РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 22, № 4 2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

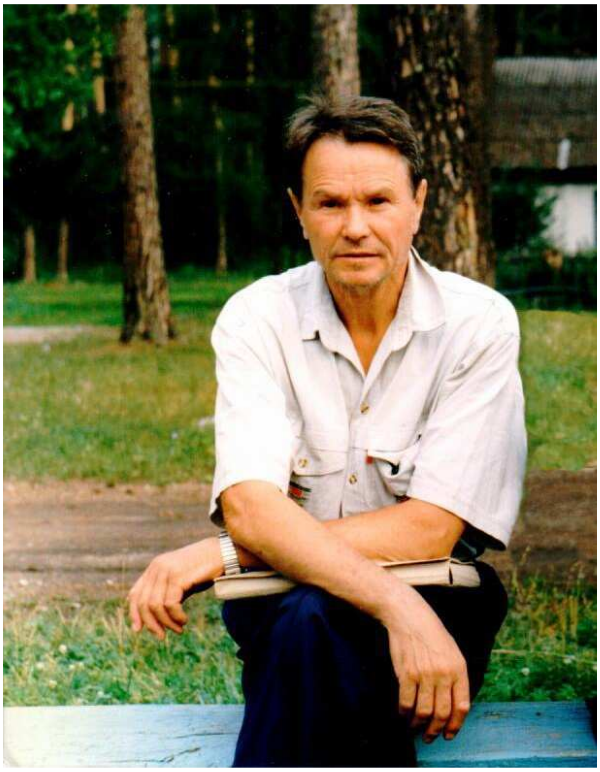
Том 22 № 4 2016

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 22, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2016. 330 с.

ISSN 0134–4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889



ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-5-8

ЮРИЙ НИКОЛАЕВИЧ СУББОТИН

(*К 80-летнему юбилею*)

18 июля 2016 г. отметил 80-летие член-корреспондент РАН Юрий Николаевич Субботин, выдающийся специалист в области теории аппроксимации и вычислительной математики, общепризнанный авторитет в теории сплайнов и их приложений.

Ю.Н. Субботин родился в г. Ивделе Свердловской области. В 1954 г. он поступил на физико-математический факультет Уральского государственного университета им. А. М. Горького, после его окончания с 1959 по 1961 г. учился в аспирантуре на кафедре теории функций УрГУ под руководством профессора С.Б. Стечкина, с 1961 по 1964 г. работал на кафедре ассистентом. С 1964 г. Юрий Николаевич работает в Институте математики и механики Уральского отделения РАН, в течение нескольких десятилетий он заведовал отделом теории приближения функций. В 2000 г. Ю.Н. Субботин избран членом-корреспондентом РАН.

Первые научные работы Юрия Николаевича были посвящены задачам экстремальной функциональной интерполяции с наименьшим значением нормы старшей производной действительной функции на классах интерполируемых последовательностей. В 1960 г. приехавший в Свердловск профессор Н.Н. Яненко в беседе с Сергеем Борисовичем Стечкиным сформулировал вопрос, возникший в связи с применением теории разностных методов для решения краевых задач математической физики. Пусть заданы значения $\{y_k\}_{k\in Z}$ и n-е разности $\Delta^n y_k$ этой последовательности с единичным шагом ограничены сверху по модулю. Существует ли функция, принимающая в точках равномерной сетки значения $\{y_k\}_{k\in Z}$, у которой n-я производная ограничена? Эту задачу С.Б. Стечкин и предложил аспиранту. Несколько позже на одном из семинаров Сергей Борисович сформулировал задачу в экстремальной постановке: найти величину

$$A_n = \sup \inf \left\| f^{(n)}(x) \right\|_{L_\infty(R)},$$

где inf берется по всем функциям f с локально абсолютно непрерывной производной порядка $n-1$, для которых $f(k) = y_k$, а sup — по всем последовательностям $y = \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ действительных чисел, которые удовлетворяют условию $|\Delta^n y_k| \le 1$.

В 1965 г. Ю.Н. Субботин нашел точное решение этой задачи. Он доказал, что экстремальной последовательностью является та, для которой $\Delta^n y_k = (-1)^k,\ k \in \mathbb{Z}$, и экстремальной функцией — интерполяционный полиномиальный сплайн степени n минимального дефекта с узлами «склейки» в целых точках при нечетных n и в полуцелых — при четных n. Позже Юрий Николаевич решил подобные задачи экстремальной интерполяции на оси $\mathbb{R}$ для L_p-норм при $1 \le p < \infty$, а также для интерполяции в среднем, при которой $\{y_k\}$ представляют собой усредненные значения интерполируемой функции. Эти результаты получили достойное признание зарубежных математиков и стали основным содержанием его кандидатской (1967) и докторской (1974) диссертаций. Они положили начало многочисленным исследованиям по экстремальной функциональной интерполяции и теории сплайнов, проводимым как самим Ю.Н. Субботиным, так и его учениками и коллегами.

В ходе этих исследований Ю.Н. Субботин подробно изучил аппроксимативные свойства полиномиальных сплайнов: им были доказаны теоремы существования интерполяционных и интерполяционных в среднем сплайнов с учетом взаимного расположения узлов сплайна и точек интерполяции, получены оценки погрешности аппроксимации различных классов функций, а также найдены точные оценки снизу колмогоровских поперечников некоторых соболевских классов функций. Понятие поперечника вошло в математику благодаря академику А.Н. Колмогорову, который еще в тридцатые годы прошлого века ввел конструктивные характеристики классов функций — величины приближений этих классов функций наилучшими n-мерными подпространствами. Эти характеристики сейчас называются поперечниками по Колмогорову. Поперечники были в полной мере востребованы математиками в шестидесятые годы прошлого столетия в связи с интенсивным развитием вычислительных технологий. Использовав сплайны и некоторые их обобщения, Ю.Н. Субботин получил оценки снизу для поперечников по Колмогорову нечетного порядка $d_{2n-1}(W_L^r, L)$ в интегральной метрике для класса W_L^r периодических функций f с абсолютно непрерывной производной $f^{(r-1)}$ и $\|f^{(r)}\|_L \le 1$. Эти оценки вместе с известным результатом С.М. Никольского о наилучшем приближении классов W_L^r тригонометрическими полиномами дали точное значение поперечника. В тот же период Ю.Н. Субботин, используя свои собственные исследования по экстремальной функциональной интерполяции и ω-сплайны, нашел точную оценку снизу нечетного поперечника класса W^rH^ω периодических функций, модуль непрерывности r-й производной которых не превосходит заданный выпуклый модуль непрерывности $\omega(\delta)$. В то время подобными задачами интенсивно занимались украинские математики во главе с Н.П. Корнейчуком, а для классов функций W_C^r и приближений в равномерной метрике точные значения соответствующих поперечников были ранее найдены В.М. Тихомировым.

В конце прошлого — начале текущего столетия Юрий Николаевич обратился к исследованию констант Лебега интерполяционных сплайнов и к оценкам относительных поперечников, введенных В.Н. Коноваловым, который добавил в определение колмогоровских поперечников ограничения на норму промежуточных производных аппроксимантов. В серии работ, написанных совместно с С.А. Теляковским, найдены точные значения относительных поперечников ряда классов дифференцируемых функций, получены оценки сверху и снизу минимального значения константы $M = M(n) > 0$, при которой поперечники по Колмогорову $d_{2n}(W_C^r, C)$ класса функций W_C^r совпадают с относительными поперечниками по Колмогорову $K_{2n}(W_C^r,\ MW_C^j, C)$ $(j = 1, \dots, r)$, а также установлено, что это минимальное значение $M(n)$ стремится к известной константе Фавара при стремлении n к бесконечности.

В 1972 г. вышла в свет первая монография по теории сплайнов на русском языке — книга Дж. Алберга, Э. Нильсона и Дж. Уолша “Теория сплайнов и ее приложения”. Перевод с английского был выполнен Ю.Н. Субботиным под редакцией С.Б. Стечкина, ими же написано дополнение к этой книге. После появления русского издания этой монографии термин “сплайн” окончательно утвердился в математической литературе на русском языке.

Начиная с 60-х годов прошлого века, сплайны завоевывают все большую популярность в вычислительной практике как средство приближенного представления функций, кривых и поверхностей, а также в качестве аппарата сглаживания экспериментальных данных. Успешному развитию и применению сплайнов в различных исследованиях способствовало издание в 1976 г. книги С.Б. Стечкина и Ю.Н. Субботина “Сплайны в вычислительной математике”, в которой основное внимание было уделено специфике сплайнов с точки зрения их применений в численном анализе. В 1979 г. Ю.Н. Субботин совместно с В.И. Бердышевым опубликовал еще одну книгу “Численные методы приближения функций”.

В 1980-е годы Ю.Н. Субботин обращается к проблемам многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации и интерполяции, актуальным с точки зрения их использования в методе конечных элементов для решения краевых задач. Согласно известным результатам по методам конечных элементов скорость сходимости метода на некоторой области определяется ошибкой аппроксимации решения краевой задачи при переходе к подпространству конечных элементов. Однако на практике решить задачу нахождения этой ошибки часто оказывается невозможно, и для оценки скорости сходимости метода используют не проекцию решения на подпространство конечных элементов, а интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию, из-за чего приходится получать оценки локальной интерполяции на каждом отдельно взятом конечном элементе из триангуляции исходной области. При этом выбор интерполяционных условий определяет базисные функции, участвующие в построении пространства конечных элементов, на котором осуществляется поиск приближенного решения краевой задачи. В качестве определяющих характеристик сходимости метода конечных элементов ранее использовались диаметр треугольника разбиения и его наименьший угол (Дж. Синж, И. Бабушка, А. Азиз и др.). Юрию Николаевичу удалось получить оценки приближения функции на треугольниках интерполяционными многочленами Лагранжа произвольной степени, а также многочленами Эрмита и Биркгофа в терминах диаметра треугольника и его наибольшего угла. Полученные оценки являются неулучшаемыми с точностью до входящих в них постоянных множителей, не зависящих от интерполируемой функции и триангуляции области. Исследования в этом направлении в настоящее время продолжают ученицы Ю.Н. Субботина Н.В. Латыпова и Н.В. Байдакова, оформляющая докторскую диссертацию.

Позже к научным интересам Ю.Н. Субботина добавилась теория всплесков — область, которая лежит на пересечении “чистой” математики, вычислительных методов, теории сигналов, сжатия и обработки информации. Базисы всплесков имеют ряд преимуществ по сравнению с другими базисами, используемыми в качестве аппарата аппроксимации, благодаря свойствам локализации порождающих базисы функций, что дает возможность строить эффективные алгоритмы на основе всплеск-разложений. В этой важной области современной математики Юрий Николаевич совместно с Николаем Ивановичем Черных (их связывает многолетняя дружба и множество совместных исследований) получили целый ряд существенных результатов. До бурного развития современной теории всплесков в математике были хорошо известны ортогональные системы Хаара (они использовались для моделирования трудных задач теории тригонометрических рядов), ортогональные и одновременно интерполяционные на равномерных сетках на оси системы Котельникова — Шеннона (применяемые при решении задач передачи и обработки информации средствами радио и в теории сигналов) и интерполяционные системы полиномиальных сплайнов на сгущающихся сетках — базисы пространств $C[0;2\pi]$ и $C^k[0;2\pi]$, построенные разными способами и независимо С.В. Бочкаревым, З. Чисельским и Ю.Н. Субботиным (1972). По современной терминологии каждая из этих систем является системой всплесков (wavelet-father и wavelet-mother). Работы В.А. Котельникова (1937) долгое время в СССР были закрытыми, а интерполяционные сплайны широко использовались в программном обеспечении компьютеров и пакетах сжатия информации.

С 2006 г. Ю.Н. Субботин и Н.И. Черных совместно с В.П. Верещагиным (ушедшим из жизни в 2015 г.) занимались построением классов векторных полей с различными вихревыми свойствами, в частности продольно вихревых полей, линии которых совпадают с их вихревыми линиями, и поперечно вихревых, линии которых ортогональны вихревым линиям. Ими предложен метод построения векторных полей с определенными свойствами с помощью преобразований, изменяющих величину вектора поля в каждой точке, форму линий поля и их взаимное расположение. Важные приложения этого метода связаны с решением дифференциальных уравнений, поскольку взаимные свойства векторного поля и поля его ротора выражаются дифференциальными уравнениями в частных производных, в том числе нелинейными.

В 2012 г. Юрий Николаевич обратился к задачам аппроксимации кривизны плоских кривых сплайнами и тригонометрическими полиномами в равномерной метрике и получил первые результаты в решении этой трудной, существенно нелинейной проблемы.

Много сил и времени Юрий Николаевич посвящает научно-организационной и преподавательской деятельности. На протяжении многих лет он работал в должности профессора на кафедре математического анализа и теории функций математико-механического факультета Уральского государственного университета им. А.М. Горького (ныне Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета), где был одним из ведущих лекторов. Он читал общий курс теории функций комплексной переменной, специальные курсы “Теория интерполяции”, “Аппроксимационные методы математического моделирования”, “Приближение функций”, “Метод конечных и граничных элементов”, “Сплайны и всплески”. Лекции Ю.Н. Субботина отличались высоким научным уровнем и новизной, включали фундаментальные классические теоремы и новые достижения математики. Ю.Н. Субботин подготовил 11 кандидатов наук, один из его учеников В.Т. Шевалдин защитил докторскую диссертацию. Юрий Николаевич входит в состав Объединенного ученого совета по математике, механике и информатике УрО РАН и является членом нескольких диссертационных советов. Он автор более 200 научных работ.

Ю.Н. Субботин — человек леса, знаток уральской природы, рыбак и ягодник, бывший спортсмен-конькобежец, неоднократный чемпион и призер различных соревнований по шахматам, жизнелюбивый, спокойный, тактичный и в то же время азартный человек с неиссякаемым чувством юмора. Его отличают неизменная доброжелательность, скромность, широкая эрудиция и разносторонность интересов.

Друзья, коллеги и ученики сердечно поздравляют Юрия Николаевича со славным юбилеем и желают ему крепкого здоровья и новых творческих достижений!

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-9-12

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЧЕРНЫХ

(*К 80-летнему юбилею*)

30 марта 2016 г. отметил 80-летие известный российский специалист по теории функций и теории приближений, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки Российской Федерации Николай Иванович Черных.

Н. И. Черных родился в селе Козловка Новосергиевского района Оренбургской области. В 1953 г. он поступил в Саратовский университет, а после его окончания в 1958 г. — в аспирантуру к Николаю Петровичу Купцову, тогда молодому ученому, впоследствии — известному специалисту по дифференциальным уравнениям и теории функций. Н. П. Купцов предложил аспиранту задачу о приближении функций полиномами со связями. Этой задаче посвящена первая научная публикация Николая Ивановича.

В конце пятидесятых — начале шестидесятых годов прошлого столетия в Свердловске под руководством Сергея Борисовича Стечкина создавалось новое научное подразделение — Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Сергей Борисович в поисках новых сотрудников ездил по городам Урала и Поволжья. В один из приездов Стечкина в Саратов Н. П. Купцов познакомил его с Николаем Ивановичем. В результате Н. И. Черных получил приглашение работать в СОМИ.

С 1962 г. вся жизнь Николая Ивановича неразрывно связана со Свердловским отделением Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, которое впоследствии было преобразовано в Институт математики и механики. Здесь он продолжил исследования, начатые в Саратове, а также взялся за новые задачи. В частности, он рассматривал восходящие к П. Л. Чебышеву и В. А. Маркову задачи об оценке нормы полинома на отрезке через норму этого полинома на меньшем отрезке. Опубликованная по этой тематике работа стала основой для кандидатской диссертации “О некоторых экстремальных задачах для полиномов”, которую Н. И. Черных защитил в 1966 г. Научным руководителем диссертационной работы был С. Б. Стечкин.

В 1960-е годы на семинаре С. Б. Стечкина при обсуждении известного результата Н. П. Корнейчука о точной константе в неравенстве Джексона между наилучшим равномерным приближением 2π-периодической функции тригонометрическими многочленами и модулем непрерывности этой функции возник вопрос о точных константах в неравенстве Джексона в пространствах $L^p_{2\pi}$ $(1 \le p < \infty)$, и в частности в $L^2_{2\pi}$. После того как выяснилось, что эта задача не решена и даже в случае $p = 2$ является нетривиальной, Н. И. Черных ею заинтересовался и в итоге в 1967 г. получил точное неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_2, \qquad f \not\equiv \text{const}, \qquad f \in L^2_{2\pi}, \tag{1}$$

между $E_{n-1}(f)_2$ — наилучшим L^2-приближением функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и $\omega(f,\delta)_2$ — модулем непрерывности функции f в $L^2_{2\pi}$. При этом, как установил несколько позднее сам Николай Иванович, аргумент π/n модуля непрерывности оказался оптимальным в том смысле, что его нельзя заменить на меньший без увеличения константы перед модулем непрерывности в неравенстве (1). В 1967 г. вышла его работа, в которой была найдена точная константа в аналогичном неравенстве (неравенстве Джексона — Стечкина) в $L^2_{2\pi}$ для старших модулей непрерывности. Предложенный Н. И. Черных метод доказательства неравенства (1) оказался сравнительно простым, ясным и одновременно глубоким, что породило новое направление в теории приближений, привлекшее десятки исследователей из разных стран, а статьи и диссертационные работы на эту тему продолжают регулярно появляться и в настоящее время.

Случай $p \neq 2$ оказался гораздо более трудным. На протяжении многих лет Николай Иванович не оставлял попыток решить эту задачу и в 1992 г. опубликовал работу, в которой получено точное неравенство Джексона в $L^p_{2\pi}$ для $1 \le p < 2$. Отметим, что при $2 < p < \infty$ вопрос о точной константе в неравенстве Джексона и сейчас остается открытым.

С 1968 г. по настоящее время Н. И. Черных ведет большую научно-организационную работу. В 1973 г. он был заместителем директора ИММ, в 1987–2012 гг. руководил отделом аппроксимации и приложений. К исполнению обязанностей руководителя Николай Иванович подходил с большой ответственностью, глубоко вникал в суть многих вопросов институтской жизни, деятельно участвовал в решении различных проблем сотрудников института: организационных, творческих, бытовых, а иногда даже и семейных. Несмотря на большую загруженность административной работой, Николаю Ивановичу удавалось найти время для занятий математикой. В этот период он увлекся исследованиями по теории сплайнов, получил результаты о приближении классов Соболева W^k_p дифференцируемых функций сплайнами с заданной плотностью распределения узлов, а также аналогичные результаты для весовых аналогов классов W^k_p. Эти результаты вместе с теоремами о точных константах в неравенстве Джексона легли в основу его докторской диссертации “Приближение полиномами и сплайнами”, защита которой состоялась в 1980 г.

С середины 1990-х годов Н. И. Черных и Ю. Н. Субботин занялись исследованиями в интенсивно развивающейся теории всплесков. Эта современная теория имеет многочисленные применения. Например, всплеск-алгоритмы позволяют уменьшать объем изображения без существенной потери качества, что обусловило огромную востребованость этой теории в области компьютерной графики. Теория всплесков была использована при разработке таких популярных форматов, как JPEG 2000 и MPEG-4. В 2000-е годы Николай Иванович Черных и Юрий Николаевич Субботин исследовали различные применения теории всплесков к классическим задачам математической физики. В их многочисленных работах по этой тематике найдены решения задач Дирихле и Неймана в круге, центральном и нецентральном кольце в виде рядов по специальным системам всплесков. Они также применили всплески для нахождения асимптотики решения задач математической физики при деформировании формы границы. Одной из таких работ является их совместная статья 2011 г., в которой с помощью гармонических всплесков исследуется поведение решения задачи Пуассона в эллиптическом кольце при стягивании внутренней границы к отрезку. Относительно недавно в совместной работе Николая Ивановича и его ученицы Е. А. Плещевой (2014) был предложен метод построения ортогональных базисов мультивсплесков пространства $L^2(\mathbb{R})$ по любым известным мультимасштабирующим функциям, порождающим кратномасштабный анализ размерности больше единицы. Несомненным достоинством данного метода является то, что в отличие от предыдущих, в нем не используются никакие дополнительные ограничения на кратномасштабный анализ.

Николай Иванович Черных совместно с Юрием Николаевичем Субботиным и недавно ушедшим из жизни Владимиром Пантелеевичем Верещагиным в последние десять лет занимались изучением решения уравнений Эйлера, Навье — Стокса и Стокса в случае несжимаемой жидкости в аксиально симметрическом цилиндре и торе. Эти уравнения являются классическими уравнениями гидродинамики. Авторами были получены необходимые и достаточные условия существования решения в случае, когда поле скоростей совпадает с вихревыми линиями. Такие движения, согласно терминологии И. С. Громеки, называются винтовыми.

Сотрудники отдела аппроксимации и приложений помимо фундаментальных исследований по теории функций и приближений занимаются решением прикладных задач в области радиотехники. Под руководством Николая Ивановича разработаны быстродействующие методы синтеза и эффективные алгоритмы управления лучом бортовых антенн для современных высокоэффективных систем спутниковой связи космического базирования — зеркальных антенн со сложными облучателями в виде антенных решеток с амплитудно-фазовым, фазовым и двойным фазовым управлением (гибридных зеркальных антенн); зеркальных антенн с профилированной (гофрированной) поверхностью, облучаемых простыми облучателями; была получена формула восстановления электромагнитного поля на антенной решетке по известной диаграмме направленности в дальней зоне в виде обратного преобразования Фурье в случае, когда диаграммы направленности излучателей отличаются лишь фазовыми сдвигами.

В течение долгих лет, еще со времен аспирантуры в Саратовском университете Николай Иванович ведет многогранную педагогическую деятельность. Более 45 лет он работает на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького (ныне УрФУ). Н. И. Черных читал курсы теории функций комплексного и вещественного переменного, гармонического анализа. Несколько лет он работал с магистрантами-математиками: читал для них общий курс "Анализ (мера и интеграл Лебега, спектральная теория операторов)", а также специальный курс "Фракталы и всплески" по новому быстро развивающемуся разделу теории функций. В его лекциях удачно сочетаются фундаментальные классические разделы и современные актуальные вопросы математики и ее приложений. Н. И. Черных вносит значительный вклад в подготовку высококвалифицированных специалистов. Многие годы он руководил курсовыми, выпускными, дипломными работами студентов, под его руководством работали и работают магистранты, аспиранты. Среди его учеников четыре кандидата и один доктор наук.

Долгое время Николай Иванович преподавал в Российском государственном профессионально-педагогическом университете (РГППУ–СИПИ). С 1991 по 1997 г. он заведовал кафедрой высшей математики. Несмотря на сложное финансовое положение в стране в начале 1990-х гг. на кафедре удалось сохранить атмосферу дружбы и творческого сотрудничества. В этот период три преподавателя кафедры высшей математики повысили свою квалификацию, закончив аспирантуру под руководством Н. И. Черных. Один из них успешно защитил кандидатскую диссертацию. За время работы в РГППУ Николай Иванович внес значительный вклад в повышение уровня учебно-методической деятельности. На протяжении нескольких лет группа под руководством Н. И. Черных успешно проводила научные исследования, благодаря чему кафедра высшей математики в числе немногих имела грант РФФИ.

Николай Иванович принял участие в издании лекций по теории аппроксимации функций выдающегося математика Сергея Борисовича Стечкина. В 2011 г. лекции были переведены на английский язык и опубликованы в журнале Eurasian Mathematical Journal.

С начала 1970-х гг. и по настоящее время Николай Иванович активно участвует в организации и проведении школы С.Б. Стечкина по теории функций, представляющей собой уникальное явление в научной жизни бывшего СССР и нынешней России.

Н. И. Черных много лет был заместителем председателя диссертационного совета по вещественному, комплексному и функциональному анализу при ИММ. Сейчас он входит в состав диссертационного совета при ИММ УрО РАН (по специальностям “вычислительная математика”, “дискретная математика” и “математическая кибернетика”, “вещественный, комплексный и функциональный анализ”) и диссертационного совета при УрФУ (по специальности математическое моделирование). В процессе рассмотрения и принятия к защите диссертаций Николай Иванович проявляет искренний интерес к результатам, его отличают неформальный подход и доброжелательное отношение к диссертанту.

Николая Ивановича высоко ценят за научные успехи, глубоко уважают сотрудники ИММ УрО РАН, преподаватели и выпусники УрФУ и РГППУ. Н. И. Черных — человек поразительных волевых качеств: например, в возрасте 66 лет он, выкуривавший по две пачки “Примы” за четыре часа занятий с учениками, бросил курить.

Коллективы Института математики и механики УрО РАН, Уральского федерального университета и Российского государственного профессионально-педагогического университета, друзья и коллеги сердечно поздравляют Николая Ивановича Черных со славным юбилеем и желают ему дальнейших успехов в научной, педагогической, общественной деятельности, крепкого здоровья и удачной рыбалки, большого личного счастья!

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В статье рассматривается анизотропное пространство Лоренца периодических функций. Доказаны достаточные условия принадлежности функций анизотропному пространству Лоренца. Установлены оценки порядка приближения тригонометрическими полиномами класса Никольского — Бесова в анизотропном пространстве Лоренца.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова, наилучшее приближение.

G. Akishev. On approximation orders of functions of several variables in the Lorentz space.

We consider the anisotropic Lorentz space of periodic functions. Sufficient conditions are proved for a function to belong to the anisotropic Lorentz space. Estimates for the order of approximation by trigonometric polynomials of the Nikol'skii–Besov class in the anisotropic Lorentz space are established.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, best approximation.

MSC: 41A10, 41A25, 42A10, 46E30, 46E35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-13-28

Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$, $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m), \bar{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ и числа $\theta_j, p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \ldots, m$. Через $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}} = \left[\int\limits_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{p_m}-1} \left[\cdots \left[\int\limits_0^{2\pi} \left(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,\ldots,t_m) \right)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{p_1}-1} dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \cdots \right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m \right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,\ldots,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [1]).

В случае $p_1 = \ldots = p_m = \theta_1 = \ldots = \theta_m = p$ пространство Лоренца $L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(I^m)$ с нормой $\|f\|_p$ (см. [2, гл. I, п. 1.1]).

Введем обозначение $\overset{\circ}{L}{}^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ — множество всех функций $f \in L^*_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, m.$$

Функции $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ сопоставим ее ряд Фурье $\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$, где $a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$ и $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и частично гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

Положим
$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x})=\sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})}a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle},$$
где $\langle\bar{y},\bar{x}\rangle=\sum_{j=1}^{m}y_jx_j$, $s_j=1,2,\dots,$
$$\rho(\bar{s})=\left\{\overline{k}=(k_1,\dots,k_m)\in\mathbb{Z}^m\colon 2^{s_j-1}\le|k_j|<2^{s_j}, j=1,\dots,m\right\}.$$

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\in l_{\overline{p}}$, если
$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}}=\left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\dots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\left|a_{\overline{n}}\right|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}}<+\infty,$$
где $\overline{p}=(p_1,\dots,p_m)$, $1\le p_j<+\infty$, $j=1,2,\dots,m$.

$S_p^{\bar{r}}H$, $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ — пространства функций с доминирующей смешанной производной — соответственно определены С. М. Никольским [3] и Т. И. Амановым [4].

Рассмотрим аналогичное пространство. Через $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ обозначим пространство всех функций $f\in\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$, для которых $\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B}=\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}}<\infty$, где $\overline{p}=(p_1,\dots,p_m)$, $\overline{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_m)$, $\overline{\tau}=(\tau_1,\dots,\tau_m)$, $1<p_j<\infty$, $1\le\theta_j<\infty$, $1\le\tau_j\le+\infty$, $r_j>0$, $j=1,\dots,m$. В этом пространстве рассмотрим класс (с сохранением обозначения)
$$\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B=\left\{f\in\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)\colon\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B}=\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}}\le1\right\}.$$

Пусть дан вектор $\bar{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$, $\gamma_j>0, j=1,\dots,m$. Положим
$$Q_n^{\bar{\gamma}}=\bigcup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s}),\quad T(Q_n^{\bar{\gamma}})=\left\{t(\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}}b_{\bar{k}}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\right\},$$
$$Y^m(\overline{\gamma},n)=\left\{\overline{s}=(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{Z}^m_+\colon\sum_{j=1}^{m}s_j\gamma_j\ge n\right\}.$$

$E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\overline{\theta}}$ — наилучшее приближение функции $f\in L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar{\gamma}})$. $S_n^{\bar{\gamma}}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}}a_{\bar{k}}(f)e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}$ — частичная сумма ряда Фурье функции f.

Впервые способ приближения функций многих переменных тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов предложил К. И. Бабенко [5].

Впоследствии приближение различных классов гладких функций этим методом исследовали С. А. Теляковский, Б. С. Митягин, Я. С. Бугров, Н. С. Никольская, Э. М. Галеев, В. Н. Темляков, Динь Зунг, Н. Н. Пустовойтов, Э. С. Белинский, Б. С. Кашин и В. Н. Темляков, А. С. Романюк, Х.-Ю. Шмайссер, В. Зикель и др. (см. [6; 7]).

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)\subset L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ в случае $p_j<q_j, j=1,\dots,m$, и $L^{*}_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)\subset L^{*}_{\overline{p},\overline{q}}(I^m)$, если $\theta_j<q_j, j=1,\dots,m$.

Точные оценки порядка приближения $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ классов Никольского — Бесова в $\overset{\circ}{L}{}^{*}_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ в случае $p_j<q_j, j=1,\dots,m$, установлены в [8; 9].

Основная цель предлагаемой статьи — получить оценки величины
$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_{\overline{p},\theta}=\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B}E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\theta}$$
в случае $\theta<q_j, j=1,2,\dots,m$.

В дальнейшем $a_+ = \max\{a, 0\}$, и запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$ и такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \ge C_1 A$ или $B \le C_2 A$ часто будем писать $B >> A$ или $B << A$ соответственно. Также в дальнейшем $C_j(p, q, \ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные, зависящие только от указанных в скобках параметров.

1. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов сначала введем дополнительные обозначения и приведем вспомогательные утверждения. В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями.

Множество индексов $\{1, \ldots, m\}$ обозначим символом e_m, его произвольное подмножество — через e и $|e|$ — количество элементов e.

Если дан элемент $\bar{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ m-мерного пространства с неотрицательными координатами, то $\bar{r}^e = (r_1^e, \ldots, r_m^e)$ — вектор с компонентами $r_j^e = r_j$ при $j \in e$ и $r_j^e = 0$ при $j \notin e$.

Пусть $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ — элемент m-мерного пространства с целыми положительными координатами и непустое множество $e \subset e_m$. Положим

$$G_{\bar{l}}(e) = \big\{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon |k_j| \le l_j,\ j \in e,\ |k_j| > l_j,\ j \notin e\big\}.$$

Для заданных чисел $b_{\bar{n}}$ смешанная разность определяется по формуле

$$\Delta b_{\bar{n}} = \sum_{\bar{0} \le \bar{\varepsilon} \le \bar{1}} (-1)^{m - \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j} b_{\bar{n} - \bar{1} + \bar{\varepsilon}},$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ и $\varepsilon_j = 0$ или $\varepsilon_j = 1$, $\quad \bar{n} - \bar{1} + \bar{\varepsilon} = (n_1 - 1 + \varepsilon_1, \ldots, n_m - 1 + \varepsilon_m)$.

Рассматриваются частные суммы по различным переменным:

$$S_{\bar{l}}(f, \bar{x}) = S_{l_1, \ldots, l_m}(f, \bar{x}) = \sum_{|k_1| \le l_1} \cdots \sum_{|k_m| \le l_m} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

— частная сумма по всем переменным;

$$S_{l_1, \infty}(f, \bar{x}) = \sum_{|k_1| \le l_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{k_m = -\infty}^{+\infty} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменной x_1. В более общем случае

$$S_{\bar{l}^e, \infty}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \prod_{j \in e}[-l_j, l_j] \times \mathbb{R}^{m - |e|}} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}$$

— частная сумма по переменным x_j при $j \in e$.

Для заданного подмножества $e \subset e_m$ положим

$$U_{\bar{l}}(f, \bar{x}) = \sum_{e \subset e_m, e \ne \varnothing} \sum_{\bar{k} \in G_{\bar{l}}(e)} a_{\overline{k}}(f)\, e^{i\langle \overline{k}, \overline{x}\rangle}.$$

В частности для $m = 2$ имеем (см. [10]) $U_{l_1, l_2}(f.\bar{x}) = S_{l_1, \infty}(f, \bar{x}) + S_{\infty, l_2}(f, \bar{x}) - S_{l_1, l_2}(f, \bar{x})$.

Пусть $e \subset e_m$. Рассматривается известная кратная сумма Валле-Пуссена

$$V_{\bar{l}^e, \infty}(f, \bar{x}) = \prod_{j \in e} \frac{1}{l_j} \sum_{\bar{k} \in \mathbb{R}^{m - |e|} \times \prod_{j \in e}[-l_j, l_j]} S_{\bar{k}^e, \infty}(f, \bar{x}).$$

В частности при $e=e_m$

$$V_{\bar{l}^{e_m}}(f,\bar{x})=V_{l_1,\dots,l_m}(f,\bar{x})=\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{l_j}\sum_{k_1=l_1}^{2l_1-1}\dots\sum_{k_m=l_m}^{2l_m-1}S_{\bar{k}}(f,\bar{x}).$$

Суммы Валле-Пуссена по x_1

$$V_{0,\infty}(f,\bar{x})=S_{0,\infty}(f,\bar{x}),\quad V_{l_1,\infty}(f,\bar{x})=\frac{1}{l_1}\sum_{k=l_1}^{2l_1-1}S_{k,\infty}(f,\bar{x});$$

по переменной x_2

$$V_{\infty,0}(f,\bar{x})=S_{\infty,0}(f,\bar{x}),\quad V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})=\frac{1}{l_2}\sum_{k=l_2}^{2l_2-1}S_{\infty,k}(f,\bar{x});$$

по переменным x_1 и x_2

$$V_{l_1,l_2}(f,\bar{x})=V_{l_1,\infty}(V_{\infty,l_2}(f,\bar{x})).$$

Далее, введем обозначение

$$W_{\bar{l}}(f,\bar{x})=\sum_{e\subset e_m,e\neq\varnothing}V_{\bar{l}^e,\infty}(f,\bar{x}),$$

и рассмотрим смешанную разность по индексам

$$\Delta W_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_m}}(f,\bar{x})=\Delta W_{2^{\bar{\nu}}}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{0}\le\bar{\varepsilon}\le\bar{1}}(-1)^{m-\sum\limits_{j=1}^{m}\varepsilon_j}W_{2^{\bar{\nu}-\bar{1}+\bar{\varepsilon}}}(f,\bar{x}),$$

где $\bar{1}=(1,\dots,1)$, $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ — вектор с координатами $\varepsilon_j=0$ или $\varepsilon_j=1$. Тогда функция $\Delta W_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_m}}(f,\bar{x})$ есть тригонометрический полином порядка $2^{\nu_j+1}-1$ по переменной $x_j, j=1,\dots,m$, [10]. Наконец, обозначим $\varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x})=-\Delta W_{2^{\nu_1},\dots,2^{\nu_m}}(f,\bar{x})$ и

$$\Phi_{\bar{k}}(f,\bar{x})=\Phi_{k_1,\dots,k_m}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_m=2^{k_m}}^{2^{k_m+1}-1}\dots\sum_{\nu_1=2^{k_1}}^{2^{k_1+1}-1}\varphi_{\nu_1,\dots,\nu_m}(\bar{x})=\sum_{\bar{\nu}\in\rho(\bar{k}+\bar{1})}\varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x}),$$

$$\sum_{k_m=l_m}^{n_m}\dots\sum_{k_1=l_1}^{n_1}\Phi_{\bar{k}}(f,\bar{x})=\sum_{\bar{l}\le\bar{k}\le\bar{n}}\Phi_{\bar{k}}(f,\bar{x}).$$

Для данного подмножества $e\subset e_m$ обозначим

$$\Phi_{\bar{k}^e}(f,\bar{x})=\sum_{\nu_{j_1}=2^{k_{j_1}}}^{2^{k_{j_1}+1}-1}\dots\sum_{\nu_{j_{|e|}}=2^{k_{j_{|e|}}}}^{2^{k_{j_{|e|}}+1}-1}\varphi_{\nu^e}(\bar{x}).$$

Отметим, что $\varphi_{\bar{\nu}^e}(\bar{x})$ есть тригонометрический полином порядка 1 по переменной x_j при $j\notin e$. Значит, $\Phi_{\bar{k}^e}(f,\bar{x})$ имеет такой же порядок по этим переменным.

Величина (см. [10])

$$Y_{l_1,\dots,l_m}(f)_{\bar{p},\bar{\theta}}=\inf_{T_{l_j}}\big\|f-\sum_{j=1}^{m}T_{l_j}\big\|^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}},\quad l_j=0,1,2,\dots,$$

называется *наилучшим приближением "углом" функции* $f\in L^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ *тригонометрическими полиномами*, где $T_{l_j}\in L^{*}_{\bar{p},\bar{\theta}}(I^m)$ — тригонометрический полином порядка l_j по переменной $x_j,\ j=1,\dots,m$.

Наилучшее приближение "углом" в пространстве Лебега определено М. К. Потаповым [10].

Теперь приведем некоторые вспомогательные утверждения.

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $\varkappa(n)=\{\bar{s}=(s_1,\dots,s_m)\in\mathbb{Z}^m_{+}\colon\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle=n\}$.

Лемма 1. *Пусть* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $1 = \gamma_1 = \ldots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \ldots \leq \gamma_m$ *и* $\tau_j \in [1, +\infty)$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\beta_j} \Big\}_{\overline{s} \in \varkappa(n)} \Big\|_{l_{\overline{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=2}^{m} 1/\tau_j + \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению множества $\varkappa_n$ имеем

$$\Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\beta_j} \Big\}_{\bar{s} \in \varkappa_n} \Big\|_{l_{\bar{\tau}}} = \Big\{ \sum_{s_m < \frac{n}{\gamma_m}} \Big[\cdots \Big[\sum_{s_2 < \frac{1}{\gamma_2}(n - \sum\limits_{j=3}^{m} \gamma_j s_j)} \Big[\sum_{s_1 = \frac{1}{\gamma_1}(n - \sum\limits_{j=2}^{m} \gamma_j s_j)} \prod_{j=2}^{m} s_j^{-d_j \tau_1} \Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \Big]^{\frac{\tau_3}{\tau_2}} \cdots \Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} \Big\}^{\frac{1}{\tau_m}}.$$

Далее, несколько раз применяя соотношение $\sum_{0<s<l} s^\alpha (l-s)^\beta \asymp l^{\alpha+\beta+1}$, $\alpha, \beta > 0, l \in \mathbb{N}$, получим утверждение леммы 1. □

Отметим, что в случае $\beta_j = 0, j = 1, \ldots, m$, лемма 1 доказана в [8].

Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m), \bar{q} = (q_1, \ldots, q_m), 1 \leq p_j < +\infty, 1 \leq \theta < q_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда имеет место неравенство*

$$I_1 = \Big\| \sum_{\bar{l} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big\|_{\bar{p},\theta}^{*} << \Big[\sum_{k_m = l_m}^{n_m} \cdots \sum_{k_1 = l_1}^{n_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (\| \Phi_{\bar{k}}(f) \|_{\bar{p},\bar{q}})^\theta \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $s = [\theta] + 1$. Тогда по свойству нормы и невозрастающей перестановки функции имеем

$$I_1 \leq \Big\| \frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} \Big(\sum_{\bar{l} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big)^{*_1, \ldots, *_m} (\bar{y}) dy_1 \ldots dy_m \Big\|_{\bar{p},\theta}^{*}. \tag{1.1}$$

Из равенства (см. [1])

$$\int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} g^{*_1, \ldots, *_m}(u_1, \ldots u_m) du_1 \ldots du_m = \sup_{e_m : mes(e_m) = t_m} \int_{e_m} \cdots \sup_{e_1 : mes(e_1) = t_1} \int_{e_1} |g(x_1, \ldots, x_m)| dx_1 \ldots dx_m$$

следует

$$\frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} \Big(\sum_{\bar{l} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big)^{*_1, \ldots, *_m} (\bar{y}) dy_1 \ldots dy_m$$

$$\leq \sum_{\bar{l} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} \Phi_{\bar{k}}^{*_1, \ldots, *_m}(f, \bar{y}) dy_1 \ldots dy_m.$$

Поэтому из (1.1) вытекает

$$I_1^\theta \leq \Big\| \sum_{\bar{l} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} \Phi_{\bar{k}}^{*_1, \ldots, *_m}(f, \bar{y}) dy_1 \ldots dy_m \Big\|_{\bar{p},\theta}^{*^\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Big[\sum_{\bar{l} \leq \bar{k} \leq \bar{n}} \frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int_0^{t_m} \cdots \int_0^{t_1} \Phi_{\bar{k}}^{*_1, \ldots, *_m}(f, \bar{y}) dy_1 \ldots dy_m \Big]^{\frac{\theta}{s} s} \prod_{j=1}^{m} t_j^{\frac{\theta}{p_j} - 1} dt_1 \ldots dt_m. \tag{1.2}$$

Далее, применяя к сумме неравенство Йенсена [2, с. 125] $\dfrac{\theta}{s} < 1$, к интегралу по переменной — неравенство Гельдера для нескольких сомножителей с показателями $s > 1$ [11], из (1.2) получим

$$I_1^\theta \le \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Big\{ \sum_{\bar l \le \bar k \le \bar n} \Big[\frac{1}{t_2} \int\limits_0^{t_2} \frac{1}{t_1} \int\limits_0^{t_1} \Phi_{\bar k}^{*_1,\dots,*_m}(f,\bar y) dy_1 \dots dy_m \Big]^{\frac{\theta}{s}} \Big\}^s \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1} dt_1 \dots dt_m$$

$$\le \sum_{\bar l \le \bar k(1) \le \bar n} \dots \sum_{\bar l \le \bar k(s) \le \bar n} \prod_{j=1}^s \Big\{ \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Big[\frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int\limits_0^{t_m} \dots \int\limits_0^{t_1} \Phi_{\bar k(j)}^{*_1,\dots,*_m}(f,\bar y) dy_1 \dots dy_m \Big]^\theta$$

$$\times \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1} dt_1 \dots dt_m \Big\}^{\frac{1}{s}}. \qquad (1.3)$$

Положим

$$\delta_{\bar k(j)}(f,\bar t) = \Big\{ \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{1}{p_j}} \Big[\prod_{j=1}^m \frac{1}{t_j} \int\limits_0^{t_m} \int\limits_0^{t_1} \Phi_{\bar k(j)}^{*_1,\dots,*_m}(f,\bar y) dy_1 \dots dy_m \Big] \Big\}^{\frac{\theta}{s}}.$$

Тогда, учитывая равенство

$$\prod_{j=1}^s \delta_{\nu_j} = \Big[\prod_{1 \le i < j \le s} \delta_{\nu_i} \delta_{\nu_j} \Big]^{\frac{1}{s-1}} \qquad (1.4)$$

и применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau = \dfrac{s(s-1)}{2}$, а затем с показателем $\beta > 1$, $\dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\beta'} = 1$, получим

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^s \Big[\frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_m} \int\limits_0^{t_m} \dots \int\limits_0^{t_1} \Phi_{\bar k(j)}^{*_1,\dots,*_m}(f,\bar y) dy_1 \dots dy_m \Big]^{\frac{\theta}{s}} \prod_{j=1}^m t_j^{\frac{\theta}{p_j}-1} dt_1 \dots dt_m$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \prod_{j=1}^s \delta_{\bar k(j)}(f,\bar t) \frac{dt_1 \dots dt_m}{t_1 \dots t_m} = \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \Big[\prod_{1 \le i < j \le s} \delta_{\bar k(i)}(f,\bar t) \delta_{\bar k(j)}(f,\bar t) \Big]^{\frac{1}{s-1}} \frac{dt_1 \dots dt_m}{t_1 \dots t_m}$$

$$\le \prod_{1 \le i < j \le s} \Big[\int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \big(\delta_{\bar k(i)}(f,\bar t) \delta_{\bar k(j)}(f,\bar t) \big)^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1 \dots dt_m}{t_1 \dots t_m} \Big]^{\frac{1}{\tau}}.$$

Поэтому из неравенства (1.3) находим

$$I_1^\theta \le \sum_{\bar l \le \bar k(1) \le \bar n} \dots \sum_{\bar l \le \bar k(s) \le \bar n} \prod_{1 \le i < j \le s} \Big[\int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \big(\delta_{\bar k(i)}(f,\bar t) \delta_{\bar k(j)}(f,\bar t) \big)^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1 \dots dt_m}{t_1 \dots t_m} \Big]^{\frac{1}{\tau}}. \qquad (1.5)$$

Положим $\rho_{\bar\mu,\bar\nu} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \big(\delta_{\bar\mu}(f,\bar t) \delta_{\bar\nu}(f,\bar t) \big)^{\frac{s}{2}} \frac{dt_1 \dots dt_m}{t_1 \dots t_m}$ и $\alpha = \dfrac{\theta + q}{\theta}$, $\quad \alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} = \dfrac{\theta + q}{q}$. Тогда $\dfrac{\alpha\theta}{2} = \dfrac{\theta + q}{2} < q$ и $\dfrac{\alpha'\theta}{2} < q$. Применяя к этому интегралу сначала неравенство Гельдера $\big(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha'} = 1\big)$, а затем неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов (см. [12, лемма Б; 13, теорема 10]), получим

$$\rho_{\bar\mu,\bar\nu} = \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} \big(\delta_{\bar\mu}(f,\bar t) \big)^{\frac{s}{2}} \prod_{j=1}^m t_j^{-\frac{1}{\alpha_j}} \big(\delta_{\bar\nu}(f,\bar t) \big)^{\frac{s}{2}} \prod_{j=1}^m t_j^{-\frac{1}{\alpha'_j}} \frac{dt_1 \dots dt_m}{t_1 \dots t_m}$$

$$\leq \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar\mu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s\alpha_1}{2}}\frac{dt_1}{t_1}\Big]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}}\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\big(\delta_{\bar\nu}(f,\bar t)\big)^{\frac{s\alpha_1'}{2}}\frac{dt_1}{t_1}\Big]^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m'}{\alpha_{m-1}'}}\frac{dt_m}{t_m}\Big]^{\frac{1}{\alpha_m'}}$$

$$= \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big(\prod_{j=1}^m t_j^{-1}\int\limits_0^{t_m}\ldots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar\mu}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big)^{\frac{\theta\alpha_1}{2}}t_1^{\frac{\theta\alpha_1}{2p_j}-1}dt_1\Big]^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}}}t_m^{\frac{\theta\alpha_m}{2p_m}-1}dt_m\Big]^{\frac{1}{\alpha_m}}$$

$$\times\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big[\ldots\Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big(\prod_{j=1}^m t_j^{-1}\int\limits_0^{t_m}\ldots\int\limits_0^{t_1}\Phi_{\bar\nu}^{*_1,\ldots,*_m}(f,\bar y)dy_1\ldots dy_m\Big)^{\frac{\theta\alpha_1'}{2}}t_1^{\frac{\theta\alpha_1'}{2p_j}-1}dt_1\Big]^{\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}}\ldots\Big]^{\frac{\alpha_m'}{\alpha_{m-1}'}}t_m^{\frac{\theta\alpha_m'}{2p_m}-1}dt_m\Big]^{\frac{1}{\alpha_m'}}$$

$$\leq C\Big[\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j(\frac{2}{\theta\alpha_j}-\frac{1}{q_j})}\|\Phi_{\bar\mu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*\Big]^{\frac{\theta}{2}}\Big[\prod_{j=1}^m 2^{\nu_j(\frac{2}{\theta\alpha_j'}-\frac{1}{q_j})}\|\Phi_{\bar\nu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*\Big]^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= C\prod_{j=1}^m 2^{-|\nu_j-\mu_j|(\frac12-\frac{1}{\alpha_j})}\Big[\prod_{j=1}^m 2^{\mu_j(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})\theta}(\|\Phi_{\bar\mu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\prod_{j=1}^m 2^{\nu_j(\frac1\theta-\frac{1}{q_j})\theta}(\|\Phi_{\bar\nu}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac12}. \qquad (1.6)$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что

$$I_1^\theta << \sum_{\bar l\leq\bar k(1)\leq\bar n}\ldots\sum_{\bar l\leq\bar k(s)\leq\bar n}\prod_{1\leq i<j\leq s}\Big\{\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(j)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(j)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac12}$$

$$\times\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})}\Big\}^{\frac1\tau}. \qquad (1.7)$$

Теперь, пользуясь формулой (1.4), будем иметь

$$\prod_{1\leq i<j\leq s}\Big\{\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(j)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(j)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac12}$$

$$\times\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})}\Big\}^{\frac1\tau}$$

$$=\prod_{i=1}^s\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac1s}\prod_{j=1}^s\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})\frac{1}{2\tau}}.$$

Учитывая это равенство и пользуясь неравенством Гельдера с показателем $s>1$, из (1.7) получим

$$I_1^\theta << \sum_{\bar l\leq\bar k(1)\leq\bar n}\ldots\sum_{\bar l\leq\bar k(s)\leq\bar n}\prod_{i=1}^s\Big[\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta\Big]^{\frac1s}$$

$$\times\prod_{j=1}^s\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})\frac{1}{2\tau}}\leq C(p,q,\theta)$$

$$\times\prod_{i=1}^s\Big[\sum_{\bar l\leq\bar k(1)\leq\bar n}\ldots\sum_{\bar l\leq\bar k(s)\leq\bar n}\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(i)(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k(i)}(f)\|_{\bar p,q}^*)^\theta\prod_{j=1}^s\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu(i)-k_\nu(j)|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})\frac{1}{s-1}}\Big]^{\frac1s}$$

$$<< \Big[\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\ldots\sum_{k_m=-\infty}^{+\infty}\prod_{\nu=1}^m 2^{-|k_\nu|(\frac12-\frac{1}{\alpha_\nu})}\Big]^{\frac{1}{s-1}}\sum_{\bar l\leq\bar k\leq\bar n}\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta$$

$$= C\sum_{\bar l\leq\bar k\leq\bar n}\prod_{\nu=1}^m 2^{k_\nu(\frac1\theta-\frac{1}{q_\nu})\theta}(\|\Phi_{\bar k}(f)\|_{\bar p,\bar q}^*)^\theta.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть* $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\bar{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $1 \le \theta < q_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда для любой функции* $f \in L^*_{\bar{p},\bar{q}}(I^m)$ *и подмножества* $e \subset e_m$ *имеет место неравенство*

$$I_1 = \Big\| \sum_{\bar{l}^e \le \bar{k}^e \le \bar{n}^e} \Phi_{\bar{k}^e}(f) \Big\|^*_{\bar{p},\theta} << \Big[\sum_{\bar{l}^e \le \bar{k}^e \le \bar{n}^e} \prod_{j\in e} 2^{k^e_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (\|\Phi_{\bar{k}^e}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{q}})^\theta \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Для доказательства этой леммы нужно повторить рассуждения, проведенные в доказательстве леммы 2 для суммы $\sum_{\bar{l}^e \le \bar{k}^e \le \bar{n}^e} \Phi_{\bar{k}^e}(f, \bar{x})$, учитывая, что $\Phi_{\bar{k}^e}(f, \bar{x})$ является тригонометрическим полиномом порядка 1 по переменным x_j, для которых $j \notin e$. $\square$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $1 \le \theta < p < +\infty$. *Если* $f \in L_p(I^m)$ *и*

$$\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p \big)^\theta < +\infty,$$

то $f \in L^*_{p,\theta}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p \big)^\theta \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд

$$\sum_{\bar{\nu}\in\mathbb{Z}^m}^{\infty} \varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x}), \tag{2.8}$$

где $\bar{\varphi}_{\bar{\nu}}(\bar{x}) = -\Delta_{\bar{\nu}}(f, \bar{x})$. Учитывая, что $W_{0,0}(f, \bar{x}) = 0$ и лемму 5 из [10], имеем

$$\Big\| f - \sum_{\nu_m=0}^{n_m} \cdots \sum_{\nu_1=0}^{n_1} \varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x}) \Big\|_p \le C(p,q,m) \sum_{j=1}^{m} Y_{2^{n_1-1}-1, \ldots, 2^{n_{j-1}-1}-1, 0, 2^{n_{j+1}}-1, \ldots, 2^{n_m}-1}(f)_p \to 0$$

при $n_j \to +\infty$, $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, ряд (2.8) сходится в $L_p(I^m)$ к функции $f \in L_p(I^m)$.

В силу монотонности наилучшего приближения "углом" и условия теоремы 1 имеем

$$\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^\theta < +\infty. \tag{2.9}$$

В силу леммы 2 при $p_j = q_j = p, j = 1, \ldots, m$, получим

$$\Big\| \sum_{k_1=l_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=l_m}^{n_m} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big\|^*_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=l_m}^{n_m} \cdots \sum_{k_1=l_1}^{n_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \|\Phi_{\bar{k}}(f)\|^\theta_p \Big]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.10}$$

По определению функции $\varphi_{\bar{\nu}}(\bar{x})$, свойству нормы и монотонности наилучшего приближения

$$\|\Phi_{\bar{k}}(f)\|_p \le \sum_{j=1}^{m} \big\| f - W_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_j}}-1, 2^{2^{k_{j+1}+1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m+1}}-1} \big\|_p << Y_{2^{2^{k_1}}-1, \ldots, 2^{2^{k_m}}-1}(f)_p. \tag{2.11}$$

Таким образом, из (2.9) и (2.10) следует, что ряд (2.8) сходится в метрике пространства $L^{*}_{p,\theta}(I^m)$. Значит, $f \in L^{*}_{p,\theta}(I^m)$. Полагая $l_1 = \ldots = l_m = 0$ в (2.10) и учитывая (2.11), имеем

$$\Big\| \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{n_m} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big\|^{*}_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=0}^{n_m} \cdots \sum_{k_1=0}^{n_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.12)$$

По свойству нормы, в силу леммы 3 и неравенства (2.12) получим

$$\Big\| \sum_{\nu_2=0}^{2^{n_m+1}-1} \cdots \sum_{\nu_1=0}^{2^{n_1+1}-1} \varphi_{\bar{\nu}} \Big\|^{*}_{p,\theta} \le \Big\| \sum_{\nu_2=1}^{2^{n_m+1}-1} \cdots \sum_{\nu_1=1}^{2^{n_1+1}-1} \varphi_{\bar{\nu}} \Big\|^{*}_{p,\theta} + \sum_{e \subset e_m} \Big\| \sum_{\bar{1}^e \le \bar{\nu}^e \le 2^{\bar{n}^e+1}} \varphi_{\bar{\nu}^e} \Big\|^{*}_{p,\theta}$$

$$= \Big\| \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{n_m} \Phi_{\bar{k}}(f) \Big\|^{*}_{\bar{p},\theta} + \sum_{e \subset e_m} \Big\| \sum_{\bar{0} \le \bar{k}^e \le \bar{n}^e} \Phi_{\bar{k}^e}(f) \Big\|^{*}_{p,\theta}$$

$$<< \Big\{ \Big[\sum_{k_m=0}^{n_m} \cdots \sum_{k_1=0}^{n_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$+ \Big[\sum_{e \subset e_m} \sum_{\bar{0} \le \bar{k}^e \le \bar{n}^e} \prod_{j \in e} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(\|\Phi_{\bar{k}^e}(f)\|_p \big)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}} \Big\}. \qquad (2.13)$$

По свойству наилучшего приближения "углом" справедливы неравенства

$$\|\Phi_{\bar{k}^e}(f)\|_p = \Big\| \sum_{2^{\bar{k}^e} \le \bar{\nu}^e \le 2^{\bar{k}^e+1}} \varphi_{\bar{\nu}^e} \Big\|_p << Y_{(2^{2^{\bar{k}}}-1)^e}(f)_p. \qquad (2.14)$$

В силу (2.14) из (2.13) получим

$$\Big\| \sum_{\nu_2=0}^{2^{n_m+1}-1} \cdots \sum_{\nu_1=0}^{2^{n_1+1}-1} \varphi_{\bar{\nu}} \Big\|^{*}_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=0}^{n_m} \cdots \sum_{k_1=0}^{n_1} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$+ \Big[\sum_{e \subset e_m} \sum_{\bar{0} \le \bar{k}^e \le \bar{n}^e} \prod_{j \in e} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} (Y_{(2^{2^{\bar{k}}}-1)^e}(f)_{\bar{p},\bar{q}})^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}$$

$$<< \Big[\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p \big)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}. \qquad (2.15)$$

Так как ряд (2.8) сходится к f по метрике пространства $L^{*}_{\bar{p},\theta}(I^m)$, то в (2.15) переходя к пределу при $n_1 \to +\infty, \ldots, n_m \to +\infty$ получим

$$\|f\|^{*}_{p,\theta} << \Big[\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta (\frac{1}{\theta} - \frac{1}{q_j})} \big(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\ldots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p \big)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le \theta \le \min\{2, p\}$, $1 < p < +\infty$. *Если* $f \in L_p(I^m)$ *и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\theta}{p}} \big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{*}_{p} \big)^{\theta} < +\infty,$$

то $f \in L^{*}_{p,\theta}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^{*}_{p,\theta} << \Big[\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\theta}{p}} \Big(\big\|\delta_{\bar{s}}(f)\big\|_p \Big)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению наилучшего приближения "углом" и свойству нормы имеем

$$Y_{2^{2^{k_1}}-1,\dots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p \le \|f - U_{2^{2^{k_1}}-1,\dots,2^{2^{k_m}}-1}\|_p \le \sum_{\nu_m=k_m}^{\infty}\dots\sum_{\nu_1=k_1}^{\infty}\Big\|\sum_{s_m=2^{\nu_m}+1}^{2^{\nu_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{\nu_1}+1}^{2^{\nu_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p.$$

Учитывая это неравенство и применяя лемму 2.2 из [14], получим

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}(Y_{2^{2^{k_1}}-1,\dots,2^{2^{k_m}}-1}(f)_p)^{\theta}$$

$$<< \sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p\Big)^{\theta}. \tag{2.16}$$

По теореме Литтльвуда — Пэли (см. [2, с. 55])

$$\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p \asymp \Big\|\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p$$

при $1 < p < +\infty$.

Поэтому, если $1 < p \le 2$, то в силу неравенства Йенсена (см. [2, с. 125]) имеем

$$\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p << \Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^{\theta}$$

$$<< \sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\Big\|\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}.$$

Так как по условию теоремы $\theta < p$, то в силу неравенства Йенсена (см. [2, с. 125]) отсюда получим

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\Big\|\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^p\Big)^{\frac{\theta}{p}}$$

$$\le \sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta} \le \sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p^{\theta} << \sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}, \tag{2.17}$$

если $1 < p \le 2$.

Теперь, если $2 < p < +\infty$, то по свойству нормы выводим

$$\Big\|\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}|\delta_{\bar{s}}(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p \le \Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому, если $\theta \le 2$, пользуясь неравенством Йенсена (см. [2, с. 125]), имеем

$$\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\Big\|\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\delta_{\bar{s}}(f)\Big\|_p\Big)^{\theta}$$

$$<<\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Big(\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^2\Big)^{\frac{\theta}{2}}$$

$$<<\sum_{k_m=0}^{\infty}\dots\sum_{k_1=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}2^{k_j\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\dots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}<<\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}. \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.16)–(2.18) и теоремы 1 следуют утверждения теоремы 2. □

Следствие. *Пусть* $1<\theta\le\min\{2,p\}$, $p\le q_j, j=1,\dots,m$. *Если* $f\in L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$ *и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\big)^{\theta}<\infty,$$

то $f\in L^*_{p,\theta}(I^m)$ *и*

$$\|f\|^*_{p,\theta}<<\Big[\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\big)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $p\le q_j, j=1,\dots,m$, то $L^*_{p,p}(I^m)=L_p(I^m)\subset L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$. Поэтому в силу неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов (см. [12, лемма Б; 13, теорема 10]) имеем

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_p^{\theta}<<\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\theta(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j})}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\big)^{\theta}.$$

Поэтому функция $f\in L_p(I^m)$, и, применяя к этой функции теорему 2, получим утверждения следствия. □

Теорема 3. *Пусть* $\bar{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, $1<\lambda_j<\theta<+\infty$, $j=1,\dots,m$, $\max\{p,2\}\le\theta<+\infty$. *Если* $f_0\in L^*_{\bar{p},\theta}(I^m)$,

$$f_0(\bar{x})\sim\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}a_{\bar{s}}\sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})}\prod_{j=1}^{m}\big(n_j-2^{s_j-1}+1\big)^{\frac{1}{p}-1}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle},$$

то

$$\|f_0\|^*_{p,\theta}>>\Big[\sum_{s_m=1}^{\infty}\dots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j})\theta}\big(\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\big)^{\theta}\Big]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. А. П. Блозински [1] доказал, что

$$\|f\|^*_{p,\theta}>>\sup_{\substack{g\in L^*_{p',\theta'}\\ \|g\|^*_{p',\theta'}\le 1}}\Big|\int\limits_{I^m}f(\bar{x})g(\bar{x})d\bar{x}\Big|, \tag{2.19}$$

где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $\dfrac{1}{\theta}+\dfrac{1}{\theta'}=1$, $1<p,\theta<+\infty$.

Рассмотрим функцию $g_\nu(\bar{x}) = \sum\limits_{s_m=1}^{\nu-1} \dots \sum\limits_{s_1=1}^{\nu-1} b_{\bar{s},\nu} \sum\limits_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \left(n_j - 2^{s_j-1}+1\right)^{\frac{1}{p'}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}$, где

$$b_{\bar{s},\nu} = \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|_{p,\bar{\lambda}} \Big\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}} \Big\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}} |a_{\bar{s}}|^{\theta-1} \operatorname{sign}(a_{\bar{s}}).$$

В силу непрерывности $g_\nu \in L^*_{p',\theta'}(I^m)$. Теперь покажем, что $\|g_\nu\|^*_{p',\theta'} \le C_0$, где C_0 — некоторое положительное число. По определению функции g_ν, учитывая соотношение

$$\Big\| \sum_{\bar{k}\in\rho(\bar{s})} \prod_{j=1}^{m} \left(n_j - 2^{s_j-1}+1\right)^{\frac{1}{p}-1} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle} \Big\|_{p,\bar{\lambda}} \asymp \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\lambda_j}} \tag{2.20}$$

при $1 < p, \lambda_j < +\infty, j = 1, \dots, m$, имеем

$$\Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{\lambda'_j}} \|\delta_{\bar{s}}(g_\nu)\|^*_{p',\bar{\lambda}'} \Big\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}} \Big\|_{l_{\theta'}} << \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}} \Big\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}} \Big\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}}$$

$$\times \Big[\sum_{s_m=1}^{\nu-1} \dots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\theta}{\lambda_j}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right)^{\theta} \Big]^{\frac{1}{\theta'}} \le C_0,$$

где $\lambda'_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_j - 1}, j = 1, \dots, m$.

Таким образом, $\Big\| \Big\{ \prod\limits_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{\lambda'_j}} \|\delta_{\bar{s}}(g_\nu)\|_{p',\bar{\lambda}'} \Big\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}} \Big\|_{l_{\theta'}} \le C_0$. Значит, в силу следствия из теоремы 2 функция $G_\nu(\bar{x}) = C_0^{-1} g_\nu(\bar{x}) \in L^*_{p',\theta'}(I^m)$ и $\|G_\nu\|^*_{p',\theta'} \le 1$.

В силу (2.19) и ортогональности системы $\{e^{i\langle\bar{n},\bar{x}\rangle}\}$ имеем

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \int\limits_{I^m} f_0(\bar{x}) g_\nu(\bar{x}) d\bar{x} = \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\tau}} \Big\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}} \Big\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}} \times \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \dots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} |a_{\bar{s}}|^{\theta} \prod_{j=1}^{m} s_j. \tag{2.21}$$

Далее, учитывая соотношение (2.20), получим $|a_{\bar{s}}(f_0)|^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{m} s_j \asymp \prod\limits_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\theta}{\lambda_j}} \left(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right)^{\theta}$. Поэтому из (2.21) следует, что

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}} \Big\}_{\bar{s}=\bar{1}}^{\bar{\nu}-\bar{1}} \Big\|_{l_\theta}^{-\frac{\theta}{\theta'}} \times \sum_{s_m=1}^{\nu-1} \dots \sum_{s_1=1}^{\nu-1} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1-\frac{\theta}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|^{\theta}_{p,\bar{\lambda}}.$$

В этом неравенстве, переходя к пределу при $\nu \to +\infty$, получим

$$\|f_0\|^*_{p,\theta} >> \Big\| \Big\{ \prod_{j=1}^{m} s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}} \Big\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_\theta}.$$

Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_m$, $\gamma_j = r_j/r_1, j = 1, 2, \dots, m$.

1. *Пусть* $\theta \le \tau_j,\ j = 1, \dots, m$. *Если* $1 < \theta \le \min\{p, 2\}$ *и* $p \le q_j,\ j = 1, \dots, m$, *то*

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}} B\big)_{p,\theta} << 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}.$$

Если $1 < p \le q_j < \infty,\ j = 1,\dots,m,\ \max\{p,2\} \le \theta < \infty$, *то*

$$E_n^{(\bar\gamma)}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B\big)_{p,\theta} >> 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}.$$

2. *Пусть* $1 \le \tau_j \le \theta, j = 1,\dots,m$. *Если* $1 < \theta \le \min\{p,2\}$ *и* $p \le q_j, j = 1,\dots,m$, *то*

$$E_n^{(\bar\gamma)}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B\big)_{p,\theta} << \sup_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}.$$

Если $1 < p_j < \infty$, $1 < \theta_j < q_j < \infty,\ j = 1,\dots,m$, *то*

$$E_n^{(\bar\gamma)}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{\bar p,\bar q,\bar\tau}B\big)_{\bar p,\bar\theta} >> \sup_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta_j}-\frac{1}{q_j}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\theta < \tau_j,\ j = 1,\dots,m$. Применяя неравенство Гельдера, нетрудно убедиться, что для функция $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B$ выполняется условие следствия. Следовательно, эта функция принадлежит пространству $L^*_{p,\theta}(I^m)$. Поэтому, применяя следствие теоремы 1 к функции $f - S_n^{(\gamma)}(f) \in L^*_{p,\theta}(I^m)$, получим

$$\big\|f - S_n^{(\bar\gamma)}(f)\big\|^*_{p,\theta} << \Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\ \|\delta_{\bar s}(f)\|^*_{p,\bar q}\Big\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\Big\|_{l_\theta}. \tag{2.22}$$

Далее, применяя неравенство Гельдера $\Big(\beta_j = \dfrac{\tau_j}{\theta}, \dfrac{1}{\beta_j} + \dfrac{1}{\beta'_j} = 1\Big)$ и лемму 1 из [12], при $\beta_j = \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{p}$ имеем

$$\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\big\|\delta_{\bar s}(f)\big\|^*_{p,\bar q}\Big\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\Big\|_{l_\theta} \le \Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\big\|\delta_{\bar s}(f)\big\|^*_{p,\bar q}\Big\}_{\bar s\in \mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\bar\tau}}$$
$$\times\Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\Big\}_{\bar s\in Y^m(\bar\gamma,n)}\Big\|_{l_{\bar\epsilon}} << \Big\|\Big\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\big\|\delta_{\bar s}(f)\big\|^*_{p,\bar q}\Big\}_{\bar s\in \mathbb{Z}^m_+}\Big\|_{l_{\bar\tau}}$$
$$\times\, 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}1/\epsilon_j}, \tag{2.23}$$

где $\epsilon_j = \theta\beta'_j,\ \dfrac{1}{\epsilon_j} = \dfrac{1}{\theta}\,\beta'_j = \dfrac{1}{\theta} - \dfrac{1}{\tau_j},\ j = 1,\dots,m.$

Теперь из (2.22) и (2.23) следует $\big\|f - S_n^{(\bar\gamma)}(f)\big\|^*_{p,\theta} << 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}$ в случае $\theta < \tau_j, j = 1,2,\dots,m$, для функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B$. Отсюда получается оценка

$$E_n^{(\bar\gamma)}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar r}_{p,\bar q,\bar\tau}B\big)_{p,\theta} << 2^{-nr_1}\ n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}$$

в случае $\theta < \tau_j, j = 1,2,\dots,m.$

Докажем оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$f_0(\bar x) = n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\sum_{\bar s\in\varkappa(n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{-\frac{1}{q_j}}\sum_{\bar k\in\rho(\bar s)}\prod_{j=1}^{m}\big(n_j - 2^{s_j-1}+1\big)^{\frac{1}{p}-1}e^{i\langle\bar k,\bar x\rangle}.$$

В силу непрерывности $f_0 \in L^*_{p,\bar{q}}(I^m)$. Далее, в силу соотношения (2.20) и [8, лемма 2] получим

$$\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\,\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{q}}\right\}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} << n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}\frac{1}{\tau_j}}\left\|\left\{\chi_{\varkappa(n)}(\bar{s})\right\}_{\bar{s}\in\varkappa(n)}\right\|_{l_{\bar{\tau}}} << n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j}\,n^{\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j} = C_0.$$

Таким образом, функция $F_0 = C_0^{-1}f_0 \in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}}B$. По определению функции f_0 и наилучшего приближения справедливо равенство $E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p,\theta} = \|f_0\|^*_{p,\theta}$. Выберем числа $\lambda_j \in [1,\theta), j = 1,2,\ldots m$. Теперь, применяя теорему 3 и лемму 1, будем иметь

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f_0)_{p,\theta} = \|f_0\|^*_{p,\theta} >> \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\lambda_j}}\|\delta_{\bar{s}}(f_0)\|^*_{p,\bar{\lambda}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_\theta}$$

$$>> n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}1/\tau_j}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}\right\}_{\bar{s}\in\varkappa(n)}\right\|_{l_\theta} >> 2^{-nr_1}\,n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/\theta-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/\theta-1/\tau_j)}.$$

Этим оценка снизу в случае $\theta < \tau_j, j = 1,2,\ldots,m$, доказана.

Докажем второй пункт. Пусть $\tau_j < \theta, j = 1,2,\ldots,m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена, будем иметь

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{p,\bar{q}}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\right\|_{l_\theta} \leq \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\bar{q}}\right\}_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}$$

$$\leq \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\bar{q}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar{\tau}}}\sup_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}.$$

Поэтому из неравенства (2.23) следует

$$E_n^{(\bar{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\bar{q},\bar{\tau}}B\big)_{p,\theta} << \sup_{\bar{s}\in Y^m(\bar{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}}$$

в случае $\tau_j \leq \theta, j = 1,2,\ldots,m$. Оценка сверху доказана.

Докажем оценку снизу. Пусть $\tau_j \leq \theta, j = 1,2,\ldots,m$ и $\forall\tilde{\bar{s}} \in Y^m(\overline{\gamma},n)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\bar{x}) = \prod_{j=1}^{m}2^{-\tilde{s_j}r_j}\tilde{s_j}^{\frac{-1}{q_j}}\sum_{\bar{k}\in\rho(\tilde{\bar{s}})}\prod_{j=1}^{m}\left(n_j-2^{\tilde{s_j}-1}+1\right)^{\frac{1}{p_j}-1}e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}.$$

Тогда в силу соотношения (2.20) имеем $\left\|\delta_{\tilde{\bar{s}}}(f_1)\right\|^*_{\overline{p},\overline{q}} \asymp \prod_{j=1}^{m}2^{-\tilde{s_j}r_j}$. Если $\bar{s} \neq \tilde{\bar{s}}$, то $\|\delta_{\overline{s}}(f_1)\|^*_{\overline{p},\overline{q}} = 0$. Поэтому $\left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\,\|\delta_{\overline{s}}(f_1)\|^*_{\overline{p},\overline{q}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \leq C_1$. Следовательно, функция $C_1^{-1}f_1 \in S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B$. Так как $\langle\tilde{\bar{s}},\bar{\gamma}\rangle \geq n$, то $E_n^{(\bar{\gamma})}(f_1)_{\bar{p},\theta} = \|f_1\|^*_{\bar{p},\theta}$.

Поэтому, учитывая соотношение (2.20), имеем

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(f_1)_{\bar{p},\theta} = \|f_1\|^*_{\bar{p},\theta} >> \prod_{j=1}^{m}2^{-\tilde{s_j}r_j}\tilde{s_j}^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}} \quad \forall\tilde{\bar{s}} \in Y^m(\overline{\gamma},n).$$

Значит,

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_{\bar{p},\theta} >> \sup_{\bar{s}\in Y^m(\overline{\gamma},n)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{q_j}}.$$

Теорема 4 доказана. □

З а м е ч а н и е. Если $p = \theta = 2$, то $\min\{p,2\} = \max\{p,2\} = 2$ и $L^*_{p,\theta}(I^m) = L_2(I^m)$. Поэтому из утверждений п. 1 теоремы 4 следует, что

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_2 \asymp 2^{-nr_1}\,n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/2-1/q_j)+\sum\limits_{j=2}^{m}(1/2-1/\tau_j)}$$

при $2 < q_j < \infty,\ 2 < \tau_j \leq \infty,\ j = 1,\ldots,m$.

3. Заключение

В [12, неравенство (32)] доказано неравенство

$$\sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{k_2\theta_2(\frac{1}{\theta_2}-\frac{1}{q_2})}\Big\{\sum_{s_2=2^{k_2}+1}^{2^{k_2+1}}\Big[\sum_{k_1=0}^{\infty} 2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{1}{\theta_1}}\Big\}^{\theta_2}$$

$$<< \sum_{s_2=2}^{\infty} s_2^{1-\frac{\theta_2}{q_2}}\Big[\sum_{s_1=2}^{\infty} s_1^{1-\frac{\theta_1}{q_1}}\Big(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big)^{\theta_1}\Big]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}. \qquad (3.24)$$

Как указано в [12], применяя неравенство Гельдера для доказательства (3.24) с показателями $\dfrac{1}{\theta_j}+\dfrac{1}{\theta_j'}=1, j=1,2$, получим

$$2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big)^{\theta_1} << \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} s_1^{\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*})^{\theta_1}.$$

К сожалению, в доказательстве этого неравенства допущена неточность. В действительности должно быть

$$2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}\Big(\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*}\Big)^{\theta_1}$$

$$\le 2^{k_1\theta_1(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{q_1})}2^{k_1(\theta_1-1)}\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*})^{\theta_1} << \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} s_1^{\theta_1(1-\frac{1}{q_1})}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{q}}^{*})^{\theta_1}.$$

Теорема 2 является некоторым исправлением указанной неточности в доказательстве неравенства (3.24).

Отметим, что в случае $\bar{\theta}=\bar{q}$ оценка величины

$$E_n^{(\overline{\gamma})}\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B\big)_{\overline{p},\bar{\theta}} = \sup_{f\in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{q},\overline{\tau}}B} E_n^{(\overline{\gamma})}(f)_{\overline{p},\bar{\theta}}$$

неизвестна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Blozinski A.P.** Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Society. 1981. Vol. 263, no. 1. P. 146–167.
2. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
3. **Никольский С.М.** Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.
4. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-ата: Наука, 1976. 224 с.
5. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.
6. **Тихомиров В.М.** Теория приближений. Современные проблемы математики. М., 1987. С. 103–270.
7. **Dinh Dung , Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation [e-resource]. 2016. 154 p. URL: http://arxiv.org/pdf/1601.03978v1 .
8. **Акишев Г.** Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40.

9. **Бекмаганбетов К. А.** О порядках приближения класса Бесова в метрике анизотропных пространств Лоренца // Уфим. мат. журн. 2009. Т. 1, № 2. С. 9–16.
10. **Потапов М.К.** Теоремы вложения в смешанной метрике // Тр. МИАН. 1980. Т. 156. С. 143–156.
11. **Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.
12. **Акишев Г.** О порядках приближения классов в пространствах Лоренца // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 51–67.
13. **Нурсултанов Е.Д.**, Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 1–18.
14. **Johansson H.** Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases/ / Research Report University Umea. 1975. Vol. 6. P. 1–36.

Акишев Габдолла

Поступила 02.09.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms. *Trans. Amer. Math. Society.*, 1981, vol. 263, no. 1, pp. 146–167.
2. Nikolsky S.M. *Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya* (Approximation of functions of several variables and imbedding theorems). Moscow: Nauka Publ., 1977, 456 p. (in Russian).
3. Nikol'skii S.M. Functions with dominant mixed derivative satisfying a multiple Holder condition. *Sib. Mat. Zh.*, 1963, vol. 4, no. 6, pp. 1342–1364 (in Russian).
4. Amanov T.I. *Prostranstva differenciruemyh funkcij s dominiruyushchej smeshannoj proizvodnoj* (Spaces of differentiable functions with dominating mixed derivative). Alma-Ata: Nauka Publ., 1976, 224 p. (in Russian).
5. Babenko K.I. The approximation of a certain class of periodic functions of many variables by trigonometric polynomials. *Dokl. AN SSSR*, 1960, vol. 132, no. 5, pp. 982–985 (in Russian).
6. Tikhomirov V.M. Approximation theory. *Sovrem. Probl. Mat.*, Moscow: VINITI, 1987, pp. 103–260 (in Russian).
7. Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation*, 2016, 154 p. Available at: http://arxiv.org/pdf/1601.03978v1 .
8. Akishev G. Approximation of function classes in spaces with mixed norm. *Math. Sb.*, 2006, vol. 197, no. 8, pp. 1121–1144.
9. Bekmaganbetov K.A. On the order of approximation of Besov classes in metric of anisotropic Lorentz spaces. *Ufim. Mat. Zh.*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 9–16 (in Russian).
10. Potapov M.K. Imbedding theorems in a mixed metric. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1983, vol. 156, pp. 155–171.
11. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. *Integralnye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya* (Integral representations of functions and imbedding theorems). Washington: V.H. Winston & Sons, New York-Toronto, Ont.-London: Halsted Press [John Wiley & Sons], 1978, vol. 1, 345 p.
12. Akishev G. On the order of approximation of classes in Lorentz space. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2008, vol. 5, pp. 51–67 (in Russian).
13. Nursultanov E.D. Nikol'skii's inequality for different metrics and properties of the sequence of norms of the Fourier sums of a function in the Lorentz space. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 255, pp. 185–202.
14. Johansson H. Embedding of H_p^ω in some Lorentz spases. *Research Report University Umea*, 1975, vol. 6, pp. 1–36.

G. Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RSE Academician E.A. Buketov Karaganda State University, the Republic of Kazakhstan, 100028; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: akishev_g@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ[1]

Р. Р. Акопян

Изучены три взаимосвязанные экстремальные задачи в пространстве $\mathcal{H}$ аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых на части γ_1 единичной окружности Γ принадлежат пространству $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ функций существенно ограниченных на γ_1 с весом ψ_1, а на множестве $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ принадлежат пространству $L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)$ с весом ψ_0. А именно, на классе Q функций из $\mathcal{H}$ с нормой $L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)$ граничных значений на γ_0, не превосходящей единицы, решена задача оптимального восстановления аналитической функции на подмножестве единичного круга по заданным с погрешностью относительно нормы $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ ее граничным значениям на γ_1. Изучена задача оптимального выбора множества γ_1 при фиксированном значении меры этого множества. Исследована задача наилучшего приближения оператора аналитического продолжения с части границы линейными ограниченными операторами.

Ключевые слова: оптимальное восстановление аналитических функций, наилучшее приближение неограниченных операторов, функция Сегё.

R. R. Akopyan. Optimal recovery of a function analytic in a disk from approximately given values on a part of the boundary.

We study three related extremal problems in the space $\mathcal{H}$ of functions analytic in the unit disk such that their boundary values on a part γ_1 of the unit circle Γ belong to the space $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ of functions essentially bounded on γ_1 with weight ψ_1 and their boundary values on the set $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ belong to the space $L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)$ with weight ψ_0. More exactly, on the class Q of functions from $\mathcal{H}$ such that the norm $L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)$ of their boundary values on γ_0 does not exceed one, we solve the problem of optimal recovery of an analytic function on a subset of the unit disk from its boundary values on γ_1 specified approximately with respect to the norm $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$. We also study the problem of the optimal choice of the set γ_1 under a given fixed value of its measure. The problem of the best approximation of the operator of analytic continuation from a part of the boundary by linear bounded operators is investigated.

Keywords: optimal recovery of analytic functions, best approximation of unbounded operators, Szegő function.

MSC: 30E10, 30E25, 30C85, 41A35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-29-42

1. Введение

1.1. Обозначения. В дальнейшем $D = \{z : |z| < 1\}$ — открытый единичный круг, ограниченный единичной окружностью $\Gamma = \left\{z = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\right\}$. Пусть E_1 — измеримое подмножество отрезка $[0, 2\pi]$ положительной меры и $\gamma_1 = \left\{z = e^{it} \colon t \in E_1\right\}$ соответствующее подмножество окружности Γ. Естественно считать меру E_1 мерой множества γ_1; для этой меры будет использоваться обозначение $m(\gamma_1)$.

Рассмотрим пространство Харди $H^1(D)$ функций, аналитических в круге D. Известно (см., например, [15, гл. III, § 1, п.1.7]), что для функции f из пространства $H^1(D)$ почти всюду на Γ существуют некасательные предельные граничные значения, которые составляют функцию из $L^1(\Gamma)$; эту функцию обозначают тем же символом f.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Через ϕ обозначим неотрицательную суммируемую на $[0,2\pi]$ функцию, а через ϕ_1 и ϕ_0 — ее сужения соответственно на E_1 и $E_0=[0,2\pi]\setminus E_1$. На γ_1 и $\gamma_0=\Gamma\setminus\gamma_1$ определим функции ψ_k, $k=0,1$, равенствами

$$\psi_k(e^{it})=1/\phi_k(t), \quad t\in E_k, \quad k=0,1.$$

Введем подпространство $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\phi)$ пространства $H^1(D)$ функций, граничные значения которых на γ_k, $k=0,1$, имеют конечные L^∞-нормы с весом ψ_k, т. е.

$$\|f\|_{L^\infty_{\psi_k}(\gamma_k)}=\big\|f(e^{i\cdot})/\phi_k\big\|_{L^\infty(E_k)}<+\infty, \quad k=0,1;$$

функция $f\in H^1(D)$ принадлежит $\mathcal{H}$ в том и только том случае, если существует константа M, $0\le M<+\infty$, такая, что почти всюду на $[0,2\pi]$ справедливо неравенство $|f(e^{it})|\le M\phi(t)$.

В $\mathcal{H}(\phi)$ выделим класс Q функций, граничные значения которых на γ_0 удовлетворяют условию $\|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)}=\|f(e^{i\cdot})/\phi_0\|_{L^\infty(E_0)}\le 1$, или, другими словами, почти всюду на E_0 справедливо неравенство $|f(e^{it})|\le\phi_0(t)$.

Пусть K — подмножество единичного круга D и пусть $B=B(K)$ — некоторое банахово пространство функций, определенных на множестве K, с нормой $\|\cdot\|_B$, такое, что имеет место вложение $Q\subset B(K)$. Обозначим через Υ оператор, определенный на подпространстве $L^1(\gamma_1)$ функций, являющихся граничными значениями на γ_1 функций пространства $H^1(D)$, и ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции на γ_1 ее сужение на множество K.

Функцию вещественного переменного $\delta\in[0,\infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta)=\omega(\delta;\Upsilon,Q)=\sup\big\{\|f\|_B : f\in Q,\ \|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}\le\delta\big\}, \tag{1.1}$$

называют *модулем непрерывности оператора* Υ *на классе* Q. Из определения (1.1) следует, что для функций пространства $\mathcal{H}(\phi)$ справедливо точное неравенство

$$\|f\|_B\le\|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)}\,\omega\Big(\frac{\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)}}\Big).$$

1.2. Постановка и обсуждение задач. В данной статье рассматривается три взаимосвязанные экстремальные задачи на классе функций Q.

Изначальной является задача оптимального восстановления аналитической в единичном круге функции по заданным с известной погрешностью δ по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ ее граничным значениям на γ_1 и дополнительной информации принадлежности функции классу Q. Более точно, пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q\in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ такая, что почти всюду на E_1 справедливо неравенство $|f(e^{it})-q(e^{it})|\le\delta\phi_1(t)$, или, что то же самое, $\|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}\le\delta$. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q функцию f на K. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать множество $\mathcal{O}$ всех возможных, $\mathcal{B}$-ограниченных, или $\mathcal{L}$-линейных операторов из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$. Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta\ge0$ и метода восстановления $T\in\mathcal{R}$ величина

$$\mathcal{U}(T,\delta)=\sup\Big\{\|f-Tq\|_B\colon f\in Q,\, q\in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\, \|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}\le\delta\Big\} \tag{1.2}$$

является погрешностью восстановления функций класса Q по их граничным значениям на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)=\inf\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T\in\mathcal{R}\} \tag{1.3}$$

есть величина оптимального восстановления на множестве K (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ) функций класса Q по их δ-приближенным граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (1.3) достигается нижняя грань.

Задача (1.3) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации; общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [3–5; 11; 13]. Результаты, связанные с оптимальным восстановлением на классах аналитических функций, можно найти в монографии [14] и в работе автора [2].

Так как множество γ_1 имеет положительную меру, то оно является множеством единственности (см., например, [9, гл. X, § 2]) для функций пространства $H^1(D)$. Метод восстановления функции $f \in H^1(D)$ по ее (точным) граничным значениям на γ_1 дает формула Карлемана — Голузина — Крылова [8] (см. также [1, гл. I, § 1])

$$f(z) = \lim_{\sigma \to -\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \Big(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\Big)^{\sigma} d\zeta, \quad z \in D,$$

где φ — произвольная аналитическая и ограниченная в D функция, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1; \qquad |\varphi(z)| > 1, \quad z \in D.$$

В случае, когда граничные значения функции на γ_1 заданы с погрешностью, задача восстановления значения аналитической функции в точке $z \in D$ (аналитического продолжения с части границы области) является некорректной. Эту задачу исследовал М. М. Лаврентьев [10, гл. II, § 1, п. 4–5] (см. также [1, гл. I, § 2]). Предложенные методы регуляризации имеют в качестве ядра введенные им функции Карлемана, являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. Примером такого регуляризующего метода является конструкция, основанная на формуле Карлемана — Голузина — Крылова. Регуляризирующий метод (метод восстановления) R_σ имеет вид

$$(R_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{q(\zeta)}{\zeta - z} \Big(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)}\Big)^{\sigma} d\zeta.$$

Нашей же целью при исследовании задачи (1.3) является построение наилучшего (оптимального) метода восстановления.

В данной работе наряду с задачей (1.3) рассмотрена задача об оптимальном выборе информационного множества γ_1 в (1.3) в классе множеств с заданной мерой. Более точно, для параметров δ, μ, удовлетворяющих условиям $\delta > 0,\ 0 < \mu < 2\pi$, положим

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta, \mu) = \inf \left\{ \mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) \colon m(\gamma_1) \le \mu \right\}. \tag{1.4}$$

Задача состоит в том, чтобы найти величину (1.4) и множество γ_1, на котором она достигается. Общую постановку задачи выбора оптимальной информации можно найти в работе [12].

С задачей восстановления (1.3) тесно связана задача наилучшего приближения оператора Υ линейными ограниченными операторами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{L}(N)$ есть множество линейных ограниченных операторов из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$, норма которых не превосходит число $N \ge 0$. Величина

$$U(T) = \sup \left\{ \|f - Tf\|_B \colon f \in Q \right\} \tag{1.5}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора Υ на классе функций Q. Соответственно величина

$$E(N) = \inf \left\{ U(T) \colon T \in \mathcal{L}(N) \right\} \tag{1.6}$$

есть наилучшее приближение оператора Υ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный оператор, на котором в (1.6) достигается нижняя грань.

Задача (1.6) является частным случаем задачи Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства; этой задаче к настоящему времени посвящено большое число исследований (см. работы [4; 5] и приведенную в них библ.). В частности, известна взаимосвязь задачи Стечкина с задачами оптимального восстановления и модулем непрерывности оператора. Для задач (1.3), (1.6) и модуля непрерывности (1.1) эта взаимосвязь будет существенно использоваться в данной работе и выражается следующим образом. Введем обозначения

$$\Delta(N) = \sup\{\omega(\delta) - N\delta \colon \delta \geq 0\}, \quad N > 0; \tag{1.7}$$

$$l(\delta) = \inf\{E(N) + N\delta \colon N > 0\}, \quad \delta \geq 0.$$

Как частный случай результата С. Б. Стечкина [16] (см. также [5, теорема 1.1]), для величин (1.6) и (1.1) справедливы неравенства

$$E(N) \geq \Delta(N), \quad N > 0; \tag{1.8}$$

$$\omega(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.9}$$

Следующее уточнение неравенства (1.9) является частным случаем общего утверждения, связывающего задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [5, теорема 2.1])

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \leq l(\delta), \quad \delta \geq 0. \tag{1.10}$$

В настоящей работе в подразд. 2.1 с помощью теоремы Сегё будет выписан модуль непрерывности (1.1) оператора Υ. В подразд. 2.2 получено решение задач (1.3) и (1.6) в случае, когда множество K есть точка $z_0 \in D$, т. е. задач оптимального восстановления и наилучшего приближения функционала. В подразд. 2.3 будет получено решение задачи (1.3) оптимального восстановления оператора Υ для произвольного множества K и задачи (1.6) наилучшего приближения оператора Υ в случае, когда K — подмножество линии уровня гармонической меры множества γ_1 относительно круга D. Наконец, в подразд. 2.4 изучена задача (1.4), если K есть подмножество радиуса круга D.

2. Оптимальное восстановление и наилучшее приближение оператора аналитического продолжения с части границы

2.1. Теорема Сегё и модуль непрерывности оператора Υ. Для $\eta > 0$ определим функцию Φ_η равенством

$$\Phi_\eta(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in E_0, \\ \eta\phi_1(t), & t \in E_1; \end{cases} \tag{2.1}$$

в случае $\eta = 1$ имеет место равенство $\Phi_1 = \phi$. В дальнейшем предполагается, что функции $\ln\phi_k$, $k = 0, 1$, суммируемы соответственно на E_k. Ясно, что в этом случае при всех $\eta > 0$ функции Φ_η и $\ln\Phi_\eta$ суммируемы на $(0, 2\pi)$.

Предположим, что на множестве K задана конечная мера $\widetilde{m}$ и, что $B = B(K)$ есть функциональная банахова структура (функциональная банахова решетка) — банахово пространство функций, измеримых по мере $\widetilde{m}$ на множестве K, с монотонной нормой, а точнее, обладающих свойством

(B) если $f_2 \in B(K)$ и почти всюду на K $|f_1(z)| \leq |f_2(z)|$, то $f_1 \in B(K)$ и $\|f_1\|_B \leq \|f_2\|_B$.

Будем считать, что функция $\epsilon \equiv 1$ принадлежит пространству $B(K)$ и ее норма равна единице: $\|\epsilon\|_B = 1$. Отсюда следует, что все существенно ограниченные функции принадлежат $B(K)$.

В дальнейших рассуждениях будет использоваться приведенный ниже в тереме A хорошо известный результат Г. Сегё [17] (см. также [15, гл II, § 6, п. 6.1]). Для неотрицательной функции $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ такой, что $\ln\varphi \in L^1(0, 2\pi)$, функция

$$s(z, \varphi) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\ln\varphi(t)\,dt\right) \tag{2.2}$$

называется *функцией Сегё* (*максимальной функцией*). Для предельных граничных значений почти всюду на $(0, 2\pi)$ имеет место равенство $|s(e^{it}, \varphi)| = \varphi(t)$.

Теорема A (Г. Сегё, 1921). *Пусть φ — периодическая, неотрицательная, измеримая на $[0, 2\pi]$ функция, для которой выполняются условия $\varphi \in L^p(0, 2\pi)$, $p \ge 1$; $\ln\varphi \in L^1(0, 2\pi)$. Тогда функция $s(z, \varphi)$ принадлежит пространству Харди $H^p(D)$, и для любой функции $f \in H^p(D)$, удовлетворяющей почти всюду на $(0, 2\pi)$ неравенству*

$$|f(e^{it})| \le \varphi(t),$$

в произвольной точке z круга D справедливо неравенство

$$|f(z)| \le |s(z, \varphi)|.$$

При этом, если хотя бы в одной точке z^* круга D имеет место равенство $|f(z^*)| = |s(z^*, \varphi)|$, то существует $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, такое, что $f(z) = \varepsilon s(z, \varphi)$, $z \in D$.

Для функции Сегё с граничной функцией Φ_δ, т. е. функцией, определенной равенством (2.1) при $\eta = \delta$, введем специальные обозначения

$$s_\delta(z) = s(z, \Phi_\delta), \quad s(z) = s_1(z) = s(z, \phi).$$

Пусть $w = w(\cdot, \gamma_1, D)$ — гармоническая в круге D функция, имеющая почти всюду на γ_1 граничные значения, равные единице, и на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ равные нулю. Значение $w(z, \gamma_1, D)$ этой функции в точке $z \in D$ называется (см., например, [9, гл. VIII, § 4]) *гармонической мерой множества γ_1 относительно точки z и области D*. Для гармонической меры множества γ_1 относительно точки $z = re^{i\tau}$, $0 \le r < 1$, и круга D справедливо представление

$$w(z, \gamma_1, D) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, t - \tau)\,\chi_{E_1}(t)\,dt,$$

в котором P — ядро Пуассона круга D, определяемое равенством

$$P(r, t) = \Re\frac{e^{it} + r}{e^{it} - r} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2},$$

и χ_{E_1} — характеристическая функция множества E_1. Некасательные предельные граничные значения функции $w(z, \gamma_1, D)$, как интеграла Пуассона — Лебега от функции χ_{E_1}, почти всюду на γ_1 равны единице и почти всюду на γ_0 равны нулю (см., например, [15, гл. I, § 5, п. 5.3]).

Для числа $\alpha \in (0, 1)$ через γ_α будем обозначать подмножество точек z круга D, в которых функция $w(z, \gamma_1, D)$ принимает значение α:

$$\gamma_\alpha = \{z \in D \colon w(z, \gamma_1, D) = \alpha\}.$$

Отметим, что во всех точках $z \in \gamma_\alpha$ функция $w(z, \gamma_0, D)$ — гармоническая мера γ_0 относительно точки z и круга D — также принимает постоянное значение, равное $\beta = 1 - \alpha$.

В случае, когда множество γ_1 есть дуга единичной окружности, множества γ_α, $\alpha \in (0,1)$, являются дугами окружностей, пересекающих единичную окружность Γ в двух концевых точках дуги γ_1. Выделим случай, когда $\gamma_1 = \{e^{it} \colon t \in [0,\pi]\}$ — верхняя половина единичной окружности и $\alpha = 1/2$, тогда линией уровня $\gamma_{1/2}$ является интервал $(-1,1)$. В этом случае в качестве пространства $B = B(\gamma_{1/2})$ можно рассматривать, например, классические пространства $L^p(-1,1), p \geq 1$.

Зададим функцию h формулой

$$h(z) = \exp\left(w(z) + iv(z)\right), \tag{2.3}$$

где $w(z) = w(z,\gamma_1,D)$ — гармоническая мера γ_1 относительно круга D и точки z, а v — гармонически сопряженная к w функция в круге D. Функция h является аналитической и ограниченной в круге D, и по формуле Шварца для нее справедливо представление

$$h(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\chi_{E_1}(t)\,dt\right). \tag{2.4}$$

Используя теорему Сегё, нетрудно выписать решение задачи (1.1). Оно и приведено в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть $s \in B(K)$. Тогда имеет место вложение $Q \subset B(K)$ и для функции ω, определенной соотношением* (1.1), *справедливо равенство*

$$\omega(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{2.5}$$

В случае, когда $K \subset \gamma_\alpha$, равенство (2.5) *примет вид*

$$\omega(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha, \tag{2.6}$$

где коэффициент $\mathcal{C}$ определяется равенством $\mathcal{C} = \|s\|_B$. При этом верхняя грань в (1.1) *достигается на функциях εs_δ, $|\varepsilon| = 1$.*

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ из условий $\Phi_\delta, \ln\Phi_\delta \in L^1(0,2\pi)$, в силу теоремы A следует, что функция Сегё s_δ принадлежит пространству $H^1(D)$. При этом справедливы равенства $\|s_\delta\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)} = 1$ и $\|s_\delta\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} = \delta$. Следовательно, функция s_δ принадлежит классу Q.

В силу (2.1) имеем $\ln\Phi_\delta = \ln\phi + \chi_{E_1}\ln\delta$. Поэтому определение (2.2) влечет представление

$$s_\delta(z) = s(z,\Phi_\delta) = s(z)\exp\left(\frac{\ln\delta}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,\chi_{E_1}(t)\,dt\right),$$

которое с помощью (2.4) можно записать в виде

$$s_\delta(z) = s(z)\,h^\sigma(z), \quad \sigma = \ln\delta, \quad z \in D, \tag{2.7}$$

Из определения (2.3) функции h следует, что $|h| = \exp w$. Поэтому

$$|h|^\sigma = \exp(\sigma w) = \delta^w. \tag{2.8}$$

Так как $0 \leq w(z) \leq 1,\ z \in D$, то в круге D справедлива оценка $|h(z)|^\sigma \leq M,\ \ M = \max\{1,\delta\}$. По предположению $s \in B(K)$. Таким образом, согласно (2.7), для любого $\delta > 0$ функция s_δ является произведением функции $s \in B(K)$ на ограниченную функцию h^σ. Согласно условию (B) функция s_δ также принадлежит $B(K)$.

Пусть $\delta > 0$ и f есть функция класса Q со свойством $\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le \delta$. Этот факт означает, что модуль граничных значений функции f почти всюду на окружности не превосходит функции Φ_δ. А это согласно теореме A влечет неравенство

$$|f(z)| \le |s_\delta(z)|, \quad z \in D.$$

Отсюда, учитывая условие (B), заключаем, что имеет место вложение $Q \subset B(K)$ и справедлива оценка сверху для модуля непрерывности $\omega(\delta) \le \|s_\delta\|_B$. С другой стороны, так как $s_\delta \in Q$, то для величины модуля непрерывности (1.1) имеет место оценка снизу $\omega(\delta) \ge \|s_\delta\|_B$. Таким образом

$$\omega(\delta) = \|s_\delta\|_B.$$

Соотношения (2.7) и (2.8) влекут теперь утверждение (2.5). Из доказательства видно, что функция εs_δ с $|\varepsilon| = 1$ является экстремальной.

Равенства (2.6) вытекают из того факта, что на множестве γ_α функция $|h|$ имеет постоянное значение, равное числу e^α. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если норма пространства $B(K)$ удовлетворяет условию

$$(B^*) \qquad \text{если } \ f_1, f_2 \in B \ \text{ и всюду на } \ K |f_1(z)| < |f_2(z)|, \ \text{ то } \ \|f_1\|_B < \|f_2\|_B,$$

то в теореме 1 других экстремальных функций нет.

Действительно, пусть норма функции f равна норме s_δ, т. е. $\|f\|_B = \|s_\delta\|_B$, тогда из условия (B^*) вытекает существование точки $z^* \in K \subset D$ такой, что $|f(z^*)| \ge |s_\delta(z^*)|$. С другой стороны, если f из класса Q и $\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}}(\gamma_1) \le \delta$, то по теореме A для точек $z \in K$ справедливо неравенство $|f(z)| \le |s_\delta(z)|$, и, следовательно, $|f(z^*)| = |s_\delta(z^*)|$. Тогда по теореме A существует $\varepsilon, |\varepsilon| = 1$, такое, что $f(z) = \varepsilon s_\delta(z)$, $z \in D$. □

В частном случае, когда функция ϕ (и, соответственно, веса) тождественно равна единице, функция s в круге D также тождественно равна единице, откуда получаем следующее утверждение.

З а м е ч а н и е 2. В случае $\psi_1 = \psi_0 \equiv 1$ равенство (2.5) примет вид $\omega(\delta) = \|\delta^w\|_B$, а при дополнительном предположении $K \subset \gamma_\alpha$ — вид $\omega(\delta) = \delta^\alpha$.

2.2. Наилучшие восстановление и приближение функционала значения в точке. Будем теперь рассматривать случай, когда множество K есть точка z_0, а $\|f\|_B = |f(z_0)|$. В этом случае оператор Υ является функционалом, ставящим в соответствие граничным значениям аналитической функции на γ_1 ее значение в точке z_0. Известно, что неравенства (1.8) и (1.10) для задач восстановления и приближения функционала можно усилить. А именно (см. [5; 7; 11; 14] и приведенную там библ.), в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе с помощью множества $\mathcal{O}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный функционал, и сама величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала. Следовательно с учетом теоремы 1 справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta) = |s(z_0)|\delta^\alpha, \tag{2.9}$$

где $\alpha = w(z_0, \gamma_1, D)$ — гармоническая мера γ_1 относительно круга D и точки z_0. Кроме того, для задач (1.3) и (1.6) взаимосвязь выражается в следующих соотношениях:

$$E(N) = \Delta(N); \quad \omega(\delta) = l(\delta).$$

Поэтому

$$E(N) = |s(z_0)|^{1/\beta}\, \beta\alpha^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta}, \quad \beta = 1 - \alpha. \tag{2.10}$$

В результате для случая, когда множество K есть точка z_0, к настоящему моменту величины $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta)$ и $E(N)$ известны. Для решения задач (1.3) и (1.6) остается найти экстремальные функционалы. В работе [2] эти задачи решены в случае весов, тождественно равных единице. Используя аналогичный подход, исследуем здесь общий случай задач для широкого класса весов.

Произвольной функции $q \in L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)$ поставим в соответствие функцию F_σ, определенную на единичном круге следующей формулой

$$F_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, q(e^{it})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s(z)}{s(e^{it})}\Big(\frac{h(z)}{h(e^{it})}\Big)^{\sigma} q(e^{it})\, dt, \quad z = re^{i\tau}, \tag{2.11}$$

где $\sigma = \ln\delta \in \mathbb{R}$, P — ядро Пуассона, а функция h определена соотношением (2.3). Рассмотрим функционал T_σ на $L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)$, определяемый равенством

$$T_\sigma q = F_\sigma(z_0), \tag{2.12}$$

как значение функции F_σ в точке z_0. Вычислим для функционала T_σ, заданного равенством (2.12), его норму и уклонение (1.5).

Лемма 1. *Для функционала* (2.12) *при* $\sigma = \ln\delta$ *имеют место равенства*

$$\|T_\sigma\| = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}, \quad U(T_\sigma) = \beta|s(z_0)|\,\delta^{\alpha}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что для граничных значений $s_\delta = sh^\sigma, \sigma = \ln\delta$, почти всюду на $[0, 2\pi]$ имеет место равенство

$$|s_\delta(e^{it})| = |\Phi_\delta(t)| = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in E_0, \\ \delta\phi_1(t), & t \in E_1, \end{cases}$$

и в точке $z_0 \in D$ — равенство

$$|s_\delta(z_0)| = |s(z_0)|\delta^{\alpha}, \quad \alpha = w(z_0, \gamma_1, D).$$

В силу неотрицательности ядра Пуассона для нормы T_σ имеем оценку сверху

$$\|T_\sigma\| = \sup\Big\{\Big|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(e^{it})}\, q(e^{it})\, dt\Big| : q \in L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1),\ \|q\|_{L^{\infty}_{\psi_1}(\gamma_1)} \le 1\Big\}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\, dt\ |s_\delta(z_0)|\,\delta^{-1} = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{\alpha-1} = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}.$$

С другой стороны, рассматривая в качестве q граничные значения на γ функции $\delta^{-1}s_\delta$, получаем оценку снизу

$$\|T_\sigma\| \ge \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\, dt\ |s_\delta(z_0)|\,\delta^{-1} = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}.$$

Таким образом, действительно, $\|T_\sigma\| = \alpha|s(z_0)|\,\delta^{-\beta}$.

Теперь вычислим уклонение (1.5) для функционала T_σ. Применение формулы Пуассона к аналитической и ограниченной в круге D функции $f/s_\delta, f \in Q$, дает равенство

$$\frac{f(z)}{s_\delta(z)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(\rho, t-\theta)\,\frac{f(e^{it})}{s_\delta(e^{it})}\, dt, \quad z = \rho e^{i\theta}.$$

Отсюда вытекает представление

$$f(z) - F_\sigma(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(\rho, t-\theta)\,\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\,f(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\,f(e^{it})\,dt.$$

Это представление с учетом неравенства $\left|f(e^{it})/s_\delta(e^{it})\right| \le 1$ почти всюду на E_0 для произвольной функции $f \in Q$ влечет оценку уклонения (1.5) для функционала T_σ

$$U(T_\sigma) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,dt\;|s_\delta(z_0)| = \beta|s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Для оценки снизу уклонения рассмотрим в качестве f функцию s_δ, принадлежащую классу Q. Тогда

$$U(T_\sigma) \ge \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,\frac{s_\delta(z_0)}{s_\delta(e^{it})}\,s_\delta(e^{it})\,dt\right| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_0} P(\rho, t-\theta)\,dt\;|s_\delta(z_0)| = \beta|s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Тем самым доказано, что $U(T_\sigma) = \beta|s(z_0)|\,\delta^\alpha$. Лемма 1 доказана.

Положив $N = |s(z_0)|\,\alpha\delta^{-\beta}$, получим для уклонения $U(T_\sigma)$ выражение

$$U(T_\sigma) = |s(z_0)|^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.13}$$

Объединение равенств (2.10) и (2.13) влечет следующее утверждение о задаче наилучшего приближения функционала (1.6).

Теорема 2. *В случае $K = z_0$ для произвольного $N > 0$ справедливо равенство*

$$E(N) = |s(z_0)|^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом функционалом наилучшего приближения является определяемый соотношением (2.12) *функционал T_σ с параметром*

$$\sigma = \frac{1}{\beta}\left(\ln\frac{\alpha}{N} + \ln|s(z_0)|\right).$$

Полученные только что результаты позволяют выписать в случае $K = z_0$ и решение задачи (1.3). Вычислим вначале величину погрешности (1.2) для метода T_σ.

Лемма 2. *Для функционала, определяемого соотношением* (2.12), *при $\sigma = \ln\delta$ имеет место равенство*

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) = |s(z_0)|\,\delta^\alpha. \tag{2.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя лемму 1, оценим уклонение $\mathcal{U}(T_\sigma, \delta)$ сверху

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) = \sup\left\{|f(z_0) - T_\sigma q|\colon f \in Q,\, q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\, \|f - q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

$$\le \sup\left\{|f(z_0) - T_\sigma f|\colon f \in Q\right\} + \sup\left\{|T_\sigma(f - q)|\colon f \in Q,\, q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\, \|f - q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

$$\le U(T_\sigma) + \|T_\sigma\|\delta = |s(z_0)|\,\beta\,\delta^\alpha + |s(z_0)|\,\alpha\,\delta^{-\beta}\,\delta = |s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Выбор $q \equiv 0$ и $f = s_\delta$ дает оценку уклонения снизу

$$\mathcal{U}(T_\sigma, \delta) \ge |s_\delta(z_0)| = |s(z_0)|\,\delta^\alpha.$$

Лемма доказана.

Равенства (2.9) и (2.14) позволяют сформулировать следующее утверждение о задаче оптимального восстановления (1.3).

Теорема 3. *В случае $K = z_0$ для произвольного $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \omega(\delta) = |s(z_0)|\, \delta^{\alpha}.$$

При этом оптимальным методом восстановления является определяемый соотношением (2.12) *метод T_σ с параметром $\sigma = \ln \delta$.*

В заключение этой части статьи отметим, что теоремы 2 и 3 могут быть получены как следствие из частного случая для весов, тождественно равных единице, — случая $\phi \equiv 1$, исследованного в работе [2]. Экстремальный функционал T_σ в общем случае выражается через экстремальный функционал $\widetilde{T}_\sigma$ при $\phi \equiv 1$ по формуле

$$T_\sigma g = s(z_0)\widetilde{T}_\sigma\Big(\frac{g}{s}\Big).$$

2.3. Оптимальное восстановление и наилучшее приближение оператора Υ. На пространстве $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ зададим оператор $\mathcal{T}_\sigma$, который ставит в соответствие функции q сужение на множество K функции F_σ, определяемой равенством (2.11). Таким образом, оператор $\mathcal{T}_\sigma$ с параметром $\sigma = \ln \delta$ определяется формулой

$$(\mathcal{T}_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, q(e^{it})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{s(z)}{s(e^{it})}\Big(\frac{h(z)}{h(e^{it})}\Big)^{\sigma} q(e^{it})\, dt, \quad z = re^{i\tau} \in K. \tag{2.15}$$

При произвольных $z \in D$ и $q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ для функции F_σ справедлива оценка

$$|F_\sigma(z)| \le |s_\delta(z)|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r, t-\tau)\frac{|q(e^{it})|}{\delta\phi_1(t)}\, dt \le M(q,\delta)|s_\delta(z)|, \quad M(q,\delta) = \delta^{-1}\|q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)}.$$

Поэтому из ранее доказанного факта $s_\delta \in B(K)$, согласно условию (B), следует, что $F_\sigma \in B(K)$. Таким образом, оператор $\mathcal{T}_\sigma$ является оператором из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$.

Связь между оператором $\mathcal{T}_\sigma$ и экстремальным в теоремах 2 и 3 функционалом T_σ выражается соотношением

$$(\mathcal{T}_\sigma q)\,(z_0) = T_\sigma q.$$

Следствием этой взаимосвязи, лемм 1 и 2 является утверждение о норме $\mathcal{T}_\sigma$ и его уклонении от оператора Υ.

Лемма 3. *Для оператора $\mathcal{T}_\sigma$, определяемого соотношением* (2.15), *при $\sigma = \ln \delta$ для величины погрешности восстановления* (1.2) *имеет место равенство*

$$\mathcal{U}(\mathcal{T}_\sigma, \delta) = \|s\delta^w\|_B; \tag{2.16}$$

для нормы и уклонения (1.5) *— равенства*

$$\|\mathcal{T}_\sigma\| = \|ws\delta^{w-1}\|_B, \quad U(\mathcal{T}_\sigma) = \|(1-w)s\delta^w\|_B. \tag{2.17}$$

В случае $K \subset \gamma_\alpha$ равенство (2.16) *примет вид*

$$\mathcal{U}(\mathcal{T}_\sigma, \delta) = \|s\|_B\, \delta^{\alpha};$$

равенства (2.17) *— вид*

$$\|\mathcal{T}_\sigma\| = \alpha\|s\|_B\, \delta^{-\beta}, \quad U(\mathcal{T}_\sigma) = \beta\|s\|_B\, \delta^{\alpha}, \quad \beta = 1-\alpha. \tag{2.18}$$

В следующих двух теоремах приведено решение задач оптимального восстановления и наилучшего приближения оператора Υ.

Теорема 4. *Для произвольного $K \subset D$ и $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{2.19}$$

При этом оптимальным методом восстановления является определяемый соотношением (2.15) *метод $\mathcal{T}_\sigma$ с параметром $\sigma = \ln\delta$.*

В случае, когда $K \subset \gamma_\alpha$, равенства (2.19) *примут вид*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \mathcal{C}\delta^\alpha,$$

где коэффициент определяется равенством $\mathcal{C} = \|s\|_B$.

Доказательство. Объединяя вместе (2.5), (1.10) и (2.16), получим

$$\|s\delta^w\|_B = \omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le \mathcal{U}(\mathcal{T}_\sigma, \delta) = \|s\delta^w\|_B.$$

Откуда следуют равенства (2.19) и экстремальность оператора $\mathcal{T}_\sigma$. Теорема доказана.

Теорема 5. *В случае $K \subset \gamma_\alpha$ для произвольного $N > 0$ справедливо равенство*

$$E(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta},$$

где коэффициент определяется равенством $\mathcal{C} = \|s\|_B$. При этом оператором наилучшего приближения является оператор $\mathcal{T}_\sigma$, определяемый соотношением (2.15) *с параметром*

$$\sigma = \frac{1}{\beta}\left(\ln\frac{\alpha}{N} + \ln\mathcal{C}\right).$$

Доказательство. Обозначим $N = \alpha\|s\|_B\,\delta^{-\beta}$ и выразим $U(\mathcal{T}_\sigma)$ из равенства (2.18) через N

$$U(\mathcal{T}_\sigma) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.20}$$

С другой стороны, вычислив величину $\Delta(N)$, определенную равенством (1.7), получим

$$\Delta(N) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{2.21}$$

Объединяя вместе равенства (2.20), (2.21) и неравенство (1.8), получаем

$$\mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta} = \Delta(N) \le E(N) \le U(\mathcal{T}_\sigma) = \mathcal{C}^{1/\beta}\,\beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

Откуда вытекает утверждение теоремы 5.

2.4. Выбор оптимальной информации при восстановлении оператора Υ. В этой части работы рассмотрим задачу (1.4) оптимального восстановления оператора Υ с наилучшим выбором множества γ_1, на котором заданы граничные значения функции с погрешностью по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ на классе Q. В постановке задачи (1.4) предполагается, что весовые функции ψ_k являются сужением на γ_k одной функции $\psi(e^{it}) = 1/\phi(t), t \in [0, 2\pi]$.

Сначала рассмотрим случай, когда множество K состоит из точки z_0 и, соответственно, Υ является функционалом — значением функции в точке $z_0 \in D : \Upsilon f = f(z_0)$. Подставив в определение (1.4) величину оптимального восстановления функционала (2.9), получим

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu) = \inf\left\{|s(z_0)|\delta^{w(z_0,\gamma_1,D)} \colon m(\gamma_1) \le \mu\right\} = |s(z_0)|\exp\left\{\ln\delta\sup\left\{w(z_0,\gamma_1,D)\,:\,m(\gamma_1)\le\mu\right\}\right\}.$$

Выражая гармоническую меру через ядро Пуассона, нетрудно вычислить ее верхнюю грань

$$\sup\left\{w(re^{i\tau},\gamma_1,D)\ :\ m(\gamma_1)\le\mu\right\}\sup\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\tau)+r^2}\,dt\colon m(E_1)\le\mu\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\mu/2}^{\mu/2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}\,dt=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{\mu}{4}\right).$$

В результате получаем решение задачи (1.4) выбора оптимальной информации при восстановлении функционала. Обозначим через u_μ функцию, определяемую в круге D равенством

$$u_\mu(z)=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\operatorname{tg}\frac{\mu}{4}\right).$$

Ясно, что функция u_μ является радиальной, т. е. $u_\mu(z)=u(|z|)$, $z\in D$.

Вышеизложенное доказывает справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *В случае, когда множество K есть точка $z_0=re^{i\tau}$, $0<r<1$, при $0<\delta\le1$ и $0<\mu<2\pi$ для величины (1.4) справедливо равенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu)=|s(re^{i\tau})|\delta^{u_\mu(r)}.$$

При этом нижняя грань в (1.4) достигается на дуге окружности

$$\gamma_1=\left\{e^{it}\colon |t-\tau|<\frac{\mu}{2}\right\}.$$

Из теоремы 6 и монотонности нормы $B(K)$ при произвольном $K\subset D$ для задачи выбора оптимальной информации при восстановлении оператора Υ вытекает оценка снизу.

Следствие. *При $0<\delta\le1$ и $0<\mu<2\pi$ для величины (1.4) справедливо неравенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu)\ge\|s\delta^{u_\mu}\|_B. \tag{2.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из теоремы 6 следует, что для произвольной точки $z_0\in D$ и произвольного множества γ_1, $m(\gamma_1)\le\mu$, имеет место неравенство

$$|s(z_0)|\delta^{u_\mu(z_0)}\le|s(z_0)|\delta^{w(z_0,\gamma_1,D)}.$$

Тогда в силу монотонности нормы $B(K)$ справедливо неравенство

$$\|s\delta^{u_\mu}\|_B\le\|s\delta^{w}\|_B.$$

Рассмотрев в последнем неравенстве нижнюю грань по γ_1 и используя равенство (2.19), получим утверждение следствия.

В случае, когда все точки множества K имеют один аргумент, т. е. множество K принадлежит некоторому радиусу $K^\tau=\{z\in D\colon \arg z=\tau\}$ круга D, для каждой точки множества K нижняя грань в задаче выбора оптимальной информации при восстановлении функционала — значения аналитической функции в этой точке — достигается на одной и той же дуге и, следовательно, в неравенстве (2.22) имеет место равенство. Поэтому, в силу теоремы 6 справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *В случае $K\subset K^\tau$ при $0<\delta\le1$ и $0<\mu<2\pi$ для величины (1.4) справедливо равенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu)=\|s\delta^{u_\mu}\|_B.$$

При этом нижняя грань в (1.4) достигается на дуге окружности

$$\gamma_1=\left\{e^{it}\colon |t-\tau|<\frac{\mu}{2}\right\}.$$

В полученных в этой части результатах экстремальные множества не зависят от весов. Эти результаты являются следствием экстремального свойства гармонической меры относительно фиксированной точки и круга D: максимум гармонической меры (а впрочем, и минимум) достигается на связной дуге окружности. Связная дуга окружности является экстремальным множеством и в других задачах, например, в задаче о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля на компактном подмножестве единичной окружности (см. работу [6]).

Автор выражает благодарность В. В. Арестову за плодотворные обсуждения результатов; Е. Е. Бердышевой, прочитавшей рукопись статьи и сделавшей полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзенберг Л.А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 248 с.
2. **Акопян Р.Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 163–170.
3. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
4. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
5. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
6. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852-1878.
7. **Габушин В.Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т. 8, no. 5. С. 551–562.
8. **Голузин Г.М., Крылов В.И.** Обобщенная формула Carleman‘a и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
9. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
10. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
11. **Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 85–93.
12. **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М., Осипенко К.Ю.** Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39, вып 1. С. 118–133.
13. **Micchelli Ch.A., Rivlin Th.J.** A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory (Proc. Internat. Sympos., Freudenstadt, 1976). N.Y. etc.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
14. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ.Inc., 2000. 229 p.
15. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
16. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.
17. **Szegö G.** Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Ann. 1921. Vol. 84, no. 3. P. 232–244.

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

Поступила 28.03.2016

REFERENCES

1. Aizenberg L.A. *Formuly Karlemana v kompleksnom analize. Pervye prilozheniya* (Carleman's formulas in complex analysis). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1993, Revised translation of the 1990 Russian original, Ser. Mathematics and Its Applications, vol. 244, 299 p.
2. Akopyan R.R. Optimal recovery of analytic functions from boundary conditions specified with error. *Math. Notes*, 2016, vol. 99, no. 2, pp. 177–182.
3. Arestov V.V. Uniform regularization of the problem of calculating the values of an operator *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 618–626.
4. Arestov V.V., Gabushin V.N. Best approximation of unbounded operators by bounded operators. *Russian Math.* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1995, vol. 39, no. 11, p. 38–63.
5. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, p. 1093–1126.
6. Arestov V.V., Mendelev A.S. Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems. *J. Approx. Theory*, 2010, vol. 162, no. 10, pp. 1852–1878.
7. Gabushin V.N. Best approximations of functionals on certain sets. *Math. Notes*, 1970, vol. 8, no. 5, pp. 780–785.
8. Golusin G.M., Krylow V.I. Generalized Carleman's formula and its application to the analytic continuation of functions. *Mat. Sb.*, 1933, vol. 40, no. 2, p. 144–149 (in Russian).
9. Golusin G.M. Geometric theory of functions of a complex variable. Providence: American Math. Soc., 1969, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 26, 676 p.
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza* (III-posed problems of mathematical physics and analysis). Providence: American Math. Soc., 1986, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 64, 290 p.
11. Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu. Optimal recovery of functionals based on inaccurate data. Mat. Zametki., vol. 50, no. 6, 1991, pp. 85–93 (in Russian).
12. Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M., Osipenko K.Yu. Indefinite knowledge about an object and accuracy of its recovery methods. *Probl. Inf. Transm.*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 104–118.
13. Micchelli Ch.A., Rivlin Th.J. A survey of optimal recovery. *Optimal Estimation in Approximation Theory. Proc. Internat. Sympos., Freudenstadt, 1976*, New York etc.: Plenum Press, 1977, pp. 1–54.
14. Osipenko K.Yu. Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ. Inc., 2000, 229 p.
15. Privalov I.I. *Granichnye svojstva analiticheskih funkcij* (Boundary properties of analytic gunctions). Moscow, Leningrad: GITTL Publ., 1950, 336 p. (in Russian).
16. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99.
17. Szegö G. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Math. Ann.*, 1921, vol. 84, no. 3, pp. 232–244.

R.R. Akopyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.852.2

МНОЖЕСТВО ЦЕЛЕВЫХ ВЕКТОРОВ ЗАДАЧИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С РАЗРЫВОМ ДВОЙСТВЕННОСТИ[1]

Н. Н. Астафьев, А. В. Иванов, С. П. Трофимов

Для задач полубесконечного линейного программирования (ПбЛП) предлагается геометрический способ анализа соотношений двойственности пары задач, основанный на использовании конической оболочки коэффициентов системы ограничений. Устанавливается связь наличия разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. На основе геометрического подхода строится противоположная пара двойственных задач и исследуются соотношения двойственности для этой пары. Построен нетривиальный пример задачи ПбЛП с n переменными, для которой разрыв двойственности выполняется для целевых векторов, образующих выпуклое множество с относительной размерностью $n-1$.

Ключевые слова: полубесконечное линейное программирование, разрыв двойственности, геометрический подход, выпуклый незамкнутый конус, множество целевых векторов.

N. N. Astaf'ev, A. V. Ivanov, S. P. Trofimov. The set of target vectors in a problem of semi-infinite linear programming with a duality gap.

We propose a geometric method for the analysis of duality relations in a pair of semi-infinite linear programming (SILP) problems. The method is based on the use of the conical hull of the coefficients in the constraint system. A relation between the presence of a duality gap and the nonclosedness of the boundary of the conical hull of points in a multidimensional space is established. The geometric approach is used to construct an opposite pair of dual problems and to explore the duality relation for this pair. We construct a nontrivial example of a SILP problem in which the duality gap occurs for noncollinear target vectors.

Keywords: semi-infinite linear programming, duality gap, geometric approach, convex nonclosed cone, set of target vectors.

MSC: 90C34

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-43-52

Введение

Задачи полубесконечного линейного программирования (ПбЛП) являются важным объектом исследования в теории оптимизации и интенсивно изучаются, начиная с 60-х годов прошлого века [1]. За это время для задач ПбЛП были поставлены и исследованы вопросы, аналогичные конечномерным задачам ЛП [2]. Принципиальным отличием задачи ПбЛП от конечномерной задачи ЛП явился тот факт, что в задачах ПбЛП возможен ненулевой *разрыв двойственности* [3–5]. Возникновение последнего затрудняет анализ и численное решение задачи ПбЛП и рассматривается как недостаточное качество задания ограничений множества допустимых решений [6, с. 36]. Стоит отметить, что большинство результатов для задач ПбЛП обычно формулируется в предположении нулевого разрыва двойственности. С другой стороны, известны примеры задач ПбЛП, для которых существование или отсутствие разрыва двойственности зависит от выбора того или иного эквивалентного способа записи ограничений. Поэтому задача ПбЛП с разрывом двойственности до сих пор считалась нежелательной и экзотической. В настоящей работе мы показываем теоретическую важность исследования таких задач и приводим пример, в котором разрыв двойственности наблюдается для целевых

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

векторов из выпуклого множества с относительной размерностью $n-1$. Тем самым показывается, что задачи с разрывом двойственности перестают быть уникальным явлением и образуют богатое семейство задач.

Таким образом, мотивацией нашего исследования является построение задач ПбЛП, в которых для нетривиального множества целевых векторов c имеет место конечный разрыв двойственности.

Статья организована следующим образом.

Разд. 1 посвящен рассмотрению задачи ПбЛП с точки зрения геометрического подхода. Мы показываем важность исследования таких задач и связываем наличие разрыва двойственности с незамкнутостью границы конической оболочки точек в многомерном пространстве. Геометрический подход применяется к противоположной паре двойственных задач, получающейся из исходной пары двойственных задач заменой критериев и знаков неравенств ограничений на противоположные. Приводится пример анализа соотношений двойственности на основе геометрического подхода.

В разд. 2 рассматривается нетривиальный пример полубесконечной задачи ЛП с n переменными. Показано, что целевые векторы, для которых имеется разрыв двойственности, заполняют $(n-1)$-мерную область.

1. Геометрический подход в полубесконечном линейном программировании

1.1. Двойственные задачи полубесконечного линейного программирования

Пара двойственных задач линейного программирования в хаусдорфовых топологических векторных пространствах имеет вид:

$$\inf\{(x, y_0) : Tx \in z_0 + Q_Z,\ x \in Q_X\}, \quad x \in X, \quad y_0 \in Y, \tag{1.1}$$

$$\sup\{(z_0, w) :\ -T^*w + y_0 \in Q_X^*,\ w \in Q_Z^*\}, \quad z_0 \in Z, \quad w \in W. \tag{1.2}$$

Здесь пространства X и Y, Z и W находятся в соотношении двойственности; T — линейный непрерывный оператор из X в Z; $T^*\colon W \to Y$ — сопряженный к T оператор; $Q_X \subset X$, $Q_Z \subset Z$ — замкнутые выпуклые конусы; $Q_X^* \subset Y$, $Q_Z^* \subset W$ — сопряженные конусы.

Традиционно рассматриваются два частных случая пары двойственных задач (1.1)–(1.2), которые сводятся к эквивалентным задачам ПбЛП.

1. Пространства X и Y — конечномерные пространства $\mathbb{R}^n$, Z и W — бесконечномерные пространства над полем $\mathbb{R}$, конусы Q_X и Q_Z являются неотрицательными ортантами. Тогда задача (1.1) принимает вид полубесконечной задачи линейного программирования

$$v = \inf\{(x, c)\colon Ax \geqslant b,\ x \geqslant 0\}. \tag{1.3}$$

В этой задаче A — полубесконечная матрица, строки которой $a_\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega$, Ω — некоторое счетное множество индексов, $b = (b_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ — вектор-столбец из пространства $\mathbb{R}^\Omega$, v — оптимальное значение задачи.

Двойственная задача (1.2) принимает вид

$$v^* = \sup\{(u, b)\colon A^T u \leqslant c,\ u \geqslant 0,\ u \in F\}, \tag{1.4}$$

где F — подпространство последовательностей из $\mathbb{R}^\Omega$ с конечным носителем (в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля), v^* — оптимальное значение двойственной задачи.

Применяя стандартную технику замены переменных, перепишем пару двойственных задач (1.3), (1.4) в эквивалентной, более удобной для нас, форме:

$$v = \inf\{(x, c)\colon Ax \geqslant b\}, \tag{1.5}$$

$$v^* = \sup\{(u, b)\colon A^T u = c,\ u \geqslant 0,\ u \in F\}. \tag{1.6}$$

2. Пространства X и Y — конечномерные пространства $\mathbb{R}^n$; Z и W — конечномерные пространства $\mathbb{R}^m$; Q_X и Q_Z — замкнутые выпуклые конусы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Преобразуем задачу (1.1) к виду (1.5). Ограничение $x \in Q_X$ задачи (1.1) эквивалентно системе линейных неравенств

$$(x, y) \geqslant 0 \quad \forall y \in Q_X^*. \tag{1.7}$$

Пусть $\{e_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ — базис единичных ортов пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, и ограничение $Tx \in z_0 + Q_Z$ задачи (1.1) эквивалентно системе

$$\Bigl(T\Bigl(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Bigr) - z_0, w\Bigr) \geqslant 0 \quad \forall w \in Q_Z^*$$

(несчетное множество можно заменить всюду плотным счетным подмножеством), что равносильно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(Te_i, w) \geqslant (z_0, w) \quad \forall w \in Q_Z^*. \tag{1.8}$$

Объединенная система ограничений (1.7) и (1.8) аналогична системе ограничений задачи (1.5). Таким образом, задача ПбЛП представляет собой форму записи многих оптимизационных задач.

Известно, что для пары задач (1.5), (1.6) справедливо слабое соотношение двойственности $v \geqslant v^*$. В основном исследуются условия, при которых выполняется сильное соотношение двойственности

$$v = v^*. \tag{1.9}$$

В [5; 7] в качестве достаточного условия для (1.9) требуются выполнение условия Слейтера для системы ограничений задачи (1.5) и замкнутость конической оболочки множества

$$K = \operatorname{cone}\{[a_\alpha;\ b_\alpha] : \alpha \in \Omega\}.$$

Здесь и далее запись $[a_\alpha;\ b_\alpha]$ означает присоединение числа b_α к вектору-строке a_α.

В данной статье исследуется случай, когда

$$v > v^*, \tag{1.10}$$

т. е. когда задача ПбЛП имеет ненулевой *разрыв двойственности*, определяемый значением

$$\delta = v - v^*.$$

1.2. Геометрический подход к анализу разрыва двойственности

В работе используется геометрический подход [8], связывающий неравенство (1.10) со свойствами некоторого промежутка. Данный подход позволяет взглянуть на задачи (1.5) и (1.6) с некоторой единой геометрической точки зрения. Нам понадобятся следующие известные результаты (см., например, [3; 8]). Введем обозначение

$$P = \{[c;\ r]\colon r \in \mathbb{R}\}.$$

Из геометрических соотношений между конусом K и прямой P можно получить ряд важных свойств задач (1.5) и (1.6). Возможны следующие случаи взаимного расположения K и P:

$$\overline{K} \cap P = \varnothing, \tag{1.11}$$

$$K \cap P = \varnothing, \quad \overline{K} \cap P \neq \varnothing, \tag{1.12}$$

$$K \cap P \neq \varnothing. \tag{1.13}$$

Здесь $\overline{K}$ — замыкание конуса K.

Для каждого из случаев (1.11)–(1.13) справедливы следующие легко проверяемые утверждения.

Утверждение 1. *Если выполняется* (1.11)*, то*
1) $v = +\infty$, $v^* = -\infty$, *если система* $Ax \geqslant b$ *несовместна*;
2) $v = -\infty$, $v^* = -\infty$, *если система* $Ax \geqslant b$ *совместна.*

Утверждение 2. *Если выполняется* (1.12)*, то*

$$v = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\}, \quad v^* = -\infty.$$

Утверждение 3. *Если выполняется* (1.13)*, то*

$$v = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\},$$

$$v^* = \sup\{r\colon [c;\ r] \in K\}. \tag{1.14}$$

Построим с помощью конуса K и прямой P одномерный интервал S, который назовем *характеристическим интервалом* задачи ПбЛП. С учетом утверждения 3 определим интервал S следующим образом:

$$S = [\sup\{r\colon [c;r] \in K\}, \sup\{r\colon [c;r] \in \overline{K}\}].$$

Интервал S, если он не пустой, представляет собой точку, отрезок, луч или всю прямую P и расположен в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Если интервал S не вырождается в точку, то он содержится на границе конуса $\overline{K}$, но не содержится в самом конусе K. В этом случае конус K не является замкнутым. Таким образом, интервал S содержится в незамкнутой части границы конуса K, позволяет определить оптимальные значения пары двойственных задач (1.5) и (1.6) и, следовательно, наличие разрыва двойственности.

Теорема 1. *Для характеристического интервала S имеют место равенства*

$$v = \sup\{r\colon [c;r] \in S\}, \quad v^* = \inf\{r\colon [c;r] \in S\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема вытекает из определения интервала S и утверждений 2 и 3.

Следствие 1 (Критерий разрыва двойственности). *Пусть $v^* > -\infty$. У пары задач* (1.5) *и* (1.6) *существует разрыв двойственности тогда и только тогда, когда множество S имеет непустую внутренность.*

Из теоремы 1 следует, что конус K и прямая P определяют оптимальные значения задач (1.5) и (1.6). Исследуем вопрос о разрешимости двойственной задачи. Двойственная задача (1.6) достигает своего значения тогда и только тогда, когда достигается супремум (1.14) в утверждении 3.

Переход от множества $\{[a_\alpha;\ b_\alpha],\ \alpha \in \Omega\}$ к конусу K может привести к тому, что часть и таким образом ограничения задачи (1.5) теряют свою индивидуальность. Поэтому восстановить оптимальное решение задачи (1.6), вообще говоря, невозможно.

Рассмотрим разрешимость исходной задачи. Известно, что в случае совместности системы ограничений задачи (1.5) функция оптимума $v(c)$ является собственной, вогнутой и по утверждению 3 $v(c) = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\}$. В [9, следствие 23.5.3] утверждается, что субдифференциал $\partial v(c)$ представляет собой все множество оптимальных решений задачи (1.5). Из геометрического смысла субдифференциала получаем

Утверждение 4. *Задача* (1.5) *имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда через точку* $[c; v(c)]$ *можно провести гиперплоскость такую, что ее подграфик содержит конус* $\overline{K}$.

З а м е ч а н и я.

(1) Из [10, теорема 3] вытекает следующее. Если конус K замкнут, то двойственная задача (1.6) достижима. Если конус $\{[Ax + z; (x, c) - r]\colon x \in \mathbb{R}^n,\ z \geqslant 0,\ r \geqslant 0\}$ замкнут в декартовом произведении $\mathbb{R}^\Omega \times \mathbb{R}^1$ с топологией покоординатной сходимости, то исходная задача достижима. А из утверждения 3 вытекает, что из одного конуса K можно определить достижимость задач (1.5) и (1.6).

(2) В пространстве $\mathbb{R}^\Omega$ с покоординатной сходимостью положительный конус не имеет внутренности. Поэтому условия типа Слейтера (например, существует x_0 такой, что $(x_0, a_\alpha) > b_\alpha$ для каждого $\alpha \in \Omega$) недостаточны для анализа разрыва двойственности. Это и неудивительно, так как данное условие Слейтера равносильно $[x_0;\ -1] \in \mathrm{int} K^*$ и не связано с границей конуса K, от которой в соответствии с утверждением 3 зависит разрыв.

(3) Из утверждений 2 и 3 легко вывести теорему о слабой двойственности [5] в несколько измененной формулировке: если $v(c_0)$ конечно, то

$$v(c_0) = \lim_{dB(c_0)\to 0}\ \sup_{c\in B(c_0)} v^*(c), \tag{1.15}$$

где $B\,(c_0)$ — шар с центром в точке c_0 и радиусом $dB(c_0)$.

В (1.15) вектор c берется из телесной окрестности $B(c_0)$ вектора c_0. Данный результат основан на том, что окрестность $B(c_0)$ пересекается с внутренностью конуса, натянутого на векторы a_α, и для векторов c из этого пересечения разрыва двойственности нет. Однако анализ поведения функции $v^*(c)$ в этой окрестности не проводился. Ниже в разд. 2 мы показываем, что в окрестности вектора c_0 может иметь место конечный разрыв двойственности для множества целевых векторов с относительной размерностью $n - 1$.

1.3. Геометрический подход к построению противоположной пары двойственных задач

Заменим в исходной паре двойственных задач (1.5)–(1.6) критерий и знаки неравенств в системе ограничений на противоположные. Полученную пару задач назовем *противоположной парой двойственных задач* ЛП [8]

$$v' = \sup\{(x, c)\colon Ax \leqslant b\}. \tag{1.16}$$

$$v'^* = \inf\{(b, u)\colon A^T u = c,\ u \geqslant 0\}. \tag{1.17}$$

Повторное применение процедуры построения противоположной пары задач возвращает нас к исходной паре задач (1.5)–(1.6). Таким образом, пара противоположных задач и пара двойственных задач ЛП обладают одним и тем же свойством взаимной обратимости. Заметим, что в работе [11] аналогичная пара задач строится с игровой точки зрения.

Рассмотрим противоположную пару задач с точки зрения геометрического подхода.

Теорема 2. *Для противоположной пары задач* (1.16)–(1.17) *справедливы соотношения*

$$v' = \inf\{t\colon [c;t] \in \overline{K}\},$$

$$v'^{*} = \inf\{t\colon [c;t] \in K\},$$

при этом

$$v \geqslant v^{*} \geqslant v'^{*} \geqslant v'. \tag{1.18}$$

Доказательство. Найдем v'. Используем известное правило замены критериев при оптимизации произвольной функции $f(x)$: $\sup f(x) = -\inf(-f(x))$. Тогда $v' = -\inf\{(x,-c)\colon -Ax \geqslant -b\}$. Используя утверждение 3, продолжаем

$$v' = -\sup\{r\colon [-c;r] \in -\overline{K}\} = -(-\inf\{-r\colon [-c;r] \in -\overline{K}\}) = \inf\{-r\colon [-c;r] \in -\overline{K}\}.$$

Сделаем замену $t = -r$. Получаем

$$v' = \inf\{t\colon [-c;-t] \in -\overline{K}\} = \inf\{t\colon [c;t] \in \overline{K}\}.$$

Аналогично получаем

$$v'^{*} = \inf\{t\colon [c;t] \in K\} \leqslant \sup\{t\colon [c;t] \in K\} = v^{*}.$$

Относительно ограничений противоположной задачи можно привести следующие легко проверяемые утверждения.

Утверждение 5. *Если $M = \{x\colon Ax \geqslant b\}$ — непустое ограниченное множество, не состоящее из одной точки, то $M' = \{x\colon Ax \leqslant b\} = \varnothing$.*

Утверждение 6. *Пусть $M = \{x\colon Ax \geqslant b\}$ неограничено. Если множество $M' = \{x\colon Ax \leqslant b\}$ непустое, то оно неограничено.*

Из утверждений 5 и 6 следует, что противоположная задача может оказаться полезной именно при наличии конечного разрыва двойственности для задач (1.5) и (1.6), так как этот разрыв существует только тогда, когда $\{x\colon Ax \geqslant b\}$ неограничено.

Рассмотрим пример, в котором исходная и противоположная задачи ПбЛП имеют конечные разрывы двойственности.

Пример 1. Найти $\inf x_2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_2 \geqslant 1, \\ x_2 \geqslant 2, \\ (1/m)x_1 + x_2 \geqslant 0, \\ (1/m)x_1 + x_2 \geqslant 3, \quad m = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Конус K, натянутый на точки

$$C = [0,1;\ 1]\,, \quad B = [0,1;\ 2]\,, \quad D_m = [1/m,1;\ 0]\,, \quad A_m = [1/m,1;\ 3]\,,$$

не замкнут и содержится в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Последовательность $\{A_m\}$ сходится к точке $A = [0,1;\ 3]$, $\{D_m\}$ сходится к точке $D = [0,1;\ 0]$, причем точки A и D лежат на незамкнутой границе конуса K. Прямая $P = \{[0,1;\ r],\ r \in \mathbb{R}\}$ проходит через точки A, B, C и D. Отрезок $[A,B]$ является характеристическим для исходной задачи, а отрезок $[C,D]$ — для противоположной задачи. Используя теорему 2, получаем

$$v = 3, \quad v^{*} = 2, \quad v'^{*} = 1, \quad v' = 0.$$

Результаты численного анализа соотношений двойственности

M	v	v^*	v'^*	v'
100	2.00000	2.00000	1.00000	1.00000
1000	2.99800	2.00000	1.00000	$1.20669 \cdot 10^{-4}$
10000	2.99980	2.00000	1.00000	$1.18445 \cdot 10^{-5}$
100000	3.00000	2.00000	1.00000	$1.18193 \cdot 10^{-7}$

Для проведения численного анализа соотношений двойственности (1.18) разработана программа на языке MATLAB [12]. Оптимальные значения v и v' задач (1.5), (1.16) находились с помощью оптимизационной функции fseminf, оптимальные значения v^* и v'^* задач (1.6), (1.17) — с помощью оптимизационной функции linprog. Особенностью разработанной программы является указание конечного множества значений переменной $m \in \{1, 2, \ldots, M\}$ в полубесконечных ограничениях исходной задачи, что приводит к аппроксимации задачи ПбЛП задачей ЛП с конечным числом ограничений.

Стоит отметить, что указанная аппроксимация задачи ПбЛП с разрывом двойственности может привести к изменению оптимального значения обеих задач [13]. В перспективе предполагается разработка новой MATLAB-программы с возможностью для пользователей указания бесконечной последовательности ограничений.

Результаты вычислений для примера 1 сведены в таблицу.

2. Размерность множества целевых векторов задачи полубесконечного линейного программирования с разрывом двойственности

Рассмотрим задачу ПбЛП L_n с n переменными. Обозначим через $DG(L_n)$ множество целевых векторов, при которых для пары двойственных задач L_n и L_n^* имеет место конечный разрыв двойственности $-\infty < v^* < v < \infty$. Очевидно, $DG(L_n)$ содержится в конической оболочке векторов a_α.

Множество $DG(L_n)$ может быть пустым. В этом случае для любого целевого вектора c или выполняется строгое соотношение двойственности, или одно из оптимальных значений v или v^* может быть бесконечным по причине неограниченности исходной задачи или пустоты допустимого множества. Можно построить примеры, когда $DG(L_n)$ не обладает свойствами выпуклости и замкнутости.

Рассмотрим вопрос об относительной размерности $DG(L_n)$.

Утверждение 7. *Пусть P — произвольное выпуклое подмножество из $DG(L_n)$. Относительная размерность подмножества P не превосходит величины $n-1$.*

Доказательство. Допустим $DG(L_n)$ содержит телесное выпуклое подмножество P с размерностью n и целевой вектор $c \in \mathrm{int}(P)$. В [2] показано, что если $c \in \mathrm{int}(\mathrm{cone}\{a_\alpha,\ \alpha \in \Omega\})$, то равенство (1.9) имеет место. Таким образом, для вектора c отсутствует разрыв двойственности, т. е. $c \notin DG(L_n)$. Получили противоречие.

Утверждение доказано.

Пример 2. Рассмотрим задачу ПбЛП с n переменными, для которой разрыв двойственности выполняется на выпуклом множестве целевых векторов, имеющем относительную размерность $n-1$. Система ограничений задачи имеет вид

$$\begin{cases} (1-1/m)x_1 + x_2 + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ (1-1/m)x_1 + x_3 + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ \ldots\ldots \\ (1-1/m)x_1 + x_{n-1} + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ (1-1/m)x_1 - x_2 + (1/m)x_n \geqslant 2, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1 + x_3 \geqslant 1, \\ \ldots\ldots \\ x_1 + x_{n-1} \geqslant 1, \\ x_1 - x_2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Здесь $m = 2, 3, \ldots$. Для рассматриваемой системы конус K порождается следующими точками:

$$A_m^{(1)} = [1-1/m, 1, 0, \ldots, 0, 1/m;\ 2], \quad A_m^{(2)} = [1-1/m, 0, 1, \ldots, 0, 1/m;\ 2], \ldots,$$
$$A_m^{(n-2)} = [1-1/m, 0, 0, \ldots, 1, 1/m;\ 2], \quad B_m = [1-1/m, -1, 0, \ldots, 0, 1/m;\ 2], \quad m = 2, 3, \ldots;$$
$$C^{(1)} = [1, 1, 0, \ldots, 0, 0;\ 1], \ldots, C^{(n-2)} = [1, 0, 0, \ldots, 1, 0;\ 1],$$
$$D = [1, -1, 0, \ldots, 0, 0;\ 1], \quad h = [0, 0, 0, \ldots, 0, 0;\ -1].$$

Последовательности $\{A_m^{(i)}\}$ $(m = 2, 3, \ldots)$ сходятся к точкам

$$A^{(i)} = [1, 0, \ldots, 1_{i+1}, \ldots, 0;\ 2], \quad i = \overline{1, n-2},$$

где запись 1_{i+1} означает, что на $i+1$ месте стоит единица. Последовательность $\{B_m\}$ сходится к точке $B = [1, -1, 0, \ldots, 0, 0;\ 2]$.

Рассмотрим n-мерную гиперплоскость H в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, задаваемую уравнением

$$([a;\ b], d) = 0, \quad d = [0, 0, \ldots, 0, 1_n;\ 0],$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$ являются переменными. Очевидно, точки

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-2)},\ B,\ C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(n-2)},\ D$$

лежат в H, а элементы последовательностей $\{A_m^{(1)}\}, \{A_m^{(2)}\}, \ldots, \{A_m^{(n-2)}\}, \{B_m\}$ лежат в открытом полупространстве $([a;\ b], d) > 0$.

Легко показать, что точки $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-2)}$, B не могут быть получены как выпуклая комбинация векторов $C^{(i)}$, $i = \overline{1, n-2}$ и D. Отсюда вытекает, что точки $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,..., $A^{(n-2)}$, B принадлежат замыканию конуса K, но не самому K, т. е. лежат на незамкнутой части границы конуса K. Аналогичным свойством обладают все точки открытых интервалов $(A^i,\ C^i)$, $i = \overline{1, n-2}$, и $(B,\ D)$.

Рассмотрим множество G целевых векторов

$$g^{(i)} = [1, 0, \ldots, 1_{i+1}, \ldots, 0;\ 0], \quad i = \overline{1, n-2}, \quad g = [1, -1, 0, \ldots, 0, 0;\ 0].$$

Векторы множества G линейно независимы. Это вытекает из того, что ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен $n-1$. Таким образом, относительная размерность G равна $n-1$. Очевидно, что $G \subset H$.

Для каждого целевого вектора $c \in G$ по утверждению 3 выполняется следующее свойство.
1. $v = \sup\{r\colon [c;\ r] \in \overline{K}\} = 2$, и супремум достигается в точке $A^{(i)}$ или B.
2. $v^* = \sup\{r\colon [c;\ r] \in K\} = 1$, и супремум достигается в соответствующей точке $C^{(i)}$ или D.
Аналогичные соотношения справедливы для всех целевых векторов из выпуклой оболочки множества G.

Заявленное выше свойство примера 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chames A., Cooper W. W., Kortanek K. O.** A duality theory for convex programs with convex constraints // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68, no. 6. P. 605–608.
2. **Goberna M. A., Lopez M. A.** Linear semi-infinite optimization. Chichester: Wiley, 1998. 356 p.
3. **Karney D .F.** Duality gaps in semi-infinite linear programming — an approximation problem // Math. Progr. 1981. Vol. 20, no. 1. P. 129–143.
4. **Soyster A. L.** A note on duality gaps in linear programming over convex sets // J. Optim. Theory Appl. 1974. Vol. 13, no. 4. P. 484–489.
5. **Duffin R. J., Karlovitz L. A.** An infinite linear program with a duality gap // Management Sci. 1965. Vol. 12, no. 1. P. 122–134.
6. **Glashoff K., Gustafson S. A.** Linear optimization and approximation: An introduction to the theoretical analysis and numerical treatment of semi-infinite programs. N. Y.: Springer, 1983. 212 p.
7. **Черников С. Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 489 с.
8. **Трофимов С. П.** Критерий разрыва двойственности для полубесконечных задач линейного программирования // Противоречивые модели оптимизации: сб. науч. тр. / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 64–70.
9. **Rockafellar R.T.** Convex analysis. Princeton; New Jork: Princeton University Press, 1970. 260 p.
10. **Kretschmer K. S.** Programmes in paired spaces // Canad. J. Math. 1961. Vol. 13. P. 221–238.
11. **Астафьев Н. Н.** Противоположные задачи линейного программирования, двойственность, приложения к балансовой модели // Дискретная оптимизация и исследование операций: материалы росс. конф. / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2007. С. 12–16.
12. Программа численного анализа соотношений двойственности [e-resource]. Репозиторий MATLAB-программы. URL: https://github.com/re3burn/DGA (дата обращения: 20.08.2016).
13. **Астафьев Н.Н.** Бесконечные системы линейных неравенств. М.: Наука, 1991. 136 с.

Поступила 20.06.2016

Астафьев Николай Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: astnn@imm.uran.ru

Трофимов Сергей Павлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: tsp61@mail.ru

Иванов Алексей Витальевич
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: av.ivanov.2014@yandex.ru

REFERENCES

1. Chames A., Cooper W. W., Kortanek K. O. A duality theory for convex programs with convex constraints. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 68, no. 6, pp. 605–608.
2. Goberna M. A., Lopez M. A. Linear semi-infinite optimization. Chichester: Wiley, 1998. 356 p.
3. Karney D .F. Duality gaps in semi-infinite linear programming – an approximation problem. *Math. Progr.*, 1981, vol. 20, no. 1, pp. 129–143.
4. Soyster A. L. A note on duality gaps in linear programming over convex sets. *J. Optim. Theory Appl.*, 1974, vol. 13, no. 4, pp. 484–489.
5. Duffin R. J., Karlovitz L. A. An infinite linear program with a duality gap. *Management Sci.*, 1965, vol. 12, no. 1, pp. 122–134.
6. Glashoff K., Gustafson S. A. *Linear optimization and approximation: An introduction to the theoretical analysis and numerical treatment of semi-infinite programs.* N. Y.: Springer, 1983, 212 p.
7. Chernikov S.N. *Linejnye neravenstva* (Linear inequalities.) Moscow: Nauka, 1968, 489 p.

8. Trofimov S.P. A criterion for a discontinuity in the duality for semi-infinite problems of linear programming. *Inconsistent Optimization Models: Sb. Nauch. Tr. IMM UNC AN SSSR*, Sverdlovsk, 1987, pp. 64–70 (in Russian).
9. Rockafellar R.T. *Convex analysis.* Princeton, New York: Princeton University Press, 1970, 260 p.
10. Kretschmer K. S. Programmes in paired spaces. *Canad. J. Math.*, 1961, vol. 13, pp. 221–238.
11. Astafiev N.N. Inverse problems of linear programming, duality, applications to the balance model. *Discrete Optimization and Operations Research: Proc. of the Rus. Conf. IM SO RAN*, Novosibirsk, 2007, pp. 12–16 (in Russian).
12. Numerical analysis of duality relations program. *MATLAB Program Repository.* Available at: https://github.com/re3burn/DGA (date accessed: 20.08.2016).
13. Astafiev N.N. *Beskonechnye sistemy linejnyh neravenstv* (Infinite systems of linear inequalities). Moscow: Nauka, 1991, 136 p (in Russian).

N.N. Astaf'ev, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: astnn@imm.uran.ru .

S. P. Trofimov, Cand. Sci (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: tsp61@mail.ru .

A. V. Ivanov, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: av.ivanov.2014@yandex.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518.834

ОДНОСТОРОННИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ЯДРА ПУАССОНА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ[1]

А. Г. Бабенко, Т. З. Наум

Рассматривается обобщенное ядро Пуассона $\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos(\alpha\pi/2)P(t)+\sin(\alpha\pi/2)Q(t)$, $q \in (-1,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, представляющее собой линейную комбинацию ядра Пуассона $P(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ и сопряженного ядра Пуассона $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$. Найдены величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра $\Pi_{q,\alpha}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного и соответствующие полиномы наилучшего одностороннего приближения.

Ключевые слова: аппроксимация с ограничениями, тригонометрические полиномы, обобщенное ядро Пуассона.

A. G. Babenko, T. Z. Naum. One-sided integral approximations of the generalized Poisson kernel by trigonometric polynomials.

We consider the generalized Poisson kernel $\Pi_{q,\alpha} = \cos(\alpha\pi/2)P + \sin(\alpha\pi/2)Q$ with $q \in (-1,1)$ and $\alpha \in \mathbb{R}$, which is a linear combination of the Poisson kernel $P(t) = 1/2+\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt$ and the conjugate Poisson kernel $Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt$. The values of the best upper and lower integral approximations of the kernel $\Pi_{q,\alpha}$ by trigonometric polynomials of order not exceeding a given number are found. The corresponding polynomials of the best one-sided approximation are obtained.

Keywords: constrained approximation, trigonometric polynomials, generalized Poisson kernel.

MSC: 42A10, 41A29

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-53-63

Введение

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к задачам одностороннего интегрального приближения конкретных функций полиномами. Такого рода задачи возникают в теории чисел, теории кодирования и других областях математики. Первые результаты в этом направлении были получены в 1880-е годы А. А. Марковым и Т. И. Стилтьесом. В дальнейшем эти исследования были продолжены в работах Карамата (1930), Фройда и Ганелиуса (середина XX века). Теория одностороннего взвешенного интегрального приближения функций алгебраическими многочленами впервые была разработана в статье Р. Бояника и Р. ДеВора [11]. В монографии Н. П. Корнейчука, А. А. Лигуна и В. Г. Доронина [8] содержится теория одностороннего приближения функций полиномами по чебышевской системе, в частности, довольно подробно рассмотрены вопросы одностороннего интегрального приближения периодических функций тригонометрическими полиномами. В. Г. Доронин и А. А. Лигун [7] нашли величины наилучшего одностороннего интегрального приближения классического ядра Пуассона тригонометрическими полиномами на периоде. В данной работе решена аналогичная задача для произвольной линейной комбинации ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона. Насколько нам известно, полученный результат является новым даже в случае сопряженного ядра Пуассона.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

1. Обозначения. Формулировка основного результата

В дальнейшем используются следующие обозначения: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ — период длины 2π, т. е. полуинтервал $[\eta, \eta+2\pi)$ с отождествленными концами, где η — произвольное фиксированное вещественное число, C — пространство 2π-периодических непрерывных вещественнозначных функций с нормой $\|f\|_C = \max\limits_{t\in\mathbb{T}} |f(t)|$; L — пространство 2π-периодических измеримых вещественнозначных функций с нормой $\|f\| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(t)|\,dt$; $\mathcal{T}_{n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов $\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$ порядка не выше $n-1$ с вещественными коэффициентами; как обычно, для $g, f \in C$ равенство $g = f$ (неравенство $g \le f$) означает, что $g(x) = f(x)$ $(g(x) \le f(x))$ для всех $x \in \mathbb{R}$;

$$E_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1}} \|g-\tau\|, \quad E^-_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1},\, \tau\le g} \|g-\tau\|, \quad E^+_{n-1}(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{n-1},\, g\le\tau} \|g-\tau\| \quad (1.1)$$

— величины наилучшего приближения, наилучшего приближения снизу и сверху функции $g \in C$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ соответственно по норме пространства L. Тригонометрические полиномы, реализующие точные нижние грани в правых частях равенств (1.1), называются *полиномами наилучшего (интегрального) приближения функции g и наилучшего одностороннего приближения (снизу и сверху) соответственно.*

Зафиксируем произвольное число $q \in (-1, 1)$. *Ядром Пуассона и сопряженным ядром Пуассона* называются соответственно (см. [6, т. 1, гл. 1, § 1, с. 12; гл. 3, § 6, формулы (6.2), (6.3)]) функции

$$P(t) = \mathrm{Re}\Big(\frac12 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\Big) = \frac12 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t+q^2)}, \quad (1.2)$$

$$Q(t) = \mathrm{Im}\Big(\frac12 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{ikt}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}.$$

Линейную комбинацию $\Big(\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\Big)P(t) + \Big(\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\Big)Q(t) = \Pi_{q,\alpha}(t)$ условимся называть *обобщенным ядром Пуассона* с параметрами $q \in (-1, 1)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Задачу наилучшего одностороннего интегрального приближения ядра $\Pi_{q,\alpha}$ в важном частном случае $\alpha = 0$ исследовали В. Г. Доронин и А. А. Лигун. Они нашли величины наилучшего интегрального приближения снизу и сверху ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ тригонометрическими полиномами [7, лемма 3] (см. [8, теорема 3.2.2]), а именно,

$$E^-_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1+q^n}, \quad E^+_{n-1}(P) = \frac{q^n}{1-q^n}, \quad 0<q<1, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение, которое частично вместе с краткой схемой доказательства было анонсировано в [1, теорема 1, лемма 1].

Теорема. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $q \in (-1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1-|q|^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{|q|^n}{1-q^{2n}}\left(1+|q|^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \quad (1.3)$$

Полином $\tau^-_{q,\alpha} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ снизу имеет вид

$$\tau^-_{q,\alpha}(t) = \Pi_{q,\alpha}(t) - B(t) = \frac{\Upsilon_{q,\alpha}(t)}{1-q^{2n}},$$

где

$$\Upsilon_{q,\alpha}(t)=\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}q^k\big(1-q^{2(n-k)}\big)\Big[\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{1-q^{2n}}\cos kt+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin kt\Big],$$

$B=B_{q,\alpha,n}$ *— неотрицательная дробь*

$$B(t)=\frac{\gamma\big(\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\big)^2}{1+q^2-2q\cos t}=\frac{\gamma}{2}\,\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{1+q^2-2q\cos t},\tag{1.4}$$

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\left(1+q^{2n}-2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$\cos n\xi=\frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}},\quad \sin n\xi=\frac{(1-q^{2n})\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}.$$

Полином $\tau^+_{q,\alpha}$ *наилучшего интегрального приближения сверху функции* $\Pi_{q,\alpha}$ *связан с полином* $\tau^-_{q,\alpha+2}$ *наилучшего приближения снизу функции* $\Pi_{q,\alpha+2}$ *равенством* $\tau^+_{q,\alpha}=-\tau^-_{q,\alpha+2}$.

Обратим внимание, что сумма $E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})+E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})=2|q|^n/(1-q^{2n})$ не зависит от α; кроме того, неотрицательная дробь B, определенная формулой (1.4), явно выражается в терминах параметров q, α, n (без использования параметра ξ)

$$\frac{(1-q^{2n})^2}{q^n(1-q^2)}B(t)$$

$$=\frac{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}+\Big((1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n\Big)\cos nt+(1-q^{2n})\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin nt}{1+q^2-2q\cos t}.$$

З а м е ч а н и е. В случае $\alpha=0$ с помощью замены переменной $x=\cos t$ задача одностороннего интегрального приближения ядра Пуассона $P=\Pi_{q,0}$ сводится к задаче одностороннего приближения простейшей алгебраической дроби на отрезке $[-1,1]$ алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Чебышева первого рода. Производная произвольного порядка указанной простейшей дроби сохраняет знак на $[-1,1]$. Поэтому применение результата Р. Бояника и Р. ДеВора [11, теорема 4 и замечание к ней] дает конструкцию полиномов наилучшего одностороннего приближения. В общем случае $\alpha\in\mathbb{R}$ этот способ нахождения полиномов наилучшего одностороннего приближения неприменим, в том числе в важном частном случае $\alpha=1$, т. е. в случае сопряженного ядра Пуассона $Q=\Pi_{q,1}$.

Принципиальное различие указанных в замечании двух случаев хорошо иллюстрируют приведенные ниже рис. 1, 2, соответствующие случаю $q=1/2$, $n-1=3$. На рис. 1 приведены графики ядра Пуассона P (утолщенная линия) и полиномы его наилучшего приближения снизу и сверху, а на рис. 2 — графики сопряженного ядра Пуассона Q (утолщенная линия) и полиномы его наилучшего одностороннего приближения.

2. Вспомогательные утверждения

Для $\alpha\in\mathbb{R}$, $q\in(-1,1)$, $n\in\mathbb{N}$ положим[2]

$$\mathcal{E}^-_{n-1}(q,\alpha):=E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}),\quad \mathcal{E}^+_{n-1}(q,\alpha):=E^+_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}).\tag{2.1}$$

[2]Краткая запись обозначений (2.1) имеет вид $\mathcal{E}^\pm_{n-1}(q,\alpha):=E^\pm_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$; такой прием сокращенной записи часто используется в литературе, в данной работе он также будет применяться.

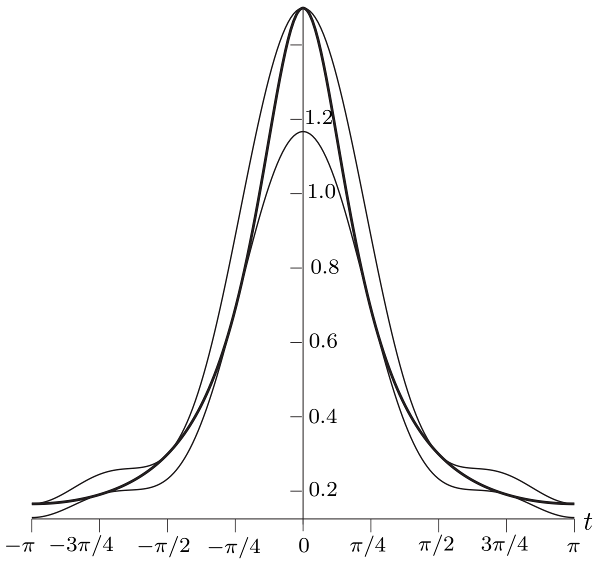


Рис. 1.

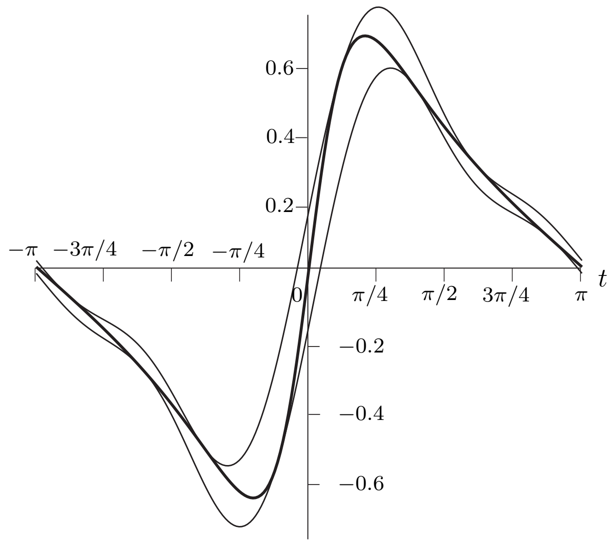


Рис. 2.

Имеем

$$\Pi_{q,\alpha}(t) = \cos\frac{\alpha\pi}{2}P(t) + \sin\frac{\alpha\pi}{2}Q(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\Big(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$
$$= \frac{(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} + 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t + q^2)}. \tag{2.2}$$

Поскольку $\Pi_{q,\alpha}(t+\pi) = \Pi_{-q,\alpha}(t)$, то

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(-q,\alpha) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(|q|,\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad q\in(-1,1), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Поэтому задача вычисления величин (2.1) при $q \in (-1,1)$ сводится к случаю[3] $q \in (0,1)$, который в дальнейшем и будет рассматриваться.

Приведем еще одно свойство обобщенного ядра Пуассона

$$\Pi_{q,\alpha+2}(t) = -\Pi_{q,\alpha}(t) \quad \text{при} \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad q\in(0,1), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что полином $\tau^{+}_{q,\alpha}$ наилучшего приближения сверху функции $\Pi_{q,\alpha}$ связан с полиномом $\tau^{-}_{q,\alpha+2}$ наилучшего приближения снизу функции $\Pi_{q,\alpha+2}$ формулой

$$\tau^{+}_{q,\alpha} = -\tau^{-}_{q,\alpha+2}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) вытекает также 4-периодичность величин $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$, $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ по α, т. е.

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+4) = \mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad q\in(0,1), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.6}$$

поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $\alpha \in [0,4]$. Кроме того, из (2.4) вытекает, что

$$\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(q,\alpha+2) = \mathcal{E}^{\mp}_{n-1}(q,\alpha) \quad \text{при} \quad \alpha\in[0,2], \quad q\in(0,1), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Следовательно, $\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha)$ выражается через $\mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha)$ с помощью формулы (2.7), а именно

$$\mathcal{E}^{+}_{n-1}(q,\alpha) = \begin{cases} \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha+2) & \text{при} \quad \alpha\in[0,2], \\ \mathcal{E}^{-}_{n-1}(q,\alpha-2) & \text{при} \quad \alpha\in[2,4]. \end{cases} \tag{2.8}$$

[3] Случай $q = 0$ тривиален: $\mathcal{E}^{\pm}_{n-1}(0,\alpha) = 0$.

Перейдем к задаче нахождения минимума и максимума ядра $\Pi_{q,\alpha}$. Для $q \in (0,1)$, $\alpha \in [0,4]$ определим $t_1 = t_1(q,\alpha)$, $t_2 = t_2(q,\alpha)$ следующим образом:

$$t_1 = t_1(q,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\, \dfrac{1 + q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}} & \text{при} \quad 0 < \alpha < 2, \\[3ex] \dfrac{\alpha\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\, \dfrac{1 + q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}} - 2\pi & \text{при} \quad 2 < \alpha < 4; \end{cases} \tag{2.9}$$

при $\alpha = 0, 2, 4$ соответствующие значения t_1 доопределим по непрерывности, т. е. положим

$$t_1(q,0) = -\pi, \quad t_1(q,2) = 0, \quad t_1(q,4) = \pi;$$

$$t_2 = t_2(q,\alpha) = \frac{\alpha\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\, \frac{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{1 - q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}. \tag{2.10}$$

Величины $t_1(q,\alpha)$, $t_2(q,\alpha)$ являются непрерывными возрастающими функциями параметра $\alpha \in [0,4]$. Если α пробегает отрезок $[0,4]$, значения каждой из этих функций пробегает свой отрезок длины 2π, причем $t_1(q,0) = -\pi$, $t_2(q,0) = 0$.

Лемма 1. *При $q \in (0,1)$, $\alpha \in [0,4]$ выполняются равенства*

$$\min_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q,\alpha}(t) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{q}{1-q^2}, \quad \max_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q,\alpha}(t) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{q}{1-q^2}.$$

Существуют единственные точки $t_1 = t_1(q,\alpha)$, $t_2 = t_2(q,\alpha)$, расположенные на периоде $\mathbb{T}$, в которых функция $\Pi_{q,\alpha}(t)$ достигает своего минимума и максимума соответственно. Явные формулы для указанных точек имеют вид (2.9), (2.10).

Доказательство. С учетом (2.2) имеем $\Pi'_{q,\alpha}(t) = \dfrac{-q\,\varphi_{q,\alpha}(t)}{(1 - 2q\cos t + q^2)^2}$, где

$$\varphi_{q,\alpha}(t) = 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2} + \sin\Big(t - \frac{\alpha\pi}{2}\Big) - q^2\sin\Big(t + \frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{2.11}$$

С помощью замены $y = \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$ $\Big(\sin x = \dfrac{2y}{1+y^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}\Big)$, где $x = t - \dfrac{\alpha\pi}{2}$, задача нахождения корней тригонометрического полинома $\varphi_{q,\alpha}(t)$ сводится к квадратному уравнению относительно неизвестного y. Решив это уравнение и сделав обратную замену, получим общий вид корней указанного тригонометрического полинома

$$t_1 = \frac{\alpha\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\, \frac{1 - q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}} + 2\pi k, \quad t_2 = \frac{\alpha\pi}{2} - 2\mathrm{arctg}\, \frac{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}{1 + q\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, эти два равенства задают счетное число корней полинома $\varphi_{q,\alpha}(t)$, определенного формулой (2.11), при каждом фиксированном α. Два таких корня $t_1 = t_1(q,\alpha)$, $t_2 = t_2(q,\alpha)$, заданные формулами (2.9), (2.10), являются непрерывными возрастающими функциями параметра $\alpha \in [0,4]$. Значения обобщенного ядра Пуассона в этих точках t_1, t_2 имеют вид

$$\Pi_{q,\alpha}(t_1) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \frac{q}{1-q^2}, \quad \Pi_{q,\alpha}(t_2) = \frac{1+q^2}{2(1-q^2)}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{q}{1-q^2}.$$

Поскольку $\Pi_{q,\alpha}(t_1) < \Pi_{q,\alpha}(t_2)$ и кроме t_1, t_2 на периоде у производной $\Pi'_{q,\alpha}$ нет других нулей, то t_1 и t_2 являются соответственно точками минимума и максимума ядра $\Pi_{q,\alpha}$ на периоде. $\square$

3. Оценки снизу

Обобщенное ядро Пуассона является непрерывно дифференцируемой 2π-периодической функцией, поэтому в силу теоремы 1.8.1 из [8, гл. 1, § 1.8] существует единственный полином $\tau_{n-1}^{-} = \tau_{n-1,q,\alpha}^{-} \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения снизу для $\Pi_{q,\alpha}$.

Предположим, что квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} p_k \tau(x_k)$$

с неотрицательными коэффициентами $p_1, \ldots, p_m$ справедлива для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$. Тогда, как известно (см. [8, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5]), для любой непрерывной 2π-периодической функции g выполняются неравенства (см. [8, гл. 1, § 1.7, теорема 1.7.5])

$$E_{n-1}^{+}(g) \geq \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx, \quad E_{n-1}^{-}(g) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx - \sum_{k=1}^{m} p_k g(x_k). \tag{3.1}$$

С помощью этих неравенств в дальнейшем будет получена оценка снизу величин $E_{n-1}^{\pm}(\Pi_{q,\alpha})$.

Зафиксируем произвольное вещественное число ϑ. Хорошо известна (см. [6, т. 2, гл. 10, формула (2.5); 8, гл. 1, § 1.7, предложение 1.7.2]) квадратурная формула

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \tau(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\Big(\vartheta + \frac{2k\pi}{n}\Big), \tag{3.2}$$

которая выполняется для любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Обратим внимание на то, что правой частью формулы (3.2) определяется линейный оператор, сопоставляющий полиному $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ усреднение его сдвижек. Этот оператор можно продолжить на пространство L естественным образом, положив

$$M_n f(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(t + \frac{2k\pi}{n}\big), \quad f \in L.$$

Для произвольной функции $g \in C$ с помощью неравенств (3.1) и формулы (3.2) приходим к неравенствам [8, гл. 1, § 1.7, следствие 1.7.2]

$$E_{n-1}^{+}(g) \geq \sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} M_n g(\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx, \quad E_{n-1}^{-}(g) \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx - \inf_{\vartheta\in\mathbb{R}} M_n g(\vartheta). \tag{3.3}$$

Оператор M_n переводит 2π-периодические функции в $\dfrac{2\pi}{n}$ - периодические, оставляет без изменения гармоники $e_\nu(t) = e^{i\nu t}$ порядка $\nu = mn$, где m — произвольное целое число, а остальные гармоники аннулирует. Таким образом, функции $f \in L$ с рядом Фурье $f(t) \sim \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu t}$ оператор M_n сопоставляет функцию $F = M_n f \in L$ с рядом Фурье [6, т. 1, гл. 2, § 1, теорема (1.1)] $M_n f(t) \sim \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_{mn} e^{imnt}$. В частности, обобщенное ядро Пуассона с параметрами q и α оператор M_n переводит в "n-сжатие" обобщенного ядра Пуассона с параметрами q^n и α, т. е.

$$M_n \Pi_{q,\alpha}(t) = \Big(\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Big) M_n P(t) + \Big(\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Big) M_n Q(t) = \Pi_{q^n,\alpha}(nt).$$

Отсюда с учетом (3.3) и леммы 1 получаем следующие оценки при $q \in (0,1)$:

$$E^{+}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \geq \sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} \Pi_{q^n,\alpha}(n\vartheta) - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \max_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q^n,\alpha}(t) - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$= \Pi_{q^n,\alpha}(t_2(\alpha,q^n)) - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\Big(1 + q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Big), \qquad (3.4)$$

$$E^{-}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \geq \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \inf_{\vartheta\in\mathbb{R}} \Pi_{q^n,\alpha}(n\vartheta) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \min_{t\in\mathbb{T}} \Pi_{q^n,\alpha}(t)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - \Pi_{q^n,\alpha}(t_1(\alpha,q^n)) = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\Big(1 - q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Big); \qquad (3.5)$$

формулы для $t_1(\alpha,q^n)$, $t_2(\alpha,q^n)$ получаются соответственно из формул (2.9), (2.10) путем замены q на q^n.

Оценки (3.4), (3.5) для односторонних приближений классического ядра Пуассона $P = \Pi_{q,0}$ были получены в [7] (см. [8, гл. 3, § 3.2]).

4. Оценки сверху. Доказательство теоремы

В данном разделе построен полином порядка $n-1$, приближающий $\Pi_{q,\alpha}$ снизу, с помощью которого получена оценка сверху для $E^{-}_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$, совпадающая с нижней оценкой (3.5).

Задача о приближении в L обобщенного ядра Пуассона $\Pi_{q,\alpha}$ возникла в конце 1930-х годов при нахождении наилучшего приближения в равномерной метрике класса функций $W_\infty(\Pi_{q,\alpha}) = \{f :\ f(x) = c + \int_{\mathbb{T}} \Pi_{q,\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1\}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного (одновременно с задачей Фавара для класса функций W^r_∞). Подробную историю и основные результаты см. в работах М. Г. Крейна [9] ($\alpha = 0$), Б. Надя [12] ($\alpha = 0, \alpha = 1$), А. В. Бушанского [5] ($\alpha \in \mathbb{R}$). Отметим также обзор близких результатов в монографии А. И. Степанца [13, Ch. 7]. Н. А. Барабошкина [2] вычислила величину $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ новым методом, отличным от классического, и получила [3, теорема 1] еще одно выражение для указанной величины, а именно,

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{1}{2\pi} A_{n-1}\Big(q, \frac{\alpha\pi}{2}\Big), \quad q \in (0,1),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

где $A_{n-1}(q,\theta)$ определяется с помощью $s(q,\theta,n) := \sqrt{1 - 2q^{2n}\cos 2\theta + q^{4n}}$ по формуле

$$A_{n-1}(q,\theta) = (2\cos\theta)\operatorname{arctg}\frac{2q^n\cos\theta}{s(q,\theta,n)} + (\sin\theta)\ln\frac{s(q,\theta,n) + 2q^n\sin\theta}{s(q,\theta,n) - 2q^n\sin\theta}.$$

При этом для построения полинома наилучшего интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ на периоде был предложен подход, основанный на представлении тригонометрической дроби $B_n(t) = \dfrac{\gamma^*\sin n(t-\xi^*)}{1+q^2-2q\cos t}$ в виде суммы $B_n = \boldsymbol{\tau} + r$, в которой $\boldsymbol{\tau}$ — некоторый тригонометрический полином порядка не выше $n-1$, а r — остаток. Реализация указанного подхода заключается в подборе параметров γ^*, ξ^* таким образом, чтобы остаток r совпал с $\Pi_{q,\alpha}$. Как отмечается в [2, разд. 1], указанный подход основан на идеях, содержащихся в работах П. Л. Чебышева (1859) [10, разд. 9–11] и С. Н. Бернштейна (1912) [4, ст. 7].

Перейдем к построению полинома наилучшего интегрального приближения снизу ядра $\Pi_{q,\alpha}$. Введем следующие величины:

$$\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(q,\alpha,n) = \frac{2q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\Big(1 + q^{2n} - 2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Big), \qquad (4.1)$$

$$\sigma = \sigma(q,\alpha,n) = \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\left(\frac{1-q^2}{\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n)}\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right) = \frac{(1+q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}-2q^n}{1+q^{2n}-2q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}. \tag{4.2}$$

Заметим, что

$$\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n)>0 \quad \text{и} \quad |\sigma(q,\alpha,n)|\le 1 \quad \text{при} \quad q\in(0,1), \quad \alpha\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.3}$$

Ключевую роль в дальнейшем играет тригонометрическая дробь

$$B_{q,\alpha,n}(t) = \frac{\widetilde{\gamma}\big(\cos\dfrac{n(t-\widetilde{\xi})}{2}\big)^2}{1+q^2-2q\cos t},$$

в которой величина $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\gamma}(q,\alpha,n)$ задана формулой (4.1), а параметр $\widetilde{\xi}$ связан с величиной (4.2) соотношением

$$\cos n\widetilde{\xi} = \sigma(q,\alpha,n). \tag{4.4}$$

При заданных $q\in(0,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ дробь $B_{q,\alpha,n}(t)$ неотрицательна при всех $t\in\mathbb{R}$ в силу первого неравенства в (4.3). Связь этой дроби с обобщенным ядром Пуассона выражает

Лемма 2. *Пусть $q\in(0,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда разность $B_{q,\alpha,n}-\Pi_{q,\alpha}=Y_{q,\alpha,n}$ представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n-1$. При этом полином $\tau^- := -Y_{q,\alpha,n}\in\mathcal{T}_{n-1}$ удовлетворяет неравенству $\tau^-\le\Pi_{q,\alpha}$. Кроме того,*

$$E^-_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) \le \|\Pi_{q,\alpha}-\tau^-\| = \|B_{q,\alpha,n}\| = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(1-q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Паре вещественных чисел γ и ξ сопоставим дробь

$$B(t) = \frac{\gamma\big(\cos\frac{n(t-\xi)}{2}\big)^2}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{\gamma}{2}\,\frac{1+\cos nt\cos n\xi+\sin nt\sin n\xi}{1+q^2-2q\cos t}. \tag{4.6}$$

Применив лемму 1 из [2] к (4.6), получим представление $B=Y+H$, в котором Y — некоторый полином из $\mathcal{T}_{n-1}$, а H — остаток от деления, который задается формулой

$$H(t) = \frac{\gamma}{2}\frac{1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t}{1+q^2-2q\cos t}, \quad c(n)=\frac{1+q^{2n}}{2q^n}, \quad d(n)=\frac{1-q^{2n}}{(1-q^2)q^{n-1}}. \tag{4.7}$$

Подберем положительный параметр γ и вещественный параметр ξ так, чтобы остаток H совпал с ядром $\Pi_{q,\alpha}$. Для этого по переменной $t\in\mathbb{R}$ должно выполняться тождество

$$\frac{\gamma}{2}\frac{1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t}{1+q^2-2q\cos t} \equiv \frac{(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin t}{2(1-2q\cos t+q^2)},$$

которое равносильно тождеству

$$\gamma\big(1+c(n)\cos n\xi+d(n)\sin n\xi\sin t\big) \equiv (1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}+2q\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin t.$$

Отсюда приходим к системе двух уравнений

$$\gamma\big(1+c(n)\cos n\xi\big) = (1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}, \quad \gamma d(n)\sin n\xi = 2q\sin\frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.8}$$

с двумя неизвестными γ и ξ, причем нас интересует решение с положительным числом γ. Перепишем систему в эквивалентном виде, используя обозначение $\lambda := \dfrac{1}{\gamma}$,

$$\cos n\xi = \frac{1}{c(n)}\left(\lambda(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}-1\right), \quad \sin n\xi = \frac{2\lambda q}{d(n)}\sin\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{4.9}$$

Возведя оба равенства системы в квадрат и складывая, получим уравнение для неизвестного положительного λ:

$$1 = \frac{1}{c^2(n)}\Big(\lambda(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 1\Big)^2 + \frac{4\lambda^2 q^2}{d^2(n)}\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}.$$

После элементарных преобразований получим квадратное уравнение $a\lambda^2 + b\lambda + v = 0$ с коэффициентами

$$a = (1-q^2)^2\cos^2\frac{\alpha\pi}{2} + \Big(\frac{2qc(n)}{d(n)}\Big)^2\sin^2\frac{\alpha\pi}{2}, \quad b = -2(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2}, \quad v = 1 - c^2(n).$$

Используя формулы для $c(n)$, $d(n)$ (см. (4.7)), находим

$$a = \frac{(1-q^2)^2}{(1-q^{2n})^2}\Big((1+q^{2n})^2 - 4q^{2n}\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\Big).$$

Вычислим коэффициент $v = 1 - c^2(n) = 1 - \dfrac{(1+q^{2n})^2}{4q^{2n}} = -\dfrac{(1-q^{2n})^2}{4q^{2n}}$ и дискриминант квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4av = 4(1-q^2)^2\cos^2\frac{\alpha\pi}{2} + 4\frac{(1-q^2)^2}{(1-q^{2n})^2}\frac{(1-q^{2n})^2}{4q^{2n}}\Big((1+q^{2n})^2 - 4q^{2n}\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\Big)$$

$$= 4(1-q^2)^2\cos^2\frac{\alpha\pi}{2} + \frac{4(1-q^2)^2}{4q^{2n}}\Big((1+q^{2n})^2 - 4q^{2n}\cos^2\frac{\alpha\pi}{2}\Big) = \frac{(1-q^2)^2(1+q^{2n})^2}{q^{2n}}.$$

Дискриминант D и коэффициент a являются положительными, кроме того $|b| < \sqrt{D}$, поэтому квадратное уравнение имеет два различных корня $\lambda_1 < \lambda_2$, причем разных знаков. Нас интересует положительный корень $\lambda = \lambda_2$. Учитывая найденные выше выражения для a и b, получаем

$$\gamma = \frac{1}{\lambda} = \frac{2a}{-b+\sqrt{D}} = \frac{2q^n(1-q^2)}{(1-q^{2n})^2}\Big(1 + q^{2n} - 2q^n\cos\frac{\alpha\pi}{2}\Big) = \widetilde{\gamma}(q,\alpha,n). \tag{4.10}$$

Отсюда с помощью первого уравнения системы (4.9) приходим к равенствам

$$\cos n\xi = \frac{1}{c(n)}\Big(\lambda(1-q^2)\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 1\Big) = \frac{2q^n}{1+q^{2n}}\Big(\frac{1-q^2}{\gamma}\cos\frac{\alpha\pi}{2} - 1\Big), \tag{4.11}$$

которые с учетом (4.2) равносильны соотношению (4.4).

Таким образом, первое утверждение леммы 2 доказано. Проверим справедливость оставшихся утверждений. Неравенство $\tau^- \le \Pi_{q,\alpha}$ следует из неотрицательности дроби B, поскольку $\gamma > 0$ в силу (4.10). Отсюда получаем первое неравенство в (4.5). Осталось доказать последнее равенство в (4.5). Имеем

$$\|B\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B(t)\,dt = \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos nt\cos n\xi + \sin nt\sin n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt + \frac{\gamma}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt\cos n\xi}{2(1+q^2-2q\cos t)}\,dt$$

$$= \frac{\gamma}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(t)\,dt + \frac{\gamma\cos n\xi}{1-q^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(t)\cos nt\,dt = \frac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)},$$

где P — ядро Пуассона (см. (1.2)). Таким образом, $\|B\| = \dfrac{\gamma(1+q^n\cos n\xi)}{2(1-q^2)}$. Отсюда с учетом формул (4.10), (4.11) приходим к равенству $\|B\| = \dfrac{q^n}{1-q^{2n}}\left(1 - q^n\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$. $\square$

Доказательство теоремы. Первое равенство в (1.3) при $q \in (0,1)$ следует из (3.5) и (4.5). Отсюда с помощью (2.3), (2.6) и (2.8) получаем оба равенства в (1.3) при $q \in (-1,1)$. Второе утверждение теоремы следует из того, что первое неравенство в (4.5) обращается в равенство, а также из равенств (4.1), (4.2), (4.4) и второго равенства в (4.8). Равенство (2.5) влечет последнее утверждение теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Наум Т.З.** Односторонние приближения в L линейной комбинации ядра Пуассона и сопряженного ядра Пуассона тригонометрическими полиномами // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе: Полиграфия ООО “Офсет”, 2016. С. 44–49.
2. **Барабошкина Н.А.** Приближение в L линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 79–86.
3. **Барабошкина Н.А.** Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.
4. **Бернштейн С.Н.** Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). 581 с.
5. **Бушанский А.В.** О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1978. С. 2–37.
6. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с; Т. 2. 538 с.
7. **Доронин В.Г., Лигун А.А.** Точные значения наилучших односторонних приближений некоторых классов периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1979. № 8 (207). С. 20–25.
8. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
9. **Крейн М.Г.** К теории наилучшего приближения // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
10. **Чебышев П.Л.** Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций // Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2: Математический анализ. С. 151–235.
11. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 12. P. 139–164.
12. **Sz. Nagy B.** Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig, 1938. Bd. 90. S. 103–134.
13. **Stepanets A.I.** Methods of approximation theory. Leiden; Boston: VSP, 2005. 919 p.

Поступила 26.09.2016

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук , зав. отделом
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Наум Татьяна Зиновьевна
математик, магистрант
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: tanusha502_1993@mail.ru

REFERENCES

1. Babenko A.G., Naum T.Z. One-sided approximations in L of a linear combination of the Poisson kernel and its conjugate kernel by trigonometric polynomials. *Proc. Internat. Summer Math. Stechkin School-Conf. on Function Theory*, Dushanbe: Polygraphy Ltd "Ofset", 2016, pp. 44–49 (in Russian).
2. Baraboshkina N.A. L-approximation of a linear combination of the Poisson kernel and its conjugate kernel by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Instit. Math*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. S59–S67.
3. Baraboshkina N.A. Approximation of harmonic functions by algebraic polynomials on a circle of radius smaller than one with constraints on the unit circle. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 19, no. 2, 2013, pp. 71–78 (in Russian).
4. Bernstein S.N. Collected Works (Russian): Vol. 1: The constructive theory of functions (1905–1930), transl.: Atomic Energy Commission, Springfield, Va, 1958.
5. Bushanskii A.V. On the best harmonic approximation in the mean of some functions. *Investigations in the Theory of Approximation of Functions and Their Applications*, Institute of Mathematics Ukrainian Academy of Sciences, Kiev, 1978, pp. 29–37 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric serie*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 1959, Vol. 1,2.
7. Doronin V.G., Ligun A.A. Exact values of best one-sided approximations of certain classes of periodic functions. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 20–25.
8. Korneichuk N.P., Ligun A.A., Doronin V.G. *Approksimaciya s ogranicheniyami* (Approximation with Constraints). Kiev: Naukova Dumka, 1976, 252 p. (in Russian).
9. Krein M.G. On theory of best approximation of periodic functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1938, vol. 18, no. 4–5, pp. 245–249 (in Russian).
10. Chebyshev P.L. Problems about smallest quantities connected with an approximate representation of a function. *Complete Collected Works*, in 5 vol., Moscow: Izd. AN SSSR, 1947, vol. 2, pp. 151–235 (in Russian).
11. Bojanic R., DeVore R. On polynomials of best one-sided approximation. *Enseign. Math.*, 1966, vol. 12, pp. 139–164.
12. Sz. Nagy B. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall, *Ber. Verh. sächs. Akad.*, Leipzig, 1938, Bd. 90, S. 103–134.
13. Stepanets A.I. Methods of approximation theory. Leiden, Boston: VSP, 2005, 919 p.

A. G. Babenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: babenko@imm.uran.ru .

T. Z. Naum, mathematician, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: tanusha502_1993@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.95

L_p-ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА m-МЕРНОМ ТОРЕ[1]

Д. Б. Базарханов

В работе устанавливается L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов с символами, негладкими по пространственной переменной, на m-мерном торе при $1 \leq p \leq \infty$.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, символ, ограниченный оператор, m-мерный тор.

D. B. Bazarkhanov. The L_p-boundedness of some classes of pseudo-differential operators on the m-dimensional torus.

We prove that certain classes of pseudo-differential operators with symbols that are nonsmooth in the spatial variable are L_p-bounded on the m-dimensional torus for $1 \leq p \leq \infty$.

Keywords: pseudo-differential operator, symbol, bounded operator, m-dimensional torus.

MSC: 58J40, 35S05, 42B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-64-80

1. Введение

Псевдодифференциальные операторы (пдо), т. е. операторы, допускающие представление

$$T_a u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi, \tag{1.1}$$

играют важную роль в теории общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами (см., например, [1; 2]) в гармоническом анализе (см., например, [3, ch. 6–8]).

Обычно предполагается, что символ $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ оператора T_a является гладким, как по пространственной переменной x, так и по частотной переменной ξ, и удовлетворяет некоторым условиям роста (убывания). Так, класс $S^{\tau}_{\varrho\delta} = S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ $(\tau \in \mathbb{R}; 0 \leq \delta, \varrho \leq 1)$ был введен Л. Хёрмандером [4] в связи с исследованием гипоэллиптических уравнений: $a \in S^{\tau}_{\varrho\delta}$, если $a(x,\xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$ $\exists\, c_{\alpha\beta} > 0$:

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m. \tag{1.2}$$

Для $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{N}$ обозначим через $S^{\tau}_{\varrho\delta}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ совокупность всех символов $a(x,\xi)$, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам (1.2) при $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$, $|\alpha| \leq \mathrm{A}$, $|\beta| \leq \mathrm{B}$.

Здесь и ниже используются следующие стандартные обозначения: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \in \mathbb{N})$. Для $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $|x| := |x|_2 = \sqrt{xx}$, $\langle x\rangle = \sqrt{1 + xx}$; $x \leq y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\kappa \leq y_\kappa$ $(x_\kappa < y_\kappa)$ для всех $\kappa \in \mathrm{z}_m$. Далее, $\mathbb{T}^m \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ — m-мерный тор.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 5130/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_m(f)$ — преобразование Фурье для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Далее для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{N}_0^m$, используем стандартные мультииндексные обозначения:

$$\partial^\alpha f(x)(\equiv \partial_x^\alpha f(x)) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m} f(x), \quad \text{где} \quad \partial_\kappa = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}, \quad \kappa \in \mathrm{z}_m;$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!; \quad \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \quad (\gamma \le \alpha).$$

Пусть, далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т.е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^m$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m)$, если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^m$, т.е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^m \backslash \mathbb{Z}^m$.

Пусть $L_p^{(\mathtt{i})} = L_p(\mathbb{I}^m)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство измеримых функций $f : \mathbb{I}^m \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{I}^m$, со стандартной нормой; здесь $(\mathtt{i}, \mathbb{I}) \in \{(\mathtt{r}, \mathbb{R}), (\mathtt{t}, \mathbb{T})\}$. Таким образом, $L_p^{(\mathtt{r})} = L_p(\mathbb{R}^m)$, $L_p^{(\mathtt{t})} = L_p(\mathbb{T}^m)$.

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ $(\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^m))$ и $g \in L_1(\mathbb{T}^m)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^m))$ имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^m; \quad \widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^m} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^m.$$

Исследование ограниченности (классов) пдо между различными нормированными пространствами функций и распределений — одна из важных задач теории.

Л. Хёрмандер [4; 5] показал, что для ограниченности на $L_2(\mathbb{R}^m)$ (всех) операторов T_a с символами $a \in S^\tau_{\varrho\delta}$ необходимо, а при условии $\delta < \varrho$ и достаточно, чтобы $\tau \le \min\Big\{0, \dfrac{m}{2} \times (\varrho - \delta)\Big\}$. А. Кальдерон и Р. Вайянкур [6] установили достаточность этого условия при $\delta = \varrho < 1$ для символов из класса $S^\tau_{\varrho\varrho}\Big(2\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 2, 2\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 2\Big)$, где $\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$. Позднее Р. Койфман и И. Мейер [7] доказали, что условия $\tau \le 0, \delta \le \varrho, \delta < 1$ гарантируют L_2-ограниченность операторов T_a при минимальных условиях регулярности на символ: $a \in S^\tau_{\varrho\delta}\Big(\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1, \Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1\Big)$. Наконец, в работе [8] в части достаточности снято условие $\delta \le \varrho$: если $a \in S^\tau_{\varrho\delta}\Big(\Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1, \Big\lfloor\dfrac{m}{2}\Big\rfloor + 1\Big)$ с $0 \le \delta, \varrho \le 1, \delta < 1$, $\tau \le \min\Big\{0, \dfrac{m}{2}(\varrho - \delta)\Big\}$, то T_a ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$. Случай $\delta = 1$ является исключительным: в [9] построен пример символа $a \in S^0_{11}$, для которого оператор T_a не является ограниченным на $L_2(\mathbb{R}^m)$, а в [10] доказано, что все пдо T_a с символами из $S^\tau_{\varrho 1}$ ограничены на $L_2(\mathbb{R}^m)$ тогда и только тогда, когда $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho - 1)$; в частности, построен символ $a \in S^{\frac{m}{2}(\varrho-1)}_{\varrho 1}$ такой, что пдо T_a не ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$.

Далее, пусть $1 < p < \infty$, $0 \le \delta \le \varrho \le 1, \delta < 1$; тогда для ограниченности пдо T_a на $L_p(\mathbb{R}^m)$ для всех $a \in S^\tau_{\varrho 1}$ необходимо (Л. Хёрмандер [4]) и достаточно (Ч. Фефферман [11]), чтобы выполнялось условие $\tau \le m(\varrho - 1)\Big|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\Big|$. Между тем М. Нагасэ [12] показал, что если выполняются условия (с $0 < \sigma \le 1$ и $0 \le \tau < 1$) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{m+1}$, $|\alpha| \le m + 1$, $\exists c_\alpha > 0$:

$$|\partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}, \quad |\partial_\xi^\alpha a(x, \xi) - \partial_\xi^\alpha a(y, \xi)| \le c_\alpha |x - y|^\sigma \langle\xi\rangle^{-|\alpha| + \sigma\tau},$$

то оператор T_a ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$. Таким образом, для L_2-ограниченности оператора T_a достаточно, грубо говоря, конечной гладкости (порядка $m + 1$) по частотной переменной и лишь гельдеровости по пространственной переменной производных $\partial_\xi^\alpha a(x\,,\,\xi)$ $\forall \alpha : |\alpha| \le m + 1$.

В дальнейшем эти результаты получили мощное развитие, в частности, в направлении L_p-ограниченности пдо T_a с нерегулярными по пространственной переменной символами a.

Подробности см., например, в [1–3; 7]. Здесь отметим только два важных для дальнейшего изложения результата Р. Койфмана и И. Мейера [7] и К. Кенига и В. Staубаха [13].

Пусть $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная, возрастающая, выпуклая (на $[0,1]$) функция с $\omega(0) = 0$. Обозначим через $\Sigma_\omega^{(\mathtt{r})} = \Sigma_\omega(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ пространство символов $a : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ таких, что $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $|\alpha| \le m+1$, $\exists\, c_\alpha > 0$:

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{-|\alpha|}, \quad |\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(y,\xi)| \le c_\alpha \omega(|x-y|)\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \quad ((x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m).$$

Теорема A [7]. *Следующие условия на функцию ω эквивалентны:*

i) *ω^2 удовлетворяет условию Дини:* $\displaystyle\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < +\infty$;

ii) *для любого $a \in \Sigma_\omega^{(\mathtt{r})}$ пдо T_a ограничен на $L_2(\mathbb{R}^m)$;*

iii) *для любого $a \in \Sigma_\omega^{(\mathtt{r})}$ пдо T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$ при $1 < p < \infty$.*

Далее, пусть $\tau \in \mathbb{R}$, $0 \le \varrho \le 1$. Класс символов $L_\infty^{(\mathtt{r})} S_\varrho^\tau = L_\infty S_\varrho^\tau(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ состоит из всех функций $a(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^m)$, измеримых по x, таких, что $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^m\ \exists\, c_\alpha > 0$:

$$\|\partial_\xi^\alpha a(\,\cdot\,,\xi) \mid L_\infty(\mathbb{R}^m)\| \le c_\alpha \langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|}, \quad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

В работе [13] (см. там предложения 2.3, 2.5 и теорему 2.7) доказана следующая

Теорема B. *Предположим, что $1 \le p \le \infty$; $0 \le \varrho \le 1$ и $\tau \in \mathbb{R}$ такие, что $\tau p_* < m(\varrho-1)$; здесь $p_* = \min\{p,2\}$. Пусть $a(x,\xi) \in L_\infty^{(\mathtt{r})} S_\varrho^\tau$. Тогда оператор T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$. В частности, при $\tau < 0$ и $a(x,\xi) \in L_\infty^{(\mathtt{r})} S_1^\tau$ оператор T_a ограничен на $L_p(\mathbb{R}^m)$ для всех $1 \le p \le \infty$.*

Как легко видеть из доказательства (и как отмечают сами авторы), теорема B справедлива для символов $a(x,\xi)$ конечной гладкости по частотной переменной ξ. Кроме того, с одной стороны, теорема B существенно ослабляет (в части достаточности) условия ограниченности пдо в $L_2(\mathbb{R}^m)$ из [10], с другой — результат из [10] (в части необходимости) влечет точность условия $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho - 1)$ в теореме B при $p = 2$.

Цель настоящей работы — развить теоремы A и B на случай периодических пдо с символами, которые являются негладкими по пространственной переменной и имеют достаточно малую гладкость по частотной переменной. Рассмотрим периодический символ $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ и соответствующий ему формальный псевдодифференциальный оператор

$$T_a \colon u(x) \mapsto T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i\xi x}. \tag{1.3}$$

Периодический аналог $S_{\varrho\delta}^{\tau(\mathtt{t})} = S_{\varrho\delta}^\tau(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ ($\tau \in \mathbb{R}; 0 \le \delta, \varrho \le 1$) класса Хёрмандера состоит из всех символов $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ таких, что $a(\,\cdot\,,\xi) \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$ для всех $\xi \in \mathbb{Z}^m$, а также $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m\ \ \exists\, c_{\alpha\beta} > 0$:

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| \le c_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{\tau-\varrho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m, \tag{1.4}$$

(здесь Δ_ξ^α — оператор конечной разности порядка α с шагом 1 по каждой из координат частотной переменной ξ; см. разд. 2.1). Теория периодических пдо T_a с символами из классов $S_{\varrho\delta}^\tau(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ и их вариантов конечной гладкости в последнее десятилетие привлекла большое внимание, в частности, исследованию ограниченности (в особенности L_p-ограниченности) посвящено много работ, см., например, [14, ch. 4; 15–17] и приведенную там библиографию. Более подробно мы остановимся на результатах, тесно связанных с теоремой 1, в комментариях к ней. В работе изучаются следующие классы символов.

Определение 1.1. Пусть $1 \le p \le \infty$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\varrho \in [0,1]$, $s \in \mathbb{N}$. Тогда периодический символ $a(x,\xi)$ принадлежит классу $L_p^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s) \equiv L_p S_\varrho^\tau(s)(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$, если для него конечна величина

$$\|\, a \,|\, L_p^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau(s) \,\| \equiv \max_{\alpha\,:\,|\alpha| \le s} \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \langle\xi\rangle^{\varrho|\alpha|-\tau} \|\, \Delta_\xi^\alpha a(\,\cdot\,,\xi) \,|\, L_p(\mathbb{T}^m) \,\|.$$

Пусть $\Sigma^{(\mathtt{t})}_\omega = \Sigma_\omega(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ — класс символов $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$, которые являются сужениями на $\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$ символов $a^{(\mathtt{r})} \in \Sigma^{(\mathtt{r})}_\omega$ таких, что $\forall \xi \in \mathbb{Z}^m$ функция $a^{(\mathtt{r})}(x,\xi)$ является периодической по пространственной переменной x.

2. Достаточные условия непрерывности пдо T_a на $L_p(\mathbb{T}^m)$

Всюду ниже $\lfloor t \rfloor$ — целая часть числа $t \in \mathbb{R}$; $p_* = \min\{p,2\}$, если $1 \le p \le \infty$; $k = \left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 1$; $s(m) = 2k$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Предположим, что* $1 \le p \le \infty$, $\varrho \in [0,1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ *такое, что* $\tau p_* < m(\varrho - 1)$. *Пусть* $a \in L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho(s(m))$. *Тогда пдо* T_a *— ограниченный оператор из* $L_p(\mathbb{T}^m)$ *в* $L_p(\mathbb{T}^m)$.

2.1. Подготовительные конструкции

Для функций $b\,, d : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ и мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ напомним формулы (кратных) разностей порядка α (соответственно “вперед” и “назад”)

$$\Delta^\alpha b\,(\xi) \equiv \Delta^\alpha_\xi\, b\,(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^m :\, \gamma \le \alpha} (-1)^{|\alpha - \gamma|} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot b\,(\xi + \gamma),$$

$$\overline{\Delta}^\alpha b\,(\xi) \equiv \overline{\Delta}^\alpha_\xi\, b\,(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^m :\, \gamma \le \alpha} (-1)^{|\gamma|} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot b\,(\xi - \gamma),$$

а также формулу Лейбница

$$\Delta^\alpha (b\,(\xi)\, d\,(\xi)) \equiv \Delta^\alpha_\xi (b\,(\xi)\, d\,(\xi)) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^m :\, \gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \cdot \Delta^\gamma\, b\,(\xi) \cdot \overline{\Delta}^{\alpha - \gamma}\, d\,(\xi + \gamma) \tag{2.1}$$

и формулу суммирования по частям

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} b\,(\xi) \cdot \Delta^\alpha\, d\,(\xi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \overline{\Delta}^\alpha\, b\,(\xi) \cdot d\,(\xi), \tag{2.2}$$

которые понадобятся в дальнейшем.

Для произвольного символа $a\colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ построим его (стандартное) “продолжение” $a^{\mathtt{r}}\colon \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ следующим образом. Выберем функции $\varphi, \phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^m)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset (-1,1)^m$;

(ii) $\sum_{\xi^\nu \in \mathbb{Z}^{m^\nu}} \widehat{\varphi}(x + \xi) \equiv 1$ на $\mathbb{R}^m$;

(iii) $\varphi(\xi) = \delta_{0\,\xi},\, 0, \xi \in \mathbb{R}^m$ ($\delta_{\xi\,\zeta}$ — символ Кронекера; $\xi, \zeta \in \mathbb{Z}^m$);

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}^m$ имеем $\partial^\alpha \varphi(\xi) = \overline{\Delta}^\alpha \phi_\alpha$. (Существование таких пробных функций φ, ϕ_α нетрудно доказать, отправляясь от одномерного случая; подробнее см., например, [14, Lemma 4.5.1]). Тогда функция

$$a^{\mathtt{r}}(x,\xi) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} \varphi(\xi - \zeta) a(x,\zeta), \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{T}^m, \tag{2.3}$$

очевидно, будет продолжением символа a, т.е. $a^{\mathtt{r}}(x,\xi) \equiv a(x,\xi)$, $(x,\xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m$.

Рассмотрим периодический пдо с символом $a(x,\xi)$: $T_a u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^m} a(x,\xi) \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i \xi x}$. Элементарные преобразования дают представление T_a в виде интегрального оператора

$$T_a u(x) = \int\limits_{\mathbb{T}^m} K_a(x, x - y)\, u(y) dy \tag{2.4}$$

с ядром Шварца
$$K_a(x,x-y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}a(x,\xi)e^{2\pi i\xi(x-y)}. \tag{2.5}$$
Рассмотрим теперь (непериодическое) ядро Шварца, отвечающее символу $a^{\mathtt{r}}(x,\xi)$,
$$K_a^{\mathtt{r}}(x,x-y)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}a^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi(x-y)}d\xi. \tag{2.6}$$
Снова простые преобразования устанавливают связь между ядрами $K_a(x,y)$ и $K_a^{\mathtt{r}}(x,y)$:
$$K_a^{\mathtt{r}}(x,y)=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(\xi-\zeta)a(x,\zeta)e^{2\pi i\xi y}d\xi=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)e^{2\pi i\zeta y}$$
$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(\xi-\zeta)e^{2\pi i(\xi-\zeta)y}d\xi=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)e^{2\pi i\zeta y}\widehat{\varphi}(-y)=K_a(x,y)\widehat{\varphi}(-y),$$
кроме того,
$$T_a^{\mathtt{r}}u(x)\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^m}K_a^{\mathtt{r}}(x,x-y)u(y)dy=\int\limits_{\mathbb{R}^m}K_a(x,x-y)$$
$$\times\widehat{\varphi}(y-x)u(y)dy=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{[0,1]^m+\xi}K_a(x,x-y)\widehat{\varphi}(y-x)u(y)dy$$
$$=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y-\xi)\widehat{\varphi}(y-x+\xi)u(y+\xi)dy$$
$$=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y)\widehat{\varphi}(y-x+\xi)u(y)dy=\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y)$$
$$\times\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\widehat{\varphi}(y-x+\xi)u(y)dy=\int\limits_{\mathbb{T}^m}K_a(x,x-y)u(y)dy=T_au(x). \tag{2.7}$$
В доказательстве теоремы 1 нам понадобится специальное разбиение единицы на $\mathbb{R}^m$. Выберем функцию $\eta_0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ таким образом, что $0\le\eta_0(\xi)\le1$, $\xi\in\mathbb{R}^m$, $\eta_0(\xi)=1$, если $|\xi|\le1$, $\eta_0(\xi)=0$, если $|\xi|\ge3/2$. Положим $\eta(\xi)\equiv\eta_0(2^{-1}\xi)-\eta_0(\xi)$ и $\eta_j(\xi)\equiv\eta(2^{-j+1}\xi)$, $j\in\mathbb{N}$. Тогда
$$\{\,\eta_j(\xi),\quad j\in\mathbb{N}_0\,\} \tag{2.8}$$
— гладкое разбиение единицы (по сферическим слоям) на $\mathbb{R}^m$.

Рассмотрим (m-мерный) оператор Лапласа (применяемый по переменной ξ)
$$\Delta=\Delta_\xi=\frac{1}{4\pi^2}(\partial_1^2+\ldots+\partial_m^2).$$

Формальные преобразования, включающие интегрирование по частям и запись k-й итерации $(1-\Delta_\xi)^k$ оператора $1-\Delta_\xi$ в виде $\sum_{|\alpha|\le2k}c(\alpha;k)\partial_\xi{}^\alpha$, дают ($k\in\mathbb{N}$)
$$K_a^{\mathtt{r}}(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}a^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi y}d\xi=\langle y\rangle^{-2k}\int\limits_{\mathbb{R}^m}a^{\mathtt{r}}(x,\xi)(1-\Delta_\xi)^ke^{2\pi i\xi y}d\xi$$
$$=\langle y\rangle^{-2k}\int\limits_{\mathbb{R}^m}e^{2\pi i\xi y}(1-\Delta_\xi)^ka^{\mathtt{r}}(x,\xi)d\xi=\langle y\rangle^{-2k}\sum_{|\alpha|\le2k}c(\alpha;k)\int\limits_{\mathbb{R}^m}\partial_\xi{}^\alpha a^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi y}d\xi. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.3) и свойства функции φ и используя формулу суммирования по частям (2.2), подробнее выпишем представление производной символа-продолжения:
$$\partial_\xi{}^\alpha a^{\mathtt{r}}(x,\xi)=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)\partial_\xi{}^\alpha\varphi^{(m}(\xi-\zeta)=\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}a(x,\zeta)\overline{\Delta}_\xi{}^\alpha\phi_\alpha(\xi-\zeta)=(-1)^{|\alpha|}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\phi_\alpha(\xi-\zeta)\Delta_\zeta{}^\alpha a(x,\zeta). \tag{2.10}$$

2.2. Доказательство теоремы 1

Пусть a — произвольный символ из класса $L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho(s(m))$. Фиксируем гладкое разбиение единицы $\eta = \{\,\eta_j(\xi)\,|\ \ j\in\mathbb{N}_0\}$ (см. (2.8)) и представим символ a в следующем виде:

$$a(x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x,\xi),\quad a_j(x,\xi)=a(x,\xi)\eta_j(\xi)\ \ (j\in\mathbb{N}_0).$$

Обозначим операторы и ядра Шварца, соответствующие символу a_j (см. (2.4)–(2.6)), через $T_j, K_j, K_j^{\mathtt{r}}$, а $a_j^{\mathtt{r}}$ — его стандартное продолжение (2.3). В силу (2.10) имеем $\forall\,\alpha\ :\ |\alpha|\le 2k$

$$\partial_\xi^\alpha a_j^{\mathtt{r}}(x,\xi)=(-1)^{|\alpha|}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\phi_\alpha(\xi-\zeta)\Delta_\zeta^\alpha a_j(x,\zeta). \tag{2.11}$$

Далее, по формуле Лейбница (2.1)

$$\Delta_\zeta^\alpha a_j(x,\zeta)=\sum_{\gamma\le\alpha}\tbinom{\alpha}{\gamma}\Delta_\zeta^\gamma a(x,\zeta)\overline{\Delta}_\zeta^{\alpha-\gamma}\eta_j(\zeta+\gamma). \tag{2.12}$$

Из определения 1.1 вытекает оценка $((x,\xi)\in\mathbb{T}^m\times\mathbb{Z}^m)$

$$|\Delta_\zeta^\gamma a(x,\zeta)|\le\|a\,|\,L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho(s(m))\|\langle\zeta\rangle^{\tau-\varrho|\gamma|}; \tag{2.13}$$

далее ради краткости пишем $\|a\|$ вместо $\|a\,|\,L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho(s(m))\|$. По теореме о среднем в виду свойств разбиения единицы η следует, что $\exists\, c_{\alpha-\gamma}=c_{\alpha-\gamma}(m;\eta)>0, \exists\,\mathrm{R}=\mathrm{R}(m,\eta)>1, \exists\,\mathrm{r}=\mathrm{r}(m,\eta)\in(0,1)$ такие, что

$$|\overline{\Delta}_\zeta^{\alpha-\gamma}\eta_j(\zeta+\gamma)|\le c_{\alpha-\gamma}2^{-j|\alpha-\gamma|}\mathtt{I}_{\Box^j}(\zeta); \tag{2.14}$$

здесь $\mathtt{I}_A(\cdot)$ — индикатор множества A,

$$\Box^j=\{\zeta\in\mathbb{R}^m\colon |\zeta|\le\mathrm{R}\ 2^j\},\quad j=0,1,\dots,J(m,\eta),$$

$$\Box^j=\{\zeta\in\mathbb{R}^m\colon \mathrm{r}\ 2^j\le|\zeta|\le\mathrm{R}\ 2^j\},\quad j=J(m,\eta)+1,\quad J(m,\eta)+2,\dots.$$

Подставляя оценки (2.13) и (2.14) в (2.12), получим

$$|\Delta_\zeta^\alpha a_j(x,\zeta)|\le\|a\|\mathtt{I}_{\Box^j}(\zeta)\sum_{\gamma\le\alpha}c_{\alpha-\gamma}\langle\zeta\rangle^{\tau-\varrho|\gamma|}2^{-j|\alpha-\gamma|}.$$

Так как $\phi_\alpha\in S(\mathbb{R}^m),\alpha\in\mathbb{N}_0^m$, то $\forall\mathrm{M}>0$ найдется постоянная $\mathrm{C}(\mathrm{M};\varphi)>0$ такая, что $|\phi_\alpha(\xi)|\le\mathrm{C}(\mathrm{M};\varphi)\langle\xi\rangle^{-\mathrm{M}}\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}^m\ \forall\,\alpha:|\alpha|\le 2k$. Из этих оценок и из (2.11) следует, что

$$|\partial_\xi^\alpha a_j^{\mathtt{r}}(x,\xi)|\le\mathrm{C}(\mathrm{M};\varphi)\|a\|\sum_{\gamma\le\alpha}c_{\alpha-\gamma}2^{-j|\alpha-\gamma|}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\frac{\langle\zeta\rangle^{\tau-\varrho|\gamma|}\mathtt{I}_{\Box^j}(\zeta)}{\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}}}\le\mathrm{C}(\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|$$

$$\times\sum_{\gamma\le\alpha}2^{-j|\alpha|+j|\gamma|}2^{j(\tau-\varrho|\gamma|)}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\frac{\mathtt{I}_{\Box^j}(\zeta)}{\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}}}\le\mathrm{C}(\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\varrho|\alpha|)}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\frac{\mathtt{I}_{\Box^j}(\zeta)}{\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}}}, \tag{2.15}$$

на последнем шаге использовано условие $\varrho\le1$.

Здесь и далее $\mathrm{C}(\dots)$, $\mathrm{C}^*(\dots)$, $\widetilde{\mathrm{C}}(\dots)$, $\mathrm{C}'(\dots)$, $\mathrm{C}^\star(\dots)$, $\mathrm{C}^{\star\star}(\dots)$, $\mathrm{C}_1(\dots)$, $\mathrm{C}_1^\star(\dots)$, $\mathrm{C}_1^{\star\star}(\dots)$, C_2 — некоторые положительные константы, зависящие только от параметров, стоящих в скобках.

Пусть сперва $j\in\{0,1,\dots,J(m,\eta)\}$. Тогда ввиду (2.9) и (2.15) имеем (при $\mathrm{M}>m$)

$$K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)\le\sum_{|\alpha|\le2k}|\mathrm{C}(\alpha;k)|\mathrm{C}(\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\frac{\|a\|2^{j(\tau-\varrho|\alpha|)}}{\langle x-y\rangle^{2k}}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m}\frac{\mathtt{I}_{\Box^j}(\zeta)d\xi}{\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}}}$$

$$= \langle x-y\rangle^{-2k}\|a\|\text{c}'(m,\text{м},\text{r};\eta,\varphi)\sum_{|\alpha|\le 2k}2^{j(\tau-\varrho|\alpha|)}\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j)$$

$$= \langle x-y\rangle^{-2k}\text{c}(m,\text{м},\varrho,\text{r};\eta,\varphi)\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j)2^{j\tau}. \tag{2.16}$$

Здесь и ниже $\#A$ — число элементов конечного множества A ($\#A=0\Leftrightarrow A=\varnothing$). Поскольку $2k>m$, из (2.16) следуют оценки

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)|dx\le \text{c}^*(m,\text{м},\varrho,\text{r};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j), \tag{2.17}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)|dy\le \text{c}^*(m,\text{м},\varrho,\text{r};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j). \tag{2.18}$$

По формуле суммирования Пуассона (см., например, [18, гл. 7, теорема 2.4]) и свойству (ii) функции φ находим, с одной стороны, что

$$K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}K_j^{\mathtt{r}}(x+\xi,x+\xi-y)\in L_1(\mathbb{T}^m)$$

как функция x и в силу (2.17)

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K_j(x,x-y)|dx\le \text{c}^*(m,\text{м},\varrho,\text{r};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j), \tag{2.19}$$

с другой стороны, имеем $K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}K_j^{\mathtt{r}}(x,x-y+\xi)\in L_1(\mathbb{T}^m)$ как функция y и в силу (2.18)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K_j(x,x-y)|dy\le \text{c}^*(m,\text{м},\varrho,\text{r};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j). \tag{2.20}$$

Из неравенств (2.19) и (2.20) по лемме Шура (см., например, [19, гл. 11, теорема 3.1]; лемме Шура соответствует случай $r=\sigma=1$, $1\le p=q\le\infty$) следует, что оператор T_j является ограниченным оператором из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_p(\mathbb{T}^m)$ для всех $1\le p\le\infty$, при этом

$$\|T_j\|_{p\to p}\le \text{c}^*(m,\text{м},\varrho,\text{r};\eta,\varphi)2^{j\tau}\|a\|\#(\mathbb{Z}^m\cap\Box^j)\quad (j\in\{0,1,\dots,J(m,\eta)\}). \tag{2.21}$$

Теперь докажем ограниченность на $L_p(\mathbb{T}^m)$ операторов T_j с $j\ge J(m,\eta)+1$ и оператора T_a.

I. Сначала предположим, что $1\le p\le 2$ $\Big(\Rightarrow \tau<\dfrac{m}{p}(\varrho-1)\Big)$. Из (2.6) аналогично (2.9) выводим равенство (с $l=0,k;y\ne 0$)

$$(y_1^{2l}+\dots+y_m^{2l})K_j^{\mathtt{r}}(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}(\partial_{\xi_1}^{2l}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2l})a_j^{\mathtt{r}}(x,\xi)e^{2\pi i\xi y}d\xi=\mathcal{F}((\partial_{\xi_1}^{2l}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2l})a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot))(-y).$$

Поэтому в силу теоремы Хаусдорфа — Юнга (см., например, [18, гл. 5, §1]) верно неравенство $\Big(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1\Big)$:

$$\|(y_1^{2l}+\dots+y_m^{2l})K_j^{\mathtt{r}}(x,y)\,|\,L_{p'}^{(\mathtt{r})}\|\le\|(\partial_{\xi_1}^{2l}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2l})a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot)\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\| \tag{2.22}$$

(норма слева в (2.22) вычисляется по y).

Пусть $u\in L_p(\mathbb{T}^m)$, тогда по (2.7) получаем

$$T_ju(x)=\Big(\int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}}+\int\limits_{|y|\ge 2^{-j\varrho}}\Big)K_j^{\mathtt{r}}(x,y)u(x-y)dy=:v_1(x)+v_2(x).$$

Оценим нормы в $L_p(\mathbb{T}^m)$ функций $v_1(x)$ и $v_2(x)$ по отдельности. Поскольку последовательное применение неравенств Гельдера, (2.22) с $l=0$, (2.15) с $\alpha=0$ дает

$$|v_1(x)|^p \le \Big(\int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|^{p'}dy\Big)^{p/p'} \int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |u(x-y)|^p dy$$

$$\le \|a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot)\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\|^p \int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |u(x-y)|^p dy \le ((\mathrm{C}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j\tau})^p$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^m}\Big|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\xi-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\Big|^p d\xi \int\limits_{|y|\le 2^{-j\varrho}} |u(x-y)|^p dy,$$

то отсюда, интегрируя по $\mathbb{T}^m$ и проводя элементарные оценки, получаем оценку нормы v_1:

$$\|v_1\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_1(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{p}\varrho)}\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\|\|u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|. \tag{2.23}$$

Аналогично (используя (2.22) с $l=k$, (2.15) с $\alpha\in\{(2k,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,2k)\}\subset\mathbb{R}^m$) имеем

$$|v_2(x)|^p \le \|(\partial_{\xi_1}^{2k}+\dots+\partial_{\xi_m}^{2k})a_j^{\mathtt{r}}(x,\cdot)\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\|^p \int\limits_{|y|\ge 2^{-j\varrho}} \frac{|u(x-y)|^p}{(y_1^{2k}+\dots+y_m^{2k})^p}dy$$

$$\le \Big(m\mathrm{C}(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-2k\varrho)}\Big\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|\Big)^p \int\limits_{|y|\ge 2^{-j\varrho}} \frac{|u(x-y)|^p}{(y_1^{2k}+\dots+y_m^{2k})^p}dy$$

и, далее, интегрируя по $\mathbb{T}^m$ и принимая во внимание, что $y_1^{2k}+\dots+y_m^{2k}\asymp|y|^{2k}$, получаем оценку нормы v_2:

$$\|v_2\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-2k\varrho)}\Big\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|$$

$$\times\|u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|2^{j\varrho(2k-\frac{m}{p})} \le \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{p}\varrho)}\Big\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|$$

$$\times\|u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},\mathrm{R},p;\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{p}(\varrho-1))}\|u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\| \tag{2.24}$$

при условии, что $\mathrm{M}=\mathrm{M}(m,p)$ выбрано так, что $\mathrm{M}(p-1)>m$ при $1<p\le 2$ и $\mathrm{M}>m$ при $p=1$. На последнем шаге мы использовали следующее неравенство: при $\mathrm{M}=\mathrm{M}(m,p)$ $\exists\,\mathrm{C}(m,\mathrm{M},p,\mathrm{R})>0$ такая, что

$$\Big\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\Big\| \le \mathrm{C}(m,\mathrm{M},p,\mathrm{R})2^{j\frac{m}{p}}. \tag{2.25}$$

Докажем это неравенство. Пусть сначала $1<p\le 2$. Тогда, последовательно используя неравенство Йенсена (для сумм), ограниченность на $\mathbb{R}^m$ (равномерную по $j\in\mathbb{N}_0$) непрерывных функций $\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}(1-p)}\le\mathrm{C}_1(m,\mathrm{M},p)$, $\xi\in\mathbb{R}^m$ (учитывая выбор $\mathrm{M}=\mathrm{M}(m,p)$!), а также оценку числа целых точек в сферическом слое (хорошо известна сильная асимптотическая оценка числа целых точек в m-мерном шаре $\mathtt{R}>0$; для наших целей достаточна простая (точная по порядку) оценка сверху $\#(\mathbb{Z}^m\cap\{\zeta\in\mathbb{R}^m\,|\,|\zeta|\le\mathtt{R}\})\le\mathrm{C}(m)\,\mathtt{R}^m$), получаем

$$\Big\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_p^{(\mathtt{r})}\Big\|^p \le \int\limits_{\mathbb{R}^m}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\xi-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\xi-\zeta\rangle^{\mathrm{M}(1-p)}d\xi$$

$$\leq \mathrm{C}_1(m,\mathrm{M},p)\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\langle\xi-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}d\xi=\mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},p)\#(\mathbb{Z}^m\cap\square^j)\leq\mathrm{C}_2(m,\mathrm{M},p)\mathrm{C}_m\mathrm{R}2^{jm};$$

таким образом, неравенство (2.25) установлено при $1<p\leq 2$; как легко видеть, случай $p=1$ фактически (по ходу дела) также разобран.

Из (2.23)–(2.25) получаем окончательную оценку

$$\|T_ju\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|\leq\mathrm{C}^{\star}(m,\mathrm{M},\mathrm{R},p;\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{p}(\varrho-1))}\|u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|. \tag{2.26}$$

Собирая воедино оценки (2.21) и (2.26), устанавливаем ограниченность оператора T_a на $L_p(\mathbb{T}^m)$:

$$\|T_a\|_{p\to p}\leq\sum_{j=0}^{\infty}\|T_j\|_{p\to p}\leq\mathrm{C}_1^{\star}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{j(\tau-\frac{m}{p}(\varrho-1))}=\mathrm{C}^{\star\star}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|; \tag{2.27}$$

здесь на последнем шаге мы учли, что по условию теоремы $\tau<\dfrac{m}{p}(\varrho-1)$.

II. Теперь рассмотрим случай $p=\infty$. Как отмечено выше, оценки (2.21) для операторов T_j с $j\in\{0,1,\ldots,J(m,\eta)\}$ получены для всех $1\leq p\leq\infty$.

Пусть теперь $j\geq J(m,\eta)+1$. В силу (2.7) имеем для $u\in L_\infty(\mathbb{T}^m)$

$$|T_ju(x)|\leq\|u\,|\,L_\infty^{(\mathtt{t})}\|\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy, \tag{2.28}$$

поэтому остается доказать подходящую оценку для интеграла справа. Снова разобьем этот интеграл на две части:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy=\Bigg(\int\limits_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}+\int\limits_{|y|\geq 2^{-j\varrho}}\Bigg)|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy=:w_1(x)+w_2(x). \tag{2.29}$$

Оценим $w_1(x)$, последовательно применяя неравенство Гельдера, неравенство, полученное при оценке функции $|v_1(x)|^p$ выше, и (2.25) (все три с $p=2$):

$$\begin{aligned}\int\limits_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy&\leq\Bigg(\int\limits_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|^2dy\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{|y|\leq 2^{-j\varrho}}dy\Bigg)^{1/2}\\&\leq\mathrm{C}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}\varrho)}\Bigg\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_2^{(\mathtt{r})}\Bigg\|\\&\leq\widetilde{\mathrm{C}}(m,\mathrm{M},\mathrm{R},p;\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}(\varrho-1))}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Аналогично оценивается $w_2(x)$ (единственное отличие: используется неравенство, полученное при оценке функции $|v_2(x)|^p$ выше, а не $|v_1(x)|^p$):

$$\begin{aligned}\int\limits_{|y|\geq 2^{-j\varrho}}|K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|dy&\leq\Bigg(\int\limits_{|y|\geq 2^{-j\varrho}}|(y_1^{2k}+\cdots+y_m^{2k})K_j^{\mathtt{r}}(x,y)|^2dy\Bigg)^{1/2}\\&\times\Bigg(\int\limits_{|y|\geq 2^{-jp}}\frac{dy}{(y_1^{2k}+\cdots+y_m^{2k})^2}\Bigg)^{1/2}\leq\mathrm{C}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-2k\varrho)}2^{j\varrho(2k-\frac{m}{2})}\\&\times\Bigg\|\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^m\cap\square^j}\langle\cdot-\zeta\rangle^{-\mathrm{M}}\,|\,L_2^{(\mathtt{r})}\Bigg\|\leq\widetilde{\mathrm{C}}(m,\mathrm{R};\eta,\varphi)\|a\|2^{j(\tau-\frac{m}{2}(\varrho-1))}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Таким образом, из (2.28) ввиду (2.29)–(2.31) получаем требуемую оценку

$$\|T_j u \,|\, L_\infty^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}_1^{\star\star}(m, \mathrm{M}, \mathrm{R}; \eta, \varphi)\|a\| 2^{j(\tau - \frac{m}{2}(\varrho-1))}\|u \,|\, L_\infty^{(\mathtt{t})}\|.$$

Следовательно, для $j \ge J(m,\eta)+1$ мы доказали ограниченность оператора T_j на $L_\infty(\mathbb{T}^m)$ и установили оценку

$$\|T_j\|_{\infty\to\infty} \le \mathrm{C}_1^{\star\star}(m, \mathrm{M}, \mathrm{R}; \eta, \varphi)\|a\| 2^{j(\tau - \frac{m}{2}(\varrho-1))}.$$

Отсюда, складывая установленные оценки и учитывая условие теоремы $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho-1)$, которое выполняется в случае $p=\infty$, окончательно получаем оценку

$$\|T_a\|_{\infty\to\infty} \le \mathrm{C}_1^{\star\star}(m, \mathrm{M}, \mathrm{R}; \eta, \varphi)\|a\|. \tag{2.32}$$

III. Пусть теперь $2 < p < \infty$. Ограниченность оператора T_a на $L_p(\mathbb{T}^m)$ следует из его ограниченности на $L_2(\mathbb{T}^m)$ и на $L_\infty(\mathbb{T}^m)$ в силу интерполяционной теоремы Рисса (см. [18, гл. 5, теорема 1.3]), при этом справедлива оценка, которая вытекает из (2.27) и (2.32) (с $p=2$),

$$\|T_a\|_{p\to p} \le c^{\star\star}(m, p, \mathrm{R}; \eta, \varphi)\|a\|.$$

Итак, теорема 1 полностью доказана.

В связи с теоремой 1 сделаем несколько замечаний.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 — периодический аналог теоремы В, доказанной в [13]. При оценке (нормы) ядра $K_j^{\mathtt{r}}$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ мы следуем схеме рассуждений и используем конструкции из [13]. Легко видеть, что число $2\left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor + 2$ в условии теоремы 1 можно заменить на $m+1$: в случае четного m следует в ее доказательстве дифференциальный оператор $\partial_{\xi_1}^{2k} + \ldots + \partial_{\xi_m}^{2k}$ заменить на $\operatorname{sign}(y_1)\,\partial_{\xi_1}^{m+1} + \ldots + \operatorname{sign}(y_m)\,\partial_{\xi_m}^{m+1}$ и функцию $y_1^{2k} + \ldots + y_m^{2k}$ на $|y_1|^{m+1} + \ldots + |y_m|^{m+1}$. Таким образом, порядок гладкости символа по частотной переменной в теореме 1 (а также в теореме В) тот же, что и в результате М. Нагасэ, упомянутом во введении: $|\alpha| \le m+1$.

З а м е ч а н и е 2. Условие $\tau < \dfrac{m}{2}(\varrho-1)$ в теореме 1 является точным по крайней мере при $p=2$ и $p=\infty$. Обсудим лишь случай $p=2$. Прежде всего покажем, что условие $\tau \le \min\left\{0, \dfrac{m}{2}(\varrho-\delta)\right\}$ необходимо для ограниченности на $L_2^{(\mathtt{t})}$ всех пдо (1.3) с символами из $S_{\varrho\delta}^{\tau(\mathtt{t})}$. Необходимость условия $\tau \le 0$ очевидна, поэтому предположим, что $0 \ge \tau > \dfrac{m}{2}(\varrho-\delta)$, и построим символ $\widetilde{a} \in S_{\varrho\delta}^{\tau(\mathtt{t})}$, для которого пдо $T_{\widetilde{a}}$ неограничен на $L_2^{(\mathtt{t})}$. Фиксируем функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ с $\operatorname{supp}\psi = \{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, |\xi| \le 1/2\}$ такую, что $\psi(\xi)=1$ при $|\xi| \le 1/4$. Рассмотрим функцию ($\mathsf{e} = (1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^m$)

$$a_{\mathrm{R}}(x,\xi) = \sum_{|\zeta| < \mathrm{R}^{\delta-\varrho}} e^{-2\pi i \zeta x \mathrm{R}^\varrho} \psi((\xi - \mathrm{R}\mathsf{e})\mathrm{R}^{-\varrho} - \zeta) \quad (\mathrm{R} > 0).$$

Носители слагаемых здесь попарно не пересекаются: $\forall\, \zeta, \lambda \in \mathbb{Z}^m \colon \zeta \ne \lambda \Rightarrow\ 1 \le |\zeta - \lambda| \le |(\xi - \mathrm{R}\mathsf{e})\mathrm{R}^{-\varrho} - \zeta| + |(\xi - \mathrm{R}\mathsf{e})\mathrm{R}^{-\varrho} - \lambda|$, следовательно, одно из слагаемых $\ge 1/2$ $(\forall\, \xi \in \mathbb{R}^m)$. Напомним пример Хёрмандера [5]

$$\bar{a}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{j\tau} \bar{a}_j(x,\xi), \quad \bar{a}_j(x,\xi) = a_{10^j}(x,\xi) \quad (j \in \mathbb{N})$$

(носители (по ξ) слагаемых $\bar{a}_j(x,\xi)$ также попарно не пересекаются). В [5] показано, что $\bar{a}(x,\xi) \in S_{\varrho\delta}^{\,\tau}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$. Вообще говоря, символ $\bar{a}(x,\xi)$ не является периодическим по x, поэтому рассмотрим “подправленный” пример Хёрмандера

$$\widetilde{a}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{j\tau} \widetilde{a}_j(x,\xi), \quad \widetilde{a}_j(x,\xi) = \widetilde{a}_{\varrho\delta j}^{\,\tau}(x,\xi) = \sum_{|\zeta| < 10^{j(\delta-\varrho)}} e^{-2\pi i \zeta x \lfloor 10^{j\varrho} \rfloor} \psi((\xi - 10^j \mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho} \rfloor^{-1} - \zeta).$$

Ясно, что $\widetilde{a}(x,\xi)$ — символ, периодический по x, наследует все указанные свойства, — в частности, удовлетворяет неравенствам (1.2) и, как следствие, (1.4). Другими словами, $\widetilde{a}(x,\xi) \in S^{\tau(\mathtt{t})}_{\varrho\delta}$. Покажем, что оператор $T_{\widetilde{a}}$ вида (1.3) не ограничен на $L^{(\mathtt{t})}_2$. Фиксируем неотрицательную функцию $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^m)$ с $\operatorname{supp}\varphi = \{\xi \in \mathbb{R}^m \mid |\xi| < \mathsf{r}\}$, где $\mathsf{r} = \mathsf{r}_\varrho$ выбрано из условия $\mathsf{r}\lfloor 10^\varrho\rfloor^{-1} < 1/4$. По φ определим полиномы

$$\phi(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \varphi(\xi)e^{2\pi i\xi x}, \tag{2.33}$$

$$u_j(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} e^{2\pi i\xi x} \sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} \varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor) \quad (j\in\mathbb{N}).$$

Если $\xi \in \mathbb{Z}^m\colon \widehat{u}_j(\xi) \neq 0$, то $\exists\,\lambda = \lambda(\xi)\colon |\lambda| < 10^{j(\delta-\varrho)}$ и $\varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \lambda\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor) > 0$. Поэтому $|(\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1} - \lambda| < 1/4$, так что $\psi((\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1} - \lambda) = 1$ и $\psi((\xi-10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1} - \zeta) = 0$ $\forall\,\zeta \neq \lambda$, следовательно, $\varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor) = 0$ $\forall\,\zeta\neq\lambda$. Таким образом, $\forall j\in\mathbb{N}$, $\forall\xi\in\mathbb{Z}^m$ имеем $\widehat{u}_j(\xi) = \varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \lambda\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$ и $|\widehat{u}_j(\xi)|^2 = \sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} \varphi^2(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$. Отсюда по теореме Парсеваля получаем, с одной стороны,

$$\|u_j \mid L^{(\mathtt{t})}_2\|^2 = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} \varphi^2(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor) = \sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \varphi^2(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$$

$$= \|\,\phi \mid L^{(\mathtt{t})}_2\,\|^2 \#\{\zeta\in\mathbb{Z}^m\colon |\zeta| < 10^{j(\delta-\varrho)}\} =: \|\,\phi\mid L^{(\mathtt{t})}_2\,\|^2\, \mathrm{N}_j(\varrho,\delta),$$

с другой стороны, находим, что

$$T_{\widetilde{a}}u_j(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widetilde{a}(x,\xi)\widehat{u}_j(\xi)e^{2\pi i\xi x} = 10^{j\tau}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \widetilde{a}_j(x,\xi)\widehat{u}_j(\xi)e^{2\pi i\xi x}$$

$$= 10^{j\tau}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} e^{-2\pi i\lambda(\xi)x\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor}e^{2\pi i\xi x}\varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \lambda(\xi)\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)$$

$$= 10^{j\tau}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} \varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)e^{2\pi i(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)x}$$

$$= 10^{j\tau}\sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} \varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)e^{2\pi i(\xi-10^j\mathsf{e}-\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)x} = 10^{j\tau}\,\phi(x)\,\mathrm{N}_j(\varrho,\delta)$$

и поэтому $\|\,T_{\widetilde{a}}u_j\mid L^{(\mathtt{t})}_2\| = 10^{j\tau}\,\|\,\phi\mid L^{(\mathtt{t})}_2\,\|\,\mathrm{N}_j(\varrho,\delta)$. Следовательно,

$$\frac{\|\,T_{\widetilde{a}}u_j\mid L^{(\mathtt{t})}_2\|}{\|u_j\mid L^{(\mathtt{t})}_2\|} = 10^{j\tau}\,(\mathrm{N}_j(\varrho,\delta))^{1/2}. \tag{2.34}$$

Так как имеет место сильная асимптотическая оценка (для числа целых точек m-мерного шара радиуса R при $\mathrm{R}\to\infty$; b_m — объем единичного m-мерного шара)

$$\#\{\zeta\in\mathbb{Z}^m \mid |\zeta| < \mathrm{R}\} \sim \mathsf{b}_m\,\mathrm{R}^m, \tag{2.35}$$

то из (2.34) следует неограниченность оператора $T_{\widetilde{a}}$ на $L^{(\mathtt{t})}_2$ $\Big($по предположению $\tau > \dfrac{m}{2}(\varrho-\delta)!\Big)$.

Теперь докажем, что при условии $\tau = \dfrac{m}{2}(\varrho-1)$ в классе $L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho$ при любом $\varrho\in[0,1]$ существует символ $\breve{a}(x,\xi) = a^{(\varrho)}(x,\xi)$ такой, что $T_{\breve{a}}$ неограничен на $L_2(\mathbb{T}^m)$. С этой целью подправим символ $\widetilde{a}_j = \widetilde{a}^\tau_{\varrho\delta j}$ с $\delta = 1$ следующим образом (ср. [9, (4.2); 10, (4),(6)]):

$$\breve{a}_j(x,\xi) = \sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} e^{-2\pi i(10^j\mathsf{e}+\zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor)x}\psi((\xi - 10^j\mathsf{e})\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor^{-1} - \zeta)$$

и положим $\breve{a}(x,\xi) = a^{(\varrho)}(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{j\tau}\dfrac{1}{\sqrt{j}}\breve{a}_j(x,\xi)$. Легко видеть, что $\breve{a}(x,\xi) \in S^{\tau(\mathtt{t})}_{\varrho\delta} \subset L^{(\mathtt{t})}_\infty S^\tau_\varrho$. Для любого $J \in \mathbb{N}$ и произвольного набора $(d_j)_{j=1}^J$ положительных чисел рассмотрим полином

$$u_J(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} e^{2\pi i\xi x}\sum_{j=1}^J d_j \sum_{|\zeta|<10^{j(\delta-\varrho)}} \varphi(\xi - 10^j\mathsf{e} - \zeta\lfloor 10^{j\varrho}\rfloor).$$

Рассуждая, как выше, нетрудно проверить, что (ϕ — полином из (2.33))

$$T_{\breve{a}}u_J(x) = \sum_{j=1}^J\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m} d_j\frac{1}{\sqrt{j}}10^{j\tau}\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,1)\cdot\phi(x), \quad \|u_j \,|\, L^{(\mathtt{t})}_2\|^2 = \|\,\phi\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\,\|^2\sum_{j=1}^J d_j^2\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,\delta),$$

$$\|\,T_{\breve{a}}u_J\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\| = \|\,\phi\,|\,L^{(\mathtt{t})}_2\,\|\sum_{j=1}^J d_j\frac{1}{\sqrt{j}}10^{j\tau}\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,1).$$

Если $T_{\breve{a}}$ ограничен на $L_2(\mathbb{T}^m)$, то неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^J d_j\frac{1}{\sqrt{j}}10^{j\tau}\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,1)\Big)^2 \le \|\,T_{\breve{a}}\,\|^2_{2\to 2}\sum_{j=1}^J d_j^2\cdot \mathrm{N}_j(\varrho,\delta)$$

справедливо для любого набора $(d_j)_{j=1}^J$. Отсюда следует, что $\sum_{j=1}^J 1/j\; 10^{j2\tau}\,\mathrm{N}_j(\varrho,1) \le \|\,T_{\breve{a}}\,\|_{2\to 2}$. Последнее неравенство влечет сходимость гармонического ряда, если учесть (2.35) и равенство $\tau = m/2\,(\varrho-1)$. Полученное противоречие доказывает неограниченность $T_{\breve{a}}$ на $L_2(\mathbb{T}^m)$.

З а м е ч а н и е 3. Развитие теории периодических пдо (т. е. пдо вида (1.3)) до 2009 г. (включая известные работы М. С. Аграновича по их квантизации Фурье) весьма полно отражено в не столь давней монографии [14]. После 2009 г. наблюдается существенный рост интереса к теории и приложениям периодических пдо. Здесь мы обсудим лишь результаты, которые имеют прямое отношение к теореме 1 и замечанию 2. М. Ружанский и В. Турунен [15] доказали ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_2$ пдо T_a при условии, что для его символа $a(x,\xi)$ конечна величина $\max_{|\alpha|\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\|\partial^\alpha_x a(\cdot,\xi)\,|\,L^{(\mathtt{t})}_\infty\|$ (в частности, это верно для T_a с $a\in S^{0(\mathtt{t})}_{\varrho 0}$). Затем Х. Дельгадо [16] установил ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ при $2\le p<\infty$ пдо T_a с символами $a(x,\xi)$, удовлетворяющими условию ($0<\varrho<1$)

$$\max_{|\alpha|\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\langle\xi\rangle^{\frac{m}{2}\varrho+(1-\varrho)|\alpha|}\|\Delta^\alpha_\xi a(\cdot,\xi)\,|\,L^{(\mathtt{t})}_\infty\| + \max_{|\beta|\le\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1}\sup_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\langle\xi\rangle^{\frac{m}{2}\varrho}\|\partial^\beta_x a(\cdot,\xi)\,|\,L^{(\mathtt{t})}_\infty\| < \infty, \quad (2.36)$$

(в частности, с символами $a\in S^{-\frac{m}{2}\varrho(\mathtt{t})}_{1-\varrho\,0}$) как следствие интерполяции между упомянутым результатом М. Ружанского и В. Турунена и следующей теоремой из [16]: пдо T_a ограничен из $L^{(\mathtt{t})}_\infty$ в $BMO(\mathbb{T}^m)$, если его символ $a(x,\xi)$ удовлетворяет условию (2.36) при $0<\varrho<1$. Следует подчеркнуть, что идея доказательства ограниченности из $L^{(\mathtt{r})}_\infty$ в $BMO(\mathbb{R}^m)$ и на $L^{(\mathtt{r})}_2$ пдо (1.1) с символами $a(x,\xi)\in S^{\frac{m}{2}\varrho}_{\varrho-1\delta}$ и последующей интерполяции для получения их ограниченности на $L^{(\mathtt{r})}_p$ при $2<p<\infty$ принадлежит Ч. Фефферману: именно так были получены результаты работы [11], упомянутые во введении. (Здесь $BMO(\mathbb{I}^m)$ — пространство функций ограниченной средней осцилляции на $\mathbb{I}^m$, $\mathbb{I}\in\{\mathbb{R},\mathbb{T}\}$.) Наконец, Д. Кардона [17] доказал ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ для всех $1<p<\infty$ пдо T_a с символами $a\in S^{0(\mathtt{t})}_{1\,\delta}$ при $0\le\delta<1$. В [17] используется классический (в теории сингулярных интегральных операторов Кальдерона — Зигмунда) подход: сначала доказывается, что оператор T_a имеет слабый тип $(1,1)$ и ограничен на $L^{(\mathtt{t})}_2$, затем (с помощью действительной интерполяции) — ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ при $1<p<2$, и, наконец, по двойственности устанавливается ограниченность на $L^{(\mathtt{t})}_p$ и при $2<p<\infty$.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что вопросы ограниченности на $L_p(\mathbb{T}^m)$ пдо T_a вида (1.3) с символами, не гладкими по пространственной переменной, по-видимому, до сих пор не рассматривались. Достаточные условия ограниченности из $L_p(\mathbb{T}^m)$ в $L_q(\mathbb{T}^m)$ пдо T_a вида (1.3) в терминах классов символов $L_r^{(\mathtt{t})} S_\varrho^\tau$ $(1 \le p, q \le \infty, r = r(p,q))$ в стиле теоремы 1 будут рассмотрены в следующей работе. Пример пдо $T_{\check{a}}$ с символом из $S_{1+\epsilon\,1}^{\frac{m}{2}\epsilon(\mathtt{t})}$, построенный в замечании 2 $(\epsilon = \varrho - 1,\ 0 \le \varrho \le 1)$, показывает, что упомянутые результаты работ [15–17], вообще говоря, не верны для операторов с символами из $S_{1-\varrho\,1}^{-\frac{m}{2}\varrho(\mathtt{t})}$. Как следствие теоремы 2, доказываемой в разд. 3 ниже, из класса $L_\infty^{(\mathtt{t})} S_1^0(m+1)$ выделяется подкласс $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})}$, пдо с символами из которого оказываются заведомо ограниченными на $L_p(\mathbb{T}^m)$ при всех $1 < p < \infty$.

3. Аналог теоремы А для периодических пдо

Всюду в этом разделе предполагается, что $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — непрерывная, возрастающая, выпуклая (на $[0,1]$) функция с $\omega(0) = 0$. Следующая теорема является периодической версией теоремы А из введения (класс символов $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})}$ — из определения 1.1).

Теорема 2. *Псевдодифференциальный оператор* T_a *вида* (1.3) *ограничен на* $L_p(\mathbb{T}^m)$ *при всех* $1 < p < \infty$ *для любого* $a \in \Sigma_\omega(\mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m)$ *тогда и только тогда, когда* ω^2 *удовлетворяет условию Дини*: $\displaystyle\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 следует в основном схеме рассуждений из [7] и использует три ключевые идеи: мультипликаторный подход к пдо (см. предложение 1 ниже), микролокализацию, теорию Литлвуда — Пэли. Прежде всего отметим, что условие $\displaystyle\int_0^1 \omega^2(t)\frac{dt}{t} < \infty$ равносильно условию $\sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j}) < \infty$ (в силу монотонности ω).

Сначала докажем *необходимость условия теоремы* 2. Предположим, что ω не удовлетворяет условию Дини, и, следовательно, расходится ряд $\sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j}) = +\infty$. Построим пдо вида (1.3) с символом $a \in \sum_\omega^{(\mathtt{t})}$, который не будет ограниченным на $L_2(\mathbb{T}^m)$.

Выберем неотрицательные пробные функции $\psi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ такие, что $\operatorname{supp}\psi = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, \dfrac{2}{3} \le |\xi| \le \dfrac{4}{3}\Big\}$, $\operatorname{supp}\varphi = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, \dfrac{4}{5} \le |\xi| \le \dfrac{6}{5}\Big\}$, $\psi(\xi) = 1$ при $\dfrac{4}{5} \le |\xi| \le \dfrac{6}{5}$. Положим $\lambda^j = (2^j, \dots, 2^j) \in \mathbb{Z}^m$ $(j \in \mathbb{N}_0)$ и определим символ $a : \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ по формуле

$$a(x,\xi) = a_{\omega,\psi}(x,\xi) = \sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j})\psi(2^{-j}\xi)e^{-2\pi i\lambda^j x}.$$

Покажем, что $a \in \sum_\omega^{(\mathtt{t})}$. Во-первых, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ имеем

$$\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) = \sum_{j=0}^\infty \omega(2^{-j})2^{-j|\alpha|}\partial^\alpha\psi(2^{-j}\xi)e^{-2\pi i\lambda^j x},$$

и поскольку открытые сферические слои $\square_0^j = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, \dfrac{2}{3}2^j < |\xi| < \dfrac{4}{3}2^j\Big\}$ попарно не пересекаются, то $a(x,\xi) \ne 0 \ \Rightarrow \exists!\, j_0 = j_0(\xi) \in \mathbb{N}_0\colon \xi \in \square_0^{j_0}$; следовательно, $\langle\xi\rangle \asymp |\xi| \asymp 2^{j_0}$. Поэтому

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \le \omega(2^{-j_0})\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}.$$

Во-вторых, предполагая сначала, что $0 < 2^{j_0}|x-y| < 1$, находим

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi) - \partial_\xi^\alpha a(y,\xi)| \le \omega(2^{-j_0})\|\partial^\alpha\psi \,|\, L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}|e^{-2\pi i\lambda^{j_0}x} - e^{-2\pi i\lambda^{j_0}y}|$$

$$\le 2\pi\sqrt{m}\|\partial^\alpha\psi \mid L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\omega(2^{-j_0})2^{j_0}|x-y| \le 2\pi\sqrt{m}\|\partial^\alpha\psi \mid L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\omega(|x-y|).$$

На последнем шаге использована выпуклость ω на $[0,1]$; если же $2^{j_0}|x-y|\ge 1$, то, поскольку $2^{-j_0}\le |x-y|$, получаем

$$|\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)-\partial_\xi^\alpha a(y,\xi)| \le 2\omega(2^{-j_0})\|\partial^\alpha\psi \mid L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \le 2\|\partial^\alpha\psi \mid L_\infty^{(\mathtt{r})}\|\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\omega(|x-y|).$$

Таким образом, $a\in\sum_\omega^{(\mathtt{t})}$. Теперь докажем, что оператор T_a не ограничен на $L_2(\mathbb{T}^m)$. Для этого достаточно построить такую функцию $u=u_{\omega,\varphi}\in L_2(\mathbb{T}^m)$, что $T_a u\notin L_2(\mathbb{T}^m)$. По функции φ определим полином $\phi(x)$ по формуле (2.33), затем функцию $u=u_{\omega,\varphi}(x)=\sum_{j=0}^\infty d_j e^{2\pi i\lambda^j x}\phi(x)$, где положительная числовая последовательность $(d_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ выбрана из условий $\|(d_j)\mid\ell_2\|=1$, $\sum_{j=0}^\infty d_j\omega(2^{-j})=+\infty$. Ясно, что спектр функции u есть множество

$$\Lambda(u)=\bigcup_{j=0}^\infty\big(\lambda^j+\{\xi\in\mathbb{Z}^m \mid \varphi(\xi)\ne 0\}\big)=:\bigcup_{j=0}^\infty\Lambda_j(u)\subset\bigcup_{j=0}^\infty\Big(\lambda^j+\Big\{\xi\in\mathbb{Z}^m \mid \frac{4}{5}\le|\xi|\le\frac{6}{5}\Big\}\Big),$$

причем множества $\Lambda_j(u)$ попарно не пересекаются. Следовательно, $u=u_{\omega,\varphi}\in L_2(\mathbb{T}^m)$, при этом по равенству Парсеваля $\|u\mid L_2^{(\mathtt{t})}\|^2=\sum_{j=0}^\infty d_j^2\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi^2(\xi)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\varphi^2(\xi)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в замечании 2 разд. 2, поэтому мы их не приводим.

Для непустого конечного множества $\Lambda\subset\mathbb{Z}^m$ пусть $d(\Lambda)=\max\{|\xi-\zeta|\colon \xi,\zeta\in\Lambda\}$, $\bar d(\Lambda)=\max(1,d(\Lambda))$ и

$$\mathrm{T}(\Lambda)=\Big\{\,t(x)=\sum_{\xi\in\Lambda}\widehat t(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}\ \mid\ \widehat t(\xi)\in\mathbb{C},\ \xi\in\Lambda\Big\}$$

— пространство тригонометрических полиномов со спектром Λ. Нам понадобятся пространство бесселевых потенциалов $H^\varkappa(\mathbb{R}^m)$ (см., например, [20, ch. 9], там оно обозначается $L_2^\varkappa(\mathbb{R}^m)$):

$$H^\varkappa(\mathbb{R}^m)=\big\{g\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)\mid \|g\mid H^\varkappa\|=\|\mathcal{F}g(\xi)\langle\xi\rangle^\varkappa\mid L_2^{(\mathtt{r})}\|<\infty\big\}\quad(\varkappa\in\mathbb{R})$$

и пространство $\mathrm{H}^\omega=\mathrm{H}^\omega(\mathbb{T}^m)$ всех функций $u:\mathbb{T}^m\to\mathbb{C}$ таких, что конечна величина

$$\|u\mid\mathrm{H}^\omega\|:=\sup_{x\in\mathbb{T}^m}|u(x)|+\sup_{x,y\in\mathbb{T}^m\colon x\ne y}\frac{|u(x)-u(y)|}{\omega(|x-y|)},$$

которая, очевидно, является нормой для $\mathrm{H}^\omega(\mathbb{T}^m)$. Положим $\Lambda_0=\{\xi\in\mathbb{Z}^m\mid|\xi|\le 2\}$, $\Lambda_j=\{\xi\in\mathbb{Z}^m\mid 2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}\}$, $j\in\mathbb{N}$. Будем ради краткости использовать обозначение

$$\|(f_j)\mid L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|:=\Big\|\Big(\sum_{j=0}^\infty|f_j(\cdot)|^2\Big)^{1/2}\mid L_p^{(\mathtt{t})}\Big\|$$

для функциональной последовательности $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ $(x\in\mathbb{T}^m)$.
Следующее утверждение — основной ингредиент *доказательства достаточности* в теореме 2.

Предложение 1. *Предположим, что* $1<p<\infty$, ω^2 *удовлетворяет условию Дини*: $\displaystyle\int_0^1\omega^2(t)\frac{dt}{t}<+\infty$. *Пусть* $(\mathrm{m}_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ *— ограниченная последовательность в* H^ω. *Тогда существует постоянная* $\mathrm{C}(m,p)>0$ *такая, что для любой последовательности* $(\mathrm{v}_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$ *тригонометрических полиномов* $\mathrm{v}_j\in\mathrm{T}(\Lambda_j)$ *имеет место неравенство*

$$\Big\|\sum_0^\infty\mathrm{m}_j(x)\mathrm{v}_j(x)\mid L_p^{(\mathtt{t})}\Big\|\le\mathrm{C}(m,p)\big\|(\mathrm{v}_j)\mid L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\big\|.\tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следующий результат легко вытекает из теоремы 1 работы [21]: $\forall\, m\in\mathbb{N}\ \forall\,\alpha>\dfrac{m-1}{2}\ \exists\,\mathrm{C}(m,\alpha)>0\ \forall\, f:\mathbb{T}^m\to\mathbb{C}$ — непрерывной функции справедлива оценка $(\mathrm{R}>0)$

$$\|f-t_{\mathrm{R}}(f)\mid L_\infty^{(\mathtt{t})}\|\le\mathrm{C}(m,\alpha)\sup_{|h|\mathrm{R}\le 1}\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\mid L_\infty^{(\mathtt{t})}\|.\tag{3.2}$$

Здесь $t_{\mathrm{R}}(f,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m:\,|\xi|<\mathrm{R}}\Bigl(1-\dfrac{|\xi|^2}{\mathrm{R}^2}\Bigr)^{\alpha}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}$ — средние Рисса порядка α ряда Фурье функции f. В силу оценки (3.2) и условия предложения 1 представим функцию $m_j(x)$ в следующем виде $m_j(x) = t_j(x) + w_j(x)$, где $t_j(x) = t_{2^{j-2}}(m_j,x)$ $(j\in\mathbb{N})$; при этом $\|w_j\,|\,L_\infty^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\omega(2^{-j})$, $\|t_j\,|\,L_\infty^{(\mathtt{t})}\| \le \mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star$ (постоянная $\mathrm{C}^\star>0$ — это радиус шара в пространстве H^ω, которому принадлежит последовательность (m_j)). Теперь рассмотрим функции

$$g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}t_j(x)\mathrm{v}_j(x),\quad h(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{w}_j(x)\mathrm{v}_j(x),$$

и оценим их нормы в $L_p(\mathbb{T}^m)$ по отдельности. По неравенству Гельдера для рядов имеем

$$|h(x)|\le\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{w}_j(x)|^2\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{v}_j(x)|^2\Bigr)^{1/2}\le\mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^2(2^{-j})\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}|\mathrm{v}_j(x)|^2\Bigr)^{1/2}$$

следовательно,

$$\|h\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|\le\mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\Bigl(\sum_{j=0}^{\infty}\omega^2(2^{-j})\Bigr)^{1/2}\|(\mathrm{v}_j(x))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|. \tag{3.3}$$

Для оценки нормы g применим следующие неравенства. Введем операторы Δ_j^η $(j\in\mathbb{N}_0$; гладкое разбиение единицы $\eta=\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ на $\mathbb{R}^m$ — из (2.8)) следующим образом: для $u\in L_1(\mathbb{T}^m)$ положим

$$\Delta_j^\eta(u,x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\eta_j(\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}.$$

По теореме типа Литтлвуда — Пэли для “гладких двоичных пачек” [22, ch. 3, Theorem 3.4.4] при $1<p<\infty$ существует постоянная $\mathrm{C}(p,m,\eta)>1$ такая, что для всех $u\in L_p(\mathbb{T}^m)$ справедливы неравенства

$$\mathrm{C}(p,m,\eta)^{-1}\|\,u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\,\|\le\|\,(\Delta_j^\eta(u\,,\,\cdot\,))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\,\|\le\,\mathrm{C}(p,m,\eta)\|\,u\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\,\|. \tag{3.4}$$

Далее, по теореме о мультипликаторах Фурье [22, ch.3, Theorem 3.4.1(2)] при $1<p<\infty$, $\varkappa>3/2\,m$ существует константа $\mathrm{C}=\mathrm{C}(p,m,\varkappa)>0$ такая, что для любой совокупности $(\Gamma_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ конечных множеств $\varnothing\ne\Gamma_j\subset\mathbb{Z}^m$ выполняется неравенство

$$\Bigl\|\Bigl(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\mathtt{M}_j(\xi)\widehat{\mathtt{T}}_j(\xi)e^{2\pi i\,\xi x}\Bigr)\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\,\Bigr\|\le\mathrm{C}\sup_{j\in\mathbb{N}_0}\bigl(\|\mathtt{M}_j(\bar d(\Gamma_j)\,x)\,|\,H^\varkappa\,\|\bigr)\bigl\|(\mathtt{T}_j(x))|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\,\Bigr\| \tag{3.5}$$

для всех последовательностей функций (мультипликаторов) $\bigl(\mathtt{M}_j(x)\bigr)\subset H^\varkappa(\mathbb{R}^m)$ и полиномов $(\mathtt{T}_j(x))$ с $\mathtt{T}_j(x)\in\mathrm{T}(\Gamma_j)$. Поскольку $t_j(x)v_j(x)\in\mathrm{T}(\overline{\Lambda}_j)$, где $\overline{\Lambda}_j=\{\xi\in\mathbb{Z}^m\,|\,2^{j-2}\le|\xi|\le2^{j+2}\}$, и следовательно,

$$\Delta_k^\eta(g,x)=\Theta_k*g(x)=\Theta_k*\sum_{|j-k|\le3}t_j(x)v_j(x),\ \ \Theta_j(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^m}\eta_j(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,(j\in\mathbb{N}_0),$$

то последовательно применяя соотношение (3.4) и неравенство (3.5), получаем

$$\begin{aligned}\|g\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}\|&\le\mathrm{C}(p,m,\eta)\|(\Delta_l^\vartheta(g,x))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|\le\mathrm{C}(p,m,\eta)\mathrm{C}(p,m,\varkappa)\\&\times\|(t_j(x)v_j(x))\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|\le\mathrm{C}(p,m,\eta)\mathrm{C}(p,m,\varkappa)\mathrm{C}(m,\alpha)\mathrm{C}^\star\|(\mathrm{v}_j)\,|\,L_p^{(\mathtt{t})}(\ell_2)\|.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Из соотношений (3.3) и (3.6) следует требуемая оценка (3.1). Итак, предложение 1 доказано.

Теперь *достаточность* в теореме 2 легко доказывается с использованием предложения 1, соотношения (3.4), неравенства (3.5) и того факта, что символы $a_j(x,\xi)=a(x,\xi)\eta_j(\xi)$, как нетрудно показать, принадлежат $\Sigma_\omega^{(\mathtt{t})}$.

Автор признателен Стефану Хайнриху (Университет Кайзерслаутерна) за обсуждение ряда аспектов теории пдо, инициировавшее исследование, частью которого стали результаты настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. М.: Мир, 1987. Т. 3: Псевдодифференциальные операторы. 696 с.
2. **Kumano-go H.** Pseudo-differential operators. Cambridge: MIT Press, 1982. 455 p.
3. **Stein E.M.** Harmonic analysis: Real–Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993. 716 p.
4. **Hörmander L.** Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations // Singular Integrals (Chicago, IL, 1966). Providence: Amer. Math. Soc., 1967. P. 138–183. (Proc. Sympos. Pure Math. 10).
5. **Hörmander L.** On the L^2 continuity of pseudo-differential operators // Comm. Pure Appl. Math. 1971. Vol. 24. P. 529–535.
6. **Calderon A. P.,Vaillancourt R.** A class of bounded pseudo-differential operators // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1972. Vol. 6. P. 1185–1187.
7. **Coifman R.R., Meyer Y.** Au–dela des operateurs pseudo-differentiels // Asterisque. 1978. Vol. 57. P. 1–185.
8. **Hounie J.** On The L^2 continuity of pseudo–differential operators // Communications in Partial Diff. Eq. 1986. T. 11, no. 7. C. 765-778.
9. **Ching C. H.** Pseudo-differential operators with nonregular symbols // J. Diff. Eq. 1972. Vol. 11. P. 436–447.
10. **Rodino L.** On the boundedness of pseudo differential operators in the class $L^m_{\varrho,1}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. T. 58, no. 1. C. 211–215.
11. **Fefferman C.** L^p bounds for pseudo-differential operators // Israel J. Math. 1973. Vol. 14. P. 413–417.
12. **Nagase M.** The L^p–boundedness of pseudo–differential operators with non-regular symbols // Communications in Partial Diff. Eq. 1977. Vol. 2, no. 10. P. 1045–1061.
13. **Kenig C. E., Staubach W.** Ψ–pseudodifferential operators and estimates for maximal oscillatory integrals // Studia mathematica. 2007. Vol. 183, no. 3. C. 249–258.
14. **Ruzhansky M., Turunen V.** Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics. Basel; Birkhauser: Springer, 2009. 710 p.
15. **Ruzhansky M., Turunen V.** Quantization of pseudo-differential operators on the torus // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, no. 6. C. 943–982.
16. **Delgado J.** L_p-bounds for pseudo-differential operators on the torus // Operator Theory: Advances and Appl. 2013. Vol. 231. C. 103–116.
17. **Cardona D.** Weak type $(1, 1)$ bounds for a class of periodic pseudo–differential operators // J. Pseudo-Diff. Oper. Appl. 2014. Vol. 5, no. 4. P. 507–515.
18. **Стейн И., Вейс. Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 336 с.
19. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 752 с.
20. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 455 с.
21. **Степанец А.И.** Приближение непрерывных периодических функций многих переменных сферическими средними Рисса // Мат. заметки. 1974. Т. 15, вып. 5. С. 821–832.
22. **Schmeisser H. J., Triebel H.** Topics in Fourier analysis and function spaces. Chichester: J. Wiley & Sons, 1987. 300 p.

Базарханов Даурен Болысбекович
канд. физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и математического моделирования МО и Н РК
e-mail: dauren.mirza@gmail.com

Поступила 7.11.2016

REFERENCES

1. Hörmander L. *The analysis of linear partial differential operators III: Pseudodifferential operators.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1985, Ser. Fundamental Principles Math. Sci, vol. 274. 525 p.
2. Kumano-go H. *Pseudo-differential operators.* Cambridge: MIT Press, 1982, 455 p.

3. Stein E.M. *Harmonic analysis: real–variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1993, 716 p.
4. Hörmander L. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. *Singular Integrals, Chicago, IL, 1966*, Providence: Amer. Math. Soc., 1967, Ser. Proc. Sympos. Pure Math. 10, pp. 138–183.
5. Hörmander L. On the L^2 continuity of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1971, vol. 24, pp. 529–535.
6. Calderon A. P.,Vaillancourt R. A class of bounded pseudo-differential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 1972, vol. 6, pp. 1185–1187.
7. Coifman R. R., Meyer Y. Au–dela des operateurs pseudo-differentiels. *Asterisque*, 1978, vol. 57, pp. 1–185.
8. Hounie J. On The L^2 continuity of pseudo–differential operators. *Communications in Partial Diff. Eq.*, 1986, vol. 11, no. 7, pp. 765–778.
9. Ching C.H. Pseudo-differential operators with nonregular symbols. J. Diff. Eq., 1972, vol. 11, pp. 436–447.
10. Rodino L. On the boundedness of pseudo differential operators in the class $L^m_{\varrho,1}$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1976, vol. 58, no. 1, pp. 211–215.
11. Fefferman C. L^p bounds for pseudo-differential operators. *Israel J. Math.*, 1973, vol. 14, pp. 413–417.
12. Nagase M. The L^p–boundedness of pseudo–differential operators with non-regular symbols. *Communications in Part. Diff. Eq.*, 1977, vol. 2, no. 10, pp. 1045–1061.
13. Kenig C. E., Staubach W. Ψ–pseudodifferential operators and estimates for maximal oscillatory integrals. *Studia mathematica*, 2007, vol. 183, no. 3, pp. 249–258.
14. Ruzhansky M., Turunen V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics.* Basel, Birkhauser: Springer, 2009, 710 p.
15. Ruzhansky M., Turunen V. Quantization of pseudo-differential operators on the torus. *J. Fourier Anal. Appl.* 2010, vol. 16, no. 6, pp. 943–982.
16. Delgado J. L_p-bounds for pseudo-differential operators on the torus. *Operator Theory: Advances and Applications*, 2013, vol. 231, pp. 103–116.
17. Cardona D. Weak type $(1, 1)$ bounds for a class of periodic pseudo–differential operators. *J. Pseudo-Diff. Oper. Appl.*, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 507–515.
18. Stein E., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton: Princeton University Press, 1971, Princeton Mathematical Ser., No. 32, 297 p.
19. Kantorovich L.V. and Akilov G.P. *Fukncionalnyj analiz* (Functional analysis). Oxford, New York: Pergamon Press, 1982, 589 p.
20. Nikolski S.M. *Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya* (Approximation of functions of several variables and embedding theorems). Berlin: Springer, 1975, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 205, 418 p.
21. Stepanets A.I. Approximation of continuous periodic functions of many variables by spherical Riesz means. *Math. Notes*, 1974, vol 15, no. 5, pp. 492–498.
22. Schmeisser H.J., Triebel H. *Topics in Fourier analysis and function spaces.* Chichester: J. Wiley & Sons, 1987, 300 p.

D. B. Bazarkhanov., Cand. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125 Pushkin str., Almaty, 050010 Kazakhstan, e-mail: dauren.mirza@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 512.54

УСЛОВИЕ ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ БЫТЬ ГРУППОЙ ШМИДТА

В. А. Белоногов

Пусть G — конечная группа и π — множество простых чисел такое, что $2 \in \pi$. В статье доказано, что если G имеет лишь π-замкнутые максимальные подгруппы, хотя сама не является π-замкнутой, то G есть группа Шмидта. В доказательстве используются более ранние результаты автора о свойствах пар (G, π), где G — простая минимальная не π-замкнутая группа при произвольном π.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, π-замкнутая группа, простая группа, максимальная подгруппа.

V. A. Belonogov. A condition for a finite group to be a Schmidt group.

Let G be a finite group G, and let π be a set of primes such that $2 \in \pi$. We prove that if all maximal subgroups of G are π-closed and G itself is not π-closed then G is a Schmidt group. The proof employs the author's earlier results on the properties of pairs (G, π) where G is a simple minimal non-π-closed group and π is arbitrary.

Keywords: finite group, Schmidt group, π-closed group, simple group, maximal subgroup.

MCS: 20E28, 20D06, 20D08
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-81-86

Введение

Одно из важных направлений в теории конечных групп составляют исследования групп G, все собственные подгруппы которых обладают некоторым теоретико-групповым свойством Σ, в то время как сама группа G свойством Σ не обладает. Такие группы G называют *минимальными не Σ-группами*, причем считается, что единичная группа не является минимальной не Σ-группой ни при каком Σ. Начало этому направлению положила работа 1903 г. Г. Миллера и Х. Морено [1], в которой определено строение конечных минимальных не абелевых групп. Эти группы называются *группами Миллера — Морено*. Второй очень важный шаг в этом направлении был сделан О. Ю. Шмидтом в работе 1924 г. [2], где получено описание конечных минимальных не нильпотентных групп. Такие группы называются в настоящее время *группами Шмидта*. Подгруппа группы G, являющаяся группой Шмидта, называется подгруппой Шмидта группы G. Результаты, связанные с наличием в группе и свойствами подгрупп Шмидта, очень широко используются в современной теории конечных групп. Отметим важную обзорную статью [3], а также более поздние работы [4–7], подчеркивающие актуальность рассматриваемой темы.

Используемая далее терминология стандартна и соответствует [8; 9].

Идея обобщения результата О. Ю. Шмидта путем рассмотрения вместо нильпотентных подгрупп подгрупп более сложного строения принадлежит С. А. Чунихину. Основополагающим исследованием в этом направлении является статья И. К. Чунихиной и С. А. Чунихина [10], в которой были изучены конечные минимальные не p-разложимые группы, где p — произвольное простое число. Напомним, что группа называется *p-разложимой*, если она является прямым произведением p-группы и группы, порядок которой не делится на p. Класс p-разложимых групп несравненно более широк, чем класс нильпотентных групп; любая конечная группа является подгруппой p-разложимой группы при подходящем p. Тем не менее в [10] установлен следующий замечательный и удивительный факт.

А1. *При любом простом p конечная минимальная не p-разложимая группа является группой Шмидта.*

Пусть далее π означает некоторое множество простых чисел и π' — его дополнение во множестве всех простых чисел; при этом неявно предполагается, что

(a) *ни одно из множеств π и π' не пусто*,

поскольку в противном случае рассматриваемые ниже минимальные не π-разложимые и минимальные не π-замкнутые группы не существуют. Естественным обобщением понятия p-разложимой группы является понятие *π-разложимой* (или *(π, π')-разложимой*) группы, т. е. группы, являющейся прямым произведением π-группы и π'-группы. Следующее, более общее, чем **А1**, утверждение, известное ранее среди специалистов по теории конечных групп как гипотеза С. А. Чунихина, было доказано (см. [11; 12]) гораздо позже утверждения **А1**, а именно лишь с использованием классификации конечных простых групп.

А2. *При любом множестве π простых чисел (со свойством (a)) конечная минимальная не π-разложимая группа является группой Шмидта.*

Попытаемся продолжить начатый ряд утверждений, рассмотрев естественное ослабление условия π-разложимости подгрупп, заменив его π-замкнутостью. *π-замкнутая* группа H есть полупрямое произведение $H = A \leftthreetimes B$, где A есть π-группа, а B — π'-группа. В частном случае, когда $\pi = p'$, т. е. когда π состоит из всех простых чисел, кроме заданного простого числа p, Нобору Ито [13] (см. также [8, теорема IV.5.4]) доказал следующий важный и снова удивительный результат.

А3. *При любом простом числе p конечная минимальная не p'-замкнутая группа является группой Шмидта.*

Используя индукцию по порядку группы, легко переформулировать это утверждение в виде следующего критерия p'-замкнутости группы: конечная группа p'-замкнута если и только если каждая ее подгруппа Шмидта p'-замкнута (т. е. в группе нет не p'-замкнутых подгрупп Шмидта). Отсюда легко вытекает известная теорема Фробениуса (см. [8, теорема IV.5.8] или [9, теорема 7.4.5]) о p'-замкнутости конечной группы (в других терминах,— о существовании в группе нормального p-дополнения).

Однако сохранить форму утверждения **А3** для любого множества π (вместо p') не удается, поскольку среди минимальных не π-замкнутых групп имеются (при некоторых π) простые группы. Исследованию таких простых групп и соответствующих π посвящены работы автора 2015 и 2016 гг. (итоговый результат сформулирован также в [14]). Одно из установленных там свойств таких множеств π (см. ниже второе предложение в **А4**) является решающим аргументом в доказательстве основного результата этой статьи, теоремы 1. Другой важный аргумент этого доказательства (см. первое предложение в **А4**) был доказан в [15, теорема 1'].

А4. *Если G — конечная минимальная не π-замкнутая группа, то либо $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, либо G — группа Шмидта. Если при этом сама группа G проста, то $2 \notin \pi$.*

Первое утверждение в **А4** влечет, в частности, следующий факт.

А5. *Конечная π-разрешимая (в частности, разрешимая) минимальная не π-замкнутая группа является группой Шмидта при любом заданном π.*

Главная цель настоящей статьи — доказать следующий результат в духе утверждений А1–А3 и А5. (Заметим, что в теоремах 1 и 2 не предполагается, что 2 делит порядок G.)

Теорема 1. *Пусть π — множество простых чисел и $2 \in \pi$. Тогда любая конечная минимальная не π-замкнутая группа является группой Шмидта.*

Отметим, что теорема 1 становится ложной при замене в ней числа 2 любым простым числом $p > 2$ из $\pi(G)$. Действительно, минимальной не $\{p\}$-замкнутой группой является группа $PSL_2(p)$ при любом простом $p > 3$ и группа $PSL_2(8)$ при $p = 3$.

Легко увидеть, что теорема 1 равносильна следующему критерию π-замкнутости конечной группы (при $2 \in \pi$).

Теорема 2. *Пусть π — множество простых чисел и $2 \in \pi$. Тогда конечная группа G является π-замкнутой если и только если каждая подгруппа Шмидта группы G π-замкнута (т. е. в G нет не π-замкнутых подгрупп Шмидта).*

Предположим, что верна теорема 1, и докажем теорему 2. Из π-замкнутости группы G, очевидно, следует π-замкнутость всех ее подгрупп, в том числе и подгрупп Шмидта. Если же, обратно, в G каждая подгруппа Шмидта π-замкнута, то, используя индукцию по порядку группы, заключаем, что в G любая максимальная подгруппа π-замкнута. Но тогда по теореме 1 группа G либо π-замкнута, либо является группой Шмидта. Но мы предположили, что в G каждая подгруппа Шмидта π-замкнута. Следовательно, G π-замкнута. □

Далее, пусть верна теорема 2, и докажем теорему 1. Пусть G — минимальная не π-замкнутая группа, т. е. G не π-замкнута, но все ее собственные подгруппы π-замкнуты. По теореме 2 группа G, будучи не π-замкнутой, имеет не π-замкнутую подгруппу Шмидта S. Но так как в G каждая собственная подгруппа π-замкнута, то $S = G$ и, значит, G — группа Шмидта.

В случае, когда $\pi = \{2\}$, теоремы 1 и 2 получены В. С. Монаховым [4, лемма 3.1, следствие 3.1.1].

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [16].

1. Доказательство теоремы 1

Предложение 1. Пусть G — конечная минимальная не π-замкнутая группа для некоторого множества π простых чисел и N — нормальная подгруппа из G, лежащая в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G. Тогда фактор-группа G/N также есть минимальная не π-замкнутая группа.

Доказательство. Далее для упрощения формулировок тот факт, что группа H есть минимальная не π-замкнутая группа, мы будем записывать в виде $(H, \pi) \in (*)$. Таким образом, по условию $(G, \pi) \in (*)$, и нужно доказать, что $(G/N, \pi) \in (*)$. Это заключение мы получим из следующих утверждений **B1–B4**.

B1. Если N — π-подгруппа, то $(G/N, \pi) \in (*)$.

Действительно, по условию G не π-замкнута, но любая ее максимальная подгруппа M π-замкнута. Примем $\overline{G} = G/N$ и предположим, что $(\overline{G}, \pi) \notin (*)$. Тогда, очевидно, группа $\overline{G} = G/N$ сама π-замкнута (так как образы в $\overline{G}$ всех максимальных подгрупп группы G π-замкнуты), т. е. $\overline{G} = \overline{H} \leftthreetimes \overline{K}$, где $\overline{H} = H/N$ — π-группа с $H \trianglelefteq G$ и $\overline{K} = K/N$ — π'-группа с $K \leq G$. Так как N — π-группа, то из предыдущих равенств следует, что H — π-группа и согласно теореме Цассенхауза [8, теорема I.18.1] $K = N \leftthreetimes K_1$, где K_1 — π'-группа. Но тогда $G = HK = (HN) \leftthreetimes K_1 = H \leftthreetimes K_1$ π-замкнута, что противоречит условию. Утверждение **B1** доказано.

B2. Если N — π'-подгруппа, то $(G/N, \pi) \in (*)$.

Действительно, положим $\overline{G} := G/N$. По условию

(a) G не π-замкнута и

(b) M π-замкнута для любой максимальной подгруппы M группы G.

Мы должны доказать, что

($\overline{a}$) $\overline{G}$ не π-замкнута и

($\overline{b}$) $\overline{M}$ π-замкнута для любой максимальной подгруппы $\overline{M}$ группы $\overline{G}$.

Очевидно, условие ($\overline{b}$) следует из (b), так как $\overline{M} = M/N$ для некоторой максимальной подгруппы M из G, а фактор-группы π-замкнутых групп π-замкнуты.

Остается доказать условие ($\overline{a}$). Предположим, от противного, что $\overline{G}$ π-замкнута. Тогда $\overline{G} = \overline{A} \leftthreetimes \overline{B}$, где $\overline{A} = A/N$ — π-группа с $A \trianglelefteq G$ и $\overline{B} = B/N$ с $B \leq G$; здесь $\overline{B}$, а следовательно и

B — π'-группа. Отсюда N — π'-холлова подгруппа в A и по теореме Шура — Цассенхауза (см. [8, теорема I.18.1] или [9, теорема 6.2.1]) $A = N \leftthreetimes A_1$, где A_1 — π-группа, $G = AB$, $N = A \cap B$ и A_1 — π-холлова подгруппа в G.

Таким образом, группа G имеет нормальный ряд $G = BA \trianglerighteq A \trianglerighteq N \trianglerighteq 1$, индексы которого являются π- или π'-числами, т. е. группа G π-обособлена. Отсюда и из теоремы Фейта — Томпсона [17] следует, что G π-разрешима или π'-разрешима. Но тогда согласно теореме Холла — Чунихина [8, теорема VI.1.7, пп. a)–c)] G имеет точно по одному классу сопряженных π-холловых и π'-холловых подгрупп. Подобно, любая π-холлова подгруппа из A должна быть сопряжена в A с ее π-холловой подгруппой A_1. Следовательно, для любого $g \in G$ подгруппа A_1^g, будучи π-холловой в A, сопряжена в A с A_1. Таким образом, для любого $g \in G$ существует элемент $a \in A$ такой, что $A_1^g = A_1^a$, и, значит, $g \in aN_G(A_1) \subseteq AN_G(A_1)$. Поэтому $G = AN_G(A_1) = NA_1N_G(A_1) = NN_G(A_1) = \Phi(G)N_G(A_1) = N_G(A_1)$, т. е. $A_1 \trianglelefteq G$. Но теперь G оказывается π-замкнутой, а это противоречит условию (a). Итак, верны условия $(\overline{a})$ и $(\overline{b})$.

Утверждение **B2** доказано.

Мы можем завершить доказательство предложения 1, доказав, что $(G/N, \pi) \in (*)$ без дополнительных ограничений на N. Поскольку подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна (см., например, [8, теорема III.3.6]) и по условию $N \leq \Phi(G)$, то N можно представить в виде $N = N_\pi \times N_{\pi'}$, где N_π есть π-группа, а $N_{\pi'}$ — π'-группа, причем подгруппы N_π и $N_{\pi'}$ нормальны в G. Очевидно, $G/N \cong (G/N_\pi)/(N/N_\pi)$. По **B1** $G/N_\pi \in (*)$. Далее, так как N/N_π является π'-группой и, очевидно, содержится в $\Phi(G/N_\pi)$, то согласно **B2** $((G/N_\pi)/(N/N_\pi), \pi) \in (*)$, а следовательно, и $(G/N, \pi) \in (*)$.

Предложение 1 доказано.

Из предложения 1 и первого утверждения в **A4** непосредственно вытекает следующее уточнение этого утверждения.

Предложение 2. *Пусть G — конечная минимальная не π-замкнутая группа, где π — множество простых чисел. Тогда либо $G/\Phi(G)$ — простая минимальная не π-замкнутая группа, либо G — группа Шмидта.*

Теперь, используя эти результаты, мы докажем теорему 1. Пусть G — конечная минимальная не π-замкнутая группа и $2 \in \pi$. Предположим, что G не является группой Шмидта. Тогда согласно предложению 2 $G/\Phi(G)$ есть простая минимальная не π-замкнутая группа, а по второму утверждению в **A4** (с $G/\Phi(G)$ в роли G) должно быть $2 \notin \pi$. Но это противоречит нашему предположению. Следовательно, G — группа Шмидта.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miller G.A., Moreno H.** Nonabelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Math. Soc. 1903. No. 4. P. 398–404.
2. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, №. 3–4. С. 366–372.
3. **Шеметков Л.А.** О. Ю. Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 586–590.
4. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Т. 13. С. 153–171.
5. **Княгина В.Н., Монахов В.С.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
6. **Луценко Ю.В., Скиба А.Н.** Строение групп Шмидта и групп Белоногова, в которых любые две 3-максимальные подгруппы являются $F(G)$-перестановочными // Вестн. Витеб. гос. ун-та. Математика. 2009. № 2 (52). С. 134–138.
7. **Тютянов В.Н.** Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта // Проблемы физики, математики и техники. 2015. Т. 22, № 1. С. 88–91.
8. **Huppert B.** Endliche gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.

9. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper & Row, 1968. 527 p.
10. **Чунихина И.К., Чунихин С.А.** О p-разложимых группах // Мат. сб. 1944. Т. 15, № 2. С. 325–342.
11. **Arad Z., Chillag D.** A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. Vol. 87, no. 2. P. 472–482.
12. **Белоногов В.А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
13. **It$\widehat{o}$ N.** Note on (LM)-groups of finite orders // Ko$\overline{d}$ai Math. Sem. 1951.Vol. 3, no. 1–2. P. 1–6.
14. **Belonogov V.A.** On finite minimal non-π-closed groups // Abstracts of the Internat. Conf. and PhD-Master Summer School "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries"/ Sobolev Inst. Math. Novosibirsk, 2016. P. 47.
15. **Белоногов В.А.** О конечных группах, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты // Междунар. шк.-конф. по теории групп, посвящ. 70-летию В. В. Кабанова: сб. ст. / Кабард.-Балкар. гос. ун-т. Нальчик, 2014. С. 6–9.
16. **Belonogov V.A.** Some conditions for a finite group to be a Schmidt group // XI шк.-конф. по теории групп: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского. Красноярск, 2016. С. 66–67.
17. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13. P. 755–1029.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 31.05.2016

REFERENCES

1. Miller G.A., Moreno H. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1903, no. 4, pp. 398–404.
2. Schmidt O.Yu. Groups whose all subgroups are special. *Mat. Sb.*, 1924., vol. 31, no. (3-4), pp. 366–372 (in Russian).
3. Shemetkov L.A. O. Yu. Shmidt and finite groups. *Ukr. Math. J.*, 1971, vol. 23, no. 5, pp. 482–486.
4. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Voprosy Algebry*, 1998, vol. 13, pp. 153–171 (in Russian).
5. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with subnormal Schmidt subgroups. *Sib. Math. J.*, 2004, vol. 45, pp. 1075–1079.
6. Lutsenko Yu.V., Skiba A.N. The structure of Schmidt and Belonogov groups, in which every two 3-maximal subgroups are $F(G)$-permutable. *Vest. Vitebsk. Gos. Univ. Matematika*, 2009, № 2 (52), pp. 134–138 (in Russian).
7. Tyutyanov V.N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Schmidt subgroups. *Probl. Phys. Matem. Tekhn.*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 88–91 (in Russian).
8. Huppert B. *Endliche gruppen* I. Berlin: Springer, 1967, 793 S.
9. Gorenstein D. *Finite groups.* New York: Harper & Row, 1968, 527 p.
10. Chunikhin, I.K., Chunikhin, S.A. On p-decomposable groups. *Mat. Sb.*, 1944, vol. 15, no. 2, p. 325–342 (in Russian).
11. Arad Z., Chillag D. A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups. *J. Algebra*, 1984, vol. 87, no. 2, pp. 472–482.
12. Belonogov V.A. On control of the prime spectrum of a finite simple group. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 285, suppl. 1, pp. S25–S41.
13. It$\widehat{o}$ N. Note on (LM)-groups of finite orders. *Ko$\overline{d}$ai Math. Sem.*, 1951, vol. 3, no. 1-2, pp. 1–6.
14. Belonogov V.A. On finite minimal non-π-closed groups. *Abstr. of the Internat. Conf. and PhD-Master Summer School "Graphs and Groups, Spectra and Symmetries" (Sobolev Inst. Math., 2016)*, Novosibirsk, 2016, p. 47.

15. Belonogov V.A. On finite groups in which all maximal subgroups are π-closed. *Internat. School-Conf. on Group Theory*: *Collection of Articles, devoted to the 70th anniversary of V. V. Kabanov* (*Kabard.-Balkar. State Univ., 2014*), Nalchik, 2014, pp. 6–9 (in Russian).
16. Belonogov V.A. Some conditions for a finite group to be a Schmidt group. *XI School-Conf. on Group Theory*: *Abstr. of the XI Internat. School-Conf. on Group Theory, dedicated to the 70th anniversary of A. Yu. Olshanskii.* Krasnoyarsk, 2016, pp. 66–67 (in Russian).
17. Feit W., Thompson J.G. Solvability of groups of odd order. *Pacific J. Math.*, 1963, vol. 13, pp. 755–1029.

V. A. Belonogov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: belonogov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.62

ДВИЖУЩИЙСЯ В $\mathbb{R}^2$ ОБЪЕКТ И ГРУППА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ

В. И. Бердышев

В работе поставлена экстремальная задача построения траектории движущегося объекта, наиболее удаленной от набора наблюдателей с фиксированными конусами обзора. При некоторых ограничениях на расположение наблюдателей даны характеризация и способ построения оптимальной траектории.

Ключевые слова: движущийся объект, наблюдатель, оптимальная траектория.

V. I. Berdyshev. Moving object in $\mathbb{R}^2$ and a group of observers.

We formulate an extremal problem of constructing a trajectory of a moving object that is farthest from a group of observers with fixed visibility cones. Under some constraints on the arrangement of the observers we give a characterization and a method of construction of an optimal trajectory.

Keywords: moving object, observer, optimal trajectory.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-87-93

Пусть M — фиксированное множество в $\mathbb{R}^2$, являющееся замыканием открытого множества, t — движущийся объект, M препятствует движению и видимости. В $\mathbb{R}^2$ задана непрерывная траектория $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_0 \cap M = \varnothing$, без самопересечений, соединяющая точки $t_* \neq t^*$ из $\mathbb{R}^2$. Объект t движется внутри коридора

$$Y = \bigcup_{t \in \mathcal{T}_0} V_r(t),$$

где $r = r(t) = \min\{\|t - m\|\colon m \in M\}$, $V_r(t)$ — замкнутый шар радиуса r с центром t. Мы предполагаем, что $V_r(t_*) \cap V_r(t^*) = \varnothing$. Множество непрерывных траекторий

$$\mathcal{T} = \{t(\tau):\ 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\} \subset Y \tag{1}$$

обозначим через $\mathbb{T}$.

Пусть bdY — граница коридора Y и $\Gamma = (bdY)\backslash(V_r(t_*) \cup V_r(t^*))$. Множество Γ разбивается на две части: левую часть Γ^l и правую Γ_r по отношению к объекту, движущемуся от t_* к t^* по $\mathcal{T}_0$. Предполагается, что задан конечный набор наблюдателей $\mathbb{S} = \{S\}$, $S \notin \overset{\circ}{Y}$. Ради простоты будем считать, что $\mathbb{S} \subset \Gamma$. Каждый наблюдатель S имеет фиксированный конус обзора $K(S)$ — объединение с S выпуклого открытого конуса при вершине S. Пересечение $K(S)$ с Y может состоять из нескольких связных компонент. В дальнейшем через $K_Y(S)$ обозначается компонента, содержащая S. Для любого S конус $K(S)$ таков, что каждая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекается с $K_Y(S)$. Множество наблюдателей, принадлежащих Γ^l или Γ_r, будем обозначать через $\mathbb{S}^l$, $\mathbb{S}_r$, соответственно.

Определим "расстояние" от точки $t \in Y$ до S следующим образом:

$$\rho(t, S) = \begin{cases} \|t - S\| & \text{при } t \in K_Y(S), \\ +\infty & \text{при } t \notin K_Y(S). \end{cases}$$

Задача состоит в поиске траектории $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}(\mathbb{S})$ (1), реализующей максимум

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{S}) \overset{\text{def}}{=} \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min\{\rho(t, S):\ t \in \mathcal{T},\ S \in \mathbb{S}\} = \min\{\rho(t, S):\ t \in \mathcal{T}^*,\ S \in \mathbb{S}\}. \tag{2}$$

В данной работе устанавливаются характеристические свойства оптимальных (наилучших) траекторий и указывается способ построения траекторий. Легко видеть, что таких траекторий много. Указывается способ построения оптимальных траекторий, состоящих из прямолинейных отрезков, дуг окружностей, отрезков границы коридора Y, которые определяются расположением наблюдателей и конусов $K(S),\ S\in\mathbb{S}$.

Подобная задача рассматривалась в [1] без исследования способов построения оптимальной траектории.

В дальнейшем через $L(x,y)$ обозначается прямая, содержащая точки $x\neq y$, а через $\overline{Q}$ — замыкание множества Q.

Рассмотрим частные случаи задачи (2).

I. Для $S\in\mathbb{S}^l$ (для $S\in\mathbb{S}_r$) через $p=p(S)$ обозначим ближайшую к S точку из Γ_r (из Γ^l) и положим

$$M(S)=\rho(p(S),S). \tag{3}$$

Отметим очевидное

Предложение 1. *Пусть набор $\mathbb{S}$ наблюдателей таков, что $K_Y(S^l)\cap K_Y(S_r)\cap Y=\varnothing$ для любых $S^l\in\mathbb{S}^l$ и $S_r\in\mathbb{S}_r$. Оптимальная траектория $\mathcal{T}^*\in\mathbb{T}$ характеризуется свойствами*:

$p(S)\in\mathcal{T}^*$ для всех S, реализующих минимум $M=\min\limits_{S\in\mathbb{S}}M(S)$,

$\rho(S,\mathcal{T}^*)\geq M$ для всех $S\in\mathbb{S}$.

Любая траектория $\mathcal{T}$, содержащая все отрезки границ $K_Y(S^l)\cap\Gamma_r$, $K_Y(S_r)\cap\Gamma^l$ и удовлетворяющая условию $\rho(S,\mathcal{T})\geq M$, является оптимальной.

II. Пусть $\mathbb{S}=\{S^l,S_r\}$ — пара наблюдателей такая, что $(K_Y(S^l)\cap K_Y(S_r))\neq\varnothing$. Обозначим

$$Q=\{x\in\overline{K}_Y(S_l)\cap\overline{K}_Y(S_r)\colon \|x-S^l\|=\|x-S_r\|\}.$$

Возможны два подслучая: $\text{II}_1)$ $Q\neq\varnothing$, $\text{II}_2)$ $Q=\varnothing$.

Любая траектория пересекается с $K_Y(S),\ S\in\mathbb{S}$. Наилучшая траектория $\mathcal{T}^*$ должна их пересекать возможно дальше от вершин, а вне множества $\overline{K}_Y(S_l)\cup\overline{K}_Y(S_r)$ ввиду определения расстояния $\rho(t,S)$ она может быть произвольной.

В случае $\text{II}_1)$ траектория $\mathcal{T}^*$, очевидно, пересекает множество $\overline{K}_Y(S_l)\cap\overline{K}_Y(S_r)$, точнее, она содержит точку $p=p(S^l,S_r)\in Q$, реализующую минимум

$$\begin{aligned}M(S^l,S_r)&\overset{\text{def}}{=}\min_{p\in\overline{K}_Y(S^l)\cap\overline{K}_Y(S_r)}\max\big\{\|S^l-p\|,\|S_r-p\|\big\}\\&=\max\big\{\|S^l-p(S^l,S_r)\|,\|S_r-p(S^l,S_r)\|\big\},\end{aligned}\tag{4}$$

при этом

$$M(S^l,S_r)=\|S^l-p\|=\|S_r-p\|. \tag{5}$$

Пусть точка p принадлежит границе одного из конусов $K(S^l),\ K(S_r)$, например, $p\in bdK(S^l)$. Тогда для точек t из этого конуса, которые расположены между дугами $C'(S^l),\ C'(S_r)$ с концевой точкой p и пересекающихся с $K(S^l)\cap K(S_r)$, радиуса $M(S^l,S_r)$ с центрами $S^l,\ S_r$, соответственно, выполняется неравенство

$$\min\{\rho(t,S^l),\rho(t,S_r)\}\geq M(S^l,S_r). \tag{6}$$

Это неравенство выполняется и для точек, расположенных внутри конуса $K(S_r)$ между дугой $C'(S_r)$, $C'(S_r)\cap K(S^l)=\varnothing$, и отрезком $[p,S^l]$. При построении траектории $\mathcal{T}^*$ будем использовать

— N') дуги $C'(S^l),\ C'(S_r)$ и отрезок $[p,S^l]$. Они содержат точки t, удовлетворяющие неравенству (6).

Если точка p принадлежит внутренности множества $K_Y(S^l) \cap K_Y(S_r)$, то для точек t из этого пересечения, лежащих между окружностями $C'(S^l)$, $C'(S_r)$ также выполняется (6).

Далее точку $p = (\cdot, \cdot)$ будем обозначать через $p'(S^l, S_r)$, помещая на первую позицию в качестве аргумента вершину, граница конуса которой содержит точку p. Если $p \in (bdK(S^l)) \cap (bdK(S_r))$ или p содержится во внутренности множества $K_Y(S^l) \cap K_Y(S_r)$, то порядок аргументов-вершин в $p'(\cdot, \cdot)$ не устанавливается.

В случае II$_2$) наилучшая траектория также содержит точку $p(S^l, S_r)$, являющуюся решением задачи (4). Для определенности предположим, что

$$\|S^l - p\| < \|S_r - p\| \ \forall \ p \in K(S^l) \cap K(S_r), \tag{7}$$

тогда

$$M(S^l, S_r) = \|S_r - p\|. \tag{8}$$

Для точек t, расположенных в $K(S_r)$ между отрезком $[p, S^l]$ и дугой $C''(S_r)$ радиуса $\|S_r - p\|$ с центром S_r, выполняется неравенство (6). При построении траектории $\mathcal{T}^*$ будет использоваться

— N'') отрезок $L(p, S^l) \cap Y$ и дуга C''.

Для точки p будем применять обозначение $p = p''(S^l, S_r)$, где на позиции первой переменной помещается вершина, для которой достигается $\min\{\|S^l - p\|, \|S_r - p\|\}$.

Пусть q^l — конец дуги $C'(S^l) \cap \overline{K}(S^l)$, а q_r — конец дуги $C'(S_r) \cap \overline{K}(S_r)$. Другим концом этих дуг является точка p.

Справедливо (см. (2)–(8)) следующее утверждение.

Предложение 2. *В случае* II *имеет место равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\{M(S^l, S_r),\ M(S^l),\ M(S_r)\}.$$

Искомая оптимальная траектория в случае II$_1$ *составлена из отрезка* $[p', S^l] \cap Y$, *дуги* $C'(S^l) \cap \overline{K}(S^l)$ *(или дуги* $C'(S_r) \cap \overline{K}(S^l)$*), отрезка* $(L(S^l, q^l) \backslash [S^l, q^l]) \cap Y$ *(или отрезка* $(L(S^l, q_r) \backslash [S^l, q_r]) \cap Y$*) и дополнена частью границ* Γ^l, Γ_r. *В случае* II$_2$ *оптимальная траектория составлена из отрезка* $L(S^l, p'') \cap Y$ *и дополнена частью границ* Γ^l, Γ_r.

III. Пусть задана тройка наблюдателей $\mathbb{S} = \{S_1^l, S_2^l, S_r\}$ такая, что S_1^l, $S_2^l \in \Gamma^l$, $S_r \in \Gamma_r$ и

$$\Big(K_Y(S_1^l) \cap K_Y(S_r)\Big) \cap \Big(K_Y(S_2^l) \cap K_Y(S_r)\Big) = \varnothing. \tag{9}$$

Предложение 3. *Имеет место равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\{M(S_1^l, S_r),\ M(S_2^l, S_r),\ M(S_1^l),\ M(S_2^l),\ M(S_r)\} \tag{10}$$

и существует оптимальная траектория, содержащая точки $p(S_1^l, S_r)$, $p(S_2^l, S_r)$. *Она составлена из дуг и отрезков, перечисленных в п.* N', N'' *и частей границ* Γ^l, Γ_r.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если точки $p(S_1^l, S_r)$, $p(S_2^l, S_r)$ имеют вид $p''(S_r, S_1^l)$, $p''(S_r, S_2^l)$, то они лежат на одной стороне конуса $\overline{K}(S_r)$. Часть этой стороны, принадлежащая Y, дополненная участками границ Γ^l, Γ_r, образует траекторию $\mathcal{T}^*$. Если эти точки имеют вид $p''(S_1^l, S_r)$, $p''(S_2^l, S_r)$ и

$$\|S_r - p''(S_2^l, S_r)\| < \|S_r - p''(S_1^l, S_r)\|,$$

то в состав $\mathcal{T}^*$ включаются часть стороны конуса $\overline{K}(S_2^l)$, попавшая в Y, и часть стороны конуса $K(S_1^l)$ от точки $p''(S_1^l, S_r)$ до ее пересечения с Γ_r. Остальная часть траектории принадлежит bdY.

Пусть точки $p(S_r, S_1^l)$, $p(S_r, S_2^l)$ имеют вид $p''(S_1^l, S_r)$, $p''(S_r, S_2^l)$, тогда включим в $\mathcal{T}^*$ часть стороны конуса $K(S_r)$, попавшую в Y и содержащую точку $p''(S_r, S_2^l)$, а также часть стороны

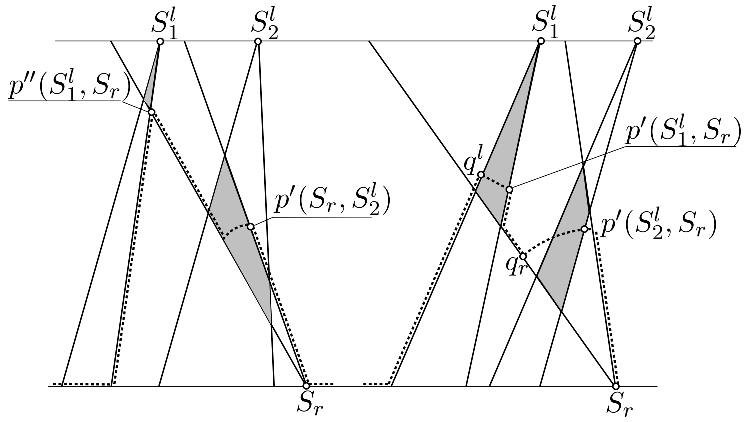


Рис. 1.

конуса $K(S_1^l)$, содержащую точку $p''(S_1^l, S_r)$. Пусть (см. рис. 1) упомянутые выше точки имеют вид $p''(S_1^l, S_r),\ p'(S_r, S_2^l)$, тогда в $\mathcal{T}^*$ включим дугу $C'(S_r)$ и три отрезка: один на стороне конуса $K(S_r)$ от точки $p''(S_1^l, S_r)$ до этой дуги, другой на стороне конуса $K(S_1^l)$ от точки $p''(S_1^l, S_r)$ до Γ_r и отрезок на стороне конуса $\overline{K}(S_r)$ от точки $p'(S_r, S_2^l)$ до L_r. Рассмотрим, наконец, случай точек $p'(S_1^l, S_r),\ p'(S_r, S_2^l)$. Ввиду соотношения (9) имеем

$$\|S_r - p(S_r, S_2^l)\| < \|S_r - p'(S_2^l, S_r)\|.$$

Включим в $\mathcal{T}^*$ дуги $C'(S_r) \cap K(S_r),\ C'(S_1^l) \cap K(S_1^l)$, отрезок на стороне конуса $\overline{K}(S_1^l)$ от q^l до Γ_r, отрезок на стороне конуса $K(S_r)$, не содержащей точку q_r от $C'(S_r)$ до границы L_r, отрезок на стороне конуса $\overline{K}(S_r)$ от q_r до $K(S_1^l)$, если $q_r \notin K(S_1^l)$. Построенная кривая (на рисунке она отмечена точками) дополняется участками границы L_r. Предложение 3 доказано. □

IV. Рассмотрим случай произвольного (конечного) числа наблюдателей. Естественно требование расположить их экономно в определенном смысле, в частности, ограничить сверху кратность покрытия коридора Y множествами $K_Y(S),\ S \in \mathbb{S}$. Ясно, что группа наблюдателей, расположенных на одном “берегу”, например, на Γ^l, обеспечивает более полное покрытие в зоне Γ_r, чем вблизи Γ^l. На обоих “берегах” должно быть (с учетом раствора конусов $K_Y(S)$) примерно одинаковое число наблюдателей. Будем нумеровать их в порядке от t_* к t^* посредством верхних индексов для левой границы и нижних индексов для правой. Итак, имеем набор конусов $\{K(S^i),\ S^i \in \mathbb{S}_l\},\ \{K(S_j),\ S_j \in \mathbb{S}_r\}$. Будем считать, что выполняется условие

$$K_Y(S^i) \cap K_Y(S^n) = \varnothing, \quad K_Y(S_j) \cap K_Y(S_m) = \varnothing \ \text{ при } \ i \neq n,\ j \neq m, \tag{11}$$

поэтому имеет место соотношение

$$\big(K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j)\big) \cap \big(K_Y(S^k) \cap K_Y(S_m)\big) = \varnothing \ \text{ при } \ (i,j) \neq (k,m), \tag{12}$$

обеспечивающее кратность покрытия коридора Y конусами $K(S)$ не более двух.

Кроме требований (11)–(12) на набор $\{K(S):\ S \in \mathbb{S}\}$ наложим условие регулярности, без которого общая картина может оказаться хаотичной при большом числе наблюдателей. Пусть пара вершин (S^l, S_r) такова, что

$$K_r^l \stackrel{\mathrm{def}}{=} K_Y(S^l) \cap K_Y(S_r) \neq \varnothing.$$

Отрезок $[S^l, S_r]$ разбивает коридор Y на две части. Условимся называть часть, содержащую точку t_*, левой, а часть, содержащую точку t^*, правой. В этой связи пару (S^l, S_r) будем называть:

— левой, если $\overline{K}_r^l \cap [S^l, S_r] = \varnothing$ и множество K_r^l лежит в левой части коридора;

— правой, если $\overline{K}_r^l \cap [S^l, S_r] = \varnothing$ и множество K_r^l лежит в правой части коридора;
— средней, если $\overline{K}_r^l \cap [S^l, S_r] \neq \varnothing$.

Требование регулярности состоит в следующем: множество вершин можно разбить на группы вида

$$(S^i, S^{i+1}, \ldots, S^{i+n};\ S_j, S_{j+1}, \ldots, S_{j+m}) \quad (n \geq 0,\ m \geq 0)$$

такие, что любая пара (S^{i+n_1}, S_{j+m_1}), $0 \leq n_1 \leq n$, $0 \leq m_1 \leq m$, является левой или любая такая пара является правой. Если таких групп более одной, то они чередуются и между соседними группами левых и правых пар может присутствовать группа средних пар (S^i, S_j), $(S^{i+1}, S_{j+1}) \ldots (S^{i+k}, S_{j+k})$.

Имеет место

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{M}(\mathbb{S}) = \min\bigl\{M(S^i, S_j), M(S^i), M(S_j) \colon K(S^i) \cap K(S_j) \neq 0,\ S^i \in \mathbb{S}_l,\ S_j \in \mathbb{S}_r\bigr\}. \tag{13}$$

Наилучшая траектория $\mathcal{T}^* \in \mathbb{T}$ характеризуется свойствами:

— $\mathcal{T}^*$ содержит точки $p(S^i), p(S_j)$ для всех одиночных наблюдателей S^i, S_j и точки $p(S^i, S_j)$ для всех пар (S^i, S_j) наблюдателей из каждой группы, реализующих минимум (13), *$S^j \in \mathbb{S}^l$, $S_j \in \mathbb{S}_r$;*

— $\rho(S, \mathcal{T}^*) \geq \mathbb{M}$ для всех $S \in \mathbb{S}$.

Существует наилучшая траектория, содержащая все точки $p(S^i, S_j)$ для $S^i \in \mathbb{S}^l$, $S_j \in \mathbb{S}_r$ таких, что $K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j) \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через D^i (через D_j) замкнутую область в Y, расположенную между конусами $K(S^i)$, $K(S^{i+1})$ (между конусами $K(S_j)$, $K(S_{j+1})$ соответственно), и рассмотрим множества точек:

— $K_j^i = K_Y(S^i) \cap K_Y(S_j)$ (см. (13)) — открытое множество с кратностью покрытия, равной двум;
— $K_Y(S^i) \cap \mathcal{D}_j$, $K_Y(S^j) \cap \mathcal{D}^i$ — открыто-замкнутые множества с кратностью покрытия, равной единице;
— $\mathcal{D}_j^i = \mathcal{D}^i \cap \mathcal{D}_j$ — замкнутое множество точек с нулевой кратностью покрытия.

Отметим, что

$$\rho(t, S) = +\infty \quad \forall\, t \in \mathcal{D}_j^i, \quad \forall\, S \in \mathbb{S},$$

поэтому ограничений на положение траекторий $\mathcal{T}^*$ в множестве $\mathcal{D}_j^i$ нет.

Построение оптимальной траектории в окрестности множеств K_j^i осуществлялось в пп. I–III. Оно основано на решении $p(S^i, S_j)$ задачи (4), которое в двух возможных случаях II_1 и II_2 обозначалось как $p'(\cdot,\cdot)$, $p''(\cdot,\cdot)$, и порядок аргументов S^i, S_j определялся в зависимости от взаимного расположения конусов $K(S^i)$, $K(S_j)$.

Рассмотрим группу левых пар (см. рис. 2). Зафиксируем номер i и рассмотрим положение точек $p(S^i, S_j)$ на конусе $K(S^i)$. Если ближайшая к вершине S^i точка имеет вид $p''(S^i, S_j)$, то может быть еще несколько точек того же вида, расположенных подряд с номерами j, монотонно убывающими по мере возрастания их расстояния до вершины S^i от номера j до некоторого номера $j(i) + 1$. При этом все они лежат на стороне конуса $K(S^i)$, обращенной к отрезку $[S^i, S_{j(i)}]$. Следующая по расстоянию от S^i точка $p(S^i, S_{j(i)})$ принадлежит границе множества $K_{j(i)}^i$ и является а) либо $p'(S_{j(i)}, S^i)$-точкой, либо $p'(S^i, S_{j(i)})$-точкой, б) либо точкой вида $p''(S_{j(i)}, S^i)$, которая лежит уже на стороне конуса $K(S_{j(i)})$, обращенной к отрезку $[S^i, S_{j(i)}]$. В этих случаях в силу пп. I, II полуинтервал прямой $L(S^i, p''(S^i, S_j))$ от S^i до встречи с множеством $\overline{K}_{j(i)}^i$, обозначим его через Δ^i ($S^i \notin \Delta^i$), может быть включен в оптимальную траекторию. Пусть $p''(S_{j(i)}, S^m)$ — ближайшая к $S_{j(i)}$ точка $p''(S_{j(i)}, S^m)$. Повторяя приведенные выше рассуждения, убеждаемся, что полуинтервал прямой $L(S_{j(i)}, p''(S_{j(i)}, S^m))$

от точки $S_{j(i)}$ до встречи с множеством $\overline{K}^i_{j(i)}$, обозначим его через $\Delta_{j(i)}$ $(S_{j(i)} \notin \Delta_{j(i)})$, может быть включен в оптимальную траекторию. Ясно, что отрезки Δ^i, $\Delta_{j(i)}$ имеют общий конец, обозначим его через v_i, при этом для него выполняется включение

$$v_i \in (bd\overline{K}^i_{j(i)}) \cap \mathcal{D}^i_{j(i)}. \tag{14}$$

Итак, двузвенную ломаную $\Delta^i \cup \Delta_{j(i)}$ (на рис. 2 она помечена точками) можно включить в оптимальную траекторию, оставляя величину $\rho(t, \mathbb{S})$, $t \in \mathcal{T}$, не меньше минимума (13).

В случае а) отрезок $[p(S^i, S_{j(i)}), v_i]$ (см. II_1, N$'$) может быть включен в траекторию $\mathcal{T}^*$. В случае б) весь отрезок $[p''(S_{j(i)}, S^i), S_{j(i)}]$ согласно п. II_2, N$''$ включается в $\mathcal{T}^*$.

Теперь предположим, что при заданном i ближайшая к S^i точка имеет вид $p'(S_j, S^i)$ или $p'(S^i, S_j)$ при некотором j. По аналогии с уже исследованным случаем следует рассматривать положение точек $p(S_j, S^i)$ на конусе $K(S_j)$ для разных i при фиксированном j.

Таким образом, все точки $p''(S^i, S_j)$ расположены на совокупности двузвенных ломаных вида $\Delta^i \cup \Delta_{j(i)}$ для тех i, при которых ближайшая к S^i точка $p(S^i, S_j)$ является $p''(S^i, S_j)$-точкой, и ломаных вида $\Delta_j \cup \Delta^{i(j)}$ для j, при которых ближайшая к S_j точка $p(S_j, S^i)$ является $p''(S_j, S^i)$-точкой. Как показано выше, точки $p'(S^i, S_{j(i)})$, $p'(S_{j(i)}, S^i)$ лежат на границе множества $\overline{K}^i_{j(i)}$, и аналогично проверяется, что точки $p'(S_j, S^{i(j)})$, $p'(S^{i(j)}, S_j)$ лежат на границе множества $\overline{K}^{i(j)}_j$. В случае а) с помощью дуг C' (см. N')) можно соединить множество $\mathcal{D}^{i-1}_{j(i)-1}$ и, значит, ввиду (14) и ломаную $\Delta^{i-1} \cup \Delta_{j(i)-1}$ с множеством $\mathcal{D}^i_{j(i)}$ и, значит, с ломаной $\Delta^i \cup \Delta_{j(i)}$. В случае б) отрезки Δ^i, Δ^{i-1} соединяются посредством отрезка, один конец которого $S_{j(i)}$, а другой — пересечение отрезка Δ^{i-1} с прямой $L(S_{j(i)}, p''(S_{j(i)}, S^i))$. Точка $p(S^i)$ (точка $p(S_j)$), см. п. I, может быть соединена отрезком границы Γ^l (границы Γ_r) с ближайшим слева отрезком $\Delta^{n(i)}$ (отрезком $\Delta_{m(j)}$).

Таким образом, построена траектория $\mathcal{T}^*$, составленная из прямолинейных отрезков, фрагментов границы Γ и дуг окружностей с соблюдением неравенства

$$\rho(S, \mathcal{T}^*) \geq \min\left\{M(S^i, S_j),\ M(S^i),\ M(S_j) \colon S^i \in \mathbb{S}^l,\ S_j \in \mathbb{S}_r\right\} \quad \forall\ S \in \mathbb{S}.$$

Аналогично строится траектория для группы правых пар. Задача построения траектории для двух соседних групп, одна из которых содержит левые пары, а другая правые, или для трех соседних групп, состоящих первая из левых пар, вторая из средних пар, третья из правых пар, сводится к задаче построения траектории для двух соседних пар — левой и правой, левой и средней, средней и правой, которая без труда решается методами, изложенными в п. II. Теорема установлена. □

На рис. 2 с целью экономии места используются следующие обозначения:

$p'(S^i, S_j) =' (i/j)$;

$p''(S^i, S_j) ='' (i/j), \quad p''(S_j, S^i) ='' (j\backslash i)$.

На правой стороне приведен увеличенный фрагмент общего изображения, обведенного окружностью.

Оптимальная траектория не обязана содержать все точки $p(S^i, S_j)$, $p(S^i)$, $p(S_j)$. Приведенная теорема позволяет упростить задачу построения оптимальной траектории из упомянутого выше набора составляющих частей: дуг окружностей, частей границы bdY, отрезков границ конусов $K(S)$ в том случае, когда задача на минимум (13) имеет большое число решений.

З а м е ч а н и е. Построенная траектория содержит участки возвратного движения. Актуальна задача поиска кратчайшей оптимальной траектории.

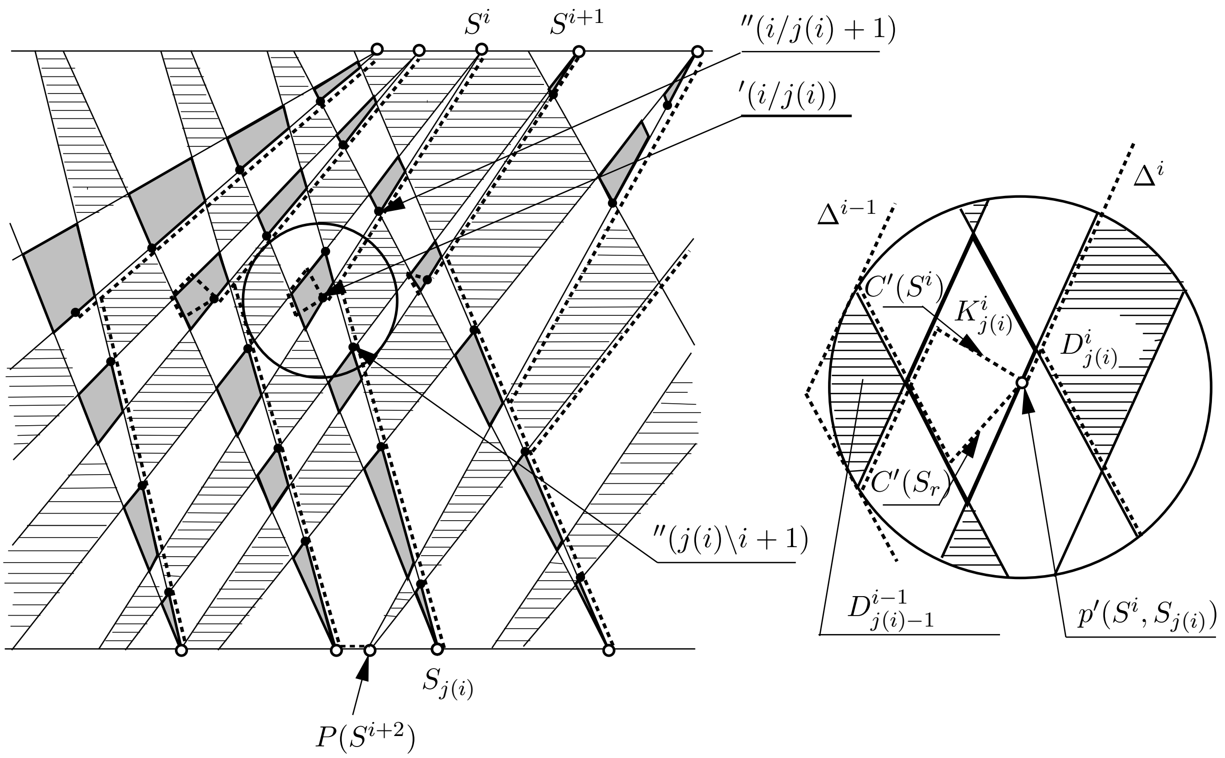


Рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И., Костоусов В.Б.** Экстремальные задачи планирования маршрута движущегося объекта в условиях наблюдения // Proc. of the 47th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. (Yekaterinburg. 2016.) P. 32–41. (CEUR Workshop Proceedings; vol.1662). URL: http://ceur-ws.org/Vol-1662/ .

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 15.09.2016

REFERENCES

1. **Berdyshev V.I. , V.B. Kostousov .** Extreme problems in planning the route of the moving object under observation. MPMA 2016: Proc. of the 47th Internat. Youth School-Conf. “Modern Problems in Mathematics and its Applications”. *Ser. CEUR Workshop Proceedings, vol.1662*, 2016, pp. 32–41. Available at: http://ceur-ws.org/ (in Russian).

V.I. Berdyshev, RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: bvi@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.21+517.958

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ В ФОРМЕ АБСТРАКТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ КОШИ[1]

В. А. Бовкун

На примере построения математической модели процесса распространения тепла в одномерном стержне под воздействием случайных тепловых источников на боковую поверхность стержня показана конструкция случайных процессов, отражающих стохастическое воздействие в предложенной модели. Получена абстрактная стохастическая задача Коши в форме Ито для уравнения с цилиндрическим винеровским процессом и для уравнения с броуновским листом.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши, броуновский лист, цилиндрический винеровский процесс.

V. A. Bovkun. Construction of models in the form of stochastic Cauchy problems.

Using the example of the construction of a mathematical model for the heat transfer process in a one-dimensional rod whose lateral surface is subject to random heat sources, we demonstrate the structure of random processes reflecting the stochastic influence in the proposed model. We obtain an abstract stochastic Cauchy problem in the Ito form for an equation with cylindrical Wiener process and for an equation with Brownian sheet.

Keywords: stochastic Cauchy problem, Brownian sheet, cylindrical Wiener process.

MSC: 60H15, 60G15, 35Q79

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-94-101

1. Введение

В течение длительного периода времени исследование различных физических явлений осуществлялось исходя из детерминистических принципов. Так первое фундаментальное описание процессов распространения тепла и диффузии было дано в форме детерминированных дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, как оказалось позднее, подобный подход не позволяет провести детальное изучение процесса. Более полную картину можно получить, если применить вероятностные принципы и методы для построения модели. Применение вероятностных методов основывается на том, что для получения математической модели, описывающей процесс, требуется провести эмпирическое исследование и установить вероятностные соотношения на основе собранных статистических данных. Дальнейшие построения, опирающиеся на базовые результаты теории вероятностей (например, центральную предельную теорему), позволяют получить модель в форме стохастической задачи. Обстоятельное и конструктивное изложение методов построения стохастических моделей различных процессов, возникающих в физике, химии, популяционной динамике и т. д., можно найти, например, в монографиях [1; 2].

Среди стохастических моделей важное место занимают модели в форме задачи Коши для дифференциальных уравнений с неоднородностями типа белого шума в бесконечномерных

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

пространствах. Используя конструкцию интеграла Ито в бесконечномерном случае, эту задачу записывают в интегральной форме [3–5]:

$$X(t)-\zeta=\int_0^t AX(s)ds+\int_0^t BdW(s),\quad t\in[0;T]. \tag{1.1}$$

Здесь A — генератор некоторой полугруппы в гильбертовом пространстве H; оператор B действует из $\mathbb{H}$ в H; $\{W=W(t),\ t\geq 0\}$ — Q-винеровский или цилиндрический винеровский процесс $W(t)=W(t,\omega),\ \omega\in(\Omega,\mathcal{F},P)$, со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$; ζ — H-значная случайная величина. В данном уравнении слагаемое с винеровским процессом W отражает влияние случайного внешнего воздействия на моделируемую систему. Специфика модели, состоящая в наличии Q-винеровского или цилиндрического винеровского процесса, обусловлена внутренними характеристиками случайной помехи.

В настоящей работе, в продолжение исследований [6;7], построена математическая модель процесса распространения тепла в стержне под воздействием случайных тепловых источников в форме абстрактной стохастической задачи Коши. Дано обоснование того, что в рамках заданной физической модели случайное внешнее воздействие может быть описано с помощью броуновского листа; при этом математической моделью изучаемого процесса является стохастическая задача Коши в форме (1.1) с цилиндрическим винеровским процессом в пространстве $H=L^2[a;b]$ в слабом смысле. Как следствие показано, что данный физический процесс может быть описан с помощью интегрального по переменным x и t уравнения, содержащего стохастический интеграл по броуновскому листу.

2. Вывод стохастического уравнения на основе физической модели

Рассмотрим задачу о распространении тепла в одномерном стержне длины l — с учетом случайных тепловых воздействий на боковую поверхность — и с изолированными концами. Пусть $u(x,t)$ — температура стержня в сечении $x\in[0;l]$ в момент времени $t\geq 0$. Предполагаем, что известно распределение температуры в стержне в начальный момент времени $u(x,0)=f(x)$. Стержень, подвергаясь случайным тепловым воздействиям, получает количество тепла γ или $-\gamma$ на единицу длины за единицу времени с вероятностью λ.

Следуя методу вывода классического уравнения теплопроводности [8], составим закон теплового баланса. Во-первых, согласно закону изменения количества тепла в сечении x стержня за время Δt имеем

$$\Delta\mathcal{Q}(t,x)=cm\left(u(t+\Delta t,x)-u(t,x)\right),\quad t\geq 0,\quad x\in[0;l], \tag{2.1}$$

где c — удельная теплоемкость стержня; m — масса стержня. Во-вторых, согласно закону теплопроводности Фурье количество тепла q, переносимого за единицу времени через единичную площадку в положительном направлении, пропорционально градиенту температуры, т. е. $q(x,t)=\alpha(x)u_x$, где $\alpha(x)$ — коэффициент теплопроводности. В дальнейшем будем считать, что стержень однороден, тогда $\alpha(x)\equiv\alpha$.

Теперь примем во внимание случайные тепловые воздействия на боковую поверхность стержня. Тогда изменение количества тепла можно разбить на две составляющие:

$$\Delta\mathcal{Q}(t,x)=\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)+\Delta\mathcal{Q}_s(t,x),\quad t\geq 0,\quad x\in[0;l], \tag{2.2}$$

где $\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)=\Delta q(x,t)S\Delta t=\alpha\left(u_x(t,x+\Delta x)-u_x(t,x)\right)S\Delta t$ — слагаемое, обусловленное внутренними процессами передачи тепла; S — площадь сечения x; $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ — случайная компонента. Первое слагаемое $\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)$ в (2.2) является детерминированной величиной, т. е.

$$\mathbb{E}[\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)]=\alpha\left(u_x(t,x+\Delta x)-u_x(t,x)\right)S\Delta t,\quad Var[\Delta\mathcal{Q}_d(t,x)]=0.$$

Т а б л и ц а

ξ_{nk}	Вероятность изменения
$\gamma\sqrt{\dfrac{\Delta x}{n}}$	$\lambda\Delta t$
$-\gamma\sqrt{\dfrac{\Delta x}{n}}$	$\lambda\Delta t$
0	$1-2\lambda\Delta t$

Согласно физической модели случайная компонента может быть описана следующим образом. На каждом частичном отрезке разбиения участка стержня $[x; x+\Delta x]$ на n равных частей количество тепла $\xi_{nk},\ 1 \leq k \leq n$, получаемое через боковую поверхность стержня за промежуток времени $[t; t+\Delta t]$, является случайной величиной, определяемой рядом распределения (см. таблицу). Тогда величина $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ описывает суммарное количество тепла, поступающее через боковую поверхность стержня на участке $[x; x+\Delta x]$ за время $[t; t+\Delta t]$. Полагая

$$\Delta\mathcal{Q}_s(t,x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk},$$

изучим свойства случайной компоненты. Исходя из физических принципов построения модели, приращения $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ на непересекающихся прямоугольниках $(t; t+\Delta t] \times (x; x+\Delta x]$ считаем независимыми случайными величинами.

Прежде всего, докажем, что случайная величина $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ имеет нормальный закон распределения. Затем — что случайные тепловые возмущения с точностью до константы можно описать с помощью броуновского листа. Наконец, опираясь на представление броуновского листа в виде ряда Фурье, убедимся, что случайные возмущения в данной модели могут быть описаны с помощью цилиндрического винеровского процесса. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема. *Стохастическая задача Коши для процесса распространения тепла в стержне с учетом случайных тепловых воздействий, определенных в таблице, в интегральной форме* (1.1) *с интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу* $\{W(t),\ t \geq 0\}$, *записывается следующим образом*:

$$c\rho S\,(u(t,x) - f(x)) = \alpha S \int_0^t u_{xx}(s,x)ds + \gamma\sqrt{2\lambda}W(t), \quad t \in [0;T], \quad x \in [0;l]. \tag{2.3}$$

Здесь уравнение понимается в слабом смысле в пространстве $L^2[0;l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим, что случайная величина $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$ имеет нормальный закон распределения. Для этого рассмотрим разбиение участка стержня $[x; x+\Delta x]$ на n равных частей и соответствующий этому разбиению набор случайных величин $\{\xi_{nk}, n \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n\}$. Отметим, что согласно физической модели последовательность $\{\xi_{nk}\}$ состоит из независимых в каждой серии случайных величин и

$$\mathbb{E}[\xi_{nk}] = 0, \quad Var[\xi_{nk}] = \frac{2}{n}\lambda\gamma^2\Delta t\Delta x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Докажем, что введенная последовательность $\{\xi_{nk}\}$ удовлетворяет условиям центральной предельной теоремы для серий, формулируемой следующим образом [9, с. 135]:

Пусть $\{\xi_{nk},\quad n \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n\}$ *— последовательность независимых в каждой серии случайных величин и* F_{nk} *— функция распределения случайной величины* ξ_{nk}. *Если для любого фиксированного* $\varepsilon > 0$ *и некоторого* $\tau > 0$ *выполняются условия*:

1) $\sum_{k=1}^{n} P(|\xi_{nk}| \geq \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$;
2) $\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|<\tau} ydF_{nk}(y) \to a$ при $n \to \infty$;
3) $\sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{|y|<\tau} y^2 dF_{nk}(y) - \Big(\int_{|y|<\tau} ydF_{nk}(y) \Big)^2 \Big) \to b^2$ при $n \to \infty$, то

то сумма случайных величин $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ *сходится по распределению при* $n \to \infty$ *к нормальной случайной величине* $\mathcal{N}(a; b)$.

Проверим первое условие. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда для любого номера n, удовлетворяющего условию $n \geq N(\varepsilon) = \left[\dfrac{\gamma^2 \Delta x}{\varepsilon^2} \right] + 1$, имеем $P(|\xi_{nk}| \geq \varepsilon) \equiv 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, $\sum_{k=1}^{n} P(|\xi_{nk}| \geq \varepsilon) = 0$ для любого $n \geq N(\varepsilon)$ и условие 1) центральной предельной теоремы для серий выполнено.

Далее, зафиксируем $\tau \geq \gamma\sqrt{\Delta x}$, тогда для любого n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|y|<\tau} ydF_{nk}(y) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\gamma\sqrt{\frac{\Delta x}{n}} \lambda \Delta t - \gamma\sqrt{\frac{\Delta x}{n}} \lambda \Delta t \Big) = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{|y|<\tau} y^2 dF_{nk}(y) - \Bigg(\int\limits_{|y|<\tau} ydF_{nk}(y) \Bigg)^2 \Bigg) = \sum_{k=1}^{n} 2\gamma^2 \frac{\Delta x}{n} \lambda \Delta t = 2\gamma^2 \Delta x \lambda \Delta t.$$

Следовательно, условия 2) и 3) тоже выполняются.

Таким образом, заключаем, что функция распределения суммы $\sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ при $n \to \infty$ сходится по распределению к нормальной случайной величине и, следовательно,

$$\Delta \mathcal{Q}_s(t, x) \sim \mathcal{N}(0; \sqrt{2\lambda\gamma^2 \Delta t \Delta x}). \tag{2.4}$$

Теперь покажем, что случайная величина $\Delta \mathcal{Q}_s(t, x)$ с точностью до константы равна приращению броуновского листа. Для этого используем определение, данное в [10].

Двупараметрический случайный процесс $\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, x)$, $t, x \geq 0$, называется *броуновским листом*, если он обладает свойствами

(W1) $\mathbf{W}$ — гауссовский процесс;

(W2) $\mathbb{E}[\mathbf{W}(t_1, x_1)\mathbf{W}(t_2, x_2)] = (t_1 \wedge t_2)(x_1 \wedge x_2)$, $x_1, x_2, t_1, t_2 \geq 0$ и $\mathbb{E}[\mathbf{W}(t, x)] = 0$.

Рассмотрим приращения $\Delta \mathbf{W}(t, x)$ броуновского листа на прямоугольнике $(t; t+\Delta t] \times (x; x+\Delta x]$, определяемые следующим равенством [11]:

$$\Delta \mathbf{W}(t, x) := \mathbf{W}(t + \Delta t, x + \Delta x) - \mathbf{W}(t, x + \Delta x) - \mathbf{W}(t + \Delta t, x) + \mathbf{W}(t, x). \tag{2.5}$$

При таком определении заметим, что во-первых, $\Delta \mathbf{W}(t, x) \sim \mathcal{N}(0; \sqrt{\Delta t \Delta x})$. Действительно, нормальность следует из гауссовости процесса $\mathbf{W}$, а из условия (W2) вытекает, что

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{W}(t, x)] = 0, \quad Var[\Delta \mathbf{W}(t, x)] = \mathbb{E}[(\Delta \mathbf{W}(t, x))^2] - \mathbb{E}^2[(\Delta \mathbf{W}(t, x))] = \Delta t \Delta x.$$

Во-вторых, броуновский лист является процессом с независимыми приращениями на непересекающихся прямоугольниках. Чтобы показать это, возьмем два непересекающихся прямоугольника $(t_1; t_2] \times (x_1; x_2]$ и $(t_3; t_4] \times (x_3; x_4]$, где $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, и убедимся в том, что приращения на этих прямоугольниках некоррелированы:

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{W}(t_1, x_1)\Delta \mathbf{W}(t_3, x_3)] = \mathbb{E}\Big[\big(\mathbf{W}(t_2, x_2) - \mathbf{W}(t_2, x_1) - \mathbf{W}(t_1, x_2) + \mathbf{W}(t_1, x_1) \big)$$

$$\times \big(\mathbf{W}(t_4, x_4) - \mathbf{W}(t_4, x_3) - \mathbf{W}(t_3, x_4) + \mathbf{W}(t_3, x_3) \big) \Big] = 0.$$

Отсюда в силу некоррелируемости и нормальности приращений получаем, что случайные величины $\Delta\mathbf{W}(t_1, x_1), \Delta\mathbf{W}(t_3, x_3)$ независимы.

Возвращаясь к описанию приращения $\Delta\mathcal{Q}_s(t, x)$, которое обладает свойством (2.4), заключаем, что оно с точностью до константы равно приращению броуновского листа:

$$\Delta\mathcal{Q}_s(t, x) = \gamma\sqrt{2\lambda}\Delta\mathbf{W}(t, x).$$

Дальнейшее применение свойств броуновского листа к выводу стохастического уравнения с винеровским процессом будет основываться на представлении $\mathbf{W}$ суммой ряда Фурье некоторого Q-винеровского процесса. Чтобы определить оператор Q, отвечающий броуновскому листу, рассмотрим $L^2[0; l]$-значный Q-винеровский процесс W_Q, который может быть представлен как сумма равномерно сходящегося по t при почти всех ω ряда [3, с. 82]:

$$W_Q(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\beta_n(t)e_n(x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0; l], \tag{2.6}$$

где $\{\beta_n\}$ — независимые броуновские движения на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; λ_n — собственные значения оператора Q; e_n — соответствующие им собственные векторы, образующие ортонормированный базис в $L^2[0; l]$.

Учитывая свойство Q быть оператором следа, можно показать, что он является интегральным оператором в пространстве $L^2[0; l]$:

$$Q\varphi(x_1) = \int_0^l g(x_1, x_2)\varphi(x_2)dx_2, \quad x_1 \in [0; l], \quad \varphi \in L^2[0; l],$$

с симметричным ядром g, которое определяет пространственную корреляцию процесса W_Q:

$$\mathbb{E}[W_Q(t, x_1)W_Q(t, x_2)] = tg(x_1, x_2), \quad t \geq 0, \quad x_1, x_2 \in [0; l].$$

Принимая во внимание тот факт, что пространственная корреляция броуновского листа определяется согласно свойству (W2) при фиксированном t равенством

$$\mathbb{E}[\mathbf{W}(t, x_1)\mathbf{W}(t, x_2)] = t(x_1 \wedge x_2), \quad t \geq 0, \quad x_1, x_2 \in [0; l],$$

заключаем, что броуновский лист является $L^2[0; l]$-значным Q-винеровским процессом с интегральным оператором Q, ядром которого является функция $g(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$. Найдем набор собственных значений и соответствующих им ортонормированных собственных функций интегрального оператора с ядром g:

$$\lambda_n = \frac{4l^2}{\pi^2(2n+1)^2}, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad x \in [0; l].$$

Тогда разложение (2.6) принимает следующий вид:

$$W_Q(t, x) = \frac{2\sqrt{2l}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n(t)}{2n+1} \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l} = \mathbf{W}(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in [0; l]. \tag{2.7}$$

Далее формально продифференцируем разложение (2.7) по переменной x, получим ряд

$$W(t, x) := \frac{\partial\mathbf{W}(t, x)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{2l}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t) \cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad t \geq 0, \quad x \in [0; l],$$

сходимость которого по x надо понимать в слабом смысле. Так как функции

$$\widetilde{e}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad x \in [0; l],$$

также образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2[0;l]$, то разложение для $W(t,x)$ можно представить в виде

$$W(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(t)\widetilde{e}_n(x),\quad t\geq 0,\quad x\in[0;l]. \tag{2.8}$$

Из этого представления следует, что слабо сходящийся ряд (2.8) определяет цилиндрический винеровский процесс $\{W(t)=W(t,x),\ t\geq 0\}$ в гильбертовом пространстве $L^2[0;l]$.

Теперь перейдем к выводу стохастического уравнения с интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу. Согласно принципу теплового баланса для участка стержня $[x;x+\Delta x]$ за время $[t;t+\Delta t]$, приравниваем правые части формул (2.1) и (2.2). Получим уравнение в форме приращений по x и t:

$$cm\left(u(t+\Delta t,x)-u(t,x)\right)=\alpha\left(u_x(t,x+\Delta x)-u_x(t,x)\right)S\Delta t+\gamma\sqrt{2\lambda}\Delta\mathbf{W}(t,x). \tag{2.9}$$

Далее рассмотрим отношение $\Delta\mathbf{W}(t,x)/\Delta x$. В силу определения приращения $\Delta\mathbf{W}(t,x)$ равенством (2.5) имеем

$$\frac{\Delta\mathbf{W}(t,x)}{\Delta x}=\frac{\mathbf{W}(t+\Delta t,x+\Delta x)-\mathbf{W}(t+\Delta t,x)}{\Delta x}-\frac{\mathbf{W}(t,x+\Delta x)-\mathbf{W}(t,x)}{\Delta x},\quad t\geq 0,\quad x\in[0;l].$$

Отсюда следует, что приращение броуновского листа связано с приращением цилиндрического винеровского процесса следующим равенством:

$$\Delta\mathbf{W}(t,x)=\left(W(t+\Delta t)-W(t)\right)\Delta x+o(\Delta x),\quad t\geq 0,\quad x\in[0;l]. \tag{2.10}$$

Заметим, что стохастический интеграл $\int_0^t\langle\psi(s,\cdot),dW(s)\rangle,\ t\in[0;T]$, по цилиндрическому винеровскому процессу существует при условии, что $L^2[0;l]$-значный предсказуемый процесс $\psi(t,\cdot),\ t\in[0;T]$ удовлетворяет требованию

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^T\int_0^l\psi(s,\xi)dsd\xi\Big]<+\infty.$$

Примем во внимание, что в нашем случае $\psi(t,x)=\gamma\sqrt{2\lambda}$, и формально предположим существование частных производных u_t,u_{xx}. Тогда поделив обе части уравнения (2.9) на Δx и устремляя Δt и Δx к 0, получим, что уравнение в приращениях сводится к интегральному уравнению

$$c\rho S\int_0^t u_s(s,x)ds=\alpha S\int_0^t u_{xx}(s,x)ds+\gamma\sqrt{2\lambda}\int_0^t dW(s),\quad t\in[0;T],\quad x\in[0;l],$$

с интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу $\{W(t),\ t\geq 0\}$. Учитывая начальное распределение температуры $u(x,0)=f(x),\ x\in[0;l]$ и значение стохастического интеграла, окончательно имеем, что математическая модель для описания процесса распространения тепла в стержне может быть записана следующим образом:

$$c\rho S\left(u(t,x)-f(x)\right)=\alpha S\int_0^t u_{xx}(s,x)ds+\gamma\sqrt{2\lambda}W(t),\quad t\in[0;T],\quad x\in[0;l].$$

Здесь уравнение понимается в слабом смысле в пространстве $L^2[0;l]$.

Теорема доказана.

В качестве дополнения к основному результату покажем, что после подходящих преобразований стохастического слагаемого в уравнении (2.9) процесс распространения тепла в стержне также можно описать с помощью интегрального по двум переменным уравнения.

Утверждение. *Стохастическая задача Коши для процесса распространения тепла в стержне с учетом случайных тепловых воздействий, определенных в таблице выше, может быть записана следующим образом:*

$$c\rho S u_t(t,x)dxdt = \alpha S u_{xx}(t,x)dxdt + \gamma\sqrt{2\lambda}d\mathbf{W}(t,x), \quad u(x,0)=f(x), \quad t\in[0;T], \quad x\in[0;l].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим равенство [3, с. 102]

$$\int_0^t \langle \psi(s,\cdot), dW(s)\rangle = \int_0^t\int_0^l \psi(s,\xi)d\mathbf{W}(s,\xi), \quad t\in[0;T], \quad \xi\in[0;l],$$

которое устанавливает связь стохастического интеграла по цилиндрическому винеровскому процессу и стохастического интеграла по броуновскому листу. Принимая во внимание представление (2.10) приращения броуновского листа, в уравнении (2.9) устремим Δt и Δx к 0. Получим, что уравнение в приращениях преобразуется к интегральному уравнению по двум переменным

$$c\rho S\int_0^t\int_0^x u_s(s,\xi)d\xi ds = \alpha S\int_0^t\int_0^x u_{\xi\xi}(s,\xi)d\xi ds + \gamma\sqrt{2\lambda}\int_0^t\int_0^x d\mathbf{W}(s,\xi), \quad t\in[0;T], \quad x\in[0;l],$$

которое содержит стохастический интеграл по броуновскому листу. Учитывая общепринятую в теории стохастических уравнений запись интегральных уравнений в форме дифференциалов и начальное условие, заключаем, что математическая модель процесса распространения тепла может быть записана следующим образом:

$$c\rho S u_t(t,x)dxdt = \alpha S u_{xx}(t,x)dxdt + \gamma\sqrt{2\lambda}d\mathbf{W}(t,x), \quad u(x,0)=f(x), \quad t\in[0;T], \quad x\in[0;l].$$

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е 1. Принципиально важным для вывода стохастического уравнения (2.3) является то, что по предположению физической модели случайные величины ξ_{nk}, $1\le k\le n$ независимы и их значения определяются величиной $\sqrt{\Delta x}$. Проанализировав доказательство нормальности случайной величины $\Delta\mathcal{Q}_s(t,x)$, можно убедиться в том, что ключевую роль играют степень приращения Δx и свойство независимости. Если предполагать иную степень приращения, то потребуется принципиально другой подход к выводу математической модели.

З а м е ч а н и е 2. Задачу (2.3) можно рассматривать как стохастически возмущенную абстрактную задачу Коши для уравнения первого порядка в пространстве $H=L^2[0;l]$ с оператором $A=d^2/dx^2$, порождающим полугруппу класса C_0. Тогда существование и единственность слабого решения задачи вытекает из [3, теорема 5.2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Allen E.J.** Modeling with Ito stochastic differential equations. Dordrecht: Springer, 2007. 228 p. (Math. Model. Theory Appl.; vol. 22.)
2. **Гардинер К.В.** Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 538 с.
3. **Da Prato G., Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014. 493 p. (Encyclopedia Math. Appl. No. 45.)
4. **Melnikova I.V.** Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and Generalized Solutions. Boca Raton: CRC Press, 2016. 310 p. (Monographs and Research Notes in Math.)

5. **Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A.** Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions // J. Math. Sci. 2002. Vol. 111, no. 2. P. 3430–3475.
6. **Allen E.J.** Derivation of stochastic partial differential equations // Stoch. Anal. Appl. 2008. Vol. 26, no. 2. P. 357–378.
7. **Парфененкова В.С.** Исследование стохастических задач математической физики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 212–221.
8. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
9. **Петров В.В.** Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 320 с.
10. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 400 с.
11. **Лифшиц М.А.** Гауссовские случайные функции. К.: ТВiМС, 1995. 246 с.

Бовкун Вадим Андреевич

аспирант

Институт математики и компьютерных наук

Уральского федерального университета

e-mail: 123456m@inbox.ru

Поступила 10.09.2016

REFERENCES

1. Allen E.J. *Modeling with Ito stochastic differential equations.* Dordrecht: Springer, 2007, Ser. Math. Model. Theory Appl., vol. 22, 228 p.
2. Gardiner C.W. *Handbook of stochastic method. For physics, chemistry, and the natural sciences.* Berlin: Springer-Verlag, 1985, Springer Series in Synergetics, vol. 13, 442 p.
3. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014, Encyclopedia Math. Appl. No. 45, 493 p.
4. Melnikova I.V. *Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and Generalized Solutions.* Boca Raton: CRC Press, 2016, Ser. Monographs and Research Notes in Math., 310 p.
5. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. Abstract stochastic equations I. Classical and Generalized Solutions. *J. Math. Sci.*, 2002, vol. 111, no. 2, pp. 3430–3475.
6. Allen E.J. Derivation of stochastic partial differential equations. *Stoch. Anal. Appl.*, 2008, vol. 26, no. 2, pp. 357–378.
7. Parfenenkova V.S. Investigation of stochastic problems of mathematical physics. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 18, no. 2, 2012, pp. 212–221 (in Russian).
8. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics.* New York: Dover Publ., 1963, Intern. Ser. Monograp. Pure Appl. Math., vol. 39, 765 p. Original Russian text published in Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoj fiziki*, Moskow: Gostekhizdat Publ., 1953, 680 p.
9. Petrov V.V. *Predelnye teoremy dlya summ nezavisimyh sluchajnyh velichin* (Limit theorems for the sums of independent random variables), Moscow: Nauka Publ., 1987, 320 p. (in Russian).
10. Bulinsky A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchajnyh processov* (The theory of stochastic processes). Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 400 p. (in Russian).
11. Lifshits M.A. *Gaussovskie sluchajnye funkcii* (Gaussian random functions). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995, Ser. Math. Appl., vol. 322, 333 p.

V. A. Bovkun, doctoral student, Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: 123456m@inbox.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.65

ОБ УСЛОВИЯХ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ПО СУББОТИНУ[1]

В. В. Богданов, Ю. С. Волков

Для решения задачи интерполяции с условиями сохранения кусочной монотонности и выпуклости применяются параболические сплайны. Установлены достаточные условия кусочной монотонности и выпуклости интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину, приведены численные примеры.

Ключевые слова: сплайн второй степени, интерполяция, формосохранение.

V. V. Bogdanov, Yu. S. Volkov. Shape preservation conditions under interpolation by Subbotin's parabolic splines.

Parabolic splines are applied to solve an interpolation problem with the conditions of preserving the piecewise monotonicity and convexity. Sufficient conditions are established for the piecewise monotonicity and convexity of Subbotin's quadratic interpolation splines, and numerical examples are given.

Keywords: quadratic spline, interpolation, shape preservation.

MSC: 65D05, 65D07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-102-113

Введение

Формосохраняющей интерполяцией принято называть сохранение интерполянтом геометрических характеристик интерполируемой функции, под которыми чаще всего понимают монотонность и выпуклость. Задачи монотонной и выпуклой интерполяции хорошо изучены, для классических сплайнов второй и третьей степеней установлены эффективные достаточные условия [1–4]. Однако весьма актуальной и малоизученной является задача интерполяции данных, содержащих перемены направлений монотонности и выпуклости. Начало исследованиям в этом направлении было положено работой Ю. С. Завьялова [5], из которой сразу следуют достаточные условия сохранения кусочной выпуклости для кубических сплайнов. Решение же задачи интерполяции с условием сохранения кусочной монотонности [6] потребовало привлечения нового представления классических кубических сплайнов [7; 8] и развития [9] идей работы [5].

В настоящей работе для решения задачи интерполяции с условиями сохранения кусочной монотонности и выпуклости, т. е. задачи комонотонной и ковыпуклой интерполяции, мы применяем параболические сплайны. Установлены достаточные условия кусочной монотонности и выпуклости интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину [10], приведены численные примеры.

1. Системы определяющих уравнений

Пусть в узлах сетки

$$\boldsymbol{X}: \ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-07530).

отрезка $[a, b]$ известны значения функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, а на концах отрезка — еще и производные $f'_a = f'(a)$, $f'_b = f'(b)$. Нам удобно для дальнейшего определить кратные дополнительные узлы $x_{-1} = x_0 = a$, $x_{n+1} = x_n = b$. Шаг сетки обозначим $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = -1, \dots, n$.

Характер монотонности исходных данных определяется знаками разделенных разностей $\delta_i = f[x_i, x_{i+1}]$, $i = -1, \dots, n$. Отметим, что крайние значения суть заданные значения производных на концах отрезка: $\delta_{-1} = f'_a$, $\delta_n = f'_b$. Характер выпуклости данных определяют знаки вторых разделенных разностей $\Delta_i = f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$.

Параболический сплайн по Субботину [10, гл. 2] интерполирует заданные значения и имеет узлы в точках y_i таких, что

$$y_i = (x_{i-1} + x_i)/2, \quad i = 1, \dots, n; \qquad y_0 = a, \quad y_{n+1} = b.$$

Параболические интерполяционные сплайны по Субботину, как и классические кубические, являются нелокальными, и для нахождения каких-либо определяющих их параметров необходимо решать трехдиагональные системы уравнений. В. Л. Мирошниченко показал [1; 2], что если в качестве параметров выбирать узловые значения первой либо второй производной, то эти же системы можно использовать и для получения условий монотонности и выпуклости. Основным инструментом получения условий монотонности и выпуклости явилась лемма Мирошниченко [1, Lemma 1] о неотрицательном решении трехдиагональной системы с диагональным преобладанием. В дальнейшем был предложен более простой путь получения условий монотонности и выпуклости, состоящий в использовании систем уравнений относительно коэффициентов разложения первой или второй производной сплайна по B-сплайнам соответствующей степени [3; 4; 11], правда, пришлось усилить [3; 12] лемму Мирошниченко.

Преимущество нового подхода заключается в том, что параметрами сплайна выступают коэффициенты разложения первой или второй производной интерполяционного сплайна по B-сплайнам, поэтому положительность этих производных, т. е. монотонность и выпуклость сплайна, сразу следует из положительности определяемых параметров сплайна. А лемма Мирошниченко и ее усиления дают достаточные условия положительности таких параметров при положительных правых частях соответствующих систем уравнений (компонентами правых частей выступают разделенные разности $\{\delta_i\}$ или $\{\Delta_i\}$).

Теперь считаем, что в последовательностях разделенных разностей $\{\delta_i\}$ и $\{\Delta_i\}$ обязательно есть перемены знаков. Задача состоит в нахождении условий, при которых первая или вторая производная интерполирующей функции будет наследовать характер изменения знаков соответствующих разделенных разностей. Например, если в последовательности $\{\delta_i\}$ после l положительных значений идут отрицательные, то и производная интерполянта в окрестности узла x_l должна однократно поменять знак с "+" на "−". Нас интересуют условия, гарантирующие выполнение указанного свойства.

Ограничимся рассмотрением случая, когда в последовательностях разделенных разностей ровно одна смена знака, т. е. выполнены условия

$$\delta_{-1} > 0, \dots, \delta_{l-1} > 0, \quad \delta_l < 0, \dots, \delta_n < 0, \tag{2}$$

или

$$\Delta_0 > 0, \dots, \Delta_{l-1} > 0, \quad \Delta_l < 0, \dots, \Delta_n < 0. \tag{3}$$

Для наших целей воспользуемся представлением первой и второй производной параболического сплайна в виде разложения по B-сплайнам [4]:

$$s'(x) = \sum_{i=-1}^{n} \alpha_i N_{i,2}(x), \tag{4}$$

$$s''(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i N_{i,1}(x), \tag{5}$$

Здесь $N_{i,1}(x)$, $N_{i,2}(x)$ — B-сплайны первого и второго порядков соответственно, т. е. нулевой и первой степени. Сетку узлов сплайна при этом мы считаем расширенной влево и вправо кратными дополнительными узлами $y_{-1} = a$, $y_{n+2} = b$.

Коэффициенты разложений $\alpha_{-1}, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_0, \ldots, \beta_n$ определяются из выведенных в [4, системы (1.6),(1.7)] систем уравнений, характеризующих условия интерполяции. Эти системы имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{-1} = \delta_{-1}, \\ &\lambda_i \alpha_{i-1} + (2 + \mu_i + \lambda_{i+1})\alpha_i + \mu_{i+1}\alpha_{i+1} = 4\delta_i, \; i = 0, \ldots, n-1, \\ &\alpha_n = \delta_n, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &3\beta_0 + \beta_1 = 8\Delta_0, \\ &\mu_i \beta_{i-1} + 3\beta_i + \lambda_i \beta_{i+1} = 8\Delta_i, \; i = 1, \ldots, n-1, \\ &\beta_{n-1} + 3\beta_n = 8\Delta_n. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Здесь обозначено

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \lambda_i = 1 - \mu_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Если мы желаем, чтобы параболический сплайн по Субботину $s(x)$, производная которого представлена в виде (4), отражал характер поведения данных (2) и менял направление монотонности с возрастания на убывание, то в последовательности коэффициентов $\{\alpha_i\}$ также должна быть смена знаков с "+" на "−". Поскольку носителем B-сплайна $N_{i,2}(x)$ является интервал $[y_i, y_{i+2}]$, то значение производной $s'(x)$ в любой точке промежутка $[y_i, y_{i+1}]$ определяется лишь двумя коэффициентами α_{i-1} и α_i. Ясно, что если эти коэффициенты одного знака, то и значения $s'(x)$ на всем промежутке $[y_i, y_{i+1}]$ будут этого же знака. Если же они разных знаков, то $s'(x)$ как линейная функция обязательно меняет знак на $[y_i, y_{i+1}]$. Таким образом, справедливо утверждение.

Лемма 1. *Если в последовательности коэффициентов представления* (4) *присутствует смена знака, а именно выполнены условия*

$$\alpha_{-1} > 0, \ldots, \alpha_{k-1} > 0, \quad \alpha_k < 0, \ldots, \alpha_n < 0,$$

то существует единственная точка $\xi \in [y_k, y_{k+1}]$ *такая, что* $s'(x) \geq 0$ *для* $x \in [a, \xi]$, $s'(x) \leq 0$ *для* $x \in [\xi, b]$.

Вторая производная параболического сплайна по Субботину (5) является кусочно-постоянной и ее значение в каждой точке определяется лишь одним коэффициентом B-сплайн-разложения — значение β_i определяет $s''(x)$ на $[y_i, y_{i+1}]$. Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *Если в последовательности коэффициентов представления* (5) *присутствует смена знака, а именно выполнены условия*

$$\beta_0 > 0, \ldots, \beta_{k-1} > 0, \quad \beta_k < 0, \ldots, \beta_n < 0,$$

то в точке y_k *вторая производная сплайна меняет знак, т.е.* $s''(x) \geq 0$ *для* $x \in [a, y_k]$, $s''(x) \leq 0$ *для* $x \in [y_k, b]$.

При выполнении условий (2) интерполируемая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ также обязана менять направление монотонности с возрастания на убывание, причем эта точка максимума может лежать на промежутке $[x_{l-1}, x_{l+1}]$. В условиях леммы 1 точка локального максимума сплайна $s(x)$ принадлежит промежутку $[y_k, y_{k+1}]$, который только при $k = l$ будет содержаться в $[x_{l-1}, x_{l+1}]$. Таким образом, наша задача сохранения интерполяционным параболическим сплайном по Субботину кусочной монотонности данных состоит в определении условий, при которых знаки набора коэффициентов $\{\alpha_i\}$ (знаковая схема) совпадут с набором знаков последовательности $\{\delta_i\}$ (мы используем термин ‘наследование знаковой схемы’).

Если в данных присутствует смена направления выпуклости, т. е. выполнены условия (3), то интерполируемая функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ также обязана менять направление выпуклости с выпуклости вниз на выпуклость вверх, причем точка перегиба лежит на промежутке $[x_{l-2}, x_{l+1}]$. В условиях леммы 2 точкой перегиба сплайна будет узел y_k, он может принадлежать $[x_{l-2}, x_{l+1}]$ при $k = l-1, l, l+1$. Наилучшее положение будет при $k = l$, что соответствует положению точки перегиба сплайна $s(x)$ в среднем из узлов промежутка $[x_{l-2}, x_{l+1}]$ возможного положения точки перегиба интерполируемой функции. В этом случае задача сохранения кусочной выпуклости при интерполяции состоит в наследовании набором коэффициентов $\{\beta_i\}$ знаковой схемы последовательности $\{\Delta_i\}$.

2. Наследование решением системы знаковой схемы ее правой части

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{d} \tag{8}$$

с трехдиагональной матрицей $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ порядка m ($a_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$). Матрица $\boldsymbol{A}$ имеет только неотрицательные элементы, а в векторе правой части $\boldsymbol{d} = (d_1, \dots, d_m)^T$ элементы меняют знак с “+” на “−”, а именно

$$d_1 > 0, \dots, d_{l-1} > 0, \quad d_l < 0, \dots, d_m < 0. \tag{9}$$

Нас интересует вопрос, при каких условиях знаки компонент решения $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_m)^T$ будут соответствовать знакам компонент правой части, т. е. будет выполнено

$$z_1 > 0, \dots, z_{l-1} > 0, \quad z_l < 0, \dots, z_m < 0. \tag{10}$$

Отметим, что мы рассматриваем случай обязательного наличия в системах неравенств (9) и (10) смены знаков, т. е. l может принимать значения $2, \dots, m$.

Идея получения условий наследования решением системы (8) полностью положительной знаковой схемы правой части заключается в сведении задачи к системе с матрицей монотонного вида [13, § 23]. В лемме Мирошниченко [1, Lemma 1] такое сведение осуществлено путем домножения слева обеих частей равенства (8) на некоторую трехдиагональную матрицу $\boldsymbol{G}$. В нашем же случае матрица $\boldsymbol{G}$ будет немного сложнее.

Следуя [6], введем пятидиагональную матрицу $\boldsymbol{G} = (g_{ij})_{i,j=1}^m$ порядка m, определяемую через элементы матрицы $\boldsymbol{A}$, у которой вне трех основных диагоналей могут быть ненулевыми не более двух элементов

$$g_{l-2,l} = \frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}}{w_l} \quad \text{при } l > 2, \quad g_{l+1,l-1} = \frac{a_{l,l-1}a_{l+1,l}}{w_l} \quad \text{при } l < m,$$

где $w_l = a_{l-1,l-1}a_{l,l} - a_{l-1,l}a_{l,l-1}$. На главной диагонали все элементы равны 1, а на примыкающих диагоналях элементы задаются выражениями

$$\begin{aligned}
&g_{i,i-1} = -\frac{a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}}, \quad i \neq l, l+1; \quad g_{i,i+1} = -\frac{a_{i,i+1}}{a_{i+1,i+1}}, \quad i \neq l-2, l-1; \\
&g_{l-2,l-1} = -\frac{a_{l-2,l-1}a_{l,l}}{w_l} \quad \text{при } l > 2, \quad g_{l+1,l} = -\frac{a_{l-1,l-1}a_{l+1,l}}{w_l} \quad \text{при } l < m, \\
&g_{l-1,l} = g_{l,l-1} = 0.
\end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы трехдиагональная система* (8) *с неотрицательными элементами, диагональным преобладанием и правой частью* $\boldsymbol{d}$, *удовлетворяющей условию* (9), *имела решение* $\boldsymbol{z}$, *подчиненное условию* (10), *достаточно, чтобы для компонент вектора* $\boldsymbol{Gd}$ *выполнялись неравенства*

$$(\boldsymbol{Gd})_1 > 0, \dots, (\boldsymbol{Gd})_{l-1} > 0, \quad (\boldsymbol{Gd})_l < 0, \dots, (\boldsymbol{Gd})_m < 0. \tag{11}$$

Доказательство. Утверждение теоремы можно получить, опираясь на работу [5], мы же будем проводить рассуждения следуя работе [6], в которой рассмотрен случай диагонального преобладания по столбцам.

Рассмотрим диагональную матрицу $\boldsymbol{D}$ с диагональными элементами, являющимися знаками элементов вектора $\boldsymbol{d}$, т. е. $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(\operatorname{sign} d_1, \dots, \operatorname{sign} d_m)$. Поэтому все компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{Dd}$ будут положительными. Вектор $\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Dz}$ также будет отличаться от $\boldsymbol{z}$ лишь изменением знаков у компонент, начиная с номера l. Тогда систему уравнений (8) можно переписать в виде

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\boldsymbol{d}}, \tag{12}$$

где $\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{DAD}$. Условие теоремы о наследовании решением $\boldsymbol{z}$ системы уравнений (8) знаковой схемы правой части $\boldsymbol{d}$ теперь равносильно положительности компонент решения $\tilde{\boldsymbol{z}}$ системы (12).

Матрица $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\tilde{a}_{ij})$ трехдиагональная с положительной главной диагональю и отличается от исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ лишь знаками двух элементов вне главной диагонали, а именно,

$$\tilde{a}_{l-1,l} = -a_{l-1,l}, \quad \tilde{a}_{l,l-1} = -a_{l,l-1}.$$

Значит, $\tilde{\boldsymbol{A}}$, как и $\boldsymbol{A}$, — матрица с диагональным преобладанием.

Домножим обе части системы (12) на матрицу $\tilde{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{DGD}$, в результате приходим к системе уравнений

$$\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{z}} = \tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{d}}. \tag{13}$$

Покажем, что матрица этой системы $\bar{\boldsymbol{A}} = \tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{A}}$ является матрицей монотонного вида.

Известно (см., например, [14, с. 334]), что матрица с диагональным преобладанием будет матрицей монотонного вида, если

$$a_{i,i} > 0, \quad a_{i,j} \le 0 \quad (j \ne i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрица $\bar{\boldsymbol{A}} = (\bar{a}_{ij})$ имеет почти пятидиагональную структуру, вне пяти диагоналей находятся только один или два ненулевых элемента. Для удобства введем фиктивные величины

$$\begin{aligned}
&a_{0,0} = a_{m+1,m+1} = 1,\\
&a_{i,j} = 0 \quad (i \ne j) \quad \text{при } i < 1 \text{ или } j < 1 \text{ или } i > m \text{ или } j > m,\\
&\bar{a}_{1,-1} = \bar{a}_{2,0} = \bar{a}_{m-1,m+1} = \bar{a}_{m,m+2} = 0.
\end{aligned}$$

Элементы главной диагонали имеют вид

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{i,i} = -\frac{a_{i-1,i}a_{i,i-1}}{a_{i-1,i-1}} + a_{i,i} - \frac{a_{i,i+1}a_{i+1,i}}{a_{i+1,i+1}}, \quad i \ne l-2, l-1, l, l+1;\\
&\bar{a}_{l-2,l-2} = -\frac{a_{l-3,l-2}a_{l-2,l-3}}{a_{l-3,l-3}} + a_{l-2,l-2} - \frac{a_{l,l}a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{w_l} \quad \text{при } l > 2,\\
&\bar{a}_{l-1,l-1} = -\frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{a_{l-2,l-2}} + a_{l-1,l-1}, \quad \bar{a}_{l,l} = -\frac{a_{l,l+1}a_{l+1,l}}{a_{l+1,l+1}} + a_{l,l},\\
&\bar{a}_{l+1,l+1} = -\frac{a_{l-1,l-1}a_{l,l+1}a_{l+1,l}}{w_l} + a_{l+1,l+1} - \frac{a_{l+1,l+2}a_{l+2,l+1}}{a_{l+2,l+2}} \quad \text{при } l < m.
\end{aligned}$$

Элементами первых диагоналей, примыкающих к главной, являются нули, кроме, может быть, двух, которые неположительны: $\bar{a}_{l-1,l} = -a_{l-1,l}$, $\bar{a}_{l,l-1} = -a_{l,l-1}$. На вторых примыкающих диагоналях стоят только неположительные элементы

$$\bar{a}_{i,i-2} = -\frac{a_{i,i-1}a_{i-1,i-2}}{a_{i-1,i-1}}, \quad i \neq l, l+1; \quad \bar{a}_{i,i+2} = -\frac{a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}}{a_{i+1,i+1}}, \quad i \neq l-2, l-1;$$
$$\bar{a}_{l-2,l} = 0 \quad \text{при } l > 2, \quad \bar{a}_{l-1,l+1} = 0 \quad \text{при } l < m, \quad \bar{a}_{l,l-2} = \bar{a}_{l+1,l-1} = 0.$$

На третьих примыкающих диагоналях при $2 < l < m$ ненулевыми могут быть только два элемента, которые также неположительны:

$$\bar{a}_{l+1,l-2} = -\frac{a_{l-1,l-2}a_{l,l-1}a_{l+1,l}}{w_l}, \quad \bar{a}_{l-2,l+1} = -\frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}a_{l,l+1}}{w_l}.$$

Остальные элементы матрицы $\bar{\boldsymbol{A}}$ равны нулю. Таким образом, в каждой строке не более трех ненулевых элементов, и все элементы, не лежащие на главной диагонали, неположительны.

Теперь проверим, что сумма элементов матрицы $\bar{\boldsymbol{A}}$ в каждой строке положительна, что будет означать наличие диагонального преобладания и положительность диагональных элементов. Нам достаточно это проверить лишь для строк с номерами $l-2$, $l-1$, l, $l+1$, для остальных строк такая проверка проведена в [1]. Начнем рассмотрение со строки с номером $l-1$, имеем

$$\bar{a}_{l-1,l-3} + \bar{a}_{l-1,l-1} + \bar{a}_{l-1,l} = -\frac{a_{l-1,l-2}a_{l-2,l-3}}{a_{l-2,l-2}} - \frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{a_{l-2,l-2}} + a_{l-1,l-1} - a_{l-1,l}$$
$$= (-a_{l-2,l-3} + a_{l-2,l-2} - a_{l-2,l-1})\frac{a_{l-1,l-2}}{a_{l-2,l-2}} + (-a_{l-1,l-2} + a_{l-1,l-1} - a_{l-1,l}).$$

Полученное выражение положительно, поскольку ввиду диагонального доминирования матрицы $\boldsymbol{A}$ слагаемые в скобках положительны. Аналогично вычисляется сумма элементов в строке с номером l.

Далее рассмотрим строку с номером $l-2$ (при $l > 2$), в этом случае

$$\bar{a}_{l-2,l-4} + \bar{a}_{l-2,l-2} + \bar{a}_{l-2,l+1}$$
$$= -\frac{a_{l-2,l-3}a_{l-3,l-4}}{a_{l-3,l-3}} - \frac{a_{l-3,l-2}a_{l-2,l-3}}{a_{l-3,l-3}} + a_{l-2,l-2} - \frac{a_{l,l}a_{l-2,l-1}a_{l-1,l-2}}{w_l} - \frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}a_{l,l+1}}{w_l}$$
$$= (-a_{l-3,l-4} + a_{l-3,l-3} - a_{l-3,l-2})\frac{a_{l-2,l-3}}{a_{l-3,l-3}} + (-a_{l-2,l-3} + a_{l-2,l-2} - a_{l-2,l-1})$$
$$+ (-a_{l-1,l-2} + a_{l-1,l-1} - a_{l-1,l})\frac{a_{l-2,l-1}a_{l,l}}{w_l} + (-a_{l,l-1} + a_{l,l} - a_{l,l+1})\frac{a_{l-2,l-1}a_{l-1,l}}{w_l}.$$

Положительность выражений в скобках также обеспечивается диагональным преобладанием, что приводит к положительности всего выражения. Аналогичным образом проверяется положительность суммы элементов строки $l+1$.

Итак, мы установили, что матрица системы (13) является матрицей монотонного вида. Поэтому, если компоненты вектора $\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{d}}$ правой части неотрицательны, то вектор $\tilde{\boldsymbol{z}}$ решения тоже будет иметь только неотрицательные компоненты. А это эквивалентно совпадению знаковых схем векторов $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{Gd}$, поскольку $\tilde{\boldsymbol{G}}\tilde{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{DGd}$ и $\tilde{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Dz}$. Таким образом, при выполнении (11) знаковые схемы векторов $\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{z}$ совпадают. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 1 будет справедливым, если в соотношениях (9)–(11) использовать нестрогие неравенства (следует из предельного перехода). Однако равенство нулю компонент вектора $\boldsymbol{d}$ не позволяет получить правильный (в смысле наследования) знак компонент вектора $\boldsymbol{Gd}$, а, следовательно, и вектора решения $\boldsymbol{z}$. Например, если только одна компонента d_i ($i < l-1$) равна нулю, то соответствующая компонента $(\boldsymbol{Gd})_i$ вектора $\boldsymbol{Gd}$ будет строго отрицательной, т.е. неравенства (11) выполняться не будут (даже нестрогие). Поэтому теорема останется содержательной, если допустить нестрогие неравенства только в (10) и (11), но в этом случае слово “наследование” имеет неоднозначный смысл.

3. Условия комонотонности и ковыпуклости

Вернемся к нашей задаче формосохранения при интерполяции параболическим сплайном по Субботину. Мы считаем, что интерполируемые данные таковы, что в последовательностях разделенных разностей $\{\delta_i\}$ и/или $\{\Delta_i\}$ есть перемены знаков, т. е. выполнены условия (2), (3). Рассмотренные системы определяющих уравнений (6) и (7) являются трехдиагональными и присутствует диагональное преобладание, следовательно, можно применить теорему 1. Выполнение неравенств (11) для этих систем является условием наследования векторами коэффициентов $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ знаковых схем векторов $\{\delta_i\}$, $\{\Delta_i\}$. В этом случае леммы 1 и 2 говорят о наследовании сплайном формы данных. Таким образом, справеливы следующие теоремы.

Теорема 2. *Если направление монотонности данных меняется с возрастания на убывание, т. е. выполнены условия* (2), *то параболический сплайн по Субботину* $s(x)$ *будет комонотонным при выполнении следующих условий*:

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta_1 \ge 0,$$

$$\delta_i - \frac{\lambda_i}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}\delta_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\delta_{i+1} \ge 0, \quad i = 1,\dots,l-3,$$

$$\delta_{l-2} - \frac{\lambda_{l-2}}{2+\mu_{l-3}+\lambda_{l-2}}\delta_{l-3} - \frac{\mu_{l-1}(2+\mu_l+\lambda_{l+1})}{\omega_l}\delta_{l-1} + \frac{\mu_{l-1}\mu_l}{\omega_l}\delta_l \ge 0,$$

$$\delta_{l-1} - \frac{\lambda_{l-1}}{2+\mu_{l-2}+\lambda_{l-1}}\delta_{l-2} \ge 0, \quad \delta_l - \frac{\mu_{l+1}}{2+\mu_{l+1}+\lambda_{l+2}}\delta_{l+1} \le 0,$$

$$\delta_{l+1} + \frac{\lambda_l\lambda_{l+1}}{\omega_l}\delta_{l-1} - \frac{\lambda_{l+1}(2+\mu_{l-1}+\lambda_l)}{\omega_l}\delta_l - \frac{\mu_{l+2}}{2+\mu_{l+2}+\lambda_{l+3}}\delta_{l+2} \le 0,$$

$$\delta_i - \frac{\lambda_i}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}\delta_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\delta_{i+1} \le 0, \quad i = l+2,\dots,n-2,$$

$$\delta_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta_{n-2} - \frac{1}{4}\delta_n \le 0,$$

где $\omega_l = (2+\mu_{l-1}+\lambda_l)(2+\mu_l+\lambda_{l+1}) - \mu_l\lambda_l$.

Теорема 3. *Если направление выпуклости данных меняется с выпуклости вниз на выпуклость вверх, т. е. выполнены условия* (3), *то параболический сплайн по Субботину* $s(x)$ *будет ковыпуклым при выполнении следующих условий:*

$$\Delta_0 - \frac{1}{3}\Delta_1 \ge 0,$$

$$\Delta_i - \frac{\mu_i}{3}\Delta_{i-1} - \frac{\lambda_i}{3}\Delta_{i+1} \ge 0, \quad i = 1,\dots,l-3,$$

$$\Delta_{l-2} - \frac{\mu_{l-2}}{3}\Delta_{l-3} - \frac{3\lambda_{l-2}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_l + \frac{\lambda_{l-2}\lambda_{l-1}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_l \ge 0,$$

$$\Delta_{l-1} - \frac{\mu_{l-1}}{3}\Delta_{l-2} \ge 0,$$

$$\Delta_{l+1} + \frac{\mu_l\mu_{l+1}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_{l-1} - \frac{3\mu_{l+1}}{9-\lambda_{l-1}\mu_l}\Delta_l - \frac{\lambda_{l+1}}{3}\Delta_{l+2} \le 0,$$

$$\Delta_l - \frac{\lambda_l}{3}\Delta_{l+1} \le 0,$$

$$\Delta_i - \frac{\mu_i}{3}\Delta_{i-1} - \frac{\lambda_i}{3}\Delta_{i+1} \le 0, \quad i = l+2, \dots, n-1,$$

$$\Delta_n - \frac{1}{3}\Delta_{n-1} \le 0.$$

З а м е ч а н и е. В случае обратной перемены направлений монотонности и выпуклости, т. е. смены знаков в последовательностях разделенных разностей с “$-$” на “$+$” в утверждениях теорем 2 и 3 знаки неравенств меняются на противоположные.

Если в интерполируемых данных отсутствует перемена направлений монотонности, т. е. данные строго монотонны, то в соответствии с [4, теорема 3], параболический сплайн по Субботину будет монотонным при выполнении условий

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta_1 \ge 0,$$

$$\delta_i - \frac{\lambda_i}{2+\mu_{i-1}+\lambda_i}\delta_{i-1} - \frac{\mu_{i+1}}{2+\mu_{i+1}+\lambda_{i+2}}\delta_{i+1} \ge 0, \quad i = 1, \dots, n-2,$$

$$\delta_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta_{n-2} - \frac{1}{4}\delta_n \ge 0.$$

Отметим, что эти условия, как и условия теорем 2 и 3, всего лишь достаточные и не являются необходимыми. Вместе с тем, если $f'(x) > 0$ на $[a, b]$ и есть возможность выбора точек интерполяции, то путем загущения сетки, т. е. введения дополнительных точек интерполяции, всегда можно добиться выполнения этих достаточных условий монотонности. Покажем, что этого можно добиться даже при равномерном распределении данных.

Теорема 4. *Пусть $f \in C^1[a, b]$ и $f'(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда найдется такое значение шага сетки h, что параболический сплайн по Субботину $s(x)$, интерполирующий $f(x)$ на любой равномерной сетке* (1) *с шагом $h_i \le h$, будет возрастающим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку сетка равномерная, то достаточно добиться выполнения условий

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{1}{6}\delta_1 \ge 0, \tag{14}$$

$$\delta_i - \frac{1}{6}\delta_{i-1} - \frac{1}{6}\delta_{i+1} \ge 0, \quad i = 1, \dots, n-2, \tag{15}$$

$$\delta_{n-1} - \frac{1}{6}\delta_{n-2} - \frac{1}{4}\delta_n \ge 0. \tag{16}$$

Пусть $K > 0$ будет число такое, что $f'(x) \ge K$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда имеем

$$\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_{-1} - \frac{1}{6}\delta_1 = f[x_0, x_1] - \frac{1}{4}f'_a - \frac{1}{6}f[x_1, x_2] = \frac{7}{12}f[x_0, x_1] + \frac{1}{4}(f[x_0, x_1] - f'_a) + \frac{1}{6}(f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2])$$

$$\ge \frac{7}{12}K - \frac{1}{4}\omega(f'; h) - \frac{1}{6}\cdot 2\omega(f'; h) = \frac{7}{12}K - \frac{7}{12}\omega(f'; h),$$

где $\omega(f'; h)$ — модуль непрерывности функции $f'(x)$. Поскольку $\omega(f'; h) \to 0$ при $h \to 0$, то начиная с некоторого h неравенство (14) будет выполняться. Подобным образом показывается выполнение неравенств (15) и (16). Теорема доказана.

Отметим, что неравенства (15) для равномерной сетки гарантировано выполняются, если соседние разделенные разности отличаются не более чем в 3 раза.

Достаточные условия теоремы 2 (условия кусочной монотонности) в сравнении с условиями строгой монотонности усложняются. Смена направления монотонности в l-м узле приводит к появлению “нестандартных” неравенств (с номерами $l-2$, $l-1$, l, $l+1$). Следовательно, если расширять утверждение теоремы 2 на случай нескольких перемен направления монотонности данных, то номера компонент, соответствующих смене знаков в последовательности разделенных разностей $\{\delta_i\}$, должны быть достаточно удалены друг от друга, т. е. участки знакопостоянства должны состоять не менее чем из четырех разностей. Среди набора неравенств, формирующих условия кусочной монотонности, для каждой смены направления монотонности будут четыре обозначенных “нестандартных” неравенства.

Но даже для одной перемены направления монотонности мы не можем гарантировать выполнения условий на густой сетке. Условия кусочной монотонности более капризны, наличие точек локального экстремума интерполируемой функции ведет к тому, что разделенные разности, вычисленные по значениям вблизи точки экстремума, могут быть нулевыми или близкими к нулю, что препятствует выполнению условий кусочной монотонности.

Аналогичные рассуждения справедливы и относительно кусочной выпуклости.

Наряду с интерполяционными параболическими сплайнами по Субботину распространены сплайны по Марсдену [15]. В отличие от сплайна по Субботину для сплайна по Марсдену задается сетка узлов сплайна, а условия интерполяции ставятся в узлах вспомогательной сетки между узлами исходной. Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в целом эти два разных сплайна обладают различными аппроксимативными свойствами. Несмотря на принципиальные различия интерполянтов, между сплайнами по Субботину и по Марсдену существует тесная связь, и между аппроксимативными свойствами этих разных конструкций был переброшен своеобразный мостик [16], — матрицы систем определяющих уравнений в одном подходе являются транспонированными от соответствующих матриц в другом. Явный вид линейных систем уравнений относительно коэффициентов разложения по B-сплайнам как первой производной интерполяционного сплайна по Марсдену, так и второй производной приведен в [4, с. 147–148]. Так например, матрицам систем уравнений (6) и (7) для параболического сплайна по Субботину будут соответствовать транспонированные матрицы систем относительно коэффициентов разложения второй и, соответственно, первой производных по B-сплайнам интерполяционного сплайна по Марсдену. Поэтому можно легко установить аналоги теорем 2 и 3 для сплайнов по Марсдену. Скажем, что система неравенств теоремы 3 превращается в достаточные условия кусочной монотонности для интерполяционных сплайнов по Марсдену при замене вторых разделенных разностей от исходных данных на первые.

4. Численные примеры

Для иллюстрации работы условий комонотонности параболического сплайна по Субботину рассмотрим интерполяцию функции $f(x) = 1 - (e^{15|x|} - e^{-15|x|})/(e^{15} - e^{-15})$ на отрезке $[-1, 1]$. При интерполяции значений $f(x)$, заданных на сетке из 11 узлов, сплайн с хорошей точностью восстанавливает $f(x)$ (рис. 1а), однако он не наследует геометрическую форму интерполируемой функции. На графике производной (рис. 1б) можно увидеть нежелательные осцилляции вблизи точки $x = 0$.

Условия комонотонности теоремы 2, гарантирующие наследование формы, нарушаются — выполняются только крайние из неравенств. Сетка достаточно редка для сильно меняющейся функции, соседние разделенные разности отличаются более чем в 10 раз (см. таблицу).

Значения разделенных разностей функции $f(x)$ на сетке из 11 узлов

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
δ_i	3.8	4.8	0.2	0.02	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$-3.1 \cdot 10^{-5}$	$-5.9 \cdot 10^{-4}$	-0.02	-0.2	-4.8	-3.8

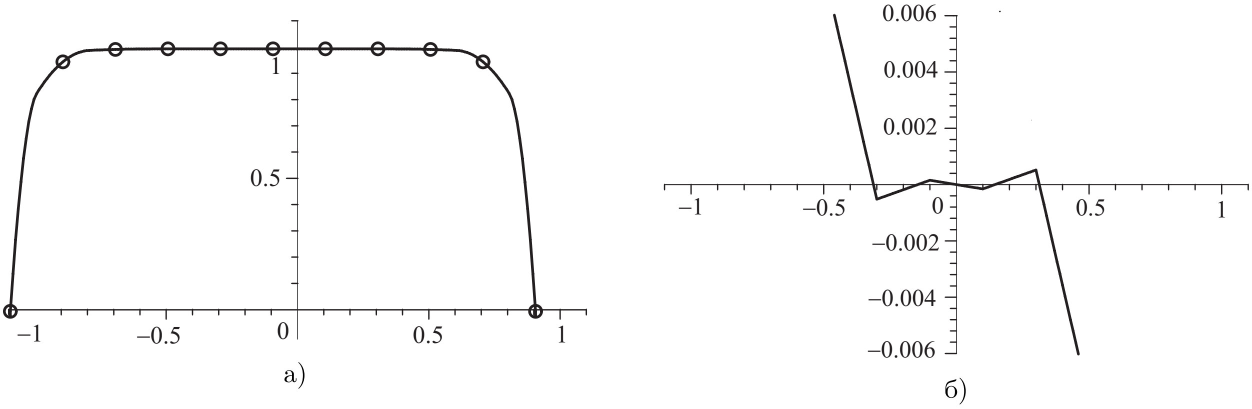


Рис. 1. Интерполяция параболическим сплайном на сетке из 11 узлов, условия теоремы 2 нарушены; а) сплайн; б) производная.

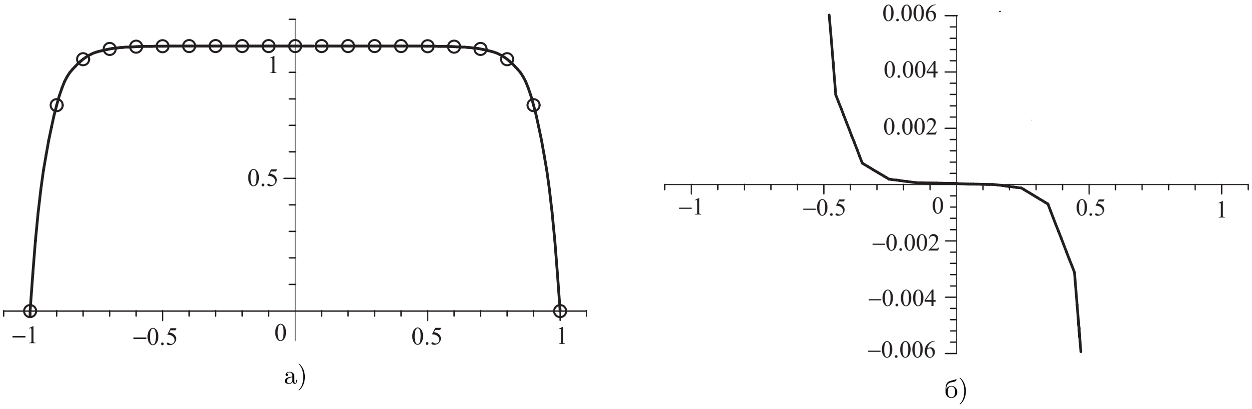


Рис. 2. Интерполяция параболическим сплайном на сетке из 21 узла, условия теоремы 2 выполнены; а) сплайн; б) производная.

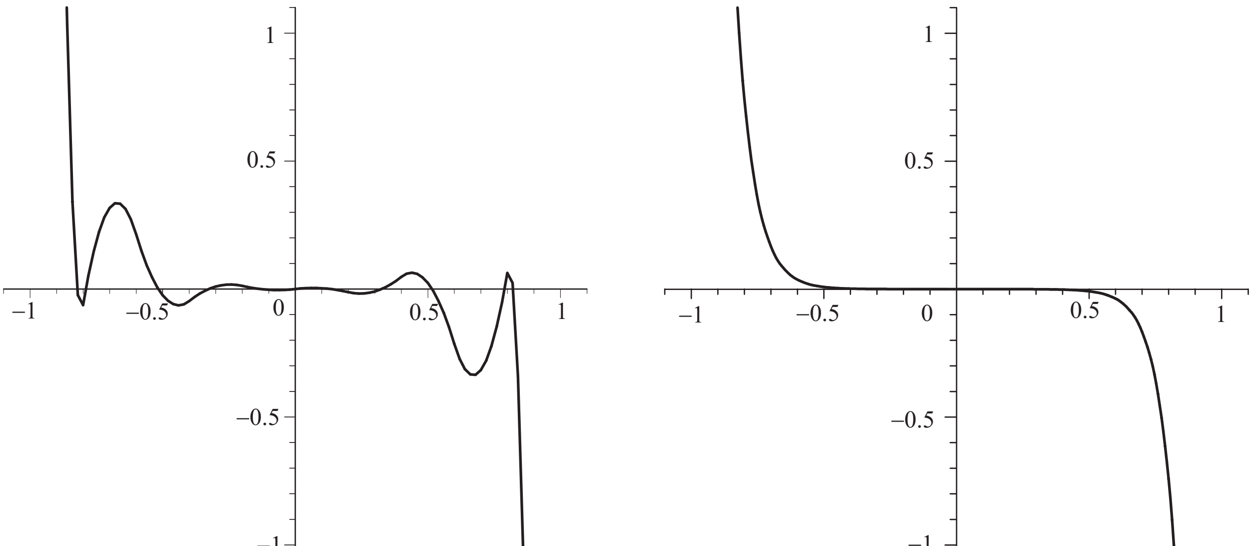


Рис. 3. Интерполяция кубическим сплайном: а) производная сплайна на сетке из 11 узлов, условия нарушены; б) производная сплайна на сетке из 31 узла, условия выполнены.

Проверка условий комонотонности при интерполяции значений на более густой сетке из 21 узла (рис. 2а) показывает, что они уже выполняются (отношение соседних разностей не более 5). Поэтому гарантированно сплайн, интерполирующий функцию $f(x)$ на сетке из 21 узла, является комонотонным, что иллюстрируется графиком его производной (рис. 2б).

Полученные в [6, терема 4] аналогичные условия для классического кубического сплайна (гладкости C^2 с узлами, совпадающими с точками интерполяции) на этих же данных для сетки из 11 узлов также не выполняются. Проверка условий комонотонности показала, что на сетке из 21 узла условия все еще не выполняются. Увеличение количества узлов сетки до 31 узла уже приводит к выполнению условий. На рис. 3а и 3б изображена производная кубического сплайна на сетке из 11 узлов и сетке из 31 узла соответственно.

Отметим, что условия комонотонности для кубического сплайна более жесткие, чем для параболического, труднее добиться их выполнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Miroshnichenko V. L.** Convex and monotone spline interpolation // Constructive Theory of Function: Proc. Int. Conf. (Varna, 1984). Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984. P. 610–620.
2. **Мирошниченко В. Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов // Вычислительные системы: сб. ст. / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1991. Вып. 142: Сплайны и их приложения. С. 3–14.
3. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами / Ю. С. Волков, В. В. Богданов, В. Л. Мирошниченко, В. Т. Шевалдин // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 6. С. 836–844.
4. **Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.** Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
5. **Завьялов Ю. С.** О неотрицательном решении системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1303–1307.
6. **Богданов В. В.** Достаточные условия комонотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C^2 // Мат. тр. 2011. Т. 14, № 2. С. 3–13.
7. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционых кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.
8. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.
9. **Богданов В. В.** Достаточные условия неотрицательности решения системы уравнений с нестрого якобиевой матрицей // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 544–550.
10. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
11. **Волков Ю. С.** О монотонной интерполяции кубическими сплайнами // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 14–24.
12. **Богданов В. В., Волков Ю. С.** Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.
13. **Collatz L.** Funktionalanalysis und Numerische Mathematik. Berlin: Springer-Verlag, 1964. 371 p.
14. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
15. **Marsden M.** Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 5. P. 903–906.
16. **Волков Ю. С.** Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.

Богданов Владимир Васильевич
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: bogdanov@math.nsc.ru

Поступила 15.09.2016

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент, зам. директора
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Miroshnichenko V. L. Convex and monotone spline interpolation. *Constructive Theory of Function, Proc. Int. Conf., Varna, 1984*, Sofia: Publ. House of Bulgarian Acad. Sci., 1984, pp. 610–620.
2. Miroshnichenko V. L. Sufficient conditions for monotonicity and convexity of parabolic spline interpolants. *Siberian Adv. Math.*, 1993, vol. 3, no. 4, pp. 101–107.
3. Volkov Yu. S., Bogdanov V. V., Miroshnichenko V. L., Shevaldin V. T. Shape-preserving interpolation by cubic splines. *Math. Notes.*, 2010, vol. 88, no. 6, pp. 798–805.
4. Volkov Yu. S., Shevaldin V. T. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 145–152 (in Russian).
5. Zav'yalov Yu. S. On a nonnegative solution of a system of equations with a nonstrictly jacobian matrix. *Sib. Math. J.*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 1143–1147.
6. Bogdanov V. V. Sufficient conditions for the comonotone interpolation of cubic C^2 splines. *Sib. Adv. Math.*, 2012, vol. 22, no. 3, pp. 153–160.
7. Volkov Yu. S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 65, no. 1, pp. 13–15.
8. Volkov Yu. S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 215–224.
9. Bogdanov V. V. Sufficient conditions for the nonnegativity of solutions to a system of equations with a nonstrictly jacobian matrix. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 425–430.
10. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splajny v vychislitelnoj matematike* (Splines in numerical mathematics). Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p. (in Russian).
11. Volkov Y.S. On monotone interpolation by cubic splines. *Vychisl. Tekhn.*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 14–24 (in Russian).
12. Bogdanov V.V., Volkov Yu.S. Selection of parameters of generalized cubic splines with convexity preserving interpolation. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 1, pp. 5–22 (in Russian).
13. Collatz L. *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik.* Berlin: Springer-Verlag, 1964, 371 p.
14. Zav'yalov Y.S., Kvasov, B.I., Miroshnichenko, V.L. *Metody splajn-funkcij* (Methods of spline functions). Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p. (in Russian).
15. Marsden M. Quadratic spline interpolation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 80, no. 5, pp. 903–906.
16. Volkov Yu. S.Interpolation by splines of even degree according to Subbotin and Marsden. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 7, pp. 994–1012.

V. V. Bogdanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: e-mail: bogdanov@math.nsc.ru .

Yu. S. Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: volkov@math.nsc.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.65

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ[1]

Ю. С. Волков

Изучается общая задача интерполяции полиномиальными сплайнами, рассматривается их построение через коэффициенты разложения какой-либо производной по B-сплайнам. Анализируются свойства получаемых систем уравнений, оценивается погрешность интерполяции.

Ключевые слова: полиномиальные сплайны, интерполяция, алгоритмы построения.

Yu. S. Volkov. The general problem of polynomial spline interpolation.

We study the general problem of interpolation by polynomial splines and consider the construction of such splines using the coefficients of expansion of a certain derivative in B-splines. We analyze the properties of the obtained systems of equations and estimate the interpolation error.

Keywords: polynomial splines, interpolation, construction algorithms.

MSC: 65D07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-114-125

Введение

Рассматривается общая задача полиномиальной сплайн-интерполяции. Имеем сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ отрезка $[a, b]$, в узлах известны значения некоторой функции. Требуется построить полиномиальный сплайн $s(x)$ степени n наименьшего дефекта 1 (называемый *простым* по терминологии [1]), т. е. гладкости $n-1$, проходящий через заданные значения. В классической задаче полиномиальной сплайн-интерполяции предполагается, что если степень n нечетная, то узлы сплайна $s(x)$ совпадают с заданными точками интерполяции; если n четно, то классическими можно назвать две конструкции (см. [2]): по Субботину — когда узлы сплайна расположены строго посередине между точками интерполяции, и по Марсдену — когда точки интерполяции расположены строго посередине узлов сплайна. Мы же будем рассматривать общую задачу интерполяции, т. е. помимо сетки Δ точек интерполяции задана еще одна сетка δ, сетка узлов сплайна $s(x)$ степени n, интерполирующего заданные значения. Можно допустить и совпадение некоторых узлов сетки Δ, что будет означать задание со значениями функции и производных. Такие кратные узлы часто используются на краях отрезка $[a, b]$ (краевые условия), например, в классических задачах.

Простой сплайн $s(x)$ — решение общей задачи интерполяции — является нелокальным (при $n > 1$), и его построение заключается в нахождении каких-либо параметров, через которые можно выразить сам сплайн и его производные. Задача определения таких параметров сводится к решению системы линейных уравнений. От выбора параметров сплайна зависят свойства получаемых систем уравнений.

Самый простой способ — взять в качестве параметров коэффициенты разложения искомого сплайна $s(x)$ по B-сплайнам степени n с узлами на сетке δ. Однако хорошо известно, что даже для сплайнов невысоких степеней (второй и третьей степени) на сильно неравномерных сетках такие системы уравнений могут быть плохо обусловленными, в то время как можно выбрать такие параметры, что получаемые системы уравнений будут хорошо обусловлены на любых

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-07530).

сетках [3; 4]. Например, для классических кубических интерполяционных сплайнов наиболее предпочтительными параметрами выступают узловые значения первой или второй производной. Попытка выбирать узловые значения производных вычисляемых сплайнов в качестве параметров для сплайнов более высоких степеней не привела к успеху [5].

В работе [6] автор предложил подход к построению классических интерполяционных сплайнов произвольной нечетной степени, состоящий в том, что в качестве определяемых параметров выбираются коэффициенты разложения какой-либо производной сплайна по нормализованным B-сплайнам соответствующей степени. Получение таких систем не составляет особого труда. Интересно отметить, что предложенный подход привел к новому устойчивому способу построения даже кубических сплайнов [7], несмотря на их достаточно детальную изученность. В дальнейшем в [8] были исследованы свойства матриц, получаемых при таком подходе систем уравнений, установлена связь обусловленности этих матриц с вопросами сходимости процессов интерполяции для соответствующих производных [9; 10] и как следствие выделены методы с хорошо обусловленными системами уравнений.

В данной работе этот же подход распространяется на общую задачу полиномиальной сплайн-интерполяции, изучаются свойства матриц получаемых систем уравнений, оценивается погрешность интерполяции.

1. Общая задача сплайн-интерполяции и B-сплайны

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_N = b$ точек интерполяци, т. е. в узлах этой сетки известны значения $f_i = f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$. Требуется построить полиномиальный сплайн $s(x)$ степени n с узлами на, вообще говоря, другой заданной сетке $\delta\colon -\infty < \xi_1 < \ldots < \xi_i < \ldots < \xi_{N-n} < +\infty$ и проходящий через заданные значения на сетке Δ. Для сплайна первой степени ($n = 1$) задача мало содержательна, ввиду локальности сплайна, поэтому будем считать $n > 1$, а также $N > n$.

Известны необходимые и достаточные условия разрешимости общей задачи сплайн-интерполяции в терминах взаимого расположения узлов сеток Δ и δ, установленные еще в 1953 г. Шёнбергом и Уитни.

Теорема A [11, Theorem 2]. *Для того чтобы существовал единственный простой интерполяционный сплайн $s(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям $s(x_i) = f_i,\ i = 0, \ldots, N$, необходимо и достаточно, чтобы $x_{i-1} < \xi_i < x_{i+n},\ i = 1, \ldots, N-n$.*

Таким образом, все узлы интерполяционного сплайна должны лежать в пределах отрезка $[a, b]$. Будем считать, что нас интересует только интерполяция, т. е. сплайн только в пределах отрезка $[a, b]$. Чтобы использовать B-сплайны в задаче интерполяции, нужно расширить сетку узлов сплайна за пределы отрезка $[a, b]$ необходимым количеством дополнительных узлов

$$\ldots \leqslant \xi_{-1} \leqslant \xi_0 \leqslant a, \quad b \leqslant \xi_{N-n+1} \leqslant \xi_{N-n+2} \leqslant \ldots .$$

Тогда сплайн $s(x)$ на отрезке $[a, b]$ может быть представлен в виде разложения по базису из B-сплайнов степени n с узлами на сетке δ.

Напомним, *B-сплайном* степени $r-1$ (порядка r) на сетке δ называется сплайн с носителем из r последовательных интервалов этого разбиения. Ясно, что на каждом носителе такой сплайн определяется однозначно с точностью до нормирующего множителя. Распространены B-сплайны с двумя видами нормировки, определяемые равенствами

$$N_{i,r,\delta}(x) = (\xi_{i+r} - \xi_i)(\cdot - x)_+^{r-1}[\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}], \quad M_{i,r,\delta}(x) = \frac{r}{\xi_{i+r} - \xi_i} N_{i,r,\delta}(x).$$

Здесь $g[\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}]$ означает разделенную разность r-го порядка от функции g по точкам $\xi_i, \ldots, \xi_{i+r}$ разбиения δ.

Если B-сплайны рассматриваются только по одному разбиению, то обычно индекс разбиения (в нашем случае δ) опускается. Поскольку у нас два различных разбиения δ и Δ и в дальнейшем мы будем рассматривать B-слайны и по разбиению Δ, то индекс разбиения мы опускать не будем, хотя в приводимых ниже свойствах используется только разбиение δ.

Отметим ряд свойств, которыми обладают B-сплайны (см., например, [3; 4; 12]). Для рассматриваемых B-сплайнов $N_{i,r,\delta}(x)$ и $M_{i,r,\delta}(x)$ выполняются соотношения

$$\sum_{j=i-r+1}^{i} N_{j,r,\delta}(x) \equiv 1 \quad \text{для } x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \qquad \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+r}} M_{i,r,\delta}(\tau)\, d\tau = 1. \tag{1}$$

Свойства (1) послужили основанием для названий L_∞-*нормализованные* (или просто *нормализованные*) для B-сплайнов $N_{i,r,\delta}(x)$ и, соответственно, L_1-*нормализованные* для $M_{i,r,\delta}(x)$.

Коэффициенты $\alpha_i^{(\nu)}$ разложения ν-й производной сплайна по B-сплайнам

$$\sigma^{(\nu)}(x) = \Big(\sum_i \alpha_i N_{i,r,\delta}(x)\Big)^{(\nu)} = \sum_i \alpha_i^{(\nu)} N_{i,r-\nu,\delta}(x)$$

могут быть выражены через коэффициенты α_i разложения самого сплайна по следующим рекуррентным формулам:

$$\alpha_i^{(p)} = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } p = 0, \\ \dfrac{r-p}{\xi_{i+r-p} - \xi_i}\big(\alpha_i^{(p-1)} - \alpha_{i-1}^{(p-1)}\big) & \text{при } p > 0. \end{cases}$$

Аналогичные соотношения справедливы и для коэффициентов $\beta_i^{(\nu)}$ разложения по ненормализованным B-сплайнам. Справедливо представление производной

$$N'_{i,r+1,\delta}(x) = \frac{r}{\xi_{i+r} - \xi_i} N_{i,r,\delta}(x) - \frac{r}{\xi_{i+r+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,r,\delta}(x) = M_{i,r,\delta}(x) - M_{i+1,r,\delta}(x). \tag{2}$$

Для разделенной разности r-го порядка функции $g(x) \in W_1^r[a,b]$ по значениям аргумента $x = \xi_i, \dots, \xi_{i+r}$ справедливо равенство

$$g[\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{i+r}] = \frac{1}{r!} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+r}} M_{i,r,\delta}(\tau) g^{(r)}(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Если в общей задаче интерполяции использовать представление искомого сплайна $s(x)$ в виде разложения по B-сплайнам

$$s(x) = \sum_{i=-n}^{N-n} \alpha_i N_{i,n+1,\delta}(x) = \sum_{i=-n}^{N-n} \beta_i M_{i,n+1,\delta}(x),$$

то задача состоит в определении коэффициентов разложения $\alpha_{-n}, \dots, \alpha_{N-n}$ или $\beta_{-n}, \dots, \beta_{N-n}$. Условия интерполяции сразу приводят к системам линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d} \tag{4}$$

относительно искомых коэффициентов разложения $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_{-n}, \dots, \alpha_{N-n})^T$ (соответственно $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{-n}, \dots, \beta_{N-n})^T$) с матрицами $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$, элементами которых являются значения соответствующих B-сплайнов в узлах сетки Δ, а именно

$$a_{i,j} = N_{j,n+1,\delta}(x_i), \quad b_{i,j} = M_{j,n+1,\delta}(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad j = -n, \dots, N-n,$$

вектора правых частей имеют вид $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d} = (f_0, \dots, f_N)^T$.

Мы предлагаем в качестве определяемых параметров в задаче интерполяции выбирать коэффициенты разложения какой-либо производной искомого сплайна $s(x)$. Производная порядка k искомого сплайна $s(x)$ также является простым сплайном с узлами на сетке δ, но степени $n-k$. Для k-й производной сплайна представление по базису из B-сплайнов имеет вид

$$s^{(k)}(x)=\sum_{i=-n+k}^{N-n}\alpha_i^{(k)}N_{i,n+1-k,\delta}(x)=\sum_{i=-n+k}^{N-n}\beta_i^{(k)}M_{i,n+1-k,\delta}(x). \tag{5}$$

2. Системы определяющих уравнений

По свойству разделенных разностей (3) и с использованием представления (5) получаем

$$s[x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{1}{k!}\sum_{j=-n+k}^{N-n}\alpha_j^{(k)}\Bigg(\int\limits_{x_i}^{x_{i+k}}M_{i,k,\Delta}(\tau)N_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\,d\tau\Bigg). \tag{6}$$

Ясно, что величины

$$a_{i,j}^k=\int\limits_{x_i}^{x_{i+k}}M_{i,k,\Delta}(\tau)N_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\,d\tau \tag{7}$$

не зависят от интерполируемых значений и полностью определяются рассматриваемыми сетками δ и Δ.

Равенства (6), записанные для разных индексов $i=0,\ldots,N-k$, образуют систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения одной из производных искомого сплайна по L_∞-нормализованным B-сплайнам. В матричной форме эта система имеет вид

$$\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{\alpha}^k=\boldsymbol{c}^k, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{A}_k=\big(a_{i,j}^k\big)$ — матрица с элементами $a_{i,j}^k$, $i=0,\ldots,N-k$; $j=-n+k,\ldots,N-n$, задаваемыми выражениями (7), $\boldsymbol{\alpha}^k=\big(\alpha_{-n+k}^{(k)},\ldots,\alpha_{N-n}^{(k)}\big)^T$ — вектор неизвестных и $\boldsymbol{c}^k=(c_0^k,\ldots,c_{N-k}^k)^T$ — вектор правой части системы с элементами $c_i^k=k!\,f[x_i,\ldots,x_{i+k}]$.

Отметим, что при $k=0$ мы считаем $M_{i,0,\Delta}(x)=\delta_{x_i}$, поэтому $a_{i,j}^0=N_{j,n+1,\delta}(x_i)$, и $\boldsymbol{A}_0$ совпадает с матрицей $\boldsymbol{A}$ системы (4). Напомним, δ_t — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке t. Таким образом, система (8) имеет место для $k=0,\ldots,n$.

Повторяя рассуждения работы [10], получаем и системы уравнений относительно коэффициентов разложения одной из производных сплайна по L_1-нормализованным B-сплайнам

$$\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{\beta}^k=\boldsymbol{d}^k, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\beta}^k=\big(\beta_{-n+k}^{(k)},\ldots,\beta_{N-n}^{(k)}\big)^T$ — вектор неизвестных, $\boldsymbol{B}_k=\big(b_{i,j}^k\big)$ — матрица с элементами

$$b_{i,j}^k=\int\limits_{x_i}^{x_{i+k}}N_{i,k,\Delta}(\tau)M_{j,n+1-k,\delta}(\tau)\,d\tau,\quad i=0,\ldots,N-k,\quad j=-n+k,\ldots,N-n, \tag{10}$$

и $\boldsymbol{d}^k=(d_0^k,\ldots,d_{N-k}^k)^T$ — вектор правой части с элементами

$$d_i^k=(k-1)!\big\{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]\big\},\quad i=0,\ldots,N-k. \tag{11}$$

Как и в случае классических интерполяционных сплайнов [2;10], полученную систему уравнений (9) можно распространить и для значения k, на 1 больше степени сплайна.

Для любой функции $g(x) \in W_1^{r-1}[a,b]$ на основании свойств B-сплайнов (2) и (3) справедливо представление разделенной разности

$$g[x_i, \ldots, x_{i+r}] = -\frac{1}{x_{i+r} - x_i} \int\limits_{x_i}^{x_{i+r}} \frac{1}{(r-1)!} N'_{i,r,\Delta}(\tau) g^{(r-1)}(\tau)\, d\tau\,.$$

Применим эту формулу для сплайна $s(x)$ степени n при $r = n+1$, тогда

$$s[x_i, \ldots, x_{i+n}] - s[x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}] = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_i}^{x_{i+n+1}} N'_{i,n+1,\Delta}(\tau) s^{(n)}(\tau)\, d\tau\,.$$

Поскольку на каждом отрезке $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ сетки δ функция $s^{(n)}(x)$ постоянна, то интеграл в правой части равенства легко может быть выражен через разрывы $\beta_j^{(n+1)} = s^{(n)}(\xi_j + 0) - s^{(n)}(\xi_j - 0)$ старшей производной сплайна

$$\sum_{j=i}^{i+n} N_{i,n+1,\Delta}(\xi_j)\, \beta_j^{(n+1)} = d_i^{n+1}, \tag{12}$$

причем компоненты правой части определены формулами (11) в силу интерполяции.

Полученные равенства представляют собой систему линейных уравнений относительно разрывов старшей производной.

Отметим, что обозначение разрывов n-й производной сплайна тем же символом, что и коэффициентов разложения производной по L_1-нормализованным B-сплайнам $M_{i,r,\delta}(x)$, вполне закономерно, если считать $M_{i,0,\delta}(x) = \delta_{\xi_i}$. В этом случае $b_{i,j}^{n+1} = N_{i,n+1,\Delta}(\xi_j)$, и соотношения (9) при $k = n+1$ совпадут с (12). Поэтому считаем, что система (9) имеет место при $k = 1, \ldots, n+1$.

3. Вычисление и свойства матриц определяющих систем уравнений

Задачу построения интерполяционного сплайна $s(x)$ степени n мы рассматриваем как задачу определения его параметров и в качестве таких параметров берем коэффициенты разложения производной порядка k по B-сплайнам. В предыдущем разделе были выведены системы линейных уравнений для двух случаев, однако структура матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ одинакова — их элементами являются интегралы от произведений B-сплайнов по сеткам δ и Δ (см. (7), (10)).

Практическое вычисление элементов матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ в каждом конкретном случае не вызывает особых проблем. Можно, например, воспользоваться квадратурными формулами Гаусса, которые точны на многочленах. С другой стороны, в работе [13] было указано, что интегралы от произведений B-сплайнов, т. е. элементы матриц $a_{i,j}^k$ или $b_{i,j}^k$, можно вычислять по устойчивым рекуррентным формулам.

Существует связь между величинами $a_{i,j}^k$ и некоторыми разделенными разностями. Пусть

$$T_{i,j}^{r,m} = (-1)^r (s-t)_+^{r+m-1} [x_i, \ldots, x_{i+r}]_t [\xi_j, \ldots, \xi_{j+m}]_s. \tag{13}$$

Здесь индекс t или s после квадратных скобок указывает, по какой из переменных берется разделенная разность. В [13] показано, что имеет место равенство

$$T_{i,j}^{r,m} = \frac{C_{r+m-1}^r}{\xi_{j+m} - \xi_j} \int\limits_{-\infty}^{\infty} M_{i,r,\Delta}(\tau) N_{j,m,\delta}(\tau) d\tau$$

в случае непустых носителей $M_{i,r,\Delta}(x)$ и $N_{j,m,\delta}(x)$, т. е. когда $x_i < x_{i+r}$ и $\xi_j < \xi_{j+m}$ (C^r_{r+m-1} — биномиальные коэффициенты).

Лемма [13, Lemma 4.1]. *Справедливы формулы*

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{x_{i+r}-\xi_j}{\xi_{j+m}-\xi_j}T^{r,m-1}_{i,j} + \frac{\xi_{j+m}-x_{i+r}}{\xi_{j+m}-\xi_j}T^{r,m-1}_{i,j+1} + T^{r-1,m}_{i,j}$$

(*применима, когда* $x_{i+r} \leqslant \xi_{j+m}$ *и* $\xi_j < \xi_{j+m}$),

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{x_i-\xi_j}{\xi_{j+m}-\xi_j}T^{r,m-1}_{i,j} + \frac{\xi_{j+m}-x_i}{\xi_{j+m}-\xi_j}T^{r,m-1}_{i,j+1} + T^{r-1,m}_{i+1,j}$$

(*применима, когда* $\xi_j \leqslant x_i$ *и* $\xi_j < \xi_{j+m}$),

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{\xi_j-x_i}{x_{i+r}-x_i}T^{r-1,m}_{i,j} + \frac{x_{i+r}-\xi_j}{x_{i+r}-x_i}T^{r-1,m}_{i+1,j} + T^{r,m-1}_{i,j+1}$$

(*применима, когда* $x_i \leqslant \xi_j$ *и* $x_i < x_{i+r}$),

$$T^{r,m}_{i,j} = \frac{\xi_{j+m}-x_i}{x_{i+r}-x_i}T^{r-1,m}_{i,j} + \frac{x_{i+r}-\xi_{j+m}}{x_{i+r}-x_i}T^{r-1,m}_{i+1,j} + T^{r,m-1}_{i,j}$$

(*применима, когда* $\xi_{j+m} \leqslant x_{i+r}$ *и* $x_i < x_{i+r}$).

Как подчеркивается в [13], данные рекуррентные соотношения позволяют устойчиво вычислять величины $T^{r,m}_{i,j}$, так как коэффициенты перед величинами T всегда неотрицательны и не превосходят 1. Для полноты следует добавить, что если $x_i = x_{i+r}$ или $\xi_j = \xi_{j+m}$ (но не одновременно), то

$$T^{r,m}_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{C^m_{r+m-1}}{x_{i+r}-x_i}N_{i,r,\Delta}(\xi_j) & \text{при} \quad \xi_j = \xi_{j+m}, \\[2ex] \dfrac{C^m_{r+m-1}}{\xi_{j+m}-\xi_j}N_{j,m,\delta}(x_i) & \text{при} \quad x_i = x_{i+r}, \end{cases}$$

что непосредственно следует из (13).

Таким образом, второй способ вычисления элементов матриц $\boldsymbol{A}_k$ наших систем уравнений (8) и (9) может быть основан на рекуррентных формулах леммы. Кроме того, возможен и третий способ, состоящий в прямом вычислении разделенных разностей в (13).

Конечно, наиболее быстрый способ вычисления — это третий, однако им можно практически пользоваться, только когда разделенные разности не слишком высокого порядка и размещение узлов сетки относительно равномерно. В [13] для случая $k = n = 4$ приводятся результаты численных экспериментов по вычислению величин $T^{4,4}_{i,j}$ для всех трех методов в зависимости от величины отношения соседних шагов сетки. Первые два рассмотренные методы дают погрешность вычисления только в последней цифре при десяти значащих разрядах компьютера, в то время как в третьем способе величина погрешности стремительно растет с увеличением отношения соседних шагов. Хотя первые два способа и проигрывают по времени третьему, но гораздо предпочтительнее по точности. Затраты по времени в первом и втором способах примерно одинаковы.

Перейдем к изучению свойств матриц $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ рассматриваемых систем уравнений (8), (9).

Для векторов $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)^T$ и $N \times N$ матриц $\boldsymbol{G} = (g_{i,j})$ будем рассматривать нормы

$$\|\boldsymbol{\gamma}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |\gamma_i|, \quad \|\boldsymbol{G}\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \sum_{j=1}^{N} |g_{i,j}|.$$

Теорема 1. *Для любого* k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *матрицы* $\boldsymbol{A}_k$ *и* $\boldsymbol{B}_k$ *систем уравнений* (8) *и* (9) *являются ленточными* (*ширина ленты не более* $2n+1$) *с неотрицательными элементами и* $\|\boldsymbol{A}_k\| = \|\boldsymbol{B}^T_k\| = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2]. Отличие будет в ширине ленты. Как и в [2], элементами $a^k_{i,j}$ и $b^k_{i,j}$ матриц являются интегралы от произведений B-сплайнов. Носитель сплайна $M_{i,k,\Delta}(x)$ состоит из $k-1$ интервалов сетки Δ, а носитель $N_{j,n-k+1,\delta}(x)$ — из $n-k$ интервалов сетки δ, поэтому $a^k_{i,j}$ могут быть отличны от 0 лишь при $j=i+k-2n,\dots,i+k$. Следовательно, для любого $1\leqslant k\leqslant n$ матрицы $\boldsymbol{A}_k$ всегда ленточные с ненулевыми $2n+1$ элементами в каждой строке, включая диагональный элемент, значит, общая ширина ленты не более $2n+1$. □

З а м е ч а н и е 1. Матрицы $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_{n+1}$ также удовлетворяют условиям теоремы 1, и $\|\boldsymbol{A}_0\|=\|\boldsymbol{B}^T_{n+1}\|=1$.

Теорема 2. *Для любого k, $1\leqslant k\leqslant n$, матрицы $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ систем уравнений* (8) *и* (9) *вполне неотрицательны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы основано на интегральном тождестве [14, формула (63)] и аналогично доказательству теоремы 1 из [8]. □

З а м е ч а н и е 2. Утверждение теоремы 2 справедливо и для матриц $\boldsymbol{A}_0$ и $\boldsymbol{B}_{n+1}$.

Отметим, что установленное свойство вполне неотрицательности матриц систем уравнений, т. е. все миноры любого порядка неотрицательны — весьма важное свойство для практического построения интерполяционного сплайна $s(x)$. Решение системы уравнений с такой матрицей методом исключения Гаусса не требует выбора главного элемента [15], что позволяет достаточно экономично с вычислительной точки зрения организовать процесс решения.

4. Оценки погрешностей приближения производных

Выше для решения общей задачи интерполяции полиномиальными сплайнами получены системы уравнений относительно коэффициентов B-сплайн-разложения некоторой k-й производной интерполяционного сплайна, которые выступают определяющими параметрами искомого сплайна. Важной характеристикой систем уравнений, особенно при практическом построении сплайна, является величина обусловленности системы или величина нормы обратной матрицы (поскольку в силу теоремы 1 имеет место $\|\boldsymbol{A}_k\|=\|\boldsymbol{B}^T_k\|=1$). Однако помимо информации о величине возможной погрешности при практическом решении этих систем, т. е. об ошибке нахождения параметров интерполяционного сплайна, погрешность метода, в данном случае величина $s^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)$, также может быть оценена в терминах обусловленности (нормы обратной матрицы). Мы установим оценку погрешности $s^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)$ в равномерной норме через модуль непрерывности функции $f^{(k)}(x)$, т. е. при минимальных требованиях к гладкости интерполируемой функции $f(x)$.

Как обычно, для любой функции $g(x)$, заданной на $[a,b]$, полагаем

$$\omega(g;h)=\max_{s,t\in[a,b],\ |s-t|\leqslant h}\bigl|g(s)-g(t)\bigr|,\quad \|g\|_\infty=\operatorname{ess}\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\bigl|g(x)\bigr|.$$

Ясно, что если $g(x)\in C[a,b]$, то $\omega(g;h)\to 0$ при $h\to 0$. Кроме того, обозначим $h_i=x_{i+1}-x_i$, $\bar h=\max\{h_i\ :\ 0\leqslant i\leqslant N-1\}$.

Результаты сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 3. *Для k-й производной погрешности в задаче общей интерполяции полиномиальным сплайном $s(x)$ степени n с узлами на сетке δ функции $f(x)\in C^k[a,b]$, $0\leqslant k\leqslant n$, в узлах сетки Δ справедлива оценка*

$$\bigl\|s^{(k)}-f^{(k)}\bigr\|_\infty\leqslant C\bigl\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\bigr\|\omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr),\tag{14}$$

где $\boldsymbol{A}_k$ — матрица системы (8), *константа C зависит только от k и n, но не от расположения или количества узлов сеток Δ и δ.*

Доказательство. Функция $s^{(k)}(x)$, величину отклонения которой от $f^{(k)}(x)$ требуется оценить, является сплайном степени $n-k$. Рассмотрим еще один сплайн $s_k(x)$ степени $n-k$, задаваемый явно в виде разложения по L_∞-нормализованным B-сплайнам на сетке δ с коэффициентами c_i^k, являющимися компонентами вектора правой части системы (8), т. е.

$$s_k(x) = c_0^k N_{-n+k,n+1-k,\delta}(x) + \ldots + c_N^k N_{N-n,n+1-k,\delta}(x).$$

Требуемую оценку (14) будем получать как сумму оценок отклонений $s^{(k)}(x)$ от $s_k(x)$ и $s_k(x)$ от $f^{(k)}(x)$.

Рассмотрим сперва отклонение $s^{(k)}(x) - s_k(x)$, имеем

$$\bigl|s^{(k)}(x) - s_k(x)\bigr| = \left|\sum_{j=k}^{N} \bigl(\alpha_{j-n}^{(k)} - c_{j-k}^k\bigr) N_{j-n,n+1-k,\delta}(x)\right| \leqslant \bigl\|\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{c}^k\bigr\|. \tag{15}$$

Перепишем систему уравнений (8) в виде

$$\boldsymbol{A}_k\bigl(\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{c}^k\bigr) = \boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k. \tag{16}$$

Поскольку сумма элементов в каждой строке матрицы $\boldsymbol{A}_k$ равна 1, то

$$\bigl\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\bigr\| = \max_{0\leqslant i\leqslant N-k}\left|c_i^k - \sum_{j=k}^{N} c_{j-k}^k a_{i,j-n}^k\right| = \max_{0\leqslant i\leqslant N-k}\left|\sum_{j=k}^{N}\bigl(c_i^k - c_{j-k}^k\bigr)a_{i,j-n}^k\right|.$$

Матрица $\boldsymbol{A}_k$ ленточная с $2n+1$ ненулевыми элементами в строке, поэтому

$$\bigl\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\bigr\| \leqslant \max_{|i-j|\leqslant n}\bigl|c_i^k - c_j^k\bigr| \leqslant \max_{|i-j|\leqslant n}\bigl|k!f[x_i,\ldots,x_{i+k}] - k!f[x_j,\ldots,x_{j+k}]\bigr|.$$

По свойству разделенных разностей

$$k!f[x_i,\ldots,x_{i+k}] = f^{(k)}(\tau_i) \tag{17}$$

для некоторого $\tau_i \in (x_i, x_{i+k})$, следовательно,

$$\bigl|f^{(k)}(\tau_i) - f^{(k)}(\tau_j)\bigr| \leqslant \bigl(|i-j| + k\bigr)\omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr).$$

Поэтому $\bigl\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\bigr\| \leqslant \bigl(n+k\bigr)\omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr)$, и для решения системы (16) справедливы неравенства

$$\bigl\|\boldsymbol{\alpha}^k - \boldsymbol{c}^k\bigr\| \leqslant \bigl\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\bigr\|\cdot\bigl\|\boldsymbol{c}^k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{c}^k\bigr\| \leqslant (n+k)\bigl\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\bigr\|\omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr).$$

Комбинируя последнюю оценку с (15), получаем

$$\bigl|s^{(k)}(x) - s_k(x)\bigr| \leqslant (n+k)\bigl\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\bigr\|\omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr). \tag{18}$$

Теперь найдем отклонение вспомогательного сплайна $s_k(x)$ от $f^{(k)}(x)$. Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, тогда

$$\begin{aligned}\bigl|s_k(x) - f^{(k)}(x)\bigr| &= \left|\sum_{j=i-2n}^{i+1}\bigl[c_{j+n-k}^k - f^{(k)}(x)\bigr]N_{j,n+1-k,\delta}(x)\right| \\ &= \left|\sum_{j=i-2n}^{i+1}\Bigl[k!f[x_{j+n-k},\ldots,x_{j+n}] - f^{(k)}(x)\Bigr]N_{j,n+1-k,\delta}(x)\right| \\ &\leqslant \max_{i-2n\leqslant j\leqslant i+1}\bigl|f^{(k)}(\tau_{j+n-k}) - f^{(k)}(x)\bigr| \;\leqslant\; (n+k)\,\omega\bigl(f^{(k)};\bar h\bigr),\end{aligned} \tag{19}$$

где в соответствии с (17) $\tau_{j+n-k} \in (x_{j+n-k}, x_{j+n})$.

Наконец, итоговая оценка (14) складывается из оценок (18) и (19), т. е.

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant \big\|s^{(k)} - s_k\big\|_\infty + \big\|s_k - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant (n+k)\Big[\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| + 1\Big]\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big).$$

Поскольку

$$\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| + 1 \leqslant \big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| + \big\|\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\| \leqslant 2\big\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\big\|,$$

то приходим к оценке (14) с $C = 2(n+k)$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для k-й производной погрешности в задаче общей интерполяции полиномиальным сплайном $s(x)$ степени n с узлами на сетке δ функции $f(x) \in C^k[a,b]$, $0 \leqslant k \leqslant n$, в узлах сетки Δ справедлива оценка*

$$\big\|s^{(k)} - f^{(k)}\big\|_\infty \leqslant C\big\|(\boldsymbol{B}_{k+1}^T)^{-1}\big\|\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{B}_k$ — матрица системы (9), константа C зависит только от k и n, но не от расположения или количества узлов сеток Δ и δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале рассмотрим случай $k \leqslant n-1$. Поскольку сплайн $s(x)$ интерполирует функцию $f(x) \in C^k[a,b]$ в узлах сетки Δ, то по теореме Ролля не далее, чем на $k+1$ интервалах сетки Δ от произвольной точки x существует точка θ такая, что $s^{(k)}(\theta) = f^{(k)}(\theta)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\big|s^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)\big| &\leqslant \big|s^{(k)}(x) - s^{(k)}(\theta)\big| + \big|f^{(k)}(\theta) - f^{(k)}(x)\big| \\ &\leqslant \Big|\int_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)d\tau\Big| + (k+1)\,\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big).\end{aligned} \tag{21}$$

Разложим сплайн $s^{(k+1)}(x)$ в базисе из L_1-нормализованных B-сплайнов

$$s^{(k+1)}(x) = \beta^{(k+1)}_{-n+k+1}M_{-n+k+1,n-k,\delta}(x) + \ldots + \beta^{(k+1)}_{N-n}M_{N-n,n-k,\delta}(x).$$

Тогда, используя условие нормировки B-сплайнов, получаем

$$\Big|\int_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)d\tau\Big| \leqslant \sum_j \big|\beta_j^{(k+1)}\big|,$$

причем в сумме присутствует не более $2n+1$ слагаемых в силу того, что точки θ и x разнесены не более, чем на $k+1$ интервалов сетки, и на любом интервале сетки Δ в разложении $(k+1)$-й производной по B-сплайнам на сетке δ ненулевых слагаемых не более $2n-k+1$. Указанное обстоятельство позволяет записать неравенство

$$\Big|\int_\theta^x s^{(k+1)}(\tau)\,d\tau\Big| \leqslant (2n+1)\big\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\big\|. \tag{22}$$

Из системы уравнений (9) следует

$$\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\| \leqslant \big\|(\boldsymbol{B}_{k+1}^T)^{-1}\big\| \cdot \|\boldsymbol{d}_{k+1}\|,$$

а для компонент d_i^{k+1} вектора правой части этой системы справедливы оценки

$$\big|d_i^{k+1}\big| = k!\,\big|f[y_{i+1},\ldots,y_{i+k+1}] - f[y_i,\ldots,y_{i+k}]\big| = \big|f^{(k)}(\tau_{i+1}) - f^{(k)}(\tau_i)\big| \leqslant (k+1)\;\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big), \tag{23}$$

где τ_j — некоторые точки из интервалов (x_j, x_{j+k}). В результате имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\beta}^{k+1}\| \leqslant (k+1)\big\|(\boldsymbol{B}_{k+1}^T)^{-1}\big\|\,\omega\big(f^{(k)};\bar{h}\big). \tag{24}$$

Теперь требуемая оценка (20) непосредственно следует из (21), (22) и (24).

Осталось рассмотреть случай $k = n$. Если предыдущие рассуждения опирались на теорему Ролля, то сейчас ее применять уже нельзя, так как функция $s^{(n)}(x)$ является разрывной; однако в этом случае возможно применение расширенной теоремы Ролля.

Так как сплайн $s(x)$ совпадает с функцией $f(x)$ в узлах сетки Δ, то в любых последовательных $n-1$ интервалах сетки существует по меньшей мере одна точка, в которой значения $s^{(n-1)}(x)$ и $f^{(n-1)}(x)$ совпадают. Следовательно, производная порядка $n-1$ от функции погрешности $e(x) = s(x) - f(x)$, являющаяся абсолютно непрерывной, в любых последовательных n интервалах сетки по меньшей мере дважды обращается в нуль. Тогда по расширенной теореме Ролля (см., например, [16, p. 29]) не далее, чем на $n+1$ интервалах сетки от любой точки $x \in [a, b]$ найдется точка $\theta \in [a, b]$, в которой либо $e^{(n)}(\theta) = 0$, либо $e^{(n)}(\theta - 0)$ и $e^{(n)}(\theta + 0)$ имеют разные знаки.

Тогда в силу непрерывности $f^{(n)}(x)$ имеем

$$\big|s^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\big| \leqslant \big|s^{(n)}(x) - s^{(n)}(\theta \pm 0)\big| + \big|s^{(n)}(\theta \pm 0) - f^{(n)}(\theta)\big| + \big|f^{(n)}(\theta) - f^{(n)}(x)\big|.$$

Причем, если $e^{(n)}(\theta) = 0$, то среднее слагаемое в правой части равно 0, в противном случае точка θ совпадает с каким-либо узлом сплайна (в других точках $s^{(n)}(x)$ разрывов не имеет), скажем, $\theta = \xi_j$, и условие различия знаков $e^{(n)}(\theta - 0)$ и $e^{(n)}(\theta + 0)$ позволяет утверждать, что

$$\big|s^{(n)}(\theta \pm 0) - f^{(n)}(\theta)\big| \leqslant \big|\beta_j^{(n+1)}\big| \leqslant \|\boldsymbol{\beta}^{n+1}\|.$$

Следовательно,

$$\big|s^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\big| \leqslant (n+2)\big\|\boldsymbol{\beta}^{n+1}\big\| + (n+1)\,\omega\big(f^{(n)};\bar{h}\big).$$

Оценивая норму вектора $\boldsymbol{\beta}^{n+1}$ из системы уравнений (9) при $k = n+1$, с учетом (23) получаем (20) и для $k = n$.

Теорема полностью доказана.

В монографии [3] С. Б. Стечкиным и Ю. Н. Субботиным выписана система уравнений относительно значений производной сплайна второй степени в узлах интерполяции. Матрица имеет диагональное преобладание, и норма обратной матрицы может быть оценена константой (см. теорему 1). Однако, хотя там и рассмотрены две разные сетки, случай не совсем общий — узлы сеток перемежаются. Всевозможные системы уравнений для сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену получены в [17].

Наличие диагонального преобладания позволяет легко установить оценки нормы обратной матрицы и оценить погрешность интерполяции. Однако уже в классической задаче интерполяции для сплайнов степени выше третьей диагональное преобладание в системах уравнений отсутствует. Некоторой альтернативой диагональному преобладанию может выступать свойство вполне неотрицательности. В работе [18] предложен метод оценивания нормы обратной вполне неотрицательной матрицы. Этому посвящена и работа [19].

В частном случае классической задачи интерполяции для сплайнов нечетной степени (сетки Δ и δ совпадают) известно [20], что для всех производных k (кроме двух средних) нормы обратных матриц нельзя ограничить константой, не зависящей от сетки, что означает возможную расходимость процесса интерполяции для соответствующих производных. Обзор результатов сходимости приведен в работе [21].

Представляет интерес вопрос: можно ли за счет выбора сеток узлов сплайнов δ улучшить аппроксимационные свойства интерполяции, например, получить сходимость процесса интерполяции для каких-либо производных кроме двух средних?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.** The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967. 284 p.
2. **Волков Ю. С.** Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.
3. **Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. **Волков Ю. С.** Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычисл. системы. Вып. 106: Приближение сплайнами / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1984. С. 41–56.
6. **Волков Ю. С.** О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычисл. системы. Вып. 159: Сплайн-функции и их приложения / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1997. С. 3–18.
7. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционых кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.
8. **Волков Ю. С.** Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечетной степени // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34.
9. **Волков Ю. С.** Безусловная сходимость еще одной средней производной для интерполяционных сплайнов нечетной степени // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 5. С. 592–594.
10. **Волков Ю. С.** О сходимости процесса интерполяции для производных полного сплайна // Укр. мат. вісн. 2012. Т. 9, № 2. С. 278–296.
11. **Schoenberg I. J., Whitney A.** On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 74, no. 2. P. 246–259.
12. **Boor C. de.** A practical guide to splines. New York: Springer, 1978. 392 p.
13. **Boor C. de, Lyche T., Schumaker L. L.** On calculating with B-splines, II. Integration // Numerische Methoden der Approximationstheorie. Band 3 / eds. L. Collatz, H. Werner, G. Meinardus. (Tagung, Math. Forschungsinst, Oberwolfach, 1975). Basel: Birkhäuser, 1976. P. 123–146. (Internat. Ser. Numer. Math.; vol. 30).
14. **Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.** Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 359 с.
15. **Boor C. de, Pinkus A.** Backward error analysis for totally positive linear systems // Numer. Math. 1977. Vol. 27, no. 4. P. 485–490.
16. **Schumaker L. L.** Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981. 553 p.
17. **Волков Ю. С., Шевалдин В. Т.** Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 145–152.
18. **Boor C. de** On the convergence of odd-degree spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1968. Vol. 1, no. 4. P. 452–463.
19. **Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.** Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.
20. **Boor C. de** On bounding spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1975. Vol. 14, no. 3. P. 191–203.
21. **Волков Ю. С., Субботин Ю. Н.** 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зам. директора
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Поступила 14.06.2016

REFERENCES

1. Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L. *The theory of splines and their applications.* New York: Academic Press, 1967, 284 p.
2. Volkov Yu. S. Interpolation by splines of even degree according to Subbotin and Marsden. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 7, pp. 994–1012.
3. Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. *Splajny v vychislitelnoj matematike* (Splines in computational mathematics). Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p. (in Russian).
4. Zavialov Yu. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metody splajn funkcij* (Methods of spline-functions). Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p. (in Russian).
5. Volkov Yu. S. Divergence of interpolating splines of odd degree. *Vychisl. Sistemy. Vol.* 106 : *Approximation by spline*, Novosibirsk, 1984, pp. 41–56 (in Russian).
6. Volkov Yu. S. On the construction of the interpolation polynomial splines. *Vychisl. Sistemy. Vol.* 159 : *Spline functions and their applications*, Novosibirsk, 1997, pp. 3–18 (in Russian).
7. Volkov Yu. S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Dokl. Math.*, 2002, vol. 65, no. 1, pp. 13–15.
8. Volkov Yu. S. Totally positive matrices in the methods of constructing interpolation splines of odd degree. *Siberian Adv. Math.*, 2005, vol. 15, no. 4, pp. 96–125.
9. Volkov Yu. S. Unconditional convergence of one more middle derivative for odd degree spline interpolation. *Dokl. Math.*, 2005, vol. 71, no. 2, pp. 250–252.
10. Volkov Yu. S. Convergence analysis of an interpolation process for the derivatives of a complete spline. *J. Math. Sci.*, 2012, vol. 187, no. 1, pp. 101–114.
11. Schoenberg I. J., Whitney A. On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1953, vol. 74, no. 2, pp. 246–259.
12. Boor C. de. *A practical guide to splines.* New York: Springer, 1978, 392 p.
13. Boor C. de, Lyche T., Schumaker L. L. On calculating with B-splines, II. Integration. *Numerische Methoden der Approximationstheorie*, Band 3, Eds. L. Collatz, H. Werner, G. Meinardus, Basel: Birkhäuser, 1976, Internat. Ser. Numer. Math., vol. 30, pp. 123–146.
14. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Gantmacher F. R., Krein M. G. *Oscillyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskih sistem* (Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems). Providence: Amer. Math. Soc., 2002, 310 p.
15. Boor C. de, Pinkus A. Backward error analysis for totally positive linear systems. *Numer. Math.*, 1977, vol. 27, no. 4, pp. 485–490.
16. Schumaker L. L. *Spline functions: basic theory.* New York: Wiley, 1981, 553 p.
17. Volkov Yu. S., V. Shevaldin T. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 145–152 (in Russian).
18. Boor C. de. On the convergence of odd-degree spline interpolation. *J. Approxim. Theory*, 1968, vol. 1, no. 4, pp. 452–463.
19. Volkov Yu. S., Miroshnichenko V. L. Norm estimates for the inverses of matrices of monotone type and totally positive matrices. *Siberian Math. J.*, 2009. Vol. 50, no. 6, pp. 982–987.
20. Boor C. de. On bounding spline interpolation. *J. Approxim. Theory*, 1975, vol. 14, no. 3, pp. 191–203.
21. Volkov Yu. S., Subbotin Yu. N. Fifty years of Schoenberg's problem on the convergence of spline interpolation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, suppl. 1, pp. S222–S237.

Yu. S. Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: volkov@math.nsc.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА БОМАНА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЯКОБИ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Приводится решение экстремальной задачи Бомана для неотрицательных четных целых функций экспоненциального типа, являющихся преобразованиями Якоби функций с компактным носителем. Доказывается единственность экстремальной функции. Используется квадратурная формула Гаусса на полупрямой по нулям функции Якоби.

Гиперболический вес, функция Якоби, преобразование Якоби, экстремальная задача Бомана, квадратурная формула Гаусса.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. Bohman extremal problem for the Jacobi transform.

We give a solution to the Bohman extremal problem for nonnegative even entire functions of exponential type that are Jacobi transforms of compactly supported functions. We prove that the extremal function is unique. The Gauss quadrature formula on the half-line over zeros of the Jacobi function is used.

Keywords: hyperbolic weight, Jacobi function, Jacobi transform, Bohman extremal problem, Gauss quadrature formulae.

MSC: 33C45, 42A05, 41A55

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-126-135

Введение

Работа посвящена решению экстремальной задачи Бомана для преобразования Якоби на полупрямой (теоремы 4, 5). Ранее задача Бомана изучалась для преобразований Фурье, Ганкеля [1; 2] и Данкля [3]. Кратко напомним историю вопроса.

Для преобразования Фурье экстремальная задача Бомана в случае евклидова шара состоит в вычислении величины

$$\Lambda_B(B_\tau) = \inf\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,dx\colon\, f\in\mathcal{E}(B_\tau)\right\}. \tag{0.1}$$

Здесь $d\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x,y)=x_1y_1+\ldots+x_dy_d$ и нормой $|x|=\sqrt{(x,x)}$; B_τ — замкнутый евклидов шар радиуса $\tau>0$ и с центром в нуле; $\mathcal{E}(B_\tau)$ — класс неотрицательных непрерывных функций f, для которых

$$|x|^2 f\in L^1(\mathbb{R}^d),\quad \operatorname{supp}\mathcal{F}f\subset B_\tau,\quad \mathcal{F}f(0)=1,$$

где $L^1(\mathbb{R}^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой $\|f\|_1=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,dx$;

$$\mathcal{F}f(y)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x,y)}\,dx$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00308), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К).

— преобразование Фурье; $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f. По хорошо известной многомерной теореме Пэли — Винера функции из $\mathcal{E}(B_\tau)$ являются сужениями на $\mathbb{R}^d$ целых функций экспоненциального сферического типа не выше τ.

Задача Бомана допускает вероятностную интерпретацию. В этом случае величина

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,dx = -\Delta\mathcal{F}f(0),$$

где Δ — оператор Лапласа, является вторым моментом случайной величины с плотностью распределения f.

В евклидовом случае $\Lambda_B(B_\tau) = \tau^{-2}\Lambda_B(B_1)$, поэтому можно считать, что $\tau = 1$. В одномерном случае задачу (0.1) поставил и решил Х. Боман [4]. Он доказал, что $\Lambda_B([-1,1]) = -(\mathcal{F}f_1)''(0) = \pi^2$, где

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi^3}\Big(\frac{\cos(x/2)}{1-(x/\pi)^2}\Big)^2, \quad \mathcal{F}f_1(y) = \begin{cases}(1-|y|)\cos\pi y + \pi^{-1}\sin\pi|y|, & |y|\le 1,\\ 0, & |y|\ge 1.\end{cases}$$

Пусть $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\alpha(t)$ — функция Бесселя порядка $\alpha \ge -1/2$, q_α — ее первый (наименьший) положительный нуль, $j_\alpha(t) = (2/t)^\alpha\Gamma(\alpha+1)J_\alpha(t)$ — нормированная функция Бесселя. В многомерном случае В. Эм, Т. Гнейтинг и Д. Ричардс [5], доказали, что $\Lambda_B(B_1) = -\Delta\mathcal{F}f_d(0) = 4q_{d/2-1}^2$, где экстремальной является функция

$$f_d(x) = \frac{2^{2-2d}}{\pi^{d/2}\Gamma(d/2)q_{d/2-1}^2}\left(\frac{j_{d/2-1}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{d/2-1}))^2}\right)^2.$$

Задача Бомана для функций с носителем преобразования Данкля в евклидовом шаре или параллелепипеде рассмотрена в [3]. В сферическом случае соответствующая величина $\Lambda_B(B_1)$ достигается на радиальных функциях.

На радиальных функциях преобразование Данкля сводится к преобразованию Ганкеля, действующему в пространствах на полупрямой со степенным весом. Поэтому для решения задачи Бомана для преобразований Фурье и Данкля было важно изучить ее для преобразования Ганкеля. Для нас также важно, что этот случай будет модельным для преобразования Якоби на полупрямой.

Задача Бомана для преобразования Ганкеля состоит в вычислении величины

$$\Lambda_B^\alpha(\tau) = \inf\left\{\int\limits_0^\infty t^2 f(t)\,d\nu_\alpha(t)\colon f\in\mathcal{E}_\alpha(\tau)\right\}.$$

Здесь $\alpha \ge -1/2$, $d\nu_\alpha(r) = b_\lambda r^{2\alpha+1}\,dr$, $b_\alpha^{-1} = 2^\alpha\Gamma(\alpha+1)$, $\mathcal{E}_\alpha(\tau)$ — класс четных неотрицательных непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций f, для которых

$$t^2 f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha), \quad \operatorname{supp}\mathcal{H}_\alpha(f)\subset[0,\tau], \quad \mathcal{H}_\alpha(f)(0) = 1,$$

где $L^1(\mathbb{R}_+, d\nu_\alpha)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой $\|f\|_{1,\alpha} = \int_0^\infty |f(t)|\,d\nu_\alpha(t)$;

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(s) = \int\limits_0^\infty f(t)j_\alpha(st)\,d\nu_\alpha(t)$$

— преобразование Ганкеля. Для четных функций на оси преобразования Ганкеля и Данкля совпадают. Поэтому по теореме Пэли — Винера для преобразования Данкля [6, Sect. 4] функции из $\mathcal{E}_\alpha(\tau)$ являются сужениями на $\mathbb{R}$ четных целых функций экспоненциального типа не выше τ.

В [1] доказано, что

$$\Lambda_B^\alpha(\tau) = -D_\alpha \mathcal{H}_\alpha(f_\alpha)(0) = \Big(\frac{2q_\alpha}{\tau}\Big)^2,$$

где $D_\alpha = \dfrac{1}{t^{2\alpha+1}}\dfrac{d}{dt}\Big(t^{2\alpha+1}\dfrac{d}{dt}\Big)$ — дифференциальный оператор Бесселя. Единственная экстремальная функция имеет вид

$$f_{\alpha,\tau}(t) = \frac{2^{-4\alpha-2}\tau^{2\alpha+2}}{\pi^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)q_\alpha^2}\Big(\frac{j_\alpha(\tau t/2)}{1-(\tau t/(2q_\alpha))^2}\Big)^2.$$

В данной работе решается экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби [7], ядро которого является собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля с весовой функцией

$$w(t) = \Delta(t) = 2^{2\rho}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

с параметрами

$$\alpha \ge \beta \ge -1/2, \quad \alpha > -1/2, \quad \rho = \alpha+\beta+1. \tag{0.2}$$

Заметим, что в случае $\alpha = \beta = -1/2$ имеем $\Delta(t) = 1$ и преобразование Якоби сводится к косинус-преобразованию Фурье.

1. Элементы гармонического анализа Якоби

При изложении элементов гармонического анализа Якоби будем следовать общепризнанным обозначениям (см., например, работу [7]). Пусть $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, α, β, ρ — параметры (0.2), $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(t) = F\Big(\frac{\rho+i\lambda}{2}, \frac{\rho-i\lambda}{2}; \alpha+1; -(\operatorname{sh} t)^2\Big)$$

— функция Якоби [7, Subsect. 2.1], E^τ — класс четных целых функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа не выше $\tau > 0$, удовлетворяющих оценке $|g(\lambda)| \le c_g\, e^{\tau|\operatorname{Im}\lambda|}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Функция Якоби является собственной функцией задачи Штурма — Лиувилля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi_\lambda(t)\Big) + \big(\lambda^2+\rho^2\big)\Delta(t)\varphi_\lambda(t) = 0, \tag{1.1}$$

$$\varphi_\lambda(0) = 1, \quad \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial t}\,(0) = 0.$$

Функция Якоби четная аналитическая на $\mathbb{R}$ по t и из класса $E^{|t|}$ по λ. Для нее также

$$|\varphi_\lambda(t)| \le 1, \quad \varphi_0(t) > 0, \quad \lambda, t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Для $t > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_0(t)\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_k^2(t)}\Big),$$

где $0 < \lambda_1(t) < \dots < \lambda_k(t) < \dots$ — положительные нули $\varphi_\lambda(t)$ по λ. Это разложение следует из общих свойств собственных функций задачи Штурма — Лиувилля (см., например, [8, гл. V, § 6]). При этом $\lambda_k(t) = t_k^{-1}(t)$, где $t_k(\lambda)$ — положительные нули функции $\varphi_\lambda(t)$ по $t > 0$. Нули $t_k(\lambda)$ непрерывны и монотонно убывают при $\lambda > 0$ [8, гл. I, § 3]. Соответствующим образом ведут себя и нули $\lambda_k(t)$.

Пусть $1 \le p < \infty$, $d\mu(t) = \Delta(t)\,dt$, $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\mu} = \Big(\int_0^\infty |f(t)|^p\,d\mu(t)\Big)^{1/p} < \infty,$$

$L^p(\mathbb{R}_+, d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+$ с конечной нормой

$$\|f\|_{p,d\sigma} = \left(\int_0^\infty |f(\lambda)|^p \, d\sigma(\lambda)\right)^{1/p} < \infty,$$

где

$$d\sigma(\lambda) = s(\lambda)\, d\lambda, \quad s(\lambda) = (2\pi)^{-1}\left|\frac{2^{\rho-i\lambda}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(i\lambda)}{\Gamma((\rho+i\lambda)/2)\Gamma((\rho+i\lambda)/2-\beta)}\right|^{-2},$$

$C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Функции на $\mathbb{R}_+$ будем рассматривать и на $\mathbb{R}$, продолжая их по четности.

Пространство $L_2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g)_\mu = \int_0^\infty f(t)\overline{g(t)}\, d\mu(t).$$

Гармонический анализ в $L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Якоби [7, Subsect. 2.2] $\mathcal{J}f(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\varphi_\lambda(t)\, d\mu(t)$, $\mathcal{J}^{-1}g(t) = \int_0^\infty g(\lambda)\varphi_\lambda(t)\, d\sigma(\lambda)$. В частности, если $f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то $\mathcal{J}f \in L^2(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, $\mathcal{J}^{-1}(g) \in L^2(\mathbb{R}_+, d\mu)$ и $f(t) = \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{J}f)(t)$, $g(\lambda) = \mathcal{J}(\mathcal{J}^{-1}g)(\lambda)$ в среднеквадратичном смысле. При этом справедливы равенства Парсеваля

$$\int_0^\infty |f(t)|^2\, d\mu(t) = \int_0^\infty |\mathcal{J}f(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda), \quad \int_0^\infty |g(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \int_0^\infty |\mathcal{J}^{-1}g(t)|^2\, d\mu(t).$$

Отметим следующие свойства интегрируемости прямого и обратного преобразований Якоби. Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то $\mathcal{J}f \in C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{J}^{-1}g \in C_b(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|\mathcal{J}f\|_\infty \le \|f\|_{1,d\mu}, \quad \|\mathcal{J}^{-1}g\|_\infty \le \|g\|_{1,d\sigma}.$$

Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{J}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$, то для $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t) = \int_0^\infty \mathcal{J}f(\lambda)\varphi_\lambda(t)\, d\sigma(\lambda).$$

Если $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, $\mathcal{J}^{-1}g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, то для $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$$g(\lambda) = \int_0^\infty \mathcal{J}^{-1}g(t)\varphi_\lambda(t)\, d\mu(t).$$

Пусть $\tau > 0$, B_1^τ — класс четных целых функций из E^τ, сужения которых на $\mathbb{R}_+$ принадлежат $L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Для функций из класса B_1^τ справедлива следующая теорема Пэли — Винера.

Теорема 1 [9, Theorems 3.4, 4.2]. *Функция $f \in B_1^\tau$ тогда и только тогда, когда*

$$f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{J}^{-1}f \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu), \quad \operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1}f \subset [0, \tau],$$

при этом $f(\lambda) = \int_0^\tau \mathcal{J}^{-1}f(t)\varphi_\lambda(t)\, d\mu(t)$.

Заметим, что в [9] доказана биекция между классами быстро убывающих функций $H \subset B_1(\tau)$ и бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty \subset L^1([0,\tau],d\mu)$ с компактным носителем. Однако классы H и C_0^∞ в силу приведенных выше свойств интегрируемости преобразований Якоби плотны в соответствующих пространствах. Условие на размер носителя вытекает из того, что функция $\lambda \mapsto \varphi(t,\lambda)$ имеет тип $|t|$.

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики функции Якоби и сингулярной меры, а также квадратурная формула Гаусса на полупрямой для целых функций экспоненциального типа по нулям функции Якоби [10, § 5]. Имеем

$$\varphi_\lambda(t) = \frac{(2/\pi)^{1/2}}{\big(\Delta(t)s(\lambda)\big)^{1/2}}\Big\{\cos\Big(\lambda t - \frac{\pi(\alpha+1/2)}{2}\Big) + e^{t|\operatorname{Im}\lambda|}O\big(|\lambda|^{-1}\big)\Big\}, \quad |\lambda|\to\infty, \quad t>0, \tag{1.3}$$

$$s(\lambda) = \big(2^{\rho+\alpha}\Gamma(\alpha+1)\big)^{-2}\lambda^{2\alpha+1}\left(1+O(\lambda^{-1})\right), \quad \lambda\to+\infty. \tag{1.4}$$

Из (1.2)–(1.4) вытекает, что для фиксированного $t>0$ и $\lambda\in\mathbb{R}$

$$|\varphi_\lambda(t)| = O\Big(\frac{1}{(|\lambda|+1)^{\alpha+1/2}}\Big). \tag{1.5}$$

Теорема 2 [10, теоремы 3.1, 5.1]. *Для произвольной функции $f\in B_1^\tau$ справедлива квадратурная формула Гаусса с положительными весами*

$$\int\limits_0^\infty f(\lambda)\,d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)f(\lambda_k(\tau/2)). \tag{1.6}$$

Ряд в (1.6) *сходится абсолютно. При этом для любого $\varepsilon>0$ существуют функции из $B_1^{\tau+\varepsilon}$, для которых квадратурная формула Гаусса неверна.*

Явные выражения для весов в квадратурной формуле (1.6) выписаны в [10, § 3]. Приведем формулу для первого коэффициента:

$$\gamma_1 = \int\limits_0^\infty \left(\frac{2\lambda_1\varphi_\lambda(\tau/2)}{\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial\lambda}(\tau/2)(\lambda^2-\lambda_1^2)}\right)^2 d\sigma(\lambda) = \frac{2\lambda_1}{\Delta(\tau/2)\,\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(\tau/2)\,\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial\lambda}(\tau/2)}, \tag{1.7}$$

где $\gamma_1=\gamma_1(\tau/2)$, $\lambda_1=\lambda_1(\tau/2)$.

Для построения экстремальной функции в задаче Бомана нам потребуются оператор обобщенного сдвига для преобразования Якоби и определяемая им свертка.

В силу (1.2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+,d\mu)$ оператор обобщенного сдвига определяется равенством

$$T^tf(x) = \int\limits_0^\infty \varphi_\lambda(t)\mathcal{J}f(\lambda)\varphi_\lambda(x)\,d\sigma(\lambda), \quad t,x\in\mathbb{R}_+.$$

Для него справедливо интегральное представление

$$T^tf(x) = \int\limits_0^\infty f(y)\,d\nu_{t,x}(y), \tag{1.8}$$

где $\nu_{t,x}$ — вероятностная, абсолютно непрерывная мера с носителем $\operatorname{supp}\nu_{t,x}\subset[|x-t|,x+t]$, симметричная относительно t, x. Представление (1.8) и явное выражение для меры вытекают из формулы умножения для функций Якоби $\varphi_\lambda(t)\varphi_\lambda(x) = \int_{|t-x|}^{t+x} K(t,x,y)\varphi_\lambda(y)\,d\mu(y)$ с положительным ядром K. Выражение K через гипергеометрическую функцию и основные свойства см. в [11, Sect. 4].

Представление (1.8) позволяет распространить оператор обобщенного сдвига на пространства $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \le p \le \infty$, причем для любого $t \in \mathbb{R}_+$ норма $\|T^t\|_{p\to p} = 1$ [11, Lemma 5.2].

Для оператора обобщенного сдвига справедливы свойства:

(1) если $f(x) \ge 0$, то $T^t f(x) \ge 0$; функция $T^t f(x)$ четная по t, x;

(2) $T^t\varphi_\lambda(x) = \varphi_\lambda(t)\varphi_\lambda(x)$, $\mathcal{J}(T^t f)(\lambda) = \varphi_\lambda(t)\mathcal{J}f(\lambda)$; $T^t f(x) = T^x f(t)$, $T^t 1 = 1$;

(3) если $\operatorname{supp} f \subset [0, a]$, $t \in [0, \delta]$, то $\operatorname{supp} T^t f \subset [0, a+\delta]$;

(4) если $f \in L^1(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$, то $\displaystyle\int_0^\infty T^t f(x)\, d\mu(x) = \int_0^\infty f(x)\, d\mu(x)$.

Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку [11]

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty T^t f(x) g(t)\, d\mu(t).$$

Ее свойства описываются в следующей теореме.

Теорема 3 [11, Sect. 5]. (1) *Если* $1 \le p, q < \infty$, $1/p + 1/q \ge 1$, $1/r = 1/p + 1/q - 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $g \in L^q(\mathbb{R}_+, d\mu)$, *то* $f * g \in L^r(\mathbb{R}_+, d\mu)$ *и* $\|f * g\|_{r,d\mu} \le \|f\|_{p,d\mu}\|g\|_{q,d\mu}$.

(2) *Если* $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $1 \le p \le 2$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\mu)$, *то* $\mathcal{J}(f * g) = \mathcal{J}f\,\mathcal{J}g$.

(3) *Если* $\operatorname{supp} f \subset [0, \delta]$, $\operatorname{supp} g \subset [0, \tau]$, *то* $\operatorname{supp} f * g \subset [0, \delta + \tau]$.

2. Задача Бомана

З а д а ч а Бомана. Вычислить величину

$$\Lambda_B(\tau) = \inf \int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda), \tag{2.1}$$

если

$$\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma), \quad g \in C(\mathbb{R}_+), \quad g \ge 0,$$

$$\operatorname{supp} \mathcal{J}^{-1} g \subset [0, \tau], \quad \int_0^\infty g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \mathcal{J}^{-1} g(0) = 1.$$

Заметим, что в постановке задачи можно не требовать априори условие $\lambda^2 g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Если оно неверно, то $\int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = +\infty$ и мы можем отбросить такие g при поиске нижней грани в (2.1).

Так как в силу неотрицательности допустимая в задаче Бомана функция $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}_+)$, то по теореме 1 имеем $g \in B_1^\tau$. Пусть

$$D_{\alpha,\beta} u(t) = -\frac{1}{\Delta(t)} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta(t) \frac{\partial}{\partial t} u(t)\Big)$$

— дифференциальный оператор Якоби. Согласно (1.1)

$$D_{\alpha,\beta}\varphi_\lambda(t) = (\lambda^2 + \rho^2)\varphi_\lambda(t),$$

поэтому функционал в (2.1) может быть записан так:

$$\int_0^\infty (\lambda^2 + \rho^2) g(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = D_{\alpha,\beta}\mathcal{J}^{-1} g(0).$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_1=\lambda_1(\tau/2)$, $\gamma_1=\gamma_1(\tau/2)$, $\tau>0$. *Тогда в задаче Бомана*

$$\Lambda_B(\tau)=\lambda_1^2+\rho^2, \tag{2.2}$$

экстремальная функция имеет вид

$$g_\tau(\lambda)=\frac{1}{c(\tau)}\biggl(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\biggr)^2, \tag{2.3}$$

где

$$c(\tau)=\gamma_1\lim_{\lambda\to\lambda_1}\biggl(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\biggr)^2=\frac{\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial\lambda}(\tau/2)}{2\lambda_1\Delta(\tau/2)\,\dfrac{\partial\varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(\tau/2)}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала получим оценку снизу. Для этого воспользуемся теоремой 2. Так как для допустимой функции g, $\lambda^2 g\in B_1^\tau$, то, применяя квадратурную формулу Гаусса (1.6), получим

$$\int_0^\infty(\lambda^2+\rho^2)g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_k(\tau/2)\bigl(\lambda_k^2(\tau/2)+\rho^2\bigr)g(\lambda_k(\tau/2))\ge\bigl(\lambda_1^2+\rho^2\bigr)\sum_{k=1}^\infty\gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2))$$

$$=\bigl(\lambda_1^2+\rho^2\bigr)\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\bigl(\lambda_1^2+\rho^2\bigr)\mathcal{J}^{-1}g(0)=\lambda_1^2+\rho^2, \tag{2.5}$$

поэтому $\Lambda_B(\tau)\ge\lambda_1^2+\rho^2$. Оценка снизу получена.

Построим экстремальную функцию. Пусть $\chi_{\tau/2}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau/2]$. Определим функции $f_1(t)=\varphi_{\lambda_1}(t)\chi_{\tau/2}(t)$, $f(t)=(f_1*f_1)(t)$. Имеем

$$f_1(t)\ge0,\quad \operatorname{supp}f_1\subset[0,\tau/2],\quad f_1\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+),\quad \mathcal{J}f_1\in L^2(\mathbb{R}_+,d\sigma).$$

В силу положительности оператора обобщенного сдвига и теоремы 3

$$f(t)\ge0,\quad \operatorname{supp}f\subset[0,\tau/2],\quad g(\lambda)=\mathcal{J}f(\lambda)=\bigl(\mathcal{J}f_1(\lambda)\bigr)^2\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)\cap C_b(\mathbb{R}_+).$$

Согласно (1.1) $\Bigl\{\Delta(t)\bigl(\varphi_{\lambda_1}(t)\varphi_\lambda'(t)-\varphi_{\lambda_1}'(t)\varphi_\lambda(t)\bigr)\Bigr\}_t'=\bigl(\lambda_1^2-\lambda^2\bigr)\Delta(t)\varphi_{\lambda_1}(t)\varphi_\lambda(t)$, поэтому

$$\mathcal{J}f_1(\lambda)=\int_0^{\tau/2}\Delta(t)\varphi_{\lambda_1}(t)\varphi_\lambda(t)\,dt=-\frac{\Delta(\tau/2)\varphi_{\lambda_1}'(\tau/2)\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}.$$

Следовательно,

$$g(\lambda)=\frac{\bigl(\Delta(\tau/2)\varphi_{\lambda_1}'(\tau/2)\bigr)^2\varphi_\lambda^2(\tau/2)}{\bigl(\lambda_1^2-\lambda^2\bigr)^2}.$$

Согласно (1.4), (1.5) $\lambda^2 g\in L^1(\mathbb{R}_+,d\sigma)$. Применяя (1.6), получим

$$\mathcal{J}^{-1}g(0)=\int_0^\infty g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\sum_{k=1}^\infty\gamma_k(\tau/2)g(\lambda_k(\tau/2))=\gamma_1\bigl(\Delta(\tau/2)\varphi_{\lambda_1}'(\tau/2)\bigr)^2\lim_{\lambda\to\lambda_1}\Bigl(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Bigr)^2.$$

Функция (2.3)

$$g_\tau(\lambda)=\frac{1}{c(\tau)}\Bigl(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Bigr)^2,\quad c(\tau)=\gamma_1\lim_{\lambda\to\lambda_1}\Bigl(\frac{\varphi_\lambda(\tau/2)}{\lambda_1^2-\lambda^2}\Bigr)^2,$$

является допустимой в задаче Бомана, и по квадратурной формуле Гаусса (1.6)

$$\Lambda_B(\tau) \geq \int_0^\infty (\lambda^2+\rho^2) g_\tau(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k(\tau/2)\big(\lambda_k^2(\tau/2)+\rho^2\big) g_\tau(\lambda_k(\tau/2))$$

$$= \gamma_1\big(\lambda_1^2+\rho^2\big) g_\tau(\lambda_1) = \lambda_1^2+\rho^2.$$

Равенство (2.2) доказано.

Функция (2.3) является экстремальной. Отметим, что она и ее обратное преобразование Якоби неотрицательны.

Равенство

$$c(\tau) = \frac{\dfrac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial \lambda}(\tau/2)}{2\lambda_1 \Delta(\tau/2)\, \dfrac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(\tau/2)}$$

в (2.4) следует из (1.7).

Теорема 4 доказана.

3. Единственность экстремальной функции

Сформулируем второй основной результат работы.

Теорема 5. *Экстремальная функция* g_τ (2.3) *в задаче Бомана* (2.1) *единственна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть g — экстремальная функция в задаче Бомана (2.3).

По лемме 5.4 из [12] существует четная целая функция $\omega(z)$ экспоненциального типа 2, для которой $\omega(x) > 0$, $x > 0$, и

$$\omega(x) \asymp x^{2\alpha+1}, \quad x \to +\infty, \qquad |\omega(iy)| \asymp |y|^{2\alpha+1} e^{2|y|}, \quad y \to \pm\infty. \tag{3.1}$$

Так как g обращает неравенство (2.5) в равенство, то в точках $\lambda_k(\tau/2)$, $k \geq 2$, она имеет двойные нули. Рассмотрим функции

$$F(\lambda) = \omega(\lambda) g(\lambda), \quad \Omega(\lambda) = \omega(\lambda) g_\tau(\lambda).$$

В силу асимптотик (1.3), (1.4) и (3.1) $|\Omega(iy)| \asymp |y|^{-4} e^{(\tau+2)|y|}$, $y \to \pm\infty$.

Далее воспользуемся следующим результатом [13, прил. VII, лемма Ахиезера]. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, F — четная целая функция экспоненциального типа $\tau > 0$, ограниченная на $\mathbb{R}$, Ω — четная целая функция конечного экспоненциального типа, все корни которой входят в множество корней F, индикатор $h_\Omega(0) = h_\Omega(\pi)$ и $\liminf_{y\to\pm\infty} e^{-\tau|y|} y^{2m} |\Omega(iy)| > 0$. Тогда функция

$$\psi(z) = \frac{F(z)}{\Omega(z)}$$

есть многочлен степени не больше $2m$.

Применяя это утверждение, находим, что $g(\lambda) = \psi(\lambda) g_\tau(\lambda)$, где ψ — четный многочлен степени не выше 4. Его степень не может равняться 2 или 4, иначе по асимптотикам (1.3), (1.4) будем иметь $\lambda^2 g \notin L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma)$. Следовательно, $\psi(\lambda) = \mathrm{const} = 1$ и $g(\lambda) = g_\tau(\lambda)$.

Теорема 5 доказана.

Заключение

Решение задачи Бомана для преобразования Якоби позволит в дальнейшем решить задачу Бомана для преобразования Фурье на гиперболоиде или на пространстве Лобачевского. Было бы интересно получить решение задачи Бомана для преобразования Фурье на произвольном римановом симметрическом пространстве ранга 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье — Ганкеля // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
2. **Gorbachev D. V.** Multidimensional extremal Logan's and Bohman's problems // Methods of Fourier analysis and approximation / eds. M. Ruzhansky and S. Tikhonov. Basel: Springer Internat. Publ., 2016. P. 43–58. (Applied and Numerical Harmonic Analysis.)
3. **Gorbachev D., Ivanov V.** Extremal Bohman's problem for Dunkl transform // 5th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields: Book of Abstracts. Budapest: MTA Renyi Institute, 2015. P. 6.
4. **Bohman H.** Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1961. Vol. 4, no. 2. P. 99–157.
5. **Bohman W., Gneiting T., Richards D.** Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
6. **Jeu M. de** Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358, no. 10. P. 4225–4250.
7. **Koornwinder T. H.** Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups // Special functions: Group theoretical aspects and applications / eds. R. A. Askey, T. H. Koornwinder and W. Schempp. Dordrecht: Reidel, 1984. P. 1–85.
8. **Левитан Б.М., Саргсян И.С.** Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
9. **Koornwinder T. H.** A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform // Ark. Mat. 1979. Vol. 13, no. 1. P. 145–159.
10. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 8. С. 63–98.
11. **Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H.** The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. 1973. Vol. 11, no. 1. P. 245–262.
12. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A.** Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, no. 5. P. 904–913.
13. **Левин Б.Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Поступила 30.07.2016

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

REFERENCES

1. Gorbachev D. V. Bohman extremal problem for the Fourier–Hankel transform. *Izv. TulGU. Estestv. nauki*, 2014, iss. 4, pp. 5–10 (in Russian).
2. Gorbachev D. V. Multidimensional extremal Logan's and Bohman's problems *Methods of Fourier analysis and approximation*, eds. M. Ruzhansky and S. Tikhonov, Basel: Springer Internat. Publ., 2016, Ser. Applied and Numerical Harmonic Analysis, pp. 43–58.
3. Gorbachev D., Ivanov V. Extremal Bohman's problem for Dunkl transform. *5th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields: Book of Abstr.*, Budapest: MTA Renyi Institute, 2015, p. 6.
4. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions. *Ark. Mat.*, 1961, vol. 4, no. 2, pp. 99–157.
5. Bohman W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2004, vol. 356, pp. 4655–4685.

6. Jeu M. de Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2006, vol. 358, no. 10, pp. 4225–4250.
7. Koornwinder T. H. Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups. *Special functions: Group theoretical aspects and applications*, eds. R. A. Askey, T. H. Koornwinder and W. Schempp, Dordrecht: Reidel, 1984, pp. 1–85.
8. Levitan, B. M., Sargsyan, I. S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* (Sturm–Liouville and Dirac operators). Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991, Ser. Math. Its Appl., 350 p.
9. Koornwinder T. H. A new proof of a Paley–Wiener type theorem for the Jacobi transform. *Ark. Mat.*, 1979, vol. 13, no. 1, pp. 145–159.
10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 8, pp. 1087–1122.
11. Flensted-Jensen M., Koornwinder T. H. The convolution structure for Jacobi function expansions. *Ark. Mat.*, 1973, Vol. 11, no. 1, pp. 245–262.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Veprintsev R. A. Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5, pp. 904–913.
13. Англ. пер.: Levin B. Ya. *Raspredelenie kornej celyh funkcij* (Distribution of zeros of entire functions). New York: Amer. Math. Soc., 1964, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 5, 523 p.

D. V. Gorbachev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: e-mail:dvgmail@mail.ru .

V. I. Ivanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: ivaleryi@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ В L_2 ЧАСТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ МНОГОМЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов, Р. А. Вепринцев

Для приближений в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ частичными интегралами многомерного преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля доказано неравенство Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности. Многомерный вес, определяющий оператор Штурма — Лиувилля, является произведением одномерных весов. Одномерными весами могут выступать, в частности, степенные и гиперболические веса с различными параметрами. Оптимальность аргумента в модуле непрерывности устанавливается с помощью многомерной квадратурной формулы Гаусса по нулям собственной функции оператора Штурма–Лиувилля. Полученные результаты носят законченный характер и обобщают многие ранее известные результаты.

Оператор Штурма — Лиувилля, пространство L^2, преобразование Фурье, неравенство Джексона, квадратурная формула Гаусса.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, R. A. Veprintsev. Approximation in L_2 by partial integrals of the multidimensional Fourier transform in the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator.

For approximations in the space $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ by partial integrals of the multidimensional Fourier transform in the eigenfunctions of the Sturm–Liouville operator, we prove the Jackson inequality with exact constant and optimal argument in the modulus of continuity. The multidimensional weight that defines the Sturm–Liouville operator is the product of one-dimensional weights. The one-dimensional weights can be, in particular, power and hyperbolic weights with various parameters. The optimality of the argument in the modulus of continuity is established by means of the multidimensional Gauss quadrature formula over zeros of an eigenfunction of the Sturm–Liouville operator. The obtained results are complete; they generalize a number of known results.

Keywords: Sturm–Liouville operator, L^2-space, Fourier transform, Jackson inequality, Gauss quadrature formula.

MSC: 34B24, 41A44, 41A55, 41A63

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-136-152

Введение

Доказательство неравенств Джексона с точной константой и оптимальным аргументом в модуле непрерывности определило важное направление исследований по экстремальным задачам теории приближений в пространствах L^2. Пионерскими работами в этом направлении стали две работы Н. И. Черных [1; 2] для одномерного тора $\mathbb{T}$. В статье [1] 1967 г. впервые доказано неравенство Джексона в $L^2(\mathbb{T})$ с точной константой, а в статье В. В. Арестова и Н. И. Черных [2] 1981 г. установлено, что аргумент в модуле непрерывности в этом неравенстве является оптимальным.

Точная константа в неравенстве Джексона в L^2, зависящая от приближающего подпространства и модуля непрерывности, имеет глобальный минимум. Если фиксировать приближающее подпространство, то минимальное значение аргумента в модуле непрерывности, при котором константа Джексона становится наименьшей, можно назвать оптимальным аргументом. Наиболее полные результаты по оптимальным аргументам получены для прямой, полупрямой и их декартовых произведений [3–7]. Они показали, что в многомерном случае оптимальный аргумент зависит как от геометрии спектра V приближающих целых функций, так

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00308), Министерства образования и науки РФ (госздания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К).

и от геометрии окрестности нуля U в определении модуля непрерывности. Е. Е. Бердышева [3] установила глубокую связь между оптимальным аргументом и экстремальной задачей Логана для целых функций многих переменных из пространства $L^1(\mathbb{R}^d)$ и нашла оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \le p \le 2$, а U — куб. В [4] установлен оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в L^2 на полупрямой со степенным весом, что позволило найти оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$, когда оба тела являются евклидовыми шарами. В [5] найден оптимальный аргумент в неравенстве Джексона в $L^2(\mathbb{R}^d)$ с весом, являющимся произведением модулей координат в неотрицательных степенях, и, когда тело V есть l_p^d-шар, $1 \le p \le 2$, а U — параллелепипед. Отметим, что случай параллелепипеда оказался сложнее куба.

В [4] оптимальность аргумента в неравенстве Джексона установлена с помощью квадратурной формулы Гаусса на полупрямой по нулям нормированной функции Бесселя

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha},$$

где $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\alpha \ge -1/2$, доказанной Фрапье — Оливером — Грозевым — Рахманом.

Нормированная функция Бесселя является собственной функцией задачи или оператора Штурма — Лиувилля на полупрямой со степенным весом. Нам удалось построить квадратурную формулу на полупрямой по нулям собственной функции задачи Штурма — Лиувилля с достаточно общим весом. Это позволило решить задачу об оптимальном аргументе в неравенстве Джексона в L^2 на многих других многообразиях. В [6] это сделано в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с гиперболическим весом, в [7] — в $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ с многомерным гиперболическим весом, в [8] — в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с общим одномерным весом.

В настоящей работе, следуя [5; 7], мы доказываем точное неравенство Джексона с оптимальным аргументом в модуле непрерывности в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ с многомерным весом

$$w(t) = \prod_{j=1}^d w_j(t_j), \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d, \tag{0.1}$$

где $w_j(t_j)$, $t_j \in \mathbb{R}_+$, — одномерные непрерывные весовые функции, положительные и непрерывно дифференцируемые при $t_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. На одномерные веса накладываются некоторые ограничения, естественные в теории Штурма — Лиувилля.

Тем самым эта работа в определенной степени завершает цикл работ по оптимальным аргументам в неравенствах Джексона в L^2, обобщая многие предыдущие результаты.

1. Задача Штурма — Лиувилля

Пусть $\mathbb{R}^d$ ($\mathbb{C}^d$) — d-мерное действительное (комплексное) пространство с евклидовой нормой $|x|$, $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, d\}$, t, $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^d$.

Для весовой функции (0.1) рассмотрим многомерную задачу Штурма — Лиувилля

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial t_j}\Big(w(t)\,\frac{\partial}{\partial t_j}\,\varphi(t,\lambda)\Big) + \big(|\lambda|^2 + |\lambda_0|^2\big) w(t)\varphi(t,\lambda) = 0, \\ \varphi(0,\lambda) = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\,(0,\lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, d. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Понятно, что решение задачи (1.1) имеет вид $\varphi(t,\lambda) = \prod_{j=1}^d \varphi(t_j,\lambda_j)$, где $\varphi(t_j,\lambda_j)$ — решения одномерных задач Штурма — Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\Big(w_j(t_j)\,\frac{\partial}{\partial t_j}\,\varphi_j(t_j,\lambda_j)\Big) + \Big(\lambda_j^2 + \lambda_{0j}^2\Big) w_j(t_j)\varphi_j(t_j,\lambda_j) = 0, \tag{1.2}$$

$$\varphi_j(0,\lambda_j)=1,\quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_j}(0,\lambda_j)=0,\quad j=1,\dots,d.$$

Предположим, что задачи (1.2) имеют решения $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$, которые будем называть собственными функциями, и для них выполнены следующие свойства.

1. Собственные функции $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ — действительные, четные по t_j на $\mathbb{R}$ и четные целые функции экспоненциального типа $|t_j|$ при $t_j\neq 0$ по λ_j,

$$\varphi_j(0,\lambda_j)=1,\quad |\varphi_j(t_j,\lambda_j)|\le 1,\quad \lambda_j,t_j\in\mathbb{R},\quad \varphi_j(t_j,0)>0.$$

Отсюда

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad |\varphi(t,\lambda)|\le 1,\quad \lambda,t\in\mathbb{R}^d,\quad \varphi(t,0)>0. \tag{1.3}$$

2. Для $t_j>0$, $\lambda_j\in\mathbb{C}$

$$\varphi_j(t_j,\lambda_j)=\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda_j^2}{\lambda_{jk}^2(t)}\Big),$$

где $0<\lambda_{j1}(t_j)<\ldots<\lambda_{jk}(t_j)<\ldots$ — положительные нули $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ по λ_j. Нули $\lambda_{jk}(t_j)$ непрерывны и монотонно убывают при $t_j>0$. При этом $\lambda_{jk}(t_j)=t_{jk}^{-1}(t_j)$, где $t_{jk}(\lambda_j)$ — положительные нули функции $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ по $t_j>0$.

3. Спектральные меры $\sigma_j(\lambda_j)$ задач (1.2) непрерывны на $\mathbb{R}_+$, положительны и непрерывно дифференцируемы для $\lambda_j>0$, $\sigma_j(0)=0$ и

$$\sigma_j'(\lambda_j)=s_j(\lambda_j)\asymp\lambda_j^{2\alpha_j+1},\quad \lambda_j\to+\infty,\ \alpha_j\ge -1/2. \tag{1.4}$$

Пусть $d\mu_j(t_j)=w_j(t_j)\,dt_j$, $d\mu(t)=w(t)\,dt$, $1\le p<\infty$, $L^p(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с нормой

$$\|f\|_{p,d\mu}=\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}|f(t)|^p\,d\mu(t)\Bigg)^{1/p}<\infty,$$

$d\sigma_j(\lambda_j)=s_j(\lambda_j)\,d\lambda_j$, $s(\lambda)=\prod_{j=1}^d s_j(\lambda_j)$, $d\sigma(\lambda)=s(\lambda)\,d\lambda$, $L^p(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу функций $g(\lambda)$ на $\mathbb{R}_+^d$ с нормой

$$\|g\|_{p,d\sigma}=\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}|g(\lambda)|^p\,d\sigma(\lambda)\Bigg)^{1/p}<\infty,$$

$C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^d$ с компактным носителем, $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$ — подпространство функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, все производные которых в нуле равны нулю. Для пространства $X(\mathbb{R}^d)$ через $X(\mathbb{R}_+^d)$ будем обозначать его подпространство, все функции которого четные по каждой переменной. Функции, заданные на $\mathbb{R}_+^d$, будем рассматривать и на $\mathbb{R}^d$, считая их продолженными по четности по каждой переменной.

Прямое и обратное преобразования Фурье определяются равенствами

$$\mathcal{F}f(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}f(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t),\quad \mathcal{F}^{-1}g(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

Если $f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, то $\mathcal{F}f\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$. Если $g\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$, то $\mathcal{F}^{-1}g\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$.

Будем предполагать, что прямое и обратное преобразования Фурье осуществляют изоморфизм между $L^2(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$ и $L^2(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$ и справедливы равенства Планшереля

$$\|\mathcal{F}f\|_{2,d\sigma}=\|f\|_{2,d\mu},\quad \|\mathcal{F}^{-1}g\|_{2,d\mu}=\|g\|_{2,d\sigma}.$$

Мы будем также рассматривать одномерные прямые и обратные преобразования Фурье

$$\mathcal{F}_j f(\lambda_j)=\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(t_j)\varphi_j(t_j,\lambda_j)\,d\mu_j(t_j),\quad \mathcal{F}_j^{-1}g(t_j)=\int\limits_{\mathbb{R}_+} g(\lambda_j)\varphi_j(t_j,\lambda_j)\,d\sigma_j(\lambda_j)$$

в пространствах $L^2(\mathbb{R}_+,d\mu_j)$, $L^2(\mathbb{R}_+,d\sigma_j)$ соответственно.

4. Для $t_j>0$ равномерно на каждом компакте из $(0,\infty)$ справедлива асимптотика

$$\lambda_j^{\alpha_j+1/2}\varphi_j(t_j,\lambda_j)=C_j(t_j)\big(\cos\left(t_j\lambda_j-c_j(t_j)\right)+e^{t_j|\operatorname{Im}\lambda_j|}O(|\lambda_j|^{-1})\big),\quad |\lambda_j|\to\infty,\quad \operatorname{Re}\lambda_j\ge 0, \tag{1.5}$$

где α_j из (1.4).

5. Если $f\in C(\mathbb{R}_+^d)\cap L^1(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, $\mathcal{F}f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$, то для $t\in\mathbb{R}_+^d$ справедливо поточечное равенство

$$f(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\mathcal{F}f(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{1.6}$$

Условия **1**–**5** являются достаточными для построения многомерной квадратурной формулы Гаусса в $\mathbb{R}_+^d$ по нулям $\lambda_k(t)=(\lambda_{1k_1}(t_1),\dots,\lambda_{dk_d}(t_d))$ (см. далее лемму 9).

Представление (1.6) верно для $f\in C_{00}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$. Действительно, если $\Delta_w f=\sum\limits_{j=1}^d\dfrac{\partial}{\partial t_j}\Big(w(t)\dfrac{\partial}{\partial t_j}f\Big)$, то для любого $s\in\mathbb{N}$ $(-\Delta_w)^s f\in C_{00}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$ и интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{F}f(\lambda)=(|\lambda|^2+|\lambda_0|^2)^{-s}\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\varphi(t,\lambda)(-\Delta_w)^s f(t)\,d\mu(t),$$

поэтому $\mathcal{F}f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$.

Для преобразования Фурье справедливо следующее свойство единственности. Если $f\in L^1(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$ и $\mathcal{F}f(\lambda)=0$ почти всюду, то $f(t)=0$ почти всюду. Действительно, для любой $g\in C_{00}^\infty(\mathbb{R}_+^d)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}f(t)g(t)\,d\mu(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}f(t)\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\mathcal{F}g(\lambda)\varphi(t,\lambda)\,d\sigma(\lambda)\,d\mu(t)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=0,$$

поэтому $f(t)=0$ почти всюду.

6. Для оператора обобщенного сдвига

$$T^t f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\widehat{f}(\lambda)\varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda),\quad t,x\in\mathbb{R}_+^d,$$

действующего согласно (1.3) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+^d,d\mu)$, $\|T^t\|_{2\to2}=1$, справедливо интегральное представление

$$T^t f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}f(z)\,d\tau_{x,t}(z), \tag{1.7}$$

где для всех $x,t\in\mathbb{R}_+^d$ $\tau_{x,t}$ — вероятностная борелевская мера, для которой $\tau_{x,t}=\tau_{t,x}$, носитель $\operatorname{supp}\tau_{x,t}\subset\prod_{j=1}^d[|x_j-t_j|,x_j+t_j]$ и отображение $(x,t)\to\tau_{x,t}$ непрерывно в слабой топологии вероятностных борелевских мер.

Оператор T^t является положительным и самосопряженным оператором, $T^t f(x)\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$, если $f\in C_b(\mathbb{R}_+^d)$.

Покажем, что представление (1.7) позволяет распространить T^t на пространства $L^p(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, $1 \le p < \infty$, с нормой 1 для всех $t \in \mathbb{R}^d_+$. Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ из представления (1.7)

$$\|T^t f\|_\infty \le \|f\|_\infty.$$

Отсюда и из самосопряженности оператора T^t для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $p = 1$,

$$\|T^t f\|_{1,d\mu} = \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} (T^t f)\overline{g}\, d\mu \colon \|g\|_\infty \le 1, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\}$$

$$= \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}_+} f\overline{T^t g}\, d\mu \colon \|g\|_\infty \le 1,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\} \le \|f\|_{1,d\mu}\|T^t g\|_\infty \le \|f\|_{1,d\mu}.$$

По непрерывности оператор T^t продолжается на $L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$ и $\|T^t\|_{1\to 1} \le 1$. По теореме Рисса — Торина оператор T^t продолжается на пространства $L^p(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, $1 \le p \le 2$, и $\|T^t\|_{p\to p} \le 1$.

Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $2 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, то

$$\|T^t f\|_{p,d\mu} = \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} (T^t f)\overline{g}\, d\mu \colon \|g\|_{p'} \le 1,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\}$$

$$= \sup\Bigl\{ \int\limits_{\mathbb{R}_+} f\overline{T^t g}\, d\mu \colon \|g\|_{p'} \le 1,\ g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) \Bigr\} \le \|f\|_{p,d\mu}\|T^t g\|_{p'} \le \|f\|_{p,d\mu}.$$

По теореме Рисса — Торина оператор T^t продолжается на пространства $L^p(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, $2 < p < \infty$, и $\|T^t\|_{p\to p} \le 1$.

Пусть

$$\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j], \quad a = (a_1, \dots, a_d), \quad a_j > 0. \tag{1.8}$$

Отметим также следующие свойства оператора обобщенного сдвига:

$$\begin{gathered} T^0 f(x) = f(x), \quad T^t 1 = 1, \\ T^t \varphi(x,\lambda) = \varphi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), \quad \mathcal{F}(T^t f)(\lambda) = \varphi(t,\lambda)\mathcal{F}f(\lambda), \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} T^t f\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} f\, d\mu, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu), \tag{1.10}$$

$$\text{если } \operatorname{supp} f \subset \Pi_a,\ t \in \Pi_\delta, \text{ то } \operatorname{supp} T^t f \subset \Pi_{a+\delta}. \tag{1.11}$$

Оператор обобщенного сдвига позволяет определить свертку $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d_+} T^t f(x) g(t)\, d\mu(t)$. Если $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu)$, то

$$(f*g) \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\mu), \quad \mathcal{F}(f*g)(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda)\,\mathcal{F}g(\lambda). \tag{1.12}$$

Действительно, применяя теорему Фубини, с учетом ограниченности оператора обобщенного сдвига (см. (1.9)) получим

$$\|(f*g)\|_{1,d\mu} \le \int\limits_{\mathbb{R}^d_+}\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |T^t f(x)||g(t)|\, d\mu(t)\, d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |g(t)| \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} |T^t f(x)|\, d\mu(x)\, d\mu(t)$$

$$\le \|f\|_{1,d\mu} \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} |g(t)|\,d\mu(t) = \|f\|_{1,d\mu}\|g\|_{1,d\mu},$$

$$\mathcal{F}(f*g)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^d}\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} T^t f(x) g(t)\,d\mu(t)\varphi(x,\lambda)\,d\mu(x)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} g(t) \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} T^t f(x)\varphi(x,\lambda)\,d\mu(x)\,d\mu(t) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} g(t)\varphi(t,\lambda)\,d\mu(t)\mathcal{F}f(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda)\mathcal{F}g(\lambda).$$

Свойства **1–6** выполняются для широкого класса одномерных весов w, в частности для степенного и гиперболического весов:

$$w(t) = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha \ge -1/2,$$

$$w(t) = (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad \alpha \ge \beta \ge -1/2$$

(см. [9]).

2. Константа Джексона

Пусть $r, \tau > 0$, V, U — выпуклые центрально-симметричные компактные тела в $\mathbb{R}^d$, инвариантные относительно ортогональной группы преобразований, состоящей из диагональных матриц с элементами ± 1 на главной диагонали, $|x|_V, |x|_U$ — нормы в $\mathbb{R}^d$, порождаемые этими телами. Они являются функциями, четными по каждой переменной. Через V^+ будем обозначать $V \cap \mathbb{R}_+^d$, а через $|x|_V^+$ — сужение $|x|_V$ на $\mathbb{R}_+^d$. Пусть $V^c = \mathbb{R}_+^d \setminus V$ — дополнение V в $\mathbb{R}_+^d$.

Для функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$

$$E(rV, f)_{2,\mu} = \inf\bigl\{\|f-g\|_{2,\mu} \colon g \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu),\ \operatorname{supp}\mathcal{F}g \subset rV\bigr\}$$

— величина ее наилучшего приближения частичными интегралами преобразования Фурье по телу rV.

Из равенства Планшереля вытекает, что наилучшее приближение достигается на частичном интеграле обратного преобразования Фурье и

$$E^2(rV, f)_{2,\mu} = \int\limits_{(rV)^c} |\mathcal{F}f|^2\,d\sigma. \tag{2.1}$$

Модуль непрерывности функции $f \in L_2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$ определим равенством

$$\omega(\delta, f)_{2,\mu} = \sup_{0\le t\le\delta} \Delta(t, f), \quad \delta > 0,$$

где

$$\Delta(t,f) = \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} T^t|f(\cdot) - f(x)|^2(x)\,d\mu(x)\Biggr)^{1/2}.$$

Так как

$$|f(\cdot) - f(x)|^2 = |f(\cdot)|^2 + |f(x)|^2 - 2\mathrm{Re}\,\{f(\cdot)\overline{f(x)}\},$$

то в силу (1.9), (1.10), равенства Планшереля

$$\Delta^2(t,f) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} \bigl(T^t|f(x)|^2 + |f(x)|^2 - 2\mathrm{Re}\,\{\overline{f(x)}T^t f(x)\}\bigr)\,d\mu(x)$$

$$= 2\int\limits_{\mathbb{R}^d_+}\big(|f(x)|^2 - \operatorname{Re}\{f(x)T^t f(x)\}\big)\,d\mu(x) = 2\int\limits_{\mathbb{R}^d_+}(1-\varphi(t,\lambda))|\mathcal{F}f(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda), \qquad (2.2)$$

поэтому

$$\omega^2(\delta, f)_{2,\mu} = 2\sup_{0\le t\le\delta}\int\limits_{\mathbb{R}^d_+}(1-\varphi(t,\lambda))|\mathcal{F}f(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda).$$

Константа Джексона

$$D(rV,\tau U)_{2,\mu} = \sup\Big\{\frac{E(rV,f)_{2,\mu}}{\omega(\tau U,f)_{2,\mu}}\colon f\in L^2(\mathbb{R}^d_+, d\mu)\Big\}$$

есть наименьшая константа в неравенстве Джексона $E(rV,f)_{2,\mu}\le D\omega(\tau U,f)_{2,\mu}$.

Нижняя оценка константы Джексона дается в следующей лемме.

Лемма 1. *Для всех* $r,\tau>0$

$$D(rV,\tau U)_{2,\mu}\ge 2^{-1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon>0$, $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция εU. Применяя (2.2), (1.10), с учетом положительности оператора обобщенного сдвига получим

$$\omega^2(\tau U,\chi_\varepsilon)_{2,\mu} = 2\sup_{t\in\tau U}\Big\{\|\chi_\varepsilon\|^2_{2,\mu} - \int\limits_{\mathbb{R}^d_+}(T^t\chi_\varepsilon(x))\chi_\varepsilon(x)\,d\mu(x)\Big\}\le 2\|\chi_\varepsilon\|^2_{2,\mu} = 2\mu((\varepsilon U)^+). \qquad (2.3)$$

В силу (1.3) $|\mathcal{F}\chi_\varepsilon(\lambda)|\le\int_{\mathbb{R}^d_+}|\chi_\varepsilon(t)||\varphi(t,\lambda)|\,d\mu(t)\le\mu((\varepsilon U)^+)$, поэтому из (2.1)

$$E^2(rV,\chi_\varepsilon)_{2,\mu} = \int\limits_{(rV)^c}|\mathcal{F}\chi_\varepsilon(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda) = \|\chi_\varepsilon\|^2_{2,\mu} - \int\limits_{(rV)^+}|\mathcal{F}\chi_\varepsilon(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda)$$

$$\le\mu((\varepsilon U)^+)(1-\mu((\varepsilon U)^+)\sigma((rV)^+)).$$

Отсюда и из (2.3)

$$2D^2(rV,\tau U)_{2,\mu}\ge\sup_{\varepsilon>0}\frac{2E^2(rV,\chi_\varepsilon)_{2,\mu}}{\omega^2(\tau U,\chi_\varepsilon)_{2,\mu}}\ge\sup_{\varepsilon>0}(1-\mu((\varepsilon U)^+)\sigma((rV)^+)) = 1.$$

Лемма доказана.

Пусть U^* — поляра U, $\tau>0$, $S^+((\tau U)^+)$ — множество вероятностных мер на $(\tau U)^+$,

$$K(\tau U) = \Big\{f(\lambda) = \int\limits_{\tau U^+}\varphi(t,\lambda)\,d\nu(t)\colon \nu\in S^+((\tau U)^+)\Big\}$$

— класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|f(\lambda)|\le c_f\, e^{\tau|(\mathrm{Im}\lambda_1,\dots,\mathrm{Im}\lambda_d)|_{U^*}},$$

четных по каждой переменной, $\Gamma(rV,\tau U) = \inf\limits_{f\in K(\tau U)}\sup\limits_{(rV)^c} f(\lambda)$.

Отметим, что согласно (1.3) для $f\in K(\tau U)$ $f(0) = \int_{(\tau U)^+}\varphi(t,0)\,d\nu(t)>0$.

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству [7, лемма 4.1] с учетом замены собственной функции в задаче Штурма — Лиувилля с многомерным гиперболическим весом на собственную функцию $\varphi(t,\lambda)$.

Лемма 2. *Для всех* $r, \tau > 0$

$$2D^2(rV, \tau U)_{2,\mu} = \frac{1}{1 - \Gamma(rV, \tau U)}.$$

Существуют мера $\nu^* \in S^+((\tau U)^+)$ *и функция* $f^* \in K(\tau U)$, *для которых*

$$\Gamma(rV, \tau U) = \sup_{\lambda \in (rV)^c} \int\limits_{(\tau U)^+} \varphi(t, \lambda)\, d\nu^*(t) = \sup_{\lambda \in (rV)^c} f^*(\lambda).$$

При доказательстве леммы 2 используются соображения двойственности, которые впервые в задаче о точной константе в неравенстве Джексона в L^2 были применены В. В. Арестовым [10]. □

Из лемм 1, 2 вытекает, что $\Gamma(rV, \tau U) \geq 0$ и $D(rV, \tau U)_{2,\mu} = 2^{-1/2}$ только в случае, когда $\Gamma(rV, \tau U) = 0$. В этом случае $f^*(\lambda) \leq 0$, $\lambda \in (rV)^c$, для некоторой $f^* \in K(\tau U)$.

Лемма 3. *Если* $f \in K(\tau U)$, $f(\lambda) \leq 0$ *при* $\lambda \in (rV)^c$, *то*

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\sigma), \quad \mathcal{F}^{-1} f(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} f\, d\sigma \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\chi_\varepsilon(x)$ — характеристическая функция εU,

$$\Psi_\varepsilon(t) = (\mu((\varepsilon U)^+))^{-2} (\chi_\varepsilon * \chi_\varepsilon)(t).$$

Отметим свойства функции Ψ_ε. Согласно положительности оператора обобщенного сдвига, свойству единственности преобразования Фурье, (1.6), (1.12) для всех t, $\lambda \in \mathbb{R}^d_+$

$$\Psi_\varepsilon(t) \geq 0, \quad \Psi_\varepsilon,\, \mathcal{F}\Psi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^d_+, d\sigma) \cap C_b(\mathbb{R}^d_+), \quad \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) = (J\chi_\varepsilon(\lambda))^2 \geq 0, \quad 0 \leq \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) \leq 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{1}{\mu^2((\varepsilon U)^+)} \Bigg(\int\limits_{(\varepsilon U)^+} \varphi(t, \lambda)\, d\mu(t) \Bigg)^2 = \varphi^2(0, \lambda) = 1.$$

Если $f \in K(\tau U)$, то $|f(\lambda)| \leq 1$. Для всех $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d_+} f(\lambda) \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \int\limits_{(\varepsilon U)^+} \int\limits_{\mathbb{R}^d_+} \mathcal{F}\Psi_\varepsilon(\lambda) \varphi(t, \lambda)\, d\sigma(\lambda) d\nu(t) = \int\limits_{(\varepsilon U)^+} \Psi_\varepsilon(t) d\nu(t) \geq 0.$$

Далее доказательство леммы 3 заканчивается, как и в [7, лемма 4.2].

3. Неравенство Джексона

Величину

$$\tau(rV, U)_{2,\mu} = \inf \left\{ \tau > 0 \colon D(rV, \tau U)_{2,\mu} = 2^{-1/2} \right\}$$

назовем *оптимальным аргументом.*

Пусть

$$|x|_p = \Bigg(\sum_{j=1}^d |x_j|^p \Bigg)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad |x|_\infty = \max_j |x_j|, \quad B^d_p = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x|_p \leq 1\}.$$

В качестве тел V будем рассматривать шары B^d_p, а в качестве тел U — параллелепипеды Π_a (1.8).

Пусть E^a — класс целых функций $g(\lambda)$ экспоненциального типа $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, удовлетворяющих оценке

$$|g(\lambda)|\le c_g\,e^{|(\mathrm{Im}\lambda_1,\dots,\mathrm{Im}\lambda_d)|_{\Pi_a}*}=c_g\,e^{a_1|\mathrm{Im}\lambda_1|+\dots+a_d|\mathrm{Im}\lambda_d|},\quad \lambda\in\mathbb{C}^d,$$

четных по каждой переменной.

Согласно свойству **2** нули $\lambda_{11}(a_1\tau),\dots,\lambda_{d1}(a_d\tau)$ непрерывны и убывают по τ, поэтому уравнение

$$|(\lambda_{11}(a_1\tau),\dots,\lambda_{d1}(a_d\tau))|_p=r \tag{3.1}$$

имеет единственное решение относительно τ, которое обозначим через $\tau^p_{r,a}$.

Лемма 4. *Пусть $r>0$, $1\le p\le 2$, $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, Π_a — параллелепипед* (1.8), *$\tau=\tau^p_{r,a}$ определено в* (3.1). *Для целой функции экспоненциального типа*

$$F_p(x)=\Bigl(r^p-\sum_{j=1}^d(\lambda_{j1}(\tau a_j))^{p-2}\lambda_j^2\Bigr)\prod_{j=1}^d\frac{\varphi^2(\tau a_j,\lambda_j)}{\Bigl(\lambda_j^2-\lambda_{j1}^2(\tau a_j)\Bigr)^2}\in E^{2\tau a} \tag{3.2}$$

выполнены следующие свойства:

$$\begin{gathered}F_p\in L^1(\mathbb{R}^d_+,d\sigma),\quad F_p(\lambda)\le 0,\ |\lambda|_p\ge r,\\ \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}F_p\subset 2\tau\Pi_a,\quad \mathcal{F}^{-1}F_p(t)\ge 0,\ t\in\mathbb{R}^d_+.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принадлежность $F_p\in L_1(\mathbb{R}^d_+,d\sigma)$ вытекает из асимптотик в свойстве **4**. Пусть $\mu_j=(\lambda_{j1}(\tau a_j))^{p-2}$. Если $\sigma^p-\sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2>0$, то, применяя неравенство Гельдера и (3.1), получим

$$|\lambda|_p=\sum_{j=1}^d\mu_j^{p/2}|\lambda_j|^p\mu_j^{-p/2}\le\Bigl(\sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2\Bigr)^{p/2}\Bigl(\sum_{j=1}^d\mu_j^{-\frac{p}{2-p}}\Bigr)^{1-p/2}<\sigma^{p^2/2}\sigma^{p(1-p/2)}=\sigma^p,$$

поэтому $F_p(\lambda)\le 0$ при $|\lambda|_p\ge\sigma$. Остается доказать включение $\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}F_p\subset 2\tau\Pi_a$ и неравенство $\mathcal{F}^{-1}F_p(t)\ge 0$ при $t\in\mathbb{R}^d_+$.

Рассмотрим функции

$$u_j(x_j)=\begin{cases}\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j)), & |x_j|\le\tau a_j,\\ 0, & |x_j|>\tau a_j,\end{cases}\qquad u(x)=\prod_{j=1}^d u_j(x_j).$$

Согласно положительности оператора обобщенного сдвига, (1.9), (1.11) для $t\in\mathbb{R}^d$, $t^+=(|t_1|,\dots,|t_d|)$ имеем

$$\begin{gathered}u(x)\ge 0,\quad \operatorname{supp}u\subset\tau\Pi_a,\quad T^tu(x)\ge 0,\\ \operatorname{supp}T^tu\subset\Pi_{\tau a+t^+},\quad \mathcal{F}(T^tu)(\lambda)=\varphi(t,\lambda)\mathcal{F}u(\lambda).\end{gathered} \tag{3.4}$$

В силу дифференциального уравнения (1.9)

$$\Bigl\{w_j(x_j)\bigl(\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j))(\varphi_j(x_j,\lambda_j))'_{x_j}-(\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j}\varphi_j(x_j,\lambda_j)\bigr)\Bigr\}'_{x_j}$$

$$=\bigl(\lambda_{j1}^2(\tau a_j)-\lambda_j^2\bigr)w_j(x_j)\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j))\varphi_j(x_j,\lambda_j),$$

поэтому

$$\mathcal{F}_ju_j(\lambda_j)=\int_0^{\tau a_j}\varphi_j(x_j,\lambda_j)\varphi_j(x_j,\lambda_{j1}(\tau a_j))d\mu(x_j)$$

$$= \frac{1}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}\Big\{w_j(x_j)\big(\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j))(\varphi_j(x_j, \lambda_j))'_{x_j} - (\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j}\varphi_j(x_j, \lambda_j)\big)\Big\}\Big|_0^{\tau a_j}$$

$$= -\frac{w_j(\tau a_j)(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j}\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2} = b_j\frac{\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}, \tag{3.5}$$

где $b_j = -w_j(\tau a_j)(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{x_j} > 0$, так как $\varphi_j(0, \lambda_{j1}(\tau a_j)) = 1$ и τa_j — первый простой нуль функции $\varphi_j(x_j, \lambda_{j1}(\tau a_j))$. Отсюда

$$\mathcal{F}u(\lambda) = \prod_{j=1}^d b_j\frac{\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)}{\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим функцию

$$G(x) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)} T^t u(x)\frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)w(t)dS(t), \tag{3.7}$$

где $\partial(\tau\Pi_a)$ — граница параллелепипеда $\tau\Pi_a$; $\dfrac{\partial u(t)}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к $\partial(\tau\Pi_a)$; $h(t) = \mu_j$, если $t_j = \pm\tau a_j$, $j = 1, \dots, d$, $dS(t)$ — элемент площади поверхности на $\partial(\tau\Pi_a)$.

Так как

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n}\Big|_{t_j=\pm\tau a_j} = (\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\prod_{i\neq j}u_i(t_i) \le 0, \tag{3.8}$$

то в силу (3.4), (3.7), (1.11) $G(x) \ge 0$, $\operatorname{supp} G \subset 2\tau\Pi_a$ и

$$\mathcal{F}G(\lambda) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)}\frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)\mathcal{F}(T^t u)(\lambda)w(t)\,dS(t) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)}\frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)\varphi(t, \lambda)w(t)\,dS(t)\mathcal{F}u(\lambda). \tag{3.9}$$

Если $(\tau\Pi_a)^j = \prod_{i\neq j}[-\tau a_i, \tau a_i]$, то согласно (3.5), (3.6), (3.8)

$$g(\lambda) = -\int\limits_{\partial(\tau\Pi_a)}\frac{\partial u(t)}{\partial n}h(t)\varphi(t, \lambda)w(t)\,dS(t)$$

$$= -2\sum_{j=1}^d(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\mu_j\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)w_j(\tau a_j) \times \int\limits_{(\tau\Pi_a)^j}\prod_{i\neq j}u_i(t_i)\varphi_i(t_i, \lambda_i)\prod_{i\neq j}d\mu_i(t_i)$$

$$= -2\sum_{j=1}^d(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\mu_j\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)w_j(\tau a_j)\prod_{i\neq j}\mathcal{F}_i u_i(\lambda_i)$$

$$= -2\mathcal{F}u(\lambda)\sum_{j=1}^d(\varphi_j(\tau a_j, \lambda_{j1}(\tau a_j)))'_{t_j}\mu_j\varphi_j(\tau a_j, \lambda_j)w_j(\tau a_j)\,(\mathcal{F}_j u_j(\lambda_j))^{-1}$$

$$= 2\mathcal{F}u(\lambda)\sum_{j=1}^d\mu_j(\lambda_{j1}^2(\tau a_j) - \lambda_j^2) = 2\mathcal{F}u(\lambda)\Big(\sigma^p - \sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2\Big).$$

Отсюда и из (3.9)

$$\mathcal{F}G(\lambda) = 2(\mathcal{F}u(\lambda))^2\Big(\sigma^p - \sum_{j=1}^d\mu_j\lambda_j^2\Big).$$

Согласно (3.6), (3.2) $F_p(\lambda) = c\mathcal{F}G(\lambda)$, $c > 0$, поэтому

$$\mathcal{F}^{-1}F_p(t) = cG(t) \geq 0, \quad \operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}F_p \subset 2\tau\Pi_a,$$

и для некоторого $c_1 > 0$ функция $c_1F_p \in K(2\tau\Pi_a)$. Свойства (3.3) и лемма 4 доказаны.

Из лемм 2, 4 вытекает верхняя оценка оптимального аргумента:

$$\tau(rB_p^d, \Pi_a)_{2,\mu} \leq 2\tau_{r,a}^p, \quad 1 \leq p \leq 2, \tag{3.10}$$

и точное неравенство Джексона, представленное следующим утверждением.

Теорема 1. *Если $r > 0$, $1 \leq p \leq 2$, $f \in L^2(\mathbb{R}_+^d, d\mu)$, то*

$$E(rB_p^d, f)_{2,\mu} \leq 2^{-1/2}\omega(2\tau_{r,a}^p\Pi_a, f)_{2,\mu}.$$

4. Оптимальный аргумент в неравенстве Джексона

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 2. *Если для задачи Штурма — Лиувилля* (1.1) *справедливы условия* **1**–**6**, $r > 0$, $1 \leq p \leq 2$, $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $a_j > 0$, Π_a — *параллелепипед* (1.8) ($\tau = \tau_{r,a}^p$ *определено в* (3.1)), *то*

$$\tau(rB_p^d, \Pi_a)_{2,\mu} = 2\tau_{r,a}^p. \tag{4.1}$$

Оценка сверху в (4.1) это неравенство (3.10). Получим оценку снизу:

$$\tau(rB_p^d, \Pi_a)_{2,\mu} \geq 2\tau_{r,a}^p. \tag{4.2}$$

Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Пусть далее

$$x^{(a,b)} = \begin{cases} x^a, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^b, & x \geq 1 \end{cases}$$

— кусочно-степенная функция, знак $\lesssim$ равносилен $O(\cdot)$.

Лемма 5. *Если $a > 0$, $b \geq 0$, $f \in E^a \cap L^1(\mathbb{R}_+, \lambda^b\, d\lambda)$, $0 < \delta \leq 1/(4a)$, то*

$$\int_0^\delta |f(\lambda)|\lambda^b\, d\lambda \lesssim \int_\delta^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\, d\lambda, \quad \int_0^\delta |f(\lambda)|\, d\lambda \lesssim \int_\delta^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\, d\lambda. \tag{4.3}$$

Константы в неравенствах (4.3) *зависят от a и b.*

Доказательство. Для $\delta = 1/(4a)$ второе неравенство в (4.3) с константой, зависящей от a и b, доказано в [7, лемма 5.3]. Если $0 < \delta < 1/(4a)$, то

$$\int_0^\delta |f(\lambda)|\, d\lambda \leq \int_0^{1/(4a)} |f(\lambda)|\, d\lambda \lesssim \int_{1/(4a)}^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\, d\lambda \lesssim \int_\delta^\infty |f(\lambda)|\lambda^b\, d\lambda.$$

Первое неравенство вытекает из второго, так как

$$\int_0^\delta |f(\lambda)|\lambda^b\, d\lambda \leq \frac{1}{(4a)^b}\int_0^\delta |f(\lambda)|\, d\lambda.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, $0<\delta\le\min_j 1/(4a_j)$, $V_\delta=\{\lambda\in\mathbb{R}_+^d:\min_j\lambda_j\le\delta\}$, $b=(b_1,\dots,b_d)$, $b_j\ge 0$, $\lambda^b=\prod_{j=1}^d\lambda_j^{b_j}$, $g\in E^a\cap L^1(\mathbb{R}_+^d,\lambda^b\,d\lambda)$, *то*

$$\int\limits_{V_\delta}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\lesssim\int\limits_{(V_\delta)^c}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda. \tag{4.4}$$

Константа в неравенстве (4.4) *зависит от* a *и* b.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\int\limits_{(V_\delta)^c}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda=\int\limits_{[\delta,\infty)^d}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda,\quad\int\limits_{V_\delta}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda=\sum_{i=1}^{2^d-1}\int\limits_{A_{1i}\times\dots\times A_{di}}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda,$$

где $A_{ji}=[0,\delta]$ либо $A_{ji}=[\delta,\infty)$. Достаточно показать, что для всех $i=1,\dots,2^d-1$

$$\int\limits_{A_{1i}\times\dots\times A_{di}}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda\lesssim\int\limits_{[\delta,\infty)^d}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda. \tag{4.5}$$

Пусть $A_{1i}=[0,\delta]$, $\tilde\lambda=(\lambda_2,\dots,\lambda_d)$, $\tilde A_i=A_{2i}\times\dots\times A_{di}$, $\tilde b=(b_2,\dots,b_d)$. По теореме Фубини для почти всех $\tilde\lambda\in\mathbb{R}_+^{d-1}$ функция f как функция λ_1 принадлежит $E^{a_1}\cap L^1(\mathbb{R}_+,\lambda^{b_1}\,d\lambda_1)$. По лемме 5 для $0<\delta\le\min_j 1/(4a_j)\le 1/(4a_1)$

$$\int\limits_0^\delta|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\lambda^{b_1}\,d\lambda_1\lesssim\int\limits_\delta^\infty|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\lambda^{b_1}\,d\lambda_1.$$

Отсюда

$$\int\limits_{A_{1i}\times\dots\times A_{di}}|f(\lambda)|\lambda^b\,d\lambda=\int\limits_{\tilde A_i}\int\limits_0^\delta|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\lambda^{b_1}\,d\lambda_1\tilde\lambda^{\tilde b}\,d\tilde\lambda\lesssim\int\limits_\delta^\infty\int\limits_{\tilde A_i}|f(\lambda_1,\tilde\lambda)|\tilde\lambda^{\tilde b}\lambda^{b_1}\,d\tilde\lambda\,d\lambda_1.$$

Продолжая аналогично по другим переменным, придем к (4.5). Лемма доказана.

Согласно асимптотике (1.5) (свойство **4**) для нулей собственных функций справедливы свойства

$$\lambda_{jk_j}(t_j)\sim\frac{\pi k_j}{t_j}\ (k_j\to\infty),\quad\inf_{k_j\in\mathbb{N}}(\lambda_{j(k_j+1)}(t_j)-\lambda_{jk_j}(t_j))=\Delta_j>0. \tag{4.6}$$

Лемма 7. *Пусть*

$$\tau=(\tau_1,\dots,\tau_d),\ \tau_j>0,\ k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d,\ \lambda_k(\tau)=(\lambda_{1k_1}(\tau_1),\dots,\lambda_{dk_d}(\tau_d)).$$

Если $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, $f\in E^a\cap L^1(\mathbb{R}_+^d,d\sigma)$, *то*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d}s(\lambda_k(\tau))|f(\lambda_k(\tau))|\lesssim\int\limits_{\mathbb{R}_+^d}|f(\lambda)|\,d\sigma(\lambda). \tag{4.7}$$

Константа в неравенстве (4.7) *не зависит от* f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [6, лемма 5.4] установлено, что для $\alpha \geq -1/2$ существует четная целая функция $\omega_\alpha(z)$ экспоненциального типа 2, для которой

$$\omega_\alpha(x) > 0, \quad x > 0, \qquad \omega_\alpha(x) \asymp x^{(2[\alpha+1/2]+2,\, 2\alpha+1)}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Пусть для $\alpha = (2\alpha_1 + 1, \ldots, 2\alpha_d + 1)$

$$\lambda^\alpha = \prod_{j=1}^d \lambda_j^{2\alpha_j+1}, \quad \omega_\alpha(\lambda) = \prod_{j=1}^d \omega_{\alpha_j}(\lambda_j), \quad 0 < \delta \leq \min\Big\{\frac{1}{4a_1}, \ldots, \frac{1}{4a_d}, \lambda_{11}(\tau_1), \ldots, \lambda_{d1}(\tau_1)\Big\}.$$

Имеем

$$s(\lambda) \asymp \lambda^\alpha, \quad \omega_\alpha(\lambda) \asymp \lambda^\alpha \quad (\lambda_j \geq \delta), \quad \omega_\alpha(\lambda) \lesssim \lambda^\alpha \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+^d), \tag{4.8}$$
$$f(\lambda)\omega_\alpha(\lambda) \in E^{a_1+2,\ldots,a_d+2} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\lambda).$$

При выполнении условий (4.6) [11, лемма 1]

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d} |f(\lambda_k(\tau))|\, \omega_\alpha(\lambda_k(\tau)) \lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, \omega_\alpha(\lambda)\, d\lambda.$$

Отсюда и из (4.8), леммы 6

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau))|f(\lambda_k(\tau))| \lesssim \sum_{k\in\mathbb{N}^d} |f(\lambda_k(\tau))|\, \omega_\alpha(\lambda_k(\tau)) \lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, \omega_\alpha(\lambda)\, d\lambda$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, \lambda^\alpha\, d\lambda \lesssim \int_{(V_\delta)^c} |f(\lambda)|\, \lambda^\alpha\, d\lambda \lesssim \int_{(V_\delta)^c} |f(\lambda)|\, d\sigma(\lambda) \lesssim \int_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, d\sigma(\lambda).$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть a, τ, $\gamma > 0$, $0 < \delta \leq 1/(4\tau)$, $L > 0$, весовая функция $s(\lambda) \asymp \lambda^a$ $(\lambda \geq \delta)$, для положительной возрастающей последовательности $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ выполнены условия*

$$\beta_1 \geq \delta, \quad \beta_{n+1} - \beta_n \geq \gamma, \quad \Big|\beta_n - \frac{\pi n}{a}\Big| \leq L.$$

Если $\tau < a$ и $f \in E^\tau \cap L^1(\mathbb{R}_+, s(\lambda)d\lambda)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| s(\lambda)\, d\lambda \lesssim \sum_{n=1}^\infty s(\beta_n)|f(\beta_n)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При указанных условиях на последовательность $\{\beta_n\}$ для функции $f \in E^\tau$, $\tau < a$, в [11, теорема 2] доказано неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| \lambda^a\, d\lambda \lesssim \sum_{n=1}^\infty \beta_n^a |f(\beta_n)|.$$

Применяя лемму 5, получим

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| s(\lambda)\, d\lambda \lesssim \int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda)| \lambda^a\, d\lambda \lesssim \sum_{n=1}^\infty \beta_n^a |f(\beta_n)| \lesssim \sum_{n=1}^\infty s(\beta_n)|f(\beta_n)|.$$

Лемма доказана.

Для одномерных весов $s_j(\lambda_j)$, определенных в (1.4), и функций $f \in E^{2\tau_j} \cap L^1(\mathbb{R}_+, d\sigma_j)$ справедливы квадратурные формулы Гаусса [9, теорема 3.1]

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\lambda_j)\, d\sigma_j(\lambda_j) = \sum_{k_j=1}^{\infty} \gamma_{k_j}(\tau_j) f(\lambda_{jk_j}(\tau_j)), \tag{4.9}$$

где узлы $\lambda_{jk_j}(\tau_j)$ — положительные нули собственной функции $\varphi(\tau_j, \lambda_j)$, веса $\gamma_{k_j}(\tau_j) > 0$,

$$\gamma_{k_j}(\tau_j) \asymp k_j^{2\alpha_j+1} \quad (k_j \to \infty), \tag{4.10}$$

а ряд (4.9) сходится абсолютно.

Нам необходим многомерный вариант квадратурной формулы Гаусса (4.9). Пусть

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d),\ \tau_j > 0, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d,$$

$$\lambda_k(\tau) = (\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{dk_d}(\tau_d)), \quad \gamma_k(\tau) = \prod_{j=1}^{d} \gamma_{jk_j}(\tau_j) > 0.$$

Лемма 9. *Если* $f \in E^{2\tau} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, *то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d} \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)), \tag{4.11}$$

причем ряд (4.11) *сходится абсолютно.*

Доказательство. Согласно (4.10), (4.8), (4.7)

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau)|f(\lambda_k(\tau))| \lesssim \sum_{k\in\mathbb{N}^d} s(\lambda_k(\tau))|f(\lambda_k(\tau))| \lesssim \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} |f(\lambda)|\, d\sigma(\lambda).$$

Остается доказать равенство (4.11). Применим индукцию по d. При $d = 1$ (4.11) совпадает с (4.9). По теореме Фубини для почти всех $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$ существует интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{d-1}} |f(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d)| \prod_{j=1}^{d-1} s_j(\lambda_j)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_{d-1},$$

поэтому по индуктивному предположению для почти всех $\lambda_d \in \mathbb{R}_+$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{d-1}} f(\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_d) \prod_{j=1}^{d-1} s_j(\lambda_j)\, d\lambda_1 \dots d\lambda_{d-1}$$

$$= \sum_{\substack{k_j\in\mathbb{N}\\ 1\le j\le d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d), \tag{4.12}$$

причем для почти всех λ_d ряд (4.12) сходится абсолютно. Предположим, что ряд (4.12) можно почленно проинтегрировать. Тогда согласно (4.9) получим (4.11):

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} f(\lambda) s(\lambda)\, d\lambda = \sum_{\substack{k_j\in\mathbb{N}\\ 1\le j\le d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j) \int\limits_{\mathbb{R}_+} f(\lambda_{1k_1}(\tau_1), \dots, \lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}), \lambda_d) s_d(\lambda_d)\, d\lambda_d$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau) f(\lambda_k(\tau)).$$

Для возможности почленного интегрирования достаточно показать, что функция

$$g(\lambda_d) = \sum_{\substack{k_j\in\mathbb{N}\\1\le j\le d-1}} \prod_{j=1}^{d-1} \gamma_{jk_j}(\tau_j)|f(\lambda_{1k_1}(\tau_1),\dots,\lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}),\lambda_d)| \in L_1(\mathbb{R}_+, d\sigma_d). \tag{4.13}$$

Функция $f(\lambda_{1k_1}(\tau_1),\dots,\lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}),\lambda_d)$ имеет тип τ_d по переменной λ_d. Если $a_d > \tau_d$, то согласно лемме 8

$$\int_{\mathbb{R}_+} |f(\lambda_{1k_1}(\tau_1),\dots,\lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}),\lambda_d)| s_d(\lambda_d)\, d\lambda_d$$

$$\lesssim \sum_{k_d\in\mathbb{N}} s_d(\lambda_{dk_d}(a_d))|f(\lambda_{1k_1}(\tau_1),\dots,\lambda_{(d-1)k_{d-1}}(\tau_{d-1}),\lambda_{dk_d}(a_d))|. \tag{4.14}$$

Если $\tau' = (\tau_1,\dots,\tau_{d-1},a_d)$, то из (4.13), (4.14) $\int_{\mathbb{R}_+} |g(\lambda_d)| s_d(\lambda_d)\, d\lambda_d \lesssim \sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} s(\lambda_k(\tau'))|f(\lambda_k(\tau'))|$. Так как $f \in L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$, то в силу леммы 7 последний ряд сходится. Лемма доказана.

Лемма 10. *Если $r>0$, норма $|(x_1,\dots,x_d)|_V$ — функция, четная по каждой переменной, $a=(a_1,\dots,a_d)$, $a_j>0$, Π_a — параллелепипед* (1.8), *$\tau_{r,a}^V$ — единственное решение уравнения*

$$|(\lambda_{11}(a_1\tau),\dots,\lambda_{d1}(a_d\tau))|_V = r,$$

то

$$\tau(rV,\Pi_a)_{2,\mu} \ge 2\tau_{r,a}^V.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\tau_{r,a}^V = \tau_r$. Предположим, что $\tau(rV,\Pi_a)_{2,\mu} < 2\tau' < 2\tau_r$.

Согласно леммам 2, 3 существует функция $f^* \in K(2\tau'\Pi_a)$, обладающая свойствами

$$f^* \in L^1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma), \quad \mathcal{F}^{-1}f^*(0)\ge 0, \quad f^*(\lambda)\le 0,\ |\lambda|_V \ge r, \quad f^*(0)>0. \tag{4.15}$$

Из свойств нулей собственных функций $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$ для некоторого $\varepsilon>0$ и произвольного $k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{N}^d$ параллелепипеды

$$\Pi_{k,\varepsilon} = \prod_{j=1}^{d} [\lambda_{jk_j}(a_j(\tau'+\varepsilon)), \lambda_{jk_j}(a_j\tau')] \subset (rV)^c.$$

Если $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_d) \in \prod_{j=1}^d [a_j\tau', a_j(\tau'+\varepsilon)]$, то $f^* \in E^{2\tau_1,\dots,2\tau_d} \cap L_1(\mathbb{R}_+^d, d\sigma)$ и, применяя (4.15), лемму 9, получим

$$0 \le J^{-1}f^*(0) = \int_{\mathbb{R}_+^d} f^*(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}^d}^{\infty} \gamma_k(\tau) f^*(\lambda_k(\tau)) \le 0.$$

Следовательно, на параллелепипедах $\Pi_{k,\varepsilon}$ функция $f^*(\lambda)=0$, поэтому $f^*(\lambda)\equiv 0$. Это противоречит условию $f^*(0)>0$ (см. (4.15)). Лемма доказана.

Из леммы 10 и (4.2) вытекает теорема 2.

Заключение

В работе получены достаточно общие результаты. Тем не менее было бы интересно усилить их в двух направлениях. Лемма 10 показывает, что нижние оценки оптимального аргумента получены в гораздо более общей ситуации, чем верхние оценки. Было бы интересно предложить новые подходы к построению целых функций $f \in K(\tau U)$, для которых $f(\lambda) \le 0$ при $\lambda \in (rV)^c$. Также интересно результаты работы распространить на случай пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ с весом

$$w(x) = \prod_{j=1}^{d} w_j(|x_j|), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Для этого необходимо собственную функцию $\varphi(t,\lambda)$ с $\mathbb{R}_+^d \times \mathbb{R}_+^d$ продолжить на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ и, основываясь на этом продолжении, построить гармонический анализ в пространствах $L^1(\mathbb{R}^d)$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ с весом $w(x)$. На самом деле достаточно продолжить одномерные собственные функции $\varphi_j(t_j,\lambda_j)$, $j = 1,\dots,d$, с $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Такие продолжения для степенного и гиперболического весов известны (см. [5; 6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: Proc. Intern. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
3. **Бердышева Е.Е.** Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Мат. заметки. 1999. Т. 66, №3. С. 336–350.
4. **Горбачев Д.В.** Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, №2. С. 179–187.
5. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, №3. С. 338–348.
6. **Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A.** Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight // Math. Notes. 2014. Vol. 96, no. 5. P. 904–913.
7. **Вепринцев Р.А.** Приближение в L_2 частичными интегралами многомерного преобразования Якоби // Мат. заметки. 2015. Т. 97, №6. С. 815–831.
8. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Приближение в L_2 частичными интегралами преобразования Фурье по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2016. Т. 100, №4. С. 519–530.
9. **Горбачев Д.В., Иванов В.И.** Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа // Мат. сб. 2015. Т. 206, №8. С. 63–98.
10. **Арестов В.В., Попов В.Ю.** Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Изв. вузов. Математика. 1995. №8. С. 13–20.
11. **Иванов В.И., Юнпин Лю, Смирнов О.И.** О некоторых классах целых функций экспоненциального типа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 70–80.

Поступила 30.07.2016

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук
профессор, зав. кафедрой
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Вепринцев Роман Андреевич
канд. физ.-мат. наук
Тульский государственный университет
e-mail: veprintsevroma@gmail.com

REFERENCES

1. Chernykh N.I. Jackson's inequality in L_2. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 75–78.
2. Arestov V.V., Chernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials. *Approximation and functions spaces*: *Proc. Intern. Conf., Gdansk, 1979*, Amsterdam: North-Holland, 1981, pp. 25–43.
3. Berdysheva E.E. Two related extremal problems for entire functions of several variables. *Math. Notes*, 1999, vol. 66, no. 3, pp. 271–282.
4. Gorbachev D.V. Extremum problems for entire functions of exponential spherical type. *Math. Notes*, 2000, vol. 68, no. 2, pp. 159–166.
5. Ivanov A.V., Ivanov V.I. Optimal arguments in Jackson's inequality in the power-weighted space $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 3, pp. 320–329.
6. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Veprintsev R.A. Optimal argument in sharp Jackson's inequality in the space L_2 with the hyperbolic weight. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 5, pp. 904–913.
7. Veprintsev R.A. Approximation of the multidimensional Jacobi transform in L_2 by partial integrals. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 6, pp. 831–845.
8. Gorbachev D.V., Ivanov V.I. Approximation in L_2 by fractional integrals of the Fourier transform in eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem. *Mat. Zametki*, 2016, vol. 100, no. 4, pp. 519–530 (in Russian).
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I. Gauss and Markov quadrature formulae with nodes at zeros of eigenfunctions of a Sturm–Liouville problem, which are exact for entire functions of exponential type. *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 7-8, pp. 1087–1122.
10. Arestov V.V., Popov V.Yu. Jackson inequalities on a sphere in L_2. *Russian Math.* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1995, vol. 39, no. 8, pp. 11–18.
11. Ivanov V.I., Smirnov O.I., Liu Yongping. On some classes of entire functions of exponential type in $L_p(\mathbb{R}^d)$-spaces with power weight. *Izv. Tula State University. Natural Sciences*, 2011, iss. 2, pp. 70–80 (in Russian).

D. V. Gorbachev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: e-mail: dvgmail@mail.ru .

V. I. Ivanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: ivaleryi@mail.ru .

R. A. Veprintsev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Tula State University, Tula, 300012 Russia,
e-mail: e-mail: veprintsevroma@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518.454

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

Н. А. Ильясов

Доказана точность в смысле порядка оценки сверху модуля гладкости k-го порядка в $L_q(\mathbb{T})$ посредством элементов последовательности наилучших приближений в $L_p(\mathbb{T})$ на классе всех функций с монотонно убывающими коэффициентами Фурье, где $1 < p < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: модуль гладкости, наилучшее приближение, обратная теорема в разных метриках, тригонометрический ряд Фурье с монотонными коэффициентами, точное в смысле порядка неравенство на классе.

N. A. Il'yasov. The inverse theorem in various metrics of approximation theory for periodic functions with monotone Fourier coefficients.

We prove the exactness with respect to order of an upper bound for the kth-order modulus of smoothness in $L_q(\mathbb{T})$ in terms of the elements of a sequence of best approximations in $L_p(\mathbb{T})$ on the class of all functions with monotonically decreasing Fourier coefficients, where $1 < p < q < \infty$ and $k \in \mathbb{N}$.

Keywords: modulus of smoothness, best approximation, inverse theorem in various metrics, trigonometric Fourier series with monotone coefficients, order-sharp inequality on a class.

MSC: 42A10, 41A27

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-153-162

Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p = \Big(\pi^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$, $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$; $E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n \in \mathbb{Z}_+$; $\omega_k(f;\delta)_p$ — модуль гладкости k-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, +\infty)$: $\omega_k(f;\delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_p\colon h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\}$, где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu} f(x+\nu h)$, $\binom{k}{\nu} = k!/\big(\nu!(k-\nu)!\big)$, $\nu = \overline{0,k}$.

Следующее утверждение представляет так называемую обратную теорему в разных метриках теории приближений периодических функций (см., например, [1, предложение 1, случай $q \le 2$; 2, теорема 1, случай $2 < q < \infty$; 3, лемма 1, случай $q = \infty$] и библиографию там).

Теорема A. *Пусть $1 \le p < q \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $\gamma = \gamma(q) = q$ при $q < \infty$ и $\gamma(\infty) = 1$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $k \in \mathbb{N}$, и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\sigma-1} E_{n-1}^{\gamma}(f)_p < \infty\,. \tag{1}$$

Тогда f почти всюду совпадает с некоторой функцией из $L_q(\mathbb{T})$ (которую после надлежащего изменения на множестве меры нуль снова обозначим через f) и справедливо неравенство

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q \le C_1(k,p,q)\bigg\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\Big)^{1/\gamma} + n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma(k+\sigma)-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\Big)^{1/\gamma}\bigg\},\quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $C_j(k, p, q \ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные постоянные, зависящие только от указанных в скобках параметров.

Автором [1, лемма 2, случай $q \le 2$; 2, лемма 3, случай $2 < q < \infty$; 3, лемма 5, случай $q = \infty$] была доказана точность в смысле порядка неравенства (2) на классах функций

$$E_p[\varepsilon] = \{f \in L_p(\mathbb{T})\colon E_{n-1}(f)_p \le \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}\},$$

где последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ удовлетворяет условиям $0 < \varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$.

Теорема B. *Пусть* $1 \le p < q \le \infty$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $k \in \mathbb{N}$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\sigma-1}\varepsilon_n^{\gamma} < \infty; \tag{3}$$

тогда

$$\sup\Big\{\omega_k\Big(f; \frac{\pi}{n}\Big)_q : f \in E_p[\varepsilon]\Big\} \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1}\varepsilon_\nu^{\gamma}\Big)^{1/\gamma} + n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma(k+\sigma)-1}\varepsilon_\nu^{\gamma}\Big)^{1/\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Напомним, что порядковое равенство $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает существование таких постоянных $0 < C_2 \le C_1$, зависящих лишь от заданных параметров (в данном случае k, p и q), что $C_2\beta_n \le \alpha_n \le C_1\beta_n$.

З а м е ч а н и е 1. Условие (3) необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $E_{n-1}(f)_p = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежала (в указанном выше смысле) $L_q(\mathbb{T})$ (см., например, [2, теорема 2] и библиографию там).

З а м е ч а н и е 2. Экстремальная функция $g(\cdot; p; \varepsilon) \in E_p[\varepsilon]$, реализующая порядковое равенство (4) в случае $1 \le p < q < \infty$, имеет вид

$$g(x; p; \varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(p; \varepsilon)\cos nx,$$

где последовательность $\{a_n(p; \varepsilon)\}$ определяется следующим образом:

$$a_n(p; \varepsilon) = \Big\{\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(\nu - n + 1)(\varepsilon_\nu^p - \varepsilon_{\nu+1}^p)}{(\nu+1)^p}\Big\}^{1/p}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Функция $g(\cdot; p; \varepsilon)$ ранее применялась В. Э. Гейтом [4, § 2, п. 1; 5, § 2, п. 2] в случае $p = 1$ и М. Ф. Тиманом [6, теорема 1] в случае $p \ge 1$. Эта функция использовалась также автором [1, лемма 2; 2, лемма 3] при доказательстве оценки снизу в порядковом равенстве (4), а именно

$$\omega_k\Big(g; \frac{\pi}{n}\Big)_q \ge C_2(k, p, q)\Big\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\varepsilon_\nu^{q}\Big)^{1/q} + n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q(k+\sigma)-1}\varepsilon_\nu^{q}\Big)^{1/q}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

при условии $\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\varepsilon_n^q < \infty \Leftrightarrow g \in L_q(\mathbb{T})$.

Следует отметить, что оценка (5) ранее установлена автором в [7, § 3, лемма 3.13, случай $q \le 2$; лемма 3.14, случай $q > 2$], при этом существенную роль сыграли леммы 3.3 и 3.11 из [7, § 3], позднее оформленные в [1, лемма 1].

З а м е ч а н и е 3. Функция $g(\cdot; p; \varepsilon)$ и утверждение отмеченной выше леммы 1 из [1] содержатся в опубликованной позднее работе [8, доказательство утверждения (B) теоремы 1, с. 1664–1672], однако в списке цитированной литературы [8] отсутствуют как работа [1], так и указанные работы В. Э. Гейта [4; 5], М. Ф. Тимана [6], а также работы автора [2; 7; 9; 10], результаты которых были использованы в соответствующих утверждениях [8].

Для заданного $p \in [1,\infty]$ обозначим через $M_p(\mathbb{T})$ класс всех функций $f \in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям $a_0(f) = 0$, $a_n(f) \downarrow 0$, $b_n(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. Известно (см., например, [11, гл. 1, § 30]), что ряды Фурье таких функций сходятся всюду за исключением, быть может, счетного множества точек $x \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, так что почти всюду на $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\bigr).$$

Отметим, что условие $a_0(f) = 0$ не умаляет общности формулируемых результатов, поскольку, полагая $\bar{f}(x) = f(x) - (1/2)a_0(f)$ при $a_0(f) \neq 0$, имеем $\omega_k(f;\delta)_p = \omega_k(\bar{f};\delta)_p$ и $E_n(f)_p = E_n(\bar{f})_p$, $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

В настоящей статье установлено, что неравенство (2) является точным в смысле порядка на всем классе $M_p(\mathbb{T})$ в случае $1 < p < q < \infty$, а именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $k \in \mathbb{N}$. Для того чтобы каждая функция $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежала $L_q(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} E_{n-1}^{q}(f)_p < \infty, \tag{6}$$

при этом имеет место порядковое равенство

$$\omega_k\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q \asymp \Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1} E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q} + n^{-k}\Bigl(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{q(k+\sigma)-1} E_{\nu-1}^{q}(f)_p\Bigr)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

З а м е ч а н и е 4. Утверждение о необходимости условия (6) ранее отмечено М.Ф. Тиманом [12, первый абзац после доказательства теоремы 9].

Доказательство теоремы приведено в разд. 1. Кроме того, в разд. 2 описывается процедура отыскания коэффициентов Фурье экстремальной функции $g(\cdot;p;\varepsilon) \in E_p[\varepsilon]$, реализующей порядковое равенство (4) в случае $1 \le p < q < \infty$.

1. Доказательство теоремы

Для удобства изложения положим $c_n(f) = \bigl(a_n^2(f) + b_n^2(f)\bigr)^{1/2}$, где $a_n(f)$, $b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in M_p(\mathbb{T})$. Очевидно, что

$$c_n(f) \downarrow 0 \quad (n \uparrow \infty), \quad 2^{-1}\bigl(a_n(f) + b_n(f)\bigr) \le c_n(f) \le a_n(f) + b_n(f),$$

и, следовательно,

$$2^{-p}\bigl(a_n(f) + b_n(f)\bigr)^p \le c_n^p(f) \le \bigl(a_n(f) + b_n(f)\bigr)^p, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Достаточность условия (6) следует из 1-й части утверждения теоремы A: (1) $\Rightarrow f \in L_q(\mathbb{T})$. Докажем *необходимость*. Пусть каждая функция $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежит $L_q(\mathbb{T})$. Поскольку $f \in M_p(\mathbb{T})$, то в силу леммы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [11, гл. X, § 3; 13, т. 2, гл. 12, лемма 6.6]): $g \in L_s(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-2} c_n^s(g) < \infty$ при $1 < s < \infty$ и $c_n(g) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, имеем $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} c_n^p(f) < \infty$. Применяя неравенство А. А. Конюшкова [14, § 1, теорема 4, неравенство (1.21); 15, § 2, неравенство (21)] и неравенство Г. Харди [16, гл. IX, теорема 346], получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} E_{n-1}^{q}(f)_p \le C_3^q(p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} \Bigl\{ n^{1-1/p} c_n(f) + \Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-2} c_\nu^p(f)\Bigr)^{1/p} \Bigr\}^q$$

$$\leq C_3^q(p)2^{q-1}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)+\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}$$

$$\leq C_3^q(p)2^{q-1}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)+C_4(p,q)\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}(n^{p-1}c_n^p(f))^{q/p}\Big\}$$

$$= C_3^q(p)2^{q-1}(1+C_4(p,q))\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f),$$

откуда

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}E_{n-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\leq C_5(p,q)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)\Big)^{1/q}, \tag{8}$$

где $C_5(p,q)=C_3(p)2^{1-1/q}(1+C_4(p,q))^{1/q}$.

Оценка сверху в (7) следует из неравенства (2) (см. теорему A). Займемся доказательством оценки снизу. Если выполнено условие (6), то $f\in L_q(\mathbb{T})\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)<\infty$. Аналогично доказательству неравенства (8) получаем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\leq C_5(p,q)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

В случае $q\leq 2$ в силу теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [13, т. 2, гл. 12, теорема 3.19]), неравенства М. Рисса (см., например, [17, гл. 5, п. 5.11, неравенство (6)]) и L_q-аналога неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [17, гл. 5, п. 5.1.32, неравенство (16), п. 5.11, неравенство (1)]) имеем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\leq C_6(q)\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_q\leq C_6(q)C_7(q)E_n(f)_q$$

$$\leq C_6(q)C_7(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n+1}\Big)_q,$$

где $S_n(f;\cdot)$ — частная сумма порядка $n\in\mathbb{N}$ ряда Фурье функции $f\in L_q(\mathbb{T})$.

В случае $q>2$ в силу неравенства (20) из [15, § 2, теорема 6] и L_q-аналога неравенства Джексона — Стечкина получаем ($[t]$ — целая часть числа t)

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\leq C_9(q)E_{[\frac{n+1}{2}]}(f)_q\leq C_9(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{[\frac{n+1}{2}]+1}\Big)_q$$

$$\leq C_9(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{2\pi}{n+1}\Big)_q\leq 2^kC_9(q)C_8(k)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n+1}\Big)_q.$$

Учитывая полученные оценки в (9), окончательно имеем

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\leq C_{10}(k,p,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Теперь оценим второе слагаемое в левой части (7). В силу неравенства А. А. Конюшкова и неравенства Г. Харди (см. доказательство оценки (8)) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p$$

$$\leq C_3^q(p)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\Big\{\nu^{1-1/p}c_\nu(f)+\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{1/p}\Big\}^q$$

$$\le 3^{q-1}C_3^q(p)\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{q/p}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}$$

$$\le 3^{q-1}C_3^q(p)\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)+C_{11}(k,p,q)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}(\nu^{p-1}c_\nu^p(f))^{q/p}$$

$$+n^{q(k+\sigma)}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{p-2}c_\mu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}$$

$$=3^{q-1}C_3^q(p)\Big\{(1+C_{11}(k,p,q))\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)+n^{q(k+\sigma)}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{q/p}\Big\}.$$

Далее, применяя неравенство Гельдера с показателями $\rho=q/p>1$ и $\rho'=q/(q-p)$ $(1/\rho+1/\rho'=1)$, получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2p/q}c_\nu^p(f)\nu^{2p/q-2}\le\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{p/q}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-2}\Big)^{1-p/q}$$

$$\le n^{p/q-1}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{p/q},$$

откуда

$$n^{1/p-1/q}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\le\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}. \tag{11}$$

Учитывая полученную оценку (11), имеем

$$n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}$$

$$\le 3^{1-1/q}C_3(p)\Big\{(1+C_{11}(k,p,q))^{1/q}n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}+n^{\sigma}\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\Big\}$$

$$\le C_{12}(k,p,q)\Big\{n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}+\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\Big\}. \tag{12}$$

Необходимая оценка для второго слагаемого в правой части (12) была установлена выше (см. доказательство неравенства (10)):

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\le C_{13}(k,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Для завершения доказательства осталось установить справедливость оценки

$$n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\le C_{14}(k,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{13}$$

В случае $q\le 2$ в силу теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. [13, т. 2, гл. 12, теорема 3.19]) имеем $(\sin z\ge(2/\pi)z,\ z\in[0,\pi/2])$

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\ge\|\Delta_{\pi/n}^k f(\cdot)\|_q\ge C_{15}(q)2^k\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big|\sin\frac{\nu\pi}{2n}\Big|^{qk}\Big)^{1/q}$$

$$\geq C_{15}(q)2^k\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Big(\sin\frac{\nu\pi}{2n}\Big)^{qk}\Big)^{1/q}\geq C_{15}(q)2^kn^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q},$$

откуда и следует требуемая оценка (13) при $q\leq 2$.

В случае $q>2$, применяя неравенство (1.19) [14, § 1, следствие 2], неравенство (7) [18, теорема 1], неравенство Г. Харди [16, гл. IX, теорема 346] и неравенство (2) [19, теорема без номера], получаем

$$n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk+q-2}c_\nu^q(f)\Big)^{1/q}\leq C_{16}(k+1,q)n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\omega_{k+1}^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\Big)^{1/q}$$

$$\leq C_{16}C_{17}(k+1,q)n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-(q+1)}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{2(k+1)-1}E_{\mu-1}^2(f)_q\Big)^{q/2}\Big\}^{1/q}$$

$$\leq C_{16}C_{17}C_{18}(q)n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-(q+1)}(\nu^{2(k+1)}E_{\nu-1}^2(f)_q)^{q/2}\Big\}^{1/q}$$

$$=C_{16}C_{17}C_{18}n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}E_{\nu-1}^q(f)_q\Big\}^{1/q}\leq C_{16}C_{17}C_{18}C_{19}(k,q)\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,$$

откуда следует требуемая оценка в (13) при $q>2$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 5. Достаточность условия (6) можно доказать без привлечения теоремы A. Поскольку $f\in M_p(\mathbb{T})$, то в силу леммы Г. Харди и Дж. Литтлвуда имеем: $f\in L_q(\mathbb{T})\Leftrightarrow\sum_{n=1}^\infty n^{q-2}c_n^q(f)<\infty$. Применяя неравенство (1.19) [14, § 1, следствие 2], правое неравенство в (1.3) [20, § 1, теорема 1.1] и неравенство Г. Харди [16, гл. IX, теорема 346] получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}c_n^q(f)\leq C_{20}(p)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}\Big(n^{1/p-1}\omega_1\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big)^q=C_{20}\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\omega_1^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\leq C_{20}C_{21}^q(p)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\Big\{n^{-1}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{1/p}\Big\}^q$$

$$=C_{20}C_{21}^q\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(q+1-q\sigma)}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{q/p}\leq C_{20}C_{21}^qC_{22}(p,q)\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p.$$

З а м е ч а н и е 6. Оценку сверху в (7) можно также получить без привлечения неравенства (2) (см. теорему A). Из сходимости ряда (6) следует, что $f\in L_q(\mathbb{T})$, а поскольку $f\in M_p(\mathbb{T})$, то $f\in M_q(\mathbb{T})$. Отсюда в силу правого неравенства в (1.3) [20, § 1, теорема 1.1] и неравенства разных метрик для наилучших приближений П.Л. Ульянова [21, § 4, теорема 4, неравенство (4.3)] имеем

$$\omega_k\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\leq C_{23}(k,q)n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}E_{\nu-1}^q(f)_q\Big)^{1/q}$$

$$\leq C_{23}C_{24}(p,q)n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\Big[\nu^\sigma E_{\nu-1}(f)_p+\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big)^{1/q}\Big]^q\Big\}^{1/q}$$

$$\leq C_{23}C_{24}n^{-k}\Big\{2^{q-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p+2^{q-1}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p\Big\}^{1/q}$$

$$=C_{23}C_{24}2^{1-1/q}n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E_{\nu-1}^q(f)_p+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E_{\mu-1}^q(f)_p$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{qk-1}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big\}^{1/q}$$

$$\le C_{23}C_{24}2^{1-1/q}n^{-k}\Big\{\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p+\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{qk-1}$$

$$+n^{qk}\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big\}^{1/q}$$

$$\le C_{23}C_{24}2^{1-1/q}\Big\{2^{1/q}n^{-k}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{q(k+\sigma)-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\Big)^{1/q}+\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big)^{1/q}\Big\}.$$

2. О процедуре отыскания коэффициентов Фурье экстремальной функции

Вначале напомним, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ называется выпуклой, если $\Delta^2 a_n\ge 0$, где $\Delta^2 a_n=\Delta a_n-\Delta a_{n+1}$, $\Delta a_n=a_n-a_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Известно (см., например, [11, вводный материал, § 3; 13, т. 1, гл. 3, п. 4, теорема (4.1); 22, т. 1, гл. 7, п. 7.1.2, п. 7.1.3]), что если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, то $a_n\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$, $n\Delta a_n\to 0$ $(n\to\infty)$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n=a_0$. Далее (см., например, [11, гл. 1, § 30, теорема 4; 13, т. 1, гл. 5, п. 1, теорема 1.5; 22, т. 1, гл. 7, п. 7.3.1]), если $\{a_n\}$ выпукла и $a_n\to 0$ $(n\to\infty)$, то ряд

$$\frac{1}{2}\,a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \tag{14}$$

сходится всюду на $\mathbb{R}$ за исключением, быть может, точек $x\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$, к некоторой неотрицательной функции $g\in L_1(\mathbb{T})$ и является рядом Фурье этой функции, т. е. $a_n=a_n(g)$, $n=0,1,2,\ldots$. При этом имеют место равенства $(x\ne 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi))$

$$g(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_nF_n(x),$$

$$\|g\|_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\Delta^2 a_n=a_0,$$

где $F_n(x)$ — ядро Фейера, $n\in\mathbb{Z}_+$.

Полагая $(n+1)\Delta^2 a_n=\Delta\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{Z}_+$, находим коэффициенты Фурье $a_n(p;\varepsilon)$ функции $g(x;p;\varepsilon)$ в случае $p=1$ (см. введение, замечание 2):

$$a_n(1;\varepsilon)=a_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta a_\nu=\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\Delta^2 a_\mu=\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu}{\mu+1}=\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu}{\mu+1}\sum_{\nu=n}^{\mu}1$$

$$=\sum_{\mu=n}^{\infty}\frac{\Delta\varepsilon_\mu}{\mu+1}(\mu-n+1)=\sum_{\mu=n}^{\infty}\Big(1-\frac{n}{\mu+1}\Big)\Delta\varepsilon_\mu.$$

В случае $p>1$ в силу порядкового равенства (7) требуемую функцию $g(\cdot;p;\varepsilon)$ будем искать также в виде суммы ряда (14), где $a_n\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$. Кроме того, требуется выполнение условий $\sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p<\infty\Leftrightarrow g\in L_p(\mathbb{T})$ (в силу леммы Г. Харди и Дж. Литтлвуда, указанной выше в разделе 1 при доказательстве теоремы) и $\Delta^2 a_n^p\ge 0$, $n\in\mathbb{Z}_+$ (т. е. последовательность $\{a_n^p\}$ выпукла). Привлечение выпуклых последовательностей $\{a_n^p\}$ обусловлено отчасти и тем, чтобы коэффициенты Фурье $a_n(p;\varepsilon)$ функции $g(\cdot;p;\varepsilon)$ вычислялись аналогично рассмотренному случаю $p=1$.

Из условия $\Delta^2 a_n^p \ge 0 \Leftrightarrow \Delta a_n^p - \Delta a_{n+1}^p \ge 0$ следует, что $\Delta a_n^p \ge \Delta a_{n+1}^p$, т. е. $\Delta a_n^p \downarrow$ $(n \uparrow)$, а поскольку $\Delta a_n^p = a_n^p - a_{n+1}^p \to 0$ при $n \to \infty$, то $\Delta a_n^p \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ и

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta^2 a_\nu^p = \sum_{\nu=n}^{\infty} (\Delta a_\nu^p - \Delta a_{\nu+1}^p) = \Delta a_n^p, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Учитывая последнее равенство, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p \Delta^2 a_n^p \le C_{25}(p) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n^p \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{p-1} = C_{25}(p) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{p-1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta^2 a_n^p$$

$$= C_{25}(p) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{p-1} \Delta a_\nu^p \le C_{25}(p) C_{26}(p) \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta a_\nu^p \sum_{n=0}^{\nu} (n+1)^{p-2}$$

$$= C_{25}(p) C_{26}(p) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta a_\nu^p$$

$$= C_{25}(p) C_{26}(p) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p = C_{25}(p) C_{26}(p) \Big\{ a_0^p + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p \Big\}$$

$$\le C_{25}(p) C_{26}(p) \Big\{ a_0^p + C_{27}(p) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p \Big\} < \infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_{n+1}^p \le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta a_\nu^p$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta a_\nu^p \sum_{n=0}^{\nu} (n+1)^{p-2} \le C_{28}(p) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{p-1} \Delta a_\nu^p = C_{28}(p) \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)^{p-1} \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta^2 a_n^p$$

$$= C_{28}(p) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n^p \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{p-1} \le C_{28}(p) C_{29}(p) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p \Delta^2 a_n^p.$$

В силу полученных оценок имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p \Delta^2 a_n^p < \infty.$$

Отметим, что изменение порядков суммирования при доказательстве приведенных выше оценок допустимо, поскольку, например, если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} a_n^p < \infty$, то $(n+1)^{p-1} a_n^p \to 0$ $(n \to \infty)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-1} \Delta a_n^p < \infty$, откуда следует, что

$$(n+1)^p \Delta a_n^p \to 0 \ (n \to \infty) \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^p \Delta^2 a_n^p < \infty.$$

Полагая $(n+1)^p \Delta^2 a_n^p = \Delta \varepsilon_n^p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, находим коэффициенты Фурье $a_n(p;\varepsilon)$ функции $g(\cdot;p;\varepsilon)$ в случае $p > 1$ (см. введение, замечание 2):

$$a_n^p(p;\varepsilon) = a_n^p = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Delta a_\nu^p = \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \Delta^2 a_\mu^p = \sum_{\nu=n}^{\infty} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{\Delta \varepsilon_\mu^p}{(\mu+1)^p} = \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{\Delta \varepsilon_\mu^p}{(\mu+1)^p} \sum_{\nu=n}^{\mu} 1$$

$$= \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{\Delta \varepsilon_\mu^p}{(\mu+1)^p} (\mu - n + 1) = \sum_{\mu=n}^{\infty} \Big(1 - \frac{n}{\mu+1}\Big) \frac{1}{(\mu+1)^{p-1}} \Delta \varepsilon_\mu^p.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов Н.А.** О приближении периодических функций средними Фейера — Зигмунда в разных метриках // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 48–57.
2. **Ильясов Н.А.** Обратная теорема теории приближений в разных метриках // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 6. С. 57–65.
3. **Ильясов Н.А.** К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 53–61.
4. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
5. **Гейт В.Э.** О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7 (122). С. 19–30.
6. **Timan M.F.** Orthonormal systems satisfying an inequality of S. M. Nikol'ski // Anal. Math. 1978. Vol. 4, no. 1. P. 75–82.
7. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1987. 150 с.
8. **Simonov B., Tikhonov S.** Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 9. P. 1654–1684.
9. **Ильясов Н.А.** Приближение периодических функций средними Зигмунда // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 3. С. 367–382.
10. **Ильясов Н.А.** К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 220–234.
11. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
12. **Тиман М.Ф.** О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций // Изв. вузов. Математика. 1974. № 10 (149). С. 61–74.
13. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.; Т. 2. 537 с.
14. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44 (86), № 1. С. 53–84.
15. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
16. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
17. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
18. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46 (88), № 1. С. 125–132.
19. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах L_p // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18, № 1. С. 134–137.
20. **Кокилашвили В.М.** О приближении периодических функций // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
21. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81 (123), № 1. С. 104–131.
22. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М.: Мир, 1985. Т. 1. 264 с.; Т. 2. 400 с.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент кафедры математического анализа
Бакинский государственный университет
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 10.09.2016

REFERENCES

1. Il'yasov N.A. Approximation of periodic functions by Fejer–Zygmund means in various metrics. *Math. Notes*, 1990, vol. 48, no. 4, pp. 1004–1010.
2. Il'yasov N.A. An inverse approximation theorem in various metrics. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 6, pp. 1253–1260.

3. Il'yasov N.A. An inverse theorem of approximation theory of periodic functions in various metrics. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 791–798.
4. Gheit V.È. On the exactness of certain inequalities in approximation theory. *Math. Notes*, 1971, vol. 10, no. 5, pp. 768–776.
5. Gheit V.È. The structural and constructive properties of a function and its conjugate in L. *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 1972, no. 7 (122), pp. 19–30 (in Russian).
6. Timan M.F. Orthonormal systems satisfying an inequality of S. M. Nikol'ski. *Anal. Math.*, 1978, vol. 4, no. 1, pp. 75–82.
7. Il'yasov N.A. Embedding theorems for structural and constructive characteristics of functions: Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Baku, 1987, 150 p. (in Russian).
8. Simonov B., Tikhonov S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness. *J. Approx. Theory*, 2010, vol. 162, no. 9, pp. 1654–1684.
9. Il'yasov N.A. Approximation of periodic functions by Zygmund means. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 3, pp. 200–209.
10. Il'yasov N.A. On the direct theorem of approximation theory of periodic functions in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 215–230.
11. Bari N.K. *Ttrigonometricheskie ryady* (A Treatise on trigonometric series). Oxford, New York: Pergamon Press, 1964.
12. Timan M.F. The imbedding of the $L_p^{(k)}$ classes of functions. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1974, no. 10 (149), pp. 61–74 (in Russian).
13. Zygmund A. *Trigonometric series*, 2nd ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. 1, 2.
14. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44 (86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
15. Konyushkov A.A. On best approximations in the conversion of the Fourier coefficients by the method of arithmetic average and on the Fourier series with non-negative coefficients. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 56–78 (in Russian).
16. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press, 1934.
17. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* Macmillan, Pergamon Press, 1963.
18. Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in L_p spaces $(1 \le p \le \infty)$. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 46 (88), no. 1, pp. 125–132 (in Russian).
19. Timan M.F. On the Jackson theorem in L_p spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 1966, vol. 18, no. 1, pp. 134–137 (in Russian).
20. Kokilashvili V.M. On approximation of periodic functions. *Tr. Tbilis. Mat. Inst.*, 1968, vol. 34, pp. 51–81 (in Russian).
21. Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Math. USSR-Sb.*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 103–126.
22. Edwards R. *Fourier series, a modern introduction.* New York: Springer-Verlag, 1979, vol. 1,2.

N. A. Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan,
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 512.542+519.175

СТАБИЛИЗАТОРЫ ВЕРШИН ГРАФОВ С ПРИМИТИВНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ И УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА. III[1]

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Это статья — третья из цикла статей, результаты которого влекут справедливость усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок. Она посвящена рассмотрению случая примитивных групп подстановок с простым цоколем классического неортогонального лиева типа и непараболическим стабилизатором точки.

Ключевые слова: конечная примитивная группа подстановок, почти простая группа, группа классического лиева типа, стабилизатор точки, гипотеза Симса.

A. S. Kondrat'ev, V. I. Trofimov. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. III.

This is the third in a series of papers whose results imply the validity of a strengthened version of the Sims conjecture on finite primitive permutation groups. In this paper, the case of primitive groups with simple socle of classical non-orthogonal Lie type and non-parabolic point stabilizer is considered.

Keywords: finite primitive permutation group, almost simple group, group of classical Lie type, stabilizer of a point, Sims conjecture.

MSC: 20B15, 20D06, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-163-172

1. Введение

Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G. Следуя [3], для каждого $i \in \mathbb{N}$ индуктивно определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i-ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1},\ (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}.$$

Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1},\ (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}.$$

Нас интересует случай, когда $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ (соответствующую мотивировку, связанную с усиленной версией гипотезы Симса, см. в [2; 3]). Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначается через Π. Мы рассматриваем тройки из Π с точностью до следующей эквивалентности: тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π эквивалентны, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Отметим, что согласно [3, ч. I, предложение 1.1(a)] вторые взаимные ядра $(M_1, M_2)^2$ и $(M_2, M_1)^2$ являются p-группами для некоторого простого числа p.

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061).

Цель нашего цикла статей — описать множество Π. В [3] рассмотрены случаи, когда группа G не является почти простой группой, когда группа G имеет простой знакопеременный цоколь и когда G — группа с простым цоколем $\mathrm{Soc}(G)$ исключительного лиева типа и $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$. Данная статья цикла посвящена рассмотрению случая, когда G — группа с простым цоколем $\mathrm{Soc}(G)$ классического неортогонального лиева типа и $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть* $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\mathrm{Soc}(G)$ *— простая линейная, унитарная или симплектическая группа и* $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ *— непараболическая подгруппа в* $\mathrm{Soc}(G)$. *Тогда* $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ *и справедливо одно из следующих утверждений*:

(a) $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 2, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$, $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 2*-подгруппа в* M_1;

(b) $G \cong U_3(8) : 3_1$ *или* $U_3(8) : 6$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 3, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3))$ *или* $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : GL_2(3))$ *соответственно*, $(M_1, M_2)^1 = O_3(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_3(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 3*-подгруппа или ее нормализатор в* M_1 *соответственно*;

(c) $G \cong L_4(3) : 2_2$ *или* $\mathrm{Aut}(L_4(3))$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ *и* $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ *— группы порядка* 2, *не содержащиеся в* $\mathrm{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times S_4$ *или* $\mathbb{Z}_2 \times (S_4 \wr \mathbb{Z}_2)$ *соответственно*, $(M_1, M_2)^1 = O_2(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_2(M_2)$ *и* $M_1 \cap M_2$ *— силовская* 2*-подгруппа в* M_1.

В каждом случае из пп. (a), (b) *и* (c) *тройки* (G, M_1, M_2) *из* Π *существуют и образуют один класс эквивалентности.*

Используемые в статье терминология и обозначения в основном стандартны (см., например, [5–7; 9]). Через $L_n^{\varepsilon}(q)$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ обозначается $L_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и $U_n(q)$ при $\varepsilon = -$, а через $S_n(q)$ — группа $PSp_n(q)$ (для четного n).

Укажем на опечатки в [3, ч. II]: на с. 184, строка 2 сверху, вместо L должно быть G; строка 11 сверху, вместо “$G = L$” должно быть “$G = L$, кроме случая (*ii*)”; строка 23 сверху, вместо t должно быть Z.

2. Доказательство теоремы

Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\mathrm{Soc}(G)$ — простая группа $L_n(q)$ $(n \geq 2)$, $U_n(q)$ $(n \geq 3)$ или $S_n(q)$ $(n \geq 4$ четно$)$, где q — степень простого числа r, $M_1 \cap \mathrm{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\mathrm{Soc}(G)$ и $M_2 = M_1^g = gM_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Положим для краткости $L = \mathrm{Soc}(G)$ (мы считаем, отождествляя L с $\mathrm{Inn}(L)$, что $\mathrm{Inn}(L) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(L)$), $M = M_1$, $M_0 = M \cap L$, $K_1 = (M_1, M_2)^2$, $K_2 = (M_2, M_1)^2$, $T_1 = K_1 \cap L$, $T_2 = K_2 \cap L$, $R_1 = O_p((M_1, M_2)^1)$ и $R_2 = O_p((M_2, M_1)^1)$. Ввиду [3, ч. I, предложение 1.1; ч. II, предложение 1.1] подгруппа M есть p-локальная максимальная подгруппа в G с $F^*(M) = O_p(M)$ для некоторого простого числа p (отличного от r), $F^*(M_0) = O_p(M_0)$, $G = ML$, $K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq O_p(M_1) \cap O_p(M_2)$ и $K_1 \neq K_2$. Поскольку $G = ML$, будем считать, что $g \in L$. Ввиду [3, ч. I, теорема 4] можно считать, что L не изоморфна группам $L_2(q)$, $q \in \{4, 5, 9\}$, $L_4(2)$, $S_4(2)'$.

Лемма 2.1. *Выполняется одно из следующих утверждений*:
(i) *подгруппы* K_1 *и* K_2 *имеют нетривиальные пересечения с* L;
(ii) $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$;
(iii) $G \cong L_4(3) : 2$, *или* $\mathrm{Aut}(L_4(3))$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times S_4$, *или* $\mathbb{Z}_2 \times (S_4 \wr \mathbb{Z}_2)$ *соответственно*;
(iv) $G \cong U_3(8) : 3_1$, *или* $U_3(8) : 6$ *и* $M \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3))$, *или* $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : GL_2(3))$ *соответственно.*

Доказательство. Предположим, что п. (i) неверен, и пусть $K_1 \cap L = 1$ (случай $K_2 \cap L = 1$ рассматривается аналогично). Поскольку K_1 — неединичная нормальная p-подгруппа в M, существует минимальная неединичная нормальная в M подгруппа E, содержащаяся в K_1. Ясно, что $M_0 = C_L(E)$.

Ввиду минимальности E, равенства $G = ML$ и [11, 2.5.12] подгруппа E порождается некоторым элементом e, следовательно, $M_0 = C_L(e)$ и $M = N_G(\langle e \rangle)$. Элемент e индуцирует на L внешний автоморфизм порядка p. Согласно [11, 2.5.12] этот автоморфизм внутреннедиагональный, графовый, полевой или графово-полевой. Ввиду [11, 4.5.1, 4.8.2, 4.9.1; 5], равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и максимальности в G подгруппы M заключаем, что выполняется один из пп. (ii)–(iv). $\square$

Предположим сначала, что $L \cong S_4(q)$, где q четно и $q \geq 4$. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.14] группа G содержит нетривиальный графовый автоморфизм группы L, а подгруппа M_0 изоморфна $\mathbb{Z}_{q-1}^2 : D_8$, где $q > 4$, $\mathbb{Z}_{q+1}^2 : D_8$ или $\mathbb{Z}_{q^2+1} : \mathbb{Z}_4$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ подгруппа M_0 является нормализатором в L абелевой силовской p-подгруппы $O_p(M_0)$ из L. Теперь с учетом леммы 2.1 и включения $T_2 \leq O_p(M_0)$ ясно, что подгруппа $O_p(M_0)$ содержится в $N_{M_0}(T_2) = M_1 \cap M_2 \cap L$ и, следовательно, нормальна в M_1 и M_2, что невозможно.

В дальнейшем доказательстве теоремы будем предполагать, что L не изоморфна $S_4(q)$ для четного q. Согласно теореме 2.2.19 из [6], являющейся уточненной версией теоремы Ашбахера [4], группа M принадлежит какому-нибудь из классов Ашбахера $C_i(G)$, $1 \leq i \leq 8$, геометрических подгрупп группы G, которые определены в [6, разд. 2.2], причем возможное строение подгруппы M_0 приведено в [6, табл. 2.3, 2.5–2.11].

Далее, в леммах 2.2–2.8, мы рассмотрим возможность включения подгруппы M в каждый класс $C_i(G)$, $1 \leq i \leq 8$, в отдельности. При этом, говоря о выполнении какого-либо из пп. (a), (b) или (c) теоремы, мы подразумеваем справедливость для него и последнего утверждения теоремы.

Лемма 2.2. *$M \notin C_1(G)$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.2, 2.3; 12, разд. 2.9, 4.1; 11, теорема 4.5.1; 5] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_3(2)$, $M_0 \cong S_3$;

(ii) $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$, $M_0 \cong GL_2(3)$;

(iii) $L \cong U_3(3)$, $M_0 \cong (\mathbb{Z}_4 \circ SL_2(3)).2 \cong SL_2(3).4 \cong 4{\cdot}S_4$;

(iv) $L \cong U_5(2)$, $M_0 \cong S_3 \times (3_+^{1+2} : SL_2(3))$.

Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны.

В случаях (i) и (ii) ввиду $T_1T_2 \leq O_p(M_0)$ имеем $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. Поэтому выполняется один из случаев (iii), (iv).

Положим $Z_i = Z(O_p(M_i \cap L))$ и $\langle z_i \rangle = (O_p(M_i \cap L))'$ для $i \in \{1, 2\}$. Можно считать, что $z_1^g = z_2$. Поскольку $T_1T_2 \leq R_1 \cap R_2$, имеем $(T_i)' \leq \langle z_1 \rangle \cap \langle z_2 \rangle = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому подгруппы T_1 и T_2 абелевы, а значит, подгруппы Z_1T_1 и Z_2T_2 абелевы.

Покажем, что $T_i \leq Z_i$ для $i \in \{1, 2\}$. Предположим противное, т. е. что $T_i \not\leq Z_i$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Подгруппа $M_i \cap L$ действует неприводимо на $O_p(M_i \cap L)/Z_i$, следовательно, $Z_iT_i = O_p(M_i \cap L)$, что противоречит неабелевости подгруппы $O_p(M_i \cap L)$. Поэтому наше утверждение доказано.

Подгруппа M_0 содержит некоторую силовскую p-подгруппу S группы L. С учетом [1, теорема 1] легко видеть, что $N_L(S) < M_0$. Теорема Бернсайда [9, теорема 7.1.1] влечет, что подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(S)$ относительно L. Отсюда следует, что подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(S)$ относительно L, а значит подгруппа $\langle z_1 \rangle$ сильно замкнута в $Z(O_p(M_0))$ относительно L.

Предположим, что T_2 не лежит в Z_1. Тогда $C_{O_p(M_0)}(T_2) = Z_1T_2 \leq M_1 \cap M_2$ и, следовательно, $Z_1 < Z_1T_2 \leq R_1$. Подгруппа $M_1 \cap L$ действует неприводимо на $O_p(M_0)/Z_1$, поэтому $R_1 \cap L = O_p(M_0)$ и, следовательно, коммутант и центр подгруппы $R_1 \cap L$ равны $\langle z_1 \rangle$ и Z_1 соответственно. Подгруппа T_2 нормальна в R_1 и не содержится в Z_1, следовательно, $\langle z_1 \rangle \leq [T_2, R_1 \cap L] \leq T_2$. Но тогда по предыдущему абзацу имеем $\langle z_1 \rangle = \langle z_2 \rangle$, что невозможно.

Итак, T_2 лежит в Z_1. Ясно, что $T_2 < Z_1$. Аналогично получаем, что $T_1 < Z_2$. В случае (iii) это невозможно. Поэтому выполняется случай (iv). Тогда $|T_1| = |T_2| = 3$. Подгруппа T_2 не является нормальной в M_0, поэтому $|M_0 : N_{M_0}(T_2)| = 2$. Но $M_0 \cap M_2 = N_{M_0}(T_2)$, следовательно, подгруппа $M_0 \cap M_2$ нормальна в L, что невозможно. □

Лемма 2.3. *$M \notin C_3(G)$.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда на основании равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.6; 12, разд. 2.9, 4.3] заключаем, что $L \cong L_n^{\varepsilon}(q)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, n — простое число, $n \geq 3$ при $\varepsilon = -$, и $M_0 \cong \mathbb{Z}_{(q^n-\varepsilon 1)/(q-\varepsilon 1)(q-\varepsilon 1,n)}.\mathbb{Z}_n$.

Пусть $n = 2$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Ввиду [6, табл. 8.1] имеем $M_0 \cong D_{2(q+1)/(2,q-1)}$. Отсюда следует, что $q+1 = (2, q-1)p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Если $p > 2$, то $T_1T_2 \leq O_p(M_0) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, откуда $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. Поэтому $p = 2$ и $M_0 \cong D_{2^{k+1}}$. Ясно, что $k \geq 2$. Поскольку $T_1T_2 \leq M_1 \cap M_2$, имеем $\Phi(T_i) \leq \Phi(M_1 \cap L) \cap \Phi(M_2 \cap L) = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому T_1 и T_2 — элементарные абелевы 2-группы порядка, не превосходящего 4. Предположим, что $|T_2| = 4$. Поскольку подгруппа T_2 нормальна в M_2, имеем $k = 2$, откуда $q = 7$, и, следовательно, $M_2 \cap L = N_L(T_2) \cong S_4$, что не так. Таким образом, $|T_1| = |T_2| = 2$ и, следовательно, $T_i = Z(M_i \cap L)$ для $i \in \{1, 2\}$. Но тогда $N_{M_0}(T_2) = M_1 \cap M_2 \cap L = T_1 \times T_2 = R_1 \cap L = R_2 \cap L$, что невозможно.

Итак, $n > 2$. По теореме Жигмонди [14] существует отличное от n простое число s, делящее $|M_0|$. С учетом строения подгруппы M_0 имеем $s = p$ и $M_0 \cong \mathbb{Z}_{p^k}.\mathbb{Z}_n$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Но тогда $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. □

Лемма 2.4. *$M \notin C_4(G) \cup C_7(G)$.*

Доказательство. Лемма следует из равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.7, 2.10, 8.26, 8.28, 8.48; 12, разд. 2.9, 4.4, 4.7]. □

Лемма 2.5. *Если $M \in C_5(G)$, то выполняется п.* (b) *теоремы.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.8, 8.5, 8.10; 12, разд. 2.9, 4.5; 5] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_2(q)$, $q = q_0^m$, $q_0 \leq 3$, m — простое число, M_0 изоморфна S_3 при $q_0 = 2$, S_4 при $q = 9$ и A_4 при $q = 3^m > 9$;

(ii) $L \cong U_3(8)$, $M_0 \cong \mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3)$.

Предположим, что $T_i \neq 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда T_i является неединичной нормальной в $M_i \cap L$ подгруппой из $O_p(M_i \cap L)$. Поскольку M_i неприводимо действует на $O_p(M_i \cap L)$, подгруппа T_i совпадает с $O_p(M_i \cap L)$. Пусть $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Так как $K_i \leq O_p(M_j)$, имеем $T_i \leq O_p(M_j \cap L)$, а поскольку порядки подгрупп T_i и $O_p(M_j \cap L)$ совпадают, то совпадают сами эти подгруппы. Но тогда $O_p(M_i \cap L) = O_p(M_j \cap L)$, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, $T_i = 1$ для каждого $i \in \{1, 2\}$. Ввиду леммы 2.1 выполняется п. (iv) этой леммы, т. е. $G \cong U_3(8) : 3_1$ или $U_3(8) : 6$ и $M \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3))$ или $\mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_3^2 : GL_2(3))$ соответственно. Учитывая, что в группе G имеется точно три класса сопряженности подгрупп, изоморфных M, и они сопряжены в $\mathrm{Aut}(L)$ (см. [5]), и рассуждая, как при рассмотрении подслучая (2b(i)) доказательства теоремы из [3, ч. II], получим, что выполняется п. (b) доказываемой теоремы. □

Лемма 2.6. $M \notin C_6(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна. Тогда согласно [6, табл. 2.9] имеем, что $O_p(M_0)$ — (нетривиальная) элементарная абелева группа, на которой группа $M_0/O_p(M_0)$ действует неприводимо. Так как согласно лемме 2.1 для каждого $i \in \{1, 2\}$ нормальная p-подгруппа T_i группы M_i неединична, то отсюда следует, что $T_i = O_p(M_i \cap L)$ для каждого $i \in \{1, 2\}$ и, в частности, $|T_1| = |T_2|$. Но $T_2 \leq O_p(M_1) \cap L = O_p(M_1 \cap L)$. Следовательно, $T_1 = T_2$, что невозможно. □

Лемма 2.7. *Если $M \in C_8(G)$, то выполняется один из пп.* (a) *или* (c) *теоремы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна. Тогда ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 2.11, 8.1, 8.3, 8.8; 12, разд. 2.9, 4.8; 5] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_3(3)$, $M_0 \cong PSO_3(3) \cong S_4$;

(ii) $L \cong L_3(4)$, $M_0 \cong U_3(2) \cong \mathbb{Z}_3^2 : SL_2(3)$;

(iii) $L \cong L_4(3)$, $M_0 \cong PSO_4^+(3).2 \cong S_4 \times S_4$.

Пусть выполняется случай (i). Так же, как при доказательстве леммы 2.5, показываем, что $T_i = 1$ для каждого $i \in \{1, 2\}$. Ввиду леммы 2.1 выполняется п. (ii) этой леммы, т. е. $G \cong \mathrm{Aut}(L_3(3))$ и $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4$. Тогда $p = 2$ и $O_2(M_1)$ — элементарная абелева группа порядка 8. Положим $W = O_2(M_1)$. Тогда $W^g = O_2(M_2)$ и $K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq W \cap W^g$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = N_{M_2}(K_1) = N_{M_1}(K_2)$, и, следовательно, W и W^g — нормальные подгруппы в $M_1 \cap M_2$. Поскольку $W \neq W^g$ и $|M_1|_2 = 16$, имеем $|WW^g| = 16$, что влечет $|W \cap W^g| = 4$ и $W \cap W^g = Z(WW^g) = K_1 \times K_2$.

Поскольку $|G|_2 = 2^5$, подгруппа $WW^g \cong \mathbb{Z}_2 \times D_8$ является собственной нормальной подгруппой в некоторой силовской 2-подгруппе P из G. Возьмем элемент $x \in (P \cap L) \setminus WW^g$. Ввиду [5] можно считать, что подгруппа $\langle x^2 \rangle$ совпадает с коммутантом подгруппы WW^g, лежащим в M. Ясно, что элемент x переставляет подгруппы K_1 и K_2. Поэтому можно считать, что $\langle g \rangle = \langle x \rangle$. Отсюда следует, что тройки (G, M_1, M_2) и (G, M_2, M_1) эквивалентны и $M_1 \cap M_2 = WW^g$, так что выполняется п. (a) теоремы.

Пусть выполняется случай (ii). Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Рассуждая, как при доказательстве леммы 2.5, приходим к противоречию.

Пусть выполняется случай (iii). Тогда $M_0 = L_1 \times L_2$, где $L_1 \cong L_2 \cong S_4$. Пусть $S_i \in Syl_2(L_i)$ и $E_i = O_2(L_i)$ для $i \in \{1, 2\}$. Силовская 3-подгруппа из M_0 действует регулярно на множестве $O_2(M_0) \setminus (E_1 \cup E_2)$, поэтому элементы этого множества попарно сопряжены в M_0. Пусть $S \in Syl_2(M_0)$ и $S \leq T \in Syl_2(L)$. Ввиду [10, разд. 6] имеем $T \cong D_8 \wr \mathbb{Z}_2$, причем S — единственная максимальная подгруппа в T, изоморфная $D_8 \times D_8$. Поэтому в $T \setminus S$ найдется инволюция u. Можно считать, что $S = S_1 \times S_1^u$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда $S_1 \cap S_1^u$ — неединичная нормальная подгруппа в T и, следовательно, центр группы T, имеющий порядок 2, содержится в этой подгруппе. Если при этом $S_2 \cap S_2^u \neq 1$, то $Z(T) \leq S_2 \cap S_2^u$, что противоречит равенству $S = S_1 \times S_2$. Поэтому $S = S_2 \times S_2^u$ и, заменяя без потери общности S_2 на S_1, получаем требуемое. Подгруппа T порождается инволюциями a_1, a_2, b_1, b_2 и u, где $S_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$, $a_2 = a_1^u$ и $b_2 = b_1^u$. Положим $z_1 = [a_1, b_1]$ и $z_2 = [a_2, b_2]$, $z = z_1z_2$, $A = \langle z_1, z_2, a_1, a_2 \rangle$ и $B = \langle z_1, z_2, b_1, b_2 \rangle$. Ввиду [10, разд. 6] группа L имеет точно два класса сопряженных инволюций с представителями z и z_1, причем инволюции z и a_1z сопряжены. Легко видеть, что элементарные абелевы подгруппы порядка 16 из S исчерпываются подгруппами A, B, $\langle z_1, z_2, a_1, b_2 \rangle$ и $\langle z_1, z_2, a_2, b_1 \rangle$, причем подгруппы A и B нормальны в T, а последние две подгруппы переставляются инволюцией u. Поскольку $N_T(O_2(M_0)) = S$, то подгруппа $O_2(M_0)$ равна $\langle z_1, z_2, a_1, b_2 \rangle$ или $\langle z_1, z_2, a_2, b_1 \rangle$.

Четверная подгруппа E_2 нормальна в S, поэтому она нетривиально пересекается с $Z(S)$, и значит, $E_2 \cap Z(S) = \langle z_2 \rangle$ или $\langle z \rangle$. Предположим, что выполняется вторая возможность. Тогда инволюции z_2 и a_1z принадлежат $O_2(M_0) \setminus (E_1 \cup E_2)$ и, следовательно, сопряжены, что не так. Поэтому выполняется первая возможность, и, следовательно, E_1 и E_2 — единственные четверные подгруппы из $O_2(M_0)$, все неединичные элементы которых сопряжены с z_1.

Предположим, что $T_i \neq 1$ для некоторого $i \in \{1,2\}$. Тогда T_i является неединичной нормальной в $M_i \cap L$ подгруппой из $O_2(M_i \cap L)$. Ясно, что подгруппа T_i либо четверная, либо совпадает с $O_2(M_i \cap L)$. Пусть $\{i,j\} = \{1,2\}$. Поскольку $T_i \leq O_2(M_j)$, имеем $T_i \leq O_2(M_j \cap L)$. Если T_i совпадает с $O_2(M_i \cap L)$, то $O_2(M_i \cap L) = O_2(M_j \cap L)$, что противоречит условию теоремы. Поэтому T_i — четверная подгруппа. Тогда $T_i < O_2(M_j \cap L)$. Из доказанного в предыдущем абзаце следует, что подгруппа T_i нормальна в $M_j \cap L$, а это противоречит условию теоремы.

Таким образом, $T_i = 1$ для каждого $i \in \{1,2\}$. Ввиду леммы 2.1 выполняется п. (iii) этой леммы, т. е. $G \cong L_4(3) : 2$ или $\mathrm{Aut}(L_4(3)$ и $M \cong \mathbb{Z}_2 \times S_4 \times S_4$ или $\mathbb{Z}_2 \times (S_4 \wr \mathbb{Z}_2)$ соответственно. Тогда $p = 2$ и $O_2(M_1)$ — элементарная абелева группа порядка 32. Положим $W = O_2(M_1)$. Тогда $W^g = O_2(M_2)$ и $K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2 \leq W \cap W^g$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = N_{M_2}(K_1) = N_{M_1}(K_2)$, и, следовательно, W и W^g — нормальные подгруппы в $M_1 \cap M_2$. Поскольку $W \cap L \neq W^g \cap L$, из доказанного выше следует, что $|(W \cap L)(W^g \cap L)| = 2^6$ и $|WW^g| = 2^7$, откуда $|W \cap W^g| = 8$ и $W \cap W^g = Z(WW^g) = (Z(WW^g) \cap L) \times K_1$.

Поскольку $|LK_1|_2 = 2^8$, подгруппа $WW^g \cong \mathbb{Z}_2 \times D_8 \times D_8$ является собственной нормальной подгруппой в некоторой силовской 2-подгруппе P из LK_1. В $(P \cap L) \setminus WW^g$ существует инволюция v, переставляющая подгруппы $W \cap L$ и $W^g \cap L$, и, следовательно, переставляющая подгруппы W и W^g. Поэтому можно считать, что $g = v$. Отсюда следует, что тройки (G, M_1, M_2) и (G, M_2, M_1) эквивалентны и пересечение $M_1 \cap M_2$ равно WW^g при $G \cong L_4(3) : 2$ и $N_M(WW^g)$ при $G \cong \mathrm{Aut}(L_4(3))$, так что выполняется п. (c) теоремы. □

Лемма 2.8. *$M \notin C_2(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что лемма неверна. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной формой, ассоциированное с группой L, где $F = \mathbb{F}_q$, если L — линейная или симплектическая группа, и $F = \mathbb{F}_{q^2}$, если L — унитарная группа. Положим $\widetilde{L} = SL(V)$ в случае $L \cong L_n(q)$, $n \geq 2$ и $(n,q) \neq (2,2),(2,3)$, $\widetilde{L} = SU(V)$ в случае $L \cong U_n(q)$, $n \geq 3$ и $(n,q) \neq (3,2)$, $\widetilde{L} = Sp(V)$ в случае $L \cong S_n(q)$, $n \geq 4$ четно и q нечетно при $n = 4$. Будем отождествлять L с $\widetilde{L}/Z(\widetilde{L})$. Для произвольной подгруппы H группы L через $\widetilde{H}$ будем обозначать полный прообраз H при естественном гомоморфизме $\widetilde{L} \to L$. Кроме того, для произвольного элемента $h \in L$ через $\widetilde{h}$ будем обозначать (некоторый) его прообраз при этом гомоморфизме.

Согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b)] подгруппа $\widetilde{M_0}$ есть стабилизатор в $\widetilde{L}$ разложения $V = V_1 \times \ldots \times V_t$ пространства V, где $t \geq 2$ и $\dim V_i = m = n/t$ для всех $1 \leq i \leq t$, какого-то из указанных в [6, табл. 2.4] типов, соответствующих случаю данной L. При этом соответствующее каждой из этих возможностей строение группы $\widetilde{M_0}$ приведено в [6, табл. 2.5]. Заметим, что при каждой из этих возможностей группа M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ симметрическую группу подстановок. В силу леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Кроме того, ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, теорема 2.2.19.(i).(b), табл. 2.5] имеем $m \leq 3$.

Предположим сначала, что либо $t \geq 5$, либо $t = 4$ и $p \neq 2$, либо $t = 3$ и $p \neq 3$. Так как группа M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ симметрическую группу подстановок, то при этом предположении группа $O_p(M_0)$ стабилизирует каждое из подпространств $V_1, \ldots, V_t$ векторного пространства V. Поскольку $T_1 \leq O_p(M_0) \cap O_p(M_0^g)$, то отсюда следует, что T_1 стабилизирует каждое из подпространств $V_1, \ldots, V_t, g(V_1), \ldots, g(V_t)$ векторного пространства V.

Далее, так как $\{V_1, \ldots, V_t\} \neq \{\widetilde{g}(V_1), \ldots, \widetilde{g}(V_t)\}$ (поскольку $M_1 \neq M_2$), то будем, не теряя общности, предполагать, что $\widetilde{g}(V_1) \notin \{V_1, \ldots, V_t\}$. Тогда найдется вектор $w \in \widetilde{g}(V_1)$ такой, что $w = w_1 + \ldots + w_t$, где $w_i \in V_i$ для каждого $1 \leq i \leq t$, причем $w_k \neq 0 \neq w_l$ для некоторых $1 \leq k < l \leq t$.

В зависимости от значения m имеем три случая.

С л у ч а й $m = 1$. Поскольку $1 \neq T_1 \trianglelefteq M_0$, причем T_1 стабилизирует каждое из подпространств $V_1, \ldots, V_t$ векторного пространства V, то согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b), табл. 2.5] некоторый элемент $h \in T_1$ не стабилизирует подпространство $\langle w_k + w_l \rangle$ векторного пространства V. Но тогда (учитывая, что h стабилизирует V_i для каждого $1 \leq i \leq t$) элемент h не стабилизирует и подпространство $\langle w_1 + \ldots + w_t \rangle = \langle w \rangle = \widetilde{g}(V_1)$ векторного пространства V. Противоречие с тем, что T_1 стабилизирует $\widetilde{g}(V_1)$.

С л у ч а й $m = 2$. Согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b)] для L и M_0 имеет место одна из следующих возможностей из [6, табл. 2.5]:

(i) $L \cong L_{2t}(q)$, $\widetilde{M_0} \cong SL_2(q)^t.(q-1)^{t-1}.S_t$;

(ii) $L \cong U_{2t}(q)$, $\widetilde{M_0} \cong SU_2(q)^t.(q+1)^{t-1}.S_t$;

(iii) $L \cong S_{2t}(q)$, $\widetilde{M_0} \cong Sp_2(q)^t.(q+1)^t : S_t$.

С учетом равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, предложение 2.3.6] заключаем, что в (i)–(iii) имеем $q = 3$ и $p = 2$. Отсюда вытекает существование для произвольных различных $1 \leq i_1, i_2 \leq t$ такого элемента $h_{i_1,i_2} \in T_1$, что некоторый его прообраз $\widetilde{h}_{i_1,i_2}$ действует тождественно на каждом из подпространств V_i, $1 \leq i \leq t$, $i_1 \neq i \neq i_2$, векторного пространства V и инвертирует подпространства V_{i_1} и V_{i_2}. Заметим, что (в силу $h_{i_1,i_2} \in T_1$) элемент h_{i_1,i_2} стабилизирует каждое из подпространств $g(V_1), \ldots, g(V_t)$ векторного пространства V.

Так как $w \in \widetilde{g}(V_1)$, то $w - \widetilde{h}_{k,l}(w) = 2w_k + 2w_l \in \widetilde{g}(V_1)$, и, следовательно, $w_k + w_l \in \widetilde{g}(V_1)$. Выбирая $1 \leq j \leq t$, отличное от k и l, получаем теперь $w_k + w_l - \widetilde{h}_{k,j}(w_k + w_l) = 2w_k \in \widetilde{g}(V_1)$ и $w_k + w_l - \widetilde{h}_{l,j}(w_k + w_l) = 2w_l \in \widetilde{g}(V_1)$, откуда $w_k \in \widetilde{g}(V_1)$, $w_l \in \widetilde{g}(V_1)$, и, следовательно, $\widetilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l \rangle$ (что, отметим, уже исключает возможность (iii), поскольку $\widetilde{g}(V_1)$ оказывается вполне изотропным, а V_1 невырождено). Но тогда $\langle w_k \rangle = V_k \cap \widetilde{g}(V_1)$ является T_1-инвариантным подпространством V_k, что с учетом того, что стабилизатор V_k в группе M_0 индуцирует на множестве одномерных подпространств V_k группу, содержащую $PSL(V_k)$, а группа T_1 нормальна в M_0, влечет тривиальность действия T_1 на множестве одномерных подпространств V_k. В силу транзитивности действия M_0 на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ и $T_1 \trianglelefteq M_0$ отсюда следует, что T_1 стабилизирует каждое одномерное подпространство любого из векторных пространств V_i, $1 \leq i \leq t$. Таким образом, для любого $\widetilde{h}$, где $h \in T_1$, и любого $1 \leq i \leq t$ действие $\widetilde{h}$ на V_i есть умножение на некоторый элемент поля F. Предположим, что для некоторого $\widetilde{h}$, где $h \in T_1$, и некоторых $1 \leq k' < l' \leq t$ действие $\widetilde{h}$ на $V_{k'}$ и на $V_{l'}$ есть умножение на различные элементы поля F. Поскольку $T_1 \trianglelefteq M_0$ и M_0 индуцирует на множестве $\{V_1, \ldots, V_t\}$ симметрическую группу подстановок, будем, не теряя общности, предполагать, что $k' = k$ и $l' = l$. Кроме того, будем, не теряя общности, предполагать, что $\widetilde{h}$ действует на V_k тождественно и действует на V_l как умножение на элемент $c \neq 1$ поля F. Рассмотрим действие $\widetilde{h}$ на $\widetilde{g}(V_1) = \langle w_k, w_l \rangle$. Элемент $\widetilde{h}$ стабилизирует вектор $w_k \in V_k$ и отображает вектор $w_l \in V_l$ в вектор cw_l, где $c \neq 1$. Учитывая, что стабилизатор подпространства $\widetilde{g}(V_1)$ в группе M_0^g индуцирует на множестве одномерных подпространств $\widetilde{g}(V_1)$ группу, содержащую $PSL(V_k)$, заключаем отсюда, что $h \notin O_p(M_0^g)$. Противоречие с тем, что $h \in T_1 \leq O_p(M_0^g)$.

С л у ч а й $m = 3$. Согласно [6, теорема 2.2.19.(i).(b), табл. 2.5] $L \cong U_{3t}(q)$ и $\widetilde{M_0} \cong SU_3(q)^t.(q+1)^{t-1}.S_t$. С учетом равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ заключаем дополнительно, что $q = 2$ и $p = 3$. Но тогда из $1 \neq T_1 \leq O_3(M_0)$ и $T_1 \trianglelefteq M_0$ следует существование для произвольного $1 \leq i \leq t$ такой подгруппы $L_i \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ группы T_1, что она действует тождественно на множестве прямых каждого из подпространств V_j, $1 \leq j \leq t$, $j \neq i$, векторного пространства V и не стабилизирует прямых подпространства V_i. Рассматривая проекции векторов вида $\widetilde{h}(w)$, где $h \in L_k \cup L_l$, на $V_k + V_l$ при разложении $V = V_1 + \ldots + V_t$, заключаем, что натянутое на них подпространство векторного пространства V имеет размерность ≥ 4. Противоречие с тем, что в силу $w \in \widetilde{g}(V_1)$, $L_k \leq T_1$ и $L_l \leq T_1$ эти векторы содержатся в $\widetilde{g}(V_1)$, причем $\dim(\widetilde{g}(V_1)) = 3$.

Предположим, что $t = 2$. Тогда с учетом равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и максимальности подгруппы M в G согласно [6, табл. 2.4, 2.5, 8.1, 8.8, 8.10, 8.12, 8.26] и [12, разд. 2.9, 4.2; 5; 3, ч. I, теорема 4] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_2(q)$, $3 < q \neq 9$, $m = 1$, $M_0 \cong D_{2(q-1)/(2,q-1)}$;

(ii) $L \cong L_4(3)$, $m = 2$, $M_0 \cong \Omega_4^+(3).2^2 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2^2$, $G \nleq L_4(3).2_2$;

(iii) $L \cong U_4(3)$, $m = 2$, $M_0 \cong \Omega_4^+(3).4 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).4$;
(iv) $L \cong U_6(2)$, $m = 3$, $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2)).3.2 \cong 3^{1+4}.[2^7 \cdot 3]$;
(v) $L \cong S_4(3)$, $m = 2$, $M_0 \cong \Omega_4^+(3).2 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2 \cong 2.(A_4 \wr S_2)$.

Пусть выполняется случай (i). Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ имеем $q-1 = (2, q-1)p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Предположим, что $p > 2$. Тогда $O_p(M_0) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$. Поэтому $\Omega_1(T_1) = \Omega_1(O_p(M_0)) = \Omega_1(T_2)$, что невозможно. Таким образом, $p = 2$. Ввиду [8] $q = r \geq 17$. Поэтому M_0 — диэдральная силовская 2-подгруппа порядка ≥ 16 в L. Поскольку $T_1T_2 \leq M_1 \cap M_2$, имеем $\Phi(T_i) \leq \Phi(M_1 \cap L) \cap \Phi(M_2 \cap L) = 1$ для $i \in \{1, 2\}$. Поэтому T_1 и T_2 — элементарные абелевы 2-группы порядка, не превосходящего 4. Но подгруппа T_i нормальна в $M_i \cap L$ для $i \in \{1, 2\}$, следовательно, $T_i = Z(M_i \cap L)$ для $i \in \{1, 2\}$. Но тогда $N_{M_0}(T_2) = M_1 \cap M_2 \cap L = T_1 \times T_2 = R_1 \cap L = R_2 \cap L$, что невозможно.

Пусть выполняется один из оставшихся случаев (ii)–(v). Тогда $O_p(M_0)$ — экстраспециальная p-группа. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Подгруппа $M_i \cap L$, где $i \in \{1, 2\}$, действует неприводимо на $O_p(M_i \cap L)/Z(O_p(M_i \cap L))$ и $T_1 < T_1T_2 \leq R_1 \cap L \leq O_p(M_0)$, следовательно, $T_i = Z(O_p(M_i \cap L))$ и $R_1 \cap L = O_p(M_0)$. Но тогда подгруппа T_2 нормальна в $O_p(M_0)$, откуда $T_1 = T_2$, что невозможно.

Предположим, что $t = p = 3$. В зависимости от значения m имеем три случая.

С л у ч а й $m = 1$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_3(M_0)$ и [6, табл. 8.3, 8.5] имеем $L \cong L_3^\varepsilon(q)$ и $M_0 \cong (q-\varepsilon 1)^2/(3, q-\varepsilon 1) : S_3$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $q - \varepsilon 1 = 3^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, причем $k > 1$ при $\varepsilon = +$. В силу [8] отсюда следует, что $\varepsilon = -$ и $q = 8$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны. Согласно [5] имеем $M_0 = A \leftthreetimes (\langle x \rangle \leftthreetimes \langle y \rangle)$, где $A \cong \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$, $|x| = 3$, $|y| = 2$, $\langle x, y \rangle \cong S_3$, $T := A\langle x \rangle \in Syl_3(L)$, $Z(T) = \Phi(A)$, $T' = \Phi(T) = \Omega_1(A)$. Поэтому подгруппа A слабо замкнута в T относительно L и, следовательно, подгруппы порядка 3 из A, отличные от $Z(T)$, попарно сопряжены в M, но не сопряжены с $Z(T)$ в L. Ясно, что $|M_1 \cap M_2 \cap L|_3 \leq 3^3$ и $(R_1 \cap L)(R_2 \cap L) < T$. Поскольку $K_1 < K_1K_2 \leq R_1 \cap R_2$, отсюда следует, что $|T_1T_2| = 9$ и $|(R_1 \cap L)(R_2 \cap L)| = 27$.

Предположим, что $T_1T_2 = R_1 \cap L$. Тогда $T_1T_2 = \Omega_1(A)$ и, следовательно, $T_1T_2 = T_1 \times T_2$. Поэтому $T_1 = Z(T)$ и ввиду [5] $N_L(T_2) \cong \mathbb{Z}_3 \times L_2(8)$; противоречие с тем, что $N_L(T_2) = M_2 \cap L$. Таким образом, $T_1T_2 = R_2 \cap L < R_1 \cap L$. Но тогда $T_1T_2 = \Omega_1(A)^g$ и мы, как выше при $T_1T_2 = \Omega_1(A)$, приходим к противоречию.

С л у ч а й $m = 2$ невозможен ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.24, 8.26, 8.28].

С л у ч а й $m = 3$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.54, 8.56] имеем $L \cong U_9(2)$ и $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2)) : 3^2.S_3$. Рассуждения, аналогичные используемым при рассмотрении возможностей (ii)–(v) случая $t = 2$, приводят к противоречию.

Предположим, что $t = 4$ *и* $p = 2$. В зависимости от значения m имеем три случая.

С л у ч а й $m = 1$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.8, 8.10, 8.12] имеем $L \cong L_4^\varepsilon(q)$ и $M_0 \cong (q-\varepsilon 1)^3/(4, q-\varepsilon 1) : S_4$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, q нечетно, причем $q > 3$ для $\varepsilon = +$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_3(M_0)$ имеем $q - \varepsilon 1 = 2^k \geq 4$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Ввиду леммы 2.1 подгруппы T_1 и T_2 нетривиальны.

Имеем $M_0 = A \leftthreetimes B$, где A — абелева 2-группа порядка $(q-\varepsilon 1)^3/(4, q-\varepsilon 1)$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ и $B \cong S_4$. Согласно [13] индекс $|L : M_0|$ нечетен, $A = \langle x \rangle \times \langle y \rangle \times \langle w \rangle$ и $B = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes (\langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle)$, где $|x| = |y| = 2^k, |w| = 2^{k-2}$, $|a| = |b| = |d| = 2$, $|c| = 3$, $c^d = c^{-1}$, $a^d = b$, $\langle a, b, c \rangle \cong A_4$, $x^d = y$, $y^d = x$, $w^c = w^d = w$, $x^a = x^{-1}$, $y^a = w^{-1}x^{-2}y^{-1}$, $w^a = wx^4$, $\langle x, y \rangle = [A, \langle c \rangle]$. Положим $x_1 = x^{2^{n-1}}$, $y_1 = y^{2^{n-1}}$, $w_1 = w^{2^{n-2}}$, $T = A\langle a, b, d \rangle$. Тогда $O_2(M_0) = A\langle a, b \rangle$, $Z(O_2(M_0)) = C_A(\langle a, b \rangle) = \langle x_1, y_1 \rangle$, $C_{M_0}(\langle x_1, y_1 \rangle) = O_2(M)$ и $C_L(A) = A$.

Если $k > 2$, то четверная подгруппа $\langle a, b \rangle$ действует регулярно на $\Omega_1(A) \setminus \langle x_1, y_1 \rangle$, а ввиду [13, лемма 3.1] подгруппа A слабо замкнута в T относительно L, и, следовательно, подгруппа $\langle x_1, y_1 \rangle$ сильно замкнута в A относительно L.

Пусть L_i— минимальная неединичная нормальная подгруппа в $M_i \cap L$, содержащаяся в T_i $(i = 1, 2)$. Если L_1 не лежит в A, то $[A, L_1] \leq A \cap L_1 = 1$, и, следовательно, L_1 централизует A, что не так ввиду доказанного выше равенства $C_L(A) = A$. Поэтому $L_1 \leq A$ и, следовательно, $L_1 = \langle x_1, y_1 \rangle = Z(O_2(M_0))$. Аналогично $L_2 = Z(O_2(M_2 \cap L))$, и, следовательно, $L_1^g = L_2$. Заметим также, что $L_1 < L_1 L_2 \leq R_1 \cap R_2 \cap L$.

Далее, L_1 не принадлежит A, так как в противном случае ввиду вышеизложенного $L_2 = L_1$, что невозможно. Поскольку M_0/A действует неприводимо на $O_2(M_0)/A$, то $O_2(M_0) = A(R_1 \cap L)$. Предположим, что $L_2 \cap A = 1$. Тогда $N_{O_2(M_0)}(L_2) = L_2 \times C_A(L_2) = L_1 \times L_2 = R_1 \cap L$. Аналогично получаем, что $L_1 \times L_2 = R_2 \cap L$, и, следовательно, $R_1 \cap L = R_2 \cap L$; противоречие.

Таким образом, $L_2 \cap A \neq 1$. Из вышеизложенного следует, что $L_2 \cap A = L_2 \cap L_1$, поэтому можно считать, что $L_2 = \langle a \rangle \times (L_2 \cap L_1)$.

Предположим, что $A \cap R_1$ содержит элемент порядка 4. Имеем $A \cap R_1 = C_{A\cap R_1}(c)) \times [A \cap R_1, \langle c \rangle]$, $C_{A\cap R_1}(c) \leq \langle w \rangle$ и $[A \cap R_1, \langle c \rangle] \leq [A, \langle c \rangle] = \langle x, y \rangle$. Если $1 \neq \Phi(A \cap R_1) \leq \langle w^2 \rangle$, то M_0 централизует w_1, что не так. Поэтому $[A \cap R_1, \langle c \rangle]$ содержит элемент порядка 4 и, следовательно, подгруппа $S := \langle x^{2^{k-2}} \rangle \times \langle y^{2^{k-2}} \rangle$ содержится в R_1. Но $C_S(L_2) = C_S(t) = L_1$ и $|N_S(L_2) : C_S(L_2)| \leq 2$; противоречие с тем, что подгруппа L_2 нормальна в R_1.

Таким образом, подгруппа $A \cap R_1$ элементарная абелева. Если $k > 2$, то 2-элемент $[t, x] = x^2$ имеет порядок не меньше 4 и содержится в $A \cap R_1$; противоречие. Поэтому $k = 2$, $R_1 \cap L \cong \mathbb{Z}_2^4$ и $O_2(M_0)' \leq L_1$. Как выше показываем, что $R_2 \cap L \cong \mathbb{Z}_2^4$. Поскольку подгруппа $R_2 \cap L$ содержит L_1, она является нормальной подгруппой в $O_2(M_0)$, и, следовательно, $O_2(M_0) = R_1 \cap L$; противоречие.

С л у ч а й $m = 2$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.44, 8.46, 8.48] выполняется один из следующих случаев:

(i) $L \cong L_8^{\varepsilon}(3)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и $M_0 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3)) : (3 - \varepsilon 1)^3.S_4$;

(ii) $L \cong PSp_8(3)$, $M_0 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3) \circ SL_2(3)) : S_4$.

Рассуждения, аналогичные используемым при рассмотрении возможностей (ii)–(v) случая $t = 2$, приводят к противоречию.

С л у ч а й $m = 3$. Ввиду равенства $F^*(M_0) = O_p(M_0)$ и [6, табл. 8.76, 8.78, 8.80] имеем $L \cong U_{12}(3)$ и $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2)) : 4^3.S_4$. Рассуждения, аналогичные используемым при рассмотрении возможностей (ii)–(v) случая $t = 2$, приводят к противоречию. □

Из лемм 2.2–2.8 следует справедливость теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
2. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.
3. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I, II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 143–152; 2016. Т. 22, № 2. С. 177–187.
4. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
6. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
7. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p.
8. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
9. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
10. **Gorenstein D., Harada R.** On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$ // Math. Z. 1970. Vol. 117, no. 1-4. P. 207–238.

11. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr.; vol. 40, no. 3).
12. **Kleidman P.B., Liebeck M.W.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 304 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 129).
13. **Mason D.** Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type PSL(4, q) // J. Algebra. 1973. Vol. 26, no. 1. P. 75–97.
14. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd. 3. S. 265–284.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 20.08.2016

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Kondrat'ev A.S. Normalizers of the Sylow 2-subgroups in finite simple groups. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 3, pp. 338–346.
2. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Stabilizers of graph's vertices and a strengthened version of the Sims conjecture. *Dokl. Math.*, 1999, vol. 59, pp. 113–115.
3. Kondrat'ev A.S., Trofimov V.I. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture, I, II. *Proc. Inst. Steklov Math.*, 2015, vol. 289, suppl. 1, pp. 146–155; 2016. vol. 295, suppl. 1, pp. 89–100.
4. Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups. *Invent. Math.*, 1984, vol. 76, no. 3, pp. 469–514.
5. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p.
6. Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013, (*London Math. Soc. Lect. Note Ser.*; *vol.* 407), 438 p.
7. Carter R.W. *Simple groups of Lie type.* London: Wiley, 1972, 331 p.
8. Gerono G.C. Note sur la r*é*solution en nombres entiers et positifs de l'*é*quation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math.* (2), 1870, vol. 9, pp. 469–471.
9. Gorenstein D. *Finite groups.* New York: Harper and Row, 1968, 528 p.
10. Gorenstein D., Harada R. On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n = 8, 9, 10, 11$. *Math. Z.*, 1970, Vol. 117, no. 1-4, pp. 207–238.
11. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups.* Providence: Amer. Math. Soc., 1998, Number 3, Part I, (*Ser. Math. Surveys Monogr.*; *vol.* 40*, no.* 3), 420 p.
12. Kleidman P.B., Liebeck M.W. *The subgroup structure of the finite classical groups.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990, (*London Math. Soc. Lect. Note Ser.*; *vol.* 129), 304 p.
13. Mason D. Finite simple groups with Sylow 2-subgroups of type PSL(4, q). *J. Algebra*, 1973, vol. 26, no. 1, pp. 75–97.
14. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, Bd. 3, S. 265–284.

A.S. Kondrat'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru .

V.I. Trofimov, Dr. Phys.-Math. Sci., N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: trofimov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.983.23

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ ЛИНЕЙНОГО ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В комплексном банаховом пространстве задан плотно определенный линейный инъективный оператор A, регулярное множество которого содержит отрицательную вещественную полуось. На ней известна степенная асимптотическая оценка нормы резольвенты этого оператора в нуле и в бесконечности. В работе изучаются некоторые классы функций данного оператора, построенных (с учетом интегральной формулы Коши) на базе соответствующих скалярных аналитических функций, имеющих степенные асимптотические оценки модуля в нуле и в бесконечности. Установлен ряд свойств операторных функций, в частности, мультипликативное свойство и свойство обратимости. Доказано, что линейная комбинация целых степеней произвольного линейного инъективного оператора с непустым резольвентным множеством (при естественных ограничениях на ее коэффициенты) — замкнутый оператор, а функции оператора A, построенные для линейной комбинации скалярных степенных функций с целыми показателями, совпадают с соответствующей линейной комбинацией степеней этого оператора.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, мультипликативное свойство, обратимость.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. On some functions of a linear closed operator.

A densely defined linear injective operator whose regular set contains the negative real semiaxis is given in a complex Banach space. A power asymptotic bound is known for the norm of the resolvent of this operator at zero and at infinity on the same semiaxis. We study some classes of functions of this operator constructed (in view of the Cauchy integral formula) on the basis of the corresponding scalar analytic functions that have power asymptotic bounds for their moduli at zero and at infinity. A number of properties of the operator functions are established, in particular, the multiplicative property and the invertibility. It is proved that a linear combination of integer powers of an arbitrary linear injective operator with nonempty resolvent set (under natural constraints on the coefficients) is a closed operator and that functions of an operator A constructed for a linear combination of scalar power functions with integer exponents coincide with the corresponding linear combination of powers of this operator.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, multiplicative property, invertibility.

MSC: 47A60

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-173-187

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X. При определенных ограничениях на оператор A рядом авторов по заданным скалярным функциям различными способами вводились операторные функции и исследовались их свойства. Так, например, в [1] функциональное исчисление строится на базе интегральной формулы Коши для скалярных функций, аналитических в некоторой окрестности спектра линейного неограниченного оператора и в бесконечности. В [2] развивается функциональное исчисление в банаховых алгебрах и в гильбертовых пространствах для ограниченного и неограниченного операторов. В [3–5] изучаются построенные на основе интегральной формулы Коши дробные степени замкнутых операторов с известной асимптотикой нормы резольвенты в нуле и в бесконечности. Другой подход к построению функции от оператора применяется, например, в работах [6] (там оператор предполагается многозначным) и [7] (в работе развивается операторное исчисление, которое по аналогии с одномерным случаем автор называет многомерным исчислением Бохнера — Филлипса).

Будем предполагать, что $A\colon D(A) \subset X \to X$ — плотно определенный линейный инъективный оператор. В [8] на основе интегральной формулы Коши введены два класса операторных функций на базе соответствующих скалярных функций, аналитических в областях, лежащих вне некоторого угла с вершиной в нуле и содержащих отрицательную вещественную полуось; скалярные функции имеют степенные оценки модуля в бесконечности и в нуле. В данной работе предполагается известным, что регулярное множество $\rho(A)$ оператора A содержит отрицательную вещественную полуось и на ней известна оценка нормы резольвенты $R = R_A$ оператора A (тогда подобная оценка справедлива и в некоторой области $\Delta \supset (-\infty, 0)$). Введены два класса операторных функций на базе соответствующих скалярных функций, и исследуются свойства этих операторных функций. В частности, показано, что функциям $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j \lambda^j$ $(k, l \in \mathbb{Z},\ \alpha_j \in \mathbb{C},\ \alpha_k \alpha_l \neq 0)$ соответствуют операторные функции $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j$ и они — замкнутые операторы.

Вопросы, рассмотренные в данной работе, связаны с исследованиями, проведенными авторами в [8]. Однако там предполагалась известной оценка нормы резольвенты внутри некоторого угла с вершиной в нуле, содержащего $(-\infty, 0)$.

Переходим к изложению результатов работы. Будем предполагать (по аналогии с [8]), что для нормы резольвенты $R(\mu) = (A - \mu E)^{-1}$ оператора A (E — единичный оператор в X) справедлива при некоторых $C_0 > 0,\ \gamma \le 1,\ \rho \ge 1$ или $\rho = 0$ и любого $s > 0$ оценка

$$\|R(-s)\| \le \frac{C_0}{s^\rho (s+1)^{\gamma - \rho}}. \tag{1}$$

Введем ряд обозначений: $B(\mu_0, r)$ и $S(\mu_0, r)$ — открытый круг и окружность с центром в точке $\mu_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$, при $\rho \ge 1$ и $a > 0$

$$\Delta(a) = \big\{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = -s + it,\ s > 0,\ |t| < a\ \min\{s^\gamma, s^\rho\}\big\},$$

при $\rho = 0,\ a > 0$

$$\Delta(a) = \big\{\mu \in \mathbb{C}\colon \mu = -s + it,\ s \ge 0,\ |t| < a(s+1)^\gamma\big\} \bigcup \Big\{\mu \in \mathbb{C}\colon |\mu| < a,\ |\arg \mu| < \frac{\pi}{2}\Big\},$$

$\Lambda(a)$ — ориентированная граница области $\Delta(a)$, при обходе которой $\Delta(a)$ остается справа,

$$\overline{C} = \begin{cases} 2^{\rho - \gamma} C_0, & \rho \ge 1, \\ C_0, & \rho = 0, \end{cases} \quad \Delta_0 = \Delta(\overline{C}^{-1}).$$

Утверждение 1. *Пусть $\rho \ge 1$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &1)\quad \Delta_0 \subset \rho(A), \\ &2)\quad \|R(\mu)\| \le \frac{\overline{C}}{\min\{s^\rho, s^\gamma\} - \overline{C}|\mu + s|} \end{aligned} \tag{2}$$

для $\mu \in B(-s, \overline{C}^{-1} \min\{s^\gamma, s^\rho\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\mu \in \mathbb{C},\ s > 0$ справедливо соотношение

$$A - \mu E = (A + sE)[E - (\mu + s) R(-s)]. \tag{3}$$

Если $|\mu + s| \|R(-s)\| < 1$, то, переходя в (3) к обратным операторам, получаем, что $\mu \in \rho(A)$ и

$$\|R(\mu)\| \le \frac{\|R(-s)\|}{1 - |\mu + s| \|R(-s)\|}. \tag{4}$$

Пусть $s \ge 1$ и $\mu \in B(-s, \overline{C}^{-1} s^\gamma)$, т. е. $|\mu + s| < \overline{C}^{-1} s^\gamma$. Тогда согласно (1)

$$\|R(-s)\| \le \frac{C_0}{s^\gamma} \Big(\frac{s}{s+1}\Big)^{\gamma - \rho} \le \frac{\overline{C}}{s^\gamma}, \tag{5}$$

т. е. $|\mu + s| \|R(-s)\| < \Big(\dfrac{1}{\overline{C}} s^\gamma\Big) \dfrac{\overline{C}}{s^\gamma} = 1$. Из (4) и (5) следует (2). При $s \in (0, 1],\ \mu \in B(-s, \overline{C}^{-1} s^\rho)$ имеем $\|R(-s)\| \le \dfrac{\overline{C}}{s^\rho}$ и, аналогично рассуждая, также приходим к оценке (2). Таким образом, имеет место второе из соотношений утверждения 1. Из него вытекает первое из соотношений. □

Утверждение 2. *Пусть $a \in (0, \overline{C}^{-1})$. Тогда существует такое число $K = K(a)$, что при $\rho \geq 1$ для всех $\mu \in \overline{\Delta(a)} \backslash \{0\}$, а при $\rho = 0$ для всех $\mu \in \overline{\Delta(a)}$*

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{K(a)}{|\mu|^{\rho}(|\mu|+1)^{\gamma-\rho}}. \tag{6}$$

Доказательство. Случай $\rho = 0$ рассмотрен в [9]. Будем считать далее, что $\rho \geq 1$. Пусть $\mu \in \overline{\Delta(a)} \backslash \{0\}$ и $s = -\mathrm{Re}\,\mu$. Если $s \geq 1$, то $|\mu + s| = |\mathrm{Im}\,\mu| \leq a s^{\gamma}$, т. е. по утверждению 1

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{\overline{C}}{s^{\gamma} - \overline{C} a s^{\gamma}} \leq \frac{\overline{C}}{1 - a\overline{C}} \frac{k_1}{|\mu|^{\gamma}},$$

где $k_1 = \max\{1, (1+a^2)^{\gamma/2}\}$. Если $s \in (0,1]$, то, аналогично рассуждая, получаем, что

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{\overline{C}}{1 - a\overline{C}} \frac{k_2}{|\mu|^{\rho}},$$

где $k_2 = (1+a^2)^{\rho/2}$. Из этих оценок вытекает неравенство

$$\|R(\mu)\| \leq \frac{\overline{C} k_2}{1 - a\overline{C}} \frac{1}{\min\{|\mu|^{\rho}, |\mu|^{\gamma}\}},$$

а следовательно, оценка (6) с $K(a) = \dfrac{\overline{C} k_2}{1 - a\overline{C}}$. □

По аналогии с [8] введем следующие классы скалярных и операторных функций.

Для $a \in (0, \overline{C}^{-1})$, $\tau, \sigma \in \mathbb{R}$ через $F(a,\tau,\sigma)$ обозначаем множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C} \backslash (\Delta(a) \cup \{0\})$ и аналитических в $\mathbb{C} \backslash \overline{\Delta(a)}$, причем при некотором $C \in \mathbb{R}$ и всех $\lambda \notin \Delta(a) \cup \{0\}$ имеет место неравенство

$$|f(\lambda)| \leq C|\lambda|^{\tau}(|\lambda|+1)^{\sigma-\tau}.$$

Заметим, что при $\rho = 0$ множества $F(a,\tau,\sigma)$ при заданных a, σ не зависят от τ. Поэтому при $\rho = 0$ будем считать, что $\tau = 0$. Через $\mathcal{F}$ обозначим объединение всех таких классов $F(a,\tau,\sigma)$. Положим

$$g(\lambda; m, n, \lambda_0) = (\lambda - \lambda_0)^m \lambda^{-n}, \;\; g(A; m, n, \lambda_0) = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n}, \;\; \widehat{g}(A; m, n, \lambda_0) = A^{-n}(A - \lambda_0 E)^m.$$

Здесь $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq n$, $\lambda_0 \in \Delta(a)$ (m, n, λ_0 играют роль параметров). Заметим, что оператор $g(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут и $\overline{\widehat{g}(A; m, n, \lambda_0)} = g(A; m, n, \lambda_0)$. Возьмем произвольно $a_0, a, \tau, \sigma \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda_0 \in \Delta(a)$, предполагая, что

$$0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}, \quad m \geq n, \quad \rho - \tau - n < 1, \quad \gamma - \sigma + m - n > 1. \tag{7}$$

Для $f \in F(a,\tau,\sigma)$ определим операторы

$$f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\widehat{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda \; \widehat{g}(A; m, n, \lambda_0),$$

$$\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)} R(\lambda)\, d\lambda \; g(A; m, n, \lambda_0).$$

Так же, как в [8] устанавливается, что оператор $f(A; m, n, \lambda_0)$ замкнут и

$$\overline{\widehat{f}(A; m, n, \lambda_0)} = \overline{\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)} \subset f(A; m, n, \lambda_0). \tag{8}$$

Для доказательства следующих далее утверждений нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $a_0 \in (0, 1/\overline{C})$, $a_1, a_2 \in (0, a_0)$, $a_1 \neq a_2$. *Тогда при* $\rho \geq 1$ *условия*

$$\alpha_1 > -1, \quad \alpha_2 > -1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 > -1, \tag{9}$$

$$\alpha_1 + \beta_1 < 0, \quad \alpha_2 + \beta_2 < 0, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 < -1, \tag{10}$$

а при $\rho = 0$ *в предположении* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ *условия* (10) *задают область сходимости интеграла*

$$I = \int\limits_{\Lambda(a_1)} |d\lambda_1| \int\limits_{\Lambda(a_2)} \frac{|\lambda_1|^{\alpha_1}(|\lambda_1|+1)^{\beta_1}|\lambda_2|^{\alpha_2}(|\lambda_2|+1)^{\beta_2}}{|\lambda_1 - \lambda_2|} |d\lambda_2|. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $a > 0$ $\Lambda^+(a)$ — дуга кривой $\Lambda(a)$, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, $\Lambda_1^+(a)$ и $\Lambda_2^+(a)$ — дуги кривой $\Lambda^+(a)$, лежащие в полуплоскостях $\operatorname{Re}\lambda \leq -b$ и $\operatorname{Re}\lambda \geq -b$ соответственно, где $b = \begin{cases} -1, & \rho \geq 1, \\ 0, & \rho = 0 \end{cases}$, $p(\lambda_1, \lambda_2)$ — подынтегральная функция в (11), $q(\lambda_1, \lambda_2)$ — числитель дроби в (11).

Заметим, что если $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_2 < 0$, то $|\lambda_1 - \overline{\lambda_2}| \leq |\lambda_1 - \lambda_2|$, а также, что кривые $\Lambda(a)$ $(a > 0)$ симметричны относительно вещественной оси. Поэтому, введя $I^+ = \int_{\Lambda^+(a_1)} |d\lambda_1| \int_{\Lambda^+(a_2)} p(\lambda_1, \lambda_2) |d\lambda_2|$, имеем

$$2I^+ \leq I \leq 4I^+.$$

Далее рассмотрим два случая: I. $\rho \geq 1$; II. $\rho = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

I. $\rho \geq 1$. Так как для любого $\lambda = -s + it \in \Lambda(a)$ справедливы неравенства $s \leq |\lambda| \leq \sqrt{1 + a^2}s$, то найдутся такие $M_1, M_2 \in (0, +\infty)$, что для всех $\lambda_j \in \Lambda(a_j)$ $(j = 1, 2)$

$$M_1\, q(s_1, s_2) \leq q(\lambda_1, \lambda_2) \leq M_2\, q(s_1, s_2),$$

где $s_j = \operatorname{Re}\lambda_j$ $(j = 1, 2)$. Поэтому интеграл I^+, а следовательно, и I, сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int_{\Lambda^+(a_1)} |d\lambda_1| \int_{\Lambda^+(a_2)} \frac{q(|\operatorname{Re}\lambda_1|, |\operatorname{Re}\lambda_2|)}{|\lambda_1 - \lambda_2|} |d\lambda_2|$ или, что то же, интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} ds_1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 \min\{s_1^\gamma, s_1^\rho\} - a_2 \min\{s_2^\gamma, s_2^\rho\})^2}},$$

сходимость которого эквивалентна одновременной сходимости интегралов

$$I_{1,1} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\gamma)^2}}, \quad I_{1,2} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_0^{1} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\rho)^2}},$$

$$I_{2,1} = \int\limits_0^{1} ds_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\rho - a_2 s_2^\gamma)^2}}, \quad I_{2,2} = \int\limits_0^{1} ds_1 \int\limits_0^{1} \frac{q(s_1, s_2)\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\rho - a_2 s_2^\rho)^2}}.$$

Исследуем сходимость этих интегралов. Найдем такое $\delta \in (0, 1)$, что $m_1 = \min_{|\tau - 1| \leq \delta} |a_1 - a_2 \tau^\gamma| > 0$, $m_2 = \min_{|\tau - 1| \leq \delta} |a_1 - a_2 \tau^\rho| > 0$.

Перейдем теперь к определению области сходимости интеграла $I_{1,1}$. Он сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\widetilde{I}_{1,1} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{s_1^{\alpha_1 + \beta_1} s_2^{\alpha_2 + \beta_2}\, ds_2}{\sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (a_1 s_1^\gamma - a_2 s_2^\gamma)^2}}.$$

После замены переменной $s_2 = s_1\tau$ во внутреннем интеграле, входящем в $\widetilde{I}_{1,1}$, получаем

$$\widetilde{I}_{1,1} = \int\limits_1^{+\infty} ds_1 \int\limits_{1/s_1}^{+\infty} \frac{s_1^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\tau^{\alpha_2+\beta_2}\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)^2 + s_1^{2(\gamma-1)}(a_1-a_2\tau^\gamma)^2}}, \tag{12}$$

т. е.

$$\widetilde{I}_{1,1} = \int\limits_{1/(1-\delta)}^{+\infty} ds_1 \int\limits_{1/s_1}^{+\infty} \frac{u(s_1,\tau)}{v(s_1,\tau)}d\tau + \int\limits_1^{1/(1-\delta)} ds_1 \int\limits_{1/s_1}^{+\infty} \frac{u(s_1,\tau)}{v(s_1,\tau)}d\tau, \tag{13}$$

где $u(s_1,\tau)$ и $v(s_1,\tau)$ — числитель и знаменатель дроби в (12) соответственно.

Пусть $s \geq 1/(1-\delta)$. Интеграл $\displaystyle\int_{1/s}^{+\infty} u(s,\tau)/v(s,\tau)\,d\tau$ представим в виде суммы интегралов $I_1(s),\ I_2(s),\ I_3(s)$ по промежуткам $[1/s, 1-\delta],\ [1-\delta, 1+\delta],\ [1+\delta,+\infty)$ соответственно.

Для $\tau \in [1/s, 1-\delta]$ справедливы неравенства

$$\delta \leq V(s,\tau) \leq \sqrt{1+(a_1 s^{\gamma-1} - a_2(s\tau)^{\gamma-1}\tau)^2} \leq \sqrt{1+(a_1+a_2)^2}.$$

Отсюда следует, что интеграл $\displaystyle\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_1(s)\,ds$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 < -1, \\ \alpha_1+\beta_1 < 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим теперь интеграл $\displaystyle\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_2(s)\,ds$. Для $s \geq 1,\ \tau \in [1-\delta, 1+\delta]$ при некоторых $M_1, M_2 \in (0,+\infty)$ имеют место неравенства

$$M_1 \leq \frac{\tau^{\alpha_2+\beta_2}}{V(1,\tau)} \leq \frac{\tau^{\alpha_2+\beta_2}}{V(s,\tau)} \leq \frac{M_2}{\sqrt{(1-\tau)^2 + m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}},$$

т. е.

$$2\delta M_1 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \leq I_2(s) \leq M_2 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \ln\left(\tau - 1 + \sqrt{(\tau-1)^2 + m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}\right)\Bigg|_{1-\delta}^{1+\delta}$$

$$= M_2 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \ln \frac{\left(\delta + \sqrt{\delta^2 + m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}\right)^2}{m_1^2 s^{2(\gamma-1)}}$$

$$\leq 2M_2 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\left(\ln\frac{(\delta+\sqrt{\delta^2+m_1^2}}{m_1} + (1-\gamma)\ln s\right) \leq M_3 s^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} \begin{cases} \ln s, & \gamma < 1, \\ 1, & \gamma = 1 \end{cases}$$

при некотором $M_3 \in (0,+\infty)$. Поэтому интеграл $\displaystyle\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_2(s)\,ds$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 < -1$.

Исследуем сходимость интеграла $\displaystyle\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_3(s)\,ds$. Для $s \geq 1,\ \tau \geq 1+\delta$ имеют место неравенства

$$M_4 \leq \frac{\tau}{V(1,\tau)} \leq \frac{\tau}{V(s,\tau)} \leq \frac{\tau}{\tau-1} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \tag{14}$$

при некотором $M_4 \in (0,+\infty)$ (использовано, что $\tau/V(1,\tau)$ — непрерывная функция при $\tau \geq 1$, имеющая конечный предел при $\tau \to +\infty$). Значит, интеграл $\displaystyle\int_{1/(1-\delta)}^{+\infty} I_3(s)\,ds$ сходится в том и только том случае, когда

$$\alpha_2+\beta_2 < 0, \quad \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 < -1.$$

Таким образом, первый из повторных интегралов в правой части (13) сходится тогда и только тогда, когда выполнены условия (10).

Для сходимости второго из повторных интегралов справа в (13) необходима и достаточна сходимость интеграла $J_1 = \int_1^{1/(1-\delta)} ds \int_{1+\delta}^{+\infty} u(s,\tau)/v(s,\tau)\,d\tau$, так как на компактном множестве $\{(s,\tau) : s \in [1, 1/(1-\delta)], \tau \in [1/s, 1+\delta]\}$ подынтегральная функция непрерывна. Из неравенств (14) вытекает, что интеграл J_1 сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_2 + \beta_2 < 0$. Таким образом, интеграл $I_{1,1}$ сходится в том и только том случае, когда выполнены условия (10).

Аналогично предыдущему находится область сходимости интеграла $I_{2,2}$. Он сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\widetilde{I}_{2,2} = \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^{1/s} \frac{s^{\alpha_1+\alpha_2}\tau^{\alpha_2}\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)^2 + s^{2(\rho-1)}(a_1 - a_2\tau^\rho)^2}}. \tag{15}$$

Пусть $w(s,\tau)$ — знаменатель подынтегральной функции, тогда

$$\widetilde{I}_{2,2} = \int\limits_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2}\,ds \int\limits_0^{1/s} \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(s,\tau)}\,d\tau + \int\limits_{1/(1+\delta)}^{1} s^{\alpha_1+\alpha_2}\,ds \int\limits_0^{1/s} \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(s,\tau)}\,d\tau. \tag{16}$$

При $s \in (0, 1/(1+\delta)]$ интеграл $\int_0^{1/s} (\tau^{\alpha_2}\,d\tau)/w(s,\tau)$ представим в виде суммы интегралов $I_4(s), I_5(s), I_6(s)$ по промежуткам $[0, 1-\delta]$, $[1-\delta, 1+\delta]$, $[1+\delta, 1/s]$ соответственно. Для $s \in [0,1]$, $\tau \in [0, 1-\delta]$

$$\delta \le w(s,\tau) \le M_5 \tag{17}$$

при некотором $M_5 \in (0,+\infty)$. Поэтому $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_4(s)\,ds$ сходится в том и только том случае, когда $\alpha_2 > -1$, $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$.

Рассмотрим теперь интеграл $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_5(s)\,ds$. Для $s \in (0, 1/(1+\delta]$, $\tau \in [1-\delta, 1+\delta]$ справедливы неравенства

$$M_6 \le \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(1,\tau)} \le \frac{\tau^{\alpha_2}}{w(s,\tau)} \le \frac{M_7}{\sqrt{(1-\tau)^2 + m_2^2 s^{2(\rho-1)}}}$$

при некоторых M_6, $M_7 \in (0,+\infty)$. Отсюда

$$2\delta M_6 \le I_5(s) \le M_8 \begin{cases} \ln\dfrac{1}{s}, & \rho > 1, \\ 1, & \rho = 1 \end{cases}$$

при некотором $M_8 \in (0,+\infty)$. Следовательно, для сходимости интеграла $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_5(s)\,ds$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$.

Перейдем к исследованию на сходимость интеграла $\int_0^{1/(1+\delta)} s^{\alpha_1+\alpha_2} I_6(s)\,ds$. Для $s \in (0, 1/(1+\delta)]$, $\tau \in [1+\delta, 1/s]$ справедливы неравенства

$$\frac{\delta}{1+\delta}\tau \le w(s,\tau) \le \sqrt{1 + (a_1+a_2)^2}\,\tau.$$

Отсюда видно, что рассматриваемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_1 > -1$, $\alpha_1 + \alpha_2 > -1$.

Таким образом, первый из повторных интегралов справа в (16) сходится в том и только том случае, когда выполнены условия (9).

Второй из повторных интегралов в (16) сходится или расходится одновременно с интегралом $J_2 = \int_{1/(1+\delta)}^{1} s^{\alpha_1+\alpha_2}\, ds \int_0^{1-\delta} (\tau^{\alpha_2} d\tau)/w(s,\tau)$. Из неравенств (17), справедливых для $s \in [0,1],\ \tau \in [0, 1-\delta]$, следует, что интеграл J_2 сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_2 > -1$.

Таким образом, для сходимости интеграла (15), а следовательно, $I_{2,2}$ необходимо и достаточно выполнение условий (9).

Исследуем на сходимость интеграл $I_{1,2}$. Для его сходимости необходима и достаточна сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2}\, ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2 + (a_1 s_1^{\gamma} - a_2 s_2^{\rho})^2}}$, равного сумме интегралов $\widetilde{I}'_{1,2} = \int_1^2 ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\alpha_2} s_2^{\alpha_2}\, ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2 + (a_1 s_1^{\gamma} - a_2 s_2^{\rho})^2}}$ и $\widetilde{I}''_{1,2} = \int_2^{+\infty} ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2}\, ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2 + (a_1 s_1^{\gamma} - a_2 s_2^{\rho})^2}}$. Интеграл $\widetilde{I}'_{1,2}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha_2 > -1$. Интеграл $\widetilde{I}''_{1,2}$ сходится, если сходится интеграл $\int_2^{+\infty} ds_1 \int_0^1 \dfrac{s_1^{\alpha_1+\beta_1} s_2^{\alpha_2}\, ds_2}{s_1 - 1}$, а следовательно, и интеграл $\int_2^{+\infty} ds_1 \int_0^1 s_1^{\alpha_1+\beta_1-1} s_2^{\alpha_2}\, ds_2$, что возможно при $\alpha_1 + \beta_1 < 0,\ \alpha - 2 > -1$. Таким образом, интеграл $I_{1,2}$ сходится, если $\alpha_1 + \beta_1 < 0,\ \alpha_2 > -1$. Аналогично, интеграл $I_{2,1}$ сходится, если $\alpha_2 + \beta_2 < 0,\ \alpha_1 > -1$. Итак, интеграл (11) сходится в том и только том случае, когда выполнены условия (9), (10).

II. $\rho = 0,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Интеграл I сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы

$$I_1^0 = \int\limits_{\Lambda_1^+(a_1)} |d\lambda_1| \int\limits_{\Lambda_1^+(a_2)} p(\lambda_1,\lambda_2)\,|d\lambda_2|, \quad I_2^0 = \int\limits_{\Lambda_2^+(a_2)} |d\lambda_2| \int\limits_{\Lambda_1^+(a_1)} p(\lambda_1,\lambda_2)\,|d\lambda_1|,$$

$$I_3^0 = \int\limits_{\Lambda_2^+(a_1)} |d\lambda_1| \int\limits_{\Lambda_1^+(a_2)} p(\lambda_1,\lambda_2)\,|d\lambda_2|.$$

Так как для любого $\lambda = -s + it \in \Lambda_1^+(a)$ справедливы неравенства $s + 1 \le |\lambda| + 1 \le (\sqrt{1+a^2} + 1)(s+1)$, то для сходимости интеграла I_1^0 необходима и достаточна сходимость интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} ds_1 \int\limits_0^{+\infty} \frac{(s_1+1)^{\beta_1}(s_2+1)^{\beta_2}\, ds_2}{\sqrt{(s_1-s_2)^2 + (a_1(s_1+1)^{\gamma} - a_2(s_2+1)^{\gamma})^2}}$$

$$= \int\limits_1^{+\infty} dt_1 \int\limits_1^{+\infty} \frac{t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2}\, dt_2}{\sqrt{(t_1-t_2)^2 + (a_1 t_1^{\gamma} - a_2 t_2^{\gamma})^2}} = I_{1,1}.$$

Интеграл $I_{1,1}$, как установлено, при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ сходится в том и только том случае, когда выполнено условие (10).

Исследуем сходимость интеграла I_2^0. Функция $|1 - \lambda_2\mu_1|$ непрерывна на компактном множестве $T = \{(\mu_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \colon \mu \in \{1/\lambda_1 \in \Lambda_1^+(a_1)\} \cup \{0\},\ \lambda_2 \in \Lambda_2^+(a_2)\}$ и не обращается на нем в ноль. Поэтому найдутся $C_1, C_2 \in (0,+\infty)$ такие, что при всех $(\mu_1,\lambda_2) \in T$ $C_1 \le |1 - \lambda_2\mu_1| \le C_2$, откуда следует, что при всех $\lambda_1 \in \Lambda_1^+(a_1),\ \lambda_2 \in \Lambda_2^+(a_2)$ $C_1|\lambda_1| \le |\lambda_1 - \lambda_2| \le C_2|\lambda_1|$. Из последних неравенств получаем, что для сходимости интеграла I_2^0 необходима и достаточна сходимость интеграла $\int_{\Lambda_1^+(a_1)} |\lambda_1|^{\beta_1 - 1} |d\lambda_1|$, которая имеет место при $\beta_1 < 0$.

Аналогично, интеграл I_3^0 сходится тогда и только тогда, когда $\beta_2 < 0$. Таким образом, интеграл I сходится в том и только том случае, когда выполняется (10). □

Доказательство лемм 2–4 проводится аналогично доказательству соответствующих лемм из [10].

Лемма 2. *Пусть* $0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}$, $\tau - \rho > -1$, $\sigma - \gamma < -1$, $h \in F_0(a, \tau, \sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Lambda(a)} h(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\Lambda(a_0)} h(\lambda) R(\lambda)\, d\lambda.$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}$, $\tau > -1$, $\sigma < -1$, $h \in F_0(a, \tau, \sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Lambda(a)} h(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Лемма 4. *Пусть* $0 < a < a_0 < \overline{C}^{-1}$, $\tau > -1$, $\sigma < 0$, $\mu \notin \overline{\Delta(a)}$, $h \in F_0(a, \tau, \sigma)$. *Тогда*

$$\int\limits_{\Lambda(a)} \frac{h(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda = 2\pi i h(\mu).$$

Утверждение 3. *Пусть* $f_j \in F(a, \tau_j, \sigma_j)$ $(a \in (0, \overline{C}^{-1}),\ j = 1, 2)$, *числа* $m_j,\ n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *удовлетворяют неравенствам*

$$m_j \geq n_j, \quad \rho - \tau_j - n_j < 1, \quad \gamma - \sigma_j + m_j - n_j > 1 \quad (j = 1, 2),$$

$\lambda_0 \in \Delta(a)$. *Тогда*

$$f_1(A; m_1, n_1, \lambda_0) f_2(A; m_2, n_2, \lambda_0) \subset (f_1 f_2)(A; m_1 + m_2, n_1 + n_2, \lambda_0),$$

$$\widetilde{f}(A; m_1, n_1, \lambda_0) \widetilde{f}_2(A; m_2, n_2, \lambda_0) \supset (\widetilde{f_1 f_2})(A; m_1 + m_2, n_1 + n_2, \lambda_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 из [8]. Сначала рассматривается частный случай $mj = nj = 0$ $(j = 1, 2)$, когда в устанавливаемых включениях в действительности имеют место равенства (при этом используются лемма 1 для обоснования сходимости соответствующих интегралов и леммы 2–4). После этого рассматривается общий случай. □

Доказательства утверждений 4–7, 9 мы не приводим, так как они проводятся аналогично доказательствам теорем 3–6, 8 из [8] соответственно.

Утверждение 4. *Пусть* $\lambda_0 \in \Delta(a)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n - \rho > -1$, $n - m - \gamma < -1$. *Тогда*

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{R(\lambda)}{g(\lambda; m, n, \lambda_0)}\, d\lambda = A^n R^m(\lambda_0).$$

Утверждение 5. *Пусть* $\lambda_0 \in \Delta(a)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \leq l$, $f_j(\lambda) = \lambda^j$, $f(\lambda) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j f_j(\lambda)$ $(\alpha_j \in \mathbb{C},\ \alpha_k,\ \alpha_l \neq 0)$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq n$, $n + k - \rho > -1$, $n + l - m - \gamma < -1$. *Тогда*

$$f_j(A; m, n, \lambda_0) = A^j = \overline{\widetilde{f}_j(A; m, n, \lambda_0)} \quad (k \leq j \leq l),$$

причем второе из равенств имеет место при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$;

$$f(A; m, n, \lambda_0) \supset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j \supset \widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0). \tag{18}$$

Утверждение 6. *Пусть* $m_0, n_0, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ m \ge n,\ m_0 \ge n_0,$

$$n - n_0 - \rho > -1, \quad m_0 - n_0 - m + n - \gamma < -1,$$

$\lambda_0, \lambda \in \Delta(a)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$. *Тогда*

$$-\frac{g(A;m,n,\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{g(\mu;m_0,n_0,\lambda_0)}{g(\mu;m,n,\lambda)} R(\mu)\, d\mu = g(A;m_0,n_0,\lambda_0),$$

а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то*

$$-\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Lambda(a)} \frac{g(\mu;m_0,n_0,\lambda_0)}{g(\mu;m,n,\lambda)} R(\mu)\, d\mu\ g(A;m,n,\lambda)} = g(A;m_0,n_0,\lambda_0).$$

Утверждение 7. *Пусть* $f \in F(a,\tau,\sigma)$ $(0 < a < \overline{C}^{-1})$, *числа* $m_j, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *таковы, что* $m_j \ge n_j$

$$\tau + n_j - \rho > -1, \quad \sigma - m_j + n_j - \gamma < -1,$$

$\lambda_j \in \Delta(a)$ $(j = 1, 2)$. *Тогда*

$$f(A;m_1,n_1,\lambda_1) = f(A;m_2,n_2,\lambda_2),$$

а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то* $\overline{\widetilde{f}(A;m_1,n_1,\lambda_1)} = \overline{\widetilde{f}(A;m_2,n_2,\lambda_2)}$.

Следствие 1. *Если в условиях утверждения* 7 $n_1 \le n_2,\ m_1 - n_1 \le m_2 - n_2$, *то*

$$\widetilde{f}(A;m_1,n_1,\lambda_1) \supset \widetilde{f}(A;m_2,n_2,\lambda_2).$$

До сих пор предполагалось, что ρ и γ фиксированы. Но они определяются неоднозначно, как и τ и σ для заданной функции $f \in \mathcal{F}$ при известных ρ и γ. Поэтому возникает вопрос о зависимости оператора $f(A)$ от этих и ряда других параметров. Ответ на этот вопрос дает утверждение 8, в пределах которого и в следующем за ним определении мы будем использовать обозначения $\overline{C}(\rho,\gamma),\ \Delta(\rho,\gamma,a),\ \Lambda(\rho,\gamma,a),\ F(\rho,\gamma,a,\tau,\sigma),\ f(A;\rho,\gamma,a_0,a,\tau,\sigma,m,n,\lambda),\ \widetilde{f}(A;\rho,\gamma,a_0, a,\tau,\sigma,m,n,\lambda)$ вместо $\overline{C},\ \Delta(a),\ \Lambda(a),\ F(a,\tau,\sigma),\ f(A;m,n,\lambda),\ \widetilde{f}(A;m,n,\lambda)$ соответственно.

Утверждение 8. *Пусть при некоторых* $C_{0,j}$ $(j = 1,2)$ *и всех* $s > 0$ *выполнены неравенства*

$$\|R(-s)\| \le \frac{C_{0,j}}{s^{\rho_j}(s+1)^{\gamma_j - \rho_j}} \quad \Big(\rho_j \in [1,+\infty) \cup \{0\},\ \gamma_j \le 1\Big),$$

$$0 < a_j < a_{0,j} < \overline{C}_j^{-1} \left(\overline{C}_j = \begin{cases} 2^{\rho_j - \gamma_j} C_{0,j}, & \rho_j \ge 1, \\ C_{0,j}, & \rho_j = 0 \end{cases} \right), \quad f \in F(\rho_j,\gamma_j,a_j,\tau_j,\sigma_j),$$

$$\lambda_j \in \Delta(\rho_j,\gamma_j,a_j), \quad m_j, n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad m_j \ge n_j, \quad \rho_j - \tau_j - n_j < 1, \quad \gamma_j - \sigma_j + m_j - n_j > 1$$

при $j = 1,2$. *Тогда*

$$f(A;\rho_1,\gamma_1,a_{0,1},a_1,\tau_1,\sigma_1,m_1,n_1,\lambda_1) = f(A;\rho_2,\gamma_2,a_{0,2},a_2,\tau_2,\sigma_2,m_2,n_2,\lambda_2), \tag{19}$$

а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, *то*

$$\overline{\widetilde{f}(A;\rho_1,\gamma_1,a_{0,1},a_1,\tau_1,\sigma_1,m_1,n_1,\lambda_1)} = \overline{\widetilde{f}(A;\rho_2,\gamma_2,a_{0,2},a_2,\tau_2,\sigma_2,m_2,n_2,\lambda_2)}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq m_j$, $n \geq n_j$, $m \geq n$, $\gamma_j - \sigma_j + m - n > 1$, $\lambda_0 \in \Delta(a_1) \cap \Delta(a_2)$. Как и при доказательстве леммы 1 из [10], получаем

$$\int\limits_{\Lambda(\rho_1,\gamma_1,a_{0,1})} \frac{f(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)} = \int\limits_{\Lambda(\rho_2,\gamma_2,a_{0,2})} \frac{f(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda}{g(\lambda;m,n,\lambda_0)},$$

т. е. с учетом утверждения 7

$$f(A;\rho_1,\gamma_1,a_{0,1},a_1,\tau_1,\sigma_1,m_1,n_1,\lambda_1) = f(A;\rho_1,\gamma_1,a_{0,1},a_1,\tau_1,\sigma_1,m,n,\lambda_0)$$

$$= f(A;\rho_2,\gamma_2,a_{0,2},a_2,\tau_2,\sigma_2,m,n,\lambda_0) = f(A;\rho_2,\gamma_2,a_{0,2},a_2,\tau_2,\sigma_2,m_2,n_2,\lambda_2),$$

т. е. выполнено (19). Аналогично, если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то выполнено (20). $\square$

Утверждение 8 позволяет ввести следующее определение операторных функций.

Определение. Пусть $f \in F(\rho,\gamma,a,\tau,\sigma)$ и выполнены условия (7) ($m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda \in \Delta(\rho,\gamma,a)$). Тогда положим $f(A) = f(A;\rho,\gamma,a_0,a,\tau,\sigma,m,n,\lambda)$, а если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то $\widetilde{f}(A) = \widetilde{f}(A;\rho,\gamma,a_0,a,\tau,\sigma,m,n,\lambda)$.

Утверждение 9. *Пусть $f \in F(a,\tau,\sigma)$, $h \in F(a,\tau_1,\sigma_1)$, $1/h \in F(a,æ,\nu)$, $\tau + æ - \rho > -1$, $\sigma + \nu - \gamma < -1$. Тогда*

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} h(A) \int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} R(\lambda)\,d\lambda;$$

если $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Lambda(a_0)} \frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} R(\lambda)\,d\lambda\, \widetilde{h}(A)}.$$

Анализ доказательства леммы 10 из [8] показывает, что для оператора $B = A^{-1}$ при некотором $C_0^B \in \mathbb{R}$ и всех $\mu = -s \in (-\infty, 0) \subset \rho(B)$ выполняется неравенство

$$\|R_B(-s)\| \leq \frac{C_0^B}{s^{\rho_1}(s+1)^{\gamma_1-\rho_1}}$$

с

$$\rho_1 = 2 - \gamma, \quad \gamma_1 = \min\{2 - \rho, 1\}. \tag{21}$$

Тогда с учетом утверждения 2 имеет место

Лемма 5. *Пусть $B = A^{-1}$. Тогда при некотором $d > 0$, $\Delta(d) \subset \rho(B)$, и для каждого $b \in (0, d)$ найдется такое $K_B = K_B(b) > 0$, что при всех $\mu \in \overline{\Delta(b)} \backslash \{0\}$*

$$\|R_B(\mu)\| \leq \frac{K_B(b)}{|\mu|^{\rho_1}(|\mu|+1)^{\gamma_1-\rho_1}},$$

где ρ_1 и γ_1 определяются формулами (21).

Далее всюду считаем, что $B^0 = E$ для любого оператора $B\colon D(B) \subset X \to X$.

Лемма 6. *Пусть $k, l, n \in \mathbb{Z}$, $k \leq l$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ ($j = k, k+1, \ldots, l$), $\alpha_k \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_l \neq 0$ при $-n \in \mathbb{N}$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор. Тогда*

$$B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} \subset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j. \tag{22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k = l$ (22) имеет место. Поэтому считаем, что $k < l$. В этом предположении при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (22) устанавливаем индукцией по n. При $n = 0$ (22) имеет место. Предположим, что (22) справедливо при $n = p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и докажем (22) для $n = p+1$.

Пусть $y \in D\Big(B^{-(p+1)} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{(p+1)+j}\Big)$ и

$$u = B^{-(p+1)} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{(p+1)+j} y = B^{-p} B^{-1} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{p+1+j} y.$$

Для $j = k+1, \dots, l$ $B^{p+1+j} y \in D(B^{-1})$, поэтому $\sum_{j=k+1}^{l} \alpha_j B^{p+1+j} y \in D(B^{-1})$, и, следовательно, поскольку $\alpha_k \neq 0$, $B^{p+1+k} y \in D(B^{-1})$, т.е. $u = B^{-p} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{p+j} y$, и в силу предложения индукции $u = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j y$. Поэтому (22) имеет место при $n = p+1$, а значит, и для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $-n \in \mathbb{N}$ и $C = B^{-1}$. Тогда по доказанному $C^n \sum_{j=k}^{l} \alpha_j C^{-n-j} \subset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j C^{-j}$, так как $\alpha_l \neq 0$. Заменяя C на B^{-1}, получаем (22). □

Следствие 2. *Пусть $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор, $S(B) = \sum_{s=0}^{m} \alpha_s B^s$, $T(B) = \sum_{t=0}^{n} \beta_t B^{-t} (\alpha_s, \beta_t \in \mathbb{C})$. Тогда при $\beta_0 \neq 0$*

$$S(B)T(B) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \alpha_s \beta_t B^{s-t}, \tag{23}$$

а при $\alpha_0 \neq 0$

$$T(B)S(B) = \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \alpha_s \beta_t B^{s-t}. \tag{24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 6 при $\beta_0 \neq 0$

$$S(B)T(B) \subset \sum_{s=0}^{m} \sum_{t=0}^{n} \alpha_s \beta_t B^{s-t}. \tag{25}$$

С другой стороны, область определения правой части (25) равна $D(B^m) \cap D(B^{-n})$, и на ней левая часть (25) имеет смысл, т.е. при $\beta_0 \neq 0$ справедливо равенство (23). Аналогично, при $\alpha_0 \neq 0$ имеет место (24). □

Следствие 3. *Пусть $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор с $\rho(B) \neq \varnothing$, $\lambda \in \rho(B)$, $\mu \in \rho(B^{-1})$. Тогда*

$$R_B(\lambda) R_{B^{-1}}(\mu) = R_{B^{-1}}(\mu) R_B(\lambda). \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\lambda\mu \neq 0$ следствие вытекает из равенства обратных операторов к обеим частям (26), имеющему место по следствию 2. При $\lambda\mu = 0$ равенство обратных операторов проверяется непосредственно. □

Лемма 7. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $m \geq n+j$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор с $\rho(B) \neq \varnothing$, $\lambda_0 \in \rho(B)$. Тогда*

$$B^j R_B^m(\lambda_0) = B^{-n} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0). \tag{27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $n + j < 0$, (27) выполняется. Если $n+j \geq 0$, $j \geq 0$, то равенство (27) справедливо в силу непрерывности оператора $B^{n+j} R^m(\lambda_0)$ на X. Пусть теперь $n+j \geq 0$, $j < 0$. Тогда $B^{-n} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = B^j B^{-n-j} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = B^j R_B^m(\lambda_0)$, поскольку $B^{n+j} R_B^m(\lambda_0)$ — непрерывный оператор на X. □

Лемма 8. *Пусть $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \le l$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = k, k+1, \dots, l)$, при $k < 0$ $\alpha_k \ne 0$, при $l > 0, \alpha_l \ne 0$. Пусть также $m, n \in \mathbb{N}$, $n + k \ge 0$, $m \ge n$, $m \ge n + l$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный инъективный оператор с $\rho(B) \ne \varnothing$, $\lambda_0 \in \rho(B)$. Тогда*

$$(B - \lambda_0 E)^m B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j. \tag{28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим оператор в левой части (28) через W. Рассмотрим два случая.

1. $k \ge 0$. В этом случае с учетом того, что $n + l \le m$, $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0)$ — непрерывный на X оператор. Поэтому

$$W = (B - \lambda_0 E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j (B - \lambda_0 E)^m R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j.$$

2. $k < 0$. Используя леммы 6 и 7, имеем

$$B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) \subset \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{-n} B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) \subset B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0).$$

Отсюда

$$B^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0).$$

Далее рассмотрим два подслучая.

2.1. $l \le 0$.

$$W = (B - \lambda_0 E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = (B - \lambda_0 E)^m R_B^m(\lambda_0) \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j.$$

2.2. $k < 0 < l$.

$$W = (B - \lambda_0 E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0) = (B - \lambda_0 E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{j-k} B^k R_B^m(\lambda_0)$$

$$= \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{j-k} (B - \lambda_0 E)^m R_B^m(\lambda_0) B^k = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{j-k} B^k = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j. \qquad \square$$

Утверждение 10. *Пусть $k \le l$, $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \ne 0$ при $k < 0$, $\alpha_l \ne 0$ при $l > 0$, $B\colon D(B) \subset X \to X$ — линейный оператор с $\rho(B) \ne \varnothing$, инъективный при $k < 0$. Тогда оператор $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j$ замкнут.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем m, n, λ_0 такие, как в лемме 8. При $k < 0$ в силу ограничений на параметры оператор $(B - \lambda_0 E)^m B^{-n}$ замкнут как обратный к непрерывному, а оператор $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^{n+j} R_B^m(\lambda_0)$ непрерывен. Поэтому в силу (28) оператор $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j$ замкнут. При $k \ge 0$ замкнутость оператора $\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j$ следует из представления

$$\sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j = (B - \lambda_0 E)^m \sum_{j=k}^{l} \alpha_j B^j R_B^m(\lambda_0)$$

(справа стоит произведение замкнутого оператора на непрерывный). $\square$

З а м е ч а н и е 1. В случае $\rho(B) \ne \varnothing$ вывод о замкнутости оператора $\sum_{j=0}^{l} \alpha_j B^j$ $(\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, l$, $\alpha_l \ne 0)$ имеется в [1].

Утверждение 11. *Пусть* $B\colon D(B)\subset X\to X$ *— линейный инъективный оператор,* $\overline{D(B)}=\overline{\operatorname{Im} B}=X$, $\rho(B)\neq\varnothing$, $P(B)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_j B^j$ $(k,l\in\mathbb{Z},\ k\le l,\ \alpha_k,\dots,\alpha_l\in\mathbb{C})$, $\alpha_k\neq 0$ *при* $k<0$, $\alpha_l\neq 0$ *при* $l>0$, $n\in\mathbb{N}$. *Тогда* $\overline{D(B^n)\cap D(B^{-n})}=X$ *и*

$$\overline{P(B)\Big|_{D(B^n)\bigcap D(B^{-n})}}=P(B). \tag{29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности считаем, что $n\ge\max\{|k|,l\}$. При $k\ge 0$ равенство (29) установлено в теореме 1 из [8]. Согласно этой теореме

$$\overline{B\Big|_{D(B^n)\bigcap D(B^{-n})}}=B,$$

т. е. $D(B^n)\cap D(B^{-n})$ плотно в X.

Переходя от оператора B к оператору B^{-1}, получаем, что согласно [8] (29) имеет место при $l\le 0$. Будем считать поэтому, что $k<0<l$.

В силу замкнутости оператора $P(B)$ достаточно установить, что

$$P(B)\subset\overline{P(B)\Big|_{D(B^n)\bigcap D(B^{-n})}}. \tag{30}$$

Пусть $x\in D(P(B))=D(B^k)\cap D(B^l)$, $\lambda_0\in\rho(B)\backslash\{0\}$, $z=(B^{-1}-(1/\lambda_0)E)^{|k|}(B-\lambda_0 E)^l x$. В этом случае $1/\lambda_0\in\rho(B^{-1})$ и $x=R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}(1/\lambda_0)z$. Так как $\overline{D(B^n)\cap D(B^{-n})}=X$, то найдется последовательность $\{z_m\}\subset D(B^n)\cap D(B^{-n})$, сходящаяся к z. Положим $x_m=R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}(1/\lambda_0)z_m$. Поскольку

$$B^n R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)\supset R_B^l(\lambda_0)B^n R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)=R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)B^n$$

и $\{z_m\}\subset D(B^n)$, то $\{x_m\}\subset D(B^n)$. Аналогично, $\{x_m\}\subset D(B^{-n})$, т. е. $\{x_m\}\subset D(B^n)\cap D(B^{-n})$. Кроме того, по определению x_m и x из сходимости $\{z_m\}$ к z следует сходимость $\{x_m\}$ к x. Положим $Q_{|k|}(B^{-1})=\sum_{j=k}^{-1}\alpha_j B^j$, $S_l(B)=\sum_{j=0}^{l}\alpha_j B^j$. Тогда в силу непрерывности операторов $Q_{|k|}(B^{-1})R_{B^{-1}}^{|k|}(1/\lambda_0)$ и $S_l(B)R_B^l(\lambda_0)$ получаем

$$Q_{|k|}(B^{-1})x_m=Q_{|k|}(B^{-1})R_B^l(\lambda_0)R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)z_m=R_B^l(\lambda_0)Q_{|k|}(B^{-1})R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)z_m$$

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}R_B^l(\lambda_0)Q_{|k|}(B^{-1})R_{B^{-1}}^{|k|}\Big(\frac{1}{\lambda_0}\Big)z=Q_{|k|}(B^{-1})x,$$

$$S_l(B)x_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}S_l(B)x.$$

Таким образом, $x\in D(P(B))$ и $P(B)x_m\to P(B)x$. Поэтому (30) имеет место. □

Утверждение 12. *Пусть* $f(\lambda)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_j\lambda^j$ $(k,l\in\mathbb{Z},\ \alpha_j\in\mathbb{C})$, $\alpha_k\neq 0$ *при* $k<0$, $\alpha_l\neq 0$ *при* $l>0$. *Тогда*

$$f(A)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^j, \tag{31}$$

а при $\overline{\operatorname{Im} A}=X$

$$\widetilde{f}(A)=\sum_{j=k}^{l}\alpha_j A^j. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала установим (31). Пусть $a \in (0, \overline{C}^{-1})$, $\lambda_0 \in \Delta(a)$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \geq n$, $n + \min\{k, 0\} - \rho > -1$, $n + \max\{l, 0\} - m - \gamma < -1$. Тогда с учетом утверждения 4 и леммы 8 имеем

$$f(A) = f(A; m, n, \lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{f(\mu) R(\mu)}{g(\mu; m, n, \lambda_0)}\, d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} g(A; m, n, \lambda_0) \sum_{j=k}^{l} \alpha_j \int\limits_{\Lambda(a)} \frac{R(\mu)\, d\mu}{g(\mu; m, n+j, \lambda_0)} = (A - \lambda_0 E)^m A^{-n} \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^{n+j} R^m(\lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j,$$

т. е. равенство (31) выполнено.

Пусть теперь $\overline{\operatorname{Im} A} = X$. Учитывая второе из соотношений (18) и равенство

$$D(\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0)) = D(A^{m-n}) \cap D(A^{-n}),$$

получаем, что $\widetilde{f}(A; m, n, \lambda_0) = \sum_{j=k}^{l} \alpha_j A^j \Big|_{D(A^{m-n}) \bigcap D(A^{-n})}$, откуда в силу утверждения 11 следует (32). $\square$

Утверждение 13. *Для $f \in \mathcal{F}$ операторные функции $f(A)$ и при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$ $\widetilde{f}(A)$ плотно определены, причем*

$$\widetilde{f}(A) \subset f(A). \tag{33}$$

Если хотя бы одна из этих функций непрерывна на X, то непрерывна и другая, и они равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о (33) вытекает из (8) при соответствующих значениях параметров и определений операторных функций $f(A)$ и $\widetilde{f}(A)$. Поскольку по утверждению 11 обе они плотно определены при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то имеет место оставшаяся часть утверждения. $\square$

Доказательства утверждений 14, 15 мы не приводим, так как они проводятся аналогично доказательству теорем 10, 11 из [8] соответственно.

Утверждение 14. *Пусть $f, 1/f \in \mathcal{F}$. Тогда существуют операторы $[f(A)]^{-1}$ и $[\widetilde{f}(A)]^{-1}$, причем $[f(A)]^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(A)$, и при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$ $[\widetilde{f}(A)]^{-1} = \widetilde{\left(\frac{1}{f}\right)}(A)$.*

Утверждение 15. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Тогда*

$$f_1(A) f_2(A) \subset (f_1 f_2)(A), \tag{34}$$

а при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$

$$\overline{\widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A)} \supset (\widetilde{f_1 f_2})(A). \tag{35}$$

Если оператор $f_2(A)$ непрерывен, то

$$f_1(A) f_2(A) = (f_1 f_2)(A), \tag{36}$$

а если $\widetilde{f}_1(A)$ непрерывен и $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то

$$\overline{\widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A)} = (\widetilde{f_1 f_2})(A). \tag{37}$$

З а м е ч а н и е 2. Пусть f_j, $1/f_j \in \mathcal{F}$ $(j = 1, 2)$. Тогда если оператор $(1/f_1)(A)$ непрерывен на X, то имеет место (36), а если $(1/f_2)(A)$ непрерывен и $\overline{\operatorname{Im} A} = X$, то справедливо (37).

Для доказательства достаточно в (36), (37) перейти к обратным операторам с помощью утверждения 14.

З а м е ч а н и е 3. Для $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ аналогично включениям (34), (35) устанавливаются соотношения $f_1(A) f_2(A) \ldots f_n(A) \subset (f_1 f_2 \ldots f_n)(A)$, и при $\overline{\operatorname{Im} A} = X$

$$\overline{\widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A) \ldots \widetilde{f}_n(A)} \supset (f_1 \widetilde{f_2 \ldots} f_n)(A).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
2. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
3. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 275 с.
4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский. М.: Наука, 1966. 499 с.
5. **Соболевский П.Е., Чеботарева Л.М.** О дробных степенях плохо позитивных операторов // Тр. мат. фак-та Воронеж. ун-та. Воронеж, 1971. Вып. 3. С. 112–118.
6. **Martinez C., Miguel S., Javier P.** A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators // Osaka J. Math. 2000. Vol. 37, no. 3. P. 551–576.
7. **Миротин А.Р.** О многомерном функциональном исчислении Бохнера — Филлипса // Проблемы физики, математики и техники. 2009. Т. 1, № 1. С. 60–63.
8. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Некоторые классы функций линейного замкнутого оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 186–200.
9. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Дробные степени одного класса операторов // Изв. вузов. Математика. 1991. № 9. С. 81–83.
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Расширение класса степенных операторных функций // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 38. С. 80–90 (Математика и механика; вып. 8.)

Поступила 22.04.2016

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: Mark.Rekant@urfu.ru

REFERENCES

1. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. I. General yheory.* New York: Interscience Publishers, 1958, Ser. Pure and Appl. Math., vol. 7, 858 p.
2. Rudin W. *Functional analysis.* New York: McGraw-Hill Companies, 1973, McGraw-Hill Ser. in Higher Math., 397 p.
3. Krein S.G. *Linejnye differencialnye uravneniya v banahovyh prostranstvah* (Linear differential equations in Banach spaces). Providence: Amer. Math. Soc., 1972, Transl. Math. Monographs, vol. 29, 390 p.
4. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskii P.E. *Integralnye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij* (Integral operators in spaces of summable functions). Leyden: Noordhoff Internat. Publ., 1976, 520 p.
5. Sobolewski P.E., Chebotareva L. M. On fractional degrees of weakly positive operators. *Tr. mat. fac. Voronezh. Univ.*, Voronezh, 1971, iss. 3. pp. 112–118 (in Russian).
6. Martinez C., Miguel S., Javier P. A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators. *Osaka J. Math.*, 2000, vol. 37, no. 3, pp. 551–576.
7. Mirotin A.R. On multidimensional Bochner–Phillips functional calculus. *Probl. Phys. Mat. Techn.*, 2009, no. 1 (1), pp. 60–63 (in Russian).
8. Korkina L.F., Rekant, M.A. Some classes of functions of a linear closed operator. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. S121–S135.
9. Korkina L.F., Rekant, M.A. Fractional powers of a class of operators. *Soviet Math.* (Izvestiya VUZ. Matematika), 1991, vol. 35, no. 9, pp. 79–81.
10. Korkina L.F., Rekant, M.A. The extension of the class of power operator functions. *Izv. Ural. Gos. Univ.*, 2005, no. 38, Ser. Matematika i Mekhanika, iss. 8, pp. 80–90 (in Russian).

L. F Korkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,

M. A. Rekant, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: e-mail: Mark.Rekant@urfu.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.17

ГРАФЫ, В КОТОРЫХ ЛОКАЛЬНЫЕ ПОДГРАФЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫ СО ВТОРЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 5[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t. Ранее задача Кулена была решена для $t = 4$. В данной работе завершена классификация дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются сильно регулярными графами со вторым собственным значением r, $4 < r \leq 5$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, собственное значение, дистанционно регулярный граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Graphs in which local subgraphs are strongly regular with second eigenvalue 5.

J. Koolen proposed the problem of studying distance-regular graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with second eigenvalue $\leq t$ for a given positive integer t. Earlier Koolen's problem was solved for $t = 4$. We complete the classification of distance-regular graphs in which the neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with second eigenvalue r, where $4 < r \leq 5$.

Keywords: strongly regular graph, eigenvalue, distance-regular graph.

MSC: 05B25, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-188-200

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Окрестности вершин называются также *локальными подграфами.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i. Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом. Графом Тэйлора* называется дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{k, \mu, 1; 1, \mu, k\}$. Дистанционно регулярный граф диаметра d имеет $d+1$ собственных значений: $k = \theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$, и θ_i называется $(i+1)$-м *собственным значением.*

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае (имеет параметры $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$),

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теоремы 1 и 4) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теоремы 2 и 3).

а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с $k' = 2\mu'$, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора [1]. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, \ldots$ ..

Ранее задача Кулена была решена для $t = 3$ (окончательный результат см. в [2]) и для $t = 4$ [3]. В данной работе решается задача Кулена для $t = 5$.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P, и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Сильно регулярный граф Γ со вторым собственным значением $m - 1$ назовем *исключительным*, если он не принадлежит следующему списку:

(1) объединение изолированных m-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_t(t + m - 1, t)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_m(s, m - 1)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, $(-1+\sqrt{4\mu+1})/2 = m-1$.

В данной работе доказаны четыре теоремы, дающие список массивов пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим 5. В доказательствах были использованы компьютерные вычисления (см. алгоритмы 1 и 2).

Сначала приведем теорему редукции к графам, в которых окрестности вершин — исключительные графы со вторым собственным значением 5 (анонсировано в [4]).

Теорема 1 (Теорема редукции). *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t, $4 < t \le 5$, u — вершина графа Γ. Тогда $[u]$ — исключительный сильно регулярный граф с неглавным собственным значением 5, или верно одно из утверждений:*

(1) *$[u]$ — объединение изолированных 6-клик;*

(2) *$[u]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s, s-5)$, и либо*

(*i*) *$s = 6$ и Γ — граф Джонсона $J(14, 7)$, его стандартное частное или граф с массивом пересечений $\{49, 36, 1; 1, 12, 49\}$, либо*

(*ii*) *$s = 7$ и Γимеет массив пересечений $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$, либо*

(*iii*) *$s = 10$ и Γ — граф Тэйлора;*

(3) *$[u]$ — дополнение псевдогеометрического графа для $pG_6(s, 5)$, $s = 12$ и Γ — граф Тэйлора;*

(4) *$[u]$ — граф в половинном случае с параметрами $(4l+1, 2l, l-1, l)$, $l \in \{21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}$ и Γ — граф Тэйлора.*

В следующих двух теоремах найдены параметры исключительных графов со вторым собственным значением 5. Всего имеется 842 набора (набор $(3263897, 3220950, 3178475, 3185550)$ отвечает графу с наибольшим числом вершин). Из них 378 наборов отвечают псевдогеометрическим графам ($pG_{445}(450, 4094)$ отвечает максимальному s, $pG_{408}(413, 5304)$ — максимальному t). В теоремах 2 (133 набора, отвечающих непсевдогеометрическим графам) и 3 (65 наборов, отвечающих псевдогеометрическим графам) перечислены наборы параметров графов, которые могут быть окрестностями вершин во вполне регулярном графе диаметра, большего 2 (для которых число w из леммы 1.1 не больше $v - k - 1$).

Теорема 2. *Пусть* Γ *— исключительный непсевдогеометрический сильно регулярный граф с неглавным собственным значением* 5. *Тогда его параметры приведены в табл.* 1.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— исключительный псевдогеометрический граф для* $pG_{s-5}(s,t)$. *Если* Γ *вкладывается в качестве окрестности вершины в дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *то его параметры* (s,t) *приведены в табл.* 2.

С помощью теоремы 3 в [5] анонсирован список массивов пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для $pG_{s-5}(s,t)$.

Предложение 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \geq 3$, *в котором окрестности вершин — исключительные псевдогеометрические графы для* $pG_{s-5}(s,t)$. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) $s = 10$, *и* Γ *— граф Тэйлора*;

(2) $s = 7$, *и либо* $t = 1$ *и* Γ *— локально* $T(9)$*-граф с массивом пересечений* $\{36, 21, 10, 3; 1, 6, 15, 28\}$ (*половинный* 9*-куб*), *либо* $t = 18$ *и* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{512, 378, 1; 1, 189, 512\}$;

(3) $s = 6$, *и либо* $t = 4$ *и* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{175, 144, 22; 1, 24, 154\}$ *или* $\{175, 144, 1; 1, 12, 175\}$, *либо* $t = 8$ *и* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{343, 288, 1; 1, 96, 343\}$.

Ввиду теорем 1, 2 и предложения 1 завершает решение задачи Кулена для $t = 5$ следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра, большего* 2, *в котором окрестности вершин имеют параметры из заключения теоремы* 2. *Тогда параметры окрестности и массив пересечений* Γ *приведены в табл.* 3.

1. Предварительные результаты

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* $\theta_1 = 5$, θ_2, Δ *— регулярный подграф из* Γ *степени* μ *на* w *вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu - 5)v/(k - 5) \leq w \leq (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$;

(2) *если* X_i *— множество вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ, $x_i = |X_i|$, *то* $x_0 \cdot w \leq (v - x_0)(v - w)(5 - \theta_2)^2/(2k - 5 - \theta_2)^2$;

(3) *если* $x_0 = w$, *то* $w \leq v(5 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$.

Доказательство. По [6, предложение 4.6.1] имеем $\theta_2 \leq \mu - (k - \mu)w/(v - w) \leq 5$, поэтому $(\mu - 5)(v - w) \leq (k - \mu)w \leq (\mu - \theta_2)(v - w)$. Отсюда $(\mu - 5)v/(k - 5) \leq w \leq (\mu - \theta_2)v/(k - \theta_2)$.

Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Тогда $x_0 \cdot w \leq (v - x_0)(v - w)(5 - \theta_2)^2/(2k - 5 - \theta_2)^2$.

Если $\mu = w$, то $\mu(2k - 5 - \theta_2) \leq (v - \mu)(5 - \theta_2)$ и $\mu \leq v(5 - \theta_2)/(2k - 2\theta_2)$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* d *и окрестность некоторой вершины в* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $5, \eta_2$. *Если* $\mu' > 5$, *то диаметр* Γ *не больше* 3.

Доказательство. Если $d(\Gamma) \geq 4$, то в окрестности вершины содержится объединение двух изолированных μ-подграфов, т. е. подграф с собственным значением μ' кратности не меньше 2. Значит, из переплетения спектров [6, предложение 3.2.1] следует, что для всех наборов параметров с $\mu' > 5$ диаметр Γ не больше 3. Лемма доказана.

Т а б л и ц а 1

Параметры сильно регулярных графов из теоремы 2

$(144, 65, 28, 30)$	$(529, 120, 17, 30)$	$(961, 160, 9, 30)$	$(1521, 200, 1, 30)$
$(162, 23, 4, 3)$	$(540, 77, 4, 12)$	$(969, 176, 13, 36)$	$(1534, 525, 140, 200)$
$(169, 70, 27, 30)$	$(540, 245, 100, 120)$	$(981, 392, 133, 172)$	$(1587, 488, 109, 168)$
$(171, 50, 13, 15)$	$(576, 125, 16, 30)$	$(1003, 300, 65, 100)$	$(1600, 205, 0, 30)$
$(196, 75, 26, 30)$	$(606, 275, 112, 135)$	$(1024, 165, 8, 30)$	$(1625, 580, 165, 230)$
$(208, 45, 8, 10)$	$(616, 75, 2, 10)$	$(1036, 375, 110, 150)$	$(1681, 784, 327, 399)$
$(210, 95, 40, 45)$	$(625, 130, 15, 30)$	$(1080, 221, 22, 51)$	$(1922, 904, 381, 464)$
$(235, 52, 9, 12)$	$(630, 68, 1, 8)$	$(1086, 155, 4, 25)$	$(1936, 645, 164, 240)$
$(238, 75, 20, 25)$	$(630, 185, 40, 60)$	$(1089, 170, 7, 30)$	$(1944, 725, 220, 300)$
$(256, 85, 24, 30)$	$(638, 49, 0, 4)$	$(1089, 320, 67, 105)$	$(2048, 805, 264, 350)$
$(273, 80, 19, 25)$	$(650, 55, 0, 5)$	$(1090, 495, 200, 245)$	$(2185, 936, 347, 441)$
$(288, 41, 4, 6)$	$(676, 135, 14, 30)$	$(1122, 209, 16, 44)$	$(2205, 950, 355, 450)$
$(289, 90, 23, 30)$	$(686, 250, 75, 100)$	$(1128, 245, 28, 60)$	$(2262, 875, 280, 375)$
$(300, 65, 10, 15)$	$(696, 125, 10, 25)$	$(1134, 275, 40, 75)$	$(2300, 1045, 420, 520)$
$(320, 145, 60, 70)$	$(704, 37, 0, 2)$	$(1156, 175, 6, 30)$	$(2420, 885, 260, 360)$
$(324, 95, 22, 30)$	$(722, 309, 116, 144)$	$(1156, 345, 74, 115)$	$(2484, 1040, 373, 480)$
$(329, 40, 3, 5)$	$(726, 203, 40, 63)$	$(1190, 145, 0, 20)$	$(2523, 962, 301, 407)$
$(336, 125, 40, 50)$	$(729, 140, 13, 30)$	$(1200, 545, 220, 270)$	$(2646, 1265, 544, 660)$
$(351, 140, 49, 60)$	$(742, 285, 92, 120)$	$(1210, 390, 95, 140)$	$(2668, 1155, 434, 550)$
$(361, 100, 21, 30)$	$(755, 130, 9, 25)$	$(1221, 500, 175, 225)$	$(2668, 1270, 543, 660)$
$(364, 33, 2, 3)$	$(760, 165, 20, 40)$	$(1296, 185, 4, 30)$	$(2784, 1265, 508, 630)$
$(364, 165, 68, 80)$	$(768, 325, 120, 150)$	$(1296, 518, 175, 228)$	$(3186, 1274, 427, 564)$
$(375, 110, 25, 35)$	$(780, 369, 158, 189)$	$(1332, 605, 244, 300)$	$(3249, 1392, 515, 657)$
$(400, 21, 2, 1)$	$(783, 230, 49, 75)$	$(1334, 465, 128, 180)$	$(3393, 1484, 565, 714)$
$(437, 100, 15, 25)$	$(784, 145, 12, 30)$	$(1344, 425, 100, 150)$	$(3393, 1600, 675, 825)$
$(441, 110, 19, 30)$	$(800, 85, 0, 10)$	$(1350, 380, 73, 120)$	$(3510, 1595, 640, 795)$
$(456, 195, 74, 90)$	$(841, 150, 11, 30)$	$(1352, 525, 170, 225)$	$(3888, 1625, 580, 750)$
$(477, 140, 31, 45)$	$(848, 385, 156, 190)$	$(1369, 190, 3, 30)$	$(4602, 2033, 784, 988)$
$(484, 105, 14, 25)$	$(885, 260, 55, 85)$	$(1394, 175, 0, 25)$	$(4602, 2150, 895, 1100)$
$(484, 115, 18, 30)$	$(889, 222, 35, 62)$	$(1395, 410, 85, 135)$	$(4720, 2145, 860, 1070)$
$(486, 194, 67, 84)$	$(900, 155, 10, 30)$	$(1444, 195, 2, 30)$	$(7021, 3250, 1335, 1650)$
$(495, 38, 1, 3)$	$(904, 301, 78, 111)$	$(1445, 532, 159, 217)$	
$(505, 180, 53, 70)$	$(925, 330, 95, 130)$	$(1458, 329, 40, 84)$	
$(507, 44, 1, 4)$	$(936, 187, 18, 42)$	$(1470, 565, 180, 240)$	

Т а б л и ц а 2

Параметры (s, t) псевдогеометрических графов из теоремы 3

$s = 6$	$t = 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 22, 24, 29, 30, 36$
$s = 7$	$t = 1, 4, 6, 8, 9, 14, 15, 18, 22, 24, 29, 34, 36, 50, 54$
$s = 8$	$t = 2, 4, 6, 9, 10, 12, 14, 18, 24, 30, 34, 39, 42, 54, 66, 74, 84$
$s = 9$	$t = 12, 24, 44, 48, 84, 144$
$s = 10$	$t = 4, 16, 24, 27, 38, 49, 54, 60, 104, 126, 159, 214$

Т а б л и ц а 3

Параметры графа Γ из теоремы 4

$\Gamma(a)$	Γ
$(256, 85, 24, 30)$	$\{256, 170, 1; 1, 85, 256\}$
$(288, 41, 4, 6)$	$\{288, 246, 1; 1, 41, 288\}$
$(329, 40, 3, 5)$	$\{329, 288, 1; 1, 42, 329\}$
	$\{329, 288, 56, 1; 1, 28, 288, 329\}$
	$\{329, 288, 48; 1, 16, 282\}$
	$\{329, 288, 70, 1; 1, 14, 288, 329\}$
$(441, 110, 19, 30)$	$\{441, 330, 1; 1, 110, 441\}$
$(495, 38, 1, 3)$	$\{495, 456, 1; 1, 38, 495\}$
$(540, 77, 4, 12)$	$\{540, 462, 1; 1, 77, 540\}$
$(638, 49, 0, 4)$	$\{638, 588, 1; 1, 49, 638\}$
	$\{638, 588, 71; 1, 21, 568\}$
$(650, 55, 0, 5)$	$\{650, 594, 1; 1, 18, 650\}$
$(676, 135, 14, 30)$	$\{676, 540, 1; 1, 135, 676\}$
$(704, 37, 0, 2)$	$\{704, 666, 1; 1, 37, 704\}$
	$\{704, 666, 1; 1, 9, 704\}$
$(961, 160, 9, 30)$	$\{961, 800, 1; 1, 160, 961\}$
$(1296, 185, 4, 30)$	$\{1296, 1110, 1; 1, 185, 1296\}$

2. Теорема редукции

В этом разделе предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') и неглавными собственными значениями η_1, η_2, $4 < \eta_1 \leq 5$. Зафиксируем вершину $u \in \Gamma$ и допустим, что $[u]$ не является исключительным графом. Тогда $[u]$ — один из следующих графов:

(1) объединение изолированных 6-клик;

(2) псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s, s-5)$;

(3) дополнение псевдогеометрического графа для $pG_6(s, 5)$;

(4) граф в половинном случае с параметрами $(4\mu+1, 2\mu, \mu-1, \mu)$, $(-1+\sqrt{4\mu+1})/2 = 5$.

Лемма 2.1. *Если* $[u]$ *— псевдогеометрический граф для* $pG_{s-5}(s, s-5)$*, то верно одно из утверждений*:

(1) $s = 6$ *и* Γ *является графом Джонсона* $J(12, 6)$*, его стандартным частным или имеет массив пересечений* $\{49, 36, 1; 1, 12, 49\}$;

(2) $s = 7$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{64, 42, 1; 1, 21, 64\}$;

(3) $s = 10$ *и* Γ *— граф Тэйлора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[u]$ — псевдогеометрический граф для $pG_{s-5}(s, s-5)$. Тогда $v' = k = (s+1)^2$, $k' = \lambda = s^2 - 4s$, $\mu' = (s-5)(s-4) = s^2 - 9s + 20$, $b_1 = k - \lambda - 1 = 6s$ и μ делит $6s(s+1)^2$. По [7, теорема 20] либо Γ — граф Тэйлора и $s = 10$, либо $(s^2 - 9s + 15)(s+1)^2/(s^2 - 4s - 5) \leq \mu \leq 4s$, поэтому $s \leq 9$.

Если $s = 6$, то $[u]$ является 7×7-решеткой и $\mu \in \{4, 6, 12, 14\}$. В случае $\mu = 14$ диаметр Γ равен 2. В случае $\mu = 4$ ввиду [9, теорема 1] Γ является графом Джонсона $J(14, 7)$ или его стандартным частным. В случае $\mu = 12$ имеем $b_2 = 1$ и Γ имеет массив пересечений $\{49, 36, 1; 1, 12, 49\}$. В случае $\mu = 6$ имеем $k_2 = 6 \cdot 49$ и $b_2 = 1, 2, 3, 6$. Поэтому диаметр Γ не больше 4. Если диаметр Γ равен 3, то Γ имеет массив пересечений $\{49,36,b_2;1,6,c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть диаметр Γ равен 4. Тогда $k_3=36\cdot 49/c_3$, Γ имеет массив пересечений $\{49,36,6,b_3;1,6,c_3,c_4\}$ и $c_3-b_3\geq c_2-b_2+a_1+2$, поэтому $c_3\geq b_3+14$. Отсюда $c_3\in\{18,21,28,36\}$. По [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $s\geq b^-=-1-b_1/(\theta_1+1)$, $r\leq b^+=-1-b_1/(\theta_d+1)$. Так как $r=5,s=-2,b_1=36$, то $\theta_1\leq 35$ и $\theta_d\geq -7$. Если $c_3=18$, то $b_3\leq 4$, $k_3=98$ и c_4 делит $98b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $c_3=21$, то $k_3=84$, c_4 четно и делит $84b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $c_3=28$, то $k_3=63$, c_4 делится на 3 и делит $63b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $c_3=36$, то $k_3=49$, c_4 делит $49b_3$. В этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $s=7$, то $7\leq\mu\leq 24$, μ делит $64\cdot 42$, поэтому $\mu\in\{7,8,12,14,16,21,24\}$. В случае $\mu=7$ имеем противоречие с тем, что $[u]$ является графом Тервиллигера. По [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $s\geq b^-=-1-b_1/(\theta_1+1)$, $r\leq b^+=-1-b_1/(\theta_d+1)$. Так как $r=5,s=-3,b_1=42$, то $\theta_1\leq 20$ и $\theta_d\geq -8$. Если $d(\Gamma)\geq 4$, то $\mu\leq 64/6$.

В случае $\mu=12$ граф Γ имеет массив пересечений $\{64,42,b_2;1,12,c_3\}$, а в случае $\mu=14$ — массив пересечений $\{64,42,b_2;1,14,c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. В случае $\mu=16$ имеем $k_2=168$, число b_2 делится на 8. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{64,42,8t;1,16,c_3\}$. В случае $\mu=24$ имеем $k_2=112$, b_2 делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{64,42,4t;1,24,c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. В случае $\mu=21$ имеем $k_2=128$ и Γ имеет массив пересечений $\{64,42,1;1,21,64\}$.

Пусть $\mu=8$. Тогда $k_2=8\cdot 42=336$ и b_2 делится на 4. По лемме 1.1 имеем $8b_2\leq 56(64-b_2)64/40^2$, поэтому $25b_2\leq 7(64-b_2)$ и $b_2\leq 14$. Если $d(\Gamma)=3$, то Γ имеет массив пересечений $\{64,42,4t;1,8,c_3\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. Значит, $d(\Gamma)=4$, и по [8, теорема 5.2.1] имеем $c_3-b_3\geq c_2-b_2+a_1+2$, поэтому $42\geq c_3\geq b_3+31-b_2$. В случае $b_2=8$ имеем $c_3=24,28,32,42$, а в случае $b_2=12$ имеем $c_3=21,24,28,32,36,42$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $s=8$, то $21\leq\mu\leq 36$, μ делит $81\cdot 48$ и $\mu\in\{24,27,36\}$. По [8, теорема 4.4.3] выполняются неравенства $s\geq b^-=-1-b_1/(\theta_1+1)$, $r\leq b^+=-1-b_1/(\theta_d+1)$. Так как $r=5,s=-4,b_1=48$, то $\theta_1\leq 15$ и $\theta_d\geq -9$.

В случае $\mu=24$ имеем $k_2=81\cdot 2=162$ и Γ имеет массив пересечений $\{81,48,b_2;1,24,c_3\}$. В случае $\mu=27$ имеем $k_2=3\cdot 48=144$ и b_2 делится на 9. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{81,48,9t;1,27,c_3\}$. В случае $\mu=36$ имеем $k_2=9\cdot 12=108$ и b_2 делится на 3. Отсюда Γ имеет массив пересечений $\{81,48,3t;1,36,c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Если $s=9$, то $38\leq\mu\leq 50$, μ делит $100\cdot 55$ и $\mu\in\{44,50\}$. В случае $\mu=44$ имеем $k_2=25\cdot 5=125$, b_2 делится на 4 и Γ имеет массив пересечений $\{100,55,4t;1,44,c_3\}$. В случае $\mu=50$ имеем $k_2=2\cdot 55=110$, b_2 делится на 10 и Γ имеет массив пересечений $\{100,55,10t;1,50,c_3\}$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если $[u]$ — дополнение псевдогеометрического графа для $pG_6(s,5)$, то Γ — граф Тэйлора.*

Доказательство. Если $[u]$ является дополнением псевдогеометрического графа для $pG_6(s,5)$, то $v'=k=(s+1)(5s+6)/6=(5s^2+11s+6)/6$, $\bar{k}'=6s$, $\bar{\lambda}'=s+24$ и $k-\lambda-1=6s$. Далее, $\mu'=v'-2\bar{k}'-2+\bar{\lambda}'=(5s^2-55s+138)/6$ и $(5s^2-55s+144)/6=\mu'+1\leq\mu<4s$, поэтому $s\leq 13$. Так как $s(s-11)$ делится на 6, то $s=5,6,12$, $k=31,42,143$, $\lambda=0,5,70$,

$b_1 = 30, 36, 72$ и $\mu' = -2, -2, 33$. По [7, теорема 20] либо Γ — граф Тэйлора, либо $36 \le \mu \le 48$. С другой стороны, по [7, теорема 20] имеем $296143/68 \le \mu$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если* $[u]$ *— граф в половинном случае с параметрами* $(4l+1, 2l, l-1, l)$*, то* $l \in \{21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}$ *и* Γ *— граф Тэйлора.*

Доказательство. Пусть $[u]$ — граф в половинном случае с параметрами $(4l+1, 2l, l-1, l)$. Тогда $4 < (-1+\sqrt{4l+1})/2 \le 5$, поэтому $20 < l \le 30$. Так как $4l+1$ — сумма двух квадратов, то $l \in \{21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30\}$. По [1] Γ — граф Тэйлора. Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.3 следует теорема 1.

3. Доказательство теорем 2 и 3

Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) и спектром $k^1, n-m^f, -m^{v-f-1}$. Параметры назовем *исключительными*, если выполнены ограничения из [10]:

(1) условие Крейна $\mu(n - m(m-1)) \le (m-1)(n-m)(n+m(m-1))$;

(2) абсолютная граница $v \le f(f+3)/2$ ($v \le f(f+1)/2$, если $\mu(n-m(m-1)) \ne (m-1)(n-m)(n+m(m-1))$);

(3) μ-граница $\mu \le m^3(2m-3)$ (в случае равенства имеем $n = m(m-1)(2m-1)$);

(4) граница для числа 3-лап $n \le m(m-1)(\mu+1)/2 + m - 1$ (если $\mu \ne m(m-1), m^2$).

Теоремы 2 и 3 доказываются с помощью компьютерных вычислений, выполненных с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 1

1. Мы ищем параметры графа $\bar\Gamma$ с наименьшим собственным значением -6. Задается максимальное значение $\mu = 1458$. Ему отвечает $n = 330$. Проверяется допустимость полученных параметров.
2. Если $\mu = 1$, то переходим к шагу 4, в противном случае уменьшаем значение μ на 1. Находим максимальное $n = 15(\mu+1)+5$.
3. Ищем допустимые параметры. По допустимым параметрам графа $\bar\Gamma$ находим параметры графа Γ. Если $\mu + n - 12 > 0$, то уменьшаем n на 1 и повторяем шаг 3, в противном случае переходим к шагу 2.
4. Среди допустимых параметров графа Γ ищем те, для которых m делит μ. Им отвечают псевдогеометрические графы. Соответствующую пару (s, t) помещаем в заключение теоремы 3. Оставшиеся параметры помещаем в заключение теоремы 2.

4. Новая граница для диаметра графа

В этом разделе мы получим границу для диаметра дистанционно регулярного графа, в котором окрестности вершин сильно регулярны.

Предложение 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* d*, в котором окрестности вершин сильно регулярны с собственными значениями* λ, η_1, η_2*,* $\eta_2 < 0$*. Если* r *— наименьшее натуральное число такое, что в шаре радиуса* r *средняя степень вершины не меньше* $-b_1/(\eta_2+1) - 1$*, то* $d \le 2r+1$*.*

При выборе очередного значения b_i среднюю степень в шаре радиуса i можно посчитать точно: $\bar k = k - b_i k_i / v_i$, где v_i — число вершин в шаре.

Доказательство. По [8, лемма 3.2.1] средняя степень графа не превосходит его наибольшее собственное значение, причем равенство достигается только в случае регулярного графа. Поэтому мы ищем шар наименьшего радиуса r, в котором средняя степень не меньше $-b_1/(\eta_2+1) - 1$, где $\eta_1 > \eta_2$ — неглавные собственные значения окрестности вершины.

По [8, теорема 4.4.3] в графе Γ не может быть двух изолированных шаров радиуса r, значит, $d \le 2r+1$. Более того, средняя степень в объединении слоев, изолированных от шара радиуса r, не превосходит $-b_1/(\eta_2+1)-1$, и равенство возможно только в сфере радиуса d. Предложение доказано.

Применение предложения 2 проиллюстрируем на примере.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф Тервиллигера диаметра d, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона с собственными значениями $7, \eta_1 = 2, \eta_2 = -3$. Тогда $b_1 = 42$, $-b_1/(\eta_2+1)-1 = 20$ и для шара радиуса 2 получим $\bar{k} = 50 - 50 \cdot 21 b_2/1101$. (Известно [11], что диаметр вполне регулярного графа Тервиллигера, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, не больше 7). Если $d > 5$, то $50(1101 - 21b_2)/1101 < 20$ и $b_2 > 31$.

5. Доказательство теоремы 4

Теорема 4 следует из приведенных ниже лемм 5.1–5.6.

До конца работы предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра, большего 2, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (v', k', λ', μ') из заключения теоремы 2 (см. табл. 1) и неглавными собственными значениями $\eta_1 = 5, \eta_2$. Так как $k' \ne 2\mu'$, то ввиду [7, теорема 20] можно считать, что $\mu < 2b_1/3$. Для вершин $u, w \in \Gamma$ с $d(u,w) = 2$ через x_0 обозначим число вершин из $[w]-[u]$, не смежных с вершинами из $[u] \cap [w]$. Тогда $b_2 \le x_0$.

Лемма 5.1. *$v' \le 1444$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры (2646, 1265,544,660). Ввиду леммы 1.1 имеем $1376 \le \mu \le 1491, b_1 = 1380$, противоречие с тем, что $\mu > 2b_1/3$.

Аналогичное противоречие получим и для наборов параметров с $v' > 2646$.

Допустим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры (1445,532,159,217). Ввиду леммы 1.1 имеем $582 \le \mu \le 680, b_1 = 912$. Далее, $\mu < 608$, и μ делит $1445 \cdot 912$, противоречие.

Аналогичное противоречие получим в случаях (1470,565,180,240), (1681,784,327,399), (1922, 904,381,464), (2048,805,264,350), (2185,936,347,441), (2205,950,355,450), (2262,875,280,375), (2300, 1045,420,520), (2484,1040,373,480), (2523,962,301,407).

С помощью компьютерных вычислений с использованием алгоритма 2 (см. ниже) получим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры

(1) (1458,329,40,84) (и Γ имеет массив пересечений $\{1458, 1128, 1; 1, 376, 1458\}$);

(2) (1521,200,1,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1521, 1320, 1; 1, 330, 1521\}$, $\{1521, 1320, 1; 1, 264, 1521\}$ или $\{1521, 1320, 1; 1, 220, 1521\}$);

(3) (1587,488,109,168) (и Γ имеет массив пересечений $\{1587, 1098, 1; 1, 549, 1587\}$).

В любом случае диаметр графа Γ равен 3, и у Γ нет отличных от k целых собственных значений, противоречие с [8, с. 130]. Лемма доказана.

Лемма 5.2. *Если $v' \ge 1122$, то окрестности вершин имеют параметры* $(1296, 185, 4, 30)$ *и Γ имеет массив пересечений* $\{1296, 1110, 1; 1, 185, 1296\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры (1200, 545,220,270). Ввиду леммы 1.1 имеем $589 \le \mu \le 650, b_1 = 654$, противоречие с тем, что $\mu \ge 2b_1/3$.

Аналогичное противоречие получим в случаях (1221,500,175,225), (1296,518,175,228), (1332, 605,244,300), (1352,525,170,225).

С помощью компьютерных вычислений (см. алгоритм 2) получим, что окрестность вершины в Γ имеет параметры

(1) (1122,209,16,44 (и Γ имеет массив пересечений $\{1122, 912, 1; 1, 304, 1122\}$ или $\{1122, 912, 1; 1, 228, 1122\}$);

(2) (1128,245,28,60) (и Γ имеет массив пересечений $\{1128, 882, 1; 1, 294, 1128\}$);

(3) (1156,175,6,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1156, 980, 1; 1, 245, 1156\}$ или $\{1156, 980, 1; 1, 196, 1156\}$);

(4) (1190,145,0,20) (и Γ имеет массив пересечений $\{1190, 1044, 1; 1, 261, 1190\}$ или $\{1190, 1044, 1; 1, 174, 1190\}$);

(5) (1296,185,4,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1296, 1110, 1; 1, 222, 1296\}$ или $\{1296, 1110, 1; 1, 185, 1296\}$);

(6) (1394,175,0,25) (и Γ имеет массив пересечений $\{1394, 1218, 1; 1, 174, 1394\}$);

(7) (1395,410,85,135) (и Γ имеет массив пересечений $\{1395, 984, 1; 1, 492, 1395\}$);

(8) (1444,195,2,30) (и Γ имеет массив пересечений $\{1444, 1248, 1; 1, 312, 1444\}$ или $\{1444, 1248, 1; 1, 208, 1444\}$).

Только в случае (5) и $\mu = 185$ граф Γ имеет отличное от k целое собственное значение. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Если* $800 \leq v' \leq 1090$*, то окрестности вершин имеют параметры* $(961, 160, 9, 30)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{961, 800, 1; 1, 160, 961\}$.

Доказательство. Заметим, что средняя степень вершины в шаре радиуса 1 больше λ. Если $\lambda \geq -b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, то по предложению 2 имеем $d(\Gamma) = 3$.

Указанное выше неравенство выполняется для любых параметров с $800 \leq v' \leq 1090$, перечисленных в табл. 1. Компьютерные вычисления с использованием алгоритма 2 показывают, что только массив пересечений $\{961, 800, 1; 1, 160, 961\}$ является допустимым. Лемма доказана.

Лемма 5.4. *Если* $616 \leq v' \leq 784$*, то окрестности вершин имеют параметры* $(638, 49, 0, 4)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{638, 588, 1; 1, 49, 638\}$ *или* $\{638, 588, 71; 1, 21, 568\}$*), или* $(650, 55, 0, 5)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{650, 594, 1; 1, 18, 650\}$*), или* $(676, 135, 14, 30)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{676, 540, 1; 1, 135, 676\}$*), или параметры* $(704, 37, 0, 2)$ *(и* Γ *имеет массив пересечений* $\{704, 666, 1; 1, 37, 704\}$ *или* $\{704, 666, 1; 1, 9, 704\}$*).*

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 3$, то возникают только массивы пересечений из заключения леммы. Пусть $d(\Gamma) \geq 4$. Ввиду 1.2 возникают лишь параметры $(638, 49, 0, 4)$, $(650, 55, 0, 5)$, $(704, 37, 0, 2)$.

В случае параметров $(638, 49, 0, 4)$ имеем $\eta_1 = 5, \eta_2 = -9$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 72.5$. С помощью компьютерных вычислений, использующих результаты леммы 1.2, получены возможные значения μ и b_2:

$\mu = 8,\ b_2 = 2, 4, \ldots, 270$; $\mu = 11,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 198$; $\mu = 12,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 182$;
$\mu = 14,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 162$; $\mu = 21,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 169$; $\mu = 22,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 154$;
$\mu = 24,\ b_2 = 2, 4, \ldots, 150$; $\mu = 28,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 143$; $\mu = 29,\ b_2 = 29, 58, 87, 116, 145$;
$\mu = 33,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 132$; $\mu = 42,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 125$; $\mu = 44,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 110$;
$\mu = 49,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 108$; $\mu = 56,\ b_2 = 2, 4, \ldots, 100$; $\mu = 58,\ b_2 = 29, 58, 87$;
$\mu = 66,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 88$; $\mu = 77,\ b_2 = 11, 22, \ldots, 66$; $\mu = 84,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 65$;
$\mu = 87,\ b_2 = 29, 58$; $\mu = 88,\ b_2 = 22, 44$; $\mu = 98,\ b_2 = 1, 2, \ldots, 50$;
$\mu = 132,\ b_2 = 11$.

В случае $\mu = 8$, если $\bar{k} = k - b_i k_i / v_i = 638 - 4683 b_2/5322 < 72.5$, то $4683 b_2 \geq 567.5 \cdot 5322$, противоречие. Значит, по предложению 2 имеем $d \leq 5$. Для оставшихся значений μ оценка $d \leq 5$ получается еще проще.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(650, 55, 0, 5)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -10$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 65$.

В случае $\mu = 10$, если $\bar{k} = k - b_i k_i / v_i = 650 - 4683 b_2/5322 < 65$, то $4683 b_2 \geq 567.5 \cdot 5322$, противоречие. Значит, по по предложению 2 имеем $d \leq 5$. Для оставшихся значений μ оценка $d \leq 5$ получается еще проще.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(704, 37, 0, 2)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -7$ и $-b_1/(\eta_2+1)-1 = 110$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 560. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $144 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в любом случае новых допустимых массивов пересечений нет. Лемма доказана.

Лемма 5.5. *Если* $361 \leq v' \leq 606$*, то окрестности вершин имеют параметры* $(441, 110, 19, 30)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{441, 330, 1; 1, 110, 441\}$) *или* $(495, 38, 1, 3)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{495, 456, 1; 1, 38, 495\}$)*, или* $(540, 77, 4, 12)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{540, 462, 1; 1, 77, 540\}$).

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 3$, то возникают только массивы пересечений из заключения леммы.

Если $\lambda < -b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, то возникают лишь параметры $(364, 33, 2, 3)$, $(400, 21, 2, 1)$, $(495, 38, 1, 3)$, $(507, 44, 1, 4)$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(364, 33, 2, 3)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -6$ и $-b_1/(\eta_2+1) - 1 = 330 : 5 - 1 = 65$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 240. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $124 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(495, 38, 1, 3)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -7$ и $-b_1/(\eta_2+1) - 1 = 456 : 6 - 1 = 75$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 288. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $307 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(507, 44, 1, 4)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -8$ и $-b_1/(\eta_2+1) - 1 = 462 : 7 - 1 = 65$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 220. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $287 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(400, 21, 2, 1)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -4$ и $-b_1/(\eta_2+1) - 1 = 378 : 3 - 1 = 125$. Если $b_2 \leq 275$, то для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше 125, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$. В случае $d > 5$ имеем либо $\mu = 2$, $b_2 = 276, 277, \ldots, 360$, либо $\mu = 4$, $b_2 = 276, 278, \ldots, 324$, либо $\mu = 6$, $b_2 = 276, 277, \ldots, 292$.

Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в случае $4 \leq d \leq 5$ допустимых массивов пересечений нет.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(400, 21, 2, 1)$ и $d > 5$. Если Γ содержит четырехугольник, то по [8, следствие 5.2.2] имеем $d \leq 2k/(\lambda + 2)$ и $d \leq 34$. Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет.

Значит, $\mu = 2$ и Γ — граф Тервиллигера. По [8, замечание (iii) после теоремы 5.4.1] имеем $c_3 \geq 4$. Покажем, что в случае $c_3 = 4$ имеем $b_2 \leq 36$. Пусть $c_3 = 4$, $a \in \Gamma$, $b \in \Gamma_3(a)$ и $\Delta = \Gamma_2(a) \cap [b]$. На Δ введем отношение μ-смежности, считая вершины x, y μ-смежными, если x и y смежны, и найдется вершина $u \in [a]$ такая, что $\{x, y\} \subset [u] \cap [b]$. Возьмем вершину $x \in \Delta$. По строению $[x]$ имеется не больше двух вершин, μ-смежных с x. Причем если вершин две, то они не смежны друг с другом, и каждая из них μ-смежна с двумя вершинами. Но тогда мы получаем четырехугольник в Δ, что невозможно. Таким образом, вершина x μ-смежна ровно с одной вершиной y, и μ-подграфы $[a] \cap [x]$, $[a] \cap [y]$ совпадают. Таким образом, если вершина $b \in \Gamma_3(a)$ смежна с вершиной $x \in \Gamma_2(a)$, то b смежна с ребром xy, лежащим в единственной максимальной 5-клике C, содержащей треугольник $\{x\} \cup ([a] \cap [x])$. В C есть ровно два ребра, которые инцидентны с x и лежат в $\Gamma_2(a)$. С каждым из них может быть смежно не более 18 вершин из $\Gamma_3(a)$. Следовательно, $b_2 \leq 36$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Если $d > 5$, то для шара радиуса 3 среднее значение степени вершины в этом шаре меньше 125, но больше $k - b_3$, поэтому $b_3 > 275$. Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в этом случае допустимых массивов пересечений нет (при этом вычисления заканчивались при $d \leq 21$). Лемма доказана.

Лемма 5.6. *Если* $144 \leq v' \leq 351$, *то окрестности вершин имеют параметры* $(256, 85, 24, 30)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{256, 170, 1; 1, 85, 256\}$) *или* $(288, 41, 4, 6)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{288, 246, 1; 1, 41, 288\}$), *или* $(329, 40, 3, 5)$ (*и* Γ *имеет массив пересечений* $\{329, 288, 1; 1, 42, 329\}$, $\{329, 288, 56, 1; 1, 28, 288, 329\}$, $\{329, 288, 48; 1, 16, 282\}$ *или* $\{329, 288, 70, 1; 1, 14, 288, 329\}$).

Доказательство. Если $d(\Gamma) = 3$, то возникают только массивы пересечений из заключения леммы.

Если $\lambda < -b_1/(\eta_2 + 1) - 1$, то возникают лишь параметры $(162, 23, 4, 3)$, $(329, 40, 3, 5)$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(162, 23, 4, 3)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -4$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 138 : 3 - 1 = 45$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 90. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $72 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Пусть окрестности вершин имеют параметры $(329, 40, 3, 5)$. Тогда $\eta_1 = 5, \eta_2 = -7$ и $-b_1/(\eta_2 + 1) - 1 = 288 : 6 - 1 = 47$. Компьютерные вычисления показывают, что максимальное значение b_2 равно 70. Так как для шара радиуса 2 среднее значение степени вершины не меньше $k - b_2$, то $259 \leq \bar{k}$, и по предложению 2 имеем $d \leq 5$.

Компьютерные вычисления (см. алгоритм 2) показывают, что в случае $4 \leq d \leq 5$ возникают только массивы пересечений из заключения леммы. Лемма доказана.

Вычисление возможных массивов пересечений графа Γ осуществлялось посредством алгоритма поиска с возвратом.

Алгоритм 2. Вычисление возможных массивов пересечений графа Γ

Строим последовательность $b_0, c_1, b_1, \ldots, c_i, b_i$. Составляем последовательность из известных значений параметров: $b_0 = v', c_1 = 1, b_1 = v' - k' - 1$. После этого переходим к выполнению шага 1.

1. Добавляем к последовательности новый элемент с начальным значением 0 в случае b_i или v' в случае c_i.
2. Проверяем частичную последовательность на выполнение необходимых условий существования графа. Если все условия выполняются, переходим к следующему шагу. Иначе переходим к шагу 4.
3. Если последний элемент не b_i или $b_i \neq 0$, то переходим к шагу 1. Иначе проверяем построенную последовательность на выполнение условий допустимости массива пересечений [8, предложение 4.1.6]. Проверка того, что все числа пересечений p^m_{jl} — неотрицательные целые, выполняется по формулам из [8, лемма 4.1.7]. Для проверки целочисленности кратностей собственных значений Γ используется многочлен из [8, лемма 2.2.6], для которого кратности являются корнями. Если последовательность проходит проверку, то выводим ее в качестве очередного допустимого массива пересечений. Далее переходим к шагу 4.
4. Присваиваем следующее значение последнему элементу (b_i или c_i): b_i увеличиваем, c_i уменьшаем. Если новое значение выходит за допустимые пределы (больше b_{i-1} для b_i, меньше c_{i-1} для c_i), то последовательность укорачивается на один элемент, и, если $i = 1$, то вычисление закончено, в противном случае ($i > 1$) повторяем шаг 4. Если новое значение укладывается в пределы, переходим к шагу 2.

Теперь перечислим *необходимые условия*, использованные в алгоритме. Через d будем обозначать диаметр графа Γ.

Поскольку окрестности вершин в Γ сильно регулярны с одними и теми же параметрами (v', k', λ', μ'), нетрудно понять, что μ-подграфы в Γ регулярны степени μ'. Поэтому $c_2 > \mu'$ и $c_2\mu'$ четно.

С помощью формул из [8, лемма 4.1.7] некоторые числа p^m_{jl} можно вычислить и в случае неполного массива пересечений. Если граф существует, то p^m_{jl} — неотрицательные целые числа.

Поскольку окрестности вершин в графе Γ сильно регулярны, то при помощи границы Хоффмана [8, предложение 1.3.2] можно оценить сверху максимальный размер клики в Γ. По теореме Турана в графе Δ на n вершинах без $r+1$-клик число ребер не превосходит $\frac{r-1}{2r}n^2$. Применяя теорему Турана к регулярному подграфу $\Gamma_i(a)$ степени $a_i = b_0 - c_i - b_i$, получаем $a_i \le (r-1)k_i/r$, где $k_i := |\Gamma_i(a)|$, a — любая вершина из Γ. Ввиду того, что число связности сильно регулярного графа равно его степени, $a_i \ge k'$, $0 < i < d$.

Неравенство Тервиллигера из [8, теорема 5.2.1] позволяет оценить сверху b_i с помощью $c_i - c_{i-1} + b_{i-1} - a_1 - 2$ в случае, когда известно, что Γ содержит четырехугольник. Из [8, следствие 5.2.2] явствует, что применение этого неравенства автоматически ограничивает диаметр Γ: $d \le 2k/(a_1+2)$, где $k = b_0$. Кроме того, диаметр Γ можно оценить с помощью леммы 1.2 и предложения 2. Из [8, следствие 5.9.7] получаем, что $k_{i+1} > k_i$ для всех $i < d/3$.

Еще одно неравенство следует из [8, теорема 5.2.5]. Если $\lambda \le 2\mu - 2$, то $c_i - b_{i-1} \ge c_{i-1} - b_{i-2} + 2$ для $2 \le i \le d$. Если сверх того $\lambda \le \mu$, то $c_i \ge c_{i-1} + 1$ для $2 \le i \le d$.

Из [8, теорема 5.4.1] и последующего замечания следует, что *выполняется* одно из утверждений:

1. $c_3 \ge \frac{3}{2}\mu$; 2. $c_3 \ge \mu + b_2,\ d = 3$.

Причем, если Γ не содержит четырехугольников, то $c_3 \ge 2\mu$.

Из предложения 5.5.1 и следствия 5.5.3 [8] получаем, что $b_i + c_{i+1} > \lambda + 2$ для всех i, $2 \le i \le d-1$.

Из [8, лемма 5.5.5] получаем неравенство $a_2 \ge \mu - \lambda + 1$.

Из еще одного неравенства Тервиллигера [8, предложение 5.5.6] получаем следующее неравенство. Для $0 < i < d$ имеем $b_i \le \max(k - 2c_i, (k-c_i)/2)$ и, если достигается равенство, то $b_i = c_i = k/3$.

Предложение 5.6.1 [8] можно использовать, исключая случай (iii), потому что $a_d = \lambda + 1$ и $b_{d-1} = 1$ влекут несвязность окрестности, тогда как по определению исключительный граф связен.

Из [8, теорема 4.4.3] получаем неравенства $\theta_1 \le -1 - b_1/(\eta_2+1)$, $\theta_d \ge -1 - b_1/(\eta_1+1)$. В [8, предложение 4.1.1] дается последовательность Штурма $(w_j(x))_j$, корнями которой служат собственные значения Γ. Вычисляя значения $w_j(x)$ для правых частей неравенств и подсчитывая число смен знаков, можно определить, выполняются ли неравенства на очередном шаге алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы с сильно регулярными локальными подграфами, имеющими собственное значение 4 // Мальцевские чтения: тез. докл. Новосибирск, 2016. С. 72.
4. **Makhnev A.A.** Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions // Intern. Conf. “Groups and Graphs, Algorithms and Automata” : Abstr. Yekaterinburg, 2015. P. 68.

5. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** Расширения псевдогеометрических графов для $pG_{s-5}(s,t)$. Владикавказ. мат. журн. 2016. Т. 18, № 3. С. 35–42.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs N. Y.: Springer, 2012. 250 p.
7. **Koolen J.H., Park J.** Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency // J. Comb. Theory. Ser. A 2012. Vol. 119, no. 3. P. 546–555.
8. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
9. **Blokhuis A., Brouwer A.E.** Locally 4-by-4 grid graphs // J. Graph Theory. 1989. Vol. 13, no. 3. P. 229–244.
10. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33, no. 1. P. 392–400.
11. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О дистанционно регулярных графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, член-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 18.08.2016

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

REFERENCES

1. Makhnev A.A. On graphs the neighbourhoods of whose vertices are strongly regular with $k = 2\mu$. *Math. Sb.*, 2000, vol. 191, no. 7, pp. 1033–1048.
2. Makhnev A. A., Paduchikh D.V. Distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular with nonprincipal eigenvalue not greater than 3. *Dokl. Akad. Nauk.*, 2015, vol. 464, no. 4, pp. 396–400 (in Russian).
3. Makhnev A. A., Paduchikh D.V. Distance-regular graphs with strongly regular local subgraphs having eigenvalue 4. *Mal'tsev Readings: Abstr.*, Novosibirsk, 2016, p. 72 (in Russian).
4. Makhnev A.A. Strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue 5 and its extensions. *Intern. Conf. "Groups and Graphs, Algorithms and Automata": Abstr.*, Yekaterinburg, 2015, p. 68.
5. Gutnova A.K., Makhnev A.A. Extensions of pseudo-geometric graphs for $pG_{s-5}(s,t)$. *Vladikavkaz. Mat. Zhurn.*, 2016, vol. 18, no. 3, pp. 35–42 (in Russian).
6. Brouwer A.E., Haemers W.H. *Spectra of graphs.* New York: Springer, 2012, 250 p.
7. Koolen J.H., Park J. Distance-regular graphs with a_1 or c_2 at least half the valency. *J. Comb. Theory.*, Ser. A, 2012, vol. 119, no. 3, pp. 546–555.
8. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin: Springer-Verlag, 1989, 495 p.
9. Blokhuis A., Brouwer A.E. Locally 4-by-4 grid graphs. *J. Graph Theory*, 1989, vol. 13, no. 3. P. 229–244.
10. Neumaier A. Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$. *Arch. Math.*, 1979, vol. 33, no. 1, pp. 392–400.
11. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On distance-regular graphs Graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Hoffman–Singleton graph. *Dokl. Akad. Nauk.*, 2009, vol. 428, no. 2, pp. 157–160 . (in Russian).

A.Ȧ. Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

D. V. Paduchikh, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: dpaduchikh@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.986.62

О ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ[1]

А. Р. Миротин, Е. Ю. Кузьменкова

Рассматриваются два варианта обобщений операторов Ганкеля на случай линейно упорядоченных абелевых групп, даются критерии ограниченности и компактности этих операторов, в том числе в терминах функций ограниченной средней осцилляции, доказана нефредгольмовость обобщенных операторов Ганкеля. Даны некоторые приложения к теории тёплицевых операторов на группах.

Ключевые слова: оператор Ганкеля, интегральный оператор Ганкеля, фредгольмов оператор, компактный оператор, ограниченная средняя осцилляция, линейно упорядоченная абелева группа, компактная абелева группа, оператор Тёплица.

A. R. Mirotin, E. Yu. Kuz'menkova. On Hankel operators associated with linearly ordered abelian groups.

We consider two variants of generalizations of Hankel operators to the case of linearly ordered abelian groups. Criteria for the boundedness and compactness of these operators are given, in particular, in terms of functions of bounded mean oscillation. It is proved that the generalized Hankel operators are non-Fredholm. Some applications to the theory of Toeplitz operators on groups are given.

Keywords: Hankel operator, integral Hankel operator, Fredholm operator, compact operator, bounded mean oscillation, linearly ordered abelian group, compact abelian group, Toeplitz operator.

MSC: 47B35, 43A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-201-214

Введение

Классические операторы Ганкеля представляют собой один из важнейших классов операторов в пространствах голоморфных функций, имеющий интересные приложения к проблеме моментов, ортогональным полиномам, теории рациональной аппроксимации и другим важным разделам анализа, а также теории прогнозирования и теории управления (см., например, [1, 2, ч. B; 3, ч. D, гл. 5]). Одно из равносильных определений ганкелева оператора состоит в том, что в некотором ортонормированном базисе он имеет (вообще говоря, бесконечную) ганкелеву матрицу, т. е. матрицу, элементы которой зависят лишь от суммы индексов. После открытия символа ганкелева оператора теория таких операторов в значительной степени свелась к изучению зависимости свойств оператора от геометрических и аналитических характеристик его символа. Таким образом, в этой теории взаимодействуют методы теории функций и функционального анализа. Не удивительно, что предпринимались многочисленные попытки обобщения этих операторов (см. [4; 5] и обзор в [2, с. 195–204]), как и обобщения тесно связанных с ними операторов Тёплица (см. [6]).

В данной работе рассматриваются два вида обобщений операторов Ганкеля, определенные в пространствах $l_2(X_+)$ и $H^2(G)$ соответственно, где X_+ есть положительный конус линейно упорядоченной дискретной абелевой группы X, G — группа характеров группы X; рассмотрено также обобщение интегральных операторов Ганкеля на полуоси и их дискретного аналога. Установлены связи между ними и даны критерии их ограниченности и компактности, в том числе в терминах определенных в [7] пространств функций ограниченной средней осцилляции

[1]Работа выполнена в рамках ГПНИ Республики Беларусь (№ госрегистрации 20160825).

на группе G. Кроме того, доказана нефредгольмовость обобщенных операторов Ганкеля. Основной целью являлось изучение ганкелевых операторов H_φ, действующих из $H^2(G)$ в $H^2_-(G)$ (как указано в [1], в классическом случае эта реализация является наиболее важной). В случае, когда группа X содержит наименьший положительный элемент, для этих операторов указанные вопросы решены полностью. При этом показано, что наличие наименьшего положительного элемента является и необходимым условием для существования нетривиальных компактных операторов вида H_φ.

1. Вспомогательные сведения и результаты

Всюду ниже G есть нетривиальная связная компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара dx и линейно упорядоченной группой характеров X, X_+ — положительный конус в X. Другими словами, в группе X выделена подполугруппа X_+, содержащая единичный характер 1 и такая, что $X_+\cap X_+^{-1}=\{1\}$ и $X=X_+\cup X_+^{-1}$. При этом полугруппа X_+ индуцирует в X линейный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу $\xi\le\chi:=\chi\xi^{-1}\in X_+$. Далее мы положим $X_-:=X_+^{-1}\setminus\{1\}(=X\setminus X_+)$. Хорошо известно, что (дискретная) абелева группа X может быть линейно упорядочена тогда и только тогда, когда она не имеет кручения (см., например, [8]), что, в свою очередь, равносильно тому, что ее группа характеров G компактна и связна [9] (при этом линейный порядок в X, вообще говоря, не единственен). В приложениях в роли X часто выступают подгруппы аддитивной группы $\mathbb{R}^n$, наделенные дискретной топологией, так что G является боровской компактификацией группы X (см, например, [10] и литературу там).

Рассмотрим пространство

$$l_2(X_+)=\Big\{f\colon X_+\to\mathbb{C}\colon \sum_{\chi\in X_+}|f(\chi)|^2<\infty\Big\}$$

(здесь каждая функция f имеет не более чем счетный носитель) со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\chi\in X_+} f(\chi)\overline{g(\chi)}.$$

Аналогично определяются и другие пространства $l_p(X_\pm)$. Ясно, что система $\{1_{\{\chi\}}\}_{\chi\in X_\pm}$ (через 1_A мы обозначаем индикатор множества A) индикаторов одноточечных подмножеств является ортонормированным базисом пространства $l_2(X_\pm)$.

Пусть k — функция на X_+. *Ганкелевой формой на* X_+ *с ядром* k называют комплексную билинейную форму вида

$$A(a,b)=\sum_{\chi,\eta\in X_+} k(\chi\eta)a(\chi)b(\eta), \tag{1}$$

определенную первоначально на финитных функциях на X_+.

Через $\widehat{\varphi}$ (или $\mathcal{F}\varphi$) мы будем обозначать преобразование Фурье функции φ из $L^1(G)$ или $L^2(G)$, т. е. (при соответствующей интерпретации интеграла)

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\int_G \varphi(x)\overline{\xi(x)}dx,\quad \xi\in X.$$

Далее нам понадобится следующий результат, обобщающий классическую теорему Нехари [11].

Теорема (Нехари — Вонг [12]). *Ганкелева форма* (1) *на* X_+ *ограничена тогда и только тогда, когда ее ядро имеет вид* $k(\chi)=\widehat{\varphi}(\overline{\chi})$, $\chi\in X_+$, *где* $\varphi\in L^\infty(G)$. *При этом* $\|\varphi\|_\infty\le M$, *где* M *— константа ограниченности формы* A. *В частности, норма формы* A *равняется* $\|\varphi\|_\infty$ *для некоторой функции* φ, *удовлетворяющей указанным выше условиям.*

2. Операторы Ганкеля в пространстве $l_2(X_+)$

Определение 1. Оператор $\Gamma : l_2(X_+) \to l_2(X_+)$, определенный первоначально на финитных функциях на X_+, называется ганкелевым (оператором Ганкеля) в $l_2(X_+)$, если существует функция $a = a_\Gamma$ на X_+ такая, что для всех $\chi, \xi \in X_+$ выполняется равенство

$$\langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\xi\}} \rangle = a(\chi\xi).$$

Классические ганкелевы операторы соответствуют случаю $X = \mathbb{Z}$. С точки зрения обобщений интерес представляет уже случай $X = \mathbb{Z}^n$ (в связи с этим отметим, что линейные порядки в $\mathbb{Z}^n$, согласованные со структурой группы, описаны в [13; 14]). Мы дадим обобщение на случай пространства $l_2(X_+)$ классических критериев ограниченности ганкелевых операторов. Первое из этих обобщений есть простое следствие теоремы Нехари — Вонга и тоже может рассматриваться как абстрактная версия теоремы Нехари.

Теорема 1. *Оператор Ганкеля* Γ *ограничен в* $l_2(X_+)$ *тогда и только тогда, когда существует функция* $\psi \in L^\infty(G)$ *такая, что* $a(\chi) = \widehat{\psi}(\chi)$ *для любого* $\chi \in X_+$. *При этом справедливо равенство*

$$\|\Gamma\| = \inf\{\|\psi\|_\infty : \psi \in L^\infty(G),\ \widehat{\psi}(\chi) = a(\chi) \forall \chi \in X_+\}.$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказано в [8, лемма 6], где была рассмотрена билинейная форма (f, g — финитные функции на X_+) $A(f,g) := \langle \Gamma f; \bar{g} \rangle$ и показано, что форма A, а вместе с ней и оператор Γ, ограничена тогда и только тогда, когда существует функция $\psi_1 \in L^\infty(G)$ такая, что для любого $\chi \in X_+$ выполняется равенство $a(\chi) = \widehat{\psi_1}(\bar{\chi})$. При этом $\|A\| = \|\Gamma\|$.

Для завершения доказательства заметим, что из теоремы Нехари — Вонга следует

$$\|A\| = \inf\{\|\psi_1\|_\infty : a(\chi) = \widehat{\psi_1}(\bar{\chi})\ \forall \chi \in X_+\}$$

и осталось положить в этой формуле $\psi(x) = \psi_1(x^{-1})$. Теорема доказана.

Для формулировки еще одного критерия ограниченности ганкелевых операторов в $l_2(X_+)$ нам необходима некоторая подготовка.

Пространство Харди $H^p(G)$ $(1 \le p \le \infty)$ над G определяется следующим образом (см., например, [8]):

$$H^p(G) = \{f \in L^p(G) : \widehat{f}(\chi) = 0\ \forall \chi \in X_-\}.$$

Обозначим через $H^2_-(G)$ ортогональное дополнение подпространства $H^2(G)$ пространства $L^2(G)$. Тогда

$$H^2_-(G) = \{f \in L^2(G) : \widehat{f}(\chi) = 0\ \forall \chi \in X_+\}.$$

Ясно, что X_+ является ортонормированным базисом пространства $H^2(G)$, а X_- – ортонормированным базисом пространства $H^2_-(G)$. Через P_+ и P_- мы будем обозначать ортопроекторы из $L^2(G)$ на $H^2(G)$ и $H^2_-(G)$ соответственно.

Перенесем теперь на функции, определенные на G, понятие ограниченной средней осцилляции. Для этого напомним определение преобразования Гильберта на группе G. Мы ограничимся случаем линейного порядка на X, принадлежащим С. Бохнеру и Г. Хелсону; более общая теория построена в [15, гл. 6; 16]. Для любой функции u из $L^2(G, \mathbb{R})$ существует единственная функция $\widetilde{u}$ из $L^2(G, \mathbb{R})$ такая, что $\widehat{\widetilde{u}}(1) = 0$ и $u + i\widetilde{u} \in H^2(G)$. Функция $\widetilde{u}$ называется *гармонически сопряженной с* u. Линейное отображение, получаемое в результате продолжения отображения $u \mapsto \widetilde{u}$ на (комплексное) $L^2(G)$ по линейности, называется *преобразованием Гильберта* на группе G. Этот оператор ограничен в $L^2(G)$.

Следующие определения мотивированы известной теоремой Ч. Феффермана [17] (см. также [2, с. 189]).

Определим пространства $BMO(G)$ функций ограниченной средней осцилляции и $BMOA(G)$ функций ограниченной средней осцилляции аналитического типа на группе G следующим образом: $BMO(G) := \{f + \widetilde{g} : f, g \in L^\infty(G)\}$, $BMOA(G) := BMO(G) \cap H^1(G)$.

В [7] доказано, что эти пространства, наделенные нормой $\|\varphi\|_{BMO} = \inf\{\|f\|_\infty + \|g\|_\infty : \varphi = f + \widetilde{g}, f, g \in L^\infty(G)\}$, являются банаховыми.

Теперь может быть установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор Ганкеля* Γ *в* $l_2(X_+)$ *ограничен тогда и только тогда, когда функция* $\varphi := \sum_{\chi \in X_+} a(\chi)\chi$ *принадлежит* $BMOA(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть Γ ограничен. Из теоремы 1 следует, что существует функция $\psi \in L^\infty(G)$ такая, что $a(\chi) = \widehat{\psi}(\chi)$ для всех $\chi \in X_+$. Тогда $\varphi = \sum_{\chi \in X_+} \widehat{\psi}(\chi)\chi = P_+\psi$. Кроме того, поскольку $\psi \in L^\infty(G) \subset L^2(G)$, то $\varphi \in L^2(G) \subset L^1(G)$. А так как функция $\widehat{\varphi}$ сосредоточена на X_+, то $\varphi \in H^1(G)$. Из [8, лемма 2] следует, что $i\widetilde{\psi} = 2P_+\psi - \psi - \widehat{\psi}(1)$, а потому функция $P_+\psi = 1/2(\psi + i\widetilde{\psi} + \widehat{\psi}(1))$ имеет вид $f + \widetilde{g}$, где $f, g \in L^\infty(G)$, и, стало быть, принадлежит $BMO(G)$. Таким образом, $\varphi \in BMOA(G)$.

Достаточность. Пусть $\varphi \in BMOA(G)$, т. е. $\varphi = f + \widetilde{g},\ f, g \in L^\infty(G), \varphi \in H^1(G)$. Тогда φ принадлежит $L^2(G)$, а потому и $H^2(G)$. С учетом леммы 2 имеем

$$\varphi = P_+f + P_+\big(-i(P_+g - P_-g - \widehat{g}(1))\big) = P_+(f - ig + i\widehat{g}(1)).$$

Функция $\psi := f - ig + i\widehat{g}(1)$ принадлежит $L^\infty(G)$, и $\varphi = P_+\psi = \sum_{\chi \in X_+} \widehat{\psi}(\chi)\chi$, т. е. $a(\chi) = \widehat{\psi}(\chi)$ для всех $\chi \in X_+$. Ограниченность Γ теперь следует из теоремы 1. Теорема доказана

Ганкелевы операторы в $l_2(X_+)$ выделяются с помощью некоторого семейства коммутационных соотношений.

Определим в пространстве $l_2(X_+)$ *оператор сдвига на характер* χ из X_+ равенствами

$$\mathcal{S}_\chi f(\xi) = f(\chi^{-1}\xi), \text{ если } \chi^{-1}\xi \in X_+, \quad \mathcal{S}_\chi f(\xi) = 0, \text{ если } \chi^{-1}\xi \notin X_+.$$

Легко проверить, что сопряженный оператор имеет вид $\mathcal{S}_\chi^* f(\xi) = f(\chi\xi)$.

Лемма 1. *Оператор* T *в* $l_2(X_+)$ *будет ганкелевым тогда и только тогда, когда при всех* χ *из* X_+ *выполняются коммутационные соотношения*

$$\mathcal{S}_\chi^* T = T\mathcal{S}_\chi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если T ганкелев, то $\langle \mathcal{S}_\chi^* T 1_{\{\xi\}}, 1_{\{\eta\}} \rangle = \langle T1_{\{\xi\}}, 1_{\{\chi\eta\}} \rangle = a(\xi\chi\eta)$. И так же легко проверяется, что $\langle T\mathcal{S}_\chi 1_{\{\xi\}}, 1_{\{\eta\}} \rangle = a(\chi\xi\eta)$.

Обратно, если оператор T удовлетворяет указанным коммутационным соотношениям, то $\langle T1_{\{\xi\}}, 1_{\{\eta\}} \rangle = \langle T\mathcal{S}_\xi 1_{\{1\}}, 1_{\{\eta\}} \rangle = \langle \mathcal{S}_\xi^* T 1_{\{1\}}, 1_{\{\eta\}} \rangle = \langle T1_{\{1\}}, 1_{\{\xi\eta\}} \rangle$. Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о фредгольмовости ганкелевых операторов в $l_2(X_+)$. Напомним, что ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *фредгольмовым слева*, если его образ в алгебре Калкина $\mathfrak{C}(H)$ обратим слева, другими словами, если найдутся такие ограниченный оператор L и компактный оператор K в H, при которых $LT = I + K$. Это равносильно тому, что оператор T имеет замкнутый образ и конечномерное ядро (см., например, [18, с. 207, 208]).

Теорема 3. *Ограниченный ганкелев оператор в* $l_2(X_+)$ *не фредгольмов слева.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если допустить, что некоторый ограниченный ганкелев оператор Γ в $l_2(X_+)$ фредгольмов слева, то для некоторого ограниченного оператора L и компактного K будем иметь при всех $\chi \in X_+$ в силу леммы 1

$$L\mathcal{S}_\chi^*\Gamma 1_{\{1\}} = L\Gamma\mathcal{S}_\chi 1_{\{1\}} = L\Gamma 1_{\{\chi\}} = 1_{\{\chi\}} + K1_{\{\chi\}}. \tag{2}$$

Мы утверждаем, что $\lim_{\chi\in X_+}\|\mathcal{S}^*_\chi\Gamma 1_{\{1\}}\|=0$. В самом деле, по теореме 1 найдется такая $\psi\in L^\infty(G)$, что $\Gamma 1_{\{1\}}(\xi)=\langle\Gamma 1_{\{1\}},1_{\{\xi\}}\rangle=a(\xi)=\widehat{\psi}(\xi)$ $(\xi\in X_+)$. Поэтому $\mathcal{S}^*_\chi\Gamma 1_{\{1\}}(\xi)=\widehat{\psi}(\chi\xi)$ $(\chi,\xi\in X_+)$. Далее, в силу теоремы Планшереля $\sum_{\eta\in X}|\widehat{\psi}(\eta)|^2=\|\psi\|^2_{L^2(G)}$, а потому ряд $\sum_{\eta\in X_+}|\widehat{\psi}(\eta)|^2$ сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое конечное множество $F_\varepsilon\subset X_+$, что $\sum_{\eta\notin F_\varepsilon}|\widehat{\psi}(\eta)|^2<\varepsilon$. Но тогда при $\chi>\max F_\varepsilon,\xi\in X_+$ будем иметь $\chi\xi>\max F_\varepsilon$ и, стало быть, при указанных χ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{S}^*_\chi\Gamma 1_{\{1\}}\|^2=\sum_{\xi\in X_+}|\widehat{\psi}(\chi\xi)|^2<\varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

С другой стороны, направленность $\big(1_{\{\chi\}}\big)_{\chi\in X_+}$ стремится к нулю в слабой топологии пространства $l_2(X_+)$, так как с учетом сходимости ряда $\sum_{\eta\in X_+}|f(\eta)|^2$ для любого $f\in l_2(X_+)$ имеем

$$\lim_{\chi\in X_+}\langle 1_{\{\chi\}},f\rangle=\lim_{\chi\in X_+}f(\chi)=0.$$

Следовательно, $\lim_{\chi\in X_+}\|K1_{\{\chi\}}\|=0$ в силу компактности K. Так как $\|1_{\{\chi\}}\|=1$, то, переходя в (2) к $\lim_{\chi\in X_+}$, приходим к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 1. *Существенный спектр Фредгольма оператора Ганкеля* Γ *в* $l_2(X_+)$ *содержит нуль.*

Следствие 2. *Ограниченный ганкелев оператор в* $l_2(X_+)$ *не имеет ограниченного левого обратного.*

З а м е ч а н и е 1. Из леммы 3, доказываемой ниже, и теоремы 1 из [5] следует, что ненулевой компактный ганкелев оператор в $l_2(X_+)$ существует тогда и только тогда, когда группа X содержит наименьший положительный элемент.

3. Ограниченность операторов Ганкеля, действующих из $H^2(G)$ в $H^2_-(G)$

В этом разделе мы рассмотрим еще одну версию обобщения операторов Ганкеля на случай компактных связных абелевых групп.

О п р е д е л е н и е 2 [19]. Пусть $\varphi\in L^2(G)$. Оператором Ганкеля (ганкелевым оператором) с символом φ назовем оператор $H_\varphi : H^2(G)\to H^2_-(G)$, определяемый первоначально на пространстве $\mathrm{Pol}_+(G)$ тригонометрических полиномов аналитического типа (линейных комбинациях характеров из X_+) равенством

$$H_\varphi=P_-M_\varphi,$$

где $M_\varphi : f\mapsto\varphi f$ — оператор умножения на φ.

Очевидно, что оператор H_φ с символом $\varphi\in L^\infty(G)$ ограничен, причем $\|H_\varphi\|\le\|\varphi\|_\infty$. В [19, следствие теоремы 2.1] показано, что ограниченный оператор $A : H^2(G)\to H^2_-(G)$ будет ганкелевым с символом $\varphi\in L^\infty(G)$, если и только если функция $\langle A\chi,\bar{\xi}\rangle_{L^2(G)}$ зависит лишь от $\chi\xi$ $(\chi,\xi\in X_+)$. Кроме того, $H_{\varphi+\psi}=H_\varphi$, если и только если $\psi\in H^\infty(G)$.

Известно (см., например, [1, гл. 1, § 8]), что интегральные операторы Ганкеля на полуоси унитарно эквивалентны операторам Ганкеля H_φ на окружности. Опишем общую схему, под которую подпадает упомянутая выше классическая ситуация. Пусть R — локально компактная абелева группа, $\widehat{R}$ — двойственная ей группа. Будем предполагать, что $R=R_+\cup R_-$, где множества R_+ и R_- μ-измеримы и $\mu(R_+\cap R_-)=0$ (μ — мера Хаара группы R). Тогда $L^2(R)=L^2(R_+)\oplus L^2(R_-)$ (мы рассматриваем $L^2(R_\pm)$ как подпространства пространства $L^2(R)$, считая функции из этих пространств равными нулю на дополнении к $R_\pm$).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть ν — регулярная борелевская мера на R. Оператор

$$\mathcal{G}_\nu f := 1_{R_-}(\nu * f),$$

определенный первоначально лишь на непрерывных функциях на R_+ с компактным носителем, о котором мы будем предполагать, что он действует из $L^2(R_+)$ в $L^2(R_-)$ (так будет, например, в случае конечной меры), будем называть интегральным оператором Ганкеля на группе R.

Ниже для функций $g : R \to \mathbb{C}$ положено $g_0(r) := g(r^{-1})$.

Теорема 4. *Пусть ν — конечная мера и при сделанных выше предположениях о группе R существует унитарный оператор $\mathcal{U} : L^2(G) \to L^2(\widehat{R})$ такой, что*

1) *произведение $\mathcal{U}\chi \cdot \overline{\mathcal{U}\bar{\xi}}$ зависит только от $\chi\xi$ $(\chi, \xi \in X_+)$;*

2) $\mathcal{U}(H^2(G)) = \mathcal{F}^{-1}(L^2(R_+))$,

где $\mathcal{F}$ обозначает L^2-преобразование Фурье на $\widehat{R}$.

Тогда оператор $\mathcal{G}_\nu$ унитарно эквивалентен некоторому ограниченному оператору Ганкеля в $H^2(G)$. Точнее, оператор $A : H^2(G) \to H^2_-(G)$, определяемый формулой

$$A = (\mathcal{F}\mathcal{U})^{-1}\mathcal{G}_\nu \mathcal{F}\mathcal{U},$$

равняется некоторому оператору Ганкеля H_φ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$.

Если, кроме того, группа X содержит наименьший положительный элемент (т. е. наименьший из элементов, удовлетворяющих условию $\chi > 1$), то

$$\|\mathcal{G}_\nu\| = \inf\{\|\psi_1\|_\infty : \psi_1 \in L^\infty(G), \widehat{\psi_1}|X_- = q\}, \tag{3}$$

где $q(\xi) = \int_R (\mathcal{F}(\mathcal{U}\bar{\xi} \cdot \overline{\mathcal{U}1}))_0 d\nu$, $\xi \in X_-$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу известных свойств свертки оператор $\mathcal{G}_\nu$ корректно определен и ограничен. Поэтому оператор A тоже ограничен. Кроме того, он отображает $H^2(G)$ в $H^2_-(G)$. В самом деле, унитарный оператор $\mathcal{F}\mathcal{U}$ отображает $H^2(G)$ на $L^2(R_+)$ в силу 2). Следовательно, обратный оператор отображает $L^2(R_-) = L^2(R) \ominus L^2(R_+)$ на $H^2_-(G) = L^2(G) \ominus H^2(G)$, откуда и следует наше утверждение. С целью применить упомянутое выше следствие теоремы 2.1 из [19] покажем, что функция $\langle A\chi, \bar{\xi}\rangle_{L^2(G)}$ зависит только от $\chi\xi$ $(\chi, \xi \in X_+)$. Имеем

$$\langle A\chi, \bar{\xi}\rangle_{L^2(G)} = \langle (\mathcal{F}\mathcal{U})^*\mathcal{G}_\nu \mathcal{F}\mathcal{U}\chi, \bar{\xi}\rangle_{L^2(G)} = \langle \mathcal{G}_q \mathcal{F}\mathcal{U}\chi, \mathcal{F}\mathcal{U}\bar{\xi}\rangle_{L^2(R)}.$$

Если мы положим для краткости $x = \mathcal{U}\chi, y = \mathcal{U}\bar{\xi}$, то $x, y \in \mathcal{F}^{-1}(L^2(R_+))$ в силу 2). По теореме Фубини при $f \in L^2(R_+), g \in L^2(R_-)$ справедливо равенство

$$\langle \mathcal{G}_\nu f, g\rangle_{L^2(R)} = \int\limits_R f_0 * \overline{g}\, d\nu.$$

Поэтому

$$\langle A\chi, \bar{\xi}\rangle_{L^2(G)} = \langle \mathcal{G}_\nu \mathcal{F}x, \mathcal{F}y\rangle_{L^2(R)} = \int\limits_R (\mathcal{F}x)_0 * \overline{\mathcal{F}y} d\nu = \int\limits_R (\mathcal{F}x)_0 * (\mathcal{F}\bar{y})_0 d\nu = \int\limits_R (\mathcal{F}(x \cdot \bar{y}))_0 d\nu, \tag{4}$$

и для доказательства совпадения оператора A с некоторым оператором H_φ осталось заметить, что $x \cdot \bar{y} = \mathcal{U}\chi \cdot \overline{\mathcal{U}\bar{\xi}}$ зависит только от $\chi\xi$ в силу 1).

Пусть теперь группа X содержит наименьший положительный элемент. Тогда в силу теоремы 6, доказываемой ниже,

$$\|\mathcal{G}_\nu\| = \inf\{\|\psi_1\|_\infty : \psi_1 \in L^\infty(G), \widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\ \forall \xi \in X_-\}.$$

С другой стороны, легко проверить, что $\langle H_\varphi \chi, \overline{\xi}\rangle = \widehat{\varphi}(\overline{\chi\xi})$ $(\chi, \xi \in X_+)$. Полагая здесь и в (4) $\xi = 1$, получаем, что $\widehat{\varphi}(\overline{\chi}) = \int_R (\mathcal{F}(\mathcal{U}\chi \cdot \overline{\mathcal{U}1}))_0 d\nu$ $(\chi \in X_+)$, откуда и следует формула (3). Теорема доказана.

П р и м е р 1 (интегральные операторы Ганкеля на полуоси). В классическом случае $G = \mathbb{T}$ (окружность), $R = \mathbb{R}, R_\pm = \mathbb{R}_\pm$ Фурье-образ $\mathcal{F}^{-1}(L^2(\mathbb{R}_+))$ есть пространство Харди H^2 в верхней полуплоскости (теорема Пэли — Винера), и в качестве унитарного отображения пространства H^2 в единичном круге (которое, как известно, естественным образом отождествляется с пространством $H^2(\mathbb{T})$) на последнее пространство можно взять $\mathcal{U}f(t) = \pi^{-1/2} f \circ \tau(t)/(t+i)$, где $\tau(w) = (w-i)/(w+i)$ — конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг (см., например, [1, гл. 1, § 8)].

П р и м е р 2 (интегральные операторы Ганкеля на дискретной группе). Пусть $R = X, R_\pm = X_\pm$. Тогда $\widehat{R} = G, L^2(R_\pm) = l_2(X_\pm)$. Поскольку мера в теореме 4 предполагается ограниченной, можно считать, что $\nu \in l_1(X)$ (и даже $l_1(X_-)$). Из теоремы Планшереля следует, что $\mathcal{F}^{-1}(l_2(X_+)) = H^2(G)$. Очевидно, что если $\mathcal{U}$ — единичный оператор в $L^2(G)$, то все условия теоремы 4 выполнены. Следовательно, оператор $\mathcal{G}_\nu : l_2(X_+) \to l_2(X_-)$, который сейчас имеет вид

$$\mathcal{G}_\nu f(\xi) = \sum_{\chi \in X_+} \nu(\xi\chi^{-1}) f(\chi) \ (\xi \in X_-),$$

унитарно эквивалентен некоторому оператору Ганкеля H_φ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$. При этом $H_\varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{G}_\nu\mathcal{F}$. Кроме того, если группа X содержит наименьший положительный элемент, то из (3) следует, что

$$\|\mathcal{G}_\nu\| = \inf\{\|\psi_1\|_\infty : \psi_1 \in L^\infty(G), \widehat{\psi_1}|X_- = \nu\},$$

поскольку, как легко проверить, в данном случае $q = \nu$. (Операторы, рассмотренные в этом примере, родственны операторам Винера — Хопфа, изучавшимся в [20]).

Условие $\nu \in l_1(X)$ в примере 2 может быть ослаблено до $\nu \in l_2(X)$, и при этом мы получим другую реализацию операторов H_φ с символом из $L^2(G)$.

Теорема 5. *Оператор H_φ с символами $\varphi \in L^2(G)$ унитарно эквивалентен оператору $\mathcal{G}_\nu$, где $\nu = \widehat{\varphi}$, и, наоборот, для любого $\nu \in l_2(X)$ оператор $\mathcal{G}_\nu$ унитарно эквивалентен оператору H_φ с символом $\varphi = \mathcal{F}^{-1}\nu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема будет доказана, если мы покажем, что для любого аналитического полинома $q \in \mathrm{Pol}_+(G)$ и любой функции $\varphi \in L^2(G)$ справедливо равенство

$$H_\varphi q = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{G}_{\widehat{\varphi}}\mathcal{F}q.$$

Для этого заметим, что для любой функции $g \in l_2(X)$ выполняется равенство

$$\varphi\mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi} * g).$$

Кроме того, в силу теоремы Планшереля $\mathcal{F}P_-\mathcal{F}^{-1}g = 1_{X_-}g$ $(g \in l_2(X))$. Следовательно, при $g \in l_2(X)$ имеем

$$\mathcal{F}H_\varphi\mathcal{F}^{-1}g = \mathcal{F}P_-(\varphi\mathcal{F}^{-1}g) = \mathcal{F}P_-\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi} * g) = \mathcal{G}_{\widehat{\varphi}}g.$$

Для завершения доказательства осталось положить в последнем равенстве $q = \mathcal{F}^{-1}g$ и заметить, что q пробегает $\mathrm{Pol}_+(G)$, когда g пробегает множество всех финитных функций из $l_2(X_+)$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Для любой функции $\varphi \in L^2(G)$, удовлетворяющей условию $\widehat{\varphi} \in l_1(X)$, оператор H_φ ограничен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, оператор $\mathcal{G}_{\widehat{\varphi}}$ ограничен в силу неравенства $\|\widehat{\varphi} * f\|_2 \le \|\widehat{\varphi}\|_1 \|f\|_2$. □

Следствие 4. *Оператор $\mathcal{G}_\nu$ ограничен, если $\nu \in l_2(X)$, $\mathcal{F}^{-1}\nu \in L^\infty(G)$.*

Доказательство. Утверждение сразу следует из того, что оператор H_φ ограничен, если $\varphi \in L^\infty(G)$. $\square$

Следующая теорема дает критерий ограниченности оператора H_φ при условии, что группа X содержит наименьший положительный элемент (такие группы описаны в [20]). Для ее доказательства нам понадобится лемма, последнее утверждение которой имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 2 [7, лемма 5]. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1. Тогда*

а) *Справедливо равенство $X_- = X_+^{-1}\chi_1^{-1}$. Следовательно, отображения*

$$i : \{1_{\{\chi\}}\}_{\chi\in X_+} \to X_+ : 1_{\{\chi\}} \mapsto \chi, \quad j : \{1_{\{\chi\}}\}_{\chi\in X_+} \to X_- : 1_{\{\chi\}} \mapsto \chi^{-1}\chi_1^{-1}$$

продолжаются единственным образом до изоморфизмов гильбертовых пространств

$$i : l_2(X_+) \to H^2(G), \quad j : l_2(X_+) \to H^2_-(G).$$

б) *Оператор H_φ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ унитарно эквивалентен ограниченному ганкелеву оператору в $l_2(X_+)$ (и потому не является фредгольмовым слева) и обратно.*

Следствие 5. *Пусть группа X содержит наименьший положительный элемент. В условиях теоремы 4 оператор $\mathcal{G}_\nu$ не фредгольмов слева. Оператор $\mathcal{G}_\nu$ на группе X при $\nu \in l_2(X_-)$, $\mathcal{F}^{-1}\nu \in L^\infty(G)$ не фредгольмов слева.*

Теорема 6. *Пусть $\varphi \in L^2(G)$ и X содержит наименьший положительный элемент. Следующие утверждения равносильны:*

1) *оператор H_φ ограничен;*

2) *существует функция $\psi_1 \in L^\infty(G)$ такая, что $\widehat{\psi_1}|X_- = \widehat{\varphi}|X_-$;*

3) *$P_-\varphi \in BMO(G)$.*

Кроме того, если выполнено одно из условий 1)–3), то

$$\|H_\varphi\| = \inf\{\|\psi_1\|_\infty : \psi_1 \in L^\infty(G), \widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\ \forall\xi \in X_-\}.$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями и результатами, содержащимися в лемме 2 и ее доказательстве (см. [7, лемма 5]). Докажем равносильность утверждений 1) и 2). Оператор H_φ ограничен тогда и только тогда, когда оператор $\Gamma = j^{-1}H_\varphi i$ ограничен. В доказательстве утверждения б) из [7, лемма 5] показано, что последний оператор является ганкелевым в $l_2(X_+)$. Значит, по теореме 1 оператор Γ ограничен тогда и только тогда, когда существует функция $\psi \in L^\infty(G)$ такая, что $\widehat{\psi}(\chi) = a_\Gamma(\chi) = \widehat{\varphi}(\overline{\chi}\chi_1^{-1})$ для всех $\chi \in X_+$ (последнее равенство установлено в доказательстве леммы 5 из [7]). Положим $\psi_1(x) = \chi_1^{-1}(x)\psi(x^{-1})$. Тогда $\widehat{\psi_1}(\bar{\chi}\chi_1^{-1}) = \widehat{\psi}(\chi)$ для любого $\chi \in X_+$, а потому $\widehat{\psi_1}(\bar{\chi}\chi_1^{-1}) = \widehat{\varphi}(\bar{\chi}\chi_1^{-1})$. Таким образом, равенство $\widehat{\psi}(\chi) = \widehat{\varphi}(\overline{\chi}\chi_1^{-1})$ для всех $\chi \in X_+$ эквивалентно равенству $\widehat{\psi}_1(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ для всех $\xi \in X_-$, и равносильность утверждений 1) и 2) доказана.

Наконец, заметим, что $\|\psi\|_\infty = \|\psi_1\|_\infty$, где, как выше, $\psi_1(x) = \chi_1^{-1}(x)\psi(x^{-1})$. Тогда в силу теоремы 1

$$\|H_\varphi\| = \|\Gamma\| = \inf\{\|\psi\|_\infty : \widehat{\psi}(\chi) = a(\chi)\ \forall\chi \in X_+\} = \inf\{\|\psi_1\|_\infty : \widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\ \forall\xi \in X_-\}.$$

Докажем теперь равносильность утверждений 2) и 3). Пусть выполнено утверждение 2). Из леммы 1 следует, что $P_-\psi_1 = (\psi_1 - \widehat{\psi_1}(1))/2 + \widetilde{(i\psi_1/2)} \in BMO(G)$. Это влечет утверждение 3), поскольку

$$P_-\psi_1 = \sum_{\xi\in X_-} \widehat{\psi_1}(\xi)\xi = \sum_{\xi\in X_-} \widehat{\varphi}(\xi)\xi = P_-\varphi.$$

Пусть теперь выполнено 3). Тогда $P_-\varphi = f+\widetilde{g}$, где $f, g \in L^\infty(G)$. Снова применяя лемму 1, имеем

$$P_-\varphi = P_-f + P_-(-i(P_+g - P_-g - \widehat{g}(1))) = P_-(f + ig + i\widehat{g}(1)).$$

Рассмотрим функцию $\psi_1 = f + ig + i\widehat{g}(1) \in L^\infty(G)$. Так как $P_-\psi_1 = P_-\varphi$, то $\widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$ для всех $\xi \in X_-$. Теорема доказана.

Следствие 6. *Если X содержит наименьший положительный элемент, то ганкелев оператор H_φ с символом $\varphi \in L^2(G)$ ограничен тогда и только тогда, когда он совпадает с ганкелевым оператором H_{ψ_1} с символом $\psi_1 \in L^\infty(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из теоремы 6 и равенства $H_\varphi = H_{P_-\varphi}$. □

4. Компактность операторов Ганкеля, действующих из $H^2(G)$ в $H^2_-(G)$

Далее для функции $f : G \to \mathbb{C}$ положим

$$(Jf)(x) = f(x^{-1}).$$

Следующий класс операторов рассматривался в [5] (там они обозначались как H_φ).

О п р е д е л е н и е 4. Для $\psi \in L^\infty(G)$ определим оператор $\Gamma_\psi : H^2(G) \to H^2(G)$ формулой

$$\Gamma_\psi(f) = P_+J(\psi f).$$

Лемма 3. *Оператор Γ_ψ ($\psi \in L^\infty(G)$) унитарно эквивалентен некоторому ограниченному ганкелеву оператору в $l_2(X_+)$, и, наоборот, ограниченный ганкелев оператор Γ в $l_2(X_+)$ унитарно эквивалентен некоторому оператору $\Gamma_{J\psi}$, где $\psi \in L^\infty(G)$, причем $a_\Gamma = \widehat{\psi}|X_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U : H^2(G) \to l_2(X_+)$ — такой изоморфизм гильбертовых пространств, что $U\chi = 1_{\{\chi\}}$ при всех $\chi \in X_+$. Если мы положим $\Gamma := U\Gamma_\psi\, U^{-1}$, то получим ограниченный ганкелев оператор в $l_2(X_+)$, поскольку

$$\langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\xi\}}\rangle = \langle U\Gamma_\psi\chi, U\xi\rangle = \langle P_+J(\psi\chi), \xi\rangle = \langle J(\psi\chi), \xi\rangle = \int\limits_G \psi(x^{-1})\chi(x^{-1})\overline{\xi(x)}dx = \widehat{\psi}(\overline{\chi\xi}).$$

Обратно, пусть Γ — ограниченный ганкелев оператор в $l_2(X_+)$, $T := U^{-1}\Gamma U$. Тогда

$$\langle T\chi, \xi\rangle = \langle U\Gamma 1_{\{\chi\}}, UU^{-1}1_{\{\xi\}}\rangle = \langle \Gamma 1_{\{\chi\}}, 1_{\{\xi\}}\rangle = a_\Gamma(\chi\xi).$$

По теореме 1 существует такая функция $\psi \in L^\infty(G)$, что $a_\Gamma = \widehat{\psi}|X_+$. Поэтому, с учетом предыдущих выкладок, $\langle T\chi, \xi\rangle = \widehat{\psi}(\chi\xi) = \langle \Gamma_{J\psi}\chi, \xi\rangle$ для любых $\chi, \xi \in X_+$, а потому $T = \Gamma_{J\psi}$. Лемма доказана.

В [5, теорема 1.2] показано, что компактный ненулевой оператор вида Γ_ψ при $\psi \in L^\infty$ существует тогда и только тогда, когда в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1. При этом оператор Γ_ψ компактен тогда и только тогда, когда $\psi \in H^\infty(G) + C_e$, где C_e — замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(G)$, порожденная полиномами от $\overline{\chi_1}$. Установим аналогичные результаты для операторов $H_\varphi : H^2(G) \to H^2_-(G)$. Ниже $K_1(G)$ — замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(G)$, порожденная элементом $\overline{\chi_1}$. Ясно, что $K_1(G) = C_e\overline{\chi_1}$.

Теорема 7. I. *Компактный ненулевой оператор $H_\varphi : H^2(G) \to H^2_-(G)$ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ существует тогда и только тогда, когда в группе X имеется наименьший положительный элемент.*

II. *Пусть X содержит наименьший положительный элемент χ_1, а $\varphi \in L^2(G)$. Следующие утверждения равносильны*:

1) *оператор H_φ компактен*;

2) $P_-\varphi \in K_1(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. *Необходимость.* Используя метод из [5], можно показать, что если компактный ненулевой оператор H_φ с символом $\varphi \in L^\infty(G)$ существует, то существует ганкелев оператор с аналогичными свойствами и символом $\chi \in X_-$. Пусть $\tau(x)f(y) := f(xy)$ $(x \in G)$ — оператор сдвига в $L^2(G)$ (и $H^2(G)$). Так как $\tau(x)\chi = \chi(x)\chi$ $(\chi \in X)$, то $\tau(x)$ коммутирует с $P_\pm$; в частности, $\tau(x)H_\varphi\tau(x^{-1}) = H_{\tau(x^{-1})\varphi}$, а потому последний оператор компактен. Далее, так как $\varphi \notin H^\infty(G)$, то $\widehat{\varphi}(\chi) \neq 0$ для некоторого характера $\chi \in X_-$. В силу непрерывной (и линейной) зависимости оператора H_φ от $\varphi \in L^\infty(G)$, компактный оператор

$$\int\limits_G \chi(x)H_{\tau(x^{-1})\varphi}dx$$

(интеграл Бохнера существует) равен $H_{\chi*\varphi} = \widehat{\varphi}(\chi)H_\chi$, откуда и вытекает доказываемое утверждение. Далее, легко проверить, что компактный оператор $S_{\overline{\chi}}H_\chi$ в $H^2(G)$ является проектором на подпространство, порожденное множеством характеров $[1, \chi^{-1})$ (для этого достаточно рассмотреть его значения на базисе X_+ пространства $H^2(G)$), а потому это множество конечно, что и доказывает необходимость.

Достаточность следует из того, что если в группе X имеется наименьший положительный элемент χ_1, то образом оператора $H_{\overline{\chi_1}}$ является одномерное подпространство $\mathbb{C} \cdot \overline{\chi_1} \subset H^2_-(G)$.

II. Если выполнено 1), то H_φ ограничен, и в силу утверждения 2) теоремы 6 найдется функция $\psi_1 \in L^\infty(G)$ такая, что $\widehat{\psi_1}|X_- = \widehat{\varphi}|X_-$, т. е. $P_-\varphi = P_-\psi_1$. Следовательно, $H_{\psi_1} = H_\varphi$. В начале доказательства теоремы 6 показано, что оператор H_{ψ_1} унитарно эквивалентен некоторому ограниченному ганкелеву оператору Γ в $l_2(X_+)$, и при этом $a_\Gamma(\chi) = \widehat{\psi_1}(\overline{\chi}\chi_1^{-1})$ для всех $\chi \in X_+$. В свою очередь, в силу леммы 3 оператор Γ унитарно эквивалентен некоторому оператору $\Gamma_{J\psi}$, где $\psi \in L^\infty(G)$, причем $a_\Gamma = \widehat{\psi}|X_+$. Значит, оператор H_{ψ_1} унитарно эквивалентен оператору $\Gamma_{J\psi}$, причем

$$\widehat{\psi}(\chi) = \widehat{\psi_1}(\overline{\chi}\chi_1^{-1}) \text{ для всех } \chi \in X_+. \tag{5}$$

В силу компактности оператора $\Gamma_{J\psi}$ по теореме 1.2 из [5] имеем $J\psi \in H^\infty(G) + C_e$, а потому $P_-(J\psi) \in C_e$. Далее, из (5) вытекает, что $\widehat{\psi_1}(\xi\chi_1^{-1}) = \widehat{J\psi}(\xi)$ при $\xi \in X_- \cup \{1\}$. Поскольку $X_-\chi_1^{-1} = X_- \setminus \{\chi_1^{-1}\}$ (см. лемму 2), то отсюда следует, что

$$P_-(J\psi) = \sum_{\xi \in X_-} \widehat{\psi_1}(\xi\chi_1^{-1})\xi = \sum_{\xi \in X_-\chi_1^{-1}} \widehat{\psi_1}(\zeta)\zeta\chi_1$$

$$= \Bigg(\sum_{\xi \in X_-\setminus\{\chi_1^{-1}\}} \widehat{\psi_1}(\zeta)\zeta\Bigg)\chi_1 = (P_-\psi_1 - \widehat{\psi_1}(\chi_1^{-1})\chi_1^{-1})\chi_1.$$

Следовательно, $P_-\psi_1 = (P_-(J\psi) + \widehat{\psi_1}(\chi_1^{-1}))\chi_1^{-1} \in K_1(G)$.

Если выполнено 2), т. е. $\varphi_- := P_-\varphi \in K_1(G)$, то оператор Γ_{φ_-} компактен. При доказательстве импликации $1 \Rightarrow 2$ было показано, что оператор H_{φ_-} унитарно эквивалентен оператору $\Gamma_{J\psi}$, где $\psi \in L^\infty(G), \widehat{\psi}(\chi) = \widehat{\varphi_-}(\overline{\chi}\chi_1^{-1})$ для всех $\chi \in X_+$ (см. (5)). Следовательно,

$$P_-(J\psi) = \sum_{\chi \in X_+\setminus\{1\}} \widehat{\psi}(\chi)\bar{\chi} = \sum_{\chi \in X_+\setminus\{1\}} \widehat{\varphi_-}(\bar{\chi}\chi_1^{-1})\bar{\chi}$$

$$= \sum_{\xi \in X_-\chi_1^{-1}} \widehat{\varphi_-}(\xi)\xi\chi_1 = \sum_{\xi \in X_-\setminus\{\chi_1^{-1}\}} \widehat{\varphi_-}(\xi)\xi\chi_1 = \varphi_-\chi_1 - \widehat{\varphi_-}(\chi_1).$$

Поэтому $P_-(J\psi) \in C_e$. Кроме того, $P_+(J\psi) \in H^2(G) \cap L^\infty(G) = H^\infty(G)$, так как $P_+(J\psi) = J\psi - P_-(J\psi) \in L^\infty(G)$. Снова применяя теорему 1.2 из [5], получаем, что оператор $\Gamma_{J\psi}$, а вместе с ним и H_φ компактен, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Для случая $\varphi \in L^2(G)$ вопрос о справедливости утверждения, аналогичного утверждению I теоремы 7, остается открытым.

Следствие 7. I. *Пусть* $\nu \in l_2(X), \mathcal{F}^{-1}\nu \in L^\infty(G)$. *Отличный от нуля компактный оператор* $\mathcal{G}_\nu$ *на группе* X *существует тогда и только тогда, когда* X *содержит наименьший положительный элемент.*

II. *Пусть группа* X *содержит наименьший положительный элемент,* $\nu \in l_2(X)$. *Оператор* $\mathcal{G}_\nu$ *компактен тогда и только тогда, когда* $\sum_{\xi\in X_-}\nu(\xi)\xi \in K_1(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, оператор $\mathcal{G}_\nu$ унитарно эквивалентен некоторому оператору H_φ, причем по теореме 5 $\widehat{\varphi} = \nu$, а потому $P_-\varphi = \sum_{\xi\in X_-}\nu(\xi)\xi$. □

Следствие 8. *Пусть* $\nu \in l_2(\mathbb{Z}^d)$, $d \geq 1$. *Тогда оператор* $\mathcal{G}_\nu$ *на группе* $\mathbb{Z}^d_{\mathrm{lex}}$ *(индекс* lex *указывает, что порядок лексикографический) компактен, если и только если функция* ν *сосредоточена на множестве* $\{(0,\dots,0,n_d) : n_d < 0\}$, *и* $\sum_{n_d<0}\nu(0,\dots,0,n_d)t_d^{n_d} \in P_-(C(\mathbb{T}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = \mathbb{T}^d$. Тогда $X = \mathbb{Z}^d_{\mathrm{lex}}$. В этом случае в X существует наименьший положительный элемент $(0,\dots,0,1)$, положительный конус имеет вид

$$\mathbb{Z}^d_{\mathrm{lex}+} = \{n \in \mathbb{Z}^d | n_1 > 0\} \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^d | n_1 = 0, n_2 > 0\} \sqcup$$

$$\dots \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^d | n_1 = n_2 = \ldots = n_{d-1} = 0, n_d > 0\} \sqcup \{0\},$$

а отрицательный — вид

$$\mathbb{Z}^d_{\mathrm{lex}-} = \{n \in \mathbb{Z}^d | n_1 < 0\} \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^d | n_1 = 0, n_2 < 0\} \sqcup$$

$$\dots \sqcup \{n \in \mathbb{Z}^d | n_1 = n_2 = \ldots = n_{d-1} = 0, n_d < 0\}.$$

Если отождествить точку $n \in \mathbb{Z}^d$ с характером $\xi_n(t) = t_1^{n_1}\dots t_d^{n_d}$ группы $\mathbb{T}^d$, то наименьший положительный характер есть $\chi_1(t) = t_d$. Следовательно, замкнутая подалгебра $C_e \subset C(\mathbb{T}^d)$, порожденная полиномами от $\overline{\chi_1}$, состоит из функций на $\mathbb{T}^d$, которые не зависят от $t_1,\dots,t_{d-1}$, и (как функции от t_d) принадлежит $P_-(C(\mathbb{T})) + \mathbb{C}$. Поэтому алгебра $K_1(\mathbb{T}^d) = \overline{t_d}C_e$ состоит из функций $f \in C_e$, удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, т. е. равна $P_-(C(\mathbb{T}))$. Теперь ясно, что критерий компактности

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^d_{\mathrm{lex}-}}\nu(n)t_1^{n_1}\dots t_d^{n_d} \in K_1(\mathbb{T}^d)$$

из следствия 7 выполняется тогда и только тогда, когда ν равна нулю вне множества $\{(0,\dots,0,n_d) : n_d < 0\}$ и $\sum_{n_d<0}\nu(0,\dots,0,n_d)t_d^{n_d} \in P_-(C(\mathbb{T}))$. □

5. Некоторые приложения

Дадим приложения теоремы 7 к теории операторов Тёплица и вычислению некоторых алгебр Бургейна над группами.

Пусть $\varphi \in L^\infty(G)$. *Оператор Тёплица* T_φ в $H^2(G)$ определяется равенством

$$T_\varphi = P_+M_\varphi.$$

Следствие 9. *Если функция* φ *принадлежит алгебре* $K_1(G) + H^\infty(G)$ *и обратима в ней, то тёплицев оператор* T_φ *в* $H^2(G)$ *фредгольмов, причем* $T_{\varphi^{-1}}$ *является его регуляризатором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопряженный к H_φ оператор, как легко проверить, имеет вид $H_\varphi^* = P_+M_{\overline{\varphi}}|H^2_-(G)$. Поэтому, как и в классическом случае (см., например, [2, лемма 4.4.3]), при $\varphi,\psi \in L^\infty(G)$ для полукоммутатора тёплицевых операторов справедливо равенство

$$[T_\varphi, T_\psi) := T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} = -H^*_{\overline{\varphi}}H_\psi. \tag{6}$$

Отсюда в силу теоремы 7 будет следовать, что операторы $T_\varphi T_{\varphi^{-1}} - I$ и $T_{\varphi^{-1}} T_\varphi - I$ компактны, если показать, что для $\varphi \in L^\infty(G)$ условие 2) этой теоремы равносильно включению $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$. Докажем это. Если $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$, то $P_-\varphi \in K_1(G)$, так как $K_1(G) \subset H^2_-(G)$. Обратно, если $P_-\varphi \in K_1(G)$, то $P_-\varphi \in L^\infty(G)$, а потому и $P_+\varphi \in L^\infty(G)$. Следовательно, $P_+\varphi \in H^\infty(G)$ и $\varphi = P_+\varphi + P_-\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$. □

Равенство (6) и теорема 7 влекут также следующие два утверждения.

Следствие 10. *Пусть* $\varphi, \psi \in L^\infty(G)$. *Операторы* $H^*_{\overline{\varphi}} H_\psi$ *и* $[T_\varphi, T_\psi)$ *компактны, если* $\overline{\varphi} \in K_1(G) + H^\infty(G)$ *или* $\psi \in K_1(G) + H^\infty(G)$.

Следствие 11. *Пусть* $\varphi \in L^\infty(G)$. *Оператор* $H^*_{\overline{\varphi}} H_\psi$ *компактен для любой* $\psi \in L^\infty(G)$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{\varphi} \in K_1(G) + H^\infty(G)$.

Следствие 12. *Пусть* $\varphi \in L^\infty(G)$. *Следующие утверждения равносильны*:
1) *коммутатор* $[P_+, M_\varphi]$ *компактен*;
2) *коммутатор* $[P_+ - P_-, M_\varphi]$ *компактен*;
3) $\overline{\varphi}, \varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$.

Доказательство следствия 12 не отличается от классического случая, см. [2, следствие 2.3.3]. □

Теорема 7 может быть использована для вычисления алгебры Бургейна над пространством $L^2(G)$, рассматриваемым как $L^\infty(G)$-модуль. Следуя [21, замечание 2], примем следующее определение.

Определение 5. Пусть A — банахова алгебра, M — банахов A-модуль и Y — замкнутое подпространство M. Элемент $a \in A$ называется *бургейновым*, если $\mathrm{dist}_M(ay_n, Y) \to 0$, лишь только последовательность y_n стремится к 0 слабо в Y. Множество всех бургейновых элементов обозначается Y_b^A и называется *алгеброй Бургейна.*

Следствие 13. *Имеет место равенство*

$$H^2(G)_b^{L^\infty(G)} = K_1(G) + H^\infty(G).$$

Доказательство. Положим $A = L^\infty(G), M = L^2(G), Y = H^2(G)$. Поскольку

$$\mathrm{dist}_{L^2(G)}(\varphi y_n, H^2(G)) = \|P_-(\varphi y_n)\| = \|H_\varphi y_n\|,$$

то бургейновость элемента $\varphi \in L^\infty(G)$ равносильна полной непрерывности, т. е. компактности, оператора H_φ. Следствие 13 теперь вытекает из теоремы 7 (как уже упоминалось, для $\varphi \in L^\infty(G)$ условие 2) этой теоремы равносильно включению $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пеллер В.В.** Операторы Ганкеля и их приложения. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 1028 с.
2. **Nikolski N.K.** Operators, functions, and systems: An easy reading: in 2 vol. Vol. I. N. Y.: Amer. Math. Soc., 2002. 461 p.
3. **Nikolski N.K.** Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading: in 2 vol. Vol. II. N. Y.: Amer. Math. Soc., 2002. 439 p.
4. **Nakazi T.** Commuting dilations and uniform algebras // Canad. J. Math. 1990. Vol. 42, no. 5. P. 776 –789.
5. **Chaozong Y., Xiaoman Ch. , Kunyu G.** Hankel operators and Hankel algebras // Chin. Ann. of Math. 1998. Vol. 19 B, no. 1. P. 65–76.
6. **Миротин А.Р.** Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах H^p над упорядоченными группами // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 5. С. 101 – 116.

7. **Дыба Р.В., Миротин А.Р.** Функции ограниченной средней осцилляции и ганкелевы операторы на компактных абелевых группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 135–144.
8. **Rudin W.** Fourier analysis on groups. N. Y.; London: Intersciense Publishers, 1962. 285 p.
9. **Понтрягин Л.С.** Непрерывные группы, 2-е изд. М.: ГИТТЛ, 1954. 515 с.
10. Factorization in weighted Wiener matrix Algebras on linearly ordered abelian groups / T. Ehrhardt, van der C. Mee, L. Rodman, I. Spitkovski // Int. Eq. Oper. Th. 2007. Vol. 58, no. 1. P. 65–86.
11. **Nehari Z.** On bounded bilinear forms // Ann. of Math. 1957. Vol. 65, no. 2. P. 153–162.
12. **Wang J.** Note on theorem of Nehari on Hankel forms // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. Vol. 24. P. 103–105.
13. **Teh H.H.** Construction of orders in abelian groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1961. Vol. 57. C. 476–482.
14. **Зайцева М.И.** О множестве порядков в абелевых группах // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 1. С. 35–137.
15. **Миротин А.Р.** Гармонический анализ на абелевых полугруппах. Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. 207 с.
16. **Mirotin A.R.** Hilbert transform in context of locally compact abelian groups // Int. J. Pure Appl. Math. 2009. Vol. 51, no. 4. P. 463–474.
17. **Fefferman C.** Characterization of bounded mean oscillation // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77. P. 587–588.
18. **Conway J.B.** A course in operator theory. N. Y.: Amer. Math. Soc., 2000. 372 p. (Graduate Studies in Math.; vol. 21.)
19. **Дыба Р.В.** Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 3 (8). С. 57–60.
20. **Adukov V.** Wiener–Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group // Int. Eq. Oper. Th. 1993. Vol. 16. P. 305–332.
21. **Cima J.A., Janson S., Yale K.** Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 105, no. 1. P. 121–125.

Миротин Адольф Рувимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: amirotin@yandex.ru

Поступила 18.05.2016

Кузьменкова Екатерина Юрьевна
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: katuha66@tut.by

REFERENCES

1. Peller V. *Hankel operators and their applications.* New York: Springer-Verlag, 2003, 800 p.
2. Nikolski N.K.*Operators, functions, and systems*: *An easy reading*, in 2 vol., New York: Amer. Math. Soc., 2002, Vol. I, 461 p.
3. Nikolski N.K.*Operators, Functions, and Systems*: *An Easy Reading*, in 2 vol., New York: Amer. Math. Soc., 2002, Vol. II, 439 p.
4. Nakazi T. Commuting dilations and uniform algebras. *Canad. J. Math.*, 1990, vol. 42, no. 5, pp. 776 –789.
5. Chaozong Y., Xiaoman Ch. , Kunyu G. Hankel operators and Hankel algebras. *Chin. Ann. of Math.*, 1998, vol. 19 B, no. 1, pp. 65–76.
6. R. Mirotin. Fredholm and spectral properties of Toeplitz operators on the spaces H^p over ordered groups. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 5, pp. 721–737.
7. Dyba R. V., Mirotin A. R. Functions of bounded mean oscillation and Hankel operators on compact abelian groups. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 135–144 (in Russian).
8. Rudin W. *Fourier analysis on groups.* New York, London: Intersciense Publishers, 1962, 285 p.
9. Pontryagin L.S. *Topological groups*, 2nd ed, New York etc.: Gordon and Breach, 1966, 543 p.

10. Ehrhardt T., Mee C. van der, Rodman L., Spitkovski I. Factorization in weighted Wiener matrix Algebras on linearly ordered abelian groups *Int. Eq. Oper. Th.*, 2007, vol. 58, no. 1, pp. 65–86.
11. Nehari Z. On bounded bilinear forms. *Ann. of Math.*, 1957, vol. 65, no. 2, pp. 153–162.
12. Wang J. Note on theorem of Nehari on Hankel forms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, vol. 24, pp. 103–105.
13. Teh H.H. Construction of orders in abelian groups. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1961, vol. 57, pp. 476–482.
14. Zaitseva M.I. On the set of ordered Abelian groups. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1953, vol. 8, no. 1, pp. 35–137 (in Russian).
15. Mirotin A.R. *Garmonicheskij analiz na abelevyh polugruppah.* (Harmonic analysis on Abelian semigroups). Gomel: Izd. GGU im. F. Skorina, 2008, 207 p. (in Russian).
16. Mirotin A.R. Hilbert transform in context of locally compact abelian groups. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2009, vol. 51, no. 4, pp. 463–474.
17. Fefferman C. Characterization of bounded mean oscillation. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1971, vol. 77, pp. 587–588.
18. Conway J.B. *A course in operator theory.* New York: Amer. Math. Soc., 2000, Ser. Graduate Studies in Math., vol. 21, 372 p.
19. Dyba R.V. The Nehari theorem for compact abelian groups with linearly orded duals. *Probl. Phys. Mat. Techn.*, 2011, no. 3 (8), pp. 57–60 (in Russian).
20. Adukov V. Wiener–Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group. *Int. Eq. Oper. Th.*, 1993, vol. 16, pp. 305–332.
21. Cima J.A., Janson S., Yale K. Completely continuous Hankel operators on H^∞ and Bourgain algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1985, vol. 105, no. 1, pp. 121–125.

A. R. Mirotin, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Belarus, e-mail: amirotin@yandex.ru .

E. Yu. Kuz'menkova, doctoral student, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246028 Belarus, e-mail: katuha66@tut.by .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С. И. Новиков

В работе найдены точные значения равномерных констант Лебега ограниченных на всей вещественной оси интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов с равноотстоящими узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору третьего порядка с постоянными действительными коэффициентами $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, $\alpha > 0$. Также проведено сравнение полученного результата с константами Лебега других $\mathcal{L}$-сплайнов.

Ключевые слова: интерполяция, сплайн, константа Лебега.

S. I. Novikov. Lebesgue constants for some interpolational $\mathcal{L}$-splines.

We find exact values for the uniform Lebesgue constants of interpolational $\mathcal{L}$-splines that are bounded on the real axis, have equidistant knots, and correspond to the linear third-order differential operator $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$ with constant real coefficients, where $\alpha > 0$. We compare the obtained result with the Lebesgue constants of other $\mathcal{L}$-splines.

Keywords: interpolation, spline, Lebesgue constant.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-215-224

Введение

Сначала введем обозначения и дадим нужные определения.

Пусть D — оператор дифференцирования,

$$\mathcal{L}_n(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

— произвольный линейный дифференциальный оператор порядка n $(n \geq 2)$ с постоянными вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $p_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ — его характеристический полином, $T_n = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ — множество всех нулей полинома p_n. Если $p_n(-z) = (-1)^n p_n(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, то такой дифференциальный оператор будем называть *формально самосопряженным.*

Через $C^k(\mathbb{R})$ обозначаем множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций, определенных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, $C^0(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$, $L_\infty(\mathbb{R})$ — пространство ограниченных, непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{R}\}$, а $l_\infty(\mathbb{Z})$ — пространство ограниченных последовательностей $y = \{y_\nu\}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$, снабженное нормой $\|y\|_{l_\infty(\mathbb{Z})} = \sup\{|y_\nu|\colon \nu \in \mathbb{Z}\}$. В дальнейшем индексы в обозначениях норм будем опускать.

Пусть $\Delta_h = \{jh\colon j \in \mathbb{Z}\}$ — равномерная сетка на $\mathbb{R}$ с шагом h.

$\mathcal{L}$-сплайнами, соответствующими линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n(D)$, с узлами в точках сетки Δ_h будем называть функции s_n, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $s_n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$,

2) $\mathcal{L}_n(D)s_n(x) = 0$ $\forall x \in (jh, (j+1)h), \forall j \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что если $\mathcal{L}_n(D) = D^n$, то $\mathcal{L}$-сплайн становится полиномиальным сплайном.

Пространство $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n(D)$, с узлами в точках сетки Δ_h обозначаем $\mathbb{S}_{\mathcal{L}_n}$. Далее всюду, где это не вызывает недоразумений, будем опускать указание на дифференциальный оператор и сетку узлов $\mathcal{L}$-сплайнов.

Введем еще одну равномерную сетку $\widetilde{\Delta}_h$, которая получается из сетки Δ_h сдвигом всех ее точек на фиксированную величину $a \in [0,1)$, т. е. $\widetilde{\Delta}_h = \{(j+a)h\colon j \in \mathbb{Z}\}$. В точках сетки $\widetilde{\Delta}_h$ будем интерполировать элементами пространства $\mathbb{S}_{\mathcal{L}_n}$. Предположим, что сдвиг сетки точек интерполяции a и ее шаг h выбраны так, что задача интерполяции разрешима для любой последовательности интерполируемых данных $y = \{y_j\colon j \in \mathbb{Z}\} \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Тогда на множестве $l_\infty(\mathbb{Z})$ можно определить линейный оператор S_n, который каждому $y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ ставит в соответствие ограниченный $\mathcal{L}$-сплайн, интерполирующий y в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h$, т. е. $S_n\colon l_\infty(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{S}_{\mathcal{L}_n} \cap L_\infty(\mathbb{R})$. Норму этого оператора будем называть *константой Лебега $\mathcal{L}$-сплайн интерполяции* $\|S_n\| = \sup\limits_{\|y\|\le 1} \|S_n y\|$.

Исследование констант Лебега интерполяционных процессов является одной из важных задач теории интерполяции. В численном анализе константы Лебега позволяют оценить устойчивость интерполяционного процесса относительно погрешности интерполируемых данных, поскольку для любых $y,\ \widetilde{y} \in l_\infty(\mathbb{Z})$ имеет место оценка $\|S_n y - S_n\widetilde{y}\| = \|S_n(y-\widetilde{y})\| \le \|S_n\|\,\|y-\widetilde{y}\|$.

Отметим известные результаты нахождения точных значений констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов.

Сначала обратимся к случаю $\mathcal{L}_n(D) = D^n$, т. е. к интерполяции полиномиальными сплайнами. Здесь сдвиг сетки узлов интерполяции выбирался следующим образом: $a = 0$, если n четно и $a = 1/2$, если n нечетно, поскольку при таком выборе параметра a интерполяционные сплайны существуют, однозначно определяются интерполируемыми данными (см. [1], а также [2, Теорема 1, лекция 4]) и приближают стандартные соболевские классы функций с точностью наилучшей аппроксимации (этот факт является частным случаем результата [3, теорема 4]). Значения констант Лебега найдены в работах [4; 5] при всех $n \ge 3$, где в частности было установлено, что

$$\|S_3\| = \sqrt{2}, \quad \|S_4\| = \frac{1+3\sqrt{3}}{4}\ . \tag{0.1}$$

Для линейных дифференциальных операторов вида $\mathcal{L}_{2k+1}(D) = D(D^2-t_1^2)\ldots(D^2-t_k^2)$, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — вещественные числа (это формально самосопряженные операторы нечетного порядка, все корни характеристических полиномов которых вещественны) в работах [6; 7] исследовано поведение последовательности констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов $\{S_{2k+1}\}_{k=1}^{+\infty}$ в зависимости от свойств последовательности чисел $\{t_k\}_{k=1}^{+\infty}$, определяющих семейство дифференциальных операторов. Также в [7, p. 238] получено представление констант Лебега в виде контурных интегралов по единичной окружности комплексной плоскости. Сдвиг интерполяционной сетки a был выбран таким же, как и в случае полиномиальных сплайнов нечетного порядка. Для линейных дифференциальных операторов третьего порядка вида $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$, $\beta \in \mathbb{R}$, явные выражения констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов получены в [8, теорема 3], где установлено, что

$$\|S_3\| = \sqrt{2}\ \frac{\operatorname{ch}\beta \mathrm{h}/4}{\sqrt{\operatorname{ch}\beta h/2}}\ . \tag{0.2}$$

Для линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}_3(D) = D(D-\beta)(D-\gamma)$ (т. е. дифференциальных операторов третьего порядка, не являющихся формально самосопряженными) при выполнении условия $\beta\gamma < 0$ константы Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов найдены в [9]. Сдвиг интерполяционной сетки a в этом случае определялся первым положительным нулем соответствующего $\mathcal{L}$-сплайна Эйлера (более подробно о сдвиге сетки см., например, [10]).

Для всех указанных выше классов дифференциальных операторов были также вычислены константы Лебега периодических интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [8; 9; 11] и ссылки в этих работах).

Настоящая работа посвящена нахождению точных значений констант Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих дифференциальному оператору третьего порядка вида $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, $\alpha > 0$. Характерной особенностью этого дифференциального оператора является наличие пары комплексно сопряженных корней его характеристического полинома. Этот факт делает невозможным в полной мере использовать подходы, развитые в отмеченных выше работах [6–9]. Он же приводит к необходимости налагать ограничение на шаг h сетки узлов интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна, которое обеспечивает неосцилляцию решений однородного дифференциального уравнения $u''(t) + \alpha^2 u(t) = 0$ (см., например, [12, Теорема 1]) на каждом отрезке между любыми двумя последовательными узлами сетки Δ_h.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть $a = 1/2$, $0 < h < \pi/\alpha$, $\alpha > 0$. Тогда константы Лебега $\|S_3\|$ интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, с узлами на сетке $\Delta_h = \{jh\colon j \in \mathbb{Z}\}$ и интерполяцией в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h = \{(j + a)h\colon j \in \mathbb{Z}\}$ имеют следующее явное выражение:

$$\|S_3\| = \sqrt{2}\, \frac{\cos\dfrac{\alpha h}{4}}{\sqrt{\cos\dfrac{\alpha h}{2}}}\,.$$

Прежде чем доказывать основной результат, получим представление фундаментального $\mathcal{L}$-сплайна в виде контурного интеграла по единичной окружности комплексной плоскости, аналогичное [7, p. 238], а затем изучим некоторые свойства этой функции.

1. Фундаментальный $\mathcal{L}$-сплайн и его свойства

Как известно, фундаментальный $\mathcal{L}$-сплайн L_3 есть элемент пространства $\mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$, который удовлетворяет интерполяционным условиям $L_3(\nu h + h/2) = \delta_{0,\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{0,\nu}$ — символ Кронекера. Если $0 < h < \tau/\alpha$, то L_3 существует и единствен. Для любой последовательности интерполируемых данных $y = \{y_\nu\}$ интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн записывается в виде

$$s_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} y_\nu L_3(x - \nu h). \tag{1.1}$$

Теперь при $0 \le x \le h$, $0 < h < \tau/\alpha$, и любом $z \in \mathbb{C}$ определяем функцию двух переменных

$$W(x,z) = z^2\,(1 - \cos\alpha x) + z(\cos\alpha x - 2\cos\alpha h + \cos\alpha(h - x)) + 1 - \cos\alpha(h - x).$$

Лемма 1. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то функция $W(h/2, z)$ имеет два вещественных нуля, которые являются простыми, отрицательными, и только один из них по модулю меньше единицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нули функции $W(h/2, z)$ являются корнями квадратного уравнения

$$z^2\Bigl(1 - \cos\frac{\alpha h}{2}\Bigr) + 2z\,\Bigl(\cos\frac{\alpha h}{2} - \cos\alpha h\Bigr) + \Bigl(1 - \cos\frac{\alpha h}{2}\Bigr) = 0$$

с дискриминантом, равным $32\sin^2(\alpha h/4)\sin^2(\alpha h/2)\cos(\alpha h/2)$. Поскольку при $0 < h < \pi/\alpha$ дискриминант положителен, то оба корня вещественные. Так как старший коэффициент равен свободному члену, корни имеют одинаковые знаки, а поскольку $W(h/2, 0) > 0$, $W(h/2, -1) < 0$, то они отрицательные и расположены на вещественной оси по разные стороны от точки -1. Лемма 1 доказана.

Следующее утверждение легко проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 2. *При любом $z \in \mathbb{C}$ имеют место равенства*

$$W(h,z) = zW(0,z), \quad \left.\frac{\partial W(x,z)}{\partial x}\right|_{x=h} = z \left.\frac{\partial W(x,z)}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Лемма 3. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то при любом фиксированном $z < 0$ функция $W(x,z)$ имеет на полуинтервале $[0,h)$ единственный нуль, и этот нуль простой.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $z < 0$, $z \neq -1$. Из леммы 2 видно, что непрерывно дифференцируемая функция $W(x,z)$ и ее производная по x принимают в точках $x = 0$, $x = h$ значения разных знаков. Следовательно, как $W(x,z)$, так и $W'_x(x,z)$ имеют на интервале $(0,h)$ один или несколько нулей. Однако, $W'_x(x,z) = \alpha(z-1)g(x)$, где $g(x) = (z - \cos\alpha h)\sin\alpha x + \sin\alpha h \cos\alpha x$. Поскольку нули функции $g(x)$ простые и расстояние между любыми двумя соседними нулями равно π/α, а $0 < h < \pi/\alpha$, то на $(0,h)$ функция $W'_x(x,z)$ имеет в точности один нуль, и этот нуль простой. Поэтому на $[0,h)$ функция $W(x,z)$ только один раз меняет характер монотонности (сначала возрастает, потом убывает или наоборот). Учитывая, что значения функции $W(x,z)$ в точках $x = 0$ и $x = h$ имеют разные знаки, заключаем, что на интервале $(0,h)$ есть только одна точка, в которой $W(x,z)$ обращается в нуль.

Пусть теперь $z = -1$. В этом случае $W(0,-1) = W(h,-1) = 0$ и $W'_x(x,-1) = 0$ на $(0,h)$ только при $x = h/2$. Следовательно, точка $x = 0$ является единственным нулем функции $W(x,-1)$ на полуинтервале $[0,h)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то для всех $0 \leq t \leq h$ при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ справедливо представление*

$$L_3(t - \mu h) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(t,z)}{z^{\mu+1}\, W(h/2,z)}\, dz, \tag{1.2}$$

где i — мнимая единица, а обход контура интегрирования происходит в положительном направлении.

Доказательство. Сначала проверяем выполнение условий интерполяции

$$L_3(\nu h + h/2) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} z^{\nu-1} dz = \delta_{0,\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Теперь покажем, что $L_3 \in C^1(\mathbb{R})$. Воспользовавшись первым из равенств леммы 2, при любом $\mu \in \mathbb{Z}$ получаем

$$L_3(\mu h + 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(h,z)}{z^{-\mu+2}\, W(h/2,z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{z^{-\mu+1}\, W(h/2,z)}\, dz = L_3(\mu h - 0);$$

для производной с помощью второго равенства леммы 2 имеем $L'_3(\mu h + 0) = L'_3(\mu h - 0)$.

Равенство $\mathcal{L}_3(D)L_3(x) = 0$ при любом $x \in (\mu h, (\mu+1)h)$, $j \in \mathbb{Z}$ легко следует из явного вида функции $W(x,z)$ с помощью дифференцирования под знаком интеграла.

Убедимся, что функция $L_3(x)$ вещественная. Действительно, подынтегральное выражение в (1.2) имеет два вида особенностей: $z = 0$ при $\mu = 0, 1, \ldots$ и нули функции $W(h/2,z)$. Остается применить теорему Коши о вычетах к интегралу в правой части (1.2) и воспользоваться леммой 1. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если $0 < h < \pi/\alpha$, то при всех $\tau \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $L_3(\tau) = L_3(h-\tau)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(\tau) = L_3(h-\tau) - L_3(\tau)$. Очевидно, что $\varphi(h/2) = 0$. Кроме того, при всех целых $\nu \neq 0$ согласно определению фундаментального $\mathcal{L}$-сплайна имеем $\varphi(\nu h + h/2) = L_3(h/2 - \nu h) - L_3(h/2 + \nu h) = 0$. Таким образом, функция $\varphi(\tau)$ интерполирует на сетке $\widetilde{\Delta}_h$ нулевые значения. Поскольку дифференциальный оператор $\mathcal{L}_3(D)$ является формально самосопряженным, то $\varphi \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$, и в силу единственности интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна получаем, что $\varphi(\tau) \equiv 0$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть* $0 < h < \pi/\alpha$. *Тогда*
1) *если* $\mu = -1, -2, \ldots,$ *то* $\operatorname{sign} L_3(t - \mu h) = (-1)^{\mu} \operatorname{sign}(t - h/2)$, *где* $0 \le t < h$,
2) *если* $\mu = 1, 2, \ldots,$ *то* $\operatorname{sign} L_3(t - \mu h) = (-1)^{\mu} \operatorname{sign}(h/2 - t)$, *где* $0 < t \le h$,
3) $\operatorname{sign} L_3(t) = 1$, *где* $0 \le t \le h$.

Доказательство. 1) Пусть $\mu = -1, -2, \ldots$. В этом случае особыми точками подынтегральной функции в (1.2) являются только нули функции $W(h/2, z)$. Согласно лемме 1 внутри единичного круга с центром в начале координат расположен только один из двух ее нулей, который мы обозначаем $\lambda(h/2)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\lambda\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\cos\alpha h - \cos\dfrac{\alpha h}{2} + 2\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\alpha h}{4}\sin\dfrac{\alpha h}{2}\sqrt{\cos\dfrac{\alpha h}{2}}}{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{4}}\,.$$

Применяя теорему Коши о вычетах к интегралу в правой части (1.2) и учитывая, что точка $\lambda(h/2)$ является полюсом первого порядка, получаем

$$L_3(t - \mu h) = \frac{W(t, \lambda(h/2))}{(\lambda(h/2))^{\mu+1}\, W'_z(h/2, z)\,|_{z=\lambda(h/2)}}\,. \tag{1.3}$$

Нетрудно видеть, что при $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место

$$W'_z\left(\frac{h}{2}, z\right)\Big|_{z=\lambda(h/2)} = 4\sqrt{2}\,\sin\frac{\alpha h}{4}\sin\frac{\alpha h}{2}\sqrt{\cos\frac{\alpha h}{2}} > 0, \tag{1.4}$$

а функция $W(t, \lambda(h/2))$ обращается в нуль в точке $t = h/2$. Так как $\lambda(h/2) < 0$, то согласно лемме 3 функция $W(t, \lambda(h/2))$ не имеет других нулей на полуинтервале $[0, h)$. Нетрудно видеть, что при переходе через точку $h/2$ она меняет знак с плюса на минус, и поскольку $\lambda(h/2) < 0$, то из (1.3) следует доказываемое утверждение.

2) Пусть $\mu = 1, 2, \ldots$. В утверждении леммы 5 полагаем $\tau = t - \mu h$ и берем sign от обеих его частей. В результате имеем $\operatorname{sign} L_3(t - \mu h) = \operatorname{sign} L_3((h - t) - \mu_1 h)$, где $\mu_1 = -\mu$. Поскольку $\mu_1 = -1, -2\ldots$, то, используя п. 1), получаем

$$\operatorname{sign} L_3(t - \mu h) = (-1)^{\mu_1}\operatorname{sign}(h - t - h/2) = (-1)^{\mu}\operatorname{sign}(h/2 - t).$$

3) Пусть $\mu = 0$. В этом случае подынтегральная функция в (1.2) имеет в области $|z| < 1$ две особые точки $z_1 = 0$ и $z_2 = \lambda(h/2)$, каждая из которых является полюсом первого порядка. Вновь применяя теорему Коши о вычетах к правой части (1.2), получаем

$$L_3(t) = \frac{W(t, 0)}{W(h/2, 0)} + \frac{W(t, \lambda(h/2))}{(\lambda(h/2))\, W'_z(h/2, \lambda(h/2))}\,. \tag{1.5}$$

Поскольку $W(t, 0) = 1 - \cos\alpha(h - t) > 0$ и $W(h/2, 0) = 1 - \cos(\alpha h/2) > 0$, то первое слагаемое в правой части (1.5) положительно при всех $t \in [0, h)$ и равно нулю при $t = h$. Как отмечено в п. 1), функция $W(t, \lambda(h/2))$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $h/2$, поэтому $W(t, \lambda(h/2)) < 0$ на $(h/2, h]$. Этот факт наряду с отрицательностью $\lambda(h/2)$ и неравенством (1.4) позволяет сделать вывод, что второе слагаемое в (1.5) положительно при всех $t \in (h/2, h]$. Таким образом, $\operatorname{sign} L_3(t) = 1$ для $h/2 < t \le h$.

Если $0 \le t < h/2$, то $h - t \in (h/2, h]$, и в силу доказанного выше результата для $(h/2, h]$ и леммы 5 получаем, что $\operatorname{sign} L_3(t) = 1\ \forall t \in [0, h/2)$. Остается учесть, что $L_3(h/2) = 1$. Таким образом, п. 3), а вместе с ним и лемма 6 доказаны.

Замечание. Для $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых произвольным формально самосопряженным дифференциальным оператором нечетного порядка, все корни характеристического полинома которого являются вещественными, лемма 6 была доказана в работе [7, § 3] без ограничения на шаг сетки узлов интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна. Наше доказательство в целом основано на той же идее. Можно показать, что для $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых дифференциальным оператором $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2),\ \alpha > 0$, отказ от ограничения $0 < h < \pi/\alpha$ может привести к ситуации, когда интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны даже могут не существовать.

2. Доказательство основного результата и комментарии

Прежде всего отметим, что при выбранном значении сдвига сетки точек интерполяции относительно сетки узлов $\mathcal{L}$-сплайна $a = h/2$ и наложенном в теореме ограничении на шаг $0 < h < \pi/\alpha$ существование и единственность $\mathcal{L}$-сплайн интерполянта для каждого набора интерполируемых данных $y \in l_\infty(\mathbb{Z})$ следуют из результата В. Т. Шевалдина [10, §2], и, как показано в работе автора [13, Теорема 2], ограниченные интерполяционные $\mathcal{L}$-сплайны приближают стандартные соболевские классы дифференцируемых функций с точностью наилучшей аппроксимации. Теперь переходим непосредственно к доказательству теоремы.

Доказательство. Через $s_3(x)$ обозначаем $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка, соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2),\ \alpha > 0$, который интерполирует в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h = \{(j + 1/2)h \colon j \in \mathbb{Z}\}$ последовательность $y = \{y_\nu\}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ с $\|y\| \le 1$.

Из представления (1.1) получаем

$$|s_3(x)| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |y_\nu|\ |L_3(x - \nu h)| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x - \nu h)|. \tag{2.1}$$

Пусть

$$\Phi(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x - \nu h)|.$$

Легко видеть, что функция $\Phi(x)$ является периодической с периодом h. Кроме того, она четная, поскольку, применяя лемму 5 при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\Phi(-x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(-x - \nu h)| = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(\nu h - x)| = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(h - (x - (\nu - 1)h)|$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x - (\nu - 1)h)| = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |L_3(x - mh)| = \Phi(x).$$

Покажем, что на отрезке $[-h/2, h/2]$ функция $\Phi(x)$ совпадает с некоторым интерполяционным $\mathcal{L}$-сплайном.

Пусть $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_\nu \colon \nu \in \mathbb{Z}\}$, где

$$\widetilde{y}_\nu = \begin{cases} (-1)^\nu, & \nu = 0, 1, \ldots, \\ (-1)^{\nu+1}, & \nu = -1, -2 \ldots \end{cases} \tag{2.2}$$

Из (2.2) имеем

$$\widetilde{y}_\nu = \widetilde{y}_{-\nu-1} \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Полагаем

$$\sigma(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widetilde{y}_\nu L_3(x - \nu h). \tag{2.4}$$

Ясно, что $\sigma \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$. Убедимся, что $\sigma(x)$ также является четной функцией. Рассмотрим $\sigma(-x)$. Поскольку дифференциальный оператор $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2+\alpha^2)$ формально самосопряжен, то $\sigma(-x) \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$ и нетрудно видеть, что $\sigma(-x)$ интерполирует в точках сетки $\widetilde{\Delta}_h = \{(j+1/2)h : j \in \mathbb{Z}\}$ последовательность $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_\nu\}$. Поэтому $\varphi(x) = \sigma(x) - \sigma(-x) \in \mathbb{S}_{\mathcal{L}_3}$, и в силу (2.3) при всех $j \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$\varphi((j+1/2)h) = \sigma((j+1/2)h) - \sigma((-j-1/2)h) = \widetilde{y}_\nu - \widetilde{y}_{-\nu-1} = 0.$$

Поскольку $0 < h < \pi/\alpha$, то в силу единственности интерполяционного $\mathcal{L}$-сплайна получаем $\varphi(x) \equiv 0$, т. е. $\sigma(x) = \sigma(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Воспользовавшись леммой 6, четностью функций Φ и σ и соотношениями (2.2), (2.4) для $x \in [-h/2, h/2]$ получаем

$$\Phi(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |L_3(x-\nu h)| = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} L_3(x-\nu h)\ \mathrm{sign}\ L_3(t-\nu h)$$

$$= L_3(x) + \sum_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^\nu L_3(x-\nu h) + \sum_{\nu=-\infty}^{-1}(-1)^{\nu+1} L_3(x-\nu h) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widetilde{y}_\nu L_3(x-\nu h) = \sigma(x).$$

Поскольку неравенства (2.1) обращаются в равенства при $y = \widetilde{y}$, то для константы Лебега имеем $\|S_3\| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \Phi(x)$. В силу свойств функций Φ и σ (h-периодичности и четности функции Φ, четности σ и совпадению $\Phi(x)$ с $\sigma(x)$ для $x \in [-h/2, h/2]$) это равенство переписывается в виде

$$\|S_3\| = \max_{x\in[0,h/2]} \sigma(x). \tag{2.5}$$

Поскольку $\sigma(x)$ — четная непрерывно дифференцируемая функция, то $\sigma'(0) = 0$. Убедимся, что $\sigma'(x)$ не имеет других нулей на $(0, h/2]$. Действительно, $\sigma'(x) = a\sin\alpha x + b\cos\alpha x$, где a и b — некоторые вещественные константы. Так как нули функции $\sigma'(x)$ простые и расстояние между любыми двумя соседними нулями равно π/α, а $0 < h < \pi/\alpha$, то на $(0, h/2]$ функция $\sigma'(x)$ не имеет нулей. Это обстоятельство и тот факт, что $\sigma(h/2) = 1$, позволяют переписать (2.5) в виде

$$\|S_3\| = \max\{1, \sigma(0)\}. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (1.2) имеем

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \sum_{\nu=0}^{+\infty}(-1)^\nu \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{z^{\nu+1}\, W(h/2,z)}\, dz + \sum_{\nu=-\infty}^{-1}(-1)^{\nu+1} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{z^{\nu+1}\, W(h/2,z)}\, dz \right\}.$$

Согласно лемме 1 функция $W(h/2,z)$ не имеет нулей на окружности $|z| = 1$. В силу непрерывности она не обращается в нуль и в некотором кольце $1-2\varepsilon < |z| < 1+2\varepsilon$ при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$. В частности, $W(h/2,z) \neq 0$ на каждой из двух окружностей $|z| = 1-\varepsilon$ и $|z| = 1+\varepsilon$. Поэтому применяя интегральную теорему Коши для составного контура к каждому из двух интегралов предыдущего равенства и затем меняя местами знаки сумм и интегралов, получаем

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \oint\limits_{|z|=1-\varepsilon} \left(\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu}{z^{\nu+1}}\right) \frac{W(0,z)}{W(h/2,z)}\, dz + \oint\limits_{|z|=1+\varepsilon} \Big(\sum_{\nu=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{z^{\nu+1}}\Big) \frac{W(0,z)}{W(h/2,z)}\, dz \right\}.$$

Поскольку

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{1+z}$$

при $|z| > 1$ (в частности, на окружности $|z| = 1 + \varepsilon$), а

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{z^{\nu+1}} = \frac{1}{z} \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j z^j = \frac{1}{1+z}$$

при $|z| < 1$ (в частности, на окружности $|z| = 1 - \varepsilon$), то

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i} \Big\{ \oint\limits_{|z|=1-\varepsilon} \frac{W(0,z)}{(z+1)W(h/2,z)}\, dz + \oint\limits_{|z|=1+\varepsilon} \frac{W(0,z)}{(z+1)W(h/2,z)}\, dz \Big\}. \tag{2.7}$$

Убедимся, что в точке $z = -1$ особенности подынтегральных функций можно устранить. Действительно, так как $W(0,-1) = 0$, то

$$\lim_{z \to -1} \frac{W(0,z)}{z+1} = W'_z(0,-1) = 2\sin^2 \frac{\alpha h}{2},$$

и остается доопределить $W(0,z)/(z+1)$ в точке $z = -1$ найденным значением предела.

Теперь применяем интегральную теорему Коши для составного контура к интегралам в правой части (2.7) и получаем

$$\sigma(0) = \frac{1}{\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{W(0,z)}{(z+1)W(h/2,z)}\, dz.$$

Внутри контура $|z| = 1$ содержится только одна особая точка подынтегральной функции — нуль функции $W(h/2,z)$, который обозначаем $\lambda(h/2)$. В доказательстве леммы 6 приведено явное выражение $\lambda(h/2)$. Эта особая точка является полюсом первого порядка. Вычислив интеграл с помощью теоремы Коши о вычетах, после выполнения элементарных преобразований имеем

$$\sigma(0) = \sqrt{2}\, \frac{\cos\dfrac{\alpha h}{4}}{\sqrt{\cos\dfrac{\alpha h}{2}}}.$$

Легко убедиться в том, что правая часть последнего равенства при $0 < h < \pi/\alpha$ больше единицы. (2.6) и последнее равенство завершают доказательство. Теорема доказана.

Сделаем некоторые замечания, которые позволяют понять, как связана теорема с другими результатами, относящимися к константам Лебега сплайн-аппроксимации.

Прежде всего отметим, что переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в утверждении теоремы и в неравенстве, ограничивающем шаг сетки, получаем известный результат (0.1) для констант Лебега параболических интерполяционных сплайнов.

Кроме того, если положить $\alpha = i\beta$ (i — мнимая единица, $\beta \in \mathbb{R}$), то результат теоремы переходит в соотношение (0.2), полученное для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, определяемых дифференциальным оператором $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$. Разумеется, такая замена не может являться доказательством соотношения (0.2).

Наряду с интерполяционными в теории сплайнов изучаются также локальные (неинтерполяционные) сплайны, которые характеризуются тем, что являются точными на ядре порождающего их дифференциального оператора или на некотором подпространстве этого ядра. Для дифференциального оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$, $\alpha > 0$, В. Т. Шевалдин и Е. В. Стрелкова в 2016 г. нашли константы Лебега $\|S_{3,loc}\|$ локальных $\mathcal{L}$-сплайнов, точных на двух функциях $\sin \alpha x, \cos \alpha x$ из ядра этого оператора. Они доказали, что если $0 < h < \pi/\alpha$, то

$$\|S_{3,loc}\| = \Big(\cos \frac{\alpha h}{2}\Big)^{-1}.$$

Сравнение этого результата с теоремой показывает, что при выполнении неравенства $0 < h < 2\Theta_0/\alpha$, где $\Theta_0 = \arccos((\sqrt{5}-1)/2) \approx 0.90456$, константы Лебега локальных $\mathcal{L}$-сплайнов оказываются меньше констант Лебега интерполяционных, в то время как при $2\Theta_0/\alpha < h < \pi/\alpha$, наоборот, константы Лебега интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов меньше констант Лебега локальных; если же $2\Theta_0/\alpha = h$, то эти величины совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. **Schoenberg I.J.** Cardinal spline interpolation. Philadelphia: SIAM, 1973. 125 p.
3. **Новиков С.И.** Приближение одного класса дифференцируемых функций $\mathcal{L}$-сплайнами // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 3. С. 393–408.
4. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
5. **Richards F.** The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, no. 2. P. 83–92.
6. **Tzimbalario J.** Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Canad. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
7. **Morsche H.G.** On the Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no 3. P. 232–246.
8. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 81, № 1. С. 59–68.
9. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
10. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
11. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
12. **Troch I.** On the interval of disconjugacy of linear autonomous differential equation // SIAM J. Math. Analysis. 1981. Vol. 12, no. 1. P. 78–89.
13. **Novikov S.I.** On $\mathcal{L}$-spline interpolation and approximation on the whole real line // Approximation and function spaces. (Warsaw, 1986). Warsaw: PWN, 1989. P. 293–300. (Banach Center Publ.; vol. 22.)

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 09.09.2016

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Tr. Mat. Inst. Steklov*, 1965, vol. 78, p. 24–42 (in Russian).
2. Schoenberg I.J. *Cardinal spline interpolation.* Philadelphia: SIAM, 1973, 125 p.
3. Novikov S.I. Approximation of a class of differentiable functions by $\mathcal{L}$-splines. *Math. Notes*, 1983, vol. 33, no. 3, pp. 200–208.
4. Richards F. Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator. *J. Approx. Theory*, 1973, vol. 7, no. 3, pp. 302–317.
5. Richards F. The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation. *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 14, no. 2, pp. 83–92.
6. Tzimbalario J. Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation. *Canad. J. Math.*, 1977, vol. 29, no. 2, pp. 441–448.
7. Morsche H.G. On the Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation. *J. Approx. Theory*, 1985, vol. 45, no. 3, pp. 232–246.

8. Kim V.A. Exact Lebesgue constants for interpolatory $\mathcal{L}$-splines of third order. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, no. 1, pp. 55–63.
9. Kim V.A. Sharp Lebesgue constants for bounded cubic interpolation $\mathcal{L}$-splines. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 2, pp. 267–276.
10. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320.
11. Subbotin Yu.N., Telyakovskii S.A. Asymptotic behaviour of the Lebesgue constants of periodic interpolation splines with equidistant nodes. *Sb. Math.*, 2000, vol. 191, no. 8, pp. 1233–1242.
12. Troch I. On the interval of disconjugacy of linear autonomous differential equation. *SIAM J. Math. Analysis*, 1981, vol. 12, no. 1, pp. 78–89.
13. Novikov S.I. On $\mathcal{L}$-spline interpolation and approximation on the whole real line. *Approximation and function spaces* (*Warsaw, 1986*). Warsaw: PWN, 1989, Ser. Banach Center Publ., vol. 22, pp. 293–300.

S. I. Novikov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ ПРОСТРАНСТВ n-РАЗДЕЛЬНОГО КРАТНОМАСШТАБНОГО АНАЛИЗА И ВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева

В работе построены биортогональные базисы определенных автором ранее пространств n-раздельных КМА и всплесков для n масштабирующих функций и приведены быстрые алгоритмы вычисления коэффициентов разложения функции по таким базисам.

Ключевые слова: всплеск, маска, биортогональный базис, масштабирующая функция, кратномасштабный анализ.

Keywords: wavelet, mask, biorthogonal basis, scaling function, multiresolution analysis.

E. A. Pleshcheva. Biorthogonal bases of spaces of n-separate multiresolution analysis and multiwavelets.

We construct biorthogonal bases of spaces of n-separate multiresolution analysis and wavelets for n scaling functions. Fast algorithms are presented for finding the coefficients of expansion of functions in such bases.

Keywords: wavelet, mask, biorthogonal basis, scaling function, multiresolution analysis.

MSC: 42C40, 42A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-225-232

Введение

В работе строятся биортогональные базисы пространств n-раздельного кратномасштабного анализа (КМА) и всплесков. Ранее автором в работе [1] были построены ортонормированные базисы пространств n-раздельного КМА и всплесков.

Рассмотрим в отличии от классических ортонормированных всплесков следующее определение понятия всплеска.

О п р е д е л е н и е 1. Всплеском называется функция $\psi(x)$ такая, что множество функций $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\colon k, j \in \mathbb{Z}\}$ образуют базис Рисса пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ пространство W_j — это пространство всплесков, его базис образован функциями $\psi_{j,k}(x),\ k \in \mathbb{Z}$.

По базису Рисса ортонормированный базис можно построить стандартным образом:

$$\widehat{\psi}^{\perp}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\sqrt{\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\omega+\nu)|^2}},$$

где $\widehat{\psi}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-2\pi i\, x\omega}\, dx$ — преобразование Фурье функции ψ. К сожалению, при ортогонализации приведенным способом базиса Рисса, обладающего полезными в приложениях свойствами, такими, как например, компактность носителя или симметричность, эти свойства теряются. А при определении проекции функции f на пространство W_j по неортогональному базису

$$Pr_{W_j} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\psi_{j,k}(x),$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

возникает также сложность с вычислением коэффициентов $c_{j,k}$.

Поэтому, чтобы преодолеть эту сложность, рассматривают (см., например, [2, гл. 8]) следующую двойственную к $\{\psi_{j,k}\}$ систему.

О п р е д е л е н и е 2. Система функций $\{\widetilde{\psi}^s(x)\}$ называется двойственной к системе $\{\psi^s(x)\}$, $s=\overline{1,n}$, если для любых $j\in\mathbb{Z}$, $s=\overline{1,n}$, выполняются условия

$$\langle\psi^s_{j,k},\widetilde{\psi}^s_{j,k_1}\rangle=\delta_{k,k_1},\quad k,k_1\in\mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Здесь и далее $\langle f,g\rangle$ — скалярное произведение функций f и g в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Определим проекции функции f на соответствующие пространства W^s_j, $\widetilde{W}^s_j$ $(s=\overline{1,n})$:

$$Pr_{W^s_j}f(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}c^s_{j,\nu}\psi^s_{j,\nu}(x),\quad Pr_{\widetilde{W}^s_j}f(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}^s_{j,\nu}\widetilde{\psi}^s_{j,\nu}(x).$$

Домножая скалярно первое равенство на $\widetilde{\psi}^s_{j,k}(x)$, а второе на $\psi^s_{j,k}(x)$, получаем, что коэффициенты $c^s_{j,k}$ и $\widetilde{c}^s_{j,k}$ вычисляются по формулам

$$c^s_{j,k}=\langle f,\widetilde{\psi}^s_{j,k}\rangle,\quad \widetilde{c}^s_{j,k}=\langle f,\psi^s_{j,k}\rangle.$$

В данной работе методы построения биортогональных базисов перенесены на введенные в статье [1] базисы всплесков и масштабирующих функций произвольного n-раздельного КМА.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$p_s=\text{Выч}_n(s)+1=\begin{cases} s+1, & s=1,2,\dots,n-1,\\ 1, & s=n.\end{cases}$$

1. Построение биортогональных КМА

Как и в классическом случае, начнем построение базисов всплесков с кратномасштабного анализа. В следующем определении дается обобщение понятия n-раздельного КМА из [1].

О п р е д е л е н и е 3. Рассмотрим n последовательностей $(n\geq 2)$ замкнутых подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\cdots\subset V^n_{-1}\subset V^1_0\subset V^2_1\subset V^3_2\subset\cdots\subset V^n_{n-1}\subset V^1_n\subset V^2_{n+1}\subset\cdots,$$
$$\cdots\subset V^1_{-1}\subset V^2_0\subset V^3_1\subset V^4_2\subset\cdots\subset V^1_{n-1}\subset V^2_n\subset V^3_{n+1}\subset\cdots,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\subset V^{n-1}_{-1}\subset V^n_0\subset V^1_1\subset V^2_2\subset\cdots\subset V^{n-1}_{n-1}\subset V^n_n\subset V^1_{n+1}\subset\cdots.$$

Назовем эту конструкцию в отличие от классического КМА *n-раздельным кратномасштабным анализом* (n-КМА) пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_j V^1_{nj}}=\overline{\bigcup V^2_{nj}}=\cdots=\overline{\bigcup V^n_{nj}}=\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

б) $\bigcap_j V^1_{nj}=\bigcap V^2_{nj}=\cdots=\bigcap V^n_{nj}=\{0\}$;

в) $f(x)\in V^s_j\Leftrightarrow f(x+l/2^j)\in V^s_j\ \ \forall j,l\in\mathbb{Z},\ s=1,2,\dots,n$;

г) $f(x)\in V^s_0\Leftrightarrow f(2^jx)\in V^s_j\ \ \forall j\in\mathbb{Z},\ s=1,2,\dots,n$;

д) для каждого s, $s=\overline{1,n}$, существует функция $\varphi^s(x)\in\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ такая, что система ее целочисленных сдвигов $\{\varphi^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса пространства V^s_0 $(s=1,2,\dots,n)$. Функции $\varphi^s(x)$, $s=\overline{1,n}$ называются масштабирующими.

Вложение пространств n-КМА обеспечивается следующими условиями на базисы $\varphi^s_{j,k}(x)=2^{j/2}\varphi^s(x)(2^jx-k),k\in\mathbb{Z}$, называемыми *масштабирующими соотношениями*:

$$\varphi^s(x)\overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h^{s,p_s}_k\varphi^{p_s}_{1,k}(x),\quad s=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

После преобразования Фурье получим эквивалентные равенства

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) = m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где $h^{s,p_s} \in l^2(\mathbb{Z})$, а $m^{s,p_s}(\omega)$ — 1-периодические функции из $\mathbf{L}^2[0,1)$,

$$m^{s,p_s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^{s,p_s} e^{2\pi i k\omega}. \tag{1.3}$$

Введем двойственную систему вложенных пространств КМА.

Определение 4. Рассмотрим n последовательностей замкнутых подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\cdots \subset \widetilde{V}_{-1}^n \subset \widetilde{V}_0^1 \subset \widetilde{V}_1^2 \subset \widetilde{V}_2^3 \subset \cdots \subset \widetilde{V}_{n-1}^n \subset \widetilde{V}_n^1 \subset \widetilde{V}_{n+1}^2 \subset \cdots,$$

$$\cdots \subset \widetilde{V}_{-1}^1 \subset \widetilde{V}_0^2 \subset \widetilde{V}_1^3 \subset \widetilde{V}_2^4 \subset \cdots \subset \widetilde{V}_{n-1}^1 \subset \widetilde{V}_n^2 \subset \widetilde{V}_{n+1}^3 \subset \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \subset \widetilde{V}_{-1}^{n-1} \subset \widetilde{V}_0^n \subset \widetilde{V}_1^1 \subset \widetilde{V}_2^2 \subset \cdots \subset \widetilde{V}_{n-1}^{n-1} \subset \widetilde{V}_n^n \subset \widetilde{V}_{n+1}^1 \subset \cdots$$

Назовем эту конструкцию *двойственным n-раздельным кратномасштабным анализом пространства* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_j \widetilde{V}_{nj}^1} = \overline{\bigcup \widetilde{V}_{nj}^2} = \cdots = \overline{\bigcup \widetilde{V}_{nj}^n} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;
б) $\bigcap_j \widetilde{V}_{nj}^1 = \bigcap \widetilde{V}_{nj}^2 = \cdots = \bigcap \widetilde{V}_{nj}^n = \{0\}$;
в) $f(x) \in \widetilde{V}_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in \widetilde{V}_j^s \ \ \forall j, l \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
г) $f(x) \in \widetilde{V}_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in \widetilde{V}_j^s \ \ \forall j \in \mathbb{Z},\ s = 1, 2, \ldots, n$;
д) для каждого s, $s = \overline{1,n}$, существует функция $\widetilde{\varphi}^s(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, такая, что система ее целочисленных сдвигов $\{\widetilde{\varphi}^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса пространства $\widetilde{V}_0^s$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, где система $\{\widetilde{\varphi}^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ двойственна системе $\{\varphi^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т.е. $\langle\varphi^s(x+k), \widetilde{\varphi}^s(x+l)\rangle = \delta_{k,l}$.

Для двойственной системы масштабирующие соотношения выглядят следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}^s(x) \overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k^{s,p_s} \widetilde{\varphi}_{1,k}^{p_s}(x), \quad s = \overline{1,n},$$

а после преобразования Фурье

$$\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega) = \widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где $\widetilde{h}^{s,p_s} \in l^2(\mathbb{Z})$, а $\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)$ — 1-периодические функции из $\mathbf{L}^2[0,1)$,

$$\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{h}_k^{s,p_s} e^{2\pi i k\omega}. \tag{1.5}$$

Известное условие биортогональности, выписанные в п. д) Определения 4, в терминах преобразований Фурье для систем функций $\varphi^s(x), \widetilde{\varphi}^s(x)$ записывается в виде

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}^s(\omega+\nu)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega+\nu)} \overset{\text{п.в.}}{=} 1, s = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Пусть выполняются условия биортогональности (1.6). Тогда $m^{s,p_s}(\omega)$, $\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}+m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\overset{\text{п.в.}}{=}1. \tag{1.7}$$

Доказательство. Запишем равенства (1.6), используя формулы (1.2) и (1.4), и стандартным образом разбивая суммирование отдельно по четным и по нечетным ν:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}$$

$$=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)}$$

$$+\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)}\overset{\text{п.в.}}{=}1.$$

Вынося за знак суммы 1-периодические слагаемые, получим

$$m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu\Big)}$$

$$+m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+1}{2}+\nu\Big)}\overset{\text{п.в.}}{=}1,$$

откуда по (1.6) следуют равенства (1.7) □

Пусть имеется базис Рисса пространства V_0^s.

Построить по нему двойственный базис пространства $\widetilde{V}_0^s$ можно, используя формулу

$$\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega)=\frac{\widehat{\varphi^s}(\omega)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi^s}(\omega+k)|^2}.$$

Действительно, для таких $\varphi^s(x)$, $\widetilde{\varphi}^s(x), s=\overline{1,n}$, будет выполняться условие (1.6), что эквивалентно выполнению условий биортогональности (0.1).

При таком способе построения система, биортогональная к системе сдвигов масштабирующих функций с компактным носителем, вообще говоря, не будет иметь компактного носителя. Поэтому для масштабирующих функций с компактным носителем будем строить биортогональный базис по аналогии с другим известным способом.

2. Биортогональные базисы из масштабирующих функций с компактным носителем

Пусть функции $\varphi^s(x), \widetilde{\varphi}^s(x), s=\overline{1,n}$, имеют компактный носитель. Тогда масштабирующие соотношения (1.1) содержат конечное число слагаемых:

$$\varphi^s(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-N_1}^{N_2}h_k^{s,p_s}\varphi_{1,k}^{p_s}(x),\quad \widetilde{\varphi}^s(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2}\widetilde{h}_k^{s,p_s}\widetilde{\varphi}_{1,k}^{p_s}(x),\quad s=\overline{1,n}.$$

Следовательно, маски m^{s,p_s} и $\widetilde{m}^{s,p_s}$ являются тригонометрическими полиномами

$$m^{s,p_s}(\omega)=\sum_{k=-N_1}^{N_2}h_k^{s,p_s}e^{2\pi ik\omega},\quad \widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)=\sum_{k=-\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2}\widetilde{h}_k^{s,p_s}e^{2\pi ik\omega},\quad s=\overline{1,n}.$$

Обозначим $z = e^{2\pi i\omega}$. Тогда по имеющимся многочленам $H^{s,p_s}(z) = \sum_{k=-N_1}^{N_2} h_k^{s,p_s} z^k$ построим многочлены $\overline{\widetilde{H}}^{s,p_s}(z) = \sum_{k=-\widetilde{N}_1}^{\widetilde{N}_2} \overline{\widetilde{h}}_k^{s,p_s}((\frac{1}{z}))^k,\ s = \overline{1,n}$.

Для $m^{s,p_s},\ \widetilde{m}^{s,p_s}$ должно выполняться свойство (1.7), которое в терминах $H^{s,p_s}(z),\ \widetilde{H}^{s,p_s}(z)$ выглядит следующим образом: $H^{s,p_s}(z)\overline{\widetilde{H}}^{s,p_s}(z) + H^{s,p_s}(-z)\overline{\widetilde{H}}^{s,p_s}(-z) = 1$.

Данное уравнение имеет решения — многочлены $\widetilde{H}^{s,p_s}(z)$, причем многочлен $\widetilde{H}^{s,p_s}(z)$, удовлетворяющий неравенству $\deg \widetilde{H}^{s,p_s}(z) \le \deg H^{s,p_s}(z)$, единственный и может быть найден с использованием алгоритма Евклида аналогично [3, разд. 4.1]. Таким образом, зная $\varphi^s(x)$ с компактным носителем, найдем $\widetilde{H}^{s,p_s}(z)$, коэффициенты $\widetilde{h}_k^{s,p_s}$ и маски $\widetilde{m}^{s,p_s}(\omega)$, и по обычной схеме (см., напр., [1]) восстановим двойственные масштабирующие функции $\widetilde{\varphi}^s(x)$.

3. Базисы пространств всплесков

Построим теперь биортогональные базисы пространств всплесков по имеющимся системам биортогональных масштабирующих функций. Это значит, что мы хотим построить такие функции $\psi^s(x),\ \widetilde{\psi}^s(x)$, что системы $\{\psi_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\{\widetilde{\psi}_{j,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}})$ образуют базисы пространств W_j^s $(\widetilde{W}_j^s)$, дополняющих пространства V_j^s (соответственно, $\widetilde{V}_j^s$) до пространств $V_{j+1}^{p_s}$ $(\widetilde{V}_{j+1}^{p_s})$ со свойствами $\langle \psi_{j,k}^s, \widetilde{\psi}_{j,k_1}^s\rangle = \delta_{k,k_1}$, $\langle \varphi_{j,k_1}^s, \widetilde{\psi}_{j,k}^s\rangle = 0, s = \overline{1,n},\ j,k,k_1 \in \mathbb{Z}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть при $s = \overline{1,n}$, $\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^k \overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}}\varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$ и $\widetilde{\psi}^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^k \overline{\widetilde{h}_{1-\nu}^{s,p_s}}\widetilde{\varphi}_{1,\nu}^{p_s}(x)$, где h_ν^{s,p_s} и $\widetilde{h}_\nu^{s,p_s}$ — коэффициенты из (1.3), (1.5). Тогда для любых $j \in \mathbb{Z}$ системы $\{\psi_{j,k}^s(x)\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{j,k}^s(x)\}$, где $k \in \mathbb{Z}$, образуют биортогональные базисы пространств W_j^s и $\widetilde{W}_j^s$, а при каждом $s = 1, 2, \ldots, n$ системы $\{\psi_{nj+l,k}^{p_{s+l-1}}(x)\}$ и $\{\widetilde{\psi}_{nj+l,k}^{p_{s+l-1}}(x)\}$, где $l = 0, 1, \ldots, n-1;\ j,k \in \mathbb{Z}$ — двойственные базисы пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при фиксированном $s \in 1, \ldots, n$ функция $f(x) \in W_0^s$. Тогда $f \in V_1^{p_s},\ f \perp \widetilde{V}_0^s$. Это значит, что справедливы соотношения $f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x)$, $\langle f, \widetilde{\varphi}_{0,k}^s\rangle = 0$, или в терминах преобразований Фурье

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu e^{\pi i\nu\omega}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) := m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{e^{2\pi ik\omega}\widehat{\widetilde{\varphi}^s}(\omega)}\, d\omega = 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая условия (1.2), последнее равенство перепишется в виде

$$\int_{\mathbb{R}} m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi}^{p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}e^{-2\pi ik\omega}\, d\omega = 0.$$

Стандартным образом, заменяя интеграл по оси интегралом по объединению интервалов и далее переходя к сумме интегралов, получим равенства

$$\int_{\bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}}[\nu,\nu+1]} m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi}^{p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}e^{-2\pi ik\omega}\, d\omega$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_\nu^{\nu+1} m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}e^{-2\pi ik\omega}\, d\omega = 0.$$

После замены переменных и переноса суммы под знак интеграла имеем

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \int_0^1 m_f\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}e^{-2\pi ik(\omega+\nu)}\, d\omega$$

$$= \int_0^1 \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big(m_f\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}\Big(\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega+\nu}{2}\Big)}\Big)\Big) e^{-2\pi ik\omega}\,d\omega$$

$$= \int_0^1 \Big(m_f(\frac{\omega}{2})\overline{m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}(\frac{\omega}{2}+\nu)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}(\frac{\omega}{2}+\nu)}$$

$$+ m_f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu+\frac{1}{2}\Big)\overline{\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}+\nu+\frac{1}{2}\Big)}\Big) e^{-2\pi ik\omega}\,d\omega = 0.$$

С учетом (1.6) последнее равенство эквивалентно условию

$$\int_0^1 \Big(m_f(\frac{\omega}{2})\overline{m^{s,p_s}(\frac{\omega}{2})} + m_f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big) e^{-2\pi ik\omega}\,d\omega = 0,$$

откуда в силу 1-периодичности подынтегральной функции следует равенство

$$m_f(\omega)\overline{m^{s,p_s}(\omega)} + m_f\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\overline{m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} \overset{\text{п.в.}}{=} 0,$$

равносильное тому, что $m_f(\omega) = A(\omega)\overline{m^{s,p_s}(\omega+1/2)}$, где $A(\omega) = -A(\omega+1/2)$. Таким образом, при каждом $s=\overline{1,n}$ для любой функции $f \in W_0^s$ существует 1-периодическая фукнция $m_f(\omega) \in \mathbf{L}^2[0,1]$, такая, что

$$\widehat{f}(\omega) = m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\ \text{где}\ m_f(\omega) = \alpha_f(\omega)e^{2\pi i\omega}\overline{m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} \in \mathbf{L}^2[0,1], \tag{3.1}$$

$\alpha_f(\omega)$ — 1/2-периодическая функция. Аналогичными рассуждениями с заменой соответственно f, φ, m, W, $\widetilde{V}$ на $\widetilde{f}$, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{m}$, $\widetilde{W}$, V для любой функции $\widetilde{f}(x) \in \widetilde{W}_0^s$ получим соотношения

$$\widehat{\widetilde{f}}(\omega) = \widetilde{m}_{\widetilde{f}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),\ \widetilde{m}_{\widetilde{f}}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}(\omega)e^{2\pi i\omega}\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} \in \mathbf{L}^2[0,1],\ \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}(\omega) \tag{3.2}$$

Построим теперь функции $\psi^s \in W_0^s$, $\widetilde{\psi}^s \in \widetilde{W}_0^s$, целочисленные сдвиги которых образуют биортогональные базисы пространств W_0^s и $\widetilde{W}_0^s$. В силу (3.1), (3.2) при $f=\psi^s$ и $f=\widetilde{\psi}^s$ имеем

$$\widehat{\psi^s}(\omega) = \alpha_{\psi^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)e^{\pi i\omega}\overline{m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad \widehat{\widetilde{\psi}^s}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)e^{\pi i\omega}\overline{\widetilde{m}^{s,p_s}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\widehat{\widetilde{\varphi}^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{3.3}$$

и, как легко проверить, чтобы выполнялось условие биортогональности вида (1.6) для ψ^s и $\widetilde{\psi}^s$, функции $\alpha_{\psi^s}(\omega)$ и $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega)$ должны лишь удовлетворять условиям $\alpha_{\psi^s}(\omega)\overline{\widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega)} = 1, s=\overline{1,n}$. Для определенности положим $\alpha_{\psi^s}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega) = 1$. После обратного преобразования Фурье получаем, что

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^\nu\overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}}\varphi_{1,\nu}^{p_s}(x),\ \widetilde{\psi}^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}(-1)^\nu\overline{\widetilde{h}_{1-\nu}^{s,p_s}}\widetilde{\varphi}_{1,\nu}^{p_s}(x),\ s=\overline{1,n}.$$

Покажем, что построенные таким образом системы функций $\{\psi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ($\{\widetilde{\psi}^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$) образуют базисы пространств W_0^s ($\widetilde{W}_0^s$), $s=\overline{1,n}$, дополняющих пространства V_0^s до $\widetilde{V}_1^{p_s}$ (V_0^s до $\widetilde{V}_1^{p_s}$), т. е. удовлетворяющих равенствам $W_0^s \bigoplus V_0^s = V_1^{p_s}$ ($\widetilde{W}_0^s \bigoplus \widetilde{V}_0^s = \widetilde{V}_1^{p_s}$), где $\bigoplus$ — символ прямой суммы. Это определение пространств всплесков записывают еще в виде $W_0^s = V_1^{p_s}\dot{-}V_0^s$ ($\widetilde{W}_0^s = \widetilde{V}_1^{p_s}\dot{-}\widetilde{V}_0^s$)

Объединяя условия (3.1), (3.2) и (3.3) (последнее с $\alpha_{\psi^s}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{\psi}^s}(\omega) = 1$), в качестве следствия для функций $f \in W_0^s$ ($\widetilde{f} \in \widetilde{W_0^s}$) получим соотношения

$$\widehat{f}(\omega) = e^{i\pi\omega}\alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)m_{\psi^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\psi^s}(\omega)\ \Big(\widehat{\widetilde{f}}(\omega) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\widetilde{\psi}^s}(\omega)\Big), \tag{3.4}$$

где $\alpha_f(\omega)$, $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{f}}(\omega)$ — 1/2-периодические функции. После обратного преобразования Фурье получим $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\psi^s(x-k)$ ($\widetilde{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{d}_k\widetilde{\psi}^s(x-k)$), где d_k ($\widetilde{d}_k$) — коэффициенты из разложения $\alpha_f\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e^{-2\pi ik\omega}$ ($\widetilde{\alpha}_f\Big(\dfrac{\omega}{2}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{d}_k e^{-2\pi ik\omega}$), которые через сами функции f ($\widetilde{f}$) выражаются так: $d_k = \Big\langle f, \widetilde{\psi}_{0,k}\Big\rangle$ ($\widetilde{d}_k = \Big\langle \widetilde{f}, \psi_{0,k}\Big\rangle$).

Учитывая связь пространств W_j^s ($\widetilde{W_j^s}$) с V_0^s ($\widetilde{V_0^s}$), в результате получим, что любую функцию $f \in W_j^s$ ($\widetilde{f} \in \widetilde{W_j^s}$) можно разложить по базису $\{\psi_{j,k}^s(x)\}$ ($\{\widetilde{\psi}_{j,k}^s(x)\}$), $k \in \mathbb{Z}$. А тогда из определений 3, 4 и пространств W_j^s ($\widetilde{W_j^s}$) следует, что $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{r=0}^{n-1} W_{nj+r}^{j-1+r}$ ($\mathbf{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{r=0}^{n-1} \widetilde{W}_{nj+r}^{j-1+r}$), откуда и из доказанного вытекает вторая часть теоремы. $\square$

4. Прямое и обратное дискретное всплеск-преобразование

Как и в случае одной масштабирующей функции, зная коэффициенты разложения $f_j^{p_s}(x)$ — проекции функции $f(x)$ на пространства $V_j^{p_s}$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$, можно найти коэффициенты разложения проекции $f(x)$ на пространства V_{j-1}^s и W_{j-1}^s. Пусть проекция $f(x)$ на пространство $V_j^{p_s}$ имеет вид $f_j^{p_s}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{p_s,j}\varphi_{j,k}^{p_s}(x)$. Тогда, так как $W_{j-1}^s \bigoplus V_{j-1}^s = V_j^{p_s}$, $s = 1,2$, то

$$f_j^{p_s}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(c_k^{s,j-1}\varphi_{j-1,k}^s(x) + d_k^{s,j-1}\psi_{j-1,k}^s(x)\Big).$$

Учитывая масштабирующие соотношения (1.1), получим, что $c_k^{s,j-1} = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} c_l^{p_s,j}\overline{h_{l-2k}^{s,p_s}}$, $\quad d_k^{s,j-1} = \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} c_l^{p_s,j}(-1)^{l+1}h_{2k+1-l}^{s,p_s}$. где $s = 1,2,\ldots,n$, $j \in \mathbb{Z}$. Схематично этот процесс можно изобразить в виде n пирамидальных схем

$$\begin{array}{ccccc} c_k^{p_{s+1},j} & \longrightarrow & c_k^{p_s,j-1} & \longrightarrow & c_k^{s,j-2} \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & d_k^{p_s,j-1} & & d_k^{s,j-2} \end{array} \quad \cdots,\ s = \overline{1,n},$$

вместо одной для классических и для нестационарных всплесков (см., напр., [3, гл. 8]).

Зная же коэффициенты разложения проекции функции на пространства V_{j-1}^s и $W_l^{p_{s+l-1}}$, $l \ge j-1$, полученные по предыдущей схеме, можно восстановить коэффициенты проекции этой функции на все пространства $V_{p_{s+l}}^l$, $l \ge j$: $c_l^{p_s,j} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(c_k^{s,j-1}h_{l-2k}^{s,p_s} + d_k^{s,j-1}(-1)^l\overline{h^{s,p_s}{}_{2k+1-l}}\right)$, или в виде обратного всплеск-преобразования:

$$\begin{array}{ccccc} c_k^{s,j-1} & \longrightarrow & c_k^{p_s,j} & \longrightarrow & c_k^{p_{s+1},j+1} \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ d_k^{s,j-1} & & d_k^{p_s,j} & & \end{array} \quad \cdots.,\ s = \overline{1,n}.$$

Аналогичные прямая и обратная схемы дискретного всплеск-преобразования получаются для двойственных пространств. Зная коэффициенты разложения $\widetilde{f}_j^{p_s}(x)$ — проекции функции $\widetilde{f}(x)$ на пространства $\widetilde{V}_j^{p_s}$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$, можно найти коэффициенты разложения проекции $\widetilde{f}(x)$ на пространства $\widetilde{V}^s_{j-1}$ и $\widetilde{W}^s_{j-1}$. Пусть проекция $\widetilde{f}(x)$ на пространство $\widetilde{V}^{p_s}_j$ имеет вид $\widetilde{f}^{p_s}_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}^{p_s,j}_k\widetilde{\varphi}^{p_s}_{j,k}(x)$. Тогда, так как $\widetilde{W}^s_{j-1}\bigoplus\widetilde{V}^s_{j-1}=\widetilde{V}^{p_s}_{j},$ $s=1,2$, то

$$\widetilde{f}^{p_s}_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\widetilde{c}^{s,j-1}_k\widetilde{\varphi}^s_{j-1,k}(x)+\widetilde{d}^{s,j-1}_k\widetilde{\psi}^s_{j-1,k}(x)\Big).$$

Учитывая масштабирующие соотношения, получим, что $\widetilde{c}^{s,j-1}_k=\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}^{p_s,j}_l\overline{\widetilde{h}^{s,p_s}_{l-2k}}$, $\widetilde{d}^{s,j-1}_k=\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}}\widetilde{c}^{p_s,j}_l(-1)^{l+1}\widetilde{h}^{s,p_s}_{2k+1-l}$. где $s=1,2,\ldots,n,\ j\in\mathbb{Z}$. Изобразим этот процесс в виде $2n$ пирамидальных схем

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{c}^{p_{s+1},j}_k & \longrightarrow & \widetilde{c}^{p_s,j-1}_k & \longrightarrow & \widetilde{c}^{s,j-2}_k & & \\ & \searrow & & \searrow & & \cdots, & s=\overline{1,n}. \\ & & \widetilde{d}^{p_s,j-1}_k & & \widetilde{d}^{s,j-2}_k & & \end{array}$$

Также, зная коэффициенты разложения проекции функции на пространства$\widetilde{V}^s_{j-1}$ и $\widetilde{W}^{p_{s+l-1}}_l$, $l\geq j-1$, полученные по предыдущей схеме, можно восстановить коэффициенты проекции этой функции на все пространства $\widetilde{V}^l_{p_{s+l}}$, $l\geq j:$ $\widetilde{c}^{p_s,j}_l=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(\widetilde{c}^{s,j-1}_k\widetilde{h}^{s,p_s}_{l-2k}+\widetilde{d}^{s,j-1}_k(-1)^l\overline{\widetilde{h}^{s,p_s}_{2k+1-l}}\right)$, или схематически:

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{c}^{s,j-1}_k & \longrightarrow & \widetilde{c}^{p_s,j}_k & \longrightarrow & \widetilde{c}^{p_{s+1},j+1}_k & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \cdots., & s=\overline{1,n}. \\ \widetilde{d}^{s,j-1}_k & & \widetilde{d}^{p_s,j}_k & & & & \end{array}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Плещева Е.А.** Новое обобщение ортогональных базисов всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 264–271.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вэйвлетам. М.; Ижевск: Динамика, 2001. 464 с.
3. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

Плещева Екатерина Александровна
канд.физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: eplescheva@gmail.com

Поступила 15.08.2016

REFERENCES

1. Pleshcheva E.A. New generalization of orthogonal wavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 124–132.
2. Daubechies I. *Ten lectures on wavelets.* Philadelphia: SIAM, 1992, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., vol. 61, 350 p.
3. Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.A. *Wavelet theory.* New York: AMS, 2011, Transl. Math. Monographs, vol. 239, 506 p.

E. A. Pleshcheva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: e-mail: eplescheva@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

СПЛАЙНЫ ПО ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ

А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова

Для непрерывных функций построены четырехточечные рациональные интерполянты и по ним — интерполяционные рациональные сплайны. Получены оценки скорости сходимости таких сплайнов и их производных для непрерывных функций, непрерывно дифференцируемых функций и их производных по второй порядок включительно.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

A.-R. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Splines for four-point rational interpolants.

For continuous functions, we construct four-point rational interpolants and, for them, rational interpolation splines. For continuous functions, continuously differentiable functions, and their derivatives up to the second order, we obtain convergence bounds for such splines and their derivatives.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.

MSC: 97N50

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-233-246

Введение

Полиномиальные сплайны различных видов, в частности, интерполяционные сплайны, вопросы их сходимости исследованы в завершенной форме в трудах многих авторов; изучены также аппроксимативные свойства рациональных сплайнов специального вида при различных ограничениях на функции (монотонность, сохранение знака, выпуклость) (см., например, Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш [1]; С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин [2;3]; Н. П. Корнейчук [4]; А. Эдео, Г. Гофе, Т. Тефера [5] и цитируемые в них источники).

Следуя Ю. Н. Субботину [6], интерполяционные сплайны называют *безусловно сходящимися к данной функции*, если для любой последовательности сеток с диаметром, стремящимся к нулю, соответствующая последовательность интерполяционных сплайнов равномерно сходится к этой функции. По аналогии определяется безусловная сходимость для производных сплайнов.

Известно [1;2], что для производной $f^{(k)}(x)$ каждой функции из класса $C^{(k)}[a,b]$ при $k=1,2$ имеет место безусловная сходимость соответствующих производных интерполяционных параболических и кубических сплайнов. При этом, как показали С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин [2] и Ал. А. Привалов [7], для самой непрерывной функции имеет место безусловная сходимость интерполяционных параболических (кубических) сплайнов тогда и только тогда, когда функция принадлежит классу $\mathrm{Lip}\,1$.

Пусть $f\in C[a,b]$ и задана сетка узлов $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 1)$. Для каждой пары узлов $x_{k-1}<x_k$ $(k=1,2,\dots,N)$ возьмем двуточечный рациональный интерполянт — функцию вида $q_k(x)=a_k+A_k/(x-u_k)$ с $u_k=x_k+H$ $(H>b-a)$ такую, что $q_k(x_j)=f(x_j)$ при $j=k-1,k$. Тогда легко показать, что для непрерывной на $[a,b]$ кусочно-рациональной функции $Q_N(x)$ с $Q_N(x)=q_k(x)$ при $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,N)$ выполняется неравенство

$$|Q_N(x)-f(x)|\leqslant\omega(\|\Delta\|,f)\quad(x\in[a,b]).$$

Здесь и всюду ниже обозначены диаметр сетки узлов $\|\Delta\| = \max\{x_j - x_{j-1} : j = 1, 2, \dots, N\}$ и модуль непрерывности функции

$$\omega(\delta, f) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| \colon |x - y| \leqslant \delta; x, y \in [a, b]\right\} \quad (\delta \geqslant 0).$$

Можно получить также (см. [8]) оценки скорости сходимости сплайнов $Q_N(x)$ и производных $Q'_N(x)$ для $f \in C^{(1)}[a, b]$.

В [9] для $f \in C[a, b]$ и сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ построены сплайны с помощью трехточечных интерполянтов — рациональных функций вида

$$R_k(x) = \alpha_k + \beta_k(x - x_k) + \frac{\gamma_k}{x - g_k},$$

определяемых тройками узлов $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots, N)$ и полюсами $g_k \notin [x_{k-1}, x_{k+1}]$. Показано, что такие сплайны обладают свойством безусловной сходимости для всех функций класса $C[a, b]$, а производные этих сплайнов — для производной каждой функции класса $C^{(1)}[a, b]$.

В данной работе построены интерполяционные рациональные сплайны на базе четырехточечных рациональных интерполянтов и получены оценки скорости сходимости этих сплайнов и их производных по второй порядок включительно. Как видно из этих оценок, скорость сходимости этих сплайнов на соответствующих классах в целом аналогична скорости сходимости кубических и параболических сплайнов. Основные результаты работы анонсированы в [8].

1. Четырехточечные рациональные интерполянты

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, на котором задана некоторая сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$.

Тогда для любой четверки узлов $x_{k-2} < x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ $(k = 2, 3, \dots, N - 1)$ существует непрерывная на отрезке $[x_{k-2}, x_{k+1}]$ рациональная функция вида

$$r_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{A_k}{x - u_k} \tag{1.1}$$

такая, что $r_k(x_j) = f(x_j)$ $(j = k - 2, k - 1, k, k + 1)$ (полюс u_k определяется только узлами x_j, $j = k - 2, k - 1, k, k + 1$), а коэффициенты для одной и той же четверки узлов могут иметь разные выражения через разделенные разности функции $f(x)$ в этих узлах; как обычно, через $f(t_1, t_2)$, $f(t_1, t_2, t_3)$ и $f(t_1, t_2, t_3, t_4)$ обозначены разделенные разности соответственно первого, второго и третьего порядков функции $f(x)$ в узлах $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [a, b]$.

В частности, выполняются равенства

$$\begin{aligned} &A_k = -f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) \prod_{j=-2}^{1} (x_{k+j} - u_k), \quad a_k = f(x_k) - \frac{A_k}{x_k - u_k}, \\ &c_k = f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) - \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)(x_{k+1} - u_k)}, \\ &b_k = f(x_{k-1}, x_{k+1}) - c_k(x_{k+1} - x_k) + \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Коэффициенты c_k и b_k могут быть записаны также в виде

$$\begin{aligned} &c_k = f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k) - \frac{A_k}{(x_{k-2} - u_k)(x_{k-1} - u_k)(x_k - u_k)}, \\ &b_k = f(x_{k-2}, x_k) + c_k(x_{k-1} - x_{k-2}) + \frac{A_k}{(x_{k-2} - u_k)(x_k - u_k)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ради краткости всюду ниже будем пользоваться обозначениями

$$h_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, N);$$

$$\alpha_k = \min\{h_{k-1}, h_k, h_{k+1}\}, \quad \beta_k = \max\{h_{k-1}, h_k, h_{k+1}\} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1);$$

$$g_k = \begin{cases} \max\{h_{k-1}, h_k\}, \text{ если } h_{k-1} < h_{k+1}, \\ \max\{h_k, h_{k+1}\}, \text{ если } h_{k+1} \leqslant h_{k-1}. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, на котором задана сетка $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, и пусть для данного k $(k = 2, 3, \dots, N-1)$ рациональная функция $r_k(x)$ из равенства* (1.1) *с коэффициентами* (1.2) *имеет полюс $u_k = x_{k-2} - g_k$, если $h_{k-1} < h_{k+1}$, и полюс $u_k = x_{k+1} + g_k$, если $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$.*

Тогда при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant 38\, \frac{\beta_k}{\alpha_k}\, \omega(\beta_k, f).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала при данном k $(k = 2, 3, \dots, N-1)$ выполняется неравенство $h_{k-1} < h_{k+1}$ и $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$.

Рассмотрим рациональную функцию $r_k(x)$, определенную равенством (1.1) с $u_k = x_{k-2} - g_k$ и коэффициентами (1.2). Тогда

$$r_k(x) - f(x) = (f(x_k) - f(x)) + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_{k-1})(x - x_k) + \frac{A_k(x_k - x)}{(x - u_k)(x_k - u_k)}. \qquad (1.4)$$

Очевидно, $|f(x_k) - f(x)| \leqslant \omega\,(|x_k - x|, f) \leqslant 2\omega\,(\beta_k, f)$.

Оценим последовательно каждое из трех остальных слагаемых правой части (1.4):

$$\begin{aligned} |b_k(x - x_k)| &\leqslant \Big(|f(x_{k-1}, x_{k+1})| + |c_k|(x_{k+1} - x_k) + \frac{|A_k|}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}\Big)|x - x_k| \\ &\leqslant \big[\,|f(x_{k-1}, x_{k+1})| + |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k) \\ &+ |f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|\,((x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - x_k) + (x_{k-2} - u_k)(x_k - u_k))\,\big]\,|x - x_k| \\ &= \big[\,|f(x_{k-1}, x_{k+1})| + |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k) \\ &+ |f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)\big]\,|x - x_k|. \end{aligned}$$

Выразив разделенные разности через приращения функции, получим

$$\begin{aligned} &|b_k(x - x_k)| \\ &\leqslant \Big(|f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})| + |f(x_k) - f(x_{k-1})|\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\Big)\frac{|x - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} \\ &+ \Big(|f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})|\frac{1}{x_{k-1} - x_{k-2}} + |f(x_k) - f(x_{k-1})|\frac{1}{x_k - x_{k-1}}\Big)\frac{D_k}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})} \\ &+ \Big(|f(x_k) - f(x_{k-1})|\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|\frac{1}{x_{k+1} - x_k}\Big)\frac{D_k}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено $D_k = (x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)|x - x_k|$.

Ясно, что $|x - x_k| \leqslant \max\{x_{k+1} - x_k, x_k - x_{k-2}\}$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$, поэтому с учетом $h_{k-1} < h_{k+1}$ имеем $|x - x_k| \leqslant x_{k+1} - x_{k-1}$.

Оценив приращения функций через $\omega(\beta_k, f)$, получим

$$|b_k(x - x_k)| \leqslant \omega(\beta_k, f)\Big(3 + \frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)$$

$$+\, \omega(\beta_k, f)\Big(\frac{|x - x_k|}{x_{k-1} - x_{k-2}} + \frac{|x - x_k|}{x_k - x_{k-1}}\Big)\frac{g_k}{x_k - x_{k-2}}\, \frac{x_{k+1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}}$$

$$+\,\omega(\beta_k,f)\Big(\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}}+\frac{g_k}{x_{k+1}-x_k}\Big)\frac{|x-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-1}}\,\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}$$

$$\leqslant \omega(\beta_k,f)\Big[\Big(3+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)+\Big(1+\frac{\beta_k}{\alpha_k}+1+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\cdot 1\cdot 2+\Big(\frac{\beta_k}{\alpha_k}+\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\cdot 1\cdot 2\Big]$$

$$=\Big(7+9\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\omega(\beta_k,f).$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$|b_k(x-x_k)|\leqslant 16\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k,f). \tag{1.5}$$

Оценим $c_k(x-x_{k-1})(x-x_k)$. Величину $|(x-x_{k-1})(x-x_k)|$ оценим сверху при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ через

$$E_k=\max\Big\{h_{k-1}(h_k+h_{k-1}),h_{k+1}(h_{k+1}+h_k),\frac{1}{4}h_k^2\Big\}$$

и учтем, что $x_{k-2}-u_k=g_k=\max\{h_{k-1},h_k\}$, $h_{k-1}<h_{k+1}$.

Тогда, выразив разделенные разности через приращения функции, а эти приращения оценив через $\omega(\beta_k,f)$, получим

$$|c_k(x-x_{k-1})(x-x_k)|\leqslant|f(x_{k-1},x_k,x_{k+1})|E_k+|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|g_kE_k$$

$$\leqslant\omega(\beta_k,f)\Big(\frac{E_k}{(x-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}+\frac{E_k}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}$$

$$+\frac{g_kE_k}{(x_{k+1}-x_{k-2})(x_{k-1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})}+\frac{g_kE_k}{(x_{k+1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}\Big).$$

Здесь

$$\frac{E_k}{(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-1})}\leqslant\max\Big\{\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{x_k-x_{k-1}},\frac{x_{k+1}-x_k}{x_k-x_{k-1}},1\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k},$$

$$\frac{E_k}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-1})}\leqslant\max\Big\{\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{x_{k+1}-x_k},1,\frac{x_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_k}\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k},$$

$$\frac{g_kE_k}{(x_{k-1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_{k-2})}$$

$$\leqslant\max\Big\{\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}},\frac{g_k(x_{k+1}-x_k)}{(x_{k-1}-x_{k-2})(x_k-x_{k-1})},\frac{g_k}{x_{k-1}-x_{k-2}}\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k},$$

$$\frac{g_kE_k}{(x_k-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k-2})}\leqslant\max\Big\{\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}},\frac{g_k}{x_k-x_{k-1}},\frac{g_k}{x_{k+1}-x_k}\Big\}\leqslant\frac{\beta_k}{\alpha_k}.$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ получим

$$|c_k(x-x_{k-1})(x-x_k)|\leqslant 4\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k,f). \tag{1.6}$$

Для оценки третьего слагаемого правой части (1.4) заметим, что при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем

$$\Big|\frac{x-x_k}{x-u_k}\Big|\leqslant\frac{x_k-x_{k-2}}{x_{k-2}-u_k}.$$

Поэтому, для краткости обозначив $F_k=(x_k-x_{k-2})(x_{k-1}-u_k)(x_{k+1}-u_k)$, выразив разделенную разность через приращения функций и оценив приращения функций через $\omega(\beta_k,f)$, получим

$$\Big|\frac{A_k(x_k-x)}{(x-u_k)(x_k-u_k)}\Big|\leqslant|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|(x_k-x_{k-2})(x_{k-1}-u_k)(x_{k+1}-u_k)$$

$$\leqslant \omega(\beta_k, f)\frac{F_k}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})}\Big(\frac{1}{x_{k-1} - x_{k-2}} + \frac{1}{x_k - x_{k-1}}\Big)$$
$$+ \omega(\beta_k, f)\frac{F_k}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}\Big(\frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_{k+1} - x_k}\Big)$$
$$\leqslant \omega(\beta_k, f)\Big[2\Big(1 + \frac{g_k}{x_{k-1} - x_{k-2}}\Big) + 2\frac{x_{k-1} - x_{k-2} + g_k}{x_k - x_{k-1}}$$
$$+ 2\frac{(x_k - x_{k-2})(x_{k-1} - x_{k-2} + g_k)}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-1})} + 2\frac{x_{k-1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_k}\Big]$$
$$\leqslant \omega(\beta_k, f)\Big(2 + 2\frac{\beta_k}{\alpha_k} + 4\frac{\beta_k}{\alpha_k} + 4\frac{\beta_k}{\alpha_k} + 2 + 2\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big) = \Big(4 + 12\frac{\beta_k}{\alpha_k}\Big)\,\omega(\beta_k, f).$$

Отсюда при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ имеем

$$\Big|\frac{A_k(x_k - x)}{(x - u_k)(x_k - u_k)}\Big| \leqslant 16\frac{\beta_k}{\alpha_k}\omega(\beta_k, f). \tag{1.7}$$

Значит, если при данном значении k ($k = 2, 3, \dots, N-1$) выполняется неравенство $h_{k-1} < h_{k+1}$, то при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ ($k = 2, 3, \dots, N-1$) с использованием (1.4)–(1.7) для рациональной функции $r_k(x)$ из (1.1) с коэффициентами (1.2) получим

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant 38\frac{\beta_k}{\alpha_k}\,\omega(\beta_k, f). \tag{1.8}$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда при данном значении k ($k = 2, 3, \dots, N-1$) выполняется неравенство $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$, $g_k = \max\{h_k, h_{k+1}\}$. Положим $u_k = x_{k+1} + g_k$ и с этим значением u_k при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ рассмотрим рациональную функцию $r_k(x)$ из (1.1), в которой коэффициенты A_k и a_k берутся по формулам (1.2), а коэффициенты b_k и c_k — по формулам (1.3).

Для оценки разности $r_k(x) - f(x)$ воспользуемся ее представлением в виде (1.4) и оценим каждое из четырех слагаемых правой части (1.4) в отдельности. Тогда по аналогии с предыдущим случаем получим, что во втором случае также выполняется неравенство (1.8).

Лемма 1.1 доказана.

В нижеследующих двух леммах считаем, что для данной произвольной сетки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ при данном k ($k = 2, 3, \dots, N-1$) рациональная функция $r_k(x)$ из равенства (1.1) с коэффициентами (1.2) имеет полюс $u_k = x_{k-2} - g_k$, если $h_{k-1} < h_{k+1}$, и полюс $u_k = x_{k+1} + g_k$, если $h_{k+1} \leqslant h_{k-1}$.

Лемма 1.2. *Если $f \in C^{(1)}[a, b]$ и дана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), то для любого $k = 2, 3, \dots, N-1$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ выполняются неравенства*

$$|r'_k(x) - f'(x)| \leqslant 57\,\omega(\beta_k, f'), \tag{1.9}$$

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{57}{2}\,h\,\omega(\beta_k, f'), \tag{1.10}$$

где $h = h_j$, если $x \in [x_{j-1}, x_j]$ для данного $j = k-1, k, k+1$.

Лемма 1.3. *Если $f \in C^{(2)}[a, b]$ и дана сетка $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geqslant 3$), то для любого $k = 2, 3, \dots, N-1$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ выполняются неравенства*

$$|r''_k(x) - f''(x)| \leqslant 39\,\omega(\beta_k, f''), \tag{1.11}$$

$$|r'_k(x) - f'(x)| \leqslant 39\,h\,\omega(\beta_k, f''), \tag{1.12}$$

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{39}{2}\,h^2\,\omega(\beta_k, f''), \tag{1.13}$$

где $h = h_j$, если $x \in [x_{j-1}, x_j]$ для данного $j = k-1, k, k+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1.2. Пусть сначала $h_{k-1} < h_{k+1}$. Положим $g_k = \max\{h_{k-1}, h_k\}$, $u_k = x_{k-2} - g_k$. Рассмотрим рациональную функцию (1.1) с коэффициентами (1.2). В правую часть разности

$$r_k'(x) - f'(x) = (b_k - f'(x)) + c_k(2x - x_{k-1} - x_k) - \frac{A_k}{(x-u_k)^2} \tag{1.14}$$

подставим значения b_k, c_k и A_k из (1.2) и оценим ее слагаемые при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$, переходя к разделенным разностям второго порядка и от них к производным.

Для первого слагаемого получим

$$\begin{aligned}
|b_k - f'(x)| &= \left| f(x_{k-1}, x_{k+1}) - f'(x) - c_k(x_{k+1} - x_k) + \frac{A_k}{(x_{k-1} - u_k)(x_{k+1} - u_k)} \right| \\
&\leqslant |f(x_{k-1}, x_{k+1}) - f'(x)| + |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k+1} - x_k) \\
&\quad + |f(x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1})|(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \omega(2\|\Delta\|, f') + |f(x_{k-1}, x_{k+1}) - f(x_{k-1}, x_k)| + |f(x_{k-2}, x_{k-1}) - f(x_{k-1}, x_k)| \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$+ |f(x_{k-1}, x_k) - f(x_k, x_{k+1})| \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}$$

$$\leqslant \omega(3\beta_k, f') + \omega(2\beta_k, f') \left(1 + \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_k - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k-2})} + \frac{(x_{k-2} - u_k)(x_{k+1} - u_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_{k-2})}\right).$$

Используя также оценки

$$\frac{x_{k-2} - u_k}{x_k - x_{k-2}} = \frac{g_k}{x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2}} \leqslant 1, \qquad \frac{x_{k-2} - u_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{g_k}{x_{k+1} - x_k + x_k - x_{k-1}} \leqslant 1,$$

$$\frac{x_{k+1} - u_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} = \frac{x_{k+1} - x_{k-2} + g_k}{x_{k+1} - x_{k-2}} \leqslant 2,$$

при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ имеем

$$|b_k - f'(x)| \leqslant \omega(3\,\beta_k, f') + 5\,\omega(2\beta_k, f') \leqslant 13\,\omega(\beta_k, f'). \tag{1.15}$$

Оценим второе слагаемое $c_k(2x - x_{k-1} - x_k)$ при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$. Ясно, что

$$|2x - x_{k-1} - x_k| \leqslant \max\{|2x_{k-2} - x_{k-1} - x_k|, |2x_{k+1} - x_{k-1} - x_k|\},$$

при этом

$$\begin{aligned}
\frac{|2x_{k-2} - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} &\leqslant 2\frac{x_k - x_{k-2}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = 2\frac{(x_k - x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_{k-2})}{x_{k+1} - x_{k-1}} \\
&< 2\frac{(x_k - x_{k-1}) + (x_{k+1} - x_k)}{x_{k+1} - x_{k-1}} = 2,
\end{aligned}$$

$$\frac{|2x_{k+1} - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2.$$

Поэтому при $x \in [x_{k-2}, x_{k+1}]$ получим

$$\frac{|2x - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-2}} \leqslant \frac{|2x - x_{k-1} - x_k|}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2.$$

Используя, в частности, эти неравенства и равенство $x_{k-2} - u_k = g_k$, имеем

$$|c_k(2x - x_{k-1} - x_k)| \leqslant |f(x_{k-1}, x_k, x_{k+1})(2x - x_{k-1} - x_k)|$$

$$+\,|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})(x_{k-2}-u_k)(2x-x_{k-1}-x_k)|$$
$$\leqslant |f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-1}}$$
$$+\,|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{(x_{k-2}-u_k)(2x-x_{k-1}-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-2})(x_{k+1}-x_{k-1})}$$
$$+\,|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{(x_{k-2}-u_k)|2x-x_{k-1}-x_k}{(x_k-x_{k-2})(x_{k+1}-x_{k-2})}\leqslant 6\,\omega(2\beta_k,f'),$$

а значит,

$$|c_k(2x-x_{k-1}-x_k)|\leqslant 12\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.16}$$

Оценим третье слагаемое при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$:

$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1}|\frac{(x_{k-2}-u_k)(x_{k-1}-u_k)(x_k-u_k)(x_{k+1}-u_k)}{(x_{k-2}-u_k)^2}$$
$$\leqslant\left(|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{x_k-u_k}{x_k-x_{k-2}}+|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{x_k-u_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right)A.$$

Здесь

$$A=\frac{x_{k-1}-u_k}{x_{k-2}-u_k}\,\frac{x_{k+1}-u_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}=\frac{x_{k-1}-x_{k-2}+g_k}{g_k}\,\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}<4,$$
$$\frac{x_k-u_k}{x_k-x_{k-2}}=\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{x_k-x_{k-2}}<2,$$
$$\frac{x_k-u_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{(x_{k+1}-x_k)+(x_k-x_{k-1})}<\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{(x_{k-1}-x_{k-2})+(x_k-x_{k-1})}<2.$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем

$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant 16\,\omega(2\beta_k,f')\leqslant 32\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.17}$$

Из (1.13)–(1.17) при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ в случае $h_{k-1}<h_{k+1}$ получим требуемое неравенство (1.9).

Рассмотрим теперь другой возможный случай для двух отрезков $[x_{k-2},x_{k-1}]$ и $[x_k,x_{k+1}]$, соседних с $[x_{k-1},x_k]$ при данном k ($k=2,3,\dots,N-1$), а именно, пусть $h_{k+1}\leqslant h_{k-1}$.

В этом случае положим $g_k=\max\{h_k,h_{k+1}\}$, $u_k=x_{k+1}+g_k$ и возьмем рациональную функцию (1.1), но для коэффициентов c_k и b_k возьмем их выражения по формулам (1.3). В правую часть (1.14) подставим значения b_k, c_k и значение A_k из (1.2) и оценим, как и выше, отдельно ее слагаемые при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$.

Оценим первое слагаемое:

$$|b_k-f'(x)|=\left|f(x_{k-2},x_k)-f'(x)+c_k(x_{k-1}-x_{k-2})-\frac{A_k}{(x_{k-2}-u_k)(x_k-u_k)}\right|$$
$$\leqslant |f(x_{k-2},x_k)-f'(x)|+|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k)|(x_{k-1}-x_{k-2})$$
$$+\,|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|(u_k-x_{k-2})(u_k-x_{k+1}).$$

Далее по аналогии с вышеприведенным случаем получим

$$|b_k-f'(x)|\leqslant 13\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.18}$$

Оценим второе слагаемое при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ в случае $x_{k+1}-x_k\leqslant x_{k-1}-x_{k-2}$:

$$|c_k(2x-x_{k-1}-x_{k-2})|\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1},x_k)(2x-x_{k-1}-x_k)|$$

$$+|f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})(x_{k+1}-u_k)(2x-x_{k-1}-x_k)|$$

$$\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_k-x_{k-2}}$$

$$+\left(|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{u_k-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}+|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{u_k-x_{k+1}}{x_k-x_{k-2}}\right)$$

$$\times\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-2}}\leqslant 2\omega(2\beta_k,f')+(\omega(2\beta_k,f')+2\omega(2\beta_k,f'));$$

неравенства

$$\frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_k-x_{k-2}}\leqslant 2,\quad \frac{|2x-x_{k-1}-x_k|}{x_{k+1}-x_{k-2}}\leqslant 2$$

при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ получаются по аналогии с неравенствами при оценке (1.16). Значит, как и выше, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем

$$|c_k(2x-x_{k-1}-x_k)|\leqslant 12\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.19}$$

Для оценки третьего слагаемого при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ заметим, что

$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant |f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})|\frac{(u_k-x_{k-2})(u_k-x_{k-1})(u_k-x_k)}{u_k-x_{k+1}}$$

$$\leqslant\left(|f(x_{k-2},x_{k-1})-f(x_{k-1},x_k)|\frac{u_k-x_{k-1}}{x_k-x_{k-2}}+|f(x_{k-1},x_k)-f(x_k,x_{k+1})|\frac{u_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}\right)B;$$

здесь

$$B:=\frac{u_k-x_{k-2}}{x_{k+1}-x_{k-2}}\,\frac{u_k-x_k}{u_k-x_{k+1}}=\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}\,\frac{x_{k+1}-x_k+g_k}{g_k}\leqslant 4,$$

$$\frac{u_k-x_{k-1}}{x_k-x_{k-2}}=\frac{x_{k+1}-x_{k-1}+g_k}{x_k-x_{k-2}}\leqslant 2,\quad \frac{u_k-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}=\frac{x_{k+1}-x_{k-1}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-1}}\leqslant 2.$$

Значит, при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем

$$\frac{|A_k|}{(x-u_k)^2}\leqslant 16\,\omega(2\beta_k,f')\leqslant 32\,\omega(\beta_k,f'). \tag{1.20}$$

Из (1.14) и (1.18)–(1.20) при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ в случае $h_{k+1}\leqslant h_{k-1}$ также получим требуемое неравенство (1.9).

Докажем неравенство (1.10). Пусть $x\in[x_{j-1},x_j]$ для данного $j=k-1,k,k+1$, и через t обозначим один из двух концов x_{j-1} и x_j, ближний к точке x.

По построению рациональная функция $r_k(x)$ из (1.1) интерполирует функцию $f(x)$ в точке t, а значит, в силу $f\in C^{(1)}[a,b]$ между точками x и t найдется точка ξ такая, что

$$|r_k(x)-f(x)|=|r_k(x)-f(x)-r_k(t)+f(t)|=|r_k'(\xi)-f'(\xi)||x-t|\leqslant|r_k'(\xi)-f'(\xi)|\frac{1}{2}h_j.$$

Остается воспользоваться оценкой (1.9).

Лемма 1.2 доказана.

Доказательство леммы 1.3. Пусть функция $f\in C^{(2)}[a,b]$, дана сетка узлов Δ : $a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ $(N\geqslant 3)$, и пусть сначала для данного k $(k=2,3,\dots,N-1)$ выполняется неравенство $h_{k-1}<h_{k+1}$. Для этого случая, как и выше, положим $g_k=\max\{h_{k-1},h_k\}$, выберем точку $u_k=x_{k-2}-g_k$, рассмотрим рациональную функцию $r_k(x)$ из (1.1) с коэффициентами (1.2) и оценим при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ разность

$$r_k''(x)-f''(x)=2c_k-\frac{2A_k}{(x-u_k)^3}-f''(x)$$

$$= [2f(x_{k-1},x_k,x_{k+1}) - f''(x)] + 2f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})\varphi(x)$$

$$= [2f(x_{k-1},x_k,x_{k+1}) - f''(x)] + [2f(x_{k-1},x_k,x_{k+1}) - 2f(x_{k-2},x_{k-1},x_k)]\,\frac{\varphi(x)}{x_{k+1}-x_{k-2}},$$

где функция

$$\varphi(x) = (x_{k-2}-u_k) - \frac{(x_{k-2}-u_k)(x_{k-1}-u_k)(x_k-u_k)(x_{k+1}-u_k)}{(x-u_k)^3}$$

возрастает на отрезке $[x_{k-2},x_{k+1}]$, причем $\varphi(x_{k+1})>0$, $\varphi(x_{k-2})<0$.

Тогда с учетом неравенства $h_{k-1}<h_{k+1}$ имеем

$$\frac{\varphi(x_{k+1})}{x_{k+1}-x_{k-2}} < \frac{x_{k-2}-u_k}{x_{k+1}-x_{k-2}} = \frac{g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}} < 1,$$

$$\frac{|\varphi(x_{k-2})|}{x_{k+1}-x_{k-2}} < \frac{(x_{k-1}-u_k)(x_k-u_k)(x_{k+1}-u_k)}{(x_{k-2}-u_k)^2(x_{k+1}-x_{k-2})}$$

$$= \frac{x_{k-1}-x_{k-2}+g_k}{g_k}\,\frac{x_k-x_{k-2}+g_k}{g_k}\,\frac{x_{k+1}-x_{k-2}+g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}} < 2\cdot 3\cdot 2 = 12.$$

Возьмем теперь точки $\xi_1\in(x_{k-1},x_{k+1})$ и $\xi_2\in(x_{k-2},x_k)$ такие, что

$$2f(x_{k-1},x_k,x_{k+1}) = f''(\xi_1), \quad 2f(x_{k-2},x_{k-1},x_k) = f''(\xi_2).$$

Тогда при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ имеем $|r_k''(x)-f''(x)| \leqslant \omega(3\beta_k,f'') + 12\,\omega(3\beta_k,f'') \leqslant 39\,\omega(\beta_k,f'')$, и в случае $h_{k-1}<h_{k+1}$ требуемое неравенство (1.11) получено.

Рассмотрим теперь случай, когда для данного k ($k=2,3,\ldots,N-1$) имеем $h_{k+1}\leqslant h_{k-1}$. Положим $g_k=\max\{h_k,h_{k+1}\}$, выберем точку $u_k=x_{k+1}+g_k$, возьмем рациональную функцию $r_k(x)$ из (1.1) с выражениями коэффициентов c_k и b_k из (1.3) и коэффициентов a_k и A_k из (1.2). При $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ разность $r_k''(x)-f''(x)$ преобразуем следующим образом:

$$r_k''(x)-f''(x) = 2c_k - \frac{2A_k}{(x-u_k)^3} - f''(x)$$

$$= [2f(x_{k-2},x_{k-1},x_k) - f''(x)] + 2f(x_{k-2},x_{k-1},x_k,x_{k+1})\psi(x),$$

где функция

$$\psi(x) = -(u_k-x_{k+1}) + \frac{(u_k-x_{k-2})(u_k-x_{k-1})(u_k-x_k)(u_k-x_{k+1})}{(u_k-x)^3}$$

возрастает на отрезке $[x_{k-2},x_{k+1}]$, $\psi(x_{k+1})>0$, $\psi(x_{k-2})<0$.

Значит,

$$\frac{\psi(x_{k+1})}{x_{k+1}-x_{k-2}} < \frac{(u_k-x_{k-2})(u_k-x_{k-1})(u_k-x_k)}{(u_k-x_{k+1})^2(x_{k+1}-x_{k-2})}$$

$$= \Big(1+\frac{g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}}\Big)\Big(\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{g_k}+1\Big)\Big(\frac{x_{k+1}-x_k}{g_k}+1\Big) < 12;$$

$$\frac{|\psi(x_{k-2})|}{x_{k+1}-x_{k-2}} < \frac{u_k-x_{k+1}}{x_{k+1}-x_{k-2}} = \frac{g_k}{x_{k+1}-x_{k-2}} < 1.$$

Отсюда в случае $h_{k+1}\leqslant h_{k-1}$ при $x\in[x_{k-2},x_{k+1}]$ по аналогии с предыдущим случаем также получим требуемое неравенство (1.11).

Докажем неравенство (1.13). Раз $f\in C^{(2)}[a,b]$, разность $r_k-f\in C^{(2)}[x_{k-2},x_{k+1}]$ для данного k ($k=2,3,\ldots,N-1$). По построению $r_k(x)$ имеем $r_k(x_j)-f(x_j)=0$ при $j=$

$k-2, k-1, k, k+1$, а поэтому найдутся точки $\tau_1 \in (x_{k-2}, x_{k-1})$, $\tau_2 \in (x_{k-1}, x_k)$, $\tau_3 \in (x_k, x_{k+1})$ такие, что $r'_k(\tau_j) - f'(\tau_j) = 0$ $(j = 1, 2, 3)$.

В доказательстве леммы 1.2 показано, что для любой точки $x \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = k-1, k, k+1)$ найдется точка $\xi \in (x_{j-1}, x_j)$ такая, что

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} h_j |r'_k(\xi) - f'(\xi)|.$$

Обозначим через τ ту из трех точек τ_1, τ_2 и τ_3, которая вместе с точкой ξ принадлежит соответствующему (x_{j-1}, x_j) из интервалов (x_{k-2}, x_{k-1}), (x_{k-1}, x_k) и (x_k, x_{k+1}). Тогда найдется точка η между точками ξ и τ такая, что

$$|r_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} h_j |r'_k(\xi) - f'(\xi) - r'_k(\tau) + f'(\tau)| = \frac{1}{2} h_j |r''_k(\eta) - f''(\eta)||\xi - \tau| \leqslant \frac{1}{2} h_j^2 |r''_k(\eta) - f''(\eta)|.$$

Чтобы получить требуемое неравенство (1.13), остается применить оценку (1.11).

Для доказательства (1.12) также воспользуемся найденными выше точками τ_1, τ_2 и τ_3 и через τ_x обозначим ту из них, которая вместе с точкой x принадлежит данному отрезку $[x_{j-1}, x_j]$ $(j = k-1, k, k+1)$. Тогда между точками x и τ_x существует точка y такая, что

$$|r'_k(x) - f'(x)| = |r'_k(x) - f'(x) - r'_k(\tau_x) + f'(\tau_x)| = |r''_k(y) - f''(y)||x - \tau_x| \leqslant h_j |r''_k(y) - f''(y)|.$$

Отсюда и из (1.11) получим (1.12).

Лемма 1.3 доказана.

2. Рациональные сплайны по интерполянтам

Сначала функцию $f(x)$ будем считать непрерывной $(b-a)$-периодической. Сетку узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ продолжим также $(b-a)$-периодически и в соответствии с этим распространим определение приведенных выше рациональных интерполянтов $r_k(x)$ на узлы продолженной сетки.

Как показано в [8], случай функции $f(x)$, определенной лишь на самом отрезке $[a, b]$, рассматривается вполне аналогично и получаемые результаты также аналогичны периодическому случаю.

Для каждого k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ составим рациональную функцию

$$Q_k(x) = r_k(x) + (r_{k-1}(x) - r_k(x)) \frac{(x_k - x)^2}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})}$$
$$+ (r_{k+1}(x) - r_k(x)) \frac{(x - x_{k-1})^2}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})}, \tag{2.1}$$

непрерывную на $[x_{k-1}, x_k]$, причем $Q_k(x_j) = f(x_j)$ при $j = k-1, k$.

Рассмотрим непрерывную на отрезке $[a, b]$ кусочно-рациональную функцию $\rho_N(x) = \rho_N(x; f)$ $(N = 3, 4, \ldots)$ такую, что при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ выполняется равенство $\rho_N(x) = Q_k(x)$.

Следующие равенства при $k = 1, 2, \ldots, N-1$ можно проверить, непосредственно вычисляя производные $Q'_k(x)$ и $Q''_k(x)$:

$$\begin{gathered} \rho'_N(x_k - 0) = Q'_k(x_k) = Q'_{k+1}(x_k) = \rho'_N(x_k + 0), \\ \rho'_N(x_k) = r'_k(x_k) \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} + r'_{k+1}(x_k) \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}; \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \rho''_N(x_k - 0) = Q''_k(x_k) = Q''_{k+1}(x_k) = \rho''_N(x_k + 0), \\ \rho''_N(x_k) = r''_k(x_k) \frac{h_{k+1}}{h_k + h_{k+1}} + r''_{k+1}(x_k) \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}} + (r'_{k+1}(x_k) - r'_k(x_k)) \frac{4}{h_k + h_{k+1}}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Следовательно, $\rho_N(x)$ $(N \geqslant 3)$ представляет собой дважды непрерывно дифференцируемую на отрезке $[a,b]$ функцию с $\rho_N(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0,1,\ldots,N)$ такую, что на частичном отрезке $[x_{k-1},x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,N)$ она совпадает с рациональной функцией $Q_k(x)$.

Исследуя аппроксимативные свойства рациональных сплайнов $\rho_N(x) = \rho_N(x;f)$, в приводимых ниже теоремах 2.1–2.3 будем предполагать, что на отрезке $[a,b]$ задана произвольная сетка узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 3)$, продолженная $(b-a)$-периодически.

Следующее утверждение в принятых выше обозначениях дает оценку скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам $r_k(x)$ в случае непрерывной функции.

Теорема 2.1. *Для непрерывной $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x) = \rho_N(x;f)$ $(N \geqslant 3)$ при $x \in [a,b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant 38 \sup\Big\{\frac{\beta_k}{\alpha_k}\omega(\beta_k,f) : k = 2,3,\ldots,N-1\Big\};$$

в частности,

$$|f(x) - \rho_N(x)| \leqslant 38\,\frac{\|\Delta\|}{\alpha}\,\omega(\|\Delta\|,f),$$

где $\alpha = \min\{h_k : k = 1,2,\ldots,N\}$.

Доказательство. Пусть $x \in [x_{k-1},x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,N)$. Тогда $\rho_N(x) = Q_k(x)$, и рациональную функцию $Q_k(x)$ можно представить в виде

$$Q_k(x) = P_{k+1}(x)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + P_k(x)\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}},$$

где при $j = 1,2,\ldots,N$ обозначено

$$P_j(x) = r_j(x)\frac{x - x_{j-2}}{x_j - x_{j-2}} + r_{j-1}(x)\frac{x_j - x}{x_j - x_{j-2}}.$$

Тогда

$$Q_k(x) - f(x) = [P_{k+1}(x) - f(x)]\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + [P_k(x) - f(x)]\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}},$$

$$P_{k+1}(x) - f(x) = [r_{k+1}(x) - f(x)]\frac{x - x_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} + [r_k(x) - f(x)]\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_{k-1}},$$

$$P_k(x) - f(x) = [r_k(x) - f(x)]\frac{x - x_{k-2}}{x_k - x_{k-2}} + [r_{k-1}(x) - f(x)]\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-2}}.$$

Для завершения доказательства теоремы 2.1 остается, используя лемму 1.1, оценить правые части двух последних равенств и использовать эти оценки в равенстве для $Q_k(x) - f(x)$.

Теорема 2.1 доказана.

В целях исследования аппроксимативных свойств рациональных сплайнов $\rho_N(x) = \rho_N(x;f)$ для дифференцируемых функций $f(x)$ наряду с равенством (2.1) для рациональной дроби $Q_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots,N)$ рассмотрим другое представление через неотрицательные функции

$$\varphi_1(x) = \frac{(x_k - x)^2}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})},\ \varphi_2(x) = \frac{(x - x_{k-2})(x_k - x)}{(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k-1})} + \frac{(x_{k+1} - x)(x - x_{k-1})}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{(x - x_{k-1})^2}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})},$$

для которых, как легко проверить, выполняется тождество

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) \equiv 1. \tag{2.4}$$

А именно, при $x \in [x_{k-1},x_k]$ равенство (2.1) преобразуется к виду

$$Q_k(x) = r_{k-1}(x)\varphi_1(x) + r_k(x)\varphi_2(x) + r_{k+1}(x)\varphi_3(x). \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Для непрерывно дифференцируемой $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x)=\rho_N(x;f)$ $(N\geqslant 3)$ при $x\in[a,b]$ выполняются неравенства*

$$|f(x)-\rho_N(x)|\leqslant \frac{57}{2}\,\|\Delta\|\omega(\|\Delta\|,f'), \tag{2.6}$$

$$|f'(x)-\rho_N'(x)|\leqslant 285\,\omega(\|\Delta\|,f'). \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,N)$. Тогда $\rho_N(x)=Q_k(x)$, поэтому из (2.4) и (2.5) получим

$$\rho_N(x)-f(x)=(r_{k-1}(x)-f(x))\varphi_1(x)+(r_k(x)-f(x))\varphi_2(x)+(r_{k+1}(x)-f(x))\varphi_3(x). \tag{2.8}$$

Для получения (2.6) остается применить лемму 1.2.

Чтобы установить (2.7), используя представления $Q_k(x)$ в виде (2.1) и (2.5), при $x\in[x_{k-1},x_k]$ получим

$$Q_k'(x)=r_{k-1}'(x)\varphi_1(x)+r_k'(x)\varphi_2(x)+r_{k+1}'(x)\varphi_3(x)$$
$$+(r_{k-1}(x)-r_k(x))\varphi_1'(x)+(r_{k+1}(x)-r_k(x))\varphi_3'(x).$$

Значит, при $x\in[x_{k-1},x_k]$ по лемме 1.2 имеем

$$|\rho_N'(x)-f'(x)|\leqslant|r_{k-1}'(x)-f'(x)|\varphi_1(x)+|r_k'(x)-f'(x)|\varphi_2(x)+|r_{k+1}'(x)-f'(x)|\varphi_3(x)$$
$$+|r_{k-1}(x)-f(x)+f(x)-r_k(x)||\varphi_1'(x)|+|r_{k+1}(x)-f(x)+f(x)-r_k(x)||\varphi_3'(x)$$
$$\leqslant 57\,\omega(\|\Delta\|,f')+2\cdot\frac{57}{2}h_k\,\omega(\|\Delta\|,f')|\varphi_1'(x)|+57h_k\,\omega(\|\Delta\|,f')|\varphi_3'(x)|.$$

Так как при $x\in[x_{k-1},x_k]$, очевидно,

$$h_k|\varphi_1'(x)|=2\frac{x_k-x}{x_k-x_{k-2}}<2,\quad h_k|\varphi_3'(x)|=2\frac{x-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}}<2,$$

отсюда получим требуемое неравенство (2.7).

Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. *Для дважды непрерывно дифференцируемой $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ и рационального сплайна $\rho_N(x)=\rho_N(x;f)$ $(N\geqslant 3)$ при $x\in[a,b]$ выполняются неравенства*

$$|f(x)-\rho_N(x)|\leqslant\frac{39}{2}\,\|\Delta\|^2\omega(\|\Delta\|,f''), \tag{2.9}$$

$$|f'(x)-\rho_N'(x)|\leqslant 195\,\|\Delta\|\omega(\|\Delta\|,f''), \tag{2.10}$$

$$|f''(x)-\rho_N''(x)|\leqslant 429\,\omega(\|\Delta\|,f''). \tag{2.11}$$

Доказательство. Если $x\in[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\dots,N)$, то $\rho_N(x)=Q_k(x)$, а потому по равенству (2.8) и лемме 1.3 получим неравенство (2.9).

Оценку величины $|\rho_N'(x)-f'(x)|$ при $x\in[x_{k-1},x_k]$ проведем по аналогии с оценкой этой величины в доказательстве теоремы 2.2 и учтем неравенства $h_k|\varphi_1'(x)|<2$ и $h_k|\varphi_3'(x)|<2$ оттуда, но вместо леммы 1.2 применим лемму 1.3.

Тогда при $x\in[x_{k-1},x_k]$ получим

$$|\rho_N'(x)-f'(x)|\leqslant 39\,h_k\omega(\|\Delta\|,f'')+39\,h_k^2\omega(\|\Delta\|,f'')|\varphi_1'(x)|$$
$$+39\,h_k^2\omega(\|\Delta\|,f'')|\varphi_3'(x)|\leqslant 195\,h_k\omega(\|\Delta\|,f''),$$

а значит, выполняется (2.10).

Далее, используя равенства (2.1) и (2.5), при $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ получим

$$Q_k''(x) = r_{k-1}''(x)\varphi_1(x) + r_k''(x)\varphi_2(x) + r_{k+1}''(x)\varphi_3(x)$$
$$+ 2(r_{k-1}'(x) - r_k'(x))\varphi_1'(x) + 2(r_{k+1}'(x) - r_k'(x))\varphi_2'(x)$$
$$+ (r_{k-1}(x) - r_k(x))\varphi_1''(x) + (r_{k+1}(x) - r_k(x))\varphi_3''(x).$$

Тогда, используя лемму 1.3, имеем (при $x \in [x_{k-1}, x_k]$)

$$|\rho_N''(x) - f''(x)| \leqslant |r_{k-1}''(x) - f''(x)|\varphi_1(x) + |r_k''(x) - f''(x)|\varphi_2(x)$$
$$+ |r_{k+1}''(x) - f''(x)|\varphi_3(x) + 2|r_{k-1}'(x) - f'(x) + f'(x) - r_k'(x)||\varphi_1'(x)|$$
$$+ 2|r_{k+1}'(x) - f'(x) + f'(x) - r_k'(x)||\varphi_3'(x)| + |r_{k-1}(x) - f(x) + f(x) - r_k(x)||\varphi_1''(x)|$$
$$+ |r_{k+1}(x) - f(x) + f(x) - r_k(x)||\varphi_3''(x)| \leqslant 39\,\omega(\|\Delta\|, f'')$$
$$+ 4 \cdot 39\,\omega(\|\Delta\|, f'')h_k(|\varphi_1''(x)| + |\varphi_3'(x)|) + 39\,\omega(\|\Delta\|, f'')h_k^2(|\varphi''(x)| + |\varphi_3''(x)|) \leqslant 429\,\omega(\|\Delta\|, f''),$$

поскольку, как показано выше, $h_k|\varphi_1'(x)| < 2$ и $h_k|\varphi_3'(x)| < 2$, а также

$$h_k^2|\varphi_1''(x)| = \frac{2h_k}{x_k - x_{k-2}} < 2, \quad h_k^2|\varphi_3''(x)| = \frac{2h_k}{x_{k+1} - x_{k-1}} < 2.$$

Следовательно, справедливо неравенство (2.11).

Теорема 2.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
2. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Добавления к книге Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 317 с.
3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
5. **Edeo A., Gofe G., Tefera V.** Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12, no. 1. P. 110–122.
6. **Субботин Ю.Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.
7. **Привалов Ал.А.** О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции // Мат. заметки. 1979. Т. 25, вып. 5. С. 681–700.
8. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестан. электрон. мат. изв. 2015. Вып. 4. С. 22–31.
9. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Интерполяционные рациональные сплайны // Актуальные проблемы математики и смежные вопросы: материалы Междунар. науч. конф. / Дагестан. гос. техн. ун-т. Махачкала, 2016. С. 68–71.

Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

Поступила 30.05.2016

Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры математического анализа
Дагестанский государственный университет
e-mail: vazipat@rambler.ru

REFERENCES

1. Ahlberg J., Nilson E., Walsh J. *The theory of splines and their applications.* New York: Acad. Press, 1967, 284 p.
2. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Dobavleniya k knige J. Alberg, E. Wilson, J. Walsh. Teoriya splajnov i ee prilozheniya* (Adding to the book of J. Alberg, E. Wilson, J. Walsh. The theory of splines and their applications). Moscow: Mir Publ., 1972, 317 p. (in Russian).
3. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splajny v vychislitelnoj matematike* (Splines in computational mathematics). Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p. (in Russian).
4. Корнейчук Н.П. Korneichuk N.P. *Splajny v teorii priblizheniya* (Splines in approximation theory). Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p. (in Russian).
5. Edeo A., Gofe G., Tefera V. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences*, 2015, vol. 12, no. 1, pp. 110–122.
6. Subbotin Yu.N. Variations on a spline theme. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1043–1058 (in Russian).
7. Privalov Al.A. Convergence of cubic interpolation splines to a continuous function. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1979, vol. 25, iss. 5, pp. 349–359.
8. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines on rational interpolants. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, iss. 4, pp. 22–31 (in Russian).
9. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Rational interpolation splines. *Actual problems of mathematics and related topics. Proc. Int. Sci. Conf.* (*Dagestan. Gos. Tekhn. Univ., 2016*) Makhachkala, 2016, pp. 68–71 (in Russian).

A.-R.K. Ramazanov, Dr. Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367000 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru

V.G. Magomedova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367000 Russia, e-mail: vazipat@rambler.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518

КОНСТРУКТИВНЫЕ РАЗРЕЖЕННЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С НЕБОЛЬШОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ[1]

С. А. Стасюк

Получены точные по порядку оценки (в случае приближения в интегральной метрике) для наилучшего m-членного тригонометрического приближения периодических функций с небольшой смешанной гладкостью из классов, близких классам типа Никольского — Бесова. Полученные оценки (при тех же ограничениях на гладкость) отличаются по порядку от соответствующих оценок m-членного тригонометрического приближения классов Бесова смешанной гладкости, установленных А. С. Романюком. Верхняя оценка при этом реализуется конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.

Ключевые слова: нелинейное приближение, разреженное приближение, смешанная гладкость, порядковые оценки.

S. A. Stasyuk. Constructive sparse trigonometric approximations of function classes with small mixed smoothness.

Exact order bounds are obtained for the best m-term trigonometric approximation (in the integral metric) of periodic functions with small mixed smoothness from classes close to Nikol'skii–Besov type classes. The obtained bounds differ (under identical constraints on the smoothness) from the corresponding bounds of the best m-term trigonometric approximation of Besov classes of mixed smoothness established by A.S. Romanyuk. The upper bound is realized by a constructive method based on a greedy algorithm.

Keywords: nonlinear approximation, sparse approximation, mixed smoothness, order bounds.

MSC: 42A10, 42B10, 42B35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-247-253

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с получением точных по порядку оценок наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов функций, которые близки и тесно связаны (хотя и несколько шире в сравнении) с функциональными классами типа Никольского — Бесова смешанной гладкости, для некоторого "точечного" значения показателя гладкости ($r = 1/p$), которое называют *"критической" гладкостью.* Полученная порядковая оценка наилучшего m-членного тригонометрического приближения упомянутых классов является конструктивной, поскольку верхняя оценка реализуется конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме. Кроме того, установленные в работе оценки отличаются по порядку от полученных А. С. Романюком [1] точных по порядку оценок наилучшего m-членного тригонометрического приближения классов Бесова смешанной гладкости при тех же значениях соответствующих параметров. Отметим, что в работах [1–4] как рассматриваемые здесь классы, так и классы Бесова являются неразличимыми с точки зрения их наилучшего m-членного тригонометрического приближения, иными словами, в ранее рассмотренных в [2–4] ситуациях, как в случае большой гладкости, так и в случае малой гладкости порядковые оценки наилучшего m-членного тригонометрического приближения обоих классов совпадают (более детально об этом еще будет идти речь в комментариях к результатам в разд. 2).

[1]Работа выполнена при частичной поддержке FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p < \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, — пространство функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, 2π-периодических по каждой переменной и суммируемых в степени p на $\mathbb{T}^d$ с нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Для $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ пространство $MB^r_{p,\theta}$ определяется следующим образом (см. [5], случай $\theta = \infty$, и [6], случай $1 \le \theta < \infty$):

$$MB^r_{p,\theta} := \bigl\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} < \infty \bigr\}, \tag{1.1}$$

где

$$||f||_{MB^r_{p,\theta}} := \Bigl(\sum_{\mathbf{s}} \bigl(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \bigr)^{\theta} \Bigr)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.2}$$

$$||f||_{MB^r_{p,\infty}} := ||f||_{MH^r_p} := \sup_{\mathbf{s}} \frac{||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p}{2^{-r||\mathbf{s}||_1}}, \tag{1.3}$$

а $||\mathbf{s}||_1 := s_1 + \dots + s_d$, $\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := (f * \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})})(\mathbf{x})$, $\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})} := \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) := k_1 x_1 + \dots + k_d x_d$, $\rho(\mathbf{s}) := \bigl\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \colon [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, s_j \in \mathbb{Z}_+, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, d \bigr\}$ (символом “$*$” обозначена операция свертки двух функций, т. е. $(\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y})\, g(\mathbf{x} - \mathbf{y})\, d\mathbf{y}$ для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$).

Заметим, что при предельном значении параметра θ, т. е. при $\theta = \infty$, $MB^r_{p,\theta} \equiv MH^r_p$ — пространства С. М. Никольского смешанной гладкости, а при конечном значении параметра θ, т. е. при $1 \le \theta < \infty$, $MB^r_{p,\theta}$ — пространства О. В. Бесова смешанной гладкости.

Единичные шары пространств $MB^r_{p,\theta}$ будем обозначать $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ и называть их *классами*. С историей исследования классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ (с аппроксимативной точки зрения) можно ознакомиться, например, в монографии [7] и обзоре [8].

Наряду с пространствами $MB^r_{p,\theta}$ рассмотрим близкие к ним пространства $MH^r_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $r > 0$, которые определяются таким образом:

$$MH^r_{p,\theta} := \bigl\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} < \infty \bigr\}, \tag{1.4}$$

где

$$||f||_{MH^r_{p,\theta}} := \sup_j \Bigl(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \Bigl(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Bigr)^{\theta} \Bigr)^{1/\theta}. \tag{1.5}$$

При $\theta = \infty$ полагаем $MH^r_{p,\infty} \equiv MH^r_p$, а $||f||_{MH^r_{p,\infty}} := ||f||_{MH^r_p}$ (см. (1.3)).

Для определенных выше функциональных пространств, исходя из определений (1.1)–(1.5), выполняются вложения

$$MB^r_{p,\theta} \subset MH^r_{p,\theta} \subset MH^r_p, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.6}$$

$MH^r_{p,\theta_1} \subset MH^r_{p,\theta_2}$, $1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

Через $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ обозначим единичные шары пространств $MH^r_{p,\theta}$, которые будем называть *классами*.

Классы $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ введены В. Н. Темляковым [2]. Вопросы, связанные с нахождением порядковых оценок нелинейного приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, изучались в [2–4; 8; 9] (для наилучшего m-членного приближения по тригонометрической системе) и в [10] (для наилучшего m-членного приближения по тензорной системе Хаара).

Пусть Θ_m — произвольный набор из m точек с целочисловой решетки $\mathbb{Z}^d$. Для

$$P(\Theta_m, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m} c_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{n_k}, \mathbf{x})}, \quad c_{\mathbf{k}} \in \mathbb{C},$$

и $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим величину

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\Theta_m} \inf_{P(\Theta_m,\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_m,\cdot)||_q, \tag{1.7}$$

которая называется *наилучшим m-членным тригонометрическим приближением* (*наилучшим m-членным приближением по тригонометрической системе*) *функции f в метрике пространства* $L_q(\mathbb{T}^d)$ и является одним из видов разреженного тригонометрического приближения.

Для функционального класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ положим

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f\in F} \sigma_m(f)_q. \tag{1.8}$$

Детальнее с историей исследования величин (1.7) и (1.8) можно ознакомиться, например, из монографии [7], обзора [8] и работ [2; 11].

Заметим, что для двух положительных величин A и B запись $A \asymp B$ означает, что существует положительная величина C такая, что $C^{-1}A \le B \le CA$. В случае $B \ge C^{-1}A$ или $B \le CA$ будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Для величин C_j, $j \in \mathbb{N}$, которые будут встречаться в работе явным или неявным образом, существенным является то, что они не зависят от одного обозначенного контекстом параметра.

В завершение этого раздела приведем определение еще одного функционального класса.

Для $f \in L_1$ положим

$$f_j := \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \delta_{\mathbf{s}}(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

и рассмотрим класс функций

$$\mathbf{MW}_p^{r,b} := \{f\colon ||f||_{MW_p^{r,b}} \le 1\},$$

где

$$||f||_{MW_p^{r,b}} := \sup_j ||f_j||_p \cdot 2^{rj}(\bar{j})^{-(d-1)b}, \tag{1.9}$$

$$MW_p^{r,b} := \{f \in L_p(\mathbb{T}^d)\colon ||f||_{MW_p^{r,b}} < \infty\},$$

а $r > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\bar{j} := \max\{1; j\}$.

Для $r > 0$, $1 < p \le 2$, $p \le \theta \le \infty$ имеет место вложение

$$MH_{p,\theta}^r \subset MW_p^{r,1/p-1/\theta}, \tag{1.10}$$

доказательство которого содержится в завершающем разделе и предваряет доказательство основного результата, базирующегося на использовании (1.10) и теоремы А.

Для классов $\mathbf{MW}_p^{r,b}$ В. Н. Темляковым [3] установлено следующее утверждение.

Теорема А [3, Theorem 3.5]. *Пусть $1 < p \le 2 < q < \infty$ и $r = 1/p$. Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MW}_p^{r,b})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(b+1-1/p)+1}.$$

Оценка сверху обеспечивается конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.

2. Основные результаты и комментарии к ним

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $p \le \theta \le \infty$ *и* $r = 1/p$. *Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}. \tag{2.1}$$

Оценка сверху обеспечивается конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.

В завершение сформулированного результата приведем некоторые комментарии.

З а м е ч а н и е 1. Точные по порядку оценки величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ при $1 < p \le 2 < q < \infty$ установлены в [2–4]. А именно, в [2] рассмотрен случай $r > 1/p$, $1 \le \theta \le \infty$, в [3] — $1/p - 1/q < r < 1/p$, $\theta = \infty$, а в [4] — $\max\{1/p - 1/q; 1/p - q'/(q\theta')\} < r < 1/p$, $1 < \theta < \infty$ и $1/p - 1/q < r < 1/p$, $1 \le \theta < q$, где $a\colon 1/a + 1/a' = 1$. Поэтому данная теорема дополняет результаты работ [2–4] (см. также [8]), касающиеся точных по порядку оценок величин $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, которые совпадают по порядку с оценками величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, установленными А. С. Романюком [1]. В упомянутых работах [2; 3] оценки сверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ обеспечиваются конструктивными методами, основанными на жадных алгоритмах.

З а м е ч а н и е 2. Еще одной отличительной особенностью результата теоремы 1 в сравнении с результатами работ [2–4] является то, что точные по порядку оценки $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ хуже (за исключением лишь случая, когда $\theta = \infty$, т. е. $\mathbf{MH}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MB}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p$), чем $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (см. [1, теорема 2.1]), а именно, при условиях теоремы 1 имеет место оценка

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{1/\theta}\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

З а м е ч а н и е 3. По-видимому, впервые различие в точных по порядку оценках величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (см. [1, теорема 3.1]) и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ (см. [9, теорема 6.1]) обнаружено Д. Б. Базархановым [9], в частности, при рассмотрении им случая $1 < p \le q \le 2$, $1 \le \theta < q$, $r = 1/p - 2/q + 1/\theta$ имеем

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log\log m)^{1/\theta}\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

3. Доказательство результатов

3.1. Доказательство вложения $MH^r_{p,\theta} \subset MW^{r,1/p-1/\theta}_p$ при $r > 0$, $1 < p \le 2$, $p \le \theta \le \infty$

Рассмотрим последовательно случаи $\theta = p$, $\theta = \infty$, $p < \theta < \infty$.

При $\theta = p$ согласно (1.9), следствию к теореме Литтлвуда — Пэли, которое выражается соотношением

$$\Big\| \sum_{\mathbf{s}} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \ll \Big(\sum_{\mathbf{s}} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p^p \Big)^{1/p}, \quad 1 < p \le 2, \tag{3.1}$$

и (1.5) имеем

$$||f||_{MW^{r,0}_p} = \sup_j \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \cdot 2^{rj} \ll \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1 = j} \big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p\big)^p \Big)^{1/p} = ||f||_{MH^r_{p,p}}, \tag{3.2}$$

откуда видим, что $MH^r_{p,p} \subset MW^{r,0}_p$.

Вследствие (1.9), (3.1), (1.5) и
$$\sum_{||s||_1=j} 1 \asymp j^{\,d-1} \tag{3.3}$$
при $\theta=\infty$ получаем
$$||f||_{MW_p^{r,1/p}} = \sup_j \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)/p} \ll \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \big)^p \Big)^{1/p} \cdot (\bar{j})^{-(d-1)/p}$$
$$\le \sup_{j:||\mathbf{s}||_1=j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big) \cdot \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1 \Big)^{1/p} (\bar{j})^{-(d-1)/p} \ll ||f||_{MH_p^r}, \tag{3.4}$$
откуда делаем вывод о том, что $MH_p^r \equiv MH_{p,\infty}^r \subset MW_p^{r,1/p}$.

Для $p<\theta<\infty$, учитывая (1.9), (3.1), неравенство Гельдера, а также (3.3), (1.5), выводим
$$||f||_{MW_p^{r,1/p-1/\theta}} = \sup_j \Big\| \sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)(1/p-1/\theta)}$$
$$\ll \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big)^p \Big)^{1/p} \cdot (\bar{j})^{-(d-1)(1/p-1/\theta)}$$
$$\le \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \Big(2^{r||\mathbf{s}||_1} ||\delta_{\mathbf{s}}(f)||_p \Big)^\theta \Big)^{1/\theta} \cdot \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1 \Big)^{1/p-1/\theta} (\bar{j})^{-(d-1)(1/p-1/\theta)} \ll ||f||_{MH_{p,\theta}^r}, \tag{3.5}$$
что указывает на справедливость вложения (1.10) для $p<\theta<\infty$.

Ввиду (3.2), (3.4), (3.5) делаем вывод о том, что вложение (1.10) доказано.

3.2. Доказательство теоремы 1

Доказательство теоремы 1 в части, прежде всего, установления для (2.1) *оценки сверху* базируется на использовании доказанного выше вложения (1.10) и теоремы A.

Теперь перейдем к установлению в (2.1) *оценки снизу*. Для заданного m выберем N и n из соотношений
$$2^N \asymp m^{q/2} (\log m)^{(d-1)(1-q)} \tag{3.6}$$
и
$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{3.7}$$
соответственно.

Рассмотрим функцию $g(x) := C_1 N^{-(d-1)/\theta} \sum\limits_{n<j\le N} 2^{-j} \sum\limits_{||\mathbf{s}||_1=j} \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}(\mathbf{x})$. Покажем, что $g \in \mathbf{MH}_{p,\theta}^r$ для $1\le\theta\le\infty$.

Поскольку
$$||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p \asymp 2^{||s||_1(1-1/p)}, \quad 1<p<\infty, \tag{3.8}$$
то, согласно (3.3), для $1\le\theta<\infty$ имеем
$$||g||_{MH_{p,\theta}^{1/p}} = \sup_j \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \big(2^{||\mathbf{s}||_1/p} ||\delta_{\mathbf{s}}(g)||_p \big)^\theta \Big)^{1/\theta}$$
$$= C_1 N^{-(d-1)/\theta} \sup_{j:\, n<j\le N} \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} \big(2^{-||\mathbf{s}||_1(1-1/p)} ||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p \big)^\theta \Big)^{1/\theta}$$
$$\asymp N^{-(d-1)/\theta} \sup_{j:\, n<j\le N} \Big(\sum_{||\mathbf{s}||_1=j} 1 \Big)^{1/\theta} \asymp N^{-(d-1)/\theta} \sup_{j:\, n<j\le N} j^{(d-1)/\theta} = 1.$$

Если же $\theta=\infty$, то, принимая во внимание (3.8), получаем

$$||g||_{MH_p^{1/p}} \ll \sup_{\mathbf{s}:\, n<||\mathbf{s}||_1\le N} 2^{-||\mathbf{s}||_1(1-1/p)}||\mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})}||_p \asymp 1.$$

Далее, возьмем произвольное множество K_m, состоящее из m гармоник $\mathbf{k}$. Рассмотрим дополнительную функцию $h(\mathbf{x}) := \sum\limits_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}$, где

$$\Delta(n,N) := \bigcup_{\mathbf{s}:\, n<||\mathbf{s}||_1\le N} \rho(\mathbf{s}). \tag{3.9}$$

Для произвольного тригонометрического полинома t с гармониками из K_m, с одной стороны, имеем

$$\langle g-t,h\rangle \le ||g-t||_q\cdot||h||_{q'}. \tag{3.10}$$

Но в то же время, с другой стороны,

$$\langle g-t,h\rangle = \langle g,h\rangle = \sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}). \tag{3.11}$$

Принимая во внимание (3.6), (3.7), (3.9), имеем

$$\sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}) \gg (N-n)N^{(d-1)(1-1/\theta)}. \tag{3.12}$$

Далее, учитывая (3.6), (3.7), (3.9), получаем

$$||h||_{q'} \le \Big\|\sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\Big\|_{q'} + \Big\|\sum_{\mathbf{k}\in\Delta(n,N)\cap K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\Big\|_{q'}$$

$$\ll 2^{N(1-1/q')}N^{(d-1)/q'} + \Big\|\sum_{\mathbf{k}\in K_m} e^{i(\mathbf{k},\mathbf{x})}\Big\|_2 \ll 2^{N/q}N^{(d-1)/q'} + m^{1/2} \asymp m^{1/2}. \tag{3.13}$$

Исходя из (3.10)–(3.13), (3.6), (3.7), получаем

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^{1/p}_{p,\theta})_q \ge \sigma_m(g)_q \gg (N-n)N^{(d-1)(1-1/\theta)}m^{-1/2} \asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1-1/\theta)+1}.$$

Нижняя оценка в (2.1) установлена.

Теорема 1 доказана.

В завершение автор выражает искреннюю признательность рецензенту за сделанные им замечания, способствовавшие улучшению изложения материала. Результаты данной работы были получены во время пребывания в Centre de Recerca Matemàtica (г. Барселона, Испания) в рамках научно-исследовательской программы по конструктивной теории приближений и гармоническому анализу. Также автор выражает огромную благодарность проф. В. Н. Темлякову за обсуждение изложенных здесь результатов во время научно-исследовательской программы по конструктивной теории приближений и гармоническому анализу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романюк А.С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.
2. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160.

3. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness [e-resource]. 2015. URL: https://arxiv.org/pdf/1503.00282v1.pdf. 30 p.
4. **Стасюк С.А.** Найкраще m-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського–Бєсова // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 7. С. 983–1003.
5. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 3–113.
6. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
7. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Інституту математики НАН України. Київ, 2012. Vol. 92. 353 с.
8. **D. Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation [e-resource]. 2016. URL: https://arxiv.org/pdf/1601.03978v1.pdf. 154 p.
9. **Базарханов Д.Б.** Нелинейные тригонометрические пиближения классов функций многих переменных // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 8–42.
10. **Стасюк С.А.** Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 251–260.
11. **Stasyuk S.A.** Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 177. P. 1–16.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 24.08.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Romanyuk A.S. Best M-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 265–302.
2. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Math. Sb.* 2015, vol. 206, no. 11, pp. 1628–1656.
3. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *arXiv.org*, 2015, available at: URL: https://arxiv.org/pdf/1503.00282v1.pdf, 30 p.
4. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximations of periodic functions with low mixed smoothness from the classes of Nikol'skii–Besov type. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 2016, vol. 68, no. 7, pp. 983–1003 (in Ukrainian).
5. Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
6. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
7. Romanyuk A.S. The approximation characteristics of classes of periodic functions of many variables. *Proc. Inst. Math. NASU.* Kiev, 2012, vol. 92 (in Russian).
8. Dũng D., Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation. *arXiv.org*, 2016, available at: https://arxiv.org/pdf/1601.03978v1.pdf., 154 p.
9. Bazarkhanov D.B. Nonlinear trigonometric approximations of multivariate function classes. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 2–36.
10. Stasyuk S.A. Approximation of certain smoothness classes of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 251–260 (in Russian).
11. Stasyuk S.A. Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness. *J. Approx. Theory.*, 2014, vol. 177, pp. 1–16.

S. A. Stasyuk, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 01601, Ukraine, e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.518.834

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВИЗНЫ ГЛАДКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ[1]

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Получена оценка погрешности аппроксимации кривизны графиков функций класса W^r при $r \geqslant 3$ в равномерной метрике.

Ключевые слова: приближение кривизны, плоские кривые.

Yu. N. Subbotin, S. A. Telyakovskii. Uniform approximation of curvature of smooth planar curves.

We estimate the error of curvature approximation for graphs of functions from the class W^r for $r \geqslant 3$ in the uniform metric.

Keywords: curvature approximation, planar curves.

MSC: 42A10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-254-256

В работе [1] изучалась аппроксимация кривизны гладких плоских кривых в среднеквадратической метрике L_2. Настоящая работа посвящена подобным вопросам о приближении в равномерной метрике.

Будем рассматривать кривые, являющиеся графиками 2π-периодических функций f класса W^r, $r \geqslant 3$, т. е. когда для f при всех x и y выполняется оценка

$$|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)| \leqslant |x-y|.$$

В [1] для приближения кривизны графика функции f

$$K(f,x) = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} \tag{1}$$

использовались частные суммы ряда Фурье функции f (использовались также сплайны), которые осуществляют наилучшее приближение в L_2.

В настоящей работе для построения приближающих агрегатов производные f'' и f' в формуле (1) заменяются средними Фавара их рядов Фурье (см., например, [2, § 4.1, п. 3]). Именно если средние Фавара порядка n функции $g(x)$ обозначить $u_n(g,x)$, то приближать кривизну (1) будем функцией

$$U(f,x) := \frac{u_n(f'',x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}. \tag{2}$$

Будет показано, что функции $U(f,x)$ хорошо приближают кривизну $K(f,x)$.

Будем пользоваться тем, что для функций $f(x) \in W^r$ при $r \geqslant 3$ справедливы оценки

$$\left|f''(x) - u_n(f'',x)\right| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-2}}{n^{r-2}}, \tag{3}$$

$$\left|f'(x) - u_n(f',x)\right| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-1}}{n^{r-1}}, \tag{4}$$

[1]Первым автором работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00496).

где $\widetilde{K}_r = \dfrac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(r+1)s}}{(2s+1)^{r+1}}$ — константы Фавара.

Запишем неравенство

$$|K(f,x)-U(f,x)| = \Big|\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} - \frac{u_n(f'',x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}\Big|$$

$$\leqslant \Big|\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}} - \frac{f''(x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}\Big| + \Big|\frac{f''(x)-u_n(f'',x)}{[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}}\Big|$$

$$\leqslant |f''(x)-u_n(f'',x)| + |f''(x)|\frac{|[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}-[1+(f'(x))^2]^{3/2}|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}[1+(u_n(f',x))^2]^{3/2}} \tag{5}$$

и оценим множитель при $|f''(x)|$ во втором слагаемом из правой части (5).

Для сокращения записи введем обозначения $u := f'(x)$ и $v := u_n(f',x)$. Тогда рассматриваемый множитель при $|f''(x)|$ запишется так

$$\frac{|(1+v^2)^{3/2}-(1+u^2)^{3/2}|}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}} = \frac{|(1+v^2)^3-(1+u^2)^3|}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}[(1+v^2)^{3/2}+(1+u^2)^{3/2}]}$$

$$= |v-u|\frac{|u+v|[(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2]}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}[(1+v^2)^{3/2}+(1+u^2)^{3/2}]}. \tag{6}$$

Лемма. *Максимальное при $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ значение функции*

$$J(u,v) := \frac{(u+v)[(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2]}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}[(1+v^2)^{3/2}+(1+u^2)^{3/2}]}$$

не превосходит

$$\frac{9\sqrt{3}}{16} = 0,974\ldots.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$J(u,v) = \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}\,\frac{(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2}+(1+v^2)^2(1+u^2)^{1/2}}$$

$$\leqslant \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}\,\frac{(1+v^2)^2+(1+v^2)(1+u^2)+(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2+(1+v^2)^2}$$

$$= \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}\Big[1+\frac{(1+v^2)(1+u^2)}{(1+u^2)^2+(1+v^2)^2}\Big]$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\,\frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

Для завершения доказательства леммы найдем максимальное значение дроби

$$\frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)}. \tag{7}$$

В стационарных точках этой дроби выполняются равенства

$$\frac{1-u^2-2uv}{(1+u^2)^2(1+v^2)} = 0, \qquad \frac{1-v^2-2uv}{(1+u^2)(1+v^2)^2} = 0.$$

Отсюда следует, что максимальное значение дробь (7) имеет при $u = v = 1/\sqrt{3}$, и лемма доказана.

Таким образом, из (5) и (6) с помощью оценок (3) и (4) получаем

$$|K(f,x) - U(f,x)| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-2}}{n^{r-2}} + \frac{9\sqrt{3}}{16}|f''(x)|\frac{\widetilde{K}_{r-1}}{n^{r-1}}.$$

Пользуясь тем, что для функций $f \in W^r$ справедлива оценка (см. [3, п. 88])

$$|f''(x)| \leqslant \widetilde{K}_{r-2},$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Для приближения кривизны функций $f \in W^r$, $r \geqslant 3$, справедлива оценка*

$$|K(f,x) - U(f,x)| \leqslant \frac{\widetilde{K}_{r-2}}{n^{r-2}}\Big(1 + \frac{9\sqrt{3}}{16\,n}\widetilde{K}_{r-1}\Big).$$

Отметим, что общая размерность подпространств, используемых при построении функций $U(f,x)$, равна $2n-2$, так как тригонометрические полиномы u_n в оценках (3) и (4) имеют порядок $n-1$ и как средние Фавара производных они не имеют свободных членов.

Оценки вида (3) и (4) справедливы также при приближении функций класса W^r, $r \geqslant 3$, сплайнами степени $r-2$ и $r-1$ соответственно с шагом π/n, но, если строить функции вида (2) с помощью таких сплайнов, общая размерность используемых подпространств будет равна $4n+1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
2. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
3. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во тех.-теорет. лит-ры, 1947. 323 с.

Поступила 10.10.2016

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Теляковский Сергей Александрович д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyAltel@yandex.ru

REFERENCES

1. Subbotin Yu.N. Curvature approximation for smooth classes of plane curves by elements of finite-dimensional subspaces. *Izv. Tul'sk. Gos. Univ. Ser. Estestv. Nauki.*, 2012, no. 3, pp. 41–47 (in Russian).
2. Korneichuk N.P. *Tochnye konstanty v teorii priblizheniya* (Exact constants in approximation theory). Cambridge: Cambridge University Press, 1991, Ser. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 38, 452 p.
3. Achieser N.I. Theory of approximation, Reprint of the 1956, New York: Dover Publ., Inc., 1992, 307 p.

Yu. N. Subbotin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

S. A. Telyakovskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia, e-mail: sergeyAltel@yandex.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ВСПЛЕСКИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе предложен и обоснован простой численный метод приближенного решения с любой заданной точностью краевой задачи Дирихле в круге для однородного уравнения с оператором Лапласа. Известно много численных методов решения этой задачи, начиная с приближенного вычисления интеграла Пуассона, точно представляющего решение внутри круга через заданные граничные значения искомых функций. Здесь же эксплуатируется идея аппроксимации 2π-периодической задаваемой граничной функции тригонометрическими полиномами, поскольку они очень просто продолжаются до гармонических полиномов внутрь круга, отклоняясь от искомой гармонической функции не далее, чем на погрешность аппроксимации граничной функции. При этом построение аппроксимирующих тригонометрических полиномов осуществляется с помощью интерполяционной проекции на подпространства кратномасштабного анализа (приближения) с базисными 2π-периодическими масштабирующими функциями (точнее, их двоично-рациональными сжатиями и сдвигами), построенными авторами ранее на основе всплесков типа Мейера, являющимися огтогональными и одновременно интерполяционными на равномерных сетках соответствующего масштаба, или только интерполяционными. Оценки в скорости аппроксимации решения краевой задачи основаны на свойстве всплесков Мейера сохранять тригонометрические полиномы определенных (больших) порядков, уже используемом для других целей в первых двух работах из списка литературы. Поскольку для практического применения метода очень важна численная оценка погрешности аппроксимации, значительная часть работы посвящена этой проблеме, точнее явному вычислению констант в известных ранее порядковых оценках погрешности.

Ключевые слова: всплески, интерполяционные всплески, гармонические функции, задача Дирихле.

Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Interpolation wavelets in boundary value problems.

We propose and validate a simple numerical method that finds an approximate solution with any given accuracy to the Dirichlet boundary value problem in a disk for a homogeneous equation with the Laplace operator. There are many known numerical methods that solve this problem, starting with the approximate calculation of the Poisson integral, which gives an exact representation of the solution inside the disk in terms of the boundary values of the required functions. We employ the idea of approximating a given 2π-periodic boundary function by trigonometric polynomials, since it is easy to extend them to harmonic polynomials inside the disk so that the deviation from the required harmonic function does not exceed the error of approximation of the boundary function. The approximating trigonometric polynomials are constructed by means of an interpolation projection to subspaces of a multiresolution analysis (approximation) with basis 2π-periodic scaling functions (more exactly, their binary rational compressions and shifts). Such functions were constructed by the authors earlier on the basis of Meyer-type wavelets; they are either orthogonal and at the same time interpolational on uniform grids of the corresponding scale or only interpolational. The bounds for the rate of approximation of the solution to the boundary value problem are based on the property of Meyer wavelets to preserve trigonometric polynomials of certain (large) orders; this property was used for other purposes in the first two papers from the list of references. Since a numerical bound of the approximation error is very important for the practical application of the method, a considerable portion of the paper is devoted to this issue, more exactly, to the explicit calculation of the constants in the order bounds of the error known earlier.

Keywords: wavelets, interpolation wavelets, harmonic function, Dirichlet problem.

MSC: 65T60, 31A05, 35G15, 35J47, 35J91, 65N15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-257-268

Введение

Вещественные ортогональные 2π-периодические всплески из [1; 2], продолженные с границы круга и кольца до гармонических функций внутрь этих областей, в [3–5] применены для

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

представления и анализа решений в таких областях краевых задач типа Дирихле, Неймана и Пуассона для гармонических и бигармонических функций. Полученные формулы удобны и для приближенного численного решения этих задач, поскольку соответствующие ряды сходятся равномерно в замыкании области, а их частичные суммы порядка N представляются через конечные разложения по базисным функциям выбранного масштаба и являются гармоническими полиномами, аппроксимирующими решения со скоростью наилучшего (в чебышевском смысле) приближения полиномами порядка не менее $N/3$. При этом, конечно, нужно вычислять коэффициенты частных сумм как интегралы по периоду от произведения граничных значений самих функций или их радиальных производных на соответствующие базисные функции. Это можно делать с помощью подходящих квадратурных формул или, используя значения граничных функций на достаточно плотной сетке в качестве начальных данных для дискретного всплеск-преобразования, вернуться по обычной схеме к коэффициентам Фурье частных сумм выбранного для обеспечения требуемой точности масштаба.

В настоящей работе для решения тех же задач предлагается использовать интерполяционно-ортогональные периодические всплески из работы [6], а также тривиальные обобщения интерполяционных всплесков Котельникова — Шеннона на базе ортогональных всплесков Мейера.

Как будет показано, это позволит для указанных краевых задач, но теперь только в классической постановке (т. е. с непрерывными граничными функциями) проще, чем указано выше, строить аналогичные гармонические полиномы, аппроксимирующие точные решения с тем же порядком приближения.

1. Необходимые обозначения и определения

Пусть, как в [6], $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — преобразование Фурье, определяющее любую конкретную, одну и ту же на протяжении всей работы, масштабирующую функцию кратно-масштабной аппроксимации (КМА) типа Мейера, т. е. $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — сосредоточенная на $\Delta_\varepsilon = (-(1+\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ $(0 < \varepsilon \le 1/3)$ непрерывная функция, тождественная единице на промежутке $|\omega| \le (1-\varepsilon)/2$ и такая, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+n)|^2 \equiv 1$. Потребуем еще, чтобы функция $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ была четной и гладкой на $\mathbb{R}$ с центром симметрии графика над промежутком $\Delta_\varepsilon^1 = ((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ в точке $\omega = 1/2$. Из этих ограничений, в частности, следует, что функция $\widehat{\varphi}_3(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ четная на $\mathbb{R}$, а производная $\widehat{\varphi}_3'(\omega)$ нечетная на $\mathbb{R}$ и четная относительно точки $\omega = 1/2$ на промежутке Δ_ε^1, так же как и дифференциал $d\widehat{\varphi}_3'(\omega)$. Свойство ортонормированности в $L^2(\mathbb{R})$ системы $\left\{\varphi_\varepsilon(x-k):\ k\in\mathbb{Z},\ \varphi_\varepsilon(x) = \int_R \widehat{\varphi}_\varepsilon(\nu) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega\right\}$ превращается для $\widehat{\varphi}_3(\omega)$ в свойство $\sum \widehat{\varphi}_3(\omega+n) \equiv 1$, равносильное условию интерполяционности систем

$$\left\{\varphi_3(2^j x - k)\colon k\in\mathbb{Z};\ \varphi_3(x) = \int\limits_R \widehat{\varphi}_3(\omega) e^{2\pi i x\omega}\, d\omega\right\} \quad (j\in\mathbb{Z})$$

на сетках $\{l/2^j : l\in\mathbb{Z}\}$ $(j\in\mathbb{Z})$, т. е. условию $\varphi_3(2^j x-k)\Big|_{x=l/2^j} = \varphi(l-k) = \delta_{k,l}$.

Определенные в [6] две интерполяционные в $C(\mathbb{R})$ и одновременно ортогональные в $L^2(\mathbb{R})$ системы $\{\varphi_s(2^j x-k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$ $(j\in\mathbb{Z},\ s=1,2)$ связаны через свои преобразования Фурье $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ $(s=1,2)$ с выбранной функцией $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ следующими соотношениями:

$$\widehat{\varphi}_2(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega) + i(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega), \quad \beta(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)), \tag{1.1}$$

$$\widehat{\varphi}_1(\omega) = \frac{1}{2}\begin{cases} (1+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1)) + i\,(\operatorname{sign}\omega)\sqrt{2\beta(\omega)} & \text{при } |\omega| < (1+\varepsilon)/2, \\ 0 \ \text{ при } |\omega| \ge (1+\varepsilon)/2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\beta(\omega)$ — гладкая, четная на $\mathbb{R}$ функция, зануляющаяся вместе с производной $\beta'(\omega)$ на концах промежутков $\pm\Delta_\varepsilon^1 = \pm((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$, сосредоточенная на их объединении и четная относительно их центров $\omega = \pm 1/2$.

В [6] доказано, что функция $\widehat{\varphi}_1(\omega)$ представима в виде (1.1) с заменой $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ на другую подходящую функцию $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$. Накладывая на нее условия, что наложены выше на $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$, мы можем формулируемые ниже утверждения при $s = 1, 2, 3$ доказывать только для $s = 3$ и 2.

Легко видеть, что в силу свойств функций $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ и $\beta(\omega)$ можно функции $\varphi_s(x)$ $(s = 1, 2, 3)$ на всем их носителе $\mathbb{R}$ представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_3(x) = 2\int\limits_0^{(1+\varepsilon)/2} \cos(2\pi x\omega)\widehat{\varphi}_3(\omega)\,d\omega,\\
&\varphi_2(x) = \varphi_3(x) - \beta^\vee(x), \quad \beta^\vee(x) = 2\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} \sin(2\pi x\omega)\beta(\omega)\,d\omega,\\
&\varphi_1(x) = \int\limits_0^{(1+\varepsilon)/2} (1 + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1))\cos(2\pi x\omega)\,d\omega - \int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} \sin(2\pi x\omega)\sqrt{2\beta(\omega)}\,d\omega,
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

откуда следует, что они являются ограниченными на $\mathbb{R}$ целыми функциями экспоненциального типа $(1+\varepsilon)/2$.

Интегрируя два раза по частям, первые две из предыдущих формул заменим на

$$\varphi_3(x) = -2\int\limits_{\Delta_\varepsilon^1} \frac{\sin 2\pi x\omega}{2\pi x}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\,d\omega = 2\int\limits_{\Delta_\varepsilon^1} \frac{1-\cos 2\pi x\omega}{(2\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega) = \int\limits_{\Delta_\varepsilon^1} \frac{\sin^2 \pi x\omega}{(\pi x)^2}\,d\varphi_3'(\omega),$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \varphi_3(x) - 2\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} (\sin(2\pi x(1-\omega)) + \sin(2\pi x\omega))\,d\omega\\
&= \varphi_3(x) - 4\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \sin(\pi x)\cos\Big(2\pi x\Big(\omega - \frac{1}{2}\Big)\Big)\beta(\omega)\,d\omega.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Из этих и предыдущих двух формул следует, что при $|x| < 1/2$ справедливы грубые равномерные оценки $|\varphi_s(x+\nu)| = O(1/(1+|\nu|^2))$, гарантирующие равномерную сходимость на промежутке $[-1/2, 1/2]$ процесса 1-периодизации функций $\varphi_s(2^j x - k)$:

$$\mathrm{Pe}_1\varphi_s(2^j x - k) = \sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \varphi_s(2^j(x+\mu) - k) =: \Phi_s^{j,k}(2\pi x), \quad s = 1,2,3, \quad k = \overline{0, 2^j - 1}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для того, чтобы отличить в обозначениях эти функции от 1-периодизаций $\Phi_{s,j,k}(x)$ функций $2^{j/2}\varphi_s(2^j x - k)$ из работы [6], будем обозначать их через $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$, заодно сохраняя обозначение $\Phi_s^{j,k}(x)$ для 2π-периодических по x функций, получающихся заменой переменной x в $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$ на $x/(2\pi)$. Вычисляя коэффициенты разложения функции $\Phi_s^{j,0}(2\pi x)$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i l x} : l \in \mathbb{Z}\}$, получаем

$$\Phi_s^{j,0}(2\pi x) = 2^{-j}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon} \widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{2\pi i\nu x} \quad (s = 1,2,3). \tag{1.5}$$

Отсюда и из перечисленных свойств функций $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ $(s = 1, 2, 3)$ вытекают (при целых ν и обозначениях $2^j\Delta_\varepsilon^+ = 2^{j-1}(0, (1+\varepsilon))$, $2^j\Delta_\varepsilon^1 = 2^{j-1}\,(1-\varepsilon, 1+\varepsilon))$ более удобные для применения, чем (1.2)–(1.5), формулы

$$\Phi_3^{j,k}(x) = \Phi_3^{j,0}\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big) = 2^{-j+1}\bigg(\frac{1}{2} + \sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^+} \widehat{\varphi}_3\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big)\bigg),$$

$$\Phi_2^{j,k}(x) = \Phi_3^{j,k}(x) - 2^{-j+1}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^1} \widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(1-\frac{\nu}{2^j}\Big)\sin\nu\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big),$$

$$\Phi_1^{j,k}(x) = \Phi_1^{j,0}\Big(x - \frac{2\pi k}{2^j}\Big),$$

где

$$\Phi_1^{j,0}(x) = 2^{-j-1}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon}\Big(1 + \widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu x\Big)$$

$$-2^{-j}\sum_{\nu\in 2^j\Delta_\varepsilon^1}\bigg(\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(1-\frac{\nu}{2^j}\Big)\cos\nu x + \sqrt{2\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\widehat{\varphi}_\varepsilon\Big(1-\frac{\nu}{2^j}\Big)}\sin\nu x\bigg).$$

Ясно, что $\Phi_s^{0,0}(x)\equiv 1$, $\Phi_s^{j,0}(x)\equiv \mathrm{const}$ при $j<0$, $\Phi_s^{j,k+2^jn}(x)\equiv\Phi_s^{j,k}(x)$ $(n\in\mathbb{Z})$, поэтому во всех трех предыдущих формулах можно считать $0\le k<2^j-1,\ j\in\mathbb{N}$.

2. Аппроксимативные свойства интерполяционных всплесков

Будем сначала работать с 1-периодическими масштабирующими функциями $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$. Свойство $\varphi_s(2^jx-k)\big|_{x=l/2^j}=\delta_{k,l}$ очевидно распространяется на $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$ следующим образом: $\Phi_s^{j,k}(2\pi x)\big|_{x=l/2^j}=\delta_{k,l}$. Положим $V_s^j=\operatorname{span}\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$, где V_s^0 — множество постоянных на периоде $[-1/2,1/2]$ функций. Далее обозначим через W_s^j прямое дополнение V_s^j до V_s^{j+1} с интерполяционным на сетке $\{(2l\pi)/2^j : l=\overline{0,2^j-1}\}$ базисом $\{\Phi^{j+1,2k+1}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$.

Обозначим интерполяционную проекцию функции $f(x)\in\widetilde{C}[0,1]$ через $S_{s,2^j}(2\pi x;f)=\sum_{k=0}^{2^j-1}f(k/2^j)\Phi_s^{j,k}(2\pi x)$; $\widetilde{C}[0,a]$ — пространство непрерывных a-периодических функций.

В работе [6] с использованием ряда оценок из [2] доказано, что для функций $f(x)\in\widetilde{C}[0,1]$ и $s=1,2$ справедливы неравенства

$$\Big|f(x)-\sum_{k=0}^{2^j=1}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Phi_s^{j,k}(2\pi x)\Big|\le C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)\omega\Big(\frac{1}{N_{\varepsilon,j}};f\Big)_{C_{[0,1]}}\quad (N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1+\varepsilon)],\ s=1,2).\tag{2.1}$$

Здесь и далее $C(g)$ означает положительную константу, зависящую только от g. Оценки (2.1) достаточно, чтобы доказать, что множество $\bigcup_{j=0}^\infty V_s^j=V_s^0\oplus(\oplus_{j=0}^\infty W_s^j)$ всюду плотно в $\widetilde{C}[0,1]$. Для эффективного алгоритма приближенного решения указанных краевых задач, этой оценки недостаточно из-за неопределенности $C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)$, поскольку это не позволяет по требуемой точности приближения выбрать подходящий параметр j. Следующая часть разд. 2 связана с уточнением этого неравенства.

В работе [2] в основу оценки сверху функции $|\varphi_\varepsilon(x)|$ положено неравенство $|\varphi_\varepsilon(x)|<C(\widehat{\varphi}_\varepsilon)/(1+|x|^2)$, которое верно и для функций $\varphi_s(x)$ $(s=1,2,3,\ 0<\varepsilon\le 1/3)$. Для последних функций установим более аккуратное неравенство, в частности согласованное со свойством их интерполяционности $\varphi_s(n)=\delta_{n,0}$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Ограничения A. Пусть функция $\varphi_{\varepsilon(x)}$ удовлетворяет всем условиям на нее и ее производную $\widehat{\varphi}'_\varepsilon(\omega)$, приведенные в первом абзаце разд. 1.

Далее через $(\Delta_\varepsilon^1)/2$ обозначена правая половинка промежутка Δ_ε^1. Справедливо следующее

Утверждение. *При ограничениях A для функции* $\varphi_3(x)=\varphi_3(x;\widehat{\varphi}_\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$|\varphi_3(x)|\le C(\widehat{\varphi}_3')\Big\{\frac{\sin(\pi x)\sin(\pi\varepsilon x)}{(\pi x)^2}\chi_{\left(|\cdot|\le\frac{1}{2\varepsilon}\right)}(x)+\frac{|\sin\pi x|}{|\pi x|^2}\chi_{\left(|\cdot|\ge\frac{1}{2\varepsilon}\right)}(x)\Big\},\tag{2.2}$$

где $C(\widehat{\varphi}_3')\le V(\varphi_3';(\Delta_\varepsilon^1)/2)$ *— вариация функции на отрезке* $[(1/2),(1+\varepsilon)/2]$, *а* $\chi_{(|\cdot|\le a)}(x)$ *и* $\chi_{(|\cdot|\ge a)}(x)$ *— характеристические функции множеств* $\{x\colon |x|\le a\}$ *и* $\{x\colon |x|\ge a\}$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя первую формулу из (1.3) и равенства $\widehat{\varphi}_3'(0)=\widehat{\varphi}_3'((1\pm\varepsilon)/2)=0$, с помощью интегрирования по частям получаем

$$\varphi_3(x)=-2\int\limits_0^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\sin(2\pi x\omega)}{2\pi x}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\,d\omega=-2\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\sin(2\pi x\omega)}{2\pi x}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\,d\omega$$

$$=2\bigg(\widehat{\varphi}_3'(\omega)\frac{\cos(2\pi x\omega)-1}{(2\pi x)^2}\Big|_{\omega=\frac{1-\varepsilon}{2}}^{\frac{1+\varepsilon}{2}}+\int\limits_{\Delta_\varepsilon^1}\frac{1-\cos(2\pi x\omega)}{4(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega)\bigg)$$

$$=\bigg(\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{1/2}+\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\bigg)\frac{1-\cos(2\pi x\omega)}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega).$$

Так как из условий на $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ следует, что $\widehat{\varphi}_3'(\omega)$ — четная на промежутке Δ_ε^1 функция относительно точки $\omega=1/2$, то после замены ω на $1-\omega'$ в интеграле по левой половине Δ_ε^1, получаем

$$\varphi_3(x)=-\int\limits_{(1-\varepsilon)/2}^{1/2}\frac{1-\cos(2\pi x(1-\omega))}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega)+\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{1-\cos(2\pi x\omega)}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega)$$

$$=-\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\cos(2\pi x(1-\omega))-\cos(2\pi x\omega)}{2(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega).$$

Окончательно выводим

$$\varphi_3(x)=-\int\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\frac{\sin(\pi x)\sin(2\pi x(\omega-1/2))}{(\pi x)^2}\,d\widehat{\varphi}_3'(\omega).\tag{2.3}$$

Здесь $\omega-1/2$ возрастает от нуля до $\varepsilon/2$, поэтому аргумент функции $|\sin(2\pi|x|(\omega-1/2))|$ при $|x|\le 1/2\varepsilon$ не превосходит $\pi/2$ и, следовательно, при каждом таком x выполняется неравенство $|\sin(2\pi x(\omega-1/2))|\le|\sin(\pi x\varepsilon)|$. А тогда для $|x|<1/(2\varepsilon)$ из формулы (2.3) в силу четности $\widehat{\varphi}_3'(\omega)$ на Δ_ε^1 относительно точки $\omega=1/2$ получаем

$$|\varphi_3(x)|\le V(\widehat{\varphi}_3'(\omega),(\Delta_\varepsilon^1)/2)\frac{|\sin(\pi x)\sin(\pi x\varepsilon)|}{(\pi x)^2}=\frac{1}{2}V(\varphi'(\omega),\Delta_\varepsilon^1)\frac{|\sin(\pi x)\sin(\pi x\varepsilon)|}{(\pi x)^2},\quad |x|<\frac{1}{2\varepsilon},$$

что соответствует первой части оценки (2.2).

При всех x из (2.3) следует оценка $|\varphi_3(x)|\le(1/2)V(\widehat{\varphi}_3'(\omega);\Delta_\varepsilon^1)|\sin(\pi x)|/(\pi x)^2$, что при $|x|>1/(2\varepsilon)$ соответствует второй части оценки (2.2). Утверждение доказано. □

Лемма 1. *При* $|y|\le 1/2$ *справедливо неравенство* $A(y)=:\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z},\,\nu\ne0}\dfrac{1}{(y+\nu)^2}\le\pi^2-4.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теории мероморфных функций хорошо известна формула

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(y+\nu)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi y}, \tag{2.4}$$

в явном виде выписанная, например, в [7, с. 652]. Следовательно,

$$A(y)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi y}-\frac{1}{y^2}=\frac{(\pi y)^2-\sin^2\pi y}{y^2\sin^2\pi y}.$$

Полагая $\pi y=z$ представим $A(y)$ в виде

$$A(y)=\pi^2A_1(z),\qquad A_1(z)=\frac{z^2-\sin^2 z}{z^2\sin^2 z}$$

и покажем, что на участке $0\le z<\pi$ функция $A_1(z)$ возрастает. Легко проверить, что производная $A_1'(z)$ имеет вид:

$$A_1'(z)=2\frac{\sin^3 z-z^3\cos z}{z^3\sin^3 z}.$$

Хотя $\sin^3 z$ существенно меньше z^3, числитель $A_2(z)=\sin^3 z-z^3\cos z$ этой дроби при $0<z\le\pi/2$ положителен. Действительно,

$$A_2'(z)=z^3\sin z-3\cos z(z^2-\sin^2 z),$$

$$A_2''(z)=6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z-6z\cos z+6z^2\sin z+z^3\cos z,$$

$$A_2'''(z)=18\sin z(z-\sin z\cos z)+9\cos z(z^2-\sin^2 z).$$

Из последней формулы видно, что $A_2''(z)\ge 0$ при $0\le z\le\pi/2$, откуда в силу равенств $A_2''(0)=0,\ A_2'(0)=0,\ A_2(0)=0$ последовательно вытекает положительность при $0<z\le\pi/2$ производных $A_2''(z),\ A_2'(z)$ и функций $A_2(z),\ A_1'(z)$. Применяя троекратно правило Лопиталя, находим, что $A_1(0)=1/3$ и следовательно (учитывая очевидную положительность $A_1'(z)$ также при $\pi/2\le z<\pi$) функция $A(y)$ вслед за $A_1(z)$ на участке $[0,1)$ возрастает от $\pi^2/3$ до ∞. В частности, при $|y|\le 1/2$ будет $A(y)\le A(1/2)$, что совпадает с утверждением леммы 2. $\square$

Оценим теперь норму $\|S_{3,2^j}\|$ оператора

$$S_{3,2^j}(2\pi x,f)=\sum_{k=0}^{2^{j-1}}f\Big(\frac{k}{2^j}\Big)\Phi_3^{j,k}(2\pi x)$$

как оператора $S_{3,2^j}:\widetilde{C}[0,1]\to V_j^3$ интерполяционного проектирования 1-периодических непрерывных функций на подпространство $V_j^3=\operatorname{span}\{\Phi_3^{j,k}(2\pi x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$ — части пространства 1-периодических тригонометрических полиномов порядка $<2^{j-1}(1+\varepsilon)$, содержащей целиком все подпространство $T_{N_{\varepsilon,j}}$ таких полиномов порядка $N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$.

Лемма 2. *Для оператора $S_{3,2^j}=S_{3,2^j}(x,f;\widehat{\varphi}_\varepsilon)$ при выполнении условий ограничений A на функцию $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$справедлива оценка*

$$\|S_{3,2^j}\|\le\Big[\frac{4}{\pi^2}+\varepsilon+\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}\Big)V\big(\widehat{\varphi}(\omega);(\Delta_\varepsilon^1)/2\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку справедливо точное на классе $\widetilde{C}[0,1]$ неравенство

$$|S_{3,2^j}(2\pi x;f)|\le\|f\|_{\widetilde{C}[0,1]}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big|\Phi_3^{j,0}\Big(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big|,$$

то для оценки нормы $\|S_{3,2^j}\|$ сверху нужно оценить последнюю сумму. Легко проверить, что в силу 1-периодичности функции $\Phi_3^{j,0}(2\pi x)$ эта сумма является (2^{-j})-периодической, так что достаточно ее оценить при $|x| \le 1/(2^{j+1})$. Для таких точек x имеем $|2^j x| \le 1/2 < 1/(2\varepsilon)$, так что $|\Phi_3^{j,0}(x)|$ с помощью утверждения 1 и леммы 1 оценивается так:

$$|\Phi_3^{j,0}(2\pi x)| = \Big|\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_3(2^j(x+\nu))\Big| \le |\varphi_3(2^j x)| + \sum_{\nu\ne 0} |\varphi_3(2^j(x+\nu))|$$

$$\le C(\widehat{\varphi}_3')\Big\{\frac{|\sin(\pi 2^j x)\sin(\pi\varepsilon 2^j x)|}{(\pi 2^j x)^2} + \sum_{\nu\ne 0}\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{(\pi 2^j)^2(x+\nu)^2}\Big\},$$

и, следовательно,

$$|\Phi_3^{j,0}(2\pi x)| \le C(\widehat{\varphi}_3')\Big\{\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{\pi 2^j|x|}\frac{|\sin(\pi\varepsilon 2^j x)|}{\pi 2^j x} + \frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}|\sin(\pi 2^j x)|\Big\}. \tag{2.5}$$

Далее, так как при $k=\overline{1,2^j-1}$ и $|x|\le 1/2^{j+1}$ имеем $|x-k/2^j| > 1/2^{j+1}$, то, огрубляя результат утверждения 1 при $|x| < 1/(2\varepsilon)$, видим, что

$$\Big|\Phi_3^{j,0}(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\Big|\varphi_3\Big(2^j\Big(x+\nu-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{|\sin(\pi 2^j(x-\frac{k}{2^j}))|}{|\pi 2^j|^2}\,\frac{C(\widehat{\varphi}_3')}{((x-k/2^j)+\nu)^2},$$

используя формулу (2.4), получаем оценку

$$\Big|\Phi_3^{j,0}(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big| \le C(\widehat{\varphi}_3')\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{(\pi 2^j)^2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-\frac{k}{2^j}+\nu)^2} = C(\widehat{\varphi}_3')\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{2^{2j}}\,\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)}.$$

Отсюда в силу четности функции $\sin\pi y$ относительно точки $y=1/2$ имеем

$$\sum_{k=1}^{2^j-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)} = 2\sum_{k=1}^{2^{j-1}-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)} + \frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{1}{2})\Big)} < 2\sum_{k=1}^{2^j-1}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)}.$$

На этом участке $[1/2^j-x, 1/2-x]$ функция $\xi_x(k)$ под знаком последней суммы по $k=\overline{1,2^{j-1}}$ монотонно убывает, поэтому ее можно оценить так:

$$2^{j+2}\sum_{k=1}^{2^j-1}\frac{1}{2^{j+1}}\frac{1}{\sin^2\Big(\pi(x-\frac{k}{2^j})\Big)} \le 2^{j+2}\int\limits_{x-\frac12}^{x-\frac{1}{2^j}}\frac{1}{\sin^2\pi(x-\xi)}\,d\xi$$

$$= \frac{2^{j+2}}{\pi}\operatorname{ctg}\pi(x-\xi)\Big|_{\xi=x-\frac12}^{x-\frac{1}{2^j}} = \frac{2^{j+2}}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2^j} \le \frac{4}{\pi^2}2^{2j}.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\sum_{k=1}^{2^j-1}\Big|\Phi_3^{j,0}\Big(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le \frac{4}{\pi^2}C(\widehat{\varphi}_3')|\sin\pi 2^j x|. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.5) и (2.6), выводим оценку для функции Лебега $L_{3,2^j}(2\pi x) = \sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_3^{j,k}(2\pi x)|$ оператора $S_{3,2^j}(x,f)$ на одном из ее периодов $(-1/2^{j+1}, 1/2^{j+1})$:

$$L_{3,2^j}(2\pi x) \le \Big(\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\widehat{\varphi}_3'(\omega)\Big)\Big\{\frac{|\sin(\pi 2^j x)\sin(\pi\varepsilon 2^j x)|}{(\pi 2^j x)^2} + \Big(\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}} + \frac{4}{\pi^2}\Big)|\sin(\pi 2^j x)|\Big\}, \tag{2.7}$$

из которой вытекает утверждение леммы 2. □

Оценим далее норму операторов $S_{2,2^j}$ интерполяционного проектирования на подпространства $V_{s,j}$.

Лемма 3. *Для оператора* $S_{2,2^j}(2\pi x, f)$ *интерполяционного проектирования* $\widetilde{C}[0,1]$ *на* $V_{2,j} = \operatorname{span}\{\Phi_2^{j,k}(2\pi x)\colon k = \overline{0, 2^j-1}\}$ *при условиях ограничений A на функцию* $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ *справедлива оценка*

$$\|S_{2,2^j}\|_{\widetilde{C}[0,1]}^{\widetilde{C}[0,1]} \le \bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} ((\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega))'_\omega) + \bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} ((\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega))'_\omega)\Big(\frac{4}{\pi^2} + \varepsilon + \frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}\Big).$$

Такая же оценка выполняется и для оператора $S_{1,2^j}$ *при замене функции* $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ *на* $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}(\omega)$ *по формуле* $\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}^2(\omega) = \dfrac{1}{2}(1 + \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1))$.

Доказательство. Вспоминая, что $\widehat{\varphi}_2(\omega) = (\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega))^2 + i(\operatorname{sign}\omega)\,\beta(\omega) = \widehat{\varphi}_3(\omega) + i(\operatorname{sign}\omega)\,\beta(\omega)$ (здесь $\beta(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)+\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega+1))$, устанавливаем: $\Phi_2^{j,k}(2\pi x) = \Phi_3^{j,k}(2\pi x) - B^{j,k}(2\pi x)$, где $B^{j,k}(2\pi x) = B^{j,0}(2\pi(x-k/2^j))$; функция $B^{j,0}(2\pi x)$ определена ниже. В силу нечетности функции $(\operatorname{sign}\omega)\beta(\omega)$ на $\mathbb{R}$, а также четности $\beta(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega)$ на интервале $\Delta_\varepsilon^1 = ((1-\varepsilon)/2, (1+\varepsilon)/2)$ относительно точки $\omega = 1/2$, после преобразований формулы (1.4), аналогичных выполненным для $\widehat{\varphi}_3(\omega)$, получим для обратного преобразования Фурье $\beta^\vee(x)$ функции $\beta(\omega)$ формулу

$$\beta^\vee(x) = -2\int_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \frac{\sin(\pi x)\sin^2(\pi x(\omega-\frac{1}{2}))}{(\pi x)^2}\,d\beta'(\omega).$$

Будем 1-периодизацию функции $\widehat{\beta}(2^j x)$ обозначать через $B_2^{j,0}(2\pi x)$. Имеем

$$B_2^{j,0}(2\pi x) = -2\Big\{\int_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \frac{\sin(\pi 2^j x)\sin^2(\pi 2^j x(\omega-\frac{1}{2}))}{(\pi x)^2}\,d\beta'(\omega)$$
$$+\sum_{\nu\ne 0}\int_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \frac{\sin(\pi 2^j x)\sin^2(\pi 2^j(x+\nu)(\omega-\frac{1}{2}))}{\pi 2^j(x+\nu)^2}\,d\beta'(\omega)\Big\}.$$

Считая $|x| \le 1/2^{j+1}$, будем иметь $\pi|x|(\omega-1/2)2^j \le (\pi/2)(\varepsilon/2) < \pi/2$, и потому $\sin^2(\pi 2^j x(\omega - 1/2)) \le \sin^2(\pi 2^j x(\varepsilon/2))$. Во втором интеграле за счет больших ν аргумент у второго множителя может меняться и при $|x| < 1/2^{j+1}$ в очень больших пределах, так что вместо грубой оценки $|\sin^2(\pi 2^j(x-\nu)(\omega-1/2))| \le 1$ вряд ли что можно придумать. Тогда, с учетом леммы 1 получаем

$$|B_2^{j,0}(2\pi x)| \le \Big(\frac{|\sin\pi 2^j x|\sin^2(\pi 2^j x\varepsilon/2)}{(\pi 2^j x)^2} + \frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}|\sin\pi 2^j x|\Big)C(\beta'(\omega)), \quad \Big(C(\beta'(\omega)) = \bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}\beta'(\omega)\Big).$$

Буквально повторяя рассуждения доказательства леммы 2, начиная с вывода оценки для $\Phi_3^{j,0}(2\pi(x-k/2^j))$ с заменой всего лишь $\widehat{\varphi}'_3(\omega)$ на $\beta'(\omega)$ и $\sin(2\pi\varepsilon 2^j x)$ на $\sin^2(\pi\varepsilon 2^j x/2)$, получим следующие неравенства при $|x| \le 1/2^{j+1}$ и $k = \overline{1, 2^j-1}$:

$$\Big|B_2^{j,0}\Big(2\pi\Big(x - \frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le C(\beta'(\omega))\frac{|\sin(\pi 2^j x)|}{2^{2j}}\frac{1}{\sin^2\pi(x-\frac{k}{2^j})},$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big|B_2^{j,0}\Big(2\pi\Big(x-\frac{k}{2^j}\Big)\Big)\Big| \le C(\beta'(\omega))\Big(\frac{|\sin(\pi 2^j x)|\sin^2(\pi 2^j x\frac{\varepsilon}{2})}{(\pi 2^j x)^2}+\Big(\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}+\frac{4}{\pi^2}\Big)|\sin(\pi 2^j x)|\Big).$$

Объединив это неравенство с аналогичным неравенством для функций $\Phi_3^{j,k}(2\pi x)$, получаем для функции Лебега $L_{2,2^j}(2\pi x)=\sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_2^{j,k}(2\pi x)|$ оценку на периоде $[1/2^{j+1}, 1/2^{j+1}]$ этой функции:

$$L_{2,2^j}(2\pi x) \le \Big(C(\varphi_2'(\omega))\Big|\frac{\sin \pi\varepsilon 2^j x}{|\pi 2^j x|}\Big| + C(\beta'(\omega))\frac{\sin^2 \pi\varepsilon 2^{j-1}x}{|\pi 2^j x|}\Big)\frac{|\sin \pi 2^j x|}{|\pi 2^j x|}$$

$$+\big(C(\varphi_2'(\omega))+C(\beta'(\omega))\big)\Big(\frac{1-4/\pi^2}{2^{2j}}+\varepsilon+\frac{4}{\pi^2}\Big)|\sin(\pi 2^j x)|, \tag{2.8}$$

откуда вытекает результат леммы 3 относительно константы Лебега $\|S_{2,2^j}\|_{\widetilde{C}[0,1]}^{\widetilde{C}[0,1]} = \max_x L_{2,2^j}(2\pi x)$.

З а м е ч а н и е. Поскольку переход от 1-периодических функций $f(2\pi x)$ к 2π-периодическим $f(x)$ совершается простой заменой x на $x/(2\pi)$, то

1) 2π-периодические системы функций

$$\Big\{\Phi_s^{j,k}(x)=2^{-j}\sum_{\nu/2^j\in\Delta_\varepsilon}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)e^{i\nu(x-2\pi k/2^j)}\colon k=\overline{0,2^j-1}\Big\}\quad (s=1,2,3,\ j\in\mathbb{N})$$

будут интерполяционными на сетке $\{x_k=(2\pi k)/2^j\}_{k=0}^{2^j-1}$, а при $s=1$ и 2 одновременно ортонормированными относительно скалярного произведения $(f,g)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)\,dx$;

2) для функций Лебега $\sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_s^{j,k}(x)|$ справедливы оценки (2.7), (2.8), если в них заменить x на $x/(2\pi)$;

3) для констант Лебега

$$L_s=\|S_{s,2^j}\|_{C_{2\pi}}^{C_{2\pi}}=\max_x\sum_{k=0}^{2^j-1}|\Phi_s^{j,k}(x)|$$

(где $S_{s,2^j}(x,f)=\sum_{k=0}^{2^j-1}f((2\pi k)/2^j)\Phi_s^{j,k}(x)$, $f(x)\in C_{2\pi}=\widetilde{C}[0,2\pi]$, $s=1,2,3$) сохраняются соответствующие оценки из лемм 2 и 3.

Для полноты изложения обоснуем почти тривиальное распространение факта, хорошо известного для ортогональных масштабирующих систем типа Мейера, на рассматриваемые здесь интерполяционные периодические системы: на пространстве 2π-периодических тригонометрических полиномов $\tau_n(x)$ порядка $n\le N_{\varepsilon,j}=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$ интерполяционная проекция на пространства $V_j^s=\operatorname{span}\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{1,2^j-1}\}$ оператор $S_{s,2^j(x,\tau_n)}$ является тождественным оператором: $S_{s,2^j}(x,\tau_n)\equiv\tau_n(x)$. Действительно, так как ортогональная проекция на V_j^s любой функции лежит в V_j и сохраняет $\tau_n(x)$ при $n\le N_{\varepsilon,j}$, то любой $\tau_n(x)\in V_j^s$, а поскольку $S_{s,2^j}$ как проектор тождественен на V_j^s, то $S_{s,2^j}(x,\tau_n)\equiv\tau_n(x)$.

Из лемм 2 и 3 и пп. 1), 3) замечания по схеме Лебега тривиально вытекает следующее утверждение, названное ввиду его важности теоремой.

Теорема. *Точность аппроксимации в метрике пространства $C_{2\pi}=\widetilde{C}[0,2\pi]$ функций $f(x)\in C_{2\pi}$ их интерполяционной проекцией $S_{s,2^j}(x,f)$ на подпространство V_j^s гарантируется формулой*

$$\|f(\cdot)-S_{s,2^j}(\cdot,f)\|_{C_{2\pi}}\le(1+\|S_{s,2^j}\|)E_{N_{\varepsilon,j}}(f),$$

где $E_{N_{\varepsilon,j}}(f)$ — наилучшее приближение функции f в $C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка $N_{\varepsilon,j} = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, а

$$\|S_{s,2^j}\| \le \begin{cases} \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \Big(\dfrac{d}{d\omega}(\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega))\Big)\Big(\dfrac{4}{\pi^2}+\varepsilon\Big), \ s=3, \ j\ge 1; \\ \Big(\bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \dfrac{d}{d\omega}(\varphi_\varepsilon^2(\omega)) + \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \dfrac{d}{d\omega}(\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)\widehat{\varphi}_\varepsilon(1-\omega))\Big)\Big(\dfrac{4}{\pi^2}+\varepsilon+1\Big), \ s=2, \ j\ge 1; \\ \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \Big(\dfrac{d}{d\omega}(\widehat{\varphi}_{1,\varepsilon}^2(\omega))\Big) + \bigvee\limits_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2} \Big(\dfrac{d}{d\omega}(\varphi_{1,\varepsilon}(\omega)\varphi_{1,\varepsilon}(1-\omega))\Big)\Big(\dfrac{4}{\pi^2}+\varepsilon+1\Big), \ s=1, \ j\ge 1. \end{cases}$$

Отметим, что при некоторых простых дополнительных ограничениях на $\widehat{\varphi}_s(\omega)$ значения выписанных вариаций легко определить. Так, например, если функция $\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)$ при прочих условиях ограничений A еще и выпукла вниз на участке $(1/2,(1+\varepsilon)/2)$, то $\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}(d/d\omega\widehat{\varphi}_\varepsilon^2(\omega)) = |\widehat{\varphi}_\varepsilon'(1/2)|$, $\bigvee_{1/2}^{(1+\varepsilon)/2}(d/d\omega)(\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(1-\omega)) = \max_{\omega\in\Delta_\varepsilon^{1}}|(\widehat{\varphi}(\omega)\widehat{\varphi}(1-\omega))'_\omega|$. А для оценки $E_n(f)$ можно применить хорошо известные неравенства Джексона — Стечкина через геометрические характеристики гладкости функции f — ее модули непрерывности $\omega_m(\pi/N_{\varepsilon,j},f)$ m-го порядка ($m=1$ — Д. Джексон, $m=2$ — Н. И. Ахиезер, $m>2$ — С. Б. Стечкин).

В некоторых работах, в частности в [2;6], в случае ортогональных всплесков наряду с уклонениями $\|f-S_{2^j}(f)\|$ теоретически изучаются и уклонения $\|f-S_n(f)\|$ для промежуточных $n\in(2^j,2^{j+1})$, но вряд ли стоит применять такие аппроксимации в вычислительной практике, поскольку добавление к системе $\{\Phi_s^{j,k}(x)\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$ дополнительных (не всех) всплесков $\Psi_s^{j,k}(x) = \Phi_s^{j+1,2k+1}(x)$, $k\in\{0,1,\dots,2^j-1\}$, (из-за их сильной локализации) может только локально существенно улучшать точность аппроксимации.

3. Применение к решению задачи Дирихле в круге

В наших работах [3–5] и ряде публикаций Г.А. Дубосарского ортогональные всплески, построенные на базе периодизаций всплесков Мейера, уже применялись для решения задач Дирихле в круге, кольце и (Г.А. Дубосарским) в круге с несколькими круглыми отверстиями, причем допускалось граничным функциям быть функциями из произвольного $L_p[0,2\pi)$ ($1\le p\le\infty$). Однако для непрерывных граничных значений в вычислительном плане в круге экономичнее применять рассмотренные выше базисы пространств V_j^s $(s=1,2,3)$.

Как отмечалось в начале работы, тригонометрические полиномы $\sum_{k=0}^{2^j-1} c_k\Phi_s^{j,k}(x)$ тривиально продолжаются до гармонических в круге полиномов заменой $\Phi_s^{j,k}(x)$ на

$$\Phi_s^{j,k}(r,x) = 2^{-j}\sum_{\nu\in\Delta_\varepsilon}\widehat{\varphi}_s\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)r^\nu e^{2\pi i\nu(x-(2\pi k)/2^j)},$$

где re^{ix} $(0\le r\le 1,\ 0\le x<2\pi)$ — точки единичного круга K_1 с центром в начале полярной системы координат.

Для приближенного решения задачи Дирихле

$$(D) \qquad \begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0\le r<1), \\ u(1,x) = g(x)\in\widetilde{C}[0,2\pi] = C_{2\pi} \end{cases}$$

с заданной точностью нужно с помощью оценок теоремы 1 выбрать (для желательного $s=1,2,3$) с помощью удобных оценок величин $E_n(f)$ нужный параметр $j\gg 1$, и, используя значения $f(x)$ на сетке $Q_j =\colon \{(2\pi k)/2^j\colon k=\overline{0,2^j-1}\}$, построить гармонический полином

$S_{s,2^j}(r,x;g) = \sum_{k=0}^{2^j-1} g((2\pi k)/2^j)\Phi_s^{i,0}(r,x-(2\pi k)/2^j)$, совпадающий на сетке Q_j при $r=1$ со значениями функции g.

Применяя принцип максимума и дословно повторяя доказательство при $\nu = 0$ следствия 1.1 из [3] и теорему, получаем

Следствие. *При условиях ограничений A и $g(x) \in C_{2\pi}$ функция $S_{s,2^j}(r,x;g)$ приближает решение $u(r,x)$ задачи (D) с точностью, гарантируемой неравенством*

$$|u(r,x) - S_{s,2^j}(r,x;g)| \le \frac{4}{\pi}(1 + \|S_{s,2^j}\|)r^{1+N_{\varepsilon,j}} E_{N_{\varepsilon,j}}(g)_{C_{2\pi}}, \quad re^{ix} \in K_1,$$

где при каждом $s = 1,2,3$ константа Лебега $\|S_{s,2^j}\|_{C_{2\pi}}^{C_{2\pi}}$ определена в теореме.

Наиболее простым в построении и с наименьшей из трех констант Лебега $\|S_{s,2^j}\|$ $(s = 1,2,3)$ является случай с $s = 3$. Его удобно применять, если значения функции $g(x)$ детерминированы и точно определены. Однако в случае когда функция $g(x)$ содержит случайные ошибки в ее определении, например, когда сеточные значения $g((2\pi k)/2^j)$ $(k = \overline{1, 2^j - 1})$ определены экспериментально, то выгоднее применять интерполяционно-ортогональные КМА с $s = 2$ или 1. В этом случае можно применить к построенным интерполяционным $S_{s,2^j}(x,f)$ хорошо представленные в Mathlab'e и других аналитических пакетах программ прямое и обратное дискретные всплеск-преобразования, используя ортогональность систем $\Phi_s^{j,k}(x)$, чтобы с помощью известных методов уменьшить влияние случайных ошибок (шумов) в задании функции $g(x)$, особенно если известен закон распределения случайных ошибок. Важно, что при этом, спускаясь с уровня V_s^j на $V_s^{j-1}, \ldots$ и возвращаясь обратно, мы будем получать на этих уровнях в качестве коэффициентов функций $S_{s,2^l}(x,g)$ $(l < j)$ не сеточные значения, а усредненные по локальным окрестностям точек $(2\pi k)/2^l$ $(k = \overline{0, 2^l - 1})$ данные, аппроксимирующие коэффициенты ортогональных проекций g на V_s^l $(s = 2,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Meyer Y.** Ondelettes et opérateurs // Actualites Mathematiques. Paris: Herman, 1990. 215 p.
2. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1993. № 9. P. 319–325.
3. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 41, № 5. С. 17–30.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 283–298.
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 153–161.
7. **Прудников А.П., Брычков Ю.А.** Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. Т. 1. 748 с.

Субботин Юрий Николаевич
Поступила 15.11.2016
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Meyer Y. *Ondelettes et opérateurs*, Actualites Mathematiques, Paris: Herman, 1990, 215 p.
2. Offin D., Oskolkov K. A note on orthonormal polynomial bases and wavelets. *Constr. Approx.*, 1993, no. 9, pp. 319–325.
3. Subbotin, Yu.N.; Chernykh, N.I. Wavelets in spaces of harmonic functions. *Izv. Math.*, 2000, vol. 64, no. 1, pp. 143–171 (in Russian).
4. Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Harmonic wavelets and asymptotics of Dirichlet problem solution in circle with small perforation. *Matem. Mod.*, 2002, vol. 14, no. 5, pp. 17–30 (in Russian).
5. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Harmonic wavelets in boundary value problems for harmonic and biharmonic functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 142–159.
6. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Interpolating-orthogonal wavelet systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. 107–115.
7. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O. I. Integraly i ryady* (Integrals and Series), vol. 1, 2. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986. 1548 p.

Yu. N. Subbotin, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

N. I. Chernykh, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.57

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ ЛАПЛАСА

Д. С. Теляковский

Получено достаточное условие гармоничности суммируемых функций двух переменных, которые во всех точках области удовлетворяют менее ограничительному условию, чем уравнение Лапласа. Предполагается, что в любой близости от каждой точки ζ области найдется набор из четырех узлов, для которого разностное отношение шварцевского типа для уравнения Лапласа сколь угодно мало по модулю. При этом узлы набора являются концами двух взаимно перпендикулярных отрезков, пересекающихся в точке ζ, а на саму функцию необходимо наложить определенное условие непрерывности.

Ключевые слова: гармоничность, разностное уравнение Лапласа, производная шварцевского типа

D. S. Telyakovskii. A sufficient condition for the harmonicity of a function of two variables satisfying the Laplace difference equation.

We provide a sufficient condition for the harmonicity of a summable function of two variables that satisfies a less restrictive condition than the Laplace equation at all points of the domain. We assume that an arbitrarily small neighborhood of any point ζ contains a collection of four nodes for which the difference relation of Schwartz type for the Laplace equation is arbitrarily small in absolute value. The nodes are the ends of two mutually perpendicular straight line segments intersecting at the point ζ, and a certain continuity assumption should be imposed on the function.

Keywords: harmonicity, Laplace difference equation, derivative of Schwartz type.

MSC: 31A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-269-283

Введение

Гармонической называется аналитическая в области функция, которая в каждой точке области удовлетворяет уравнению Лапласа. Чтобы удовлетворяющая уравнению Лапласа функция являлась гармонической, аналитичность функции можно не предполагать; на функцию достаточно наложить существенно менее ограничительные условия. В то же время примеры показывают, что выполнения одного только уравнения Лапласа (или некоторого его обобщения) во всех точках области для гармоничности функции недостаточно, нужны дополнительные условия.

И.И. Привалов (1925, [1]) установил гармоничность непрерывных функций, удовлетворяющих в каждой точке области уравнению Лапласа. При этом число переменных произвольно, предполагается существование только тех производных, которые входят в уравнение Лапласа, а сами производные можно понимать в смысле Шварца. В случае функций двух переменных условие непрерывности удается существенно ослабить.

Пусть функция $u(z) = u(x,y)$, $z \in G \subset \mathbb{R}^2$, в каждой точке области G удовлетворяет уравнению Лапласа. Г.П. Толстов (1951, [2]) доказал, что для гармоничности $u(z)$ в G достаточно ограниченности $u(z)$, а затем автор (1986, [3]) показал, что достаточно предполагать суммируемость $u(z)$ (относительно плоской меры Лебега).

Функция

$$u(z) := \mathrm{Re}\Big(\frac{i}{z^2}\Big) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ z \neq 0, \quad u(0) := 0,$$

удовлетворяет уравнению Лапласа в каждой точке единичного круга D, гармонична всюду внутри D за исключением точки $z = 0$, и модуль $|u(z)|$ суммируем в D во всех положительных степенях, меньших 1. Из этого примера видно, что в достаточном условии гармоничности предположение о суммируемости $|u(z)|$ сколько-нибудь существенно ослабить уже нельзя. Поэтому при сохранении условия суммируемости $|u(z)|$ для дальнейшего ослабления достаточных условий гармоничности предположение о выполнении в каждой точке области уравнения Лапласа заменим предположением о выполнении в точках области менее ограничительного условия.

Автором (2009, [4]) были рассмотрены функции, удовлетворяющие в области G обобщению уравнения Лапласа, в которое вместо обычных вторых производных входят вторые производные в смысле Пеано. Выражение $\Delta^{\times} u$ в точке $\zeta \in G$ равно сумме вторых пеановских производных функции $u(z)$ в точке ζ, взятых вдоль некоторых двух взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке ζ. Значение $\Delta^{\times} u$ может, вообще говоря, зависеть от выбора пары прямых, вдоль которых берутся производные. В [4] было показано, что если функция $u(z)$ суммируема в области G и для каждой точки $\zeta \in G$ найдется пара пересекающихся в ζ перпендикулярных друг другу прямых, для которых $\Delta^{\times} u = 0$, то функция $u(z)$ гармонична в G. Условие взаимной перпендикулярности прямых в одной паре снять нельзя, направления прямых для разных точек области никак не связаны между собой.

В работе [4] сначала была установлена гармоничность непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению $\Delta^{\times} u = 0$, а затем доказана непрерывность суммируемых функций, удовлетворяющих этому уравнению. Условия на производные, входящие в уравнение $\Delta^{\times} u = 0$, использовались только при доказательстве гармоничности непрерывных функций. При доказательстве непрерывности суммируемых в G функций использовалось не существование у функции $u(z)$ в каждой точке $\zeta \in G$ производных по некоторым направлениям (тем более вторых), а только выполнение условия Липшица относительно точки ζ вдоль этих направлений. Выполнение такого условия Липшица (которое в данном случае используется как условие непрерывности) очевидно следует из существования у $u(z)$ в точке ζ производных по направлениям.

В настоящей работе условия непрерывности и дифференцируемости накладываются на функцию по отдельности. Дифференциальное условие накладывается не на сумму вторых производных функции вдоль некоторых двух взаимно перпендикулярных направлениий, а на сумму разностных отношений шварцевского типа для вторых производных функции $u(z)$, взятых вдоль таких направлений в неравно отстоящих, вообще говоря, узлах. Существование каких бы то ни было производных не предполагается. Накладывается также некоторое условие непрерывности функции по направлениям, это условие менее ограничительное, чем условие Липшица, но более жесткое, чем просто непрерывность.

Вторые частные шварцевские производные функции

$$u(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{при } \ x > y, \\ 0 & \text{при } \ x = y, \\ -1 & \text{при } \ x < y \end{cases}$$

равны нулю в каждой точке. Этот пример показывает, что если производные, входящие в уравнение Лапласа, понимать в смысле Шварца, то, не накладывая на функцию никаких условий непрерывности, невозможно получить достаточное условие гармоничности даже для ограниченных функций.

1. Определения и формулировка теоремы

Введем некоторые определения и обозначения.

Обозначим $D(\zeta,r)$ замкнутый круг с центром в точке ζ радиуса r, $C(\zeta,r)$ — окружность с центром ζ радиуса r. Если $A(\zeta)$ — некоторое множество, зависящее от точки ζ, то положим $A(\zeta,r) := A(\zeta) \cap D(\zeta,r)$.

Звездочкой $S_\zeta = S(\zeta, \sigma_\zeta)$ с k лучами ($k \geqslant 3$) и центром в точке ζ будем называть объединение несовпадающих промежутков $s^{(j)}$, $j = 1, \dots, k$, длины σ, исходящих из точки ζ, причем точка ζ звездочке принадлежит, а противоположный конец промежутков $s^{(j)}$ нет. Сами промежутки $s^{(j)}$ будем называть *лучами* звездочки, а точку ζ — ее *центром.* Для определенности будем считать, что лучи занумерованы против часовой стрелки и нумерация начата с луча звездочки, который первым всретится при повороте против часовой стрелки вокруг ζ исходящим из ζ лучом, сонаправленным с осью Ox. Под углом между осями ℓ_1 и ℓ_2 будет пониматься угол поворота против часовой стрелки от направления оси ℓ_1 до направления оси ℓ_2.

Будут рассматриваться только звездочки S_ζ, у которых внутри каждой полуплоскости, содержащей точку ζ на своей границе, лежит по крайней мере по одному лучу. Ясно, что это условие эквивалентно тому, что точка ζ лежит внутри многоугольника $P_\zeta = P(\zeta, \sigma)$ с вершинами в концах лучей звездочки S_ζ и что меньше трех лучей у такой звездочки быть не может. Для такой звездочки найдется круг $D(\zeta, r_\zeta)$ максимального радиуса, который лежит в многоугольнике P_ζ; этот радиус будем называть внутренним радиусом звездочки S_ζ. Отношение $\delta_\zeta := r_\zeta/\sigma$ будем называть коэффициентом распределения лучей звездочки S_ζ. Ясно, что коэффициент δ_ζ равен синусу наименьшего угла при основании тех равнобедренных треугольников, на которые лучи звездочки S_ζ разбивают многоугольник P_ζ.

Прямоугольным крестиком с центром в точке ζ будем называть объединение двух взаимно перпендикулярных интервалов $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$, которые пересекаются в своей середине — точке ζ. Прямоугольный крестик, состоящий из интервалов длины 2σ, полностью определяется углом φ, $0 \leqslant \varphi < \pi/2$, между положительным направлением оси Ox и интервалом крестика, ближайшим к Ox при повороте крестика вокруг точки ζ по часовой стрелке. Обозначим такой крестик $K(\zeta, \sigma, \varphi)$. Если величина угла φ не имеет значения, будем писать $K(\zeta, \sigma)$, если длины промежутков, составляющих крестик $K(\zeta, \sigma)$, также не имеют значения, будем писать K_ζ. Прямоугольные крестики будем обозначать также $T(\zeta, \sigma)$ или T_ζ и т. п. Концы промежутков, составляющих крестик, будем называть концами крестика; заметим, что концы крестика крестику не принадлежат. Ясно, что прямоугольный крестик можно рассматривать как звездочку с четырьмя лучами, у которой углы между соседними лучами прямые.

Пусть действительнозначная функция $u(z)$ определена в области G. Будем говорить, что *в точке* $\zeta \in \partial G$ *граничные значения* $u(z)$ *не превосходят числа* C, если $\overline{\lim}\, u(z) \leqslant C$ при $z \to \zeta$, $z \in G$. Если функция $u(z)$ определена не только в области G, то с целью подчеркнуть, что предельный переход $z \to \zeta$ производится при условии $z \in G$, будем говорить о *граничных значениях* $u(z)$ *в точке* ζ *относительно области* G.

Через $u^+(z)$ будем обозначать $\max\{u(z), 0\}$.

Получим выражение разностного отношения шварцевского типа для второй производной в неравно отстоящих узлах для функций одного переменного.

Разностное отношение для второй производной по Шварцу функции $u(x)$ в точке x для узлов $x-h$ и $x+h$ равно удвоенному коэффициенту при x^2 в уравнении параболы $y = ax^2+bx+c$, проходящей через точки $(x-h; u(x-h))$, $(x; u(x))$ и $(x+h; u(x+h))$. Аналогично этому разностным отношением $\delta^{(2)}u(x_0; x_1, x_2)$ для второй шварцевской производной функции $u(x)$ в точке x_0 для узлов x_1 и x_2 будем называть удвоенный коэффициент при x^2 в уравнении параболы, проходящей через точки $(x_1; u(x_1))$, $(x_0; u(x_0))$ и $(x_2; u(x_2))$. Запишем уравнение этой параболы, используя интерполяционный многочлен Лагранжа. Для упрощения записи положим $u_1 := u(x_1)$, $u_0 := u(x_0)$, $u_2 := u(x_2)$. Имеем

$$ax^2+bx+c = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}u_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}u_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}u_2;$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}u(x_0; x_1, x_2) &:= 2a = 2\left(\frac{u_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{u_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)\\ &= 2\frac{u_1(x_2-x_0) - u_0(x_2-x_1) + u_2(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)(x_2-x_0)}. \qquad (1.1)\end{aligned}$$

Если конкретный выбор узлов x_1 и x_2 неважен, то вместо $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ будем писать $\delta^{(2)}u(x_0)$.

Для равно отстоящих узлов $x_1 = x_0 - h$, x_0 и $x_2 = x_0 + h$ выражение $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ является разностным отношением обычной второй шварцевской производной функции $u(x)$ в точке x_0. Действительно,

$$\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)=2\frac{u_1(x_2-x_0)-u_0(x_2-x_1)+u_2(x_0-x_1)}{(x_0-x_1)(x_2-x_1)(x_2-x_0)}=2\frac{hu_1-2hu_0+hu_2}{2h^3}=\frac{u_1-2u_0+u_2}{h^2}.$$

Уравнение параболы, проходящей через три произвольные точки, не зависит от порядка, в котором эти точки перечислены. Нумерацию узлов выберем так, чтобы было удобнее. Поскольку разностное отношение $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ рассматривается как разностное отношение для второй производной в точке x_0, то естественно считать, что точка x_0 лежит между точками x_1 и x_2. Если $x_1 < x_0 < x_2$, то все разности между координатами узлов, входящие в формулу (1.1), положительны и равны расстояниям между соответствующими узлами. Поэтому, если положить $r_1 := |x_1-x_0|$ и $r_2 := |x_2-x_0|$, то выражение для $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ запишется так:

$$\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2) = 2\frac{u_1r_2 - u_0(r_1+r_2) + u_2r_1}{r_1r_2(r_1+r_2)}. \tag{1.2}$$

Проверим, что разностное отношение $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ в пределе дает вторую пеановскую производную функции $u(x)$ в точке x_0, если эта производная существует.

Лемма 1. *Если функция $u(x)$ дважды дифференцируема по Пеано в точке x_0, то $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$ стремится ко второй пеановской производной в x_0, когда узлы x_1 и x_2 стягиваются к x_0.*

Доказательство. Имеем

$$u(x) = u(x_0) + a(x-x_0) + \frac{1}{2}b(x-x_0)^2 + \alpha(x)(x-x_0)^2, \tag{1.3}$$

где a и b — первая и вторая пеановские производные функции $u(x)$ в точке x_0, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Подставим значения $u(x_1)$ и $u(x_2)$, полученные из (1.3), в выражение (1.1) для $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$. Преобразуя числитель полученного выражения, получаем

$$\begin{aligned}
&u(x_1)(x_2-x_0) - u(x_0)(x_2-x_1) + u(x_2)(x_0-x_1)\\
&= \Big(u(x_0) + a(x_1-x_0) + \frac{1}{2}\,b(x_1-x_0)^2 + \alpha(x_1)(x_1-x_0)^2\Big)(x_2-x_0) - u(x_0)(x_2-x_1)\\
&\quad + \Big(u(x_0) + a(x_2-x_0) + \frac{1}{2}\,b(x_2-x_0)^2 + \alpha(x_2)(x_2-x_0)^2\Big)(x_0-x_1)\\
&= u(x_0)\Big((x_2-x_0) - (x_2-x_1) + (x_0-x_1)\Big) + a\Big((x_1-x_0)(x_2-x_0) + (x_2-x_0)(x_0-x_1)\Big)\\
&\quad + \frac{1}{2}b\Big((x_1-x_0)^2(x_2-x_0) + (x_2-x_0)^2(x_0-x_1)\Big)\\
&\quad \alpha(x_1)(x_1-x_0)^2(x_2-x_0) + \alpha(x_2)(x_2-x_0)^2(x_0-x_1)\\
&= (x_2-x_0)(x_0-x_1)\Big(\frac{1}{2}b\Big((x_2-x_0) - (x_1-x_0)\Big) + \alpha(x_1)(x_0-x_1) + \alpha(x_2)(x_2-x_0)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\,b\,(x_2-x_0)(x_0-x_1)(x_2-x_1) + (x_2-x_0)(x_0-x_1)\Big(\alpha(x_1)(x_0-x_1) + \alpha(x_2)(x_2-x_0)\Big).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем выражение для $\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2)$:

$$\delta^{(2)}u(x_0;x_1,x_2) = b + 2\alpha(x_1)\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1} + 2\alpha(x_2)\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}. \tag{1.4}$$

Поскольку точка x_0 лежит между точками x_1 и x_2, то отношения $\dfrac{x_0-x_1}{x_2-x_1}$ и $\dfrac{x_2-x_0}{x_2-x_1}$ положительны и меньше 1. Поэтому

$$\begin{aligned}\left|2\alpha(x_1)\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}+2\alpha(x_2)\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}\right| &\leqslant 2|\alpha(x_1)|\frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}+2|\alpha(x_2)|\frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}\\ &\leqslant 2|\alpha(x_1)|+2|\alpha(x_2)|. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Так как $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то отсюда следует заключение леммы 1.

Получим теперь выражение для разностного уравнения Лапласа, которое будет рассматриваться в настоящей работе. Пусть функция $u(z)$ определена в области $G\subset\mathbb{R}^2$, точка $z_0\in G$ и $A_{z_0}=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ — набор из четырех точек области G, для которого отрезки $[z_1;z_2]$ и $[z_3;z_4]$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в своей внутренней точке z_0. Обозначим $r_j:=|z_j-z_0|$, $u_j:=u(z_j)$, $j=1,\ldots,4$. Положим

$$\Delta^{(*)}u(z_0)=\Delta^{(*)}u(z_0;A_{z_0}):=\delta^{(2)}_{z_1z_2}u(z_0;z_1,z_2)+\delta^{(2)}_{z_3z_4}u(z_0;z_3,z_4),$$

где величины $\delta^{(2)}_{z_1z_2}u(z_0;z_1,z_2)$ и $\delta^{(2)}_{z_3z_4}u(z_0;z_3,z_4)$ определяются по формуле (1.2). Получаем выражение

$$\Delta^{(*)}u(z_0)=2\frac{u_1r_2-u_0(r_1+r_2)+u_2r_1}{r_1r_2(r_1+r_2)}+2\frac{u_3r_4-u_0(r_3+r_4)+u_4r_3}{r_3r_4(r_3+r_4)}. \tag{1.6}$$

Будем говорить, что функция $u(z)$ удовлетворяет в точке z_0 *обобщенному разностному уравнению Лапласа* $\Delta^{(*)}u=0$, если предел $\Delta^{(*)}u(z_0;A^{(n)}_{z_0})$ равен нулю хотя бы для одной последовательности наборов узлов $\{A^{(n)}_{z_0}\}$, стягивающейся к z_0. Для разных последовательностей наборов узлов $\{A^{(n)}_{z_0}\}$, стягивающихся к точке z_0, пределы $\Delta^{(*)}u(z_0;A^{(n)}_{z_0})$ могут быть разными или не существовать.

Определим теперь условие непрерывности, которое будет накладываться на функцию $u(z)$ в точках области G.

Пусть $h(t)$, $t\geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности и функция $u(z)$ определена на некотором множестве B_ζ, $z\in B_\zeta$, у которого точка ζ является предельной. Если для некоторого значения $L_\zeta>0$ в каждой точке $z\in B_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z)-u(\zeta)|\leqslant L_\zeta h(|z-\zeta|)$, то функцию $u(z)$ будем называть *h-регулярной в точке ζ относительно множества B_ζ с коэффициентом L_ζ* или просто *h-регулярной в ζ относительно B_ζ*, если конкретное значение L_ζ неважно.

Ясно, что если функция $u(z)$ дифференцируема в точке ζ вдоль B_ζ как функция двух действительных аргументов, то при некотором $L_\zeta>0$ во всех точках $z\in B_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z)-u(\zeta)|\leqslant L_\zeta|z-\zeta|$. Это значит, что функция $u(z)$ является h-регулярной в точке ζ относительно B_ζ для линейной функции $h(t)$.

В точках $\zeta\in G$ в качестве условия непрерывности мы будем рассматривать условие h-регулярности относительно некоторого прямоугольного крестика T_ζ или некоторой звездочки S_ζ.

Теорема. *Пусть функция $u(z)$ локально суммируема в области $G\subset\mathbb{R}^2$, а функция $h(t)$, $t\geqslant 0$, является функцией типа модуля непрерывности. Если в каждой точке $\zeta\in G$ функция $u(z)$ удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа и является h-регулярной относительно некоторого прямоугольного крестика, то функция $u(z)$ гармонична в области G.*

2. Доказательство теоремы

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 2. *Пусть функция $u(z)$ имеет в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ второй пеановский дифференциал*

$$u(z) = u(z_0) + du + \frac{1}{2}d^2u + \alpha(z)|z - z_0|^2, \tag{2.7}$$

где $du = p(x{-}x_0) + q(y{-}y_0)$ и $d^2u = r(x{-}x_0)^2 + 2s(x{-}x_0)(y{-}y_0) + t(y{-}y_0)^2$, а $\alpha(z) \to 0$ при $z{\to}z_0$. Тогда для любой стягивающейся к z_0 последовательности наборов узлов $\{A_{z_0}^{(n)}\}$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{(*)}u\big(z_0, A_{z_0}^{(n)}\big) = r + t.$$

Доказательство. Пусть ℓ — произвольная прямая, проходящая через точку z_0, h — координата на ℓ с началом в z_0, а γ — угол между осями Ox и ℓ. Подставляя координаты точек $z = (x_0{+}h\cos\gamma; y_0{+}h\sin\gamma)$ прямой ℓ в выражение (2.7) получаем

$$u(z) = u(z_0) + (p\cos\gamma{+}q\sin\gamma)h + \frac{1}{2}(r\cos^2\gamma{+}2s\cos\gamma\sin\gamma{+}t\sin^2\gamma)h^2 + \alpha(z)h^2.$$

Если коэффициенты при h и h^2 в этом выражении обозначить соответственно a_ℓ и b_ℓ, то это равенство запишется так:

$$u(z) = u(z_0) + a_\ell h + \frac{1}{2}b_\ell h^2 + \alpha(z)h^2,$$

и, значит, функция $u(z)$ имеет в точке z_0 второй пеановский дифференциал вдоль ℓ, причем остаток совпадает с остатком в выражении (2.7), взятом в точке прямой ℓ. Поэтому, если точки z_1 и z_2 лежат на прямой ℓ по разные стороны от точки z_0, то согласно соотношениям (1.4) и (1.5) выполнено неравенство

$$|\delta^{(2)}_{z_1z_2}u(z_0; z_1, z_2) - b_\ell| \leqslant 2|\alpha(z_1)| + 2|\alpha(z_2)|. \tag{2.8}$$

В точке z_0 функция $u(z)$ имеет второй пеановский дифференциал. Поэтому согласно лемме 1 из работы [4] сумма вторых пеановских производных $u(z)$ в точке z_0, взятых вдоль любых двух взаимно ортогональных направлений, равна $r + t$. Для набора узлов $A(z_0)$ прямые z_1z_2 и z_3z_4 ортогональны друг другу, и, значит, $b_{z_1z_2} + b_{z_3z_4} = r + t$. Поэтому, используя оценку (2.8), получаем оценку

$$\big|\Delta^{(*)}u\big(z_0, A_{z_0}\big) - (r+t)\big| = \big|\delta^{(2)}u(z_0; z_1, z_2) + \delta^{(2)}u(z_0; z_3, z_4) - (b_{z_1z_2} + b_{z_3z_4})\big|$$
$$\leqslant \big|\delta^{(2)}u(z_0; z_1, z_2) - b_{z_1z_2}\big| + \big|\delta^{(2)}u(z_0; z_3, z_4) - b_{z_3z_4}\big| \leqslant 2\big(|\alpha(z_1)| + |\alpha(z_2)| + |\alpha(z_3)| + |\alpha(z_4)|\big).$$

Поскольку последовательность наборов $\{A_{z_0}^{(n)}\}$ стягивается к точке z_0, то из полученной оценки следует выполнение заключения леммы.

Следствия 1 и 2 непосредственно вытекают из леммы 2.

Следствие 1. *Гармоническая в области функция в каждой точке области удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа для любой последовательности наборов узлов, стягивающейся к этой точке.*

Следствие 2. *Для каждого многочлена второго порядка $u(x) = ax^2 + bx + c$ и для любого набора узлов $\{x_0, x_1, x_2\}$ выражение $\delta^{(2)}u(x_0; x_1, x_2)$ в точности равно $2a$. Поэтому, если функция $u(z)$ — многочлен второго порядка от двух переменных $u(z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0$, то для любой точки z и любого набора узлов A_z выполнено тождество $\Delta^{(*)}u\big(z, A_z\big) \equiv 2(a_{11} + a_{22})$.*

Лемма 3. *Пусть функция $u(z)$ непрерывна в области G и в каждой точке $z \in G$ удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа. Тогда функция $u(z)$ гармонична в области G.*

Доказательство леммы следует схеме И. И. Привалова [1, теорема 2]. Доказательство теоремы Привалова приведено также в примечании к работе И. Г. Петровского [5, с. 107].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение неверно и функция $u(z)$ гармонична не всюду внутри G. Возьмем круг $D \subset G$, внутри которого $u(z)$ не всюду гармонична. Пусть функция $v(z)$ гармонична внутри круга D и совпадает с непрерывной $u(z)$ на ∂D. Тогда из следствия 1 леммы 2 вытекает, что функция $w(z) := u(z) - v(z)$ удовлетворяет обобщенному разностному уравнению Лапласа всюду внутри D.

По определению $w(z) \equiv 0$ на ∂D, но не равна нулю тождественно внутри D. Будем считать, что $\max_D w(z) > 0$, в противном случае вместо функции $w(z)$ рассмотрим функцию $-w(z)$. Пусть $z_0 = (x_0, y_0)$ — точка максимума $w(z)$ в круге D: $\max_D w(z) = w(z_0) > 0$, причем точка z_0 лежит строго внутри D. Положим $\varphi(z) := w(z) + \dfrac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big)$, $z \in D$. Поскольку функция $\varphi(z)$ равна сумме функции $w(z)$ и многочлена второго порядка, то из следствия 2 леммы 2 получаем, что для любой точки ζ, лежащей внутри круга D, и любого набора узлов $A_\zeta \subset D$ выполнено

$$\Delta^{*}\varphi(\zeta, A_\zeta) = \Delta^{(*)} w(\zeta, A_\zeta) + \frac{w(z_0)}{\operatorname{diam}^2 D}. \tag{2.9}$$

По определению $\varphi(z)$ всюду внутри D выполнено неравенство $\varphi(z) \geqslant w(z)$, поэтому

$$\max_D \varphi(z) \geqslant \max_D w(z) = w(z_0) > 0.$$

Так как все точки ∂D лежат от точки z_0 (внутренней точки D) на расстоянии меньше $\operatorname{diam} D$ и на ∂D функция $w(z) \equiv 0$, то по определению $\varphi(z)$ на ∂D выполнено неравенство

$$\varphi(z) = w(z) + \frac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big) = \frac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}\big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\big) \leqslant \frac{w(z_0)}{2}.$$

Поэтому функция $\varphi(z)$ принимает максимальное значение строго внутри круга D. Пусть ζ_0 — точка максимума: $\max_D \varphi(z) = \varphi(\zeta_0)$.

Для каждой внутренней точки ζ круга D существует набор узлов A_ζ, для которого величина $\Delta^{(*)} w(\zeta, A_\zeta)$ сколь угодно мала по модулю. Пусть $A_{\zeta_0} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\} \subset D$ — набор узлов, для которого $\big|\Delta^{(*)} w(\zeta_0, A_{\zeta_0})\big| < \dfrac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D}$. Согласно соотношению (2.9) для такого набора выполнено неравенство

$$\Delta^{(*)}\varphi(\zeta_0, A_{\zeta_0}) = \Delta^{(*)} w(\zeta_0, A_{\zeta_0}) + \frac{w(z_0)}{\operatorname{diam}^2 D} > \frac{w(z_0)}{2\operatorname{diam}^2 D} > 0.$$

Полагая $\varphi_j := \varphi(\zeta_j)$ и $r_j := |\zeta_j - \zeta_0|$ при $j = 1, 2, 3, 4$, из формулы (1.6) получим, что

$$\Delta^{(*)}\varphi(\zeta_0, A_{\zeta_0}) = 2\frac{\varphi_1 r_2 - \varphi_0(r_1+r_2) + \varphi_2 r_1}{r_1 r_2 (r_1+r_2)} + 2\frac{\varphi_3 r_4 - \varphi_0(r_3+r_4) + \varphi_4 r_3}{r_3 r_4 (r_3+r_4)} > 0.$$

По крайней мере одно из слагаемых, составляющих $\Delta^{(*)}\varphi(\zeta_0)$, положительно. Пусть это, например, первое слагаемое. Преобразуя его, получаем

$$\frac{\varphi_1 r_2 - \varphi_0(r_1+r_2) + \varphi_2 r_1}{r_1 r_2 (r_1+r_2)} = \frac{r_2(\varphi_1 - \varphi_0) + r_1(\varphi_2 - \varphi_0)}{r_1 r_2 (r_1+r_2)} > 0.$$

Величины r_1 и r_2 положительны (это расстояния). Поэтому положительна по крайней мере одна из разностей $\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_0)$ или $\varphi(\zeta_2) - \varphi(\zeta_0)$, но это противоречит тому, что в точке ζ_0 функция $\varphi(z)$ достигает максимума. Следовательно, предположение о том, что функция $u(z)$ гармонична не всюду внутри области G, неверно. Лемма доказана.

Доказательства следующих лемм и самой теоремы следуют схемам доказательств соответствующих утверждений из работы [4]. Однако, поскольку изменения и в формулировках, и в доказательствах все-таки требуются, мы приводим здесь доказательства полностью.

Лемма 4 настоящей работы аналогична некоторым утверждениям Д. Е. Меньшова (см., например, [6, лемма 1]); ее доказательство основано на идеях Меньшова.

Лемма 4. *Пусть $h(t)$, $t \geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности и множество P замкнуто относительно области $G \subset \mathbb{R}^2$. Пусть функция $u(z)$ определена в области G, непрерывна на $G \setminus P$ и h-регулярна в каждой точке $\zeta \in P$ относительно некоторой звездочки $S_\zeta = S(\zeta, \sigma_\zeta)$ с k лучами. Тогда найдутся положительные числа L и σ и порция* Π *множества P (быть может, состоящая из одной точки),* $\operatorname{diam}\Pi < \sigma^2/2$, *такие, что для каждой точки $\zeta \in \Pi$ существует звездочка $K(\zeta, \sigma)$ с k лучами и коэффициентом распределения лучей не меньше σ, для всех точек z которой выполнено неравенство*

$$|u(z){-}u(\zeta)| \leqslant Lh(|z{-}\zeta|). \tag{2.10}$$

При этом для любых точек ζ' и $\zeta'' \in \Pi$ выполнено неравенство

$$|u(\zeta'){-}u(\zeta'')| \leqslant Lh(|\zeta'{-}\zeta''|). \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала проверим, что если для некоторых положительных чисел r, δ и l на звездочках $S(\zeta_1, r)$ и $S(\zeta_2, r)$, коэффициенты распределения лучей которых не меньше δ и $|\zeta_1{-}\zeta_2| < \delta r/2$, выполнены неравенства

$$|u(z){-}u(\zeta_j)| \leqslant lh(|z{-}\zeta_j|), \quad z \in S(\zeta_j, r), \quad j = 1, 2, \tag{2.12}$$

то

$$|u(\zeta_1){-}u(\zeta_2)| \leqslant \frac{8l}{\delta}\, h(|\zeta_1{-}\zeta_2|). \tag{2.13}$$

По определению коэффициента распределения лучей звездочки его величина $\delta < 1$, поэтому соотношение (2.13) выполнено, если $\zeta_2 \in S(\zeta_1, r)$ или $\zeta_1 \in S(\zeta_2, r)$. Предположим, что $\zeta_2 \notin S(\zeta_1, r)$ и $\zeta_1 \notin S(\zeta_2, r)$.

Поскольку $|\zeta_1{-}\zeta_2| < \delta r/2$, то $\zeta_2 \in D(\zeta_1, \delta r)$, а сам круг $D(\zeta_1, \delta r)$ лежит в многоугольнике $P(\zeta_1, r)$. Лучи звездочки $S(\zeta_1, r)$ разбивают многоугольник $P(\zeta_1, r)$ на k равнобедренных треугольников, причем поскольку $\zeta_2 \notin S(\zeta_1, r)$, точка ζ_2 не лежит на их боковых сторонах. Обозначим Δ тот из этих треугольников, который содержит точку ζ_2, а Δ_{ζ_2} — треугольник, который отделяет от Δ прямая, параллельная основанию Δ и проходящая через точку ζ_2.

Длины боковых сторон треугольника Δ_{ζ_2} равны $h/\sin\alpha$, где h — высота треугольника Δ_{ζ_2}, опущенная из его вершины ζ_1 на основание, а α — угол при основании. Точка ζ_2 лежит на основании Δ_{ζ_2}, поэтому $h \leqslant |\zeta_1{-}\zeta_2|$. По определению коэффициента распределения лучей звездочки его величина $\delta \leqslant \sin\alpha$. По неравенству треугольника $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}$ меньше суммы длин любых двух сторон Δ_{ζ_2}, в частности суммы длин боковых сторон Δ_{ζ_2}. Поэтому $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < 2h/\sin\alpha \leqslant 2|\zeta_1{-}\zeta_2|/\delta$. Отсюда, поскольку $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta r/2$, следует, что $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < r$.

В звездочке $S(\zeta_2, r)$ есть луч, который лежит с той же стороны от прямой, содержащей основание треугольника Δ_{ζ_2}, что и сам треугольник Δ_{ζ_2}. Обозначим этот луч s'. Луч s' исходит из точки, лежащей внутри основания треугольника Δ_{ζ_2}, входит в этот треугольник и не содержит его вершину ζ_1. Так как $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < r$, а длина луча s' равна r, то луч s' пересекает одну из боковых сторон треугольника Δ_{ζ_2}. Точку пересечения обозначим ζ'.

Поскольку точки ζ_1, ζ_2, $\zeta' \in \Delta_{\zeta_2}$, то $|\zeta_1 - \zeta'| \leqslant \operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}$ и $|\zeta_2 - \zeta'| \leqslant \operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}$. Так как точка $\zeta' \in S(\zeta_1, r) \cap S(\zeta_2, r)$, а на звездочках $S(\zeta_1, r)$ и $S(\zeta_2, r)$ выполнено неравенство (2.12), то, учитывая свойства функции $h(t)$ и то, что $\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2} < 2|\zeta_1{-}\zeta_2|/\delta$, получаем неравенство (2.13)

$$\begin{aligned}|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| &\leqslant |u(\zeta_1) - u(\zeta')| + |u(\zeta_2) - u(\zeta')| \leqslant lh(|\zeta_1 - \zeta'|) + lh(|\zeta_2 - \zeta'|)\\ &\leqslant 2lh(\operatorname{diam}\Delta_{\zeta_2}) \leqslant 2lh\Big(\frac{2}{\delta}|\zeta_1{-}\zeta_2|\Big) \leqslant \frac{8l}{\delta}\, h(|\zeta_1{-}\zeta_2|).\end{aligned}$$

Теперь покажем, что существуют числа σ, L и порция Π множества P, о которых говорилось в условии леммы. В каждой точке $\zeta \in P$ функция $u(z)$ удовлетворяет условию h-регулярности относительно некоторой звездочки $S(\zeta, \sigma_\zeta)$. Ко множеству P_m отнесем те точки ζ из P, для которых у звездочек $S(\zeta, \sigma_\zeta)$ длина лучей σ_ζ и коэффициент распределения лучей δ_ζ не меньше $1/m$ и во всех точках z которых выполнено неравенство

$$|u(z) - u(\zeta)| \leqslant m\, h(|z - \zeta|).$$

Ясно, что $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots$ и $P = \bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$. Множество P замкнуто относительно области G, поэтому имеет тип G_δ. Значит, по теореме Бэра о категориях (см., например, [7, с. 87]) найдется множество P_q, всюду плотное на некоторой порции Π множества P. Положим $\sigma := 1/q$. Уменьшая в случае необходимости величину σ и радиус круга, определяющего порцию Π, можно считать, что $\operatorname{diam}\Pi < \sigma^2/2$ и расстояние от Π до ∂G больше σ. Определим звездочки K_ζ для точек ζ порции Π.

Для точек $\zeta \in \Pi \cap P_q$ положим $K_\zeta = K(\zeta, \sigma) := S(\zeta, \sigma)$. У таких звездочек коэффициенты распределения лучей δ_ζ не меньше σ.

Если $\Pi = P_q$, то звездочки K_ζ определены для всех точек $\zeta \in \Pi$. В этом случае по определению множества P_q при $l = 1/\sigma = q$, $r = \sigma$ и $\delta = \sigma$ на звездочках K_ζ выполнено неравенство (2.12). Так как расстояние между любыми точками ζ' и ζ'' порции Π меньше $\sigma^2/2 = \delta r/2$, то, как показано в начале доказательства леммы, из выполнения на звездочках $K(\zeta', \sigma)$ и $K(\zeta'', \sigma)$ условия (2.12) следует, что для точек ζ' и ζ'' выполнено условие (2.13) с коэффициентом $8l/\delta = 8/\sigma^2 = 8q^2$. При $L := 8q^2$ соотношения (2.10) и (2.11) следуют из (2.12) и (2.13). В этом случае лемма доказана. В частности, если порция Π состоит из единственной точки множества P, то для доказательства леммы надо проверить только неравенство (2.10), а оно выполняется при любом значении $L \geqslant q$.

Предположим теперь, что множество $\Pi \setminus P_q$ непусто. Определим для точек этого множества звездочки K_ζ. Множество P_q всюду плотно на Π. Поэтому для каждой точки $\zeta \in \Pi \setminus P_q$ найдется сходящаяся к ζ последовательность $\{\zeta_n\}$ точек множества P_q. По условию леммы для точки ζ найдется звездочка $S(\zeta, r_\zeta)$ с коэффициентом распределения лучей δ_ζ, во всех точках которой выполнено неравенство (2.12) при $l = L_\zeta > 0$. Коэффициент распределения лучей всех звездочек $K(\zeta_n, \sigma)$ не меньше σ, и на них выполнено неравенство (2.12) при $l = 1/\sigma$. Поэтому, если $|\zeta - \zeta_n| < \min\{r_\zeta, \sigma\} \min\{\delta_\zeta, \sigma\}/2$, то выполняется неравенство (2.13), которое принимает вид $|u(\zeta) - u(\zeta_n)| < \dfrac{8 \max\{L_\zeta, 1/\sigma\}}{\min\{\delta_\zeta, \sigma\}} h(|\zeta - \zeta_n|)$, и, следовательно, $u(\zeta_n) \to u(\zeta)$ при $n \to \infty$.

Пусть $\varphi_n^{(j)}$ — угол, который образует с осью Ox луч $s_n^{(j)}$ звездочки K_{ζ_n}, $j = 1, \dots, k$. Последовательности углов $\{\varphi_n^{(j)}\}$ ограничены, поэтому их можно считать сходящимися (если потребуется, перейдем для этого к подпоследовательностям $\{\varphi_{n_k}^{(j)}\}$). Соответствующие пределы обозначим $\varphi^{(j)}$. Для точки ζ в качестве звездочки K_ζ возьмем звездочку с k лучами длины σ, у которой j-й луч образует с осью Ox угол величины $\varphi^{(j)}$. Поскольку звездочка K_ζ является предельным положением звездочек K_{ζ_n}, а внутренние радиусы K_{ζ_n} не меньше σ^2, то внутренний радиус звездочки K_ζ также не меньше σ^2, и поэтому коэффициент распределения лучей в звездочке $K_\zeta = K(\zeta, \sigma)$ не меньше σ. Звездочка K_ζ определена, вообще говоря, неоднозначно. Направления ее лучей могут зависеть от выбора как последовательности точек $\{\zeta_n\}$ множества P_q, сходящейся к ζ, так и подпоследовательности $\{\zeta_{n_k}\}$, для которой подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}^{(j)}\}$ сходятся.

Проверим, что при таком определении звездочек K_ζ для точек $\zeta \in \Pi \setminus P_q$ функция $u(z)$ удовлетворяет в ζ условию h-регулярности относительно K_ζ с коэффициентом $3q$, т.е. покажем, что в каждой точке $w \in K_\zeta$ выполнено неравенство

$$|u(w) - u(\zeta)| \leqslant 3q h(|w - \zeta|). \tag{2.14}$$

Естественно, надо рассмотреть только точки $w \neq \zeta$.

Звездочка K_ζ была определена как предельное положение звездочек K_{ζ_n}. Поэтому к точке w звездочки K_ζ сходится некоторая последовательность точек $w_n \in K_{\zeta_n}$. Для доказательства неравенства (2.14) покажем сначала, что последовательность $\{w_n\}$ можно выбрать так, чтобы $u(w_n) \to u(w)$ при $n \to \infty$.

Возможны случаи $w \in G \setminus P$ и $w \in P$. Если $w \in G \setminus P$, то по условию леммы функция $u(z)$ непрерывна в точке w, и поэтому в качестве $\{w_n\}$ можно взять любую последовательность точек $w_n \in K_{\zeta_n}$, сходящуюся к w.

Пусть теперь точка $w \in P$. Обозначим s' луч звездочки K_ζ, на котором лежит точка w. Так как $w \neq \zeta$ и концы лучей звездочки K_ζ самой звездочке не принадлежат, то для некоторого $d > 0$ расстояния от точки w до концов луча s' больше $4d$. Поскольку точка $w \in P$, то по условию леммы функция $u(z)$ удовлетворяет в точке w условию h-регулярности с коэффициентом L_w относительно некоторой звездочки $S(w, r_w)$, коэффициент распределения лучей которой равен некоторому δ_w. Возьмем произвольное положительное число $\rho < \delta_w \min\{d, r_w\}$.

Звездочка K_ζ была определена как предельное положение звездочек K_{ζ_n}. Поэтому, начиная с некоторого номера n_ρ расстояние от любой точки произвольного луча звездочки K_{ζ_n} до соответствующего луча звездочки K_ζ станет меньше $\rho/2$, и, наоборот, на расстоянии меньше $\rho/2$ от любой точки звездочки K_ζ есть точки, лежащие на соответствующем луче каждой из звездочек K_{ζ_n}. Обозначим s'_n лучи звездочек K_{ζ_n}, предельным положением которых является луч s', а ℓ_n — прямые, на которых лежат лучи s'_n.

Рассмотрим многоугольник $P(w, \rho/\delta_w)$ с вершинами в концах лучей звездочки $S(w, \rho/\delta_w)$. Поскольку $\rho < \delta_w r_w$, то $\rho/\delta_w < r_w$, и, значит, $S(w, \rho/\delta_w) \subset S(w, r_w)$. Поэтому в точке w функция $u(z)$ удовлетворяет условию h-регулярности с коэффициентом L_w относительно звездочки $S(w, \rho/\delta_w)$. По определению коэффициента распределения лучей круг $D(w, \rho)$ лежит в многоугольнике $P(w, \rho/\delta_w)$.

Для каждого номера $n \geqslant n_\rho$ точка w лежит на расстоянии меньше $\rho/2$ от луча s'_n звездочки K_{ζ_n}. Пусть z_n — ближайшая к w точка луча s'_n (основание перпендикуляра, опущенного из w на луч s'_n). Ясно, что $|w - z_n| < \rho/2$.

Если точка z_n лежит на звездочке $S(w, \rho/\delta_w)$, то положим $w_n := z_n$. В этом случае выполнено неравенство

$$|w - w_n| < \rho/2. \tag{2.15}$$

Предположим, что точка z_n не лежит на звездочке $S(w, \rho/\delta_w)$. Лучи звездочки $S(w, \rho/\delta_w)$ разбивают многоугольник $P(w, \rho/\delta_w)$ на k равнобедренных треугольников, причем точка z_n не лежит на их боковых сторонах (этот случай уже рассмотрен). Тот из этих треугольников, которому принадлежит точка z_n, обозначим Δ_n.

Оценим сверху и снизу расстояние от точки z_n до концов луча s'_n звездочки K_{ζ_n}, которому принадлежит z_n. Напомним, что расстояния от точки w до концов луча s' звездочки K_ζ, которому принадлежит w, больше $4d$, $\rho < d/2$ и лучи звездочки K_ζ имеют длину σ. По неравенству треугольника имеем оценки сверху

$$|z_n - \zeta_n| \leqslant |z_n - w| + |w - \zeta| + |\zeta - \zeta_n| < \rho/2 + (\sigma - 4d) + \rho/2 = \sigma - 4d + \rho < \sigma - 3d$$

и снизу

$$|z_n - \zeta_n| = |(z_n - w) + (w - \zeta) + (\zeta - \zeta_n)| \geqslant |w - \zeta| - (|z_n - w| + |\zeta - \zeta_n|) \geqslant 4d - (\rho/2 + \rho/2) = 4d - \rho > 3d.$$

Эти неравенства показывают, что при каждом $n \geqslant n_\rho$ точка z_n лежит на расстоянии больше $3d$ от концов содержащего ее луча s'_n звездочки K_{ζ_n}.

Точка z_n не лежит на звездочке $S(w, \rho/\delta_w)$. В этом случае z_n либо внутренняя точка равнобедренного треугольника Δ_n, либо лежит на его основании между вершинами. Поэтому любая прямая, проходящая через z_n, пересекает по крайней мере одну из боковых сторон треугольника Δ_n. Покажем, что в качестве точки w_n можно взять точку пересечения прямой ℓ_n

с боковыми сторонами Δ_n; если таких точек две, возьмем любую из них. Для этого надо проверить, что определенные таким образом точки w_n принадлежат пересечению звездочек S_w и K_{ζ_n} и что $u(w_n) \to u(w)$ при $n \to \infty$.

По определению точка w_n лежит на боковой стороне трегольника Δ_n, а боковые стороны Δ_n в свою очередь лежат на лучах звездочки S_w. Поэтому $w_n \in S_w$. Точка w_n лежит на прямой $\ell_n \supset s'_n$; проверим, что $w_n \in s'_n \subset K_{\zeta_n}$. Действительно, расстояние $|w_n - z_n|$ меньше $\operatorname{diam}\Delta_n$, а $\operatorname{diam}\Delta_n$ меньше суммы длин любых двух сторон треугольника Δ_n, в частности меньше суммы длин боковых сторон Δ_n, не превосходящей $2\rho/\delta_w < 2d$. Значит, $|w_n - z_n| < 2d$. Поэтому, так как расстояние от точки z_n до концов луча s'_n больше $3d$, точка w_n лежит на луче s'_n. Расстояние от точки w (вершины треугольника Δ_n) до точки w_n, лежащей на боковой стороне Δ_n, не больше длины этой стороны, которая не превосходит ρ/δ_w, и, следовательно,

$$|w - w_n| \leqslant \rho/\delta_w. \tag{2.16}$$

Так как в качестве ρ можно взять произвольное достаточно малое положительное число, то из соотношений (2.15) и (2.16) следует, что $w_n \to w$ при $n \to \infty$. Поскольку для каждого n точка w_n лежит на звездочке S_w, вдоль которой функция удовлетворяет условию h-регулярности с коэффициентом L_w, то

$$|u(w_n) - u(w)| \leqslant L_w\, h(|w_n - w|) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теперь проверим выполнение неравенства (2.14). При каждом n имеем

$$|u(w) - u(\zeta)| \leqslant |u(w) - u(w_n)| + |u(w_n) - u(\zeta_n)| + |u(\zeta_n) - u(\zeta)|. \tag{2.17}$$

Первое и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю. Оценим величину $|u(w_n)-u(\zeta_n)|$. Точки w_n лежат на звездочках K_{ζ_n}, $\zeta_n \in P_q$, а на множествах K_ζ для точек $\zeta \in P_q$ функция $u(z)$ удовлетворяет условию h-регулярности с коэффициентом q. Так как $\zeta_n \to \zeta$ и $w_n \to w$, то $|w_n-\zeta_n| \to |w-\zeta| > 0$, и при достаточно больших номерах n выполнено неравенство $|w_n-\zeta_n| < 2|w - \zeta|$. Для таких n из свойств функции $h(t)$ следует выполнение неравенства

$$|u(w_n) - u(\zeta_n)| \leqslant qh(|w_n - \zeta_n|) \leqslant qh(2|w - \zeta|) \leqslant 2qh(|w - \zeta|).$$

Величина в правой части этого соотношения положительна, поэтому, переходя в (2.17) к пределу при $n \to \infty$, получаем, что неравенство (2.14) выполнено: $|u(w) - u(\zeta)| \leqslant 3qh(|w - \zeta|)$.

Следовательно, для каждой точки ζ порции Π определена звездочка $K(\zeta, \sigma)$, на которой выполнено неравенство (2.14), которое при $l = 3q$, $r = \sigma$ и $\delta = \sigma$ совпадает с неравенством (2.12). Порция Π была определена так, что $\operatorname{diam}\Pi < \sigma^2/2 = \delta r/2$, поэтому расстояние между любыми двумя точками ζ' и ζ'' порции Π меньше $\delta r/2$. Тогда, как показано в начале доказательства леммы, из выполнения неравенства (2.12) на звездочках $K(\zeta', \sigma)$ и $K(\zeta'', \sigma)$ следует неравенство (2.13) в следующей форме:

$$|u(\zeta') - u(\zeta'')| \leqslant \frac{8l}{\delta} h(|\zeta' - \zeta''|) = \frac{24q}{\sigma} h(|\zeta' - \zeta''|). \tag{2.18}$$

Положим $L := 24q/\sigma$. При таком значении L на звездочках $K(\zeta, \sigma)$, определенных для всех точек ζ порции Π, выполнено неравенство (2.10) (следует из (2.14)), и для любых точек ζ' и ζ'' порции Π выполнено неравенство (2.11) (следует из (2.18)).

Таким образом, положительные числа L и σ и порция Π множества P, о которых говорилось в условии леммы, найдены. Лемма доказана.

Лемма 4 доказана в более общем виде, чем это требуется в настоящей работе. Поскольку прямоугольный крестик K_ζ является звездочкой S_ζ с четырьмя лучами и прямыми углами между соседними лучами, коэффициент распределения лучей в которой равен $\sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, то формулировка леммы 4 для прямоугольных крестиков примет следующий вид.

Следствие 3. *Пусть $h(t)$, $t \geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности и множество P замкнуто относительно области G. Пусть функция $u(z)$ определена в области G, непрерывна на $G \setminus P$ и h-регулярна в каждой точке $\zeta \in P$ относительно некоторого прямоугольного крестика T_ζ. Тогда найдутся такие положительные числа L и σ и такая порция Π множества P (быть может, состоящая из одной точки), $\operatorname{diam}\Pi < \sigma/2$, что для каждой точки $\zeta \in \Pi$ существует прямоугольный крестик $K(\zeta,\sigma)$, во всех точках z которого выполняется неравенство*

$$|u(z)-u(\zeta)| \leqslant Lh(|z-\zeta|), \tag{2.19}$$

а для любых точек ζ' и $\zeta'' \in \Pi$ — неравенство

$$|u(\zeta')-u(\zeta'')| \leqslant Lh(|\zeta'-\zeta''|). \tag{2.20}$$

Доказательство теоремы. Предположим, что теорема неверна и функция $u(z)$ гармонична не всюду в области G. Обозначим P исключительное множество функции $u(z)$, т.е. множество точек области G, в любой окрестности каждой из которых $u(z)$ не всюду гармонична. Ясно, что множество P замкнуто относительно области G.

В силу следствия 3 леммы 4 найдутся такие положительные числа σ и L и такая порция Π множества P, $\operatorname{diam}\Pi < \sigma/2$, для которых для каждой точки $\zeta \in \Pi$ определен прямоугольный крестик $K_\zeta = K(\zeta,\sigma)$, на котором выполнено условие (2.19), а вдоль порции Π — неравенство (2.20). Уменьшив, если потребуется σ, можно считать, что порция Π лежит на расстоянии больше σ от ∂G. Тогда для всех точек $\zeta \in \Pi$ крестики K_ζ целиком лежат в области G. Обозначим $D = D(\omega, R)$ круг, определяющий порцию Π, т.е. круг, для которого $\Pi = P \cap D$. Так как $\operatorname{diam}\Pi < \sigma/2$, то круг D можно выбрать так, что $\operatorname{diam} D < \sigma/2$.

Сначала докажем ограниченность функции $u(z)$ внутри круга $D(\omega, R/2)$. Будем считать, что точка $\omega \in \Pi$ и что $u(\omega) = 0$.

Возьмем круг $D(\eta, r)$ с центром в некоторой точке $\eta \in \Pi$ радиуса $r < \sigma/2$. Положим $\mathcal{K}(\eta,r) := \overline{\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D(\eta,r)} K(\zeta,2r)}$. Функция $u(z)$ удовлетворяет неравенству (2.20) вдоль порции Π и неравенству (2.19) на крестике K_ζ для каждой точки $\zeta \in \Pi$. Пусть z — произвольная точка $\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D(\eta,r)} K(\zeta,2r)$, а ζ — точка из $\Pi \cap D(\eta,r)$, для которой $z \in K(\zeta,2r)$; если таких точек несколько, возьмем любую из них. Тогда, так как $|z-\zeta| < 2r$ и $|\zeta-\eta| < r$, то

$$\begin{aligned} |u(z) - u(\eta)| &\leqslant |u(z)-u(\zeta)| + |u(\zeta)-u(\eta)| \leqslant Lh(|z-\zeta|) + Lh(|\zeta-\eta|) \\ &\leqslant Lh(2r) + Lh(r) \leqslant 2Lh(r) + Lh(r) = 3Lh(r). \end{aligned} \tag{2.21}$$

При замыкании множества $\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D(\eta,r)} K(\zeta,2r)$ к нему могут добавляться только точки множества $D \setminus \Pi$, в некоторой окрестности которых функция $u(z)$ гармонична и, следовательно, непрерывна, поэтому неравенство (2.21) выполняется во всех точках множества $\mathcal{K}(\eta,r)$. Поскольку $u(\omega) = 0$ и $\operatorname{diam}\Pi < \sigma$, то из соотношения (2.21) следует, что на множестве $\mathcal{K} := \overline{\bigcup_{\zeta\in\Pi\cap D} K(\zeta,\sigma)}$ функция $u(z)$ ограничена: $|u(z)| \leqslant 3Lh(\sigma) =: m$.

Для точек $\zeta \in \Pi \subset D$ интервалы, составляющие крестики K_ζ, имеют длину 2σ и их середины лежат в точке ζ круга D. Так как $\operatorname{diam} D < \sigma/2$, то каждый крестик K_ζ разбивает круг D на четыре выпуклые части. Следовательно, множество $D \setminus \mathcal{K}$ состоит из непересекающихся выпуклых компонент. Пусть Δ — одна из них.

Граница области Δ лежит на множестве $\mathcal{K}$ и, быть может, на окружности ∂D. Все точки $\partial\Delta$, лежащие внутри круга D, принадлежат множеству $\mathcal{K}$, в точках которого $|u(z)|$ принимает значения, не превосходящие m. Покажем, что в точках границы $\partial\Delta$, лежащих внутри D, граничные значения функции $|u(z)|$ относительно области Δ также не превосходят m.

Это очевидно для лежащих внутри D точек $w \in \partial\Delta$, которые принадлежит множеству $D \setminus \Pi$. Действительно, на $D \setminus \Pi$ функция $u(z)$ непрерывна, и поэтому

$$\varlimsup_{z\to w, z\in\Delta} |u(z)| = \lim_{z\to w} |u(z)| = |u(w)| \leqslant m.$$

Предположим, что на границе области Δ найдется точка $\zeta \in \Pi$, лежащая внутри круга D. Сначала покажем, что на $\partial\Delta$ может лежать не более четырех точек порции Π. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ — точки из Π, лежащие на $\partial\Delta$. Так как область Δ выпукла, то минимальная выпуклая оболочка точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ является выпуклым k-угольником, лежащим в Δ. Сумма углов выпуклого k-угольника равна $\pi(k-2)$. В то же время по определению множества $\mathcal{K}$ для каждой точки ζ_j, $j = 1, \dots, k$, область Δ лежит в прямом угле с вершиной в ζ_j, и поэтому сумма углов нашего k-угольника не превосходит $\pi k/2$. Значит, должно выполняться неравенство $\pi(k-2) \leqslant \pi k/2$, и поэтому $k \leqslant 4$.

Множество компонент множества $D\backslash\mathcal{K}$ не более чем счетно, и на границе каждой компоненты лежит не более четырех точек порции Π. Поэтому, если потребуется, можно так уменьшить радиус R круга $D = D(\omega, R)$, определяющего порцию Π, чтобы на окружности $C(\omega, R)$ не было точек порции Π, лежащих на границе какой-либо из компонент множества $D \setminus \mathcal{K}$.

Так как точек порции Π, лежащих на $\partial\Delta$, не больше четырех, то для каждой точки $\zeta \in \Pi \cap \partial\Delta$ найдется круг $D(\zeta, r) \subset D$, внутри которого нет других точек $\Pi \cap \partial\Delta$ кроме ζ и для которого пересечение $\Delta \cap C(\zeta, r)$ состоит из одной дуги. В проколотом круге $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ определим функцию $u^*(z)$, положив

$$u^*(z) := \begin{cases} \max\{|u(z)|, m+1\}, & z \in D(\zeta, r) \cap \Delta; \\ m+1 & z \in D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\} \setminus \Delta, \end{cases} \tag{2.22}$$

(m — число, ограничивающее $|u(z)|$ на множестве $\mathcal{K}$).

Функция $u^*(z)$ субгармонична на $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$. Действительно, внутри области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ функция $u^*(z)$ субгармонична как максимум двух субгармонических функций, а в некоторой окрестности каждой из остальных точек $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ функция $u^*(z) \equiv m+1$ и поэтому субгармонична. Поскольку функция $u(z)$ суммируема на $D(\zeta, r) \subset G$, то функция $u^*(z)$ суммируема на $D(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$.

Возьмем точку $w \in D(\zeta, r/2)$, $w \neq \zeta$. Внутренность круга $D(w, |w-\zeta|)$ лежит в проколотом круге $D(\zeta, r) \setminus \zeta$, внутри которого положительная субгармоническая функция $u^*(z)$ суммируема. Поэтому по неравенству среднего

$$u^*(w) \leqslant \frac{1}{\pi|w-\zeta|^2} \iint\limits_{D(w,|w-\zeta|)} u^*(z)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\pi|w-\zeta|^2} \iint\limits_{D(\zeta,2|w-\zeta|)} u^*(z)\,dx\,dy.$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла отсюда получаем, что

$$u^*(w) = o(|w-\zeta|^{-2}) \quad \text{при } w \to \zeta. \tag{2.23}$$

Воспользуемся следующей теоремой типа Фрагмена — Линделефа для субгармонических функций.

Пусть область Ω лежит в угле величины $\alpha\pi$, $0 < \alpha \leqslant 2$, с вершиной в точке $z = 0$, причем $0 \in \partial\Omega$. Пусть граничные значения субгармонической в Ω функции $\varphi(z)$ не превосходят некоторого C во всех точках $\partial\Omega \setminus \{0\}$ и при $z \to 0$, $z \in \Omega$, справедлива оценка $\varphi^+(z) = o(|z|^{-1/\alpha})$. Тогда неравенство $\varphi(z) \leqslant C$ выполняется во всей области Ω.

При замене $z = 1/w$ эта теорема следует из утверждения, приведенного в монографии И. И. Привалова [8, с. 87]. Как было отмечено самим Приваловым, сделанное в [8] предположение о том, что область Ω является углом раствора $\alpha\pi$, при доказательстве не использовалось и приведенная в [8] теорема остается верной, если Ω лежит в угле раствора $\alpha\pi$. Впрочем, этот случай легко свести к случаю угла, если вместо функции $u(z)$ рассматривать функцию $u^*(z)$, определенную внутри угла аналогично (2.22).

Крестик $K(\zeta, \sigma)$ разбивает круг $D(\zeta, r)$ на четыре сектора раствора $\pi/2$, и область $\Delta \cap D(\zeta, r)$ лежит в одном из этих секторов. Функция $u^*(z)$ определена так, что в некоторой окрестности каждой точки $\partial\Delta$, лежащей внутри $D(\zeta, r)$, кроме, быть может, самой точки ζ, тождественно $u^*(z) \equiv m+1$, и поэтому граничные значения $u^*(z)$ в этих точках относительно области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ не превосходят $m+1$. В точках замыкания дуги $\Delta \cap C(\zeta, r)$ функция $u^*(z)$ непрерывна и поэтому ограничена сверху некоторым числом C'. Следовательно, во всех точках $\partial\big(\Delta \cap D(\zeta, r)\big) \setminus \{\zeta\}$ граничные значения $u^*(z)$ относительно области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ ограничены числом $C'' := \max\{m+1, C'\}$, область $\Delta \cap D(\zeta, r)$ лежит в угле раствора $\pi/2$, и при $z \to \zeta$ выполнена оценка (2.23). Поэтому по приведенной теореме типа Фрагмена — Линделефа функция $u^*(z)$ не превосходит C'' внутри области $\Delta \cap D(\zeta, r)$. Граничные значения $u^*(z)$ в точке ζ относительно области $\Delta \cap D(\zeta, r)$ не превосходят $m+1$. В этом надо убедиться, только если $m+1 < C''$, но это вытекает из следствия леммы 4 в [4].

Таким образом, для каждой компоненты Δ множества $D \setminus \mathcal{K}$ в точках $\partial\Delta$, лежащих внутри круга D, граничные значения функции $u^*(z)$ относительно области Δ не превосходят одного и того же числа $m+1$. Теперь покажем, что функция $u(z)$ ограничена на круге $D(\omega, R/2)$ (круг $D = D(\omega, R)$ определяет порцию Π множества P). Для произвольной компоненты Δ множества $D \setminus \mathcal{K}$ рассмотрим функцию

$$u_\Delta(z) := \begin{cases} \max\{|u^*(z)|, m+2\} & z \in \Delta; \\ m+2 & z \in D(\omega, R) \setminus \Delta. \end{cases}$$

Как и раньше, проверяется, что эта функция субгармонична всюду внутри круга $D(\omega, R)$. Так как функция $|u(z)|$ интегрируема на $D(\omega, R) \subset G$, то функция $u_\Delta(z)$ интегрируема в круге $D(\omega, R)$, и

$$0 < \iint\limits_{D(\omega,R)} u_\Delta(z)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{D(\omega,R)} |u(z)|\,dx\,dy + (m+2)\pi R^2.$$

Последний член в этом неравенстве не зависит от выбора компоненты Δ, обозначим его M. Возьмем произвольную точку $\zeta \in D(\omega, R/2)$. Круг $D(\zeta, R/2)$ лежит в круге $D(\omega, R)$, внутри которого функция $u_\Delta(z)$ субгармонична. Поэтому по неравенству среднего значения

$$u_\Delta(\zeta) \leqslant \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint\limits_{D(\zeta,R/2)} u_\Delta(z)\,dx\,dy \leqslant \frac{1}{\pi(R/2)^2} \iint\limits_{D(\omega,R)} u_\Delta(z)\,dx\,dy \leqslant \frac{M}{\pi(R/2)^2} =: M'. \tag{2.24}$$

По определению функций $u_\Delta(z)$ на каждой компоненте Δ выполнено неравенство $|u(z)| \leqslant u_\Delta(z)$. Так как величина M' не зависит от выбора компоненты Δ, то из неравенства (2.24) следует, что на множестве $D(\omega, R/2) \setminus \mathcal{K}$ значения $|u(z)| \leqslant M'$. На множестве $\mathcal{K}$ значения $|u(z)| \leqslant m$. Следовательно, функция $u(z)$ ограничена в круге $D(\omega, R/2)$, причем в этом круге есть точки исключительного множества, например, точка ω.

Теперь докажем непрерывность $u(z)$ в круге $D(\omega, R/2)$.

Непрерывность функции $u(z)$ надо проверять только в точках порции Π исключительного множества. Предположим, что функция $u(z)$ имеет разрыв в точке $\zeta \in \Pi \cap D(\omega, R/2)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $u(\zeta) = 0$. Тогда $\varlimsup_{z\to\zeta} |u(z)| = \varepsilon > 0$. Поэтому найдется круг $D(\zeta, r)$, в котором выполнено неравенство $|u(z)| < 5\varepsilon/4$, причем в любой окрестности точки ζ есть точки z', в которых $|u(z')| > 3\varepsilon/4$.

По предположению $u(\zeta) = 0$, поэтому из неравенства (2.21) получаем, что на множестве $\mathcal{K}(\zeta, r)$ справедливо неравенство $|u(z)| < 3Lh(r)$. Значит, если радиус r взять достаточно малым, то на $\mathcal{K}(\zeta, r)$ (в частности, на $\Pi \cap D(\zeta, r)$) будет выполнено неравенство $|u(z)| < \varepsilon/4$. Поэтому функция $u(z)$ гармонична в некоторой окрестности каждой точки $z' \in D(\zeta, r/5)$, в которой $|u(z')| > 3\varepsilon/4$. Обозначим Δ' связную компоненту множества $D(\zeta, r/2) \setminus \mathcal{K}(\zeta, r)$, в которой лежит точка z'. В области Δ' значения $|u(z)| \leqslant 5\varepsilon/4$. Функция $u(z)$ непрерывна во всех точках $\partial\Delta' \setminus \Pi$, которые лежат внутри круга $D(\zeta, r/2)$. В этих точках $|u(z)| \leqslant \varepsilon/4$. На $\partial\Delta'$ может лежать не более четырех точек η порции Π исключительного множества, причем компонента Δ' лежит в прямом угле с вершиной в η. Так как функция $u(z)$ ограничена в Δ', то по следствию леммы 4 из [4] отсюда следует, что $\varlimsup_{z\to\eta, z\in\Delta'} |u(z)| \leqslant \varepsilon/4$. Таким образом, во всех точках $\partial\Delta'$, лежащих внутри круга $D(\zeta, r/2)$, функция $|u(z)|$ не превосходит $\varepsilon/4$ в смысле граничных значений в точках $\partial\Delta'$ относительно области Δ'. Поэтому по лемме 4 из [4] в точках $z \in \Delta'$ выполнено неравенство

$$|u(z)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \Big(\frac{5\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\Big)\frac{4}{\pi}\Big(\frac{|z-\zeta|}{r/2}\Big)^2 = \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon\frac{4}{\pi}\Big(\frac{|z-\zeta|}{r/2}\Big)^2. \tag{2.25}$$

Это неравенство выполнено и в точке z' круга $D(\zeta, r/5)$. Поэтому из (2.25) получаем, что

$$|u(z')| < \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon\frac{4}{\pi}\frac{4}{25} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это противоречит тому, что по предположению $|u(z')| > 3\varepsilon/4$.

Следовательно, предположение о том, что у функции $u(z)$ есть точки разрыва, неверно и функция $u(z)$ непрерывна. Тогда по лемме 3 функция $u(z)$ гармонична. Теорема доказана.

Автор признателен И. В. Тихонову за обсуждение и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Priwaloff I.** Sur les fonctions harmoniques // Мат. сб. 1925. Т. 23, № 3. С. 464–471.
2. **Толстов Г.П.** Об ограниченных функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа // Мат. сб. 1951. Т. 29 (71), № 3. С. 559–564.
3. **Теляковский Д.С.** Об одном обобщении теоремы Лумана — Меньшова // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 4. С. 539–549.
4. **Теляковский Д.С.** Об одном достаточном условии гармоничности // Мат. заметки. 2009. Т. 86, № 4. С. 628–640.
5. **Петровский И.Г.** Метод Перрона решения задачи Дирихле // Успехи мат. наук. 1941. Вып. 8. С. 107–114.
6. **Меньшов Д.Е.** Об асимптотической моногенности // Мат. сб. 1936. Т. 1 (43). С. 189–210.
7. **Сакс С.** Теория интеграла М.: ИЛ, 1949. 496 с.
8. **Привалов И.И.** Субгармонические функции. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 199 с.

Теляковский Дмитрий Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ
e-mail: dtelyakov@mail.ru

Поступила 23.08.2016

REFERENCES

1. Priwaloff I. Sur les fonctions harmoniques. *Mat. Sb.*, 1925, Vol. 23, no. 3, pp. 464–471 (in Russian).
2. Tolstov G.P. On bounded functions satisfying Laplace's equation, *Mat. Sb.*, 1951, vol. 29 (71), no. 3, pp. 559–564 (in Russian).
3. Telyakovskii D.S. Generalization of the Looman–Men'shov theorem. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 4, pp. 296–301.
4. Telyakovskii D.S. A sufficient condition for the harmonicity of functions of two variables. *Math. Notes*, 2009, vol 86, no. 4, pp. 591–601.
5. Petrovskii I.G. Perron's method for solving the Dirichlet problem. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1941, iss. 8, pp. 107–114 (in Russian).
6. Men'shov D.E. Ob asimptoticheskoj monogennosti. *Mat. Sb.*, 1936, vol. 1 (43), pp. 189–210.
7. Saks S. *Theory of the integral.* Warszawa, Lwow, Inst. Matem. Polskiej Akad. Nauk, 1937, 348 p.
8. Privalov I.I. *Subgarmonicheskie funkcii* (Subharmonic functions). Moscow, Leningrad: ONTI Publ., 1937, 199 p. (in Russian).

D. S. Telyakovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), National Research Nuclear University MEPhl, Moscow, 115409 Russia, e-mail: dtelyakov@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СВЕРТОК В L_2

К. Тухлиев

В работе найдены точные верхние грани наилучших приближений тригонометрическими полиномами некоторых классов периодических функций, представимых в виде свертки, структурные характеристики которых определены различными модификациями модулей непрерывности m-го порядка в метрике L_2. Найдены точные значения n-поперечников классов сверток, задаваемых указанными гладкостными характеристиками.

Ключевые слова: наилучшие приближения, периодическая функция, тригонометрический полином, модуль непрерывности m-го порядка, n-поперечники.

K. Tukhliev. Best approximations and widths of some classes of convolutions in L_2.

We find tight upper bounds for the best approximations by trigonometric polynomials of certain classes of periodic functions representable as convolutions with structural characteristics defined by various modifications of m-th order moduli of continuity in the metric of L_2. We also find exact values for the n-widths of convolution classes given by such smoothness characteristics.

Keywords: best approximation, periodic function, trigonometric polynomial, modulus of continuity of mth order, n-widths.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-284-294

Введение и постановка задач

В последнее время при решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций часто используют различные модификации классического модуля непрерывности, в которых обычный оператор сдвига $T_h(f,x) := f(x+h),\ h \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, заменяется каким-нибудь сглаживающим оператором. Так например, в случае аппроксимации периодических функций вместо оператора сдвига $T_h f$ В. А. Абиловым и Ф. В. Абиловой [1], С. Б. Вакарчуком [3], М. Ш. Шабозовым и Г. А. Юсуповым [2] был использован оператор (функция) Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt, \quad h > 0. \tag{0.1}$$

Данная работа продолжает указанную тематику и посвящена дальнейшему применению характеристик гладкости, основанных на применении оператора S_h.

Приведем нужные нам в дальнейшем обозначения. Пусть $L_2 \equiv L_2[0,2\pi]$ — пространство вещественнозначных измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Исходя из определения функции (0.1), полагаем $S_{h,i}(f) \overset{def}{=} S_h\big(S_{h,i-1}(f)\big)$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через $\mathbb{I}$ единичный оператор в L_2, определим конечные разности первого и высших порядков [1]:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x) \overset{def}{=} S_h(f,x) - f(x) = (S_h - \mathbb{I})(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f,x) \overset{def}{=} \widetilde{\Delta}_h^1\big(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f,\cdot),x\big) = (S_h-\mathbb{I})^m(f,x) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}S_{h,i}(f,x), \quad m=2,3,4,\ldots.$$

Используя указанные обозначения, введем следующую характеристику гладкости функции $f\in L_2$:

$$\Omega_m(f,t) \overset{def}{=} \sup\big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\big\|:\ 0<h\le t\big\}, \tag{0.2}$$

которую назовем *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка.*

Через $\Im_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f\in L_2$, которая имеет разложение в ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\big(a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\big), \tag{0.3}$$

величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\Im_{2n-1}$ определяется как

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf\big\{\|f-T_{n-1}\|\colon T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\big\} = \|f-s_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\Big)^{1/2},$$

где $s_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $\rho_j^2(f) \overset{def}{=} a_j^2(f)+b_j^2(f)$, $j\in\mathbb{N}$; $a_j(f),b_j(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Символом $L_2^{(r)}$ ($r\in\mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)}\equiv L_2$) обозначим множество функций $f\in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2. Всюду далее полагаем

$$\operatorname{sinc} t := \Big\{\ \frac{\sin t}{t},\quad \text{если}\quad t\ne 0;\quad 1,\quad \text{если}\quad t=0\Big\}.$$

Нетрудно показать, что для произвольной функции $f\in L_2$ имеет место равенство

$$\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f)\big\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}\,\rho_j^2(f),$$

с учетом которого для модуля непрерывности (0.2) запишем равенство

$$\Omega_m(f,t)=\sup\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m}\rho_j^2(f)\Big)^{1/2}:\ 0<h\le t\Big\}. \tag{0.4}$$

Всюду далее условимся под *весовой функцией* на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, неэквивалентную нулю на этом же отрезке. Для компактного изложения последующих результатов вводим в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,r,p}(\Omega_m,q,h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\text{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)q(t)dt\Big)^{1/p}}, \tag{0.5}$$

где $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ p\in\mathbb{R}_+,\ 0<h\le\pi/n,\ q\ge 0$ — весовая функция на отрезке $[0,h]$. Отметим, что величина (0.5) была исследована в работах [2; 3] — и при различных значениях параметров m,p и конкретных весовых функциях q — в трудах многих других математиков (см. в [3] подробную литературу с комментариями).

В работе [3] доказано следующее общее утверждение, которое является обобщением результата А. А. Лигуна [4] на указанной выше характеристике гладкости (0.2). В частности, было показано, что если $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2,\ 0<h\le\pi/n,\ q\ge 0$ — весовая функция на отрезке $[0,h]$, то

$$\{\mathcal{A}_{n,p,r}(\Omega_m;q;h)\}^{-1}\le\chi_{m,n,r,p}(\Omega_m;q,h)\le\big\{\inf_{n\le k<\infty}\mathcal{A}_{k,p,r}(\Omega_m;q;h)\big\}^{-1},\tag{0.6}$$

где

$$\mathcal{A}_{k,p,r}(\Omega_m;q;h):=\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nh)^{mp}\,q(t)dt\right)^{1/p}.$$

Вопрос о точности двухстороннего неравенства (0.6) приводит к необходимости выяснения условий на весовую функцию q, обеспечивающих выполнение равенства

$$\inf_{n\le k<\infty}\mathcal{A}_{k,p,r}(\Omega_m;q;h)=\mathcal{A}_{n,p,r}(\Omega_m;q;h).\tag{0.7}$$

Естественно, ответ на указанный вопрос должен формулироваться в терминах дифференциальных свойств весовой функции q. В работе [3] доказано, что если весовая функция q является непрерывной и дифференцируемой на отрезке $[0,h]$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(rp-1)q(t)-tq'(t)\ge 0,\quad t\in[0,h],\quad r\in\mathbb{N},\quad p\in[1/r,2],\tag{0.8}$$

то при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $0<h\le 3\pi/(4n)$ имеет место равенство (0.7) и при этом

$$\chi_{m,n,r,p}(\Omega_m;q,h)=\big(\mathcal{A}_{n,p,r}(\Omega_m;q;h)\big)^{-1}.\tag{0.9}$$

В данной работе мы продолжим исследование в этом направлении и рассмотрим сформулированную выше задачу в более общей ситуации для классов сверток, структурные характеристики функций которых характеризуются модулем непрерывности (0.2), причем для доказательства равенства (0.9) не требуется выполнения дифференциального неравенства (0.8), а необходимо лишь накладывать некоторое ограничение относительно весовой функции q .

1. Приближение некоторых классов сверток

Будем рассматривать функции $f\in L_2$, представимые в виде свертки

$$f(x)\overset{def}{=}(\mathcal{K}*\varphi)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt,\tag{1.1}$$

где $\mathcal{K}\in L_2$ — некоторая фиксированная функция (ядро); φ будет пробегать некоторое подмножество из L_2. Пусть

$$\mathcal{K}(t)\sim\sum_{l=-\infty}^{+\infty}a_le^{ilt},\quad a_l=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(t)e^{-ilt}dt,\quad l\in\mathbb{Z},\tag{1.2}$$

$$\varphi(t)\sim\sum_{l=-\infty}^{+\infty}b_le^{ilt},\quad b_l=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(t)e^{-ilt}dt,\quad l\in\mathbb{Z},\tag{1.3}$$

— ряды Фурье этих функций. Тогда, как хорошо известно, ряд Фурье свертки (1.1) имеет вид

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kb_ke^{ikx}.\tag{1.4}$$

Очевидно, что

$$E_{n-1}(f) = \|f - s_{n-1}(f)\| = \Big(\sum_{|k|\ge n} |a_k b_k|^2\Big)^{1/2}, \tag{1.5}$$

где

$$s_{n-1}(f,x) = \sum_{|k|\le n-1} a_k b_k e^{ikx}$$

— частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (1.4) функции $f \in L_2$.

В данной работе для изучения аппроксимативных свойств свертки (1.1) вводится экстремальная характеристика

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q, h) = \sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\ne\mathrm{const}}} \frac{|a_n|^{-1}E_{n-1}(\mathcal{K}*\varphi)}{\Big(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\Big)^{1/p}} = \sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\ne\mathrm{const}}} \frac{|a_n|^{-1}E_{n-1}(f)}{\Big(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\Big)^{1/p}}, \tag{1.6}$$

где $m,n\in\mathbb{N},\ 0<p, 0<h\le\pi/n,\ a_n=a_n(\mathcal{K})$ — n-й коэффициент Фурье функции $\mathcal{K}$ (см. (1.2)), q — весовая функция на $[0,h]$. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $0<p\le 2$, коэффициенты Фурье $a_k := a_k(\mathcal{K})$ функции $\mathcal{K}\in L_2$ удовлетворяют условиям*

$$|a_0| \ne 0, \quad |a_k|k^{1/p} \ge |a_{k+1}|(k+1)^{1/p}, \quad k\in\mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Если q — невозрастающая на $[0,h]$ весовая функция, то величина (1.6) *при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $0<h\le 3\pi/(4n)$ удовлетворяет равенству*

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q, h) = \Big(\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} kt)^{mp}\, q(t)dt\Big)^{-1/p}. \tag{1.8}$$

Существует свертка $f_0 := (\mathcal{K}*\varphi_0)$, $\varphi_0\in L_2$, $\varphi_0\ne\mathrm{const}$, реализующая верхнюю грань в (1.6)*, равная правой части* (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь равенством (0.4) для произвольной функции $\varphi\in L_2$ с рядом Фурье (1.3), запишем неравенства

$$\Omega_m(\varphi;t) \ge \widetilde{\Delta}_m(\varphi;t) \ge \Big(\sum_{|k|\ge n} |b_k|^2\,(1-\operatorname{sinc} kt)^{2m}\Big)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Воспользуемся упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [5, с. 104])

$$\Big[\int\limits_0^h \Big(\sum_{|k|\ge n} |f_k(t)|^2\Big)^{p/2} dt\Big]^{1/p} \ge \Big[\sum_{|k|\ge n}\Big(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p dt\Big)^{2/p}\Big]^{1/2}, \quad 0<p\le 2. \tag{1.10}$$

Заменяя в обеих частях неравенства (1.10) f_k на $f_k q^{1/p}$, получаем

$$\Big[\int\limits_0^h \Big(\sum_{|k|\ge n} |f_k(t)|^2\Big)^{p/2} q(t)dt\Big]^{1/p} \ge \Big[\sum_{|k|\ge n}\Big(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p q(t)dt\Big)^{2/p}\Big]^{1/2}. \tag{1.11}$$

Возведем первую и последнюю части неравенств (1.9) в степень p, умножим их на весовую функцию q, проинтегрируем по t в пределах от 0 до h, а затем применим соотношение (1.11). В результате придем к неравенствам

$$\Big(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\Big)^{1/p} \ge \Big[\int\limits_0^h \Big(\sum_{|k|\ge n} |b_k|^2\,(1-\operatorname{sinc} kt)^{2m}\,(q(t))^{2/p}\Big)^{p/2}\Big]^{1/p}$$

$$\geq \Bigg[\sum_{|k|\geq n}\Bigg(|b_k|^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{2/p}\Bigg]^{1/2}$$

$$=\Bigg[\sum_{|k|\geq n}|b_k|^2\Bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{2/p}\Bigg]^{1/2}=:A_{m,n,p}. \tag{1.12}$$

По условию теоремы функция q является неотрицательной и невозрастающей на отрезке $[0,h]$, поэтому, выполнив подстановку $t=\dfrac{n}{k}\tau$ при любом $k\geq n$ $(k,n\in\mathbb{N})$, будем иметь

$$\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt=\frac{n}{k}\int\limits_0^{kh/n}(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q\left(\frac{n}{k}t\right)dt$$

$$\geq\frac{n}{k}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q\left(\frac{n}{k}t\right)dt\geq\frac{n}{k}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt. \tag{1.13}$$

Условие (1.7) влечет неравенство $|a_n|\,n^{1/p}\geq|a_k|\,k^{1/p}$ при $k\geq n$, которое эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{n}{k}\geq\left(\frac{|a_k|}{|a_n|}\right)^p,\quad k\geq n. \tag{1.14}$$

Учитывая (1.14), из неравенства (1.13) получаем

$$\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp}\,q(t)dt\geq\left|\frac{a_k}{a_n}\right|^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt.$$

Пользуясь последним неравенством, продолжим (1.12):

$$A_{m,n,p}\geq\frac{1}{|a_n|}\Bigg[\sum_{|k|\geq n}|a_kb_k|^2\Bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{2/p}\Bigg]^{1/2}$$

$$=\frac{1}{|a_n|}\Bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{1/p}\Bigg(\sum_{|k|\geq n}|a_kb_k|^2\Bigg)^{1/2}$$

$$=\frac{1}{|a_n|}\Bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{1/p}E_{n-1}(f). \tag{1.15}$$

Из неравенства (1.15) для произвольной функции $\varphi\in L_2$, $\varphi\neq\mathrm{const}$ получаем

$$\frac{|a_n|^{-1}\,E_{n-1}(\mathcal{K}*\varphi)}{\left(\int_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\right)^{1/p}}\leq\Bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{-1/p}. \tag{1.16}$$

Следовательно, для характеристики (1.8) имеет место оценка сверху

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m;q,h)\leq\Bigg(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\Bigg)^{-1/p}. \tag{1.17}$$

Для получения оценки снизу указанной величины достаточно рассмотреть в L_2 функцию (свертку)

$$f_0(x) = (\mathcal{K} * \varphi_0)(x) = a_n \cos nx, \quad \varphi_0(t) = \cos nt, \tag{1.18}$$

затем воспользоваться определением величины (1.6), а также легко проверяемыми соотношениями

$$E_{n-1}(f_0) = |a_n|, \quad \Omega_m(\varphi_0; t) = (1 - \operatorname{sinc} nt)^m, \quad 0 < nt \le 3\pi/4. \tag{1.19}$$

Таким образом, для сверток (1.18) в силу (1.19) получаем оценку снизу

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q, h) \ge \frac{|a_n|^{-1} E_{n-1}(\mathcal{K} * \varphi_0)}{\Big(\int_0^h \Omega_m^p(\varphi_0; t) q(t) dt\Big)^{1/p}}$$

$$= \bigg(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} q(t) dt\bigg)^{-1/p}, \quad 0 < nh \le 3\pi/4. \tag{1.20}$$

Требуемое равенство (1.8) вытекает из сопоставления оценок сверху (1.17) и снизу (1.20), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Заметим, что для произвольного $a > 0$ функция $q_*(t) := te^{-at}$ является весовой и убывающей на отрезке $[0, h]$. В силу (1.8) приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть* $0 < p \le 2$, $q_*(t) := te^{-at}$, *где* $a > 0$, $0 \le t \le h$ $(0 < h \le 3\pi/(4n))$, *коэффициенты Фурье функции* $\mathcal{K} \in L_2$ *удовлетворяют условиям* (1.7) *теоремы* 1. *Тогда при любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m; q_*, h) = \bigg(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp} te^{-at} dt\bigg)^{-1/p}.$$

2. Значение n-поперечников некоторых классов функций

Приводим необходимые нам в дальнейшем определения. Пусть S — единичный шар в пространстве L_2; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2; $\Lambda_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}\colon L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^\perp\colon L_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\sup\{\|f\|\colon f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset L_2\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - g\|\colon g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathcal{L}f\|\colon f \in \mathfrak{M}\} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_2\},$$

$$p_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathcal{L}^\perp f\|\colon f \in \mathfrak{M}\Big\}\colon \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\Big\}\colon \Lambda_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками.* Известно [5; 6], что перечисленные выше n-поперечники монотонны по n и в гильбертовом пространстве L_2 связаны соотношениями:

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \le d^n(\mathfrak{M}; L_2) \le d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = p_n(\mathfrak{M}; L_2). \tag{2.1}$$

Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $0<h\le 3\pi/(4n)$, $0<p\le 2$ и q — неотрицательная непрерывная неубывающая на отрезке $[0,h]$ функция. В пространстве L_2 определим класс функций

$$W\overset{def}{=}W(m,n,p,q,h)=W(m,n,p,q,h;\mathcal{K})=\left\{\mathcal{K}*\varphi\colon\ \int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\le 1\right\}.$$

Пусть $\Phi(t)$ — произвольная возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\Phi(0)=0$. При тех же ограничениях на параметры m,n,h,p, что и выше, и в случае, когда весовая функция $q\equiv 1$, введем в рассмотрение класс функций

$$W(\Phi;\mathcal{K})\overset{def}{=}W(m,n,p,h;\Phi;\mathcal{K})=\left\{\mathcal{K}*\varphi\colon\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)dt\le\Phi^p(h)\right\}.\qquad(2.2)$$

Полагая в точке $t=0$ значение функции $\operatorname{sinc}t$ равным 1, следуя работе [3], через t_* обозначим значение аргумента $\operatorname{sinc}t$, при котором она достигает наименьшего значения на множестве $\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$. Заметим, что число t_* является наименьшим положительным корнем уравнения $t=\operatorname{tg}t$. Легко вычислить, что $4,49<t_*<4,51$. Далее вводим обозначение

$$\big(1-\operatorname{sinc}t\big)_*:=\Big\{\,1-\operatorname{sinc}t,\ \ \text{если } 0<t\le t_*;\ \ 1-\operatorname{sinc}t_*,\ \text{если } t_*\le t<\infty\Big\}.$$

Теорема 2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\le 2$, $0<h\le t_*$, q — непрерывная невозрастающая весовая функция на отрезке $[0,h]$, коэффициенты Фурье функции $\mathcal{K}\in L_2$ удовлетворяют условиям* (1.7) *теоремы* 1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W;L_2)=\lambda_{2n-1}(W;L_2)=E_{n-1}(W)_{L_2}=|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{-1/p},\qquad(2.3)$$

где $E_{n-1}(W)_2=\sup\{E_{n-1}(f)_2\colon f\in W\}$; $\lambda_k(\cdot)$ — любой из k-поперечников $b_k(\cdot),d^k(\cdot),d_k(\cdot)$, $\lambda_k(\cdot)$, $p_k(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (1.16) для произвольной функции $\varphi\in L_2$, $\varphi\ne$ const имеем

$$E_{n-1}(f)\le|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi,t)q(t)dt\right)^{1/p},$$

откуда, учитывая соотношение (2.1), получаем оценку сверху для всех перечисленных выше n-поперечников класса W:

$$\lambda_{2n}(W;L_2)\le\lambda_{2n-1}(W;L_2)\le E_n(W)_{L_2}\le|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}.\qquad(2.4)$$

С целью получения оценки снизу в подпространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$ порядка n рассмотрим шар

$$S_{2n+1}\overset{def}{=}\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}\colon\|T_n\|\le|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и докажем его принадлежность классу W.

Пусть $T_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\in S_{2n+1}$. Тогда $\|T_n\|^2=\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$. Так как согласно условиям теоремы $a_k\neq 0$ при всех k, то функция

$$\varphi(t)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{c_k}{a_k}e^{ikt}$$

является решением уравнения свертки

$$T_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt. \tag{2.5}$$

Простое вычисление приводит к следующему неравенству:

$$\Omega_m(\varphi;t)\leq(1-\operatorname{sinc}nt)_*^m\Big(\sum_{k=-n}^{n}\left|\frac{c_k}{a_k}\right|^2\Big)^{1/2}$$

$$\leq(1-\operatorname{sinc}nt)_*^m\,|a_n|^{-1}\Big(\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2\Big)^{1/2}=(1-\operatorname{sinc}nt)_*^m\,|a_n|^{-1}\|T_n\|. \tag{2.6}$$

Для доказательства $S_{2n+1}\subset W$ достаточно показать, что $\displaystyle\int_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\leq 1$.

Возведем в степень p $(0<p\leq 2)$ первую и последнюю части неравенств (2.6), проинтегрируем полученное неравенство по t в пределах от 0 до h и, приняв во внимание неравенства $0<h\leq t_*$, придем к соотношениям

$$\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)q(t)dt\leq|a_n|^{-p}\|T_n\|^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)_*^{pm}\,q(t)dt$$

$$=\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1}=1.$$

Таким образом, вложение $S_{2n+1}\subset W$ доказано. Отсюда с учетом соотношения (2.1) и определения бернштейновского поперечника получаем оценку снизу всех n-поперечников:

$$\lambda_{2n}(W;L_2)\geq b_{2n}(W;L_2)\geq b_{2n}(S_{2n+1},L_2)\geq|a_n|\left(\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{pm}\,q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.7}$$

Требуемое равенство (2.3) получаем из сопоставления неравенств (2.4) и (2.7), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Рассмотрим одно конкретное применение теоремы 1.

Пусть $r\in\mathbb{R}_+$ $(r>1)$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ – произвольное действительное число. Положим

$$\mathscr{B}_{r,\alpha}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-r}\cos\Big(kx-\frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{2.8}$$

При $r=\alpha$, $r,\alpha\in\mathbb{N}$ функция (2.8) есть многочлен Бернулли. Обозначим через $W_\alpha^{(r)}L_p$, $r\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $1\leq p\leq\infty$ класс непрерывных периодических функций f, допускающих представление (см. [7; 8, с. 51])

$$f(x)=C+\big(\mathscr{B}_{r,\alpha}*\varphi\big)(x), \tag{2.9}$$

где $C \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $\varphi \perp \mathrm{const}$.

Из представления (2.9), в частности, следует, что если $r = \alpha$, $r, \alpha \in \mathbb{R}_+$, то $\varphi(t) = f^{(r)}(t)$ — производная дробная порядка r в смысле Вейля [7], а $W_r^{(r)} L_2$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ есть класс функций $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$, у которых дробная производная $f^{(r)}$ в смысле Вейля удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\| \le 1$.

Положим

$$W^{(r)}(h, q) \overset{def}{=} \left\{ f \colon f \in W_\alpha^{(r)} L_2, \ \int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}; t) q(t) dt \le 1 \right\}.$$

Поскольку коэффициенты ядра $\mathscr{B}_{r,r}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ удовлетворяют соотношениям

$$|a_n| = n^{-r} \quad (n \in \mathbb{N},\, r \in \mathbb{R}_+,\, r > 1), \quad \text{то} \quad |a_j| j^{1/p} \ge |a_{j+1}| (j+1)^{1/p}, \quad j \in \mathbb{N},$$

выполняется для $1/r < p \le 2$ $(r > 1,\, r \in \mathbb{R}_+)$. В силу теоремы 2 мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ $(r \in \mathbb{R}_+, r > 1)$ *и* $0 < h \le \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W^{(r)}(h, q); L_2) = \lambda_{2n-1}(W^{(r)}(h, q); L_2)$$

$$= E_n(W^{(r)}(h, q))_{L_2} = n^{-r} \left(\int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{pm}\, q(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ *и мажоранта* Φ *при любых значениях* $h \in \mathbb{R}_+$ *удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)} \right)^p \ge \frac{\pi}{nh} \frac{\displaystyle\int_0^{nh} (1 - \operatorname{sinc} t)_*^{mp}\, dt}{\displaystyle\int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp}\, dt}. \tag{2.10}$$

Коэффициенты Фурье функции (ядро) $\mathcal{K}$ *удовлетворяют условиям* (1.7) *теоремы* 1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi; \mathcal{K}); L_2) = \lambda_{2n-1}(W(\Phi; \mathcal{K}); L_2) = E_{n-1}(W(\Phi; \mathcal{K}))_{L_2}$$

$$= |a_n| \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{mp}\, d\tau \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.11}$$

где $\lambda_k(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению* (2.10)*, не пусто.*

Доказательство. Из соотношения (1.16) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ запишем оценку сверху величины ее наилучшего полиномиального приближения при $q(t) \equiv 1$:

$$E_{n-1}(f) \le |a_n| \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp}\, dt \right)^{-1/p} \left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \Omega_m^p(\varphi; t) dt \right)^{1/p}. \tag{2.12}$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.12) $h = \pi/n$, имеем

$$E_{n-1}(f) \le |a_n| \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp}\, dt \right)^{-1/p} \left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^p(\varphi; t) dt \right)^{1/p}. \tag{2.13}$$

Учитывая определение класса $W(\Phi;\mathcal{K})$ из неравенства (2.13), на основании соотношения (2.1) и формулы (2.2) получаем

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\le\lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\le\lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)$$
$$\le E_{n-1}(W(\Phi;\mathcal{K}))_{L_2}\le|a_n|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.14}$$

Приступая точно так же, как и в предыдущей теореме, для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника $b_{2n-1}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)$ в подпространстве $\Im_{2n+1}$ рассмотрим шар

$$S^*_{2n+1}\overset{def}{=}\left\{T_n\in\Im_{2n+1}\colon\|T_n\|\le|a_n|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем, что при выполнении ограничения (2.10) выполняется включение $S^*_{2n+1}\subset W(\Phi;\mathcal{K})$. Так как для произвольного полинома $T_n\in S^*_{2n+1}$, представимого в виде свертки (2.5), имеет место неравенство (2.6), то, пользуясь указанным неравенством и ограничением (2.10), для произвольного $h\in\mathbb{R}_+$ получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^p(\varphi;t)dt\le|a_n|^p\|T_n\|^p\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)_*^{mp}\,dt$$
$$\le\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}t)^{mp}\,dt\right)^{-1}\frac{1}{nh}\int\limits_0^{nh}(1-\operatorname{sinc}t)^{mp}\,dt\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\le\Phi(h).$$

Последнее неравенство означает, что $S^*_{2n+1}\subset W(\Phi;\mathcal{K})$, а потому, используя определение бернштейновского n-поперечника, с учетом соотношения (2.1) имеем

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\ge b_{2n}(W(\Phi;\mathcal{K});L_2)\ge b_{2n}(S^*_{2n+1};L_2)$$
$$\ge|a_n|\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.15}$$

Сопоставляя оценки сверху (2.14) и оценку снизу (2.15), получаем требуемые равенства (2.11).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$\Phi_*(t)\overset{def}{=}t^{\alpha/p},\quad 0<p\le2,$$

где

$$\alpha\overset{def}{=}\pi\left(\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1}-1,\quad mp<\alpha<2mp,$$

удовлетворяет условию (2.10) [3, с. 509–512], чем и завершаем доказательство теоремы 3.

Из доказанной теоремы в случае $\mathcal{K}\equiv\mathscr{B}_{r,r}$ вытекает

Следствие 3. *В условиях теоремы* 3 *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi;\mathscr{B}_{r,r});L_2)=\lambda_{2n-1}(W(\Phi;\mathscr{B}_{r,r});L_2)=E_{n-1}(W(\Phi;\mathscr{B}_{r,r}))_{L_2}$$
$$=\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\operatorname{sinc}\tau)^{mp}\,d\tau\right)^{-1/p}n^{-r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 803–811.
2. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 6. С. 1414–1427.
3. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона — Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
4. **Лигун А.А.** Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.
5. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 291 p.
6. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 325 с.
7. **Стечкин С.Б.** О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1956. Т. 20, № 5. С. 643–648.
8. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.

Тухлиев Камаридин
канд. физ.-мат. наук, доцент
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Поступила 08.09.2016

REFERENCES

1. Abilov V.A. Abilova F.V. Problems in the approximation of 2π-periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 6, pp. 749–757.
2. Shabozov M. Sh., Yusupov G.A. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 1124–1136.
3. Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Jackson-Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2. *Math. Notes.*, 2012, vol. 92, no. 4, pp. 458–472.
4. Ligun A.A. Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in an L_2 space. *Math. Notes.*, 1978, vol. 24, no. 6, pp. 917–921.
5. Pinkus A. *n-widths in approximation theory.* Berlin: Springer-Verlag, 1985, 291 p.
6. Tikhomirov V.M. *Some problems in approximation theory.* M.: MGU Pupl., 1976, 325 p. (in Russian).
7. Stechkin S.B. On best approximation of certain classes of periodic functions by trigonometric polynomials. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1956, vol. 20, no. 5, pp. 643–648 (in Russian).
8. Korneichuk N.P., Ligun A.A., Doronin V.G. *Approksimaciya s ogranicheniyami* (Approximation with constraints). Kiev: Naukova Dumka, 1982, 252 p. (in Russian).

K. Tukhliev., Cand. Sci. (Phys.-Math.), Khudjand state university named after acad. B. Gafurov, Khudjand, 735700 Tajikistan, e-mail: kamaridin.t54@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.977

О ГАМИЛЬТОНИАНЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ[1]

Д. В. Хлопин

Исследуются необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель не обязательно экспоненциального вида. В качестве критерия оптимальности рассматривается равномерно обгоняющий критерий. В терминах предельных градиентов платежной функции описано поведение на бесконечности пары (сопряженная переменная, гамильтониан) в окрестности оптимальной траектории. Это позволяет гарантировать существование соответствующего оптимальному процессу предельного решения принципа максимума Понтрягина. Обсуждаются предположения, гарантирующие при этом необходимость как условия типа Мишеля (Michel condition) для максимизированного гамильтониана, так и предложенной для сопряженной переменной в работах Асеева и Кряжимского формулы типа формулы Коши; в частности, это дополняет принцип максимума до полной системы соотношений. Отдельно рассмотрен случай дисконтирующего множителя вида $(1+t)^{-s}$.

Ключевые слова: задача управления на бесконечном промежутке, необходимые условия, условия трансверсальности на бесконечности; принцип максимума Понтрягина, условие Мишеля, равномерно обгоняющее управление

D. V. Khlopin. On the Hamiltonian in infinite horizon control problems.

We study necessary optimality conditions for infinite horizon control problems with performance functional containing a discounting factor of not necessarily exponential form. A uniformly overtaking criterion is considered as an optimality criterion. The behavior of the pair “adjoint variable–Hamiltonian” at infinity in a neighborhood of an optimal trajectory is described in terms of limiting gradients of the payoff function. This guarantees the existence of the limiting solution of the Pontryagin maximum principle corresponding to the optimal process. We discuss the assumptions that provide the necessity of both a condition of the Michel type for the maximized Hamiltonian and a formula of the Cauchy type for the adjoint variable proposed in papers by Kryazhimskii and Aseev. In particular, this extends the maximum principle to a complete system of relations. The case of a discounting factor of the form $(1+t)^{-s}$ is considered separately.

Keywords: infinite horizon control problem, necessary conditions, transversality condition at infinity, Pontryagin maximum principle, Michel condition, uniformly overtaking optimal control.

MSC: 49K15, 91B62, 49J52

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-295-310

Введение

Впервые необходимые условия оптимальности для задач управления на бесконечном промежутке (с фиксированным правым концом) были показаны Л. С. Понтрягиным и его учениками на рубеже 1950-60-х гг. Существенно позднее Халкиным в максимально общей для таких задач постановке необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина были показаны, но эти соотношения не содержали какого-либо краевого условия на бесконечности, следовательно, не являлись полной системой соотношений.

Предложено достаточно много краевых условий на бесконечности, самыми простыми из них являются построенные по аналогии с задачами на конечном промежутке условия

$$\lim_{T\to\infty}\psi(T)=0,\quad \lim_{T\to\infty}H^*[T]=0;$$

в общем случае они не являются необходимыми условиями.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00505).

Принципиальной сложностью для получения в подобного рода задачах дополнительных условий на бесконечности, условий трансверсальности, является необходимость нахождения для сопряженного уравнения (т. е. для линейной системы) такой асимптотики, что была бы выполнена хотя бы для одного, но и не для континуального числа решений. Впервые это было сделано в [1] для линейного случая и при достаточно сильных предположениях переходом к подходящему функциональному пространству, содержащему в точности одну сопряженную переменную. Там же для этой сопряженной переменной была найдена формула, дополняющая принцип максимума до полной системы соотношений. Указать для нелинейного случая соответствующую формулу (типа формулы Коши) в виде несобственного интеграла удалось в ряде работ С. М. Асеева и А. В. Кряжимского (затем и В. М. Вельева, А. О. Белякова) [2–5]. В частности, эта формула дополняет систему принципа максимума до полной системы соотношений при дополнительных предположениях, гарантирующих абсолютную сходимость соответствующего несобственного интеграла (например, условие доминирования дисконтирующего множителя [2, § 12; 3, § 4] или условие [4, (A2),(3.10)]).

Другой метод модификации условия $\psi(T) \to 0$ $(T \to \infty)$ был предложен Сейерстадом в [6, Theorem 8.1]: нужно искать сопряженную переменную как предел решений сопряженного уравнения, зануляющихся во все более поздние моменты времени. Как было показано в [7, Corollary 2], принцип максимума с таким дополнительным требованием на сопряженную переменную, как необходимое условие оптимальности (для слабо равномерного критерия оптимальности), не требует каких-либо дополнительных предположений, в том числе на асимптотическое поведение целевой функции, траекторий или решений сопряженного уравнения. Более того, начальное значение $\psi(0)$ сопряженной переменной такого решения (предельного решения [8] принципа максимума) также может быть выражено с помощью несобственного интеграла, включая в себя формулу типа Коши как частный случай, см. [7, § 5]. Еще одно, эквивалентное данному, представление для $\psi(0)$ было получено в терминах предельных градиентов платежной функции (по начальной позиции), см. [8, Theorem 3.1].

Необходимость условия $H^*[T] \to 0(T \to \infty)$ был показана Мишелем [9, Theorem] для задач управления с автономной динамикой и дисконтирующим множителем экспоненциального типа при достаточно мягких предположениях. Более того, там же была показана явная формула [9, (9)] для начального значения максимизированного гамильтониана (а значит, и для зависимости $t \mapsto H^*[t]$). Позже метод был распространен на задачи более общего вида (см. ссылки в [2; 10]). В [10] было замечено, что для дисконтирующего множителя в виде экспоненты формула [9, (9)] для максимизированного гамильтониана также может быть выражена в виде предельного градиента (уже по времени) от платежной функции и этот максимизированный гамильтониан можно выделить среди решений соответствующего дифференциального уравнения (см. (3.1a)) как предел решений того же уравнения, зануляющихся во все более поздние моменты времени.

В данной работе показывается, уже для задач управления с дисконтирующим множителем общего вида, что пара (сопряженная переменная, гамильтониан) может быть описана в том же виде: и как предельный градиент платежной функции, и как предел решений системы, построенной на основе системы принципа максимума, решений, у которых компоненты зануляются вдоль одной и той же неограниченно возрастающей последовательности моментов времени. Показано, что существование такой пары (сопряженная переменная, гамильтониан) является необходимым условием для оптимальности, в частности, если целевой функционал сходится (в смысле Римана) вдоль оптимальной траектории. Отмечен также ряд условий на асимптотики, выполнение которых позволяет гарантировать необходимость формулы типа Коши для сопряженной переменной и соответствующего аналога формулы [9, (9)] для гамильтониана, дополняя тем самым систему принципа максимума до полной системы соотношений. В случае дисконтирующего множителя вида $(1+t)^{-s}$ для этого требуется лишь равномерная ограниченность платежной функции и ее производной по начальному положению. Сходный результат, также в предположении равномерной ограниченности, но для случая линейной динамики с выпуклой функции мгновенной полезности и дисконтирующим множителем общего вида, был недавно получен принципиально иным способом в [5, Remark 1].

1. Основные определения и постановки

1.1. Управляемая система

Введем временной интервал $\mathbb{T} \triangleq \mathbb{R}_{\geq 0}$ и фазовое пространство исходной управляемой системы, некоторое конечномерное евклидово пространство $\mathbb{X} \triangleq \mathbb{R}^m$. Рассмотрим задачу минимизации на бесконечном промежутке

$$l(b) + \int_0^\infty r(t) f_0(x,u)\, dt \to \min, \tag{1.1a}$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \tag{1.1b}$$

$$x(0) \in \mathcal{C}. \tag{1.1c}$$

Здесь функции r, f_0 скалярны; x — фазовая переменная, принимающая значения в $\mathbb{X}$; u — управляющий параметр из некоторого замкнутого подмножества U конечномерного евклидового пространства. В качестве класса допустимых управлений возьмем множество $\mathcal{U} \triangleq L^\infty(\mathbb{T}, U)$.

Мы будем предполагать выполненными следующие условия.

1. Непустое множество $\mathcal{C}$ замкнуто в $\mathbb{X}$.

2. Функция $l : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ локально липшицева.

3. Функция $f : \mathbb{X} \times U \to \mathbb{X}$ измерима по Борелю по u и непрерывно дифференцируема по x.

4. Для всякого допустимого управления $u \in \mathcal{U}$ отображение $(t,x) \mapsto f(x,u(t))$ удовлетворяет условию подлинейного роста.

5. Функция $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, а ее производная — локально липшицева.

6. Функция $f_0 : \mathbb{X} \times U \to \mathbb{R}$ измерима по Борелю по u, непрерывно дифференцируема по x и полунепрерывна снизу по u.

7. Функции $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f_0}{\partial x}$ измеримы по Борелю по u и локально липшицевы по x.

Теперь для каждого допустимого управления $u.$ и начальной позиции $b \in \mathbb{X}$ найдется решение системы (1.1b) с условием $x(0) = b$. Это решение единственным образом может быть продолжено на все $\mathbb{T}$, обозначим его через $x(b,u;\cdot)$.

Пару (x,u) назовем допустимым управляемым процессом, если $u \in \mathfrak{U}$, $x(0) \in \mathcal{C}$, $x(\cdot) = x(x(0),u;\cdot)$.

1.2. О критериях оптимальности

Будем предполагать, что для некоторого допустимого управляемого процесса (x^*,u^*) найдутся такие сходящаяся к нулю последовательность чисел δ_n и неограниченно возрастающая последовательность чисел τ_n, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для всех положительных $T \in [\tau_n - 1/2, \tau_n + 1/2]$ выполнено

$$l(x^*(0)) + \int_0^T r(t) f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big) dt - \delta_n^2 \leq \inf_{(b,u)\in\mathcal{C}\times\mathcal{U}} \left(l(b) + \int_0^T r(t) f_0\big(x(b,u;t), u(t)\big) dt \right). \tag{1.2}$$

Зафиксируем такие процесс (x^*,u^*) и последовательность чисел τ_n.

Введем теперь вектор $b_* \overset{\triangle}{=} x^*(0)$ и скалярную функцию J:

$$J(b,\Delta;T) \quad \overset{\triangle}{=} \quad \int\limits_0^T r(t+\Delta) f_0\big(x(b,u^*;t),u^*(t)\big)\,dt \quad \forall\, b\in\mathbb{X},\quad T>0,\quad \Delta\in\mathbb{R}.$$

Приведем для сравнения с условием (1.2) следующие критерии оптимальности [11].

Если допустимый процесс (x^*,u^*) при некоторой неограниченно возрастающей последовательности моментов времени t_n, при некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел β_n удовлетворяет условию

$$l(x^*(0)) + \int\limits_0^{t_n} f_0\big(t,x^*(t),u^*(t)\big)\,dt - \beta_n^2 \le \inf_{(b,u)\in\mathcal{C}\times\mathcal{U}} \left(l(b) \quad + \quad \int\limits_0^{t_n} f_0\big(t,x(b,u;t),u(t)\big)\,dt \right), \quad (1.3)$$

то назовем этот процесс *слабо равномерно оптимальным* (weakly uniformly overtaking optimal) в задаче (1.1a)–(1.1c) или, точнее, t-*оптимальным.* Если допустимый процесс (x^*,u^*) является t-оптимальным для любой неограниченно возрастающей последовательности чисел t_n, то назовем его *равномерно оптимальным* в задаче (1.1a)–(1.1c).

Отметим, что

1. Условие (1.2) выполнено, если (x^*,u^*) равномерно оптимален, а предел

$$J_{**} \overset{\triangle}{=} \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T r(t) f_0(x^*(t),u^*(t))\,dt \in \mathbb{R} \qquad (1.4)$$

конечен. Такой критерий применялся, в частности, в [10]. Более сильные, чем (1.4), предположения использовались, например, в [13]. В некоторых случаях исходную задачу с равномерно оптимальным управлением можно свести к задаче с выполненным условием (1.2) (см., например, [10, Corollary 3]). Отметим, что в случае равномерно оптимального управления в качестве τ можно взять произвольную неограниченно возрастающую последовательность моментов времени.

2. Условие (1.2) выполнено, если u^* слабо равномерно оптимально, и $r(t)f_0(x(t),u(t))$ равномерно по всем допустимым процессам стремится к 0 при $t\to+\infty$. Сходные условия, см., например, в [2, (A3); 12].

1.3. О предельных градиентах

Пусть даны некоторое конечномерное евклидово пространство E и полунепрерывная снизу функция $g: E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (см. [14, § 1.4]). Вектор $\zeta\in E$ назовем *проксимальным градиентом функции* g *в* $y\in E$, если для некоторых окрестности Ω точки y и положительного числа σ выполнено $g(\xi)\ge g(y)+\zeta(\xi-y)-\sigma||\xi-y||^2$ для всех $\xi\in\Omega$. Множество всех проксимальных градиентов в y обозначим через $\partial^P g(y)$ и назовем *проксимальным субдифференциалом.* Это множество непусто для всех y из некоторого плотного в $\{\xi\,|\,g(\xi)<+\infty\}$ множества. Введем предельный субдифференциал $\partial^1 g(y)$ функции g в точке y как множество всех $\zeta\in E$, для которых

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, y_n\in\mathbb{X},\quad \zeta_n\in\partial^P g(y_n),\quad y_n\to y, \zeta_n\to\zeta,\quad g(y_n)\to g(y).$$

Если g липшицева в окрестности точки y, то $\partial^1 g(y)$ непусто, более того, $co\,\partial^1 g(y)=\partial^{Clarke} g(y)$. Через $N^{\mathcal{C}}(y)$ будем обозначать предельный нормальный конус множества $\mathcal{C}$ в точке y.

Следуя [8], подобным образом введем субградиент на бесконечности или, более точно, вдоль неограниченно возрастающей последовательности моментов времени τ_n. Зададим $\mathcal{T}\overset{\triangle}{=}\{\tau_n\,|\,n\in$

$\mathbb{N}\}$. Для дифференцируемой функции $g : E \times \mathbb{T} \to \mathbb{X}$ введем предельный и предельный сингулярный субдифференциалы ($\partial^1 g$ и $\partial^0 g$ соответственно) в бесконечно удаленной точке (y, ∞_τ) правилом

$$\partial^\lambda g(y, \infty_\tau) = \big\{\zeta \,|\, \forall n \in \mathbb{N} \exists y_n \in E, t_n \in \mathcal{T}, \lambda_n \in \mathbb{T}, \zeta_n \in \partial^1 g(y_n, t_n),$$
$$y_n \to y, t_n \to \infty, \lambda_n \to \lambda, \lambda_n \zeta_n \to \zeta, g(y_n, t_n) - g(y, t_n) \to 0\big\}.$$

Далее нам также потребуется рассматривать такие градиенты для отображений $\mathbb{X} \ni x \to J(x, s; T)$, $\mathbb{T} \ni t \to J(b, t; T)$ при фиксированных $b \in \mathbb{X}, s \in \mathbb{T}$. Будем обозначать их через $\partial_x^\lambda J(b, s; \infty_\tau)$, $\partial_t^\lambda J(b, s; \infty_\tau)$ соответственно.

2. Принцип максимума Понтрягина

Введем гамильтониан H правилом: для всех $(x, u, \psi, \lambda, t) \in \mathbb{X} \times U \times \mathbb{X} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}$

$$H(x, u, \psi, \lambda, t) \;\stackrel{\triangle}{=}\; \psi f\big(x, u\big) - \lambda r(t) f_0\big(x, u\big).$$

Нас будут интересовать следующие соотношения:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \tag{2.1a}$$
$$-\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x(t), \psi(t), \lambda, t\big), \tag{2.1b}$$
$$H\big(x(t), u(t), \psi(t), \lambda, t\big) = \sup_{u' \in U(t)} H\big(x(t), u', \psi(t), \lambda, t\big). \tag{2.1c}$$

Мы будем также использовать нормировочные условия

$$||\psi(0)|| + \lambda = 1, \tag{2.1d}$$
$$\lambda \in \{0, 1\}. \tag{2.1e}$$

Легко видеть, что каждое $u \in \mathcal{U}$ при каждом начальном условии задает единственное локальное решение системы (2.1a), (2.1b) и это решение можно продолжить на все $\mathbb{T}$.

Введем ключевое определение.

Нетривиальное решение (λ^*, ψ^*) системы (2.1a), (2.1b) для пары (x^*, u^*) назовем *τ-предельным* (или просто предельным), если для некоторой подпоследовательности $\tau' \subset \tau$ тройка (x^*, ψ^*, λ^*) является пределом (равномерным на всяком отрезке времени) заданных на $[0, \tau'_n]$ решений (x_n, ψ_n, λ_n) следующих краевых задач:

$$\dot{x}_n(t) = f\big(x_n(t), u^*(t)\big), \tag{2.2a}$$
$$-\dot{\psi}_n(t) = \frac{\partial H}{\partial x}\big(x_n(t), u^*(t), \psi_n(t), \lambda_n, t\big), \tag{2.2b}$$
$$\dot{\lambda}_n(t) = 0, \tag{2.2c}$$
$$\psi_n(\tau'_n) = 0. \tag{2.2d}$$

Назовем данное решение *точным τ-предельным*, если к тому же при $n \to \infty$ имеет место $J(x_n(0), 0; \tau'_n) - J(x^*(0), 0; \tau'_n) \to 0$.

Как показано в [8, Proposition 2.1], всякому τ-оптимальному для задачи (1.1a)–(1.1c) процессу (x^*, u^*) соответствует точное τ-предельное решение (ψ^*, λ^*) принципа максимума Понтрягина (2.1a)–(2.1c), удовлетворяющее (2.1d). При этом можно также считать выполненным $\lambda_n + ||\psi_n(0)|| = \lambda^* + ||\psi^*(0)||$ (или при $\lambda^* > 0$ полагать $\lambda_n = \lambda^*$).

Определение τ-предельного решения (ψ^*, λ^*) системы (2.1a)–(2.1d) имеет несколько эквивалентных формулировок. Прежде всего заметим, что система (2.2b), (2.2c) линейна. Для каждого вектора $\xi \in \mathbb{X}$ существует решение $A(\xi; t)$ матричной задачи Коши:

$$\frac{dA(\xi; t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(\xi, u^*; t), u^*(t)\big) A(\xi; t), \quad A(\xi; 0) = 1_{\mathbb{L}}.$$

Определим вектор-функцию I правилом: для всех $T \in \mathbb{T}$, $\Delta \in \mathbb{R}$

$$I(\xi, \Delta; T) \triangleq \int_0^T r(t+\Delta) \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(x(\xi, u^*; t), u^*(t)\big)\, A(\xi; t)\, dt.$$

Теперь для решения ψ уравнения (2.2b) выполнена формула Коши

$$\psi(t) = \big(\psi(0) + \lambda I(x(0), 0; t)\big) A^{-1}(x(0); t) \quad \forall\, t \in \mathbb{T}, \tag{2.3}$$

в частности $\psi_n(0) = -\lambda_n I(x_n(0), 0; \tau_n)$.

Переходя к пределу, используя указанное выше соотношение для I, мы можем выразить $\psi^*(0)$. Как показано, например, в [7, Corollary 8], если $I(b, 0; t)$ имеет конечный предел при $b \to b_*, t \to \infty$, то предельное решение единственно с точностью до положительного множителя и может быть выражено в виде несобственного интеграла

$$-\psi^*(0) = \int_0^\infty r(t) \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(x^*(t), u^*(t)\big)\, A(b_*; t)\, dt, \quad \lambda^* = 1. \tag{2.4}$$

Другие предположения, при которых это выражение описывает сопряженную переменную, удовлетворяющую принципу максимума Понтрягина, а следовательно, дополняет принцип максимума Понятрягина до полной системы соотношений, можно найти, например, в [2, § 11, 12; 3, § 4, 5; 7, § 5]. В общем случае эта формула может не указывать на решение принципа максимума, даже если интеграл внутри нее сходится в смысле Лебега (см. [8, § 3.2]). О более общих выражениях для $\psi^*(0)$ см. [7, § 4].

Для более компактного выражения предельной сопряженной переменной можно использовать предельный супердифференциал функции J на бесконечности, как, например, следует из [8, Theorem 3.1], решение (ψ^*, λ^*) системы (2.1a), (2.1b) является точным предельным в точности, если выполнено $\psi^*(0) \in \partial_x^{\lambda^*}(-J)(x^*(0), 0; \infty_\tau)$.

Далее мы покажем, что более сильный критерий оптимальности (1.2) влечет подобные формулы и выражения уже для пары (сопряженная переменная, гамильтониан). Для этого введем функцию R правилом: для всех $T \in \mathbb{T}$, $\Delta \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{X}$

$$R(\xi, \Delta; T) \triangleq \frac{\partial J}{\partial \Delta}(\xi, \Delta; T) = \int_0^T \frac{dr}{dt}(t+\Delta) f_0\big(x(\xi, u^*; t), u^*(t)\big)\, dt.$$

Отметим, что выражения для гамильтониана с $R(\xi, \Delta; T)$ (в том числе при $\Delta \neq 0$) рассматривались, например, в [13].

3. Основной результат и его следствия

Теорема. *Пусть процесс* (x^*, u^*) *удовлетворяет условию* (1.2) *для задачи* (1.1a)–(1.1c) *с некоторой неограниченно возрастающей последовательностью моментов времени* τ_n.

Тогда для (x^*, u^*) *найдется нетривиальное решение* (ψ^*, λ^*) *принципа максимума Понтрягина* (2.1b), (2.1c) *при* $\lambda^* \in \{0, 1\}$ *такое, что отображение*

$$\mathbb{T} \ni t \mapsto H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda^*, t) = \psi^*(t) f(x^*(t), u^*(t)) - \lambda^* r(t) f_0(x^*(t), u^*(t))$$

для почти всех $t \geq 0$ *совпадает с некоторой непрерывной функцией* $\mathcal{H}^*\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *и для всех* $T \in \mathbb{T}$ *эта функция* $\mathcal{H}^*$ *вместе с* ψ^* *удовлетворяет соотношениям*

$$-\dot{\mathcal{H}}^*[T] = \lambda^* \frac{dr(t)}{dt} f_0\big(x^*(T), u^*(T)\big), \tag{3.1a}$$

$$\psi^*(0) \in \lambda^* \partial^1 l(x^*(0)) + N_L^{\mathcal{C}}(x^*(0)), \tag{3.1b}$$

$$\big(\psi^*(0), \mathcal{H}^*[0]\big) \in \partial^{\lambda^*}(-J)(x^*(0), 0; \infty_\tau). \tag{3.1c}$$

Более того, для некоторых последовательностей точек $b_n \in \mathbb{X}$, чисел $\Delta_n \in \mathbb{R}$ и $\lambda_n \in (0,1]$, сходящихся к $b_*, 0, \lambda^*$ соответственно, и неограниченно возрастающей последовательности чисел $t_n \in \mathcal{T}$ выполнено

$$-\psi^*(0) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n I(b_n, \Delta_n, t_n), \tag{3.1d}$$

$$-\mathcal{H}^*[0] = \lim_{n\to\infty} \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_0^{\tau_n} \frac{dr}{dt}(t+\Delta_n) f_0\big(x(b_n, u^*; t), u^*(t)\big)dt. \tag{3.1e}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы (см. разд. 4), сформулируем и покажем ряд следствий. Заметим, что в силу (3.1d) векторы $\lambda_n I(b_n, \Delta_n, t_n)$ ограничены, при этом векторы $\lambda^*, \psi^*(0)$ не могут одновременно равняться нулю. Теперь из (3.1a) и (3.1e) простой подстановкой получаем

З а м е ч а н и е 1. В условиях теоремы, $\lambda_* = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда множество векторов $I(b_n, \Delta_n, t_n)$ неограничено. При этом $\lambda_* = 0$ также влечет

$$\mathcal{H}^*[T] = \psi^*(T) f(x^*(T), u^*(T)) = \mathrm{const} \quad \forall\,\text{п.в.}\, T \geq 0, \tag{3.1f}$$

и или $\mathcal{H}^* \equiv 0$, или множество чисел $R(b_n, \Delta_n, t_n)$ неограничено.

Формулы (3.1d), (3.1e) можно в ряде случаев упростить. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть для некоторой функции $r_1 : [-1/2, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ выполнены следующие предположения*:

1) *отображение $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{1}{r_1(t)} \dfrac{dr(t)}{dt}$ абсолютно непрерывно, имеет ограниченную вариацию и стремится к нулю при $t \to \infty$, а при $\Delta \in \mathbb{R}$ из некоторой окрестности нуля, отображения $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r(t)}$ равномерно ограничены*;

2) *для любого b из некоторой окрестности точки $x_*(0)$, для любого $T > 0$ числа*

$$\int_0^T r_1(t) f_0(x(b; u^*)(t), u^*(t))\, dt$$

равномерно ограничены.

Тогда, в условиях теоремы, максимизированный гамильтониан $\mathcal{H}^*$ также удовлетворяет

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{H}^*[T] = 0, \tag{3.2a}$$

$$-\mathcal{H}^*[T] = \lambda_* \int_T^\infty \frac{dr(t)}{dt} f_0(x^*(t), u^*(t))\, dt \quad \forall T \geq 0. \tag{3.2b}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из первого условия и липшицевости $\dfrac{dr}{dt}$ следует, что отображения $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{1}{r_1(t)} \dfrac{dr(t+\Delta)}{dt}$ абсолютно непрерывны, равномерно по Δ стремятся к нулю при $t \to \infty$, а их вариации на промежутках $[T, \infty)$ ограничены и также равномерно по Δ стремятся к нулю при $T \to \infty$. Теперь найдутся такие число M и достаточно малые окрестности нуля и $x^*(0)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T_\varepsilon > 0$, что при любых Δ, b из соответствующих окрестностей при всех $t > T_\varepsilon$ выполнено

$$\Big|\frac{1}{r_1(t)} \frac{dr(t+\Delta)}{dt}\Big| < \frac{\varepsilon}{4M}, \quad \Big|\int_0^T r_1(t) f_0(x(b; u^*)(t), u^*(t))\, dt\Big| < M,$$

а, кроме того, вариация функции $t \mapsto \dfrac{1}{r_1(t)} \dfrac{dr(t+\Delta)}{dt}$ на промежутке $[T, \infty)$ не превосходит $\varepsilon/2M$.

Зафиксируем некоторые Δ, b из соответствующих окрестностей. Введем для всех моментов t, $T > 0$ числа

$$r_2(t) = \frac{1}{r_1(t)} \, \frac{dr(t+\Delta)}{dt}, \quad K(T) = \int\limits_0^T r_1(t) f_0(x(b; u^*)(t), u^*(t))\, dt.$$

Отметим, что так определенные функции абсолютно непрерывны. Теперь, интегрируя по частям, для всех $\varepsilon > 0$, $T > \theta > T_\varepsilon$ имеем

$$\big|R(b,\Delta;T) - R(b,\Delta;\theta)\big| = \Bigg|\int\limits_\theta^T r_2(t) \frac{K(t)}{dt}\, dt\Bigg| \le \big|K(T) r_2(T)\big| + \big|K(\theta) r_2(\theta)\big| + \Bigg|\int\limits_\theta^T \frac{dr_2(t)}{dt} K(t)\, dt\Bigg|$$

$$\le M\big|r_2(T)\big| + M\big|r_2(\theta)\big| + M \int\limits_\theta^T \Big|\frac{dr_2(t)}{dt}\Big|\, dt \le \varepsilon.$$

Отсюда для всякого $\varepsilon > 0$ для достаточно больших N при $n > N$ выполнено $|R(b_n, \Delta_n, t_n) - R(b_n, \Delta_n, t_N)| < \varepsilon$. В силу (3.1e) число $-\mathcal{H}^*[0]$ совпадает с

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n) = \lim_{N\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_N) = \lim_{N\to\infty} \lambda_* R(x^*(0), 0, t_N).$$

Раскрывая R, получаем (3.2b) для $T = 0$, теперь из (3.1a) следует (3.2b) для $T > 0$. Поскольку интеграл сходится в смысле Римана, имеем (3.2a). □

Можно упростить соответствующую формулу и для сопряженной переменной. Справедливы следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть функция r сохраняет знак, и для некоторой функции $r_1\colon [-1/2, \infty) \to \mathbb{R}_{>0}$ выполнено следующее*:

1) *при Δ, достаточно близких к нулю, функции $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r_1(t)}$ монотонно идут к нулю при $t \to \infty$ и все они ограничены в совокупности*;

2) *для любого b из некоторой окрестности точки $x_*(0)$ векторы*

$$\int\limits_0^T r_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(b; u^*)(t), u^*(t)) A(b; t)\, dt$$

имеют равномерный предел при $T \to \infty$.

Тогда, в условиях теоремы, найдено единственное τ-предельное решение принципа максимума Понтрягина с $\lambda^* = 1$, при этом ψ^* однозначно восстанавливается формулой (2.4).

Доказательство. По признаку Абеля предел

$$\lim_{T\to\infty} I(b,\Delta;T) = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \frac{r(t+\Delta)}{r_1(t)} r_1(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(b; u^*)(t), u(t)) A(b; t)\, dt$$

равномерен при Δ, b из соответствующих окрестностей, в частности, ограничен, следовательно по замечанию 1 показано $\lambda^* = 1$. Теперь для всякого $\varepsilon > 0$ для достаточно большого N при $n > N$ выполнено $|I(b_n, \Delta_n, t_n) - I(b_n, \Delta_n, t_N)| < \varepsilon$. В частности, $-\psi^*(0)$ в силу (3.1e) совпадает с $\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_n) = \lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_N) = \lim_{N\to\infty} I(x^*(0),0,t_N)$, т. е. выполнено (2.4). Как показано, например, в [7, Theorem 3], всякое решение соотношений принципа максимума Понтрягина, удовлетворяющее (2.4), является τ-предельным. Поскольку можно было взять произвольную сходящуюся к b_* последовательность из b_n, то множество $\partial_x^{\lambda^*}(-J)(x^*(0),0;\infty_\tau)$ — синглетон. Итак, других τ-предельных решений с $\lambda^*=1$ нет. □

Следствие 3. *Пусть для некоторой функции $r_1:[-1/2,\infty)\to\mathbb{R}_{>0}$ выполнены следующие предположения*:

1) *отображение $\mathbb{T}\ni t\mapsto \dfrac{1}{r_1(t)}\dfrac{dr(t)}{dt}$ абсолютно непрерывно, имеет ограниченную вариацию и стремится к нулю при $t\to\infty$, а при $\Delta\in\mathbb{R}$ из некоторой окрестности нуля отображения $\mathbb{T}\ni t\mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r(t)}$ равномерно ограничены*;

2) *для любых $T>0$ и b из некоторой окрестности точки $x_*(0)$ векторы*

$$\int_0^T r_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(b;u^*)(t),u^*(t))A(b;t)\,dt$$

равномерно ограничены.

Тогда, в условиях теоремы, найдено τ-предельное решение принципа максимума Понтрягина с $\lambda^*=1$, при этом ψ^* однозначно восстанавливается формулой (2.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя начало доказательства следствия 1 с $K(t)$ равной каждой компоненте вектора

$$\int_0^T r_1(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(b;u^*)(t),u^*(t))A(b;t)\,dt,$$

получаем $\big|I(b,\Delta;T)-I(b,\Delta;\theta)\big|\le\varepsilon$ для всех $\varepsilon>0$, $\theta\ge 0, T>T_\varepsilon$ и b,Δ из соответствующих окрестностей.

Теперь для всякого $\varepsilon>0$ для достаточно больших N при $n>N$ выполнено $|I(b_n,\Delta_n,t_n)-I(b_n,\Delta_n,t_N)|<\varepsilon$. В частности, последовательность векторов $I(x^*(0),0,t_n)$ имеет конечный предел. Более того, $-\psi^*(0)$ в силу (3.1e) совпадает с

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_n) = \lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_n I(b_n,\Delta_n,t_N) = \lambda^*\lim_{N\to\infty} I(x^*(0),0,t_N).$$

Поскольку $\psi^*(0),\lambda^*$ не могут быть одновременно нулями, имеем $\lambda^*=1$ и (2.4). Как показано, например, в [7, Theorem 3], всякое решение соотношений принципа максимума, удовлетворяющее (2.4), является τ-предельным. □

Для задач экономического роста кроме дисконтирующего множителя r экспоненциального вида в работе [15] предложено использовать функции типа $(1+t)^{-s}$ при $s>0$; обсуждение разумных для дисконтирующего множителя r свойств смотрите в [16]. Специально для таких r упростим формулировку следствий 1 и 3.

Следствие 4. *Пусть для дисконтирующего множителя $r:\mathbb{T}\to\mathbb{R}_{>0}$ выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) *для некоторого $s>0$ $r(t)=(1+t)^{-s}$ при всех неотрицательных t*;

2) *при всяком Δ из некоторой окрестности нуля отображения $\mathbb{T}\ni t\mapsto \dfrac{1}{r(t)}\dfrac{dr(t+\Delta)}{dt}$ равномерно стремятся к нулю при $t\to\infty$, и все эти отображения ограничены в совокупности*;

3) *при* $\Delta \in \mathbb{R}$ *из некоторой окрестности нуля отображения* $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{r(t+\Delta)}{r(t)}$ *равномерно ограничены, отображение* $\mathbb{T} \ni t \mapsto \dfrac{1}{r(t)}\dfrac{dr(t)}{dt}$ *стремится к нулю при* $t \to \infty$ *и имеет ограниченную вариацию.*

Тогда

1) *если числа* $J(b, 0; u^*, T)$ *равномерно ограничены для всех* $T > 0$ *и* b *из некоторой окрестности точки* $b_* = x_*(0)$, *то, в условиях теоремы, соответствующий паре* (ψ^*, λ^*) *максимизированный гамильтониан* $\mathcal{H}^*$ *однозначно восстанавливается по формулам* (3.2b),(3.2a);

2) *если векторы* $I(b, 0; u^*, T)$ *равномерно ограничены для всех* $T > 0$ *и* b *из некоторой окрестности точки* $b_* = x_*(0)$, *то, в условиях теоремы, пара* (ψ^*, λ^*) *является* τ*-предельным решением принципа максимума Понтрягина,* $\lambda^* = 1$, *а* ψ^* *однозначно восстанавливается формулой* (2.4).

Доказательство. Заметим, что каждое из предположений 1), 2) влечет 3), которое, в свою очередь, обеспечивает выполнение предположений следствий 1 и 3 для $r_1 \equiv r$. $\square$

Заметим, что проверка условий всех показанных следствий упрощается в случае монотонности функций I, J. Подробнее этот случай рассмотрен в [2, § 10,11; 3, § 5; 7, § 5.3].

Отметим, что следствие 4 напрямую к дисконтирующим множителям экпоненциального вида не применимо. С другой стороны, в отличие от следствия 1, в [10, Theorem 3] для $r(t)$ вида e^{-st} ($\forall s \in \mathbb{R}$) необходимость для критерия (1.4) условий (3.2a), (3.2b) (наряду с условиями (3.1a)–(3.1e)) была показана без каких-либо дополнительных предположений; там же было показано, что $\psi^*(T) \in \partial_x^{\lambda^*}(-J)(x^*(0), 0; \infty_\tau)$ при выполнении второго условия следствия 2 автоматически обеспечивает $\lambda^* = 1$ и (2.4).

Перейдем, собственно, к доказательству основного результата.

4. Доказательство теоремы

4.1. Построение последовательности γ_n

По условию в задаче (1.1a)–(1.1c), для u^* выполнено (1.2) при некоторой неограниченно возрастающей последовательности τ_n. Следуя идее [10, Lemma 5], покажем, что к $l(b_*)$ сходятся оптимальные значения задач

$$l(x(0)) + \int_0^{\tau_n} v(t) r(z(t)) f_0(x(t), u(t))\, dt - J(b_*, 0; \tau_n) \to \min, \tag{4.1a}$$

$$\dot{x} = v(t)\, f\bigl(x(t), u(t)\bigr), \quad \dot{z} = v(t), \tag{4.1b}$$

$$t > 0, \quad u(t) \in U, \quad |v(t) - 1| \le e^{-t}, \tag{4.1c}$$

$$x(0) \in \mathcal{C}, \quad z(0) = 0. \tag{4.1d}$$

Действительно, управление $(u^*, 1)$ допустимо в каждой такой задаче; в силу определения $J(b_*, 0; \tau_n)$, для этой последовательности задач теперь можно гарантировать (при достаточно больших n) платеж, равный $l(b_*)$.

Пусть оптимальные значения задач (4.1a)–(4.1d) не сходятся к $l(b_*)$. Тогда для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ последовательности начальных значений $\breve{b}_n \in \mathcal{C}$ и последовательности управлений $(\breve{u}_n, \breve{v}_n)$, удовлетворяющих (4.1c), траектории $(\breve{x}_n, \breve{z}_n)$, порожденные этими управлениями из позиции $(\breve{b}_n, 0)$, удовлетворяют

$$l(\breve{b}_n) \quad + \quad \int_0^{\tau_n} \breve{v}_n(t) r(\breve{z}_n(t)) f_0(\breve{x}_n(t), \breve{u}_n(t))\, dt \le l(b_*) + J(b_*, 0; \tau_n) - \varepsilon.$$

Отметим, что поскольку $|\breve{v}_n(t)-1|\le e^{-t}$ для всех $t\ge 0$, то $|\breve{z}_n(\tau_n)-\tau_n|\le 1$.

Для каждого n повторим доказательство [9, лемма]: непосредственной проверкой убеждаемся, что для обратного к $\breve{z}_n$ отображения $\zeta_n:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ допустимое управление $\hat{u}_n(s)\overset{\triangle}{=}\breve{u}_n(\zeta_n(s))$ порождает траекторию $\hat{x}_n(\cdot)\overset{\triangle}{=}x(\breve{b}_n,\hat{u}_n;\cdot)$, при этом $\hat{x}_n(\breve{z}_n(t))=\breve{x}_n(t)$, $x(\breve{b}_n,\hat{u}_n;t)=\breve{x}_n(\zeta_n(t))$ для всех $t\ge 0$. Теперь из равенства

$$\int_0^{\tau_n}\breve{v}_n(t)r(\breve{z}_n(t))f_0(\breve{x}_n(t),\breve{u}_n(t))\,dt=\int_0^{\breve{z}(\tau_n)}r(t)f_0(\hat{x}_n(t),\hat{u}_n(t))\,dt$$

следует

$$l(\breve{b}_n)+\int_0^{\breve{z}_n(\tau_n)}r(t)f_0(\hat{x}_n(t),\hat{u}_n(t))\,dt\le l(b_*)+J(b_*,0;\tau_n)-\varepsilon.$$

Но в силу $\varepsilon>0$ и $|\breve{z}_n(\tau_n)-\tau_n|\le 1$ это противоречит (1.2).

Итак, найдется такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел γ_n, что для всякого натурального n оптимальное значение задачи (4.1a)–(4.1d) ограничено снизу числом $l(b_*)-\gamma_n^2$.

4.2. Построение набора метрических пространств для вспомогательной системы

Примем $\Upsilon\overset{\triangle}{=}U\times[1/2,\infty)$, $\mathcal{A}=\mathcal{U}\times B(\mathbb{T},[1/2,\infty))$, $\alpha^*=(u^*,1)$. Установим также $E\overset{\triangle}{=}\mathbb{X}\times\mathbb{R}\times\mathbb{X}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $y_*\overset{\triangle}{=}(b_*,0,0,0,0)\in E$. Пусть $\mathcal{S}$ — шар в E с центром в y_* радиуса 3, Ω — шар в $\mathbb{X}$ с центром в b_* радиуса 1/2.

Для удобства обозначим через s функцию $\dfrac{dr}{dt}$, по условию ее можно считать локально липшицевой. Зададим на фазовом пространстве E следующую систему:

$$\begin{aligned}
\dot{x}&=vf(x,u), &&\text{(4.2a)}\\
\dot{z}&=v, &&\text{(4.2b)}\\
\dot{\psi}&=-v\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)+\lambda vr(z(t))\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,u), &&\text{(4.2c)}\\
\dot{\phi}&=\lambda vs(z(t))f_0(x,u), &&\text{(4.2d)}\\
\dot{\lambda}&=0. &&\text{(4.2e)}
\end{aligned}$$

Всю правую часть системы (4.2a)–(4.2e) будем далее понимать как отображение $a:\mathbb{T}\times E\times\Upsilon\to E$. Теперь для всякой пары $(y_*,\vartheta)\in E\times\mathbb{T}$ найдется единственное решение $y\in C(\mathbb{T},E)$ уравнения

$$\dot{y}=a(t,y(t),\alpha^*(t)),\quad y(\vartheta)=y_*. \tag{4.3}$$

Обозначим его начальную позицию $y(0)$ через $\varkappa(y_*,\vartheta)$.

Для такой функции a с управлением α^* и компактом $\mathcal{S}$ по конструкции из [8, Appendix A] строим такую неотрицательную функцию $w\colon\Upsilon\times\Upsilon\times\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, что (см. [8, Lemma A.1])

1) для почти всех $t\in\mathbb{T}$ отображение $\Upsilon\times\Upsilon\ni(\alpha',\alpha'')\mapsto w(\alpha',\alpha'',t)$ полунепрерывно снизу и задает метрику на Υ,

2) для всех $T>0$ отображение $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\ni(\alpha',\alpha'')\mapsto\rho(\alpha',\alpha'',T)\overset{\triangle}{=}\int_0^T w(\alpha'(t),\alpha''(t),t)dt$ корректно и задает на $\mathcal{A}_T\overset{\triangle}{=}\{\alpha\in\mathcal{A}\,|\,\alpha(t)=\alpha^*(t)\ \forall t>T\}$ полную метрику.

4.3. Построение оптимальных решений вспомогательных задач

Рассмотрим для всякого натурального n задачу

$$\frac{dr}{dt}\int\limits_0^{\tau_n} v(t)r(t)f_0(y(t),u(t))\,dt + l(x(0)) - J(b_*,0;\tau_n)$$
$$+\gamma_n\rho(\alpha^*,\alpha,\tau_n)+\gamma_n||x(0)-b_*||\to\min, \tag{4.4a}$$
$$\dot{x}=v(t)\,f\big(x(t),u(t)\big),\quad \dot{z}=v(t), \tag{4.4b}$$
$$t\geq 0,\quad \alpha(t)=(u(t),v(t)),\quad u(t)\in U,\ |v(t)-1|\leq e^{-t}, \tag{4.4c}$$
$$x(0)\in\mathcal{C}\cap\Omega,\quad z(0)=0. \tag{4.4d}$$

Заметим, что множество всех допустимых управлений в этой задаче содержит $\alpha^*=(u^*,1)$ и замкнуто в $\mathcal{A}_{\tau_n}$, т. е. также является полным метрическим пространством. Обозначим его через $\mathcal{A}'_{\tau_n}$.

Отметим, что указанная в (4.4a) платежная функция является полунепрерывным снизу отображением из полного метрического пространства $(\mathcal{C}\cap\Omega)\times\mathcal{A}'_{\tau_n}$ в $\mathbb{R}$. В силу неотрицательности w (а значит, и ρ) эта платежная функция, как и функция в задаче (4.1a)–(4.1d), ограничена снизу числом $l(b_*)-\gamma_n^2$. Согласно принципу Экланда [17, Theorem 5.3.1] для всякого натурального n у задачи (4.4a)–(4.4d) найдется оптимальная пара $(b_n,\alpha_n)\in(\mathcal{C}\cap\Omega)\times\mathcal{A}'_{\tau_n}$. Эта пара задает некоторое решение $(\widetilde{x}_n,\widetilde{z}_n)$ системы (4.4b), (4.4d), при этом управление α_n можно записать как $\alpha_n=(u_n,v_n)\in\mathcal{A}'_{\tau_n}\subset\mathcal{U}\times B(\mathbb{T},[1/2,\infty))$.

По тому же принципу Экланда выполнены (см. [17, Theorem 5.3.1,(i)]) следующие соотношения:

$$\int\limits_0^{\tau_n} r(t)f_0(x^*(t),u^*(t))\,dt + l(b_*)$$
$$\geq\int\limits_0^{\tau_n} v_n(t)r(\widetilde{z}_n(t))f_0(\widetilde{x}_n(t),u_n(t))\,dt + l(\widetilde{x}_n(0))+\gamma_n\rho(\alpha_*,\alpha_n,\tau_n)+\gamma_n||\widetilde{x}_n(0)-b_*||, \tag{4.5a}$$
$$||\widetilde{x}_n(0)-b_*||+\rho(\alpha^*,\alpha_n,\tau_n)<\gamma_n\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty. \tag{4.5b}$$

Напомним, что по построению функция w неотрицательна, тогда функция ρ как интеграл этой функции не убывает; таким образом, для всякого положительного $T<\tau_n$ выполнено $\rho(\alpha^*,\alpha,T)\leq\rho(\alpha^*,\alpha,\tau_n)$ для всех $\alpha\in\mathcal{A}$. В силу (4.5b) мы показали, что $\rho(\alpha^*,\alpha_n,T)\to 0$ для всякого $T>0$. Отсюда, поскольку функции $\alpha_n=(u_n,v_n)$ сходятся к $\alpha^*=(u^*,1)$ в каждом метрическом пространстве $\mathcal{A}_T$, в силу [8, Lemma A.1] они сходятся и по мере на всей полуоси. Переходя при необходимости к подпоследовательности, мы можем считать, что (u_n,v_n) сходится к $(u^*,1)$ почти всюду на $\mathbb{T}$.

4.4. Принцип максимума для вспомогательных задач

Поскольку $\alpha_n=(u_n,v_n)$ обеспечивают минимум в задачах (4.4a)–(4.4d), мы можем применить для них принцип максимума Понтрягина [14, Theorem 5.1.1]. Без ограничения общности мы можем в силу (4.5b) считать, что $\widetilde{x}_n(0)\in\operatorname{int}\Omega$ для всех $n\in\mathbb{N}$; теперь $N_L^{\mathcal{C}}(\widetilde{x}_n(0))=N_L^{\Omega\cap\mathcal{C}}(\widetilde{x}_n(0))$.

Зададим $H_n:\mathbb{X}\times\mathbb{R}\times\Upsilon\times\mathbb{R}\times\mathbb{X}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}\mapsto\mathbb{R}$ правилом

$$H_n(x,z,u,v,\psi,\phi,\lambda,t)\overset{\triangle}{=}\psi vf(x,u)+\phi v-\lambda vf_0(z,x,u)-\lambda\gamma_n w(\alpha^*(t),(u,v),t).$$

Теперь согласно принципу максимума Понтрягина [14, Theorem 5.1.1] найдутся $\lambda_n \in (0,1]$, $\widetilde{\psi}_n \in C(\mathbb{T},\mathbb{X})$, $\widetilde{\phi}_n \in C(\mathbb{T},\mathbb{R})$, удовлетворяющие

$$\lambda + |\widetilde{\phi}_n(0)| + ||\widetilde{\psi}_n(0)|| = 1, \tag{4.6a}$$

для которых при некотором $\zeta_n \in \mathbb{X}, ||\zeta_n|| \leq 1$ выполнены

$$\widetilde{\psi}_n(0) \in \lambda_n \partial^1 l(\widetilde{x}_n(0)) + \lambda_n \gamma_n \zeta + N_L^{\mathcal{C}}(\widetilde{x}_n(0)), \tag{4.6b}$$

$$\widetilde{\phi}_n(\tau_n) = 0, \quad \widetilde{\psi}_n(\tau_n) = 0, \tag{4.6c}$$

а, кроме того, для почти всех $t \in [0,\tau_n]$ имеет место

$$-\dot{\widetilde{\psi}}_n(t) = v_n(t)\,\frac{\partial f}{\partial x}\big(\widetilde{x}_n(t),u_n(t)\big) - \lambda_n v_n(t) r(\widetilde{z}_n(t))\,\frac{\partial f_0}{\partial x}\big(\widetilde{x}_n(t),u_n(t)\big), \tag{4.6d}$$

$$-\dot{\widetilde{\phi}}_n(t) = -\lambda_n v_n(t) s(\widetilde{z}_n(t)) f_0(\widetilde{x}_n(t),u_n(t)\big), \tag{4.6e}$$

$$\begin{aligned} &\sup\nolimits_{u'\in U,|v'-1|\leq e^{-t}} H_n\big(\widetilde{x}_n(t),u',v',\widetilde{\psi}_n(t),\widetilde{\phi}_n(t),\lambda_n,t\big) \\ &\quad = H_n\big(\widetilde{x}_n(t),u_n(t),v_n(t),\widetilde{\psi}_n(t),\widetilde{\phi}_n(t),\lambda_n,t\big). \end{aligned} \tag{4.6f}$$

4.5. Принцип максимума для исходной задачи

Установим $\widetilde{y}_n \equiv (\widetilde{x}_n,\widetilde{z}_n,\widetilde{\psi}_n,\widetilde{\phi}_n,\lambda_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$; заметим, что это решения системы (4.2a)–(4.2e). Напомним, что $y_* = (b_*,0,0,0,0)$. Благодаря (4.5b) при достаточно больших n мы имеем

$$||\widetilde{y}_n(0) - y_*|| \leq \lambda_n + ||\widetilde{\psi}_n(0)|| + |\widetilde{\phi}_n(0)| + ||\widetilde{x}_n(0) - b_*|| \overset{(4.6a)}{\leq} 1 + \gamma_n < 3; \tag{4.7}$$

в частности, $\widetilde{y}_n(0)$ лежат в компакте $\mathcal{S}$. Переходя к подпоследовательностям, если необходимо, мы можем считать, что числа $\lambda_n \in (0,1]$ сходятся к некоторому $\lambda^* \in [0,1]$, векторы $\big(\widetilde{\psi}_n(0),\widetilde{\phi}_n(0)\big)$ сходятся к некоторой паре $(\psi_0^*,\phi_0^*) \in \mathbb{X}\times\mathbb{R}$. Теперь с учетом (4.7) $\widetilde{y}_n(0) \to \xi_* \overset{\triangle}{=} (b_*,0,\psi_0^*,\phi_0^*,\lambda^*) \in \operatorname{int}\mathcal{S}$.

Выше было показано, что $\rho(\alpha^*,\alpha_n,T) \to 0$ для любого $T \geq 0$. В силу $\xi^* \in \operatorname{int}\mathcal{S}$ по [8, Lemma A.3] решения $\widetilde{y}_n$ равномерно на каждом отрезке времени сходятся к порожденному управлением $\alpha^* = (u^*,1)$ решению y^* системы (4.2a)–(4.2e) с начальным условием $y^*(0) = \xi_*$; в частности, $(\widetilde{x}_n,\widetilde{\psi}_n,\lambda_n)$ сходятся к решению системы (2.2a)–(2.2c). Теперь y^* имеет вид $y^*(\cdot) = (x^*(\cdot),\cdot,\psi^*(\cdot),\phi^*(\cdot),\lambda^*)$, где функции ψ^*,ϕ^* суть решения уравнений (2.2b) и $\dot{\phi}^* = -\lambda^* s(t) f_0(x^*(t),u^*(t)\big)$ с начальными условиями $\psi^*(0) = \psi_0^*$ и $\phi^*(0) = \phi_0^*$.

Напомним, что (u_n,v_n) сходятся почти всюду к $(u^*,1)$. Теперь $w((u^*(t),1),(u_n(t),v_n(t)),t) \to w((u^*(t),1),(u^*(t),1),t) = 0$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Сейчас, взяв предел в (4.6f), мы для почти всех $t \in \mathbb{T}$ получаем

$$\begin{aligned} &\sup_{u\in U,|v-1|\leq e^{-t}} \Big[\psi^*(t) v f\big(x^*(t),u,t\big) + v\phi^*(t) - \lambda^* v r(t) f_0\big(x^*(t),u\big)\Big] \\ &\qquad = \psi^*(t) f\big(x^*(t),u^*(t),t\big) + \phi^*(t) - \lambda^* r(t) f_0\big(x^*(t),u^*(t)\big). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Приняв $v = 1$, мы имеем (2.1c) для (x^*,ψ^*,λ^*) при почти всех $t > 0$. Таким образом, (x^*,ψ^*,λ^*) удовлетворяет системе (2.1a)–(2.1d) при $u = u^*$, т. е. системе (2.2a)–(2.2c).

4.6. Обратный ход

Из позиции $\widetilde{y}_n(\tau_n)$ выпустим в обратном времени решение y_n системы (4.2a)–(4.2e), порожденное управлением $(u^*,1)$. Поскольку (4.5b) и (4.7) влекут $\rho(\alpha^*,\alpha_n,\tau_n) < \gamma_n < 1/2 < dist(\widetilde{y}_n(0),bd\,\mathcal{S})$ и $\widetilde{y}_n \to y^*$, $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$, то по [8, Lemma A.2] мы получаем

$$y_n(0) \overset{(4.3)}{=} \varkappa(\widetilde{y}_n(\tau_n),\tau_n) \to y^*(0). \tag{4.9}$$

При этом $y_n = (x_n, z_n, \psi_n, \phi_n, \lambda_n)$ удовлетворяет соотношениям (2.2a)–(2.2c) и $\psi_n(\tau_n) = \widetilde{\psi}_n(\tau_n) = 0$, $\phi_n(\tau_n) = \widetilde{\phi}_n(\tau_n) = 0$. По теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий из (4.9) следует, что решение $y^*(\cdot) = \big(x^*(\cdot), \cdot, \lambda^*, \psi^*(\cdot), \phi^*(\cdot)\big)$ является пределом решений y_n в компактно-открытой топологии.

Тогда для сходящихся к $b_*, 0, \lambda^*$ соответственно последовательностей точек $b_n = x_n(0) \in \mathbb{X}$ и чисел $\Delta_n = z_n(0)$, $\lambda_n \in (0,1]$, а также неограниченно возрастающей последовательности чисел $t_n \in \mathcal{T}$ (выбранной подпоследовательности из последовательности τ_n), из (4.2d) и (4.6c) мы имеем $z_n(t) = t + \Delta_n$,

$$-\psi_n(0) = \lambda_n I(b_n, \Delta_n, t_n) = \lambda_n \int_0^{t_n} r(t+\Delta_n) \frac{\partial f_0}{\partial x}\big(x(b_n, u^*; t), u^*(t)\big)\, A(\xi; t) dt,$$

$$-\phi_n(0) = \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n) = \lambda_n \int_0^{t_n} s(t+\Delta_n) f_0\big(x(b_n, u^*; t), u^*(t)\big) dt.$$

Теперь, поскольку ψ^* и ϕ^* суть пределы для ψ_n и ψ_n, мы получаем (3.1d) и

$$-\phi^*(0) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n R(b_n, \Delta_n, t_n).$$

Отметим, что отображения $b \mapsto \partial^1 l(b)$, $b \mapsto N_L^{\mathcal{C}}(b)$ полунепрерывны сверху; взяв предел в (4.6b), из $\widetilde{\psi}_n(0) \to \psi^*(0)$ и $\widetilde{x}_n(0) \to b_*$ получаем (3.1b).

Поскольку в (4.8) линейная по v функция достигает максимума во внутренней точке $v = 1$, то для почти всех $t \in \mathbb{T}$ выполнено

$$\psi^*(t) f\big(x^*(t), u^*(t), t\big) + \phi^*(t) - \lambda^* r(t) f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big) = 0.$$

Таким образом, $\phi^*(t) = -H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda^*, t)$ для почти всех $t \in \mathbb{T}$. Определим $\mathcal{H}^*[t] = -\phi^*(t)$ для всех $t \geq 0$. Теперь как предел для ϕ_n оно удовлетворяет (3.1e), т. е. условию (3.1a):

$$\dot{\mathcal{H}}^*[t] = -\lambda^* s(t) f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big) = -\lambda^* \frac{dr(t)}{dt} f_0\big(x^*(t), u^*(t)\big).$$

Отметим, что хотя сконструированные последовательности сходятся к $(\psi_0^*, \phi^*, \lambda^*)$ со свойством $||\psi_0^*|| + |\phi_0^*| + \lambda^* = 1$, также выполнено и $||\psi_0^*|| + \lambda^* > 0$. Действительно, предположим обратное, тогда из равенств $\psi^* \equiv 0$ и $\lambda^* \equiv 0$ следует $|\phi^*(0)| = 1$ и $H(x^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \lambda^*, t) \equiv 0$, т. е. $\mathcal{H}^* \equiv 0$, что противоречит $\mathcal{H}^* \equiv -\phi^*, |\phi^*(0)| = 1$. Итак, $||\psi_0^*|| + \lambda^* > 0$.

В случае $\lambda^* > 0, \lambda^* \neq 1$ заметим, что соотношения (2.1b),(2.1c),(3.1a)–(3.1e),(4.6b)–(4.6e) сохранятся при умножении векторов $(\psi^*, \phi^*, \lambda^*)$ и $(\psi_n, \phi_n, \lambda_n)$ на одно и то же положительное число. Теперь, воспользовавшись этим для числа $1 / \lambda^*$, мы обеспечиваем равенство $\lambda^* = 1$. Таким образом, мы можем считать, что $\lambda^* \in \{0, 1\}$.

Теперь из (3.1d), (3.1e) и определения ∂^λ получаем (3.1c). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aubin J., Clarke F.** Shadow prices and duality for a class of optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17, no. 5. P. 567–586.
2. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V.** The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth // Proc. Steklov Inst. Math. 2007. Vol. 257. P. 1–255.
3. **Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K.** Infinite-horizon optimal control problems in economics // Russ. Math. Surv. 2012. Vol. 67, no. 2. P. 195–253.
4. **Aseev S.M., Veliov V.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and optimal control problems on unbounded domains / eds. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski. Providence: AMS, 2014. P. 1–17 (Contemp. Math.; vol. 619.)

5. **Belyakov A.O.** Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited [e-resource]. 2015. 15 p. URL: http://arxiv.org/pdf/1512.01206 .
6. **Seierstad A.** Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 1999. Vol. 103, no. 1. P. 201–229.
7. **Khlopin D.V.** Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems // J. Dyn. Con. Sys. 2013. Vol. 19, no. 4. P. 519–552.
8. **Khlopin D.V.** Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem // Optimization. 2015. Vol. 64, no. 11. P. 2417–2440.
9. **Michel P.** On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. Vol. 50, no. 4. P. 975–984.
10. **Khlopin D.V.** On Hamiltonian as limiting gradient in infinite horizon problem // J. Dyn. Con. Sys. 2016. P. 1–18. DOI:10.1007/s10883-016-9311-1.
11. **Carlson D.A.** Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 1. P. 55–69.
12. **Baumeister J., Leitao A., Silva G.** On the value function for nonautonomous optimal control problems with infinite horizon // Syst. Control. Lett. 2007. Vol. 56, no. 3. P. 188–196.
13. **Seierstad A., Sydsæter K.** Conditions implying the vanishing of the Hamiltonian at infinity in optimal control problems // Optim. Lett. 2009. Vol. 3, no. 4. P. 507–512.
14. **Clarke F.** Necessary conditions in dynamic optimization. Providence: AMS, 2005. 113 p.
15. **Weitzman M.** Gamma discounting // Am. Econ. Rev. 2001. Vol. 91, no. 1. P. 260–71.
16. **Ekeland I., Pirvu T.** Investment and consumption without commitment // Math. Finan. Econ. 2008. Vol. 2, no. 1. P. 57–86.
17. **Aubin J., Ekeland I.** Applied nonlinear analysis. New York: John Wiley & Sons Inc., 1984. 518 p.

Хлопин Дмитрий Валерьевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет
e-mail: khlopin@imm.uran.ru

Поступила 22.06.2016

REFERENCES

1. Aubin J., Clarke F. Shadow prices and duality for a class of optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 1979, vol. 17, no. 5, pp. 567–586.
2. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin Maximum Principle and problems of optimal economic growth. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255.
3. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V., Besov K. Infinite-horizon optimal control problems in economics. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, no. 2, pp. 195–253.
4. Aseev S.M., Veliov V. Needle variations in infinite-horizon optimal control. *Variational and optimal control problems on unbounded domains, eds. by G. Wolansky, A.J. Zaslavski*, Providence: AMS, 2014, Ser. Contemp. Math., vol. 619, pp. 1–17.
5. Belyakov A.O. Necessary conditions for infinite horizon optimal control problems revisited. *arXiv.org*, 2015, 15 p, available at: http://arxiv.org/pdf/1512.01206 .
6. Seierstad A. Necessary conditions for nonsmooth, infinite-horizon optimal control problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 1999, vol. 103, no. 1, pp. 201–229.
7. Khlopin D.V. Necessity of vanishing shadow price in infinite horizon control problems. *J. Dyn. Con. Sys.*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 519–552.
8. Khlopin D.V. Necessity of limiting co-state arc in Bolza-type infinite horizon problem. *Optimization.*, 2015, vol. 64, no. 11, pp. 2417–2440.
9. Michel P. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems. *Econometrica*, 1982, vol. 50, no. 4, pp. 975–984.
10. Khlopin D.V. On Hamiltonian as limiting gradient in infinite horizon problem. *J. Dyn. Con. Sys.*, 2016, pp. 1–18, DOI: 10.1007/s10883-016-9311-1.

11. Carlson D.A. Uniformly overtaking and weakly overtaking optimal solutions in infinite–horizon optimal control: when optimal solutions are agreeable. *J. Optim. Theory Appl.*, 1990, vol. 64, no. 1, pp. 55–69.
12. Baumeister J., Leitao A., Silva G. On the value function for nonautonomous optimal control problems with infinite horizon. *Syst. Control. Lett.*, 2007, vol. 56, no. 3, pp. 188–196.
13. Seierstad A., Sydsæter K. Conditions implying the vanishing of the Hamiltonian at infinity in optimal control problems. *Optim. Lett.*, 2009, vol. 3, no. 4, pp. 507–512.
14. Clarke F. *Necessary conditions in dynamic optimization.* Providence: AMS, 2005, 113 p.
15. Weitzman M. Gamma discounting. *Am. Econ. Rev.*, 2001, vol. 91, no. 1, pp. 260–71.
16. Ekeland I., Pirvu T. Investment and consumption without commitment. *Math. Finan. Econ.*, 2008, vol. 2, no. 1, pp. 57–86.
17. Aubin J., Ekeland I. *Applied nonlinear analysis.* New York: John Wiley & Sons Inc., 1984, 518 p.

D. V. Khlopin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: khlopin@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 517.5

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА С НЕКЛАССИЧЕСКИМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

М. Ш. Шабозов, А. Д. Фарозова

В работе получена оценка величины наилучшего среднеквадратического приближения $E_{n-1}(f)$ произвольной комплекснозначной 2π-периодической функции $f \in L_2$ подпространством $\Im_{2n-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ через ее неклассический модуль непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)$ в L_2, порожденный конечно-разностным оператором порядка $2m-1$ с постоянными знакочередующимися коэффициентами, равными по модулю единице. А именно, доказано, что для любых натуральных $n \geq 1$ и $m \geq 2$ справедливо соотношение

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\neq\text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Big(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\Big\{\omega^*_{2m-1}(f,t)\Big\}^2\sin nt\,dt\Big)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(m-\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)^{-1/2}.$$

Ключевые слова: наилучшие приближения, неклассический модуль непрерывности, неравенства Джексона — Стечкина, выпуклая функция.

M. Sh. Shabozov, A. D. Farozova. The Jackson–Stechkin inequality with nonclassical modulus of continuity.

We obtain an estimate for the best mean-square approximation $E_{n-1}(f)$ of an arbitrary complex-valued 2π-periodic function $f \in L_2$ by the subspace $\Im_{2n-1}$ of trigonometric polynomials of degree at most $n-1$ in terms of the nonclassical modulus of continuity $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)_2$ generated by a finite-difference operator of order $2m-1$ with alternating constant coefficients equal to 1 in absolute value. The following relation is proved for any natural $n \geq 1$ and $m \geq 2$:

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\neq\text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\Big(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\Big\{\omega^*_{2m-1}(f,t)\Big\}^2\sin ntdt\Big)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(m-\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)^{-1/2}.$$

Keywords: best approximation, nonclassical modulus of continuity, Jackson–Stechkin inequality, convex function.

MSC: 42A10, 41A17, 41A44

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-311-319

1. Введение

Результат Н. П. Корнейчука 1961 г. (см. [1, гл. 6, § 6.2, теорема 6.2.2]) о точной константе в неравенстве Джексона между величиной наилучшего равномерного приближения непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и равномерным модулем непрерывности приближаемой функции в точке π/n получил широкое развитие. В частности, в 1967 г. Н. И. Черных [2] установил аналогичный результат в пространстве L_2 на периоде, а именно нашел точную константу в соответствующем неравенстве Джексона (с первым L_2-модулем непрерывности). Он также получил [3] точное неравенство Джексона — Стечкина со старшим L_2-модулем непрерывности. Относительно недавно в пространстве L_2 стали изучаться неравенства Джексона — Стечкина с обобщенными модулями непрерывности, порожденными как конечно-разностными операторами с переменными коэффициентами (зависящими от шага) [4], так и бесконечно-разностными операторами с постоянными коэффициентами [5; 6]. Кроме того, в процитированных работах [5; 6] С. Н. Васильева и совместных работах А. И. Козко, А. В. Рождественского [7; 8] исследовались точные константы в прямых теоремах теории приближения в пространстве L_2 с модулем непрерывности Бомана — Шапиро. В работе Н. А. Барабошкиной [9] была найдена точная константа в неравенстве Джексона — Стечкина между величиной наилучшего L_2-приближения 2π-периодической функции $f \in L_2$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и ее неклассическим модулем непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,\delta)$ при $\delta = 2\pi/n$; указанный неклассический модуль непрерывности порожден конечно-разностным оператором порядка $2m-1$ с постоянными знакочередующимися коэффициентами, равными по модулю единице.

В данной работе получено точное неравенство между величиной наилучшего приближения функции f из L_2 тригонометрическими полиномами порядка не выше $n-1$ и усредненным значением квадрата модуля непрерывности $\omega^*_{2m-1}(f,t)$ по отрезку $[0,\pi/n]$ с весом $\sin nt$.

Перейдем к более детальному изложению результата и соответствующей истории вопроса. Нам понадобятся следующие обозначения:

L_2 — пространство 2π-периодических комплекснозначных измеримых функций f, квадрат которых суммируем на периоде $\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = [0, 2\pi)$, с конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2};$$

$L_2^{(0)} = L_2$, $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N})$ — множество функций f, у которых производные $f^{(r-1)}$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывны на $\mathbb{T}$, а производные $f^{(r)}$ принадлежат L_2;

$$\Im_{2n-1} := \Big\{T_{n-1}\colon T_{n-1}(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} a_k e^{ikx},\ \ a_k \in \mathbb{C}\Big\}$$

— подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$ с комплексными коэффициентами;

$$E_{n-1}(f) := \inf\big\{\|f - T_{n-1}\|\colon T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\big\} \tag{1.1}$$

— величина наилучшего приближения функции $f \in L_2$ подпространством $\Im_{2n-1}$.

Хорошо известно, что точную нижнюю грань в правой части равенства (1.1) реализует частная сумма

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{|k|\le n-1} c_k(f) e^{ikx}$$

порядка $n-1$ ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt,$$

функции f. При этом

$$E_{n-1}(f) = \Big(\sum_{|k|\ge n} |c_k(f)|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\Big)^{1/2}, \tag{1.2}$$

где положено $\rho_0^2(f) = |c_0(f)|^2$, $\rho_k^2(f) = |c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Модуль непрерывности порядка $m \in \mathbb{N}$ функции $f \in L_2$ определяется равенством

$$\omega_m(f,\delta) = \sup\big\{\, \|\Delta_t^m f\|\colon |t| \le \delta\,\big\}, \quad \delta \ge 0, \tag{1.3}$$

где $\Delta_t^m f(x) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu} C_m^\nu f(x+\nu t)$ — разность m-го порядка функции f с шагом t.

Напомним, что среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из важных является задача о точных неравенствах типа Джексона — Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \chi n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n) \quad \bigl(r \in \mathbb{Z}_+,\, n, m \in \mathbb{N},\, \tau > 0\bigr)$$

на классах $L_2^{(r)}$ $(L_2^{(0)} \equiv L_2)$, где χ — величина, не зависящая от f. Эту задачу в разное время исследовали многие математики (см., например библиографию, в [10; 11]).

Как уже говорилось выше, в последнее время вместо модуля непрерывности вводят в рассмотрение различные обобщенные модули непрерывности, частным случаем которых является классический модуль непрерывности (1.3) порядка m, и для них исследуют неравенство типа Джексона – Стечкина. Следуя работам [4; 9], при любом $m \in \mathbb{N}$ введем разностный оператор

$$\Delta^*_{t,2m-1}f(x) = \sum_{\nu=0}^{2m-1} (-1)^{\nu+1} f(x+\nu t), \tag{1.4}$$

действующий из L_2 в L_2. Определим соответствующий модуль непрерывности функции $f \in L_2$:

$$\omega^*_{2m-1}(f,\delta) := \sup\bigl\{\, \|\Delta^*_{t,2m-1}f\| \colon |t| \le \delta \,\bigr\}, \quad \delta \ge 0. \tag{1.5}$$

Заметим, что при $m = 1$ модуль непрерывности (1.5) совпадает с классическим модулем непрерывности первого порядка $\omega(f;\delta)$ при всех $f \in L_2$ и $\delta \ge 0$.

Фиксируя $m, n \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$, рассмотрим задачу отыскания точной константы $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}^*(m,n;\gamma)$ в неравенстве Джексона — Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le \mathcal{K}^* \omega^*_{2m-1}\Bigl(f, \frac{\gamma}{n}\Bigr), \quad f \in L_2.$$

Иными словами, требуется определить значение следующей величины:

$$\mathcal{K}^*(m,n;\gamma) := \sup\Bigl\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega^*_{2m-1}(f, \gamma/n)} \colon f \in L_2,\, f \not\equiv \mathrm{const} \Bigr\}. \tag{1.6}$$

Задачу (1.6) при $m = 1$ и $\gamma = \pi$ решил Н. И. Черных [2; 3]. Он доказал, что $\mathcal{K}^*(1,n;\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$ и $\gamma > 0$ из [4, теорема 1] следует, что

$$\mathcal{K}^*(m,n;\gamma) \ge \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{1.7}$$

Это неравенство вытекает также из результатов [7, теорема 1; 8, следствия 1.1, 1.3; 6, теорема 2].

В [9] доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N}, m \ge 2, n \ge 1$ и произвольной функции $f \in L_2$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\sqrt{2m}} \biggl[\frac{n}{4} \int\limits_0^{2\pi/n} \bigl(\omega^*_{2m-1}(f,t)\bigr)^2 \varphi_n(t)\, dt \biggr]^{1/2}, \tag{1.8}$$

где $\varphi_n(t) = \sin \dfrac{nt}{2} + \dfrac{1}{2} \sin nt$. Отсюда вытекают следующие неравенства, установленные в [9]:

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\sqrt{2m}} \omega^*_{2m-1}\Bigl(f, \frac{2\pi}{n}\Bigr), \quad f \in L_2,$$

$$\mathcal{K}^*(m,n;2\pi) \le \frac{1}{\sqrt{2m}}. \tag{1.9}$$

В результате сопоставления (1.7) и (1.9) в [9] доказано, что $\mathcal{K}^*(m,n;2\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2m}}$ при $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$.

В данной статье продолжается указанная тематика для характеристик гладкости (1.4). Здесь получены точные неравенства вида (1.8), где вместо весовой функции $\varphi_n(t)$ выступает функция $\sin nt$ для $t \in (0, \pi/n]$.

2. Основной результат

Основным результатом этой работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $n \geq 1$ *и для произвольной функции* $f \in L_2$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin ntdt\right]^{1/2}, \tag{2.1}$$

где

$$\chi_m = \Big(m - 2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)^{-1/2}. \tag{2.2}$$

В частности, $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\chi_3 = \sqrt{\dfrac{15}{23}}$, $\chi_4 = \sqrt{\dfrac{105}{176}}$, $\chi_5 = \sqrt{\dfrac{315}{563}}$, $\cdots$. *Неравенство* (2.1) *точно в том смысле, что существует функция* $f_0 \in L_2$, $f_0 \not\equiv \mathrm{const}$, *для которой* (2.1) *обращается в равенство.*

Доказательство. Воспользуемся равенством, доказанным в работе [9]:

$$\|\Delta^*_{t,2m-1}f(\cdot)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2 P_k(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

где

$$P_k(t) = 2m - 2\sum_{l=1}^{2m-1}(-1)^{l+1}(2m-j)\cos jkt. \tag{2.4}$$

Сгруппируем косинусы с четными и нечетными l, как это сделано в работе [9], и, заметив, что сумма в правой части (2.4) не изменится, если суммирование производить по l от 1 до $2m$, представим равенство (2.4) в виде

$$P_k(t) = 2m - 2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)kt - 2(m-l)\cos 2lkt\big]. \tag{2.5}$$

Учитывая равенство (2.5), из (2.3) получаем

$$\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2 \geq \|\Delta^*_{t,2m-1}f(\cdot)\|_2^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 P_k(t)$$

$$= 2m\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 - 2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)kt - 2(m-l)\cos 2lkt\big]. \tag{2.6}$$

Для $\nu \in \mathbb{Z}_+$ определим величину $\widehat{\varphi}(\nu) = \int_0^{\pi/n}\sin nt\cos\nu tdt$. Легко проверить, что $\widehat{\varphi}(0) = 2/n$, $\widehat{\varphi}(n) = 0$ и кроме того при любом $l \in \mathbb{N}$ и $k \geq n$, $k, n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\widehat{\varphi}(2lk) = -\frac{2n}{(2lk)^2 - n^2}\cos^2\frac{lk}{n}\pi \leq 0, \tag{2.7}$$

$$\widehat{\varphi}((2l-1)k) = -\frac{2n}{((2l-1)k)^2 - n^2}\cos^2\frac{(2l-1)k}{2n}\pi \leq 0. \tag{2.8}$$

Заметим, что
$$\widehat{\varphi}(2ln) = -\frac{2}{n((2l)^2-1)}, \quad \widehat{\varphi}((2l-1)n) \equiv 0, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$
Умножив неравенства (2.6) на функцию $\sin nt$ и проинтегрировав обе части полученного таким образом соотношения по переменному t от 0 до π/n, затем поделив обе части полученного результата на число $(4m)/n$ с учетом (2.7) и (2.8), приходим к неравенству

$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4m}\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2\sin ntdt + \frac{n}{2m}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k)-2(m-l)\widehat{\varphi}(2lk)\big].$$

Прибавляя и вычитая внутри суммы по l от 1 до m выражения
$$2(m-l)\widehat{\varphi}(2ln) = -\frac{4(m-l)}{n((2l)^2-1)} \tag{2.10}$$

и учитывая равенства (1.2) и (2.10), запишем неравенство
$$E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4m}\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2\sin ntdt$$

$$+\frac{n}{2m}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k)-2(m-l)\big(\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)\big)\big]+\frac{2}{m}E_{n-1}^2(f)\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}.$$
Отсюда получаем
$$\Big(m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)E_{n-1}^2(f) \le \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2\sin ntdt$$

$$+\frac{n}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\sum_{l=1}^{m}\big\{(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k)-2(m-l)\big[\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)\big]\big\}. \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что для получения неравенства $E_{n-1}(f) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\Big[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\big(\omega_{2m-1}^*(f,t)\big)^2\sin ntdt\Big]^{1/2}$ достаточно доказать, что при любых $m \ge 2$, $1 \le l \le m$, $k \ge n$ величины
$$\mu_{l,k} = (2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)k)-2(m-l)\big[\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)\big] \le 0, \tag{2.12}$$
$$m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1} \ge 0. \tag{2.13}$$

Докажем по индукции неравенство (2.13). При $m=2$ условие выполняется. Пусть оно выполняется при $m=k$, докажем его выполнение при $m=k+1:$
$$k+1-2\sum_{l=1}^{k}\frac{l}{4(k+1-l)^2-1} \ge k+1-2\sum_{l=1}^{k}\frac{l}{4(k-l)^2-1}$$

$$= k-2\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{4(k-l)^2-1}+1-2\frac{k}{4(k-k)^2-1} = k-2\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{4(k-l)^2-1}+1+2k \ge 0.$$

Для доказательства (2.12) рассмотрим сначала случай $l=1$ и $k=n$. В этом случае имеем $\mu_{1,n} = (2m-1)\widehat{\varphi}(n) = 0$. Далее при $k>n,\ 1 \le l \le m,\ (l,k) \ne (1,n)$ значение $\widehat{\varphi}((2l-1)k) \le 0$, а потому для выполнения (2.12) нужно доказать, что $\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)\ge 0$. Но это очевидно, поскольку

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(2lk)-\widehat{\varphi}(2ln)&=-\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\cos^2\frac{lk}{n}\pi+\frac{2n}{(2ln)^2-n^2}\\&=\frac{2n}{(2ln)^2-n^2}-\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}+\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\sin^2\frac{lk}{n}\pi\\&=\frac{2(2l)^2(k^2-n^2)}{n((2l)^2-1)((2lk)^2-n^2)}+\frac{2n}{(2lk)^2-n^2}\sin^2\frac{lk\pi}{n}>0.\end{aligned}$$

Этим неравенство (2.12) и вместе с ним неравенство (2.1) доказаны.

Докажем, что для функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2$ в неравенстве (2.1) имеет место знак равенства. В самом деле, из (2.3) с учетом (2.4) получаем

$$\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2=2m-2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\cos(2l-1)nt-2(m-l)\cos 2lnt\big]. \tag{2.14}$$

Интегрируя равенство (2.14) по отрезку $[0,\pi/n]$ с весом $\sin nt$, в силу равенств (2.9) имеем

$$\int\limits_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2\sin nt dt=2m\frac{2}{n}-2\sum_{l=1}^{m}\big[(2m-2l+1)\widehat{\varphi}((2l-1)n)-2(m-l)\widehat{\varphi}(2ln)\big]$$

$$=m\frac{4}{n}-\frac{8}{n}\sum_{l=1}^{m-1}\frac{m-l}{(2l)^2-1}=\frac{4}{n}\Big(m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{m-l}{4l^2-1}\Big)=\frac{4}{n}\Big(m-2\sum_{l=1}^{m-1}\frac{l}{4(m-l)^2-1}\Big)=\frac{4}{n}\,\chi_m^{-2},$$

откуда $\dfrac{\chi_m}{\sqrt{2}}\Big[\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2\sin nt\,dt\Big]^{1/2}=1=E_{n-1}(f_0)$, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *Для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$, $n\ge 1$ и произвольной функции $f\in L_2$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}=\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, с одной стороны, из неравенства (2.1) следует, что

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}\le\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}, \tag{2.16}$$

а с другой стороны, для рассмотренной в конце теоремы 1 функции $f_0(x)=\cos nx\in L_2$ получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f)}{\Big[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}\ge\frac{E_{n-1}(f_0)}{\Big[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\big(\omega^*_{2m-1}(f_0,t)\big)^2\sin nt dt\Big]^{1/2}}=\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.17}$$

Сопоставляя неравенствf (2.16) и (2.17), получаем требуемое равенство (2.15), откуда и следует утверждение следствия 1. □

Следствие 2. *Для произвольной функции $f\in L_2$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f)\le\frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\omega^*_{2m-1}\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.18}$$

Доказательство. В самом деле, учитывая, что модуль непрерывности $\omega_{2m-1}^*(f,t)$ является неубывающей функцией по t, из (2.1) получаем

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(f,t)\right\}^2 \sin nt dt\right]^{1/2}$$

$$\le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\omega_{2m-1}^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\sin nt dt\right]^{1/2} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\omega_{2m-1}^*\left(f,\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда и следует (2.18). □

Поскольку все промежуточные производные функции $f \in L_2^{(r)}$ также принадлежат пространству L_2, как и сама функция f, то определенный интерес представляет вычисление экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений промежуточных производных $f^{(r-\nu)}$ элементами подпространства $\Im_{2n-1}$ в L_2.

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $m,n \in \mathbb{N}$ и $\nu = 0,1,2,\ldots,r$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne const}} \frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right\}^2 \sin nt dt\right]^{1/2}} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}, \tag{2.19}$$

где число χ_m определяется формулой (2.2).

Доказательство. Утверждение теоремы при $\nu = r = 0$ совпадает с утверждением следствия 1. Поэтому далее будем рассматривать случай $r \ge 1$. Если $\nu = 0$, то, используя (2.15) и учитывая, что $f^{(r)} \in L_2$, согласно утверждению следствия 1 имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(f^{(r)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right\}^2 \sin nt dt\right]^{1/2}} = \sup_{\substack{\mathrm{g}\in L_2\\ \mathrm{g}\ne \mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}(\mathrm{g})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left\{\omega_{2m-1}^*(\mathrm{g},t)\right\}^2 \sin nt dt\right]^{1/2}} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.20}$$

Здесь мы учли, что функция $f_0(x) = \cos nx$ (на которой неравенство (2.16) обращается в равенство) принадлежит $L_2^{(r)}$.

Пусть натуральное число $\nu \in [1,r]$. В [12, с. 122–124] для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ доказано неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \le \left(E_{n-1}(f^{(r)})\right)^{1-\nu/r}\left(E_{n-1}(f)\right)^{\nu/r}. \tag{2.21}$$

Из первого равенства в (2.20) для $f \in L_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2 \sin nt dt\right]^{1/2}. \tag{2.22}$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ хорошо известно неравенство [3]

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{n^r} E_{n-1}(f^{(r)}). \tag{2.23}$$

Учитывая (2.22), из (2.23) для произвольной $f \in L_2^{(r)}$ выводим

$$E_{n-1}(f) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n^r}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2 \sin nt dt\right]^{1/2}. \tag{2.24}$$

Подставляя в правую часть формулы (2.21) вместо $E_{n-1}(f^{(r)})_2$ и $E_{n-1}(f)$ соответствующие оценки сверху из формулы (2.22) и (2.24), будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^\nu}\left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}. \tag{2.25}$$

Из (2.25) для любого натурального $\nu = 1, 2, \ldots, r$ следует оценка сверху экстремальной характеристики

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\text{const}}}\frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}} \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\,. \tag{2.26}$$

Для рассмотренной выше функции $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) = n^{r-\nu}, \quad \left[\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f_0^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2} = \sqrt{2}\,n^r\,\chi_m^{-1},$$

получаем оценку снизу величины, стоящей в левой части неравенства (2.26):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\text{const}}}\frac{n^\nu E_{n-1}(f^{(r-\nu)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}} \ge \frac{n^\nu E_{n-1}(f_0^{(r-\nu)})}{\left[\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\left(\omega_{2m-1}^*(f_0^{(r)},t)\right)^2\sin ntdt\right]^{1/2}} = \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}. \tag{2.27}$$

Требуемое неравенство (2.19) получаем из сопоставления оценки сверху (2.26) и оценки снизу (2.27), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 3. *В условиях теоремы* 2 *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}(f^{(r-\nu)}) \le \frac{\chi_m}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^\nu}\omega_{2m-1}^*\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right) \quad (\nu = 1,2,\ldots,r-1 \quad r\in\mathbb{N}),$$

где константа χ_m *определена равенством* (2.2).

Авторы благодарят доктора физ.-мат. наук А. Г. Бабенко за полезное обсуждение результатов статьи и ценное замечание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
2. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
3. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
4. **Бабенко А.Г.** О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 30–46.
5. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона – Стечкина в $L_2[-\pi,\pi]$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 75–84.
6. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в L^2 для наилучших приближений тригонометрическими полиномами [e-resource] // Электрон. журн. “Исследовано в России”. 2002. Ст. 140. С. 1577–1586. URL: http://wwwinfo.jinr.ru/invest_in_Russia.html .
7. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 783–788.

8. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.
9. **Барабошкина Н.А.** Неравенство Джексона – Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 62–66.
10. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
11. **Shabozov M.Sh., Yusupov G.A.** Widths of certain classes of periodic functions in L_2 // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, iss. 1. P. 869–878.
12. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982, 252 с.

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик АН Республики Таджикистан
Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Поступила 02.05.2016

Фарозова Альфия Давлатбековна
аспирант кафедры математического анализа
Хорогского государственного университета им. М. Назаршоева
e-mail: faroz85@rambler.ru

REFERENCES

1. Korneichuk N.P. *Exact constants in approximation theory.* Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1991, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 38, 452 p.
2. Chernykh N.I. Jackson's inequality in L_2. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 75–78.
3. Chernykh N.I. Best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2. *Math. Notes Acad. Sci. USSR.*, 1967, vol. 2, no. 5, pp. 803–808.
4. Babenko A.G. On the Jackson – Stechkin inequality for the best L^2-approximations of functions by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, suppl. 1, pp. S30–S47.
5. Vasil'ev S.N. The Jackson-Stechkin inequality in $L_2[-\pi,\pi]$. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, suppl. 1, pp. S243–S253.
6. Васильев С.Н. Vasil'ev S.N. Exact Jackson-Stechkin inequality in L^2 for the best approximations by trigonometric polynomials. *Electr. magazine "Issledovano v Rossii"*, 2002, St. 140, pp. 1577–1586, available at: http://wwwinfo.jinr.ru/invest_in_Russia.html (in Russian).
7. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. On Jackson's inequality for generalized moduli of continuity. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 5, pp. 736–741.
8. Kozko A.I., Rozhdestvenskii A.V. On Jackson's inequality for a generalized modulus of continuity in L_2. *Math. Sb.*, 2004, vol. 195, no. 8, pp. 1073–1115.
9. Барабошкина Н.А. Baraboshkina N.A. The Jackson-Stechkin inequality with a nonclassic modulus of continuity. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2001, suppl. 1, pp. S65–S70.
10. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best polynomial approximations in L_2 of classes of 2π-periodic functions and exact values of their widths. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, no. 5, pp. 748–757.
11. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of certain classes of periodic functions in L_2. *J. Approx. Theory*, 2012, vol. 164, iss. 1, pp. 869–878.
12. Korneichuk N. P., Ligun A. A. and Doronin V. G. *Approksimaciya s ogranicheniyami* (Approximation with constraints). Kiev: Naukova Dumka, 1982, 250 p. (in Russian).

M. Sh. Shabozov, *M. Sh. Shabozov*, Academician of Republic of Tajikistan, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Republic of Tajikistan, Dushanbe, e-mail: shabozov@mail.ru .
A. D. Farozova, doctoral student, Khorog State University, Tajikistan, e-mail: faroz85@rambler.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

УДК 519.65

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛОГОВ ВСПЛЕСКОВ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ B-СПЛАЙНОВ[1]

В. Т. Шевалдин

В статье построен аналог двухмасштабных соотношений для базисных тригонометрических сплайнов с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору порядка $2r+1$ с постоянными коэффициентами $\mathcal{L}_{2r+1}(D)=D(D^2+\alpha_1^2)(D^2+\alpha_2^2)\dots(D^2+\alpha_r^2)$, где $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ — произвольные положительные числа, и исследованы свойства вложенных подпространств тригонометрических сплайнов.

Ключевые слова: двухмасштабное соотношение, тригонометрический B-сплайн, дифференциальный оператор, всплески.

V. T. Shevaldin. A method for the construction of analogs of wavelets by means of trigonometric B-splines.

We construct an analog of two-scale relations for basis trigonometric splines with uniform knots corresponding to a linear differential operator of order $2r+1$ with constant coefficients $\mathcal{L}_{2r+1}(D)=D(D^2+\alpha_1^2)(D^2+\alpha_2^2)\dots(D^2+\alpha_r^2)$, where $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ are arbitrary positive numbers. The properties of embedded subspaces of trigonometric splines are analyzed.

Keywords: two-scale relation, trigonometric B-spline, differential operator, wavelets.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-320-327

Введение

В теории всплесков (см., например, [1–4]) для построения кратномасштабного анализа вложенных друг в друга замкнутых подпространств $\{V_j\subset L^2(\mathbb{R}),\ j\in\mathbb{Z}\}$ основную роль играют двухмасштабные соотношения для специальной выбранной функции $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \varphi\in L^2(\mathbb{R})$ (она называется *масштабирующей*) вида

$$\varphi(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\gamma_j\varphi(2x-jh)\quad(x\in\mathbb{R},\ h>0).\tag{0.1}$$

При построении всплесков с компактным носителем эта сумма состоит из конечного числа слагаемых, и в качестве функции φ может быть выбран полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) порядка r (степени $r-1$) с равномерными узлами $0,h,2h,\dots,rh$ (см., например, монографию [1] К. Чуи). Напомним, что *полиномиальным B-сплайном порядка* r (см., например, [5]) называется функция

$$B_{r,h}(x)=m_r(h)\Delta_h^r((x-rh)_+)^{r-1}\quad(x\in\mathbb{R}),$$

где $\Delta_h^rf(x)$ — конечная разность порядка r с шагом $h>0$, определенная для функций $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Здесь $m_r(h)>0$ — нормирующий множитель (будем полагать его равным 1) и $t_+=\max\{0;t\}$. При этом (см. [1])

$$\gamma_j=C_r^j=\frac{r!}{j(r-j)!}\quad(j=\overline{0,r}),\qquad\gamma_j=0\quad(j<0,\ j>r).$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Для B-$\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [6; 7] и определения в следующем разделе) с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ с постоянными действительными коэффициентами, в отличие от полиномиального случая $\mathcal{L} = D^r$ ($r \in \mathbb{N}$) соотношение (0.1) может не иметь места, поскольку если функция $e^{\beta x}$ ($\beta \in \mathbb{C}$) принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}$, т. е. $e^{\beta x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{L}$, то функция $e^{2\beta x}$, вообще говоря, не лежит в этом ядре. Несмотря на это обстоятельство, в [8] без применения аппарата преобразования Фурье были построены аналоги масштабирующих соотношений (по форме близких к (0.1)) для базисных экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору с постоянными коэффициентами, все корни характеристического многочлена которого были действительными. При этом вместо формулы (0.1), в которой масштабирующая функция $\varphi(x)$ была представлена в виде линейной комбинации сдвигов функции $\varphi(2x)$, вдвое сжатой по горизонтальной оси по сравнению с $\varphi(x)$, были получены "двухмасштабные соотношения" для одних и тех же экспоненциальных B-сплайнов, рассматриваемых на равномерных сетках с шагом, который каждый раз увеличивается в два раза.

В данной статье в разд. 1 по схеме работы [8] получены подобные соотношения для тригонометрических B-сплайнов с равномерными узлами, определяемых линейным дифференциальным оператором порядка $2r+1$ вида

$$\mathcal{L}_{2r+1} = \mathcal{L}_{2r+1}(D) = D(D^2+\alpha_1^2)(D^2+\alpha_2^2)\cdots(D^2+\alpha_r^2), \tag{0.2}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ — произвольные положительные числа. Для такого оператора и достаточно малых шагов $h > 0$ в разд. 2 уточняются связи построенных "вложенных" подпространств сплайнов (т. е. аналогов пространств V_j и W_j в [1]). С помощью матриц задача сводится к изучению результантов соответствующих алгебраических многочленов, но в отличие от экспоненциальных сплайнов, ее решение существенно зависит от шага сетки h.

1. Двухмасштабные соотношения

Дадим необходимые определения. Пусть $h > 0$, D — оператор дифференцирования, $r \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_{2r+1} = \mathcal{L}_{2r+1}(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными действительными коэффициентами вида (0.2), причем все числа α_j ($j = \overline{1,r}$) в его представлении являются положительными. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_{2r+1}$ может быть записан в виде

$$p_{2r+1}(x) = p_{\mathcal{L}_{2r+1}}(x) = x\prod_{j=1}^{r}(x^2+\alpha_j^2).$$

Автором ([9], см. также [10]) для функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ был построен разностный оператор с шагом $h > 0$

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x) = (T-E)\prod_{j=1}^{r}(T^2 - 2T\cos\alpha_j h + E)f(x)$$

$$= \sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2r+1-s}\mu_s^{(2r+1)}(h)f(x+sh) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{2r+1}$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$, E — тождественный оператор, и числа $\mu_s^{(2r+1)}(h)$ ($s = \overline{0, 2r+1}$) находятся из следующего равенства:

$$P_{2r+1}(x) = P_{\mathcal{L}_{2r+1},h}(x) = (x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1) = \sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2r+1-s}\mu_s^{(2r+1)}(h)x^s. \tag{1.2}$$

Многочлен $P_{2r+1}(x)$ является характеристическим многочленом разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ и имеет нули $x=1,\ x=e^{\pm i\alpha_j h}$ $(j=\overline{1,r})$. Ясно, что

$$\mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)=1,\ \mu_{2r}^{(2r+1)}(h)=2\sum_{j=1}^{r}\cos\alpha_j h,\dots,\mu_0^{(2r+1)}(h)=1.$$

Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ выбран таким образом, что для любого решения линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_{2r+1}(D)f=0$ имеет место тождество $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}f(x)\equiv 0$.

В частности, если все $\alpha_j=0$ $(j=\overline{1,r})$, т.е. $\mathcal{L}_{2r+1}=D^{2r+1}$, то $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}=\Delta_h^{2r+1}$ — конечная разность порядка $2r+1$ с шагом h и при этом $P_{2r+1}(x)=(x-1)^{2r+1}$, $\mu_j^{(2r+1)}=C_{2r+1}^j$ $(j=\overline{0,2r+1})$. Пусть $\varphi_{2r+1}=\varphi_{2r+1}(x)$ — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_{2r+1}(D)f=0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_{2r+1}^{(j)}(0)=\delta_{j,2r}$ $(j=\overline{0,2r})$, где $\delta_{j,2r}$ — символ Кронекера. Справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\varphi_{2k+1}(t)=\int\limits_0^t\frac{\sin\alpha_k(t-x)}{\alpha_k}\varphi_{2k-1}(x)\,dx\ \ (k=\overline{1,r}),\quad \varphi''_{2k+1}(x)+\alpha_k^2\varphi_{2k+1}(x)=\varphi_{2k-1}(x)\quad(k=\overline{1,r}),$$

$$\varphi_1(x)=1.$$

B-$\mathcal{L}$-сплайн с равномерными узлами $0,h,2h,\dots,2rh,(2r+1)h$, соответствующий дифференциальному оператору $\mathcal{L}_{2r+1}$ вида (0.2), определяется равенством (см., например, [7])

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}(x)=m_{\mathcal{L}_{2r+1}}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}\varphi_{2r+1}((x-(2r+1)h)_+)\quad(x\in\mathbb{R}).\tag{1.3}$$

Нормализующий множитель $m_{\mathcal{L}_{2r+1}}$ положим равным 1. Такой сплайн будем называть *тригонометрическим.* Заметим, что данное определение не совсем корректно, поскольку в работе И. Шенберга [11], в которой впервые были введены тригонометрические сплайны, они определялись только для оператора $\mathcal{L}_{2r+1}(D)=D(D^2+1^2)(D^2+2^2)\cdots(D^2+r^2)$, т.е. при $\alpha_1=1,\alpha_2=2,\dots,\alpha_r=r$.

Носителем тригонометрического B-сплайна $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$ является отрезок $[0;(2r+1)h]$ и $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}\in C^{2r-1}(\mathbb{R})$. С учетом (1.1) данная функция может быть записана в виде

$$\begin{aligned}B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}(x)=\mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)\varphi_{2r+1}(x_+)-\mu_{2r}^{(2r+1)}(h)\varphi_{2r+1}((x-h)_+)+\cdots\\ \cdots-\mu_0^{(2r+1)}(h)\varphi_{2r+1}((x-(2r+1)h)_+).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Наряду с функцией $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$ рассмотрим функцию $B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}$ вида

$$\begin{aligned}B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}(x)&=\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}}\varphi_{2r+1}((x-2(2r+1)h)_+)\\ &=\mu_{2r+1}^{(2r+1)}(2h)\varphi_{2r+1}(x_+)-\mu_{2r}^{(2r+1)}(2h)\varphi_{2r+1}((x-2h)_+)+\cdots\\ &\cdots-\mu_0^{(2r+1)}(2h)\varphi_{2r+1}((x-2(2r+1)h)_+),\end{aligned}\tag{1.5}$$

которая получена из функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$ формальной заменой параметра h на $2h$. Ясно, что график функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}$ не является растяжением по горизонтальной оси графика функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$. Носителем функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}$ является отрезок $[0;2(2r+1)h]$, узлами — точки $0,2h,4h,\dots,2(2r+1)h$, и эта функция (как и функция $B_{\mathcal{L}_{2r+1},h}$) принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}_{2r+1}$ на любом интервале между двумя соседними узлами. Характеристический многочлен, соответствующий оператору $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}}$, имеет вид

$$P_{\mathcal{L}_{2r+1},2h}(x)=(x^2-1)\prod_{j=1}^{r}(x^4-2x^2\cos2\alpha_j h+1)=\sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2s+1-r}\mu_s^{(2r+1)}(2h)x^{2s},\tag{1.6}$$

поскольку

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x) = (T^2 - E)\prod_{j=1}^{r}(T^4 - 2T^2\cos 2\alpha_j h + 1)f(x) = \sum_{s=0}^{2r+1}(-1)^{2r+1-s}\mu_s^{(2r+1)}(2h)f(x+2sh). \tag{1.7}$$

Напомним, что в этой формуле $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор.

Нас интересует возможность представления функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}$ в виде

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma_s B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-(2r+1-s)h) \quad (x\in\mathbb{R}) \tag{1.8}$$

и явный вид коэффициентов $\gamma_s = \gamma_s(h)$, если последняя формула имеет место. Формула (1.8) является аналогом двухмасштабного соотношения (0.1). Для ее доказательства (в отличие от классического кратномасштабного анализа) мы не будем привлекать аппарат преобразования Фурье. Поскольку $\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}} = [0; 2(2r+1)h]$, сумма (1.8) состоит из конечного числа слагаемых и представима в виде

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \gamma_{2r+1}B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) + \gamma_{2r}B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-h) + \cdots + \gamma_0 B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-(2r+1)h). \tag{1.9}$$

Теорема 1. *При любом $h>0$ имеет место равенство*

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) + \mu_{2r}^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-h) + \cdots$$
$$\cdots + \mu_0^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-(2r+1)h), \tag{1.10}$$

в котором коэффициенты $\mu_s^{(2r+1)}(h)$ $(s=\overline{0,2r+1})$ определены формулой (1.1).

Доказательство теоремы 1 будет проведем по схеме [8, теорема 1, способ 1], используя связь между характеристическими многочленами $P_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}$ и $P_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}$ разностных операторов $\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ и $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}}$ (т. е. иным способом, чем в монографии К. Чуи [1] при выводе соотношения (0.1) для полиномиального B-сплайна $\varphi(x) = B_{r,h}(x)$). Из равенств (1.1)–(1.7) следует, что коэффициенты $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s=\overline{0,2r+1})$ в формулах (1.8) и (1.9) могут быть найдены из равенства

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x) = \gamma_{2r+1}\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x+(2r+1)h) + \gamma_{2r}\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x+2rh) + \cdots + \gamma_0\Delta_h^{\mathcal{L}_{2r+1}} f(x).$$

При этом

$$\frac{P_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x)}{P_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x)} = \frac{(x^2-1)\prod_{j=1}^{r}(x^4 - 2x^2\cos 2\alpha_j h + 1)}{(x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1)} = \frac{x^2-1}{x-1}\prod_{j=1}^{r}\frac{(x^2 - e^{2i\alpha_j h})(x^2 - e^{-2i\alpha_j h})}{(x - e^{i\alpha_j h})(x - e^{-i\alpha_j h})}$$

$$= (x+1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 + 2x\cos\alpha_j h + 1) = \sum_{s=0}^{2r+1}\mu_s^{(2r+1)}(h)x^s = \gamma_{2r+1}x^{2r+1} + \gamma_{2r}x^{2r} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0.$$

Поэтому

$$\gamma_s = \mu_s^{(2r+1)}(h) \quad (s=\overline{0,2r+1}),$$

т. е. $\gamma_{2r+1} = 1$, $\gamma_{2r} = 2\sum_{j=1}^{r}\cos\alpha_j h, \ldots, \gamma_0 = 1$ — коэффициенты при степенях x в многочлене $(x+1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 + 2x\cos\alpha_j h + 1)$. Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. В теореме 1 установлен аналог двухмасштабного соотношения для тригонометрических B-сплайнов с равномерными узлами, определяемых оператором вида (1.1). При этом расстояния между соседними узлами сплайна при переходе от функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}$ к функции $B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}$ увеличивается в два раза. Из способа доказательства теоремы 1 становится ясно, как найти коэффициенты $\gamma_{s,k} = \gamma_{s,k}(h)$ $(k = 3, 4, \ldots)$ и в аналогичном k-масштабном соотношении, т. е. в формуле

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,kh}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \gamma_{s,k} B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x - (2r+1-s)h).$$

Для их нахождения нужно разделить соответствующий многочлен

$$P_{\mathcal{L}_{2r+1,kh}}(x) = (x^k - 1)\prod_{j=1}^{r}(x^{2k} - 2x^k\cos k\alpha_j h + 1) = (x^k - 1)\prod_{j=1}^{r}(x^k - e^{ik\alpha_j h})(x^k - e^{-ik\alpha_j h})$$

на многочлен

$$P_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) = (x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1) = (x-1)\prod_{j=1}^{r}(x - e^{i\alpha_j h})(x - e^{-i\alpha_j h})$$

и вычислить коэффициенты $\gamma_{s,k}$ алгебраического многочлена, полученного в результате указанного деления.

2. Свойства “вложенных” подпространств триномeтрических сплайнов

По аналогии с [8, теорема 2] назовем *ψ-всплеском* функцию вида

$$\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x) = \mu_0^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) - \mu_1^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-h) + \cdots$$
$$\cdots - \mu_{2r+1}^{(2r+1)}(h)B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-(2r+1)h),$$

где функция $B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}$ и числа $\mu_s^{(2r+1)}(h)$ $(s = \overline{0, 2r+1})$ определены равенствами (1.3) и (1.2). Поскольку оператор $\mathcal{L}_{2r+1}$ и число $h > 0$ у нас фиксированы, то в дальнейшем для краткости будем записывать

$$\mu_s = \mu_s^{(2r+1)}(h) \quad (s = \overline{0, 2r+1}).$$

Системы функций $\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. Положим $V_{1,h} = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $V_{2,2h} = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и $W_{2,2h} = \operatorname{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. При этом $V_{2,h} \subset V_{1,h}$. Следующая теорема указывает связь определенных выше подпространств.

Теорема 2. *При $0 < h < h_0 = \pi/(2\max_{1\le j\le r}\alpha_j)$ имеет место равенство*

$$V_{1,h} = V_{2,h} + W_{2,2h}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 2 требуется установить, что существуют такие действительные числа $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$, что при $0 \le x \le (2r+1)h$ имеет место тождество

$$B_{\mathcal{L}_{2r+1,h}}(x) \equiv \sum_j a_j B_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x - jh) + \sum_j b_j \psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2h}}(x - jh).$$

Дальнейшее доказательство теоремы 2 практически полностью повторяет доказательство [8, теорема 2]. Оно сводится к проверке того, что корни алгебраических многочленов степени $2r+1$

$$T_1(x) = \mu_0 x^{2r+1} + \mu_1 x^{2r} + \cdots + \mu_{2r}x + \mu_{2r+1} \quad \text{и} \quad T_2(x) = -\mu_{2r+1}x^{2r+1} + \mu_{2r}x^{2r} - \cdots - \mu_1 x + \mu_0$$

являются попарно различными. В силу (1.2) имеем

$$T_1(x) = -x^{2r+1}P_{2r+1}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = \mu_0(x+1)\prod_{j=1}^{r}(1 + 2x\cos\alpha_j h + x^2),$$

$$T_2(x) = -P_{2r+1}(x) = -(x-1)\prod_{j=1}^{r}(x^2 - 2x\cos\alpha_j h + 1).$$

Нулями многочлена $T_1(x)$ являются числа

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -e^{i\alpha_1 h}, \quad x_3 = -e^{-i\alpha_1 h}, \quad x_4 = -e^{i\alpha_2 h}, \ldots, x_{2r+1} = -e^{-i\alpha_r h},$$

а многочлена $T_2(x)$ — числа

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{i\alpha_1 h}, \quad y_3 = e^{-i\alpha_1 h}, \quad y_4 = e^{i\alpha_2 h}, \ldots, y_{2r+1} = e^{-i\alpha_r h}.$$

Заметим, что условие $0 < h < h_0 = \pi/(2\max_{1\le j\le r}\alpha_j)$ теоремы 2 гарантирует неравенства $x_i \ne y_j$ $(i, j = \overline{1, 2r+1})$. Поэтому, учитывая, что $\mu_{2r+1} = \mu_0 = 1$, теорема 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Равенство (2.1) является ключевым для дальнейшего построения системы вложенных подпространств предложенного выше варианта кратномасштабного анализа. А именно, положим

$$V_{1,2^{n-1}h} = \operatorname{span}\left\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2^{n-1}h}}(x - 2^{n-1}kh)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad V_{2,2^n h} = \operatorname{span}\left\{B_{\mathcal{L}_{2r+1,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$

$$V_{2,2^n h} = \operatorname{span}\left\{\psi_{\mathcal{L}_{2r+1,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда $V_{2,2^n h} \subset V_{1,2^{n-1}h}$ и при достаточно малом $h > 0$ (см. ограничения в условии теоремы 2) имеет место равенство

$$V_{1,2^{n-1}h} = V_{2,2^n h} + W_{2,2^n h} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

З а м е ч а н и е 3. Анализ доказательств теорем 1 и 2 (для тригонометрических B-сплайнов) и работы [8] (экспоненциальные B-сплайны) показывает, что аналогичные результаты справедливы и в более общем случае, а именно, для любого линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_n$ произвольного порядка n с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1), который может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(D) = \prod_{s=1}^{k}(D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2)\prod_{j=1}^{n-2k}(D - \beta_j),$$

где $\beta_j, \gamma_s, \alpha_s \in \mathbb{R}$, причем можно считать, что $\alpha_s > 0$ (если $k \ge 1$). Соответствующий разностный оператор для $\mathcal{L}_n$ имеет вид (см., например, [9])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_n} f(x) = \prod_{s=1}^{k}(T^2 - 2Te^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}E)\prod_{j=1}^{n-2k}(T - e^{\beta_j h}E)f(x) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\mu_s^{(n)}(h)f(x+sh),$$

а его характеристический многочлен —

$$P_{\mathcal{L}_{n,h}}(x) = \prod_{s=1}^{k}(x^2 - 2xe^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x - e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\mu_s^{(n)}(h)x^s.$$

Масштабирующее соотношение для B-$\mathcal{L}$-сплайнов вида (1.10) в общем случае также имеет место, поскольку

$$\frac{P_{\mathcal{L}_{n,2h}}(x)}{P_{\mathcal{L}_{n,h}}(x)} = \frac{\prod_{s=1}^{k}(x^4 - 2e^{2\gamma_s h}x^2\cos 2\alpha_s h + e^{4\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x^2 - e^{2\beta_j h})}{\prod_{s=1}^{k}(x^2 - 2e^{\gamma_s h}x\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x - e^{\beta_j h})}$$

$$= \prod_{s=1}^{k}(x^2 + 2e^{\gamma_s h}x\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2k}(x + e^{\beta_j h}) = \gamma_n x^n + \gamma_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0.$$

Доказательство теоремы 2 для произвольного оператора $\mathcal{L}_n$ будет отличаться только более общей формой многочленов $T_1(x)$ и $T_2(x)$, а именно,

$$T_1(x) = -P_{\mathcal{L}_{n,h}}(x) = -\prod_{s=1}^{k}(x^2 - 2xe^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h})\prod_{j=1}^{n-2x}(x - e^{\beta_j h}),$$

$$T_2(x) = (-x^n)P_{\mathcal{L}_{n,h}}\Big(-\frac{1}{x}\Big) = \mu_0^{(n)}\prod_{s=1}^{k}(1 + 2xe^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}x^2)\prod_{j=1}^{n-2x}(1 + xe^{\beta_j h}).$$

Если шаг $h > 0$ брать достаточно малым (например, $0 < h < h_0 = \pi/(2\max_{1\le j\le k}\alpha_j)$), то нули этих многочленов попарно не совпадают. Поэтому имеет место теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты. Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.Л.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
3. **Малла С.** Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
4. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 461 с.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
6. **Morsche H.G. ter** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: Dissertation. Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
8. **Пыткеев Е.Г., Шевалдин В.Т.** Двухмасштабные соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 234–243.
9. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
10. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
11. **Schoenberg I.J.** On trigonometric spline interpolation // J. Math. Mech. 1964. Vol. 13. P. 795–825.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 21.03.2016

REFERENCES

1. Чуи Ч. Chui C.K. An introduction to wavelets. Boston: Acad. Press, 1992, Ser. Wavelet Anal. Its Appl, vol. 1, 264 p.
2. Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.Л. Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.

   Novikov, I.Y., Skopina, M.A., and Protasov, V.Y. *Teoriya vspleskov* (Wavelet theory). Providence: AMS, 2011, Ser. Transl. Math. Monographs, vol. 239, 506 p.
3. Malla S. *Vejvlety v obrabotke signalov* (Wavelets in signal processing). Moscow: Mir, 2005, 671 p. (in Russian).
4. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. Appl. Math., vol. 61, 357 p.
5. Zavyalov Y.S., Kvasov, B.I., Miroshnichenko, V.L. (Metody splajn funkcij) Methods of spline functions. Moscow: Nauka, 1980, 352 p. (in Russian).
6. Morsche H.G. ter Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions, Dissertation. Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.

7. Shevaldin V.T. *Approksimaciya lokalnymi splajnami* (Local approximation by splines). Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2014, 198 p. (in Russian).
8. Pytkeev E.G., Shevaldin Two-scale relations for B-$\mathcal{L}$-splines with uniform knots. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 21, no. 4, 2015, pp. 234–243 (in Russian).
9. Shevaldin V.T. A problem of extremal interpolation. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 4, pp. 310–320.
10. Sharma A., Tsimbalario I. Certain linear differential operators and generalized differences. *Math. Notes*, 1977, vol. 21, no. 2, pp. 91–97.
11. Schoenberg I.J. On trigonometric spline interpolation. *J. Math. Mech.*, 1964, vol. 13, pp. 795–825.

V.T. Shevaldin , Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 4 2016

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина

TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск В. В. Шевченко

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 25.11.16. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38, 0. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226