boundary value problem for the Laplace equation in a parallelepiped. The zero normal derivative is assigned on the boundary except for the areas under the contacts, where the derivative is a nonzero constant. Physically, this condition corresponds to the presence of a low-conductivity film on the surface of the contacts. The problem is solved by separation of variables, and then the electrical resistance is found as a functional of the solution in the form of the sum of a double series. Our main aim is to study the dependence of the resistance on a small parameter characterizing the size of the contacts. The leading term of the asymptotics that expresses this dependence is the contact resistance. The mathematical problem is to treat the singular dependence of the sum of the series corresponding to the resistance on the small parameter: the series diverges as the small parameter vanishes. We solve this problem by replacing the series with a two-dimensional integral. We find the leading term of the asymptotics and estimate the remainder. It turns out that the main contribution to the remainder is made by the difference between the two-dimensional integral and the double sum.

Keywords: contact resistance, boundary value problem, electric potential, Laplace equation, small parameter.

MSC: 35C20, 35Q60

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-105-113

Введение

Одними из первых работ, посвященных изучению контактного электрического сопротивления или сопротивления области стягивания линий тока к пятну контакта, являются работы Р. Хольма [1; 2], но данная задача является до сих пор актуальной (см., например, [3; 4]).

Как известно, электрический потенциал проводника φ моделируется краевой задачей для уравнения Лапласа. Если на поверхности проводника обычно задается условие $\partial\varphi/\partial n = 0$, которое следует из естественного предположения, что нормальная составляющая плотности тока на поверхности образца равна нулю, кроме точек под токовыми электродами, то на контактной поверхности задаются различные условия. Например, Р. Хольм в своей монографии [5] выделял два основных типа граничных условий на контактной поверхности:

¹Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10018).

- 1) $\varphi = \text{const}$ в случае так называемых эквипотенциальных контактов,
 2) $\partial\varphi/\partial n = \text{const}$ в случае равномерной плотности тока, что происходит, если поверхность контакта покрыта тонкой пленкой.

Знание контактного сопротивления помогает приближенно решить известную задачу вычисления сопротивления проводника по его форме (см., например, [6, гл. 2, § 8]). Например, в случае двух круглых эквипотенциальных контактов радиуса ε электрическое сопротивление проводника с постоянной удельной проводимостью σ есть

$$R = \frac{1}{2\sigma\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В случае же двух круглых контактов с постоянной плотностью тока на поверхности известна [5, ч. 1, § 5] следующая асимптотика

$$R = \frac{2}{\pi\sigma\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Также Р. Хольмом замечено [5, ч. 1, § 4], что сопротивление стягивания эллиптического контактного пятна на плоской поверхности полубесконечного тела играет в теории контактов большую роль. Отметим, что в монографии [5] приведен следующий главный член (и остальные члены в [7]) асимптотики электрического сопротивления образца произвольной формы в случае двух малых эквипотенциальных контактов γ_1^ε и γ_2^ε :

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\varepsilon} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где σ — удельная проводимость материала проводника, $\gamma_k^\varepsilon = \{z : \varepsilon^{-1} \in \gamma_k\}$, $k = 1, 2$ — малые контакты, образованные сжатием плоских фигур γ_1 и γ_2 в ε^{-1} раз, C_1, C_2 — емкости (см., например, [8, гл. 2, § 1; 9, гл. 2, § 3]) плоских фигур γ_1 и γ_2 . Причем известно (см., например, [10, гл. 1, § 4]), что если γ_1 — единичный круг, то $C_1 = 2/\pi$, а если γ_1 — эллипс с осями a и b , то $C_1 = a/(K(c/a))$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 t}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Однако, на этом список плоских фигур с известной „аналитической“ емкостью заканчивается.

Итак, целью нашей работы является нахождение аналитического значения сопротивления стягивания малого квадратного контакта с постоянной плотностью тока на нем. Двумерный аналог подобных исследований опубликован в работах [11–13].

1. Сведение к математической постановке

По определению контактного сопротивления Р. Хольма мы должны вычислить электрическое сопротивление полубесконечного тела следующим образом. Пусть $u(x, y, z)$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & z > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -\frac{I}{4\varepsilon^2\sigma}, & (x, y) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon), \\ 0, & (x, y) \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon], \end{cases} \\ u(x, y, z) \rightarrow 0, & r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Здесь функция $u(x, y, z)$ является электрическим потенциалом внутри этого полубесконечного тела, σ — проводимость, а I — сила тока, протекающая через квадратный контакт со стороны 2ε . Используя функцию Грина для полупространства в случае второй краевой задачи

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}} \right),$$

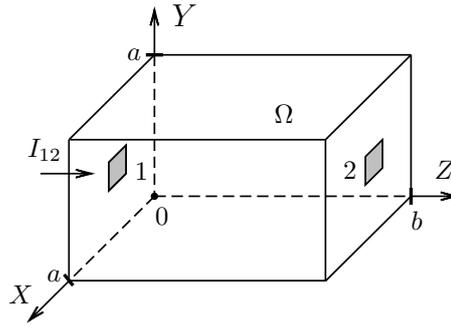


Схема протекания тока через образец.

можно найти

$$u(x, y, z) = - \iint_{\{\zeta=0\}} G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi, \eta, \zeta) dS = \frac{I}{4\varepsilon^2 \sigma} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}},$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к области $\{\zeta > 0\}$.

Тогда контактное сопротивление

$$R_{cont.} = \frac{W}{I^2} = \frac{1}{I^2} \iiint_{z>0} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) \sigma dx dy dz,$$

где W — мощность выделяемой энергии.

Однако, аналитическое вычисление данных интегралов связано со значительными трудностями, поэтому найдем контактное сопротивление иначе, как главный член асимптотики сопротивления тела конечных размеров с малыми квадратными контактами.

Вычислим асимптотику электрического сопротивления образца с формой параллелепипеда и подключенного с помощью двух малых квадратных контактов со стороной 2ε (см. рисунок) по малому параметру ε .

Электрический потенциал при протекании тока через образец прямоугольной формы $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < b\}$ с малыми квадратными контактами может быть смоделирован с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0, & (y, z) \in (0, a) \times (0, b), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0, & (x, z) \in (0, a) \times (0, b), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0,b} = \psi(x, y), & (x, y) \in (0, a) \times (0, a), \end{cases} \quad (1.1)$$

где функция

$$\psi(x, y) = \begin{cases} -\frac{I_{12}}{4\sigma\varepsilon^2}, & (x, y) \in \left(\frac{a}{2} - \varepsilon, \frac{a}{2} + \varepsilon\right) \times \left(\frac{a}{2} - \varepsilon, \frac{a}{2} + \varepsilon\right), \\ 0, & (x, y) \in (0, a)^2 \setminus \left[\frac{a}{2} - \varepsilon, \frac{a}{2} + \varepsilon\right]^2, \end{cases}$$

σ — удельная проводимость образца, I_{12} — сила электрического тока, протекающего через контакты 1 и 2 (см. рисунок).

Поскольку нашей задачей является вычисление электрического сопротивления образца, а оно является свойством самого образца и не зависит от силы тока, протекающего через

образец, то для сокращения записей мы можем принять $I_{12} = 4\sigma\varepsilon^2$. Кроме того, обозначим поверхность первого контакта через

$$\gamma_1^\varepsilon = \{(x, y, z) : a/2 - \varepsilon < x < a/2 + \varepsilon, a/2 - \varepsilon < y < a/2 + \varepsilon, z = 0\},$$

а поверхность второго контакта через

$$\gamma_2^\varepsilon = \{(x, y, z) : a/2 - \varepsilon < x < a/2 + \varepsilon, a/2 - \varepsilon < y < a/2 + \varepsilon, z = b\}.$$

В этих обозначениях задачу (1.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, & (x, y, z) \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}_\Omega} = 0, & (x, y, z) \in \partial\Omega \setminus \{\overline{\gamma_1^\varepsilon} \cup \overline{\gamma_2^\varepsilon}\}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -1, & (x, y, z) \in \{\gamma_1^\varepsilon \cup \gamma_2^\varepsilon\}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где \mathbf{n}_Ω — внешняя нормаль к области Ω .

Методом разделения переменных можно получить следующее решение задачи (1.2):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & A_0 - \frac{4\varepsilon^2}{a^2}z - \frac{2\varepsilon}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{a}y\right) \right) \\ & \times \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{2\pi n}{a}\varepsilon\right)}{n^2 \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi n}{a}b\right)} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{a}z\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi n}{a}(b-z)\right) \right] \\ & - \frac{2a}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \sin\left(\frac{2\pi n}{a}\varepsilon\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{b}\varepsilon\right)}{mn\sqrt{m^2+n^2} \operatorname{sh}\left(\frac{2\pi}{a}b\sqrt{m^2+n^2}\right)} \cos\left(\frac{2\pi n}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{a}y\right) \\ & \times \left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}z\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}(b-z)\right) \right], \end{aligned}$$

где A_0 — произвольная постоянная.

Как известно [10], мощность выделяемой энергии можно выразить через интеграл

$$W = \sigma \iiint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right) dx dy dz.$$

Тогда сопротивление

$$R = \frac{W}{I_{12}^2} = \frac{b}{\sigma a^2} + \frac{4}{\sigma a \pi} (S_1 + S_2),$$

где

$$\begin{aligned} S_1 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi n}{a}\varepsilon\right) \operatorname{th}\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}{\left(\frac{2\pi n}{a}\varepsilon\right)^2 n}, \\ S_2 = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi n}{a}\varepsilon\right) \sin^2\left(\frac{2\pi m}{a}\varepsilon\right) \operatorname{th}\left(\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\right)}{\left(\frac{2\pi n}{a}\varepsilon\right)^2 \left(\frac{2\pi m}{a}\varepsilon\right)^2 \sqrt{m^2+n^2}}. \end{aligned}$$

Для суммы S_1 в работах [11; 13] уже была вычислена следующая асимптотика

$$S_1 = \ln\left(\frac{e^{3/2}a}{4\pi\varepsilon}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi n}{a}b}}{n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}b\right)} + \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-\frac{\pi n}{a}b}}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{a}b\right)}\right) \left(\frac{2\pi\varepsilon}{a}\right)^2 + O\left(\frac{\varepsilon^4}{a^4}\right), \quad \frac{\varepsilon}{a} \rightarrow 0,$$

поэтому нашей задачей является нахождение асимптотики суммы ряда S_2 .

2. Вычисление асимптотики

Теорема 1. *Имеет место следующее асимптотическое равенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2} \frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi b}{a} \sqrt{m^2 + n^2} \right)}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right), \quad \mu \rightarrow 0.$$

Доказательство. Поскольку $\operatorname{th} x = 1 - e^{-x} / \operatorname{ch} x$, то

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2} \frac{\operatorname{th} \left(\frac{\pi b}{a} \sqrt{m^2 + n^2} \right)}{\sqrt{m^2 + n^2}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2} \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp \left(-\frac{\pi b}{a} \sqrt{m^2 + n^2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi b}{a} \sqrt{m^2 + n^2} \right) \sqrt{m^2 + n^2}} + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим через

$$F(m, n, \mu) = \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2} \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Заменяем сингулярный ряд из правой части (2.3) на интеграл следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(m, n, \mu) = J + H, \quad (2.4)$$

где

$$J = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} F(x, y, \mu) dx dy, \quad H = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \int_m^{m+1} (F(m, n, \mu) - F(x, y, \mu)) dx dy.$$

Разобьем интеграл J на слагаемые следующим образом:

$$J = \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2} \frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = J_1 - 2J_2 + J_3,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2} \frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left[\begin{array}{l} x = \xi/\mu, \\ y = \eta/\mu \end{array} \right] = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \xi \sin^2 \eta}{\xi^2 \eta^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \\ &= \left[\begin{array}{l} \xi = r \cos \varphi, \\ \eta = r \sin \varphi, \\ |I| = r \end{array} \right] = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(r \cos \varphi)}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\sin^2(r \sin \varphi)}{r^2 \sin^2 \varphi} d\varphi dr \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos(2r \cos \varphi))(1 - \cos(2r \sin \varphi))}{4r^4} dr d\varphi \\ &= \frac{1}{4\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \int_0^{\infty} r^{-4} \left(1 - \cos(2r \cos \varphi) - \cos(2r \sin \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos(2r(\cos \varphi + \sin \varphi)) + \cos(2r(\cos \varphi - \sin \varphi))}{2} \right) dr d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \int_0^\infty (\dots) \frac{dr^{-3}}{-3} d\varphi = \frac{1}{4\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \left((\dots) \frac{r^{-3}}{-3} \Big|_{r=0}^\infty - \int_0^\infty \frac{r^{-3}}{-3} (\dots)'_r \right) d\varphi \\
&= \dots = \frac{1}{6\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \int_0^\infty r^{-1} \left(-2 \cos^3 \varphi \sin(2r \cos \varphi) - 2 \sin^3 \varphi \sin(2r \sin \varphi) \right. \\
&\quad \left. + (\cos \varphi + \sin \varphi)^3 \sin(2r(\cos \varphi + \sin \varphi)) + (\cos \varphi - \sin \varphi)^3 \sin(2r(\cos \varphi - \sin \varphi)) \right) dr d\varphi \\
&= \frac{1}{6\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \left(-2 \cos^3 \varphi \int_0^\infty \frac{\sin(r 2 \cos \varphi)}{r} dr - 2 \sin^3 \varphi \int_0^\infty \frac{\sin(r 2 \sin \varphi)}{r} dr \right. \\
&\quad \left. + (\cos \varphi + \sin \varphi)^3 \int_0^\infty \frac{\sin(r 2(\cos \varphi + \sin \varphi))}{r} dr + (\cos \varphi - \sin \varphi)^3 \int_0^\infty \frac{\sin(r 2(\cos \varphi - \sin \varphi))}{r} dr \right) d\varphi \\
&= \frac{1}{6\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \left(-2 \cos^3 \varphi \operatorname{sign}(\cos \varphi) \frac{\pi}{2} - 2 \sin^3 \varphi \operatorname{sign}(\sin \varphi) \frac{\pi}{2} \right. \\
&\quad \left. + (\cos \varphi + \sin \varphi)^3 \operatorname{sign}(\cos \varphi + \sin \varphi) \frac{\pi}{2} + (\cos \varphi - \sin \varphi)^3 \operatorname{sign}(\cos \varphi - \sin \varphi) \frac{\pi}{2} \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{12\mu} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \left(-2|\cos \varphi|^3 - 2|\sin \varphi|^3 + |\cos \varphi + \sin \varphi|^3 + |\cos \varphi - \sin \varphi|^3 \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{6\mu} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2 \varphi \sin^2 \varphi} \left(-2 \cos^3 \varphi - 2 \sin^3 \varphi + (\cos \varphi + \sin \varphi)^3 + (\cos \varphi - \sin \varphi)^3 \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{6\mu} \int_0^{\pi/4} \frac{6 \cos \varphi - 2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right),
\end{aligned}$$

так как $\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} dt = \operatorname{sign}(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Si}(x) = \operatorname{sign}(a) \frac{\pi}{2}$ (здесь $\operatorname{Si}(\cdot)$ — интегральный синус [14, § 9.9], $\operatorname{sign}(\cdot)$ — знак числа),

$$\begin{aligned}
0 < J_2 &= \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\sin^2(\mu x) \sin^2(\mu y)}{(\mu x)^2 (\mu y)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \int_0^\infty \int_0^1 \frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \int_1^\infty \int_0^1 \frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \int_0^{\pi/2} \int_0^1 dr d\varphi + \int_1^\infty \frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2} \frac{dy}{y} = O(\ln \mu)
\end{aligned}$$

в силу оценок из [11],

$$J_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\sin^2(\mu x) \sin^2(\mu y)}{(\mu x)^2 (\mu y)^2} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = O(1).$$

Следовательно,

$$J = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right) + O(\ln \mu), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Сумму H разобьем на два слагаемых следующим образом: $H = H_1 + H_2$, где

$$H_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \int_m^{m+1} (F(m, n, \mu) - F(x, n, \mu)) dx dy,$$

$$H_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \int_m^{m+1} (F(x, n, \mu) - F(x, y, \mu)) dx dy.$$

Оценим H_1 по модулю. По теореме Лагранжа для любого $x \in [m, m+1]$ выполняется равенство

$$F(x, n, \mu) - F(m, n, \mu) = F'_x(\xi_m, n, \mu) \cdot (x - m),$$

где $\xi_m \in (m, m+1)$. Поскольку

$$F'_x(x, y, \mu) = \frac{2 \sin(\mu x) \sin^2(\mu y) \cos(\mu x)}{\mu^3 x^2 y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2 \sin^2(\mu x) \sin^2(\mu y)}{\mu^4 x^3 y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\sin^2(\mu x) \sin^2(\mu y)}{\mu^4 x y^2 (x^2 + y^2)^{3/2}},$$

то

$$|F'_x(\xi_m, n, \mu)| \leq \left| \frac{2 \sin(\mu \xi_m) \sin^2(\mu n) \cos(\mu \xi_m)}{\mu^3 \xi_m^2 n^2 \sqrt{\xi_m^2 + n^2}} - \frac{2 \sin^2(\mu \xi_m) \sin^2(\mu n)}{\mu^4 \xi_m^3 n^2 \sqrt{\xi_m^2 + n^2}} \right| + \frac{\sin^2(\mu \xi_m) \sin^2(\mu n)}{\mu^4 \xi_m n^2 (\xi_m^2 + n^2)^{3/2}}$$

$$\leq \left| \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{\sin(\mu \xi_m)}{\mu \xi_m} \left(2 \cos(\mu \xi_m) - \frac{2 \sin(\mu \xi_m)}{\mu \xi_m} \right) \frac{1}{\xi_m \sqrt{\xi_m^2 + n^2}} \right| + \frac{\xi_m}{(\xi_m^2 + n^2)^{3/2}}$$

$$\leq \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{4}{\xi_m \sqrt{2} \xi_m n} + \frac{\xi_m}{(\xi_m^2 + n^2)^{3/2}},$$

соответственно, $|H_1| \leq T_1 + T_2$, где

$$T_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \int_m^{m+1} \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{4}{\xi_m \sqrt{2} \xi_m n} (x - m) dx dy = \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m \sqrt{\xi_m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leq \sqrt{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \int_1^{\infty} \frac{1}{(\mu y)^2 \sqrt{y}} \max_{z \in [y, y+1]} \sin^2(\mu z) dy = \left[y = \frac{\eta}{\mu} \right] = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{(\eta)^2 \sqrt{\eta}} \max_{z \in [\eta, \eta+\mu]} \sin^2(z) d\eta$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\mu}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\int_{\mu}^{1/2} \frac{\sin^2(\eta + \mu)}{\eta^2 \sqrt{\eta}} d\eta + \int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{\eta^2 \sqrt{\eta}} \max_{z \in [\eta, \eta+\mu]} \sin^2(z) d\eta \right)$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\int_0^{1/2} \frac{\sin^2(2\eta)}{\eta^2 \sqrt{\eta}} d\eta + \int_{1/2}^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^2 \sqrt{\eta}} \right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right),$$

$$T_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \int_m^{m+1} \frac{\xi_m}{(\xi_m^2 + n^2)^{3/2}} dx dy = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_m}{(\xi_m^2 + n^2)^{3/2}} = O(1),$$

так как $\frac{\xi_m}{(\xi_m^2 + n^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{m^2 n^3}$ при $m, n \rightarrow \infty$.

Следовательно, $H_1 = O(1/\sqrt{\mu})$. Аналогично, дополнительно применяя теорему о среднем, можно доказать, что $H_2 = O(1/\sqrt{\mu})$. Таким образом, мы получили оценку

$$H = O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Подставляя равенства (2.5) и (2.6) в (2.4), получим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F(m, n, \mu) = \frac{\pi}{\mu} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right).$$

Отсюда и из (2.3) следует утверждение теоремы.

Заключение

Используя утверждение теоремы 1, получаем, что сопротивление области стягивания линий тока двух квадратных контактов со стороной 2ε составляет

$$\frac{2}{\sigma\pi\varepsilon} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right),$$

соответственно контактное сопротивление одного квадратного контакта со стороной 2ε есть

$$R_{cont.} = \frac{1}{\sigma\pi\varepsilon} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right) \approx 0.2366 \cdot \frac{1}{\sigma\varepsilon}.$$

В силу определения контактного сопротивления Р. Хольма других членов асимптотики для полубесконечного проводника в его составе быть не может. Нахождение более полной асимптотики электрического сопротивления параллелепипеда может быть задачей дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Holm R.** Über Kontaktwiderstände, besonders bei Kohlekontakten // Zeitschrift für technische Physik. 1922. Vol. 3, no. 9, P. 290–294; no. 10, P. 320–327; no. 11, P. 349–357.
2. **Holm R., Störmer R.** Eine Kontrolle des metallischen Charakters von gereinigten Platinkontakten // Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. 1930. Band 9, heft 2. P. 323–330.
3. **Павлейно О.М., Павлов В.А., Павлейно М.А.** Уточнение границ применимости хольмовского приближения для расчета сопротивления электрических контактов // Электронная обработка материалов. 2010. Т. 46, № 5. С. 56–62.
4. **Затовский В.Г. Минаков Н.В.** Экспериментальное моделирование сопротивления стягивания // Электрические контакты и электроды. 2010. № 10. С. 132–139.
5. **Хольм Р.** Электрические контакты. М.: Иностранная литература, 1961. 314 с.
6. **Сильвестер П., Феррари Р.** Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986. 229 с.
7. **Гадыльшин Р.Р., Ершов А.А., Репьевский С.В.** Об асимптотической формуле для электрического сопротивления в проводнике с малыми контактами // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 16–28.
8. **Полиа Г., Сегё Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 336 с.
9. **Ландкоф Н.С.** Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.
10. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика (в 10 т). Т. 8: Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
11. **Ершов А.А.** Асимптотика решения задачи Неймана с дельтообразной граничной функцией // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 479–485.

12. Ершов А.А. Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 7. С. 1064–1080.
13. Ершов А.А. К задаче об измерении электропроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 6. С. 1004–1007.
14. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.

Ершов Александр Анатольевич

Поступила 13.02.2017

канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

доцент

Челябинский государственный университет,

г. Челябинск

e-mail: ale10919@yandex.ru

REFERENCES

1. Holm R. Über Kontaktwiderstände, besonders bei Kohlekontakten. *Zeitschrift für technische Physik*, 1922, vol. 3, no. 9, pp. 290–294; no. 10, pp. 320–327; no. 11, pp. 349–357.
2. Holm R. Störmer R. Eine Kontrolle des metallischen Charakters von gereinigten Platinkontakten. *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 1930, Band 9, heft 2, pp. 323–330.
3. Pavleino O.M., Pavlov V.A., Pavleino M.A. Verification of the boundaries of the applicability of the holm approximation for the calculation of the resistance of electric contacts. *Surf. Engin. Appl. Electrochem.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 440–446. doi: 10.3103/S1068375510050078.
4. Zatovsky V.G., Minakov N.V. Experimental modeling of the resistance of the retraction. *Elektricheskie kontakty i elektrodyi*, 2010, no. 10, pp. 132–139 (in Russian).
5. Holm R. *Electric contacts handbook*. Berlin: Springer-Verlag, 1958, 527 p. Translated under the title *Elektricheskie kontakty*, Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1961, 314 p.
6. Silvester P.P., Ferrari R.L. *Finite elements for electrical engineers*. New York: Cambridge University Press, 1983, 512 p. Translated under the title *Metod konechnykh elementov dlya radioinzhenerov i inzhenerov-elektrikov*, Moscow, Mir Publ., 1986, 229 p.
7. Gadyl'shin R.R., Ershov A.A., Repyevsky S.V. On asymptotic formula for electric resistance of conductor with small contacts. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 15–27. doi: 10.13108/2015-7-3-15.
8. Pólya G., Szegő G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1951, 279 p. Translated under the title *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoi fizike*, Moscow, Gos. Izd-vo Fiz.-Mat. Lit. Publ., 1962, 336 p.
9. Landkof N.S. *Foundations of Modern Potential Theory*, Berlin, Springer, 1973, 424 p. Original Russian text published in *Osnovy sovremennoi teorii potentsiala*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 515 p.
10. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 8: Electrodynamics of Continuous Media*, 1st ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, 1984, 460 p. ISBN 978-0-7506-2634-7.
11. Ershov A.A. Asymptotics of the solution to the Neumann problem with a delta-function-like boundary function. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 3, pp. 457–463. doi: 10.1134/S0965542510030073.
12. Ershov A.A. Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 7, pp. 994–1010. doi: 10.1134/S0965542511060066.
13. Ershov A.A. On measurement of electrical conductivity. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 6, pp. 823–826. doi: 10.1134/S0965542513060079.
14. Bateman H., Erdelyi A. *Higher transcendental functions: vol. 2*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1953, 414 p.

The paper was received by the Editorial Office on February, 13, 2017.

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru.