РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 22, № 3 2016

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22 № 3 2016

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 22, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2016. 310 с.

ISSN 0134–4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ХОЛЛОВЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

Е. Н. Бажанова, В. А. Ведерников

Получено полное описание строения конечной группы, каждая подгруппа Шмидта которой холлова.
Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, группа Фробениуса, холлова подгруппа, гиперцентр группы.

E. N. Bazhanova, V. A. Vedernikov. Finite groups with Hall Schmidt subgroups.

We obtain a complete description for the structure of a finite group in which any Schmidt subgroup is a Hall subgroup.

Keywords: finite group, Schmidt group, Frobenius group, Hall subgroup, hypercenter of a group.

MSC: 20DXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-3-11

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] О. Ю. Шмидт исследовал строение ненильпотентных групп, все собственные подгруппы которых нильпотентны. Такие группы впоследствии стали называть группами Шмидта.

На возможности применения групп Шмидта к исследованию подгруппового строения групп, по-видимому, впервые обратил внимание С. А. Чунихин (см. [2, гл. 4], а также обзор [3]). В работах [4; 5] было доказано, что нормальная неабелева силовская p-подгруппа группы Шмидта изоморфна U/Z, где U — силовская p-подгруппа группы $U_3(p^n)$ для некоторого целого числа $n \geq 1$ и подходящей подгруппы Z из $Z(U)$. В ряде работ изучались группы, представимые в виде произведения подгрупп Шмидта (см., например, [4; 6]). В статьях [7; 8] было получено полное описание строения групп, в которых каждая подгруппа Шмидта субнормальна.

В работе [9] В. Н. Княгиной и В .С. Монаховым изучены свойства ненильпотентной группы G, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова. В частности, в работе [9] доказано, что G содержит нормальную нильпотентную холлову подгруппу H и фактор-группа G/H является циклической группой. В данной работе установлены необходимые и достаточные условия для групп с такими свойствами.

В работе [1] доказано, что группа Шмидта G бипримарна, т. е. $\pi(G) = \{p, q\}$, силовская p-подгруппа G_p нормальна в G, $G_q := \langle x\rangle$ — циклическая группа, $\langle x^q\rangle = O_q(G) \leq Z(G)$, $|G_p/\Phi(G_p)| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q и $G_p/\Phi(G_p)$ является главным фактором группы G. В работах [10–12] были установлены дополнительные свойства группы Шмидта, а именно $|\Phi(G_p)| \leq p^{m/2}$, $\Phi(G_p) = [G_p, G_p] \leq Z(G)$, $exp(G_p)$ равна p при $p > 2$ и не превосходит 4 при $p = 2$. Из свойств группы Шмидта непосредственно следует, что если в группе Шмидта G силовская p-подгруппа G_p абелева, то $G_p \cdot\lhd G$ и $|G_p| = p^m \equiv 1 \pmod q$. Группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой, следуя [6], коротко будем называть $S_{\langle p,q\rangle}$-*группой*. Группа называется *неразложимой*, если она не может быть представлена в виде прямого произведения двух различных собственных подгрупп.

Для полного описания строения группы G, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова, нам потребуется понятие $F_{\langle n,d\rangle}$-группы, дополняющее понятие группы Фробениуса, а также понятие S-накрывающей группы для $F_{\langle n,d\rangle}$-группы. Свойства $F_{\langle n,d\rangle}$-группы исследованы в лемме 7. Из примера 1 следует, что $F_{\langle n,d\rangle}$-группа не обязана быть группой Фробениуса. В частности, одной из таких является $F_{\langle 1364,15\rangle}$-группа, а в примере 2 приведена ее S-накрывающая группа, в которой каждая подгруппа Шмидта холлова.

Определение 1. Ненильпотентную неразложимую группу G назовем $F_{\langle n,d\rangle}$-группой, если $G := [M]H$, где $M := Soc(G)$ — нильпотентная нормальная холлова подгруппа порядка n, H — циклическая подгруппа порядка d в группе G, причем для любого $p \in \pi(M)$ и любого $q \in \pi(H/C_H(M_p))$ в H существует подгруппа Q такая, что $|Q| = q$ и $[M_p]Q$ является группой Шмидта.

Определение 2. Группу U назовем S-накрывающей $F_{\langle n,d\rangle}$-группы G, если в U существует нормальная подгруппа A такая, что $U/A \cong G$, $A \leq \Phi(U) \cap Z(U)$ и для любого $p \in \pi(A)$ силовская p-подгруппа группы A содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U.

Цель настоящей работы — получить необходимые и достаточные условия, при которых в ненильпотентной группе каждая подгруппа Шмидта холлова.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *В ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда группа $G := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \times N$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_t, N$ — нормальные холловы подгруппы группы G, $1 \leq N \leq F(G)$ и A_i является S-накрывающей $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.*

2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Применяем следующие обозначения и определения: Z_n — циклическая группа порядка n; E_{p^n} — элементарная абелева p-группа порядка p^n; π — некоторое множество простых чисел; π' — дополнение к множеству π во множестве всех простых чисел $\mathbb{P}$; $\pi(n)$ — множество всех простых делителей натурального числа n; если $\pi(n) \subseteq \pi$, то натуральное число n называется *π-числом*; делитель d натурального числа n называется *холловым делителем*, если $(n, n/d) = 1$; символ $:=$ означает равенство по определению; $|G|$ — порядок группы G; $\pi(G) := \pi(|G|)$; если $\pi(G) \subseteq \pi$, то группа G называется *π-группой*; $|G : X|$ — индекс подгруппы X в группе G; G_p означает одну из силовских p-подгрупп группы G; $Soc(G)$ — цоколь группы G; $L \cdot\triangleleft G$ означает, что L — минимальная нормальная подгруппа группы G; K char G означает, что K — характеристическая подгруппа группы G; если H — подгруппа группы G и $(|G : H|, |H|) = 1$, то H называется *холловой подгруппой группы G*; если H — π-подгруппа группы G и $|G : H|$ является π'-числом, то H называется *π-холловой подгруппой группы G*; $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ — соответственно центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ — наибольшие нормальные p- и p'-подгруппы соответственно группы G; $G := [A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B группы G. Группа $G = [M]H$ называется *группой Фробениуса* с нормальным множителем M и дополнительным множителем H, если $1 < H < G$ и $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \backslash H$. Группа (подгруппа) называется *pd-группой* (*pd-подгруппой*), если ее порядок делится на p, где p — простое число. Последний член верхнего центрального ряда группы G называется *гиперцентром* G и обозначается $H(G)$. Следуя [9], обозначим через $\mathfrak{H}$ класс всех групп, в которых каждая подгруппа Шмидта холлова. Группа, принадлежащая классу $\mathfrak{H}$, называется *$\mathfrak{H}$-группой.*

Неприведенные обозначения и определения можно найти в [2; 13–15].

Лемма 1 (теорема Шура — Цассенхауза [15, теорема 4.32]). *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Если $|N| = n$, $|G : N| = m$ и $(m, n) = 1$, то в группе G существует подгруппа порядка m и любые две подгруппы порядка m в группе G сопряжены.*

Лемма 2 [8, лемма 1]. *Пусть G — группа, $N \lhd G$, $A \leq G$, $H(G)$ – гиперцентр группы G и $N \leq H(G)$. Тогда*

(1) $A \cap H(G) \leq H(A)$;

(2) $H(G/N) = H(G)/N$ *и* $F(G/N) = F(G)/N$;

(3) *если* $N \neq 1$, *то* $N \cap Z(G) \neq 1$.

Лемма 3 [9, лемма 3]. *Если группа $G \in \mathfrak{H}$, то каждая подгруппа группы G и каждая фактор-группа группы G принадлежат $\mathfrak{H}$.*

При доказательстве теоремы 1 существенно применяется следующий результат работы [9].

Лемма 4 [9, теорема]. *Пусть G — ненильпотентная $\mathfrak{H}$-группа. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *если P — ненормальная силовская p-подгруппа группы G, то P является циклической и максимальная подгруппа из P содержится в $Z(G)$*;

(2) *если P является нормальной силовской p-подгруппой группы G и G не является p-разложимой, то либо P является минимальной нормальной подгруппой в группе G, либо P неабелева, $\Phi(P) = P' = Z(P)$ и $P/\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в фактор-группе $G/\Phi(P)$*;

(3) *если P_1 — нормальная p-подгруппа группы G, не являющаяся силовской p-подгруппой группы G и G не p-разложима, то P_1 содержится в $Z(G)$*;

(4) *если $Z(G) = 1$, то группа G содержит нормальную абелеву холлову подгруппу A, в которой каждая силовская подгруппа является минимальной нормальной подгруппой в G, G/A является циклической и число $|G/A|$ свободно от квадратов.*

Докажем два свойства гиперцентра, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма 5. *Пусть G — группа, $H(G)$ — гиперцентр группы G, $R \leq H(G)$. Если R — холлова подгруппа в группе G, то в G существует подгруппа A такая, что $G = A \times R$.*

Доказательство. Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка. Так как $H(G)$ char G, $H(G)$ нильпотентна и по условию R — холлова подгруппа в G, а значит и в $H(G)$, то R char $H(G)$ и, значит, R char G. Если $R = 1$, то $G = A \times R$ и $A = G$. Пусть $R \neq 1$. По п. (3) леммы 2 имеем $Z := R \cap Z(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу G/Z. Так как $|G/Z| < |G|$ и по п. (2) леммы 2 $H(G/Z) = H(G)/Z$, то по индукции $G/Z = (R/Z) \times (B/Z)$. Тогда $G = RB$, $B \lhd G$ и $R \cap B = Z$. Пусть $\pi := \pi(R)$. Так как $G/R \cong B/B \cap R = B/Z$, то B/Z является π'-группой. Поскольку $Z \leq R$, то Z — π-группа. По лемме 1 в группе B существует подгруппа A такая, что $B = A[Z]$. Поскольку $Z \leq Z(G)$, то $B = A \times Z$. Так как $B \lhd G$ и $A = O_{\pi'}(B)$ char B, то $A \lhd G$ и $G = R \times A$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — группа, $N \lhd G$ и $N \leq H(G)$. Если $A/N \leq G/N$, $\pi := \pi(A/N)$ и A/N является π-холловой подгруппой группы G/N, то в G существует π-холлова подгруппа B такая, что $A/N = BN/N$ и $A = B \times N_{\pi'}$.*

Доказательство. Так как $\pi = \pi(A/N)$ и N — нильпотентная группа, то $N = N_\pi \times N_{\pi'}$. Если $N_{\pi'} = 1$, то A является π-группой и поскольку $|G/N : A/N| = |G : A|$ — π'-число, то отсюда следует, что A — π-холлова подгруппа группы G. Тогда полагаем $B = A$. Пусть $N_{\pi'} \neq 1$. По п. (1) леммы 2 получим, что $N_{\pi'} \leq N \leq A \cap H(G) \leq H(A)$ и $N_{\pi'}$ является π'-холловой подгруппой группы A. Тогда по лемме 5 в A существует подгруппа B такая, что $A = B \times N_{\pi'}$. Так как B является π-холловой подгруппой группы A и $|G : A|$ — π'-число, то B является π-холловой подгруппой группы G, причем $A/N = BN/N$. Лемма доказана.

Пример 1. Пусть группа $G = [E_4 \times E_{11} \times E_{31}](Z_3 \times Z_5)$, где $[E_4]Z_3$, $[E_{11}]Z_5$, $[E_{31}]Z_3$ и $[E_{31}]Z_5$ являются группами Шмидта. Тогда G является $F_{\langle 1364,15\rangle}$-группой. Отметим, что $E_4 \times Z_5$

и $E_{11} \times Z_3$ являются бипримарными холловыми нильпотентными подгруппами группы G и $(Z_3 \times Z_5) \cap (Z_3 \times Z_5)^a = Z_5$, где $1 \neq a \in E_4$. Следовательно, группа G не является группой Фробениуса.

Основные свойства $F_{\langle n,d \rangle}$-группы содержатся в следующей лемме.

Лемма 7. *Пусть $G := [M]H$ является $F_{\langle n,d \rangle}$-группой, $M := M_{p_1} \times M_{p_2} \times \ \ldots \times M_{p_s} := Soc(G)$, $|M_{p_i}| := p_i^{k_i}$, $k_i > 0$ — целое число, $i = 1, 2, \ldots s$, $\pi(H) := \{q_1, q_2, \ldots, q_t\}$, $H := \langle h \rangle$, $h_j \in H$ и $|h_j| := q_j$, $j = 1, 2, \ldots, t$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $\Phi(G) = Z(G) = 1$;

(2) *если $L \cdot\!\lhd G$, то существует $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ такое, что $L = M_p$*;

(3) $N_G(H) = H$;

(4) *для каждого $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ существует $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ такое, что $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ является группой Шмидта, причем $p_i^{k_i} \equiv 1 \pmod{q_j}$*;

(5) *для каждого $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$ существует $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$ такое, что $[M_{p_r}]\langle h_m \rangle$ является группой Шмидта, причем $p_r^{k_r} \equiv 1 \pmod{q_m}$*;

(6) *если $s = 1$ или $t = 1$, то группа G является группой Фробениуса*;

(7) *каждая подгруппа Шмидта является холловой в G тогда и только тогда, когда $|H|$ свободен от квадратов.*

Доказательство. (1) Допустим, что $\Phi(G) \neq 1$. Пусть $L \cdot\!\lhd G$, $L \leq \Phi(G)$. Тогда $L \leq M = Soc(G)$, и по [15, лемма 2.37] $M = L \times K$, причем $K \lhd G$. Отсюда следует, что $G = L(KH)$, причем $KH < G$. Так как $L \leq \Phi(G)$, то из $G = L(KH)$ вытекает, что $G = KH$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi(G) = 1$. Допустим, что $Z = Z(G) \neq 1$. Тогда по [13, лемма 7.9] подгруппа Z дополняема в G. Следовательно, существует в G подгруппа A такая, что $G = ZA = Z \times A$ и, значит, группа G разложима, что противоречит определению 1. Следовательно, $Z(G) = 1$.

(2) Пусть $p \in \pi(L)$. Так как $M_p \lhd G$ и M_p является силовской p-подгруппой группы G, то $L \leq M_p$. Поскольку $Z(G) = 1$, то $C_G(L) < G$. По [15, лемма 2.37] существует такая подгруппа K, что $M = L \times K$ и, значит, $M \leq C_G(L)$. Тогда по модулярному тождеству $C_G(L) = M(C_G(L) \cap H)$, причем $C_H(L) = C_G(L) \cap H < H$. Поэтому существует $q \in \pi(H/C_H(L))$. Так как $C_H(M_p) \leq C_H(L)$, то $q \in \pi(H/C_H(M_p))$. По определению 1 в H существует подгруппа Q такая, что $|Q| = q$ и $[M_p]Q$ является группой Шмидта. Допустим, что $L < M_p$. Тогда из свойств группы Шмидта следует, что $L \leq \Phi(M_p)$. По модулярному тождеству получим, что $M_p = L \times (M_p \cap K)$; это невозможно. Следовательно, $L = M_p$.

(3) Допустим, что $H < T := N_G(H)$. По условию $G = [M]H$. Тогда по модулярному тождеству $T = H(T \cap M)$. Так как $H \lhd T$, $T \cap M \lhd T$ и $(T \cap M) \cap H = 1$, то $T = H \times (T \cap M)$. Из определения 1 и [15, лемма 2.37, п. 2)] следует, что M является абелевой с элементарными абелевыми силовскими p-подгруппами для любого $p \in \pi(M)$. Тогда $C_G(T \cap M) \geq \langle M \cup H \rangle = G$ и, значит, $Z(G) \neq 1$. Получили противоречие с п. (1). Следовательно, $N_G(H) = H$.

(4) Пусть $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Допустим, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ группа $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ является нильпотентной. Тогда $C_G(h_j) \geq \langle M \cup H \rangle = G$ и, значит, $Z(G) \neq 1$, что противоречит п. (1). Следовательно, существует $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ такое, что $q_j \in \pi(H/C_H(M_{p_i}))$ и по определению 1 $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ является группой Шмидта. Так как M_{p_i} является элементарной абелевой p_i-группой (см. доказательство п. (3)), то из свойств группы Шмидта $[M_{p_i}]\langle h_j \rangle$ следует, что $p_i^{k_i} \equiv 1 \pmod{q_j}$.

(5) Пусть $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Допустим, что для любого $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$ группа $[M_{p_r}]H_{q_m}$ является нильпотентной. Тогда $C_G(M_{p_r}) \geq H_{q_m}$ для любого $m = 1, 2, \ldots, t$ и, значит, $C_G(M_{p_r}) \geq \langle M \cup H \rangle = G$. Поэтому $Z(G) \neq 1$, что противоречит п. (1). Следовательно, существует $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$ такое, что $q_m \in \pi(H/C_H(M_{p_r}))$ и по определению 1 $[M_{p_r}]\langle h_m \rangle$ является группой Шмидта, причем $p_r^{k_r} \equiv 1 \pmod{q_m}$.

(6) Пусть $s = 1$. Тогда $G = [M_{p_1}]\langle h\rangle$, $M = M_{p_1} = Soc(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $H = \langle h\rangle$ является максимальной подгруппой группы G, причем по п. (3) $N_G(H) = H$.

Допустим, что существует $g \in G \setminus H$ такой, что $D = H \cap H^g \neq 1$. Тогда $C_G(D) \geq \langle H, H^g\rangle = G$, что противоречит п. (1). Следовательно, $H \cap H^g = 1$ для любого $g \in G \setminus H$ и, значит, G — группа Фробениуса с нормальным множителем M и дополнительным множителем H.

Пусть $t = 1$. Тогда $G = [M]H$, $\pi(H) = \{q_1\}$, $H = \langle h\rangle$ — циклическая q_1-группа и $|h_1| = q_1$. По п. (5) $[M_{p_i}]\langle h_1\rangle$ является группой Шмидта, причем $p_i^{k_i} \equiv 1 \pmod{q_1}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, s$. По п. (3) $N_G(H) = H$. Допустим, что существует $x \in G \setminus H$ такой, что $D := H \cap H^x \neq 1$. Тогда по п. (3) $H^x \neq H$ и $T := N_G(D) \geq \langle H, H^x\rangle > H$. По модулярному тождеству $T = H(M \cap T)$, причем $L := M \cap T \neq 1$ и $G = MT$. Так как $L \lhd M$ и $L \lhd T$, то $L \lhd G$. Пусть $p_i \in \pi(L)$. Тогда в силу п. (2) $M_{p_i} \leq L$. Так как $H = \langle h\rangle$ — циклическая q_1-группа, $|h_1| = q_1$ и $1 \neq D < H$, то H содержит единственную подгруппу Q порядка q_1 и, значит, $h_1 \in Q \leq D$. Следовательно, $M_{p_i}\langle h_1\rangle \leq L \times D$ и, значит, $M_{p_i}\langle h_1\rangle$ — нильпотентная группа, что противоречит п. (5). Поэтому $H \cap H^x = 1$ для любого $x \in G \setminus H$ и G является группой Фробениуса.

(7) Пусть в группе G каждая подгруппа Шмидта является холловой. Так как для любого $q_j \in \pi(H)$ по п. (4) в группе G существует подгруппа Шмидта $[M_{p_i}]\langle h_j\rangle$, которая является холловой в G, то $\langle h_j\rangle$ — силовская q_j-подгруппа группы G и, значит, $|H_{q_j}| = q_j$ для любого $q_j \in \pi(H)$. Поэтому $|H|$ свободен от квадратов.

Пусть в $F_{\langle n,d\rangle}$-группе $G = [M]H$ порядок подгруппы H свободен от квадратов. Пусть S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G. Тогда $S_p = S \cap M_p \lhd S$. Так как $S_q \not\subseteq C_G(S_p)$ и $C_G(M_p) \leq C_G(S_p)$, то $q \in \pi(G/C_G(M_p)) = \pi(H/C_H(M_p))$. Тогда по определению 1 в G существует подгруппа Шмидта $[M_p]Q$, где $Q \leq H$ и $|Q| = q$. Пусть $|M_p| := p^k$. Тогда $p^k \equiv 1 \pmod q$ и k — показатель числа p по модулю q. Так как $|S_p|$ также обладает этим свойством, то $|S_p| = |M_p|$. Поскольку $|H|$ свободен от квадратов, то отсюда следует, что S является холловой подгруппой группы G. Лемма доказана.

3. Доказательство основных результатов

Теорема 2. *Если в ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова, то $G/H(G) := F_1 \times \ldots \times F_r$, где F_i — холлова подгруппа в $G/H(G)$, изоморфная $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группе, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова. Допустим, что группа G — контрпример минимального порядка. Пусть $Z := Z(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z$. По лемме 3 в группе $\overline{G}$ каждая подгруппа Шмидта холлова. Так как $|\overline{G}| < |G|$, то по индукции для группы $\overline{G}/H(\overline{G})$ заключение теоремы выполняется. По п. (2) леммы 2 $H(G/Z) = H(G)/Z$. Тогда $\overline{G}/H(\overline{G}) \cong G/H(G)$ и, значит, для группы G заключение теоремы выполняется. Следовательно, $Z(G) = 1$.

Допустим, что $\Phi := \Phi(G) \neq 1$. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа группы G, $M \leq \Phi(G)$ и M — элементарная абелева p-группа. По [13, лемма 3.9] $O_p(G/C_G(M)) = 1$. Так как $Z(G) = 1$, то $C_G(M) \neq G$. Пусть $x \in G \setminus C_G(M)$, x — q-элемент, где $q \neq p$. Тогда $[M]\langle x\rangle$ — ненильпотентная группа. Пусть V — некоторая подгруппа Шмидта группы $[M]\langle x\rangle$. Тогда V — $S_{\langle p,q\rangle}$-группа, $V_p \leq M$. По условию V — холлова подгруппа группы G. Следовательно, V_p — силовская p-подгруппа группы G и, значит, $V_p = M = G_p$, что невозможно из-за $M \leq \Phi(G)$.

Итак, $\Phi(G) = 1$. Пусть $F := F(G)$. Тогда по [13, лемма 7.9] $G = [F]H$, причем по п. (4) леммы 4 F является холловой подгруппой в G, силовские подгруппы из F суть минимальные нормальные подгруппы группы G, а H — циклическая группа порядка, свободного от квадратов.

Допустим, что группа G разложима. Тогда в G существуют собственные нормальные подгруппы A и B такие, что $G := A \times B$. Так как $Z(G) = 1$, то $Z(A) = Z(B) = 1$ и, значит, A и B — ненильпотентные подгруппы группы G. Поскольку $A \lhd G$ и $F(A)$ char A, то $F(A) \lhd G$. Следовательно, $F(A) \le F(G)$ и $F(A) = A \cap F(G)$. По [15, лемма 2.37, п. 1] $F(A)F(G) = F(G) = F(A) \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы G и N_i — силовская подгруппа группы G, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поскольку $F(G)$ — холлова подгруппа в группе G, то отсюда следует, что $F(A)$ — холлова подгруппа в группе G. Аналогично $F(B)$ — нормальная холлова подгруппа в группе G, причем $F(G) = F(A) \times F(B)$. Из того что $G/F(G) \cong A/F(A) \times B/F(B)$ — группа порядка, свободного от квадратов, следует: A и B — холловы подгруппы группы G.

Поскольку $|A| < |G|$ и каждая подгруппа Шмидта группы A холлова в G, а значит, и в группе A, то по индукции $A = F_1 \times \ldots \times F_m$, где F_i — $F_{\langle n_i, d_i\rangle}$-подгруппа группы A, $i = \overline{1, m}$, причем $|F_1|, \ldots, |F_m|$ попарно взаимно просты. Аналогично $B = F_{m+1} \times \cdots \times F_t$ и, значит, $G = F_1 \times \ldots \times F_t$, где $|F_1|, \ldots, |F_t|$ попарно взаимно просты, и G удовлетворяет заключению теоремы. Получили противоречие. Следовательно, группа G не является разложимой группой.

Допустим, что $F < Soc(G) := C$. Тогда по модулярному тождеству получим, что $C = F(C \cap H)$, причем $C \cap H \ne 1$. Так как $C_G(C \cap H) \ge \langle C, H\rangle = G$, то $C \cap H \le Z(G) = 1$. Получили противоречие. Следовательно, $F = Soc(G)$. Пусть $p \in \pi(F)$. Так как $Z(G) = 1$, то $C_G(F_p) < G$. Пусть $q \in \pi(G/C_G(F_p))$. Так как $F \le C_G(F_p)$, то $G = HC_G(F_p)$ и, значит, $G/C_G(F_p) \cong H/C_H(F_p)$. Тогда $[F_p]H_q$ является ненильпотентной подгруппой группы G для любого $q \in \pi(H/C_H(F_p))$. Поэтому группа $[F_p]H_q$ содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу S. По условию S является холловой подгруппой группы G. Следовательно, $S = [F_p]H_q$. Так как $|H|$ свободен от квадратов, то $|H_q| = q$. По определению 1 G является $F_{\langle n,d\rangle}$-группой, где $n := |F|$ и $d := |H|$. Получили противоречие. Теорема 2 доказана.

П р и м е р 2. Пусть группа $U = [Q_8 \times E_{11} \times E_{31}](Z_9 \times Z_{125})$, где Q_8 — группа кватернионов, $[Q_8]Z_9$, $[E_{11}]Z_{125}$, $[E_{31}]Z_9$, $[E_{31}]Z_{125}$ являются группами Шмидта, а $Q_8 \times Z_{125}$ и $E_{11} \times Z_9$ — бипримарными холловыми нильпотентными подгруппами группы U. Тогда U является S-накрывающей $F_{\langle 1364,15\rangle}$-группы $U/Z(U)$ из примера 1, причем в группе U каждая подгруппа Шмидта холлова.

З а м е ч а н и е 1. Группа U, приведенная в примере 2, является накрывающей $F_{\langle 1364,15\rangle}$-группы G из примера 1, причем группа U получена путем замены каждой подгруппы Шмидта в G ее накрывающей. Ранее подгруппы Шмидта назывались подгруппами типа S (см. [2]). В связи с этим согласно определению 2 группу U называем S-накрывающей группой $F_{\langle 1364,15\rangle}$-группы G.

Теорема 3. *Пусть U является S-накрывающей группой $F_{\langle n,d\rangle}$-группы G и $Z := Z(U)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$Z = \Phi(U)$, $U/Z \cong G$ и для любого $p \in \pi(Z)$ силовская p-подгруппа группы Z содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U.*

(2) *Если S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы U, то $S \cap Z$ является $\{p, q\}$-холловой подгруппой группы Z.*

(3) *В группе U каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда в $F_{\langle n,d\rangle}$-группе G число d свободно от квадратов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Так как U является S-накрывающей группой $F_{\langle n,d\rangle}$-группы G, то по определению 2 в группе U существует нормальная подгруппа A такая, что $U/A \cong G$, $A \le \Phi(U) \cap Z(U)$ и для любого $p \in \pi(A)$ силовская p-подгруппа группы A содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U. По п. (1) леммы 7 $\Phi(U/A) = Z(U/A) = 1$, а по [14, лемма III, п. 3.4b)] $\Phi(U/A) = \Phi(U)/A = 1$. Отсюда следует, что $\Phi(U) = A$. Так как $Z(U)/A \le Z(U/A) = 1$, то $Z(U) = A$. Следовательно, $Z = Z(U) = \Phi(U) = A$ и для любого $p \in \pi(Z)$ силовская p-подгруппа группы Z содержится в каждой pd-подгруппе Шмидта группы U.

(2) Пусть $r \in \pi(S \cap Z)$. Тогда $r \in \pi(Z)$ и по п. (1) $Z_r \le S$. Следовательно, $S \cap Z$ является $\{p, q\}$-холловой подгруппой группы Z.

(3) Пусть в группе U каждая подгруппа Шмидта холлова. Тогда по лемме 3 в U/Z каждая подгруппа Шмидта холлова. Так как U/Z является $F_{\langle n,d\rangle}$-группой, то по п. (7) леммы 7, число d свободно от квадратов.

Пусть в $F_{\langle n,d\rangle}$-группе U/Z число d свободно от квадратов и S — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы U. Тогда $SZ/Z \cong S/S\cap Z$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой $F_{\langle n,d\rangle}$-группы U/Z. По п. (7) леммы 7 SZ/Z является холловой подгруппой в группе U/Z и, значит, $|U/Z : SZ/Z| = |U : SZ| := k$ является $\{p,q\}'$-числом. Поскольку $k = |U|/|SZ| = (|U||S\cap Z|)/(|S||Z|)$, то $|U|/|S| = k|Z|/|S\cap Z|$. Так как по п. (2) $|Z|/|S\cap Z|$ является $\{p,q\}'$-числом, то $|U|/|S|$ — $\{p,q\}'$-число. Следовательно, S — холлова подгруппа группы U. Теорема 3 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Пусть в ненильпотентной группе G каждая подгруппа Шмидта холлова и G — контрпример минимального порядка. Тогда по теореме 2 $G/H(G) = F_1\times\ldots\times F_t$, где F_i является холловой подгруппой в $G/H(G)$, изоморфной $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группе, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Допустим, что $R := H(G) = 1$. Тогда $G = F_1 \times \ldots \times F_t$ является группой из заключения теоремы. Получили противоречие. Следовательно, $R \neq 1$.

Пусть $\pi := \pi(G/R)$. Так как G/R является π-холловой подгруппой группы G/R, то по лемме 6 в группе G существует π-холлова подгруппа B такая, что $G = B \times R_{\pi'}$. Допустим, что $R_{\pi'} \neq 1$. Пусть S — некоторая подгруппа Шмидта группы B. Тогда S — подгруппа Шмидта в группе G; по условию S холлова в G и, значит, S — холлова подгруппа в B. Так как $|B| < |G|$, то по индукции B удовлетворяет заключению теоремы. Пусть $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \times M$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_t, M$ — нормальные холловы подгруппы группы B, $1 \leq M \leq F(B)$ и A_i является S-накрывающей $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $G = B\times R_{\pi'} = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_t \times N$, где $N := M \times R_{\pi'} \leq F(G)$ и группа G удовлетворяет заключению теоремы. Получили противоречие. Следовательно, $R_{\pi'} = 1$. Тогда R является π-группой и $\pi = \pi(G)$.

Пусть $F_i := B_i/R$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $B_i \lhd G$, $i = 1, 2, \ldots, t$ и $G = B_1B_2\ldots B_t$. Пусть $\pi_i := \pi(F_i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как $G/R = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_t$, причем F_i — холлова подгруппа в G/R для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ и $\pi = \pi(G/R)$, то $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_t$ и $\pi_i \cap (\pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_{i-1} \cup \pi_{i+1} \cup \ldots \cup \pi_t) = \varnothing$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. По п. (1) леммы 2 $R \leq H(B_i)$. Так как B_i/R является π_i-холловой подгруппой группы G/R, то по лемме 6 в группе G существует π_i-холлова подгрупа A_i такая, что $B_i = A_i \times R_{\pi_i'}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Поскольку $B_i \lhd G$ и A_i char B_i, то $A_i \lhd G$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $G = (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t)R$, причем A_i является π_i-холловой подгруппой в группе G для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как R является π-группой и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2 \cup \ldots \cup \pi_t$, то для любого $p \in \pi(R)$ существует $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ такое, что $p \in \pi_i$. Тогда $R_p \leq A_i$ и, значит, $A_iR_p = A_i$. Поэтому $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$.

Покажем, что A_i является S-накрывающей группой $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть $t = 1$. Тогда $G = A_1$, $R = H(G)$, $\pi = \pi(G) = \pi(G/R)$ и G/R является $F_{\langle n_1,d_1\rangle}$-группой, причем d_1 свободно от квадратов. По пп. (4), (5) леммы 7, для любого $r \in \pi(R)$ в группе G/R существует rd-подгруппа Шмидта B/R. По п. (1) леммы 2 $R \leq H(B)$. Пусть $\pi(B/R) := \{r, s\}$. Тогда по лемме 6 $B = C \times R_{\{r,s\}'}$, где C — холлова $\{r, s\}$-подгруппа группы B. Так как $B/R = CR/R \cong C/C \cap R$ — группа Шмидта, то C — ненильпотентная $\{r, s\}$-группа. Тогда C содержит подгруппу Шмидта, которая по условию холлова в G и, значит, совпадает с C. Так как $\pi(R) \subseteq \pi(G/R)$ и фактор-группа G/R по определению 1 не является разложимой, то группа G не является p-разложимой для любого $p \in \{r, s\}$. Тогда по пп. (2), (3) леммы 4 $Z(C) \leq Z(G) \leq R$. Следовательно, $Z(C) \leq C \cap R$. Так как по п. (1) леммы 2 и по свойствам группы Шмидта C имеем $C \cap R \leq H(C) = Z(C)$, то $Z(C) = C \cap R \leq Z(G)$. Поскольку C холлова в группе G, то $C \cap R$ является холловой $\{r, s\}$-подгруппой группы R. Тогда силовская p-подгруппа $R_p \leq C \cap R \leq Z(G)$ для любого $p \in \pi(R)$ и, значит, $R \leq Z(G)$. Поскольку $Z(G) \leq R$, то $R = Z(G)$. По свойствам группы Шмидта имеем $Z(C) = \Phi(C)$. Допустим, что $Z(C) \nsubseteq \Phi(G)$. Тогда в группе G существует максимальная подгруппа M, не содержащая

$Z(C)$ и, значит, $G = Z(C)M$. По модулярному тождеству получим, что $C = Z(C)(C \cap M) = \Phi(C)(C \cap M) = C \cap M$ и, значит, $Z(C) \leq C \leq M$. Получили противоречие. Следовательно, $Z(C) = \Phi(C) \leq \Phi(G)$. Тогда $R_p \leq Z(C) \leq \Phi(G)$ для любого $p \in \pi(R)$ и, значит, $R \leq \Phi(G)$. Так как G/R является $F_{\langle n_1,d_1\rangle}$-группой, то по п. (1) леммы 7 $\Phi(G/R) = 1$. По [14, лемме III, 3.4 b)] $\Phi(G/R) = \Phi(G)/R = 1$. Поэтому $R = \Phi(G)$. Так как для любого $p \in \pi(R)$ любая pd-подгруппа Шмидта T является холловой в G, то $R_p \leq T$. Тогда по определению 2 $G = A_1$ является S-накрывающей группой $F_{\langle n_1,d_1\rangle}$-группы $A_1/Z(A_1)$ и, значит, $G = A_1$ — эта группа из заключения теоремы 1. Получили противоречие.

Пусть $t > 1$. Тогда $|A_i| < |G|$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Пусть S — подгруппа Шмидта группы A_i. Тогда по условию S холлова в группе G и, значит, S является холловой в группе A_i. По индукции $A_i = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_s \times N_i$, где C_r, N_i холловы подгруппы группы A_i, C_r является S-накрывающей группой $F_{\langle m_r,k_r\rangle}$-группы $C_r/Z(C_r)$, где k_r свободно от квадратов для любого $r = 1, 2, \ldots, s$ и $1 \leq N_i \leq F(A_i)$. Так как $F_i = B_i/R = A_iR/R \cong A_i/A_i \cap R$ является $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группой, $\pi_i = \pi(F_i) = \pi(A_i/Z(A_i)) = \pi(A_i)$, то $A_i \cap R$ является π_i-группой для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. По п. (1) леммы 2 $A_i \cap R \leq H(A_i)$, а по п. (1) леммы 7 $Z(A_i/A_i \cap R) = 1$. Тогда $A_i \cap R = H(A_i) \geq N_i$. Поэтому $A_i/A_i \cap R \cong (A_i/N_i)/(A_i \cap R/N_i)$ и, значит, $\pi(A_i/N_i) = \pi_i$. Так как N_i — холлова подгруппа группы A_i и $\pi(A_i) = \pi(A_i/N_i) = \pi_i$, то отсюда следует, что $N_i = 1$. Тогда $A_i = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_s$ и $H(A_i) = H(C_1) \times H(C_2) \times \cdots \times H(C_s)$. Так как по определению 1 группа $A_i/H(A_i) \cong C_1/H(C_1) \times C_2/H(C_2) \times \cdots \times C_s/H(C_s)$ не разложима, то $s = 1$ и $A_i = C_1$ является S-накрывающей группой $F_{\langle m_1,k_1\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ и, значит, G — группа из заключения теоремы 1. Получили противоречие.

Достаточность. Пусть $G = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t \times N$, где A_i — нормальная холлова подгруппа группы G, являющаяся S-накрывающей группой $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группы $A_i/Z(A_i)$ такой, что d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$, N — нормальная холлова нильпотентная подгруппа в G и S — подгруппа Шмидта группы G. Если P — силовская подгруппа группы A_i, а Q — силовская подгруппа в N или в A_j, $i \neq j$, то P и Q поэлементно перестановочны и, значит, PQ — нильпотентная группа. Так как по теореме Ф. Холла S содержится в некоторой бипримарной холловой подгруппе группы G, то S содержится в A_i для некоторого $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда по п. (3) теоремы 3 S является холловой подгруппой в A_i и, значит, S — холлова подгруппа в группе G. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть G — ненильпотентная группа и $Z(G) = 1$. В группе G каждая подгруппа Шмидта холлова тогда и только тогда, когда группа $G := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $t > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_t$ — нормальные холловы подгруппы группы G, A_i является $F_{\langle n_i,d_i\rangle}$-группой, причем d_i свободно от квадратов для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.*

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1–3 доказаны без применения классификации конечных простых групп и анонсированы в тезисах [16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. **Чунихин С.А.** Подгруппы конечных групп. Мн.: Наука и техника, 1964. 158 с.
3. **Шеметков Л.А.** О.Ю.Шмидт и конечные группы // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, вып. 5. С. 585–590.
4. **Мазуров В.Д., Сыскин С.А.** О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, вып. 2. С. 217–222.
5. **Журтов А.Х., Сыскин С.А.** О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 26, вып. 1. С. 74–78.
6. **Монахов В.С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса. Сек. 1. Киев, 2001. С. 81–90.
7. **Монахов В.С., Княгина В.Н.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, вып. 6. С. 1316–1322.
8. **Ведерников В.А.** Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта// Алгебра и логика. 2007. Т. 46, вып. 6. С. 669–687.

9. **Kniahina V.N., Monakhov V.S.** Finite groups with hall Schmidt subgroups // Publ. Math. Debrecen. 2012. Vol. 81, no. 3-4, P. 341–350.
10. **Iwasawa K.** Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind // Proc. Phys.-Math. Soc. III Ser. Japan, 1941. Vol. 23. P. 1–4.
11. **Гольфанд Ю.А.** О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, вып. 8. С. 1313–1315.
12. **Redei L.** Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen // Publ. Math. Debrecen. 1956. № 4. P. 303–324.
13. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 267 с.
14. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
15. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Мн.: Высш. шк., 2006. 207 с.
16. **Ведерников В.А., Бажанова Е.Н.** Конечные группы с холловыми подгруппами Шмидта // Абелевы группы: материалы Междунар. симпозиума, посвящ. 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова / Моск. педагог. гос. ун-т. М., 2014. С. 21–22.

Ведерников Виктор Александрович
Поступила 20.07.2015
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры высшей математики и методики преподавания математики
Института математики, информатики и естественных наук ГБОУ ВО МГПУ
e-mail: vavedernikov@mail.ru

Бажанова Екатерина Николаевна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики
Института математики, информатики и естественных наук ГБОУ ВО МГПУ
e-mail: DeminaENmf@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ π-ЗАМКНУТЫ. II [1]

В. А. Белоногов

Продолжается изучение пар (G,π), где G — конечная простая неабелева группа и π — множество простых чисел такие, что G имеет лишь π-замкнутые максимальные подгруппы, хотя сама не является π-замкнутой. В статье (с учётом результатов первой статьи этой серии) указан список таких пар (G,π) в случае, когда G отлична от групп $PSL_r(q)$ и $PSU_r(q)$ при простом нечётном r и групп $E_8(q)$ (всюду q — степень простого числа).

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, π-замкнутая группа, максимальная подгруппа.

V. A. Belonogov. Finite simple groups in which all maximal subgroups are π-closed. II.

We continue the study of pairs (G,π), where G is a finite simple nonabelian group and π a set of primes, such that G has only π-closed maximal subgroups but is not π-closed itself. Using the results of the first paper from the series, we give a list of such pairs (G,π) in the case when G is different from the groups $PSL_r(q)$ and $PSU_r(q)$ with prime odd r and $E_8(q)$, where q is a prime power.

Keywords: finite group, simple group, π-closed group, maximal subgroup.

MSC: 20D06,20D08, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-12-22

Введение

Всюду далее G есть конечная группа и π — подмножество из $\pi(G)$. Скажем, что *пара* (G,π) *имеет свойство* $(*)$, если группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты, т. е. если G есть *минимальная не π-замкнутая группа.*

Прежде всего отметим следующий результат, практически сводящий изучение таких пар к случаю простых неабелевых групп G. Напомним, что *группа Шмидта* есть конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Предложение 1 [1, теорема 1′]. *Для любых G и π со свойством $(*)$ либо $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, либо G — группа Шмидта.*

Изучение таких пар (G,π) для простых групп G начато в статье [2], где доказаны две теоремы, которые мы приводим здесь в предложениях 2 и 3.

Предложение 2 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая группа и π — множество простых чисел. Предположим, что группа G не π-замкнута, а все её максимальные подгруппы π-замкнуты. Тогда*

(I) $2 \notin \pi$;

(II) *G есть группа одного из следующих типов* (*всюду q есть степень некоторого простого числа*):

(1) *$G \cong A_r$, где r — простое число и $r \geq 5$;*

(2) *$G \cong PSL_2(q)$, где $q > 5$;*

(3) *$G \cong PSL_r(q)$, где r — нечётное простое число*;

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных научных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5).

(4) $G \cong PSU_r(q)$, *где* r — *нечётное простое число*;
(5) $G \cong Sz(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(6) $G \cong {}^2G_2(q)$, *где* $q = 3^{2n+1} \geq 27$;
(7) $G \cong {}^3D_4(q)$;
(8) $G \cong {}^2F_4(q)$, *где* $q = 2^{2n+1} \geq 8$;
(9) $G \cong E_8(q)$;
(10) G *изоморфна одной из групп* $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}$ *и* F_2.

Предложение 3 [2, теорема 2]. *Пусть* G — *конечная спорадическая простая группа и* π — *подмножество из* $\pi(G)$. *Следующие утверждения равносильны*:
(A) *группа* G *не* π-*замкнута, а все её максимальные подгруппы* π-*замкнуты*;
(B) *выполнено одно из условий*:
(1) $G \cong M_{23}$ *и* $\pi = \{23\}$;
(2) $G \cong J_1$ *и* $\pi = \{19\}$;
(3) $G \cong J_4$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{29, 43\}$;
(4) $G \cong Ly$ *и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \{37, 67\}$;
(5) $G \cong Fi'_{24}$ *и* $\pi = \{29\}$;
(6) $G \cong F_2$ *и* $\pi = \{47\}$.

Отметим, что доказательства предложений 2 и 3 основываются на результатах статьи автора [3] о контроле простого спектра конечных простых групп.

В настоящей статье доказана следующая теорема. В ней, как обычно, $\pi(n)$ есть множество всех простых делителей натурального числа n. Кроме того, для любой степени q простого числа используются следующие обозначения. Пусть $S(q) := \{q_0 \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \mid q = q_0^r$ при некотором простом числе $r\}$. Далее, если $P(x)$ — целочисленный многочлен от x, то положим $\pi_0(P(q)) := \pi(P(q))\backslash \cup_{q_0 \in S(q)} \pi(P(q_0))$. Например, если $q = 2^6$, то $S(q) = \{2^3, 2^2\}$ и $\pi_0(q+1) = \pi(2^6+1)\backslash(\pi(8+1) \cup \pi(4+1)) = \pi(65) \setminus \{3,5\} = \{13\}$, а если $q = 2^7$, то $S(q) = \{2\}$ и $\pi_0(P(q)) = \pi(P(q)) \setminus \pi(P(2))$ при любом $P(x)$. Таким образом, $\pi_0(n) \subseteq \pi(n)$ для чисел n вида $P(q)$.

Теорема. *Пусть* G — *конечная простая группа, отличная от групп* $PSL_r(q)$ *и* $PSU_r(q)$ *с простым нечётным* r *и* $E_8(q)$ (*всюду* q — *степень простого числа*), *и* π — *подмножество из* $\pi(G)$. *Равносильны следующие условия*:
(A) *группа* G *не* π-*замкнута, а все её максимальные подгруппы* π-*замкнуты*;
(B) $2 \notin \pi$, π *не пусто и выполнено одно из следующих условий*:
(1) $G \cong A_r$, *где* r — *простое число* (≥ 5), *отличное от* $11, 23$ *и чисел вида* $(q^n-1)/(q-1)$, *где* q — *степень простого числа и* $n \in \mathbb{N}$, *и* $\pi = \{r\}$;
(2) $G \cong PSL_2(q)$, $q > 5$, $\pi(q) = \{p\}$, *и верно одно из условий*:
(2a) $q = p$ *и либо* $\pi \subseteq \pi(p+1) \setminus \{3,5\}$, *либо* $p \in \pi \subseteq \pi(p(p^2-1)) \setminus \{3,5\}$;
(2b) $q = p^m > p$ *и* $\pi \subseteq \pi_0(q+1) \setminus \{5\}$, *причём* $3 \notin \pi$ *при* $p > 2$;
(3) $G \cong Sz(q)$ ($q = 2^{2n+1} \geq 8$), $\pi \subseteq \pi_0(q^2+1)$ *при непростом* $2n+1$ *и* $\pi \subseteq \pi(q^2+1)$ *при простом* $2n+1$;
(4) $G \cong {}^2G_2(q)$ ($q = 3^{2n+1} \geq 27$), $\pi \subseteq \pi_0(q^2-q+1)$ *при непростом* $2n+1$ *и* $\pi \subseteq \pi(q^2-q+1)$ *при простом* $2n+1$;
(5) $G \cong {}^3D_4(q)$ *и* $\pi \subseteq \pi_0(q^4-q^2+1)$;
(6) $G \cong {}^2F_4(q)$ ($q = 2^{2n+1} \geq 8$) *и* $\pi \subseteq \pi_0(q^4-q^2+1)$;
(7) G — *спорадическая группа и* (G, π) — *как в предложении* 3.

З а м е ч а н и я. 1. Группы A_r с простым $r = (q^n-1)/(q-1)$, как в п. (1), встречаются очень редко (см. замечание 2 к предложению 1.2 ниже).

2. Заметим, что в п. (2) всегда $5 \notin \pi$ (это следует и непосредственно из предложения 1.4).

3. В п. (2b) при $p = 2$ (как легко заметить) $3 \in \pi_0(q+1)$ если и только если m — простое нечётное число.

4. Условия на π в п. (2) накладывают фактически и ограничения на параметр q. Например, условие (2b) противоречиво при $q = 9$ и $q = 49$.

5. В пп. (3)–(6) всегда $3 \notin \pi$ (так как 3 не делит m^2+1 и m^4-m^2+1 при любом целом m и $3 \mid q$ в (4)).

6. Пусть G удовлетворяет условию теоремы, G есть минимальная не π-замкнутая группа (т. е. выполнено условие (A) теоремы) и π_1 — непустое подмножество из π. Тогда G может не быть минимальной не π_1-замкнутой группой. Но это верно лишь в том и только в том случае, когда выполнено условие $(2a)$ и $\pi_1 \subseteq \pi(p-1) \setminus \{3,5\}$ (т. е. $p \in \pi \setminus \pi_1$).

Используемые далее обозначения в основном стандартны (см., например, [4–6]). В частности, $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка конечной группы G; если π есть множество простых чисел, то π' есть множество всех простых чисел, не содержащихся в π; π-холлова подгруппа группы G — это π-подгруппа из G, индекс которой в G есть π'-число (т. е. число, не делящееся на простые числа из π); группа, имеющая нормальную π-холлову подгруппу, называется *π-замкнутой.* Запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B; запись $B =: A$ равносильна записи $A := B$; $\dot\cup$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств. Через Z_n, E_n и D_n обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка n. G^n есть прямое произведение n экземпляров группы G.

Используются также следующие, несколько видоизменённые, обозначения из Атласа [6, с. XX]. Запись $G \doteq A.B$ (читается "G имеет тип $A.B$" или "G есть группа типа $A.B$") означает, что группа G имеет нормальную подгруппу, изоморфную A, фактор-группа по которой изоморфна B (т. е. G есть расширение A с помощью B). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак $\leftthreetimes$ (в частности, в настоящей статье) или знак : (в Атласе [6] и многих других работах). Запись $G \doteq A_1.A_2.A_3. \ldots .A_n$ при $n \geq 3$ означает, что G имеет возрастающий нормальный ряд с факторами $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$; в частности, при любом $i \leq n$ группа G имеет нормальную подгруппу $N_i \doteq A_1.A_2. \ldots .A_i \doteq (A_1.A_2. \ldots .A_{i-1}).A_i$.

Используются также и некоторые произведения бинарных отношений между объектами теории групп; например, $A \cong\leq B$ (существует H с $A \cong H \leq B$), $A >\doteq B$ (существует H с $A > H \doteq B$).

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [7].

1. Предварительные результаты

Предложение 1.1 [8, теорема 1]. *Конечная неразрешимая группа G имеет точно 3 класса сопряжённых максимальных подгрупп если и только если $G/\Phi(G)$ изоморфна $PSL_2(7)$ или $PSL_2(2^r)$, где r — простое число.*

Предложение 1.2. *Пусть $G = A_r$, где r — простое число, $r \geq 5$. Тогда каждая максимальная подгруппа M группы G удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *$M = M_{a,r-a}$, где $M_{1,r-1} \cong A_{r-1}$, $M_{2,r-2} \cong S_{r-2}$ и $M_{a,r-a} \doteq (A_a \times A_{r-a}).Z_2$ при $2 < a \leq (r-1)/2$;*

(2) *$M \doteq Z_r \leftthreetimes Z_{(r-1)/2}$ при r отличном от 7, 11, 17, 23;*

(3) *$M \cong\leq \mathrm{Aut}(S)$, где $S = \mathrm{Soc}(M) \cong PSL_n(q)$, q — степень простого числа, при $r = (q^n-1)/(q-1)$ (n — простое число); в частности,*

$M \cong PSL_3(2) \cong PSL_2(7)$ при $r = 7$ и $M \doteq PSL_2(16).Z_4$ при $r = 17$;

(4) *$M \cong M_{11}$ при $r = 11$;*

(5) *$M \cong M_{23}$ при $r = 23$.*

Обратно, для любого $i \in \{1,2,3,4,5\}$ группа G имеет максимальную подгруппу M, удовлетворяющую условию (i).

З а м е ч а н и я. 1. В пп. (1)–(5) предложения 1.2 число классов сопряжённых подгрупп, изоморфных M, может быть больше единицы; например, в группе A_{11} — 2 класса сопряжённых подгрупп, изоморфных M_{11} (п. (4)), а в группе A_{13} — 2 класса сопряжённых максимальных подгрупп M, изоморфных $PSL_3(3)$ (п. (3)).

2. В п. (3) подгруппа M не определена однозначно. Уточнены лишь два её частных случая.

3. Подгруппы типа (3) встречаются в группах A_r очень редко. Выпишем, например (используя таблицы из [9]), все такие значения числа r (указывая в скобках соответствующее n) в следующих случаях:

(а) при $q = 2$ и $n \leq 94$: 7 (3), 31 (5), 127 (7), 8191 (13), 131071 (17), 524287 (19), 2147483647 (31), 2305843009213693951 (61), 618970019642690137449562111 (89);

(б) при $q = 3$ и $n \leq 101$: 13 (3), 1093 (7), 797161 (13), 133754733257489862401973357979128773 (71).

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1.2. Пусть M — максимальная подгруппа группы $G = A_r$. По теореме О'Нана — Скотта (см. [5, теорема 2.4]) или [10, Appendix, 2-я теорема] любая максимальная подгруппа M группы G (при простом r) удовлетворяет одному из следующих условий:

(A) $M \cong M_{a,b} := (S_a \times S_b) \cap G$, где $r = a + b$ и $a < b$;

(B) $M \cong AGL_1(r) \cap G \doteq Z_r \leftthreetimes Z_{(r-1)/2}$;

(C) $S = \mathrm{Soc}(M) \trianglelefteq M \cong\leq \mathrm{Aut}(S)$, где M и S действуют примитивно на множестве $\{1, \ldots, r\}$, и, следовательно, S имеет максимальную подгруппу индекса r (стабилизатор точки).

Условие (A), очевидно, равносильно условию (1) доказываемого предложения, причём по [11, теорема и табл. I] все подгруппы группы G, изоморфные $M_{a,b}$ при указанных a и b, действительно максимальны в G.

Пусть для подгруппы M группы G выполнено условие (B). Тогда согласно [11, теорема и табл. I] M не максимальна в G в точности тогда, когда $r \in \{7, 11, 17, 23\}$, причём

$Z_7 \leftthreetimes Z_3 \doteq H < PSL_3(2) \cong PSL_2(7) = M$, M максимальна в A_r при $r = 7$,

$Z_{11} \leftthreetimes Z_5 \doteq H < PSL_2(11) \cong< M_{11} = M$, M максимальна в A_r при $r = 11$,

$Z_{17} \leftthreetimes Z_8 \doteq H < PSL_2(16).Z_4 = M$, M максимальна в A_r при $r = 17$,

$Z_{23} \leftthreetimes Z_{11} \doteq H < M_{23} = M$, M максимальна в A_{23} при $r = 23$.

Таким образом, здесь мы получаем утверждения (2), (4), (5) и два частных случая утверждения (3), отмеченные в его формулировке.

Пусть, наконец, для подгруппы M выполнено условие (C) и H — максимальная подгруппа индекса r в S. Тогда по результату Р. Гуральника [12] для S, H и r имеются лишь следующие возможности:

(C1) $S \cong PSL_n(q)$ $(n \geq 2, q \geq 2)$ и $r = |S : H| = (q^n - 1)/(q - 1)$;

(C2) $S \cong PSL_2(11)$, $H \cong A_5$, $r = |S : H| = 11$;

(C3) $S \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$, $r = |S : H| = 11$;

(C4) $S \cong M_{23}$, $H \cong M_{11}$, $r = |S : H| = 23$.

Является ли M максимальной в G можно увидеть по [11, теорема и табл. II–IV].

В случае (C1) будет выполнено условие (3) доказываемого предложения. Существование подгруппы S при указанном r обеспечивается упомянутой выше теоремой Гуральника.

В случаях (C2) и (C3), где $r = 11$, подгруппа M из A_{11} изоморфна одной из групп $PSL_2(11)$ и M_{11}. Но максимальной в A_{11} является лишь M_{11} [6, с. 75], и мы получаем условие (4).

Наконец, условие (C4) приводит к условию (5), так как $M_{23} \cong \mathrm{Aut}(M_{23})$.

Предложение 1.2 доказано.

Подгрупповое строение групп $PSL_2(q)$ было определено А. Виманом [13] и Е. Х. Муром [14]. Из их работ (см. [15, разд. 2.1]) (а также из [16, табл. 8.1]) вытекает следующее утверждение (в каждом из пп. (1)–(8) после слова "если" записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряжённых подгрупп в G).

Предложение 1.3. *Пусть $G = PSL_2(q)$, где $q = p^m$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, и $d := (2, q - 1)$. Тогда любая максимальная подгруппа группы G имеет строение, указанное с точностью до изоморфизма в следующем списке*:

(1) $E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/d}$ — *группа Фробениуса с ядром E_q (всегда существует, 1 класс)*;

(2) $D_{2(q-1)/d}$, *если* $q \notin \{5,7,9,11\}$ (1 *класс*);

(3) $D_{2(q+1)/d}$, *если* $q \notin \{7,9\}$ (1 *класс*);

(4) $PSL_2(q_0)$, *если* $q = q_0^r$, *где* $q_0 \mid q$, $q_0 \neq 2$, r — *простое, и* r *нечётно при нечётном* q (1 *класс при каждом* r);

(5) $PGL_2(q_0)$, *если* q *нечётно и* $q = q_0^2$, $q_0 \mid q$ (2 *класса*);

(6) S_4, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod 8$ (2 *класса*);

(7) A_4, *если* $q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \pmod{40}$ (1 *класс*);

(8) A_5, *если* $q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ *или* $q = p^2$, *где* $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$ (2 *класса*).

З а м е ч а н и я. 1. Мы видим, что случаи (5)–(8) возможны лишь при нечётном q.

2. Из п. (4) следует, что G содержит подгруппу, изоморфную $PSL_2(q_1)$ при любом $q_1 = p^k > 2$, где k делит m.

Предложение 1.4. *Пусть* $G = PSL_2(p^m)$, *где* p — *простое число и* $m \in \mathbb{N}$. *Равносильны следующие условия*:

(1) 5 *делит* $|G|$;

(2) *выполнено одно из условий*:

(2*a*) $p = 5$;

(2*b*) $p \equiv \pm 1 \pmod 5$;

(2*c*) $p \equiv \pm 3 \pmod 5$ *и* m *чётно*;

(3) $G \geq\cong A_5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) $\Rightarrow$ (2): Предположим, что выполнено условие (1), т. е. число 5 делит p^m, $p^m - 1$ или $p^m + 1$. Если $p \neq 5$, то, очевидно, p удовлетворяет одному из сравнений пп. (2*b*) и (2*c*). Для доказательства условия (2) нам нужно ещё показать, что в последнем случае число m чётно. И это действительно так, поскольку для p из п. (2*c*) мы имеем $p \equiv \pm 3 \pmod 5$, $p^2 \equiv -1 \pmod 5$ и (по индукции по $n \in \mathbb{N}$) $p^{2n+1} = p^{2n-1}p^2 \equiv (\pm 3)(-1) \equiv \pm 3 \pmod 5$, и, следовательно, $5 \nmid |PSL_2(p^{2n+1})|$. (Однако $5 \mid |PSL_2(p^{2n})|$, так как $p^{2n} \equiv \pm 1 \pmod 5$.)

(2) $\Rightarrow$ (3): В случае (2*a*) группа G имеет согласно предложению 1.3 (см. также замечание 2) подгруппу $H \cong PSL_2(5)$, которая изоморфна A_5.

Пусть выполнено условие (2b). Тогда, очевидно, p нечётно и согласно замечанию 2 предложения 1.3 группа G имеет подгруппу $H \cong PSL_2(p)$. Однако, с учетом условия $p \equiv \pm 1 \pmod 5$, которое можно записать и в виде $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$, H согласно п. (8) предложения 1.3 имеет подгруппу, изоморфную A_5.

Пусть выполнено условие (2c) (здесь возможен и случай $p = 2$). Тогда ввиду чётности m согласно замечанию 2 после предложения 1.3 группа G имеет подгруппу $H \cong PSL_2(p^2)$, если p нечётно, и подгруппу, изоморфную $PSL_2(4)$, если $p = 2$. Но согласно п. (8) предложения 1.3 H имеет подгруппу, изоморфную A_5, а $PSL_2(4) \cong A_5$. Итак, (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (1): Очевидно.

Предложение 1.4 доказано.

Предложение 1.5. *Пусть* $G = PSL_2(q)$. *Тогда*

(1) *при любом простом* $q > 3$ *группа* G *содержит максимальную подгруппу, изоморфную одной из групп* S_4, A_4, A_5 *типов* (6)–(8) *предложения* 1.3 *соответственно*;

(2) *если* G *содержит максимальную подгруппу, изоморфную* A_4, *то* G *не содержит максимальных подгрупп, изоморфных* S_4 *и* A_5.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1): Пусть $q = p > 3$ — простое число. Очевидно, мы можем считать, что $p > 5$. Согласно предложению 1.3 группа G содержит подгруппу, изоморфную S_4 если и только если $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, т. е. если и только если $p \equiv x \pmod{40}$, где $x \in X := \{1, 7, 9, 17, 23, 31, 33, 39\}$, а также содержит максимальную подгруппу, изоморфную A_4, если и только если $p \equiv y \pmod{40}$, где $y \in Y := \{3, 13, 27, 37\}$ (случай $p = 5$ мы исключили), и содержит максимальную подгруппу, изоморфную A_5, если и только если $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$, т. е. $p \equiv z \pmod{40}$, где $z \in Z := \{1, 9, 11, 19, 21, 23, 31, 39\}$. Поскольку каждое нечётное число из отрезка $[1,40]$, не кратное 5, встречается по крайней мере в одном из приведённых выше множеств X, Y и Z, то утверждение (1) справедливо.

(2): Предположим, что G содержит максимальную подгруппу $M \cong A_4$. M может быть типов (6) или (4) предложения 1.3. Если M — типа (4) предложения 1.3, то $q = p$ — простое число. Поскольку в обозначениях предыдущего пункта $Y \cap (X \cup Z) = \varnothing$, то G не содержит максимальных подгрупп, изоморфных S_4 и A_5, типов (6) и (8) предложения 1.3 соответственно. Но нужно ещё показать, что G не содержит максимальных подгрупп $PGL_2(3) \cong S_4$ типа (5) предложения 1.3 и максимальных подгрупп $PSL_2(5) \cong A_5$ типа (4) предложения 1.3. Однако, в этих случаях должно быть $q = 3^2$ или $q = 3^r$ при некотором простом r. Но у нас $q = p$ — простое число.

Если M — типа (4) предложения 1.3 ($M \cong PSL_2(3) \cong A_4$), то $q = 3^r$ некотором простом нечётном r. Тогда G не содержит максимальных подгрупп, изоморфных S_4 и A_5, типов (6) и (8) предложения 1.3 соответственно. Но нужно ещё показать, что G не содержит максимальных подгрупп $PGL_2(3) \cong S_4$ типа (5) предложения 1.3 и максимальных подгрупп $PSL_2(5) \cong A_5$ типа (4) предложения 1.3. Однако в этих случаях должно быть $q = 3^2$ или $q = 5^l$ при некотором простом l, но у нас $q = 3^r$ с нечётным r.

Предложение 1.5 доказано.

Предложение 1.6. *Пусть G и π удовлетворяют условию (A) теоремы и K — секция некоторой собственной подгруппы группы G. Если K не имеет нееденичных нормальных π-холловых подгрупп, то $\pi(K) \subseteq \pi'$. В частности, простые неабелевы секции собственных подгрупп группы G все являются π'-группами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно вытекает из [2, лемма 2.1] (собственная секция простой неабелевой группы G есть секция некоторой собственной подгруппы группы G).

2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная простая группа, удовлетворяющая условию теоремы. Ввиду предложений 2 и 3 G должна быть группой одного из типов (1), (2), (5)–(8) предложения 2. И нам нужно убедиться, что для каждой такой G (при возможном уточнении её параметров, как в пп. (1) и (2b)) в условии (B) теоремы указаны все возможные π со свойством условия (A). По-существу, нужно убедиться, что для любой такой группы G условия (A) и (B) равносильны.

Случай 1. Пусть $G = A_r$, где r — простое число и $r \geq 5$ (т. е. G — группа типа (1) предложения 2). Предположим, что существует множество π, которое удовлетворяет условию (A) для рассматриваемого G.

Максимальные подгруппы группы G перечислены в пп. (1)–(5) предложения 1.2. Поскольку G имеет максимальную подгруппу A_{r-1} (см. п. (1)) с $\pi(A_{r-1}) = \pi((r-1)!)$, которая, очевидно, не может быть π-замкнутой, так как $2 \notin \pi$ по предложению 2 и A_{r-1} не имеет нееденичных нормальных холловых подгрупп нечётного порядка, то, следовательно, $\pi \cap \pi(A_{r-1}) = \varnothing$, т. е. $\pi = \{r\}$.

Обратно, если $\pi = \{r\}$, то из предложения 1.2 следует, что все максимальные подгруппы в G π-замкнуты если и только если r отлично от $11, 23$ и чисел вида $(q^n-1)/(q-1)$, где q — степень простого числа и $n \in \mathbb{N}$, так как подгруппы типов (3)–(5) предложения 1.2 не r-замкнуты.

Итак, в случае 1 условия (A) и (B) теоремы равносильны.

Случай 2. Пусть $G = PSL_2(q)$, $q > 5$, т. е. выполнено условие (2) предложения 2.

Тогда $|G| = q(q^2-1)/d$, где $d = (2, q-1)$, и, очевидно, $\pi(G) = \pi(q) \,\dot\cup\, \pi((q-1)/d) \,\dot\cup\, \pi((q+1)/d)$. Максимальные подгруппы групп $G = PSL_2(q)$ приведены в предложении 1.3. Особую роль играют подгруппы $B \doteq E_q \rightthreetimes Z_{q-1}$, $D_- \cong D_{2(q-1)}$, $D_+ \cong D_{2(q+1)}$, назовём их *подгруппами 1-го типа*; они почти всегда (за исключением случая $q \in \{7, 9, 11\}$) существуют. Остальные подгруппы, а именно подгруппы вида $PSL_2(q_0)$, $PGL_2(q_0)$ и подгруппы, изоморфные A_4, S_4,

A_5, назовём *подгруппами* 2-*го типа*. Они существуют не всегда, причём в случае, когда $q = 2^m$, где m — простое число (и только в этом случае), отсутствуют вовсе.

Предположим, что множество π удовлетворяет условию (A) для рассматриваемой G. Так как по условию (A) все максимальные подгруппы группы G π-замкнуты, то все подгруппы 2-го типа в G должны быть π'-группами (так как они не имеют неединичных нормальных подгрупп нечётного порядка). Кроме того, $5 \in \pi'$ по предложению 1.4. Таким образом,

$$\{5\} \cup \pi(H) \subseteq \pi' \text{ при } H \in \{PSL_2(q_0), PGL_2(q_0), A_4, S_4, A_5\}\ . \tag{2.1}$$

Случай 2a. Пусть $q = p$.

По условию $p > 5$. Предположим сначала, что $p \in \{7, 11\}$ (особенный случай предложения 1.3). Группа $G \cong PSL_2(7)$ имеет лишь максимальные подгруппы, изоморфные $Z_7 \leftthreetimes Z_3$ и S_4. В этом случае $\pi = \{7\}$ и, значит, выполнено условие п. (2a) теоремы. Группа $G \cong PSL_2(11)$ имеет точно 4 класса максимальных подгрупп: $B \cong Z_{11} \leftthreetimes Z_5$, $D_+ \cong D_{12}$ и 2 класса подгрупп, изоморфных A_5. В этом случае $\pi = \{11\}$, т. е. снова выполнено условие (2a) теоремы.

Далее мы предполагаем, что $p \notin \{7, 11\}$, т. е. $p > 11$. В этом случае согласно предложению 1.3 группа G имеет все три максимальные подгруппы B, D_-, D_+ 1-го типа и не имеет подгрупп вида $PSL_2(q_0)$ и $PGL_2(q_0)$. Согласно предложению 1.1 группа G должна иметь по крайней мере ещё одну максимальную подгруппу. Поэтому G содержит подгруппу, изоморфную одной из групп S_4, A_4 и A_5. В любом случае по (2.1) $\{2, 3, 5\} \subseteq \pi'$.

2a1. Предположим, что $p \notin \pi$. Поскольку подгруппа $B = E_p \leftthreetimes Z_{(p-1)/2}$ не имеет неединичных нормальных p'-подгрупп нечётного порядка, то $\pi(Z_{(p-1)/2}) \subseteq \pi'$, и тогда (см. конец предыдущего абзаца) должно быть $\pi \subseteq \pi(p+1) \setminus \{2, 3, 5\}$, т. е. реализуется первая возможность утверждения (2a) теоремы.

2a2. Предположим, что $p \in \pi$. Тогда все максимальные подгруппы 1-го типа, очевидно, являются π_1-замкнутыми при любом $\pi_1 \subseteq \pi(G) \setminus \{2, 3, 5\}$. Но этим свойством обладают и все максимальные подгруппы 2-го типа, так как они являются $\{2, 3, 5\}$-группами. Таким образом, реализуется вторая возможность утверждения (2a) теоремы.

Итак, в случае 2a выполнено условие (2a) теоремы.

Случай 2b распадается на следующие два подслучая.

2b1. Пусть $q = 2^m$ ($m \geq 3$, так как $q > 5$). Если m — простое число, то согласно предложению 1.1 B, D_-, D_+ — единственные максимальные подгруппы в G; из их строения видно, что $\pi \subseteq \pi(2^m + 1)$ и, значит, выполнено условие (2b) теоремы, так как $\pi_0(2^m + 1) = \pi(2^m + 1)$ при простом m.

Пусть m — непростое число. Тогда по предложению 1.3 кроме подгрупп B, D_-, D_+ группа G имеет ещё лишь максимальные подгруппы вида $H_{q_0} = PSL_2(q_0)$, где $q = q_0^b$, $q_0 > 2$ и b — простое число. Поэтому $\pi \subseteq \pi(q+1) \setminus \cup_{q_0 \in S(q)} \pi(PSL_2(q_0)) = \pi(q+1) \setminus \cup_{q_0 \in S(q)} \pi((q_0+1)(q_0-1)) = \pi(q + 1) \setminus \cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0 + 1) = \pi_0(q + 1)$ (учитываем, что $(q + 1, q_0 - 1) = (q_0^b + 1, q_0 - 1) = (q_0^b + q_0, q_0 - 1) = (q_0^{b-1} + 1, q_0 - 1) = \ldots = (q_0 + 1, q_0 - 1) = 1$). Итак, при произвольном $q = 2^m$ с $m \in \mathbb{N}$ выполнено условие (2b) теоремы (при $p = 2$). (Заметим, что в этом случае $3 \in \pi_0(q + 1) \Leftrightarrow m$ — простое нечётное.)

2b2. Предположим, что $q = p^m$, $p > 2$, $m > 1$.

Рассмотрим наименьший случай: $q = 9$. Группа $G \cong PSL_2(9)$ имеет точно 5 классов максимальных подгрупп: $B \cong E_9 \leftthreetimes Z_4$ и по 2 класса подгрупп, изоморфных S_4 и A_5, причём $\pi(G) = \pi(A_5)$. Поэтому $G \cong PSL_2(9)$ не удовлетворяет условию (A) теоремы ни при каком π. Это утверждение можно (в случае, если G и π удовлетворяют условию (A)) записать и в виде условия (2*b*): $\pi \in \pi(9 + 1) \setminus \{5\}$, которое противоречиво, поскольку в (B) $2 \notin \pi$ и $\pi \neq \varnothing$.

Пусть теперь $q > 9$. Тогда по предложению 1.3 G имеет максимальную подгруппу вида $PSL_2(p^a)$ или $PGL_2(p^a)$, где $ar = m$, $a \geq 1$, r — простое число, и теперь по (2.1) $\{2, 3, 5, p\} \subseteq \pi'$. Отсюда и из наличия в G подгруппы Фробениуса $E_q \leftthreetimes Z_{(q-1)/2}$, следует, что $\pi(q - 1)/2) \subseteq \pi'$, и тогда должно быть $\pi \subseteq \pi(q+1) \setminus \{2,3,5\}$. Следовательно, выполнено утверждение (2b) теоремы.

Таким образом, для любой G, указанной в условии (2), утверждения (A) и (B) теоремы равносильны.

Случай 3. Пусть $G \cong Sz(q)$, где $q = 2^{2n+1} \geq 8$. $(Sz(2) \doteq Z_5 \leftthreetimes Z_4.)$

Тогда $|G| = q^2(q-1)(q^2+1) = q^2(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)(q+\sqrt{2q}+1)$, причём множители q^2, $q-1$, $q+\sqrt{2q}+1$, $q-\sqrt{2q}+1$ попарно взаимно просты.

Согласно работе М. Судзуки [17] (см. также теорему 4.1 в [5]) каждая максимальная подгруппа группы G сопряжена в G с одной из подгрупп следующего списка:

(1) $B \doteq E_q.E_q.Z_{q-1}$ — группа Фробениуса;

(2) $D \cong D_{2(q-1)}$;

(3) $F_+ \doteq Z_{q+\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ — группа Фробениуса;

(4) $F_- \doteq Z_{q-\sqrt{2q}+1} \leftthreetimes Z_4$ — группа Фробениуса;

(5) $H_{q_0} \cong Sz(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — (нечётное) простое число и $q_0 > 2$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G. Тогда $2 \notin \pi$ по предложению 1 и, очевидно, $\pi \neq \varnothing$. По предложению 1.6 подгруппы типов (1), (2) и (5) не могут быть π-замкнутыми. Подгруппы же типов (3) и (4) π-замкнуты если и только если $\pi \subseteq q^2+1$. Отсюда следуют следующие два утверждения. Во-первых, если $2n+1$ не является простым числом, т. е. $S(q) \neq \{2\}$, то

$\pi' \supseteq \{2\} \cup \pi(q-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(H_{q_0})) = \{2\} \cup \pi(q-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi((q_0-1)(q_0^2+1))) =$

$\{2\} \cup \pi(q-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2+1))$ и $\pi \subseteq \pi(q^2+1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2+1)) = \pi_0(q^2+1))$.

Если же $2n+1$ — простое число, т. е. $S(q) = \{2\}$, то п. (5) приведённого списка пуст, и в этом случае $\pi \subseteq \pi(q^2+1)$.

Таким образом, верно утверждение $(B)(3)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Случай 4. Пусть $G \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} \geq 27$. $({}^2G_2(3) \cong P\Gamma L_2(8) \doteq PSL_2(8) \leftthreetimes Z_3.)$

Тогда $|G| = q^3(q-1)(q^3+1) = 2^3q^3\dfrac{q-1}{2}\dfrac{q+1}{4}(q+\sqrt{3q}+1)(q-\sqrt{3q}+1)$, где все множители последнего разложения попарно взаимно просты. Согласно [18; 19] (см. также [5, теорема 4.2]) каждая максимальная подгруппа группы G сопряжена в G с одной из подгрупп следующего списка:

(1) $B \doteq P \leftthreetimes Z_{q-1}$, $|P| = q^3$;

(2) $D \cong (E_4 \times D_{(q+1)/2}) \leftthreetimes Z_3$;

(3) $M \cong Z_2 \times PSL_2(q)$;

(4) $Y \doteq Z_{q+\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ — группа Фробениуса;

(5) $Z \doteq Z_{q-\sqrt{3q}+1} \leftthreetimes Z_6$ — группа Фробениуса;

(6) $H_{q_0} \cong {}^2G_2(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — простое число и $q_0 > 3$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G, $2 \notin \pi \neq \varnothing$.

По предложению 1.6 подгруппы типа (3), а потому и типов (1) и (2), а также типа (6) не могут быть π-замкнутыми. Подгруппы же типов (4) и (5) π-замкнуты если и только если $\pi \subseteq \pi(q^2-q+1) = \pi((q^3+1)/(q+1))$.

Таким образом, если $2n+1$ не является простым числом, т. е. $S(q) \neq \{3\}$, то

$\pi' \supseteq \{2,3\} \cup \pi(q^2-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(H_{q_0})) = \{2,3\} \cup \pi(q^2-1) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2-q_0+1)$, и

$\pi \subseteq \pi(q^2-q+1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^2-q_0+1) = \pi_0(q^2-q+1)$.

Если же $2n+1$ — простое число, т. е. $S(q) = \{3\}$, то п. (6) пуст, и в этом случае $\pi \subseteq \pi(q^2-q+1)$.

Итак, справедливо утверждение $(B)(4)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Случай 5. Пусть $G \cong {}^3D_4(q)$, $q = p^n$, где p — простое число и $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $|G| = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$, причём $q^8+q^4+1 = (q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1)$ и $q^6-1 = (q^4+q^2+1)(q^2-1)$. Таким образом,

$$\pi(G) = \pi(q) \dot\cup \pi(q^4-q^2+1) \dot\cup \pi(q^6-1). \tag{5.1}$$

Приведём список максимальных подгрупп группы G (он получен в [20] и приведён также в [5, теорема 4.3]):

$M_1 \doteq A \leftthreetimes SL_2(q^3).Z_{q-1}$, где $|A| = q^9$;
$M_2 \doteq B \leftthreetimes SL_2(q).Z_{q^2-1}$, где $|B| = q^{11}$;
$M_3 \cong G_2(q)$ (порядка $q^6(q^6-1)(q^2-1)$);
$M_4 \cong PGL_3(q)$, если $q \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$;
$M_5 \cong PGU_3(q)$, если $2 < q \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$;
$M_6^{q_0} \cong {}^3D_4(q_0)$, если q_0 делит q и $q = q_0^r$, где r — простое число;
$M_7 \cong SL_2(q^3) \times SL_2(q)$, если q чётно;
$M_8 \doteq Z_2{}^{\cdot}(PSL_2(q^3) \times PSL_2(q)) \leftthreetimes Z_2$, если q нечётно;
$M_9 \doteq SL_3(q).Z_{q^2+q+1}.Z_2$;
$M_{10} \doteq SU_3(q).Z_{q^2-q+1}.Z_2$;
$M_{11} \doteq (Z_{q^2+q+1} \times Z_{q^2+q+1}) \leftthreetimes SL_2(3)$;
$M_{12} \doteq (Z_{q^2-q+1} \times Z_{q^2-q+1}) \leftthreetimes SL_2(3)$;
$M_{13} \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G, $2 \notin \pi \neq \varnothing$.

Обратим внимание на “большую” подгруппу $M_3 \cong G_2(q)$. Ясно, что $\pi' \supseteq \pi(G_2(q))$ (по предложению 1.6). Если из приведённого списка максимальных подгрупп исключить все подгруппы M_i с $\pi(M_i) \subseteq \pi(G_2(q))$, в том числе саму $G_2(q)$, то, как легко увидеть, в нём останутся лишь подгруппы вида $M_6^{q_0} \cong {}^3D_4(q_0)$ с $q_0 \in S(q)$ и подгруппа $M_{13} \doteq Z_{q^4-q^2+1} \leftthreetimes Z_4$.

Как видно из (5.1), число q^4-q^2+1 взаимно просто с $|G_2(q)|$. Таким образом, поскольку в списке максимальных подгрупп группы G присутствует и подгруппа ${}^3D_4(p)$ (при простом n), то в любом случае (при простом и непростом n)

$$\pi' \supseteq \pi(G_2(q)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi({}^3D_4(q_0))) = \pi(q(q^6-1)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1)$$

(здесь мы учли что $\pi({}^3D_4(q_0)) = \pi(q_0(q_0^4-q_0^2+1)(q_0^6-1))$ и q_0^6-1 делит q^6-1), и

$$\pi \subseteq \pi(q^4-q^2+1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4-q_0^2+1) = \pi_0(q^4-q^2+1).$$

Следовательно, верно утверждение $(B)(7)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Случай 6. Пусть $G \cong {}^2F_4(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$.

Тогда $|G| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$, где $q^6+1 = (q^2+1)(q^4-q^2+1)$, $q^2+1 = (q+\sqrt{2q}+1)(q-\sqrt{2q}+1)$ и $q^4-q^2+1 = ab$, где $a = q^2+q+1+\sqrt{2q}(q+1)$ и $b = q^2+q+1-\sqrt{2q}(q+1))$, причём

$$\pi(G) = \{2\} \dot\cup \pi(q^6+1) \dot\cup \pi(q^3+1) \dot\cup \pi(q-1),$$
$$\pi(q^6+1) = \pi(q^2+1) \dot\cup \pi(q^4-q^2+1), \quad \text{и } \pi(q^4-q^2+1) = \pi(a) \dot\cup \pi(b).$$

Рассмотрим список $\mathcal{S}$ максимальных подгрупп группы G, полученный в [21] (см. также [5, теорема 4.5]):

$M_1 \doteq A \leftthreetimes (Sz(q) \times Z_{q-1})$, где $|A| = q^{10}$;
$M_2 \doteq B \leftthreetimes GL_2(q)$, где $|B| = q^{11}$;
$M_3 \doteq SU_3(q) \leftthreetimes Z_2$;
$M_4 \doteq PGU_3(q) \leftthreetimes Z_2$;
$M_5 \doteq Sz(q) \leftthreetimes Z_2$;

$M_6 \doteq Sp_4(q) \leftthreetimes Z_2$;
$M_7^{q_0} \cong {}^2F_4(q_0)$, если q_0 делит q и $q = q_0^r$, где r — простое нечётное число;
$M_8 \doteq (Z_{q+1} \times Z_{q+1}) \leftthreetimes GL_2(3)$;
$M_9 \doteq (Z_{q+\sqrt{2q}+1} \times Z_{q+\sqrt{2q}+1}) \leftthreetimes 4S_4$;
$M_{10} \doteq (Z_{q-\sqrt{2q}+1} \times Z_{q-\sqrt{2q}+1}) \leftthreetimes 4S_4$;
$M_{11} \doteq Z_a \leftthreetimes Z_{12}$;
$M_{12} \doteq Z_b \leftthreetimes Z_{12}$.

Пусть π — множество простых чисел, удовлетворяющее условию (A) для данной G, $2 \notin \pi \neq \varnothing$.

Очевидно, что π' содержит $\pi(M_i)$ при $i \leq 6$ и $M_7^{q_0}$ (из-за отсутствия в M_i неединичных нормальных подгрупп нечётного порядка), а также при $i \in \{8, 9, 10\}$, так как числа $q+1, q+\sqrt{2q}+1, q-\sqrt{2q}+1$ делят $|Sz(q)|$. Таким образом,

$$\pi' \supseteq (\pi(G) \setminus \pi(ab)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi({}^2F_4(q_0))). \tag{6.1}$$

Поскольку $\pi(G) \setminus \pi(ab) = \{2\} \cup \pi(q^2+1) \cup \pi(q^3+1) \cup \pi(q-1)$ и $\pi({}^2F_4(q_0)) = \{2\} \cup \pi(q_0^2+1) \cup \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1) \cup \pi(q_0^3+1) \cup \pi(q_0 - 1)$, то (6.1) можно переписать в виде (заметим, что $q = q_0^r$, где r — нечётное число, так как оно делит $2n+1$, и поэтому q^2+1 делится на q_0^2+1)

$$\pi' \supseteq (\pi(G) \setminus \pi(ab)) \cup (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1)). \tag{6.2}$$

Кроме того, так как $(ab, |G|/ab) = 1$ и $(a, b) = 1$, то из (6.2) получаем

$$\pi \subseteq \pi(ab) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1)) = \pi(q^4 - q^2 + 1) \setminus (\cup_{q_0 \in S(q)} \pi(q_0^4 - q_0^2 + 1) = \pi_0(q^4 - q^2 + 1)$$

и, следовательно, верно утверждение $(B)(6)$ теоремы. А отсюда и из списка максимальных подгрупп группы G следует равносильность для G утверждений (A) и (B) теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О конечных группах, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты // Междунар. школа-конф. по теор. групп, посв. 70-летию В. В. Кабанова: сб. ст. Нальчик: К-БГУ, 2014. С. 6–9.
2. **Белоногов В. А.** Конечные простые группы, все максимальные подгруппы которых π-замкнуты. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 25–34.
3. **Белоногов В. А.** О контроле простого спектра конечной простой группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 29–44.
4. **Gorenstein D.** Finite Groups. New York: Harper & Row, 1968. 527 p.
5. **Wilson R. A.** The finite simple groups. London: Springer-Verlag, 2009. 298 p.
6. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
7. **Belonogov V. A.** Finite groups in which all maximal subgroups are π-closed // Междунар. конф. “Алгебра и логика: Теория и приложения”, посвящ. 70-летию В. М. Левчука: тез. докл. Красноярск, 2016. С. 90.
8. **Белоногов В. А.** Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп// Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.
9. Factorizations of $b^n \pm 1$, $b = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$ up to high powers / J. Brillhart et al. Providence: American Math. Society, 1988. 236 p. (Contemporary Math.; vol. 22).
10. **Aschbacher M., Scott L.** Maximal subgroups of finite groups // J. Algebra. 1985. Vol. 92, no. 1. P. 44–80.
11. **Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.** The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.
12. **Guralnick R.** Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. Vol. 81, no. 2. P. 304–311.

13. **Wiman A.** Bestimmung aller Untergruppen einer doppelt unendlichen Reihe von einfachen Gruppen // Stockh. Acad. Bihang. 1899. Vol. 25, no. 2. P. 1–47.
14. **Moor E. H.** The subgroups of the generalized finite modular group // Dicennial Publications of the University of Chicago. Chicago: The University of Chicago Press, 1903. Vol. 9. P. 141–190.
15. **King O. H.** The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configuratios // Surveys in combinatorics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. P. 29–56. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 327.)
16. **Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407.)
17. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
18. **Левчук В. М., Нужин Я. Н.** О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.
19. **Kleidman P. B.** The maximal subgroups of the finite Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 117, no. 1. P. 30–71.
20. **Kleidman P. B.** The maximal subgroups of the Steinberg triality groups ${}^3D_4(q)$ and their automorphism groups // J. Algebra. 1988. Vol. 115, no. 1. P. 182–199.
21. **Malle G.** The maximal subgroups of ${}^2F_4(q)$ // J. Algebra. 1991. Vol. 139, no. 1. P. 52–69.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 29.12.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{99,84,1;1,12,99\}$[1]

И. Н. Белоусов

В работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99,84,1;1,12,99\}$. Показано, что если Γ — вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{99,84,1;1,12,99\}$, то его группа автоморфизмов является $\{2,3,5\}$-группой.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{99,84,1;1,12,99\}$.

We find possible orders and fixed point subgraphs of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{99,84,1;1,12,99\}$. It is shown that, if Γ is a vertex-symmetric graph with intersection array $\{99,84,1;1,12,99\}$, then its automorphism group is a $\{2,3,5\}$-group.

Keywords: distance-regular graph, automorphism of a graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-23-30

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Пусть Γ — граф, a,b — две вершины из Γ, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a,b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a]\cap[b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,\ldots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1=1$.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если $\forall i\in\{0,\ldots,d\}$ и для любых двух пар вершин (u,w) и (y,z) с $d(u,w)=d(y,z)=i$ найдется автоморфизм g графа Γ

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Для автоморфизма g графа Γ через $\alpha_i(g)$ обозначим число вершин $u \in \Gamma$ таких, что $d(u, u^g) = i$.

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (99,14,1,2).

Предложение [1, теорема]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Γ — *антиподальный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 14, 99\}$ *или* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ *и спектром* $99^1, \sqrt{99}^{300}, -1^{99}, -\sqrt{99}^{300}$ *или* $99^1, 11^{315}, -1^{99}, -9^{385}$ *соответствено*;

(2) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 30; 1, 6, 54\}$ *и спектром* 99^1, $27^{141}, 5^{1080}, -9^{1034}$.

В данной работе изучаются возможные порядки и подграфы неподвижных точек гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ имеет $v = 1 + 99 + 693 + 7 = 800$ вершин. Ввиду границы Хофмана — Дельсарта максимальный порядок клики из Γ не больше $1 - k/\theta_d = 12$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент из G простого порядка p и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) $s = 0$ *и либо*

(i) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100l$, $\alpha_2(g) = 800 - 100l$, $\alpha_3(g) = 0$, *где* $0 \le l \le 8$, *либо*

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ *для некоторого* $0 \le l \le 50$;

(2) $p = 11$, $t = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 220l - 44$;

(3) $p = 7$, *подграф Ω является t-кликой и либо*

(i) $t = 2$, $\alpha_3(g) = 14$, $\alpha_1(g) = 140l + 98$ *для некоторого целого числа l, либо*

(ii) $t = 9$, $\alpha_3(g) = 63$, $\alpha_1(g) = 140l - 49$;

(4) $p = 5$, $s = 3$, $\alpha_0(g) = 3t$ *и* $t \in \{15, 20, \ldots, 35\}$;

(5) $p = 3$ *и либо*

(i) $s = 2$ *и* $t \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, *либо*

(ii) $s = 5$ *и* $t \in \{1, 4, 7, \ldots, 22\}$, *либо*

(iii) $s = 8$ *и* $t \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$;

(6) $p = 2$, *t четно и либо*

(i) $s = 2$ *и* $t \le 28$, *либо*

(ii) $s = 4$ *и* $t \le 28$, *либо*

(iii) $s = 6$ *и* $t \le 18$, *либо*

(iv) $s = 8$ *и* $t \le 12$.

Теорема 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент из G простого порядка p и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *содержит по $s > 0$ вершин в t антиподальных классах. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) $p = 11$, $t = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 220l - 44$;

(2) $p = 7$, *подграф Ω является 2-кликой*;

(3) $p = 3$ *и* $t = 1$ *или* $t = 4$ *и* Ω *является объединением изолированных* 4*-клик*;
(4) $p = 2$ *и* $t = 2$.

Следствие. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, *группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ. *Тогда* G *является* $\{2, 3, 5\}$*-группой.*

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [2]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P, а $m_j u_j$ — строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$, где $v = |\Gamma|$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [2, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$.

Лемма 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 315, χ_2 — *характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 99, *то* $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 - 5$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/8 - 1$. *Если* $|g| = p$ — *простое число, то* $\chi_1(g) - 315$ *и* $\chi_2(g) - 99$ *делится на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 99 & 14 & 12 & 0 \\ 0 & 84 & 86 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1) = 11$. Тогда

$$P_1 - 11I = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ 99 & 3 & 14 & 0 \\ 0 & 84 & 75 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}.$$

Если $(1, u_2, u_3, u_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы $P_1 - 11I$, то $u_2 = 1/9$, $u_3 = -1/63$ и $u_4 = -1/7$. Отсюда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 315 & 35 & -5 & -45 \\ 99 & -1 & -1 & 99 \\ 385 & -35 & 5 & -55 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (63\alpha_0(g) + 7\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 9\alpha_3(g))/160$. Подставляя $\alpha_2(g) = 800 - \alpha_1(g) - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 - 5$.

Аналогично $\chi_2(g) = (99\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 99\alpha_3(g))/800$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 800 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/8 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из утверждения 3 [3, лемма 2].

Лемма доказана.

Лемма 2 [4, теорема 1]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(99, 14, 1, 2)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω — *пустой граф и* $p \in \{3, 11\}$;

(2) $|\Omega| = 1$ *и* $p \in \{2, 7\}$;

(3) Ω — *треугольник и* $p = 3$.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Напомним, что Γ содержит 100 антиподальных классов, в каждом из которых по 8 вершин.

З а м е ч а н и е. Если Ω пересекает антиподальные классы K и L, то $|K \cap \Omega| = |L \cap \Omega|$.

В самом деле, вершина из $L \cap \Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K \cap \Omega$, поэтому $|K \cap \Omega| \le |L \cap \Omega|$. Симметрично $|L \cap \Omega| \le |K \cap \Omega|$.

Лемма 3. *Если* Ω — *пустой граф, то либо*

(i) $p = 5$, $\alpha_1(g) = 100l$, $\alpha_2(g) = 800 - 100l$, $\alpha_3(g) = 0$, *где* $0 \le l \le 8$, *либо*

(ii) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ *для некоторых* $0 \le l \le 50$ *и* $4l/5 - 20 \le m \le 4l/5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — пустой граф, $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$. Так как $800 = 2^5 \cdot 5^2$, то $p = 5$ или 2.

Если $p = 5$ и $\alpha_3(g) \ne 0$, то g фиксирует вершину в соответствующем антиподальном классе, противоречие. Поэтому при $p = 5$ имеем $w_3 = 0$, $\chi_1(g) = w_1/4 - 5$; отсюда $w_1 = 20l$ и $w_2 = 160 - 20l$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_3(g) = 16l$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 16l)/20 - 5$ $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ для некоторых $0 \le l \le 50$ и $4l/5 - 20 \le m \le 4l/5$. Лемма доказана.

В леммах 4–7 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $p > 7$, то g поточечно фиксирует содержащий a антиподальный класс, поэтому $\alpha_3(g) = 0$. Пусть Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам. Тогда p делит $100 - t$ и $8 - s$. В случае $s = 8$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω. Пусть F — антиподальный класс, содержащий вершину a, $F \cap \Omega = \{a, a_2, \dots, a_s\}$ и $e \in \Omega(a)$.

Лемма 4. *Если* $p \ge 7$, *то либо* $p = 11$, $t = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 220l - 44$, *либо* $p = 7$, *подграф* Ω *является* t*-кликой и верно одно из утверждений*

(i) $t = 2$, $\alpha_3(g) = 14$, $\alpha_1(g) = 140l + 98$ *для некоторого целого числа* l;

(ii) $t = 9$, $\alpha_3(g) = 63$, $\alpha_1(g) = 140l - 49$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p > 13$, то для вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \le 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 16, 1; 1, 12, t - 1\}$, поэтому $t - 16 = 7 \cdot 12$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда $100 - t$ делится на 13 и $t = 9$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) = 2$, число $|\Omega(a) \cap [c]|$ равно 12. Поэтому $\Omega(e)$ содержит не менее двух вершин из $a^\perp$ и по 12 вершин из $[a_2], \dots, [a_s]$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $100 - t$ делится на 11 и $t \in \{1, 12\}$. Пусть $t = 12$. Тогда Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{11, 7, 1; 1, 1, 11\}$, противоречие с условием целочисленности.

Значит, $t = 1$. Тогда $\chi_1(g) = (64 + 11w_1)/20 - 5$, поэтому $w_1 = 20l - 4$.

$\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 - 5 = (8 + \alpha_1(g))/20 - 5$ и ввиду леммы 1 число $(8 + \alpha_1(g))/20 - 5 - 315$ делится на 11, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $100 - t$ делится на 7 и $s \in \{1, 8\}$. При $s = 8$ вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω и $t \leq 14$. Тогда $\Omega(e)$ содержит a и не менее чем по 5 вершин из $[a_2], \ldots, [a_s]$, противоречие. Поэтому $s = 1$ и Ω является t-кликой. Ввиду границы Хофмана — Дельсарта имеем $t \in \{2, 9\}$.

При $t = 2$ имеем $\alpha_3(g) = 14$, $\chi_1(g) = (16 + 7w_1 - 14)/20 - 5$ и $\alpha_1(g) = 140l + 98$ для некоторого целого числа l.

При $t = 9$ имеем $\alpha_3(g) = 63$, $\chi_1(g) = (72 + 7w_1 - 63)/20 - 5$ и $\alpha_1(g) = 140l - 49$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $p = 5$, *то* $s = 3$, $\alpha_0(g) = 3t$ *и* $t = 15, 20, \ldots, 35$;

(2) *если* $p = 3$, *то либо*

(i) $s = 2$ *и* $t \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, *либо*

(ii) $s = 5$ *и* $t \in \{1, 4, 7, \ldots, 22\}$, *либо*

(iii) $s = 8$ *и* $t \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Тогда t делится на 5 и $s \in \{3, 8\}$.

Пусть $s = 8$. Тогда вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω и $t \leq 14$. Далее, $\Omega(e)$ содержит 5 вершин из $a^\perp$ и не менее чем по 2 вершины из $[a_2], \ldots, [a_s]$, противоречие.

Пусть $s = 3$. Тогда $t = 5l$ и $\alpha_3(g) = 5t$. Далее, $\Omega(e)$ содержит не менее 9 вершин. С другой стороны, $\Omega(e)$ содержит не более 15 вершин из $a^\perp$ и не более 12 вершин из $[a_i]$, поэтому $2 \leq l \leq 8$. Если $l = 2$, то Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{9, 4, 1; 1, 2, 9\}$, противоречие с тем, что граф с таким массивом пересечений не существует. Если $l = 8$, то Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 24, 1; 1, 12, 39\}$, противоречие с тем, что граф с таким массивом пересечений не существует.

Пусть $p = 3$. Тогда $s \in \{2, 5, 8\}$ и $t - 1$ делится на 3. В случае $s = 8$ вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 14$.

Пусть $s = 5$. Тогда $\Omega(e)$ содержит кратное 3 число вершин из $a^\perp$ и кратное 3 число вершин из $[a_2], \ldots, [a_s]$, поэтому $t \geq 4$ и если $t = 4$, то Ω — объединение пяти изолированных 4-клик. Далее, число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5t(100 - t)$, но не больше $14(800 - 8t)$, поэтому $t \leq 22$.

В случае $s = 2$ имеем $|\Omega(e) \cap a^\perp| + |\Omega(e) \cap [a_2]| = t - 1$, поэтому $t \leq 28$. Если $t = 28$, то Ω — граф Тэйлора с массивом пересечений $\{27, 12, 1; 1, 12, 27\}$, и $\Omega(a)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(27, 14, 7, 7)$, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если* $p = 2$, *то* t *четно и либо*

(i) $s = 2$ *и* $t \leq 28$, *либо*

(ii) $s = 4$ *и* $t \leq 28$, *либо*

(iii) $s = 6$ *и* $t \leq 18$, *либо*

(iv) $s = 8$ *и* $t \leq 12$.

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда t четно и для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ число $[u] \cap \Omega$ четно. Далее, $s \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Пусть $s = 2$. Тогда $|\Omega(e) \cap a^\perp| + |\Omega(e) \cap [a_2]| = t - 1$, поэтому $t \leq 28$.

Пусть $s = 4$. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $4t(100 - t)$, но не больше $14(800 - 8t)$, поэтому $t \leq 28$.

Пусть $s = 6$. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $6t(100 - t)$, но не больше $14(800 - 8t)$, поэтому $t \leq 18$.

Пусть $s = 8$. Тогда вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 14$. Если $t = 14$, то $\alpha_2(g) = 0$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (64 \cdot 14 + 688)/20 - 5$, противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 3–6 следует теорема 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о теремы 2 вытекает из леммы 2 и теоремы 1.

3. Граф с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ не является реберно симметричным

До конца раздела предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{99, 84, 1; 1, 12, 99\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $|G : G_a| = 800$ и $|G : G_{\{F\}}| = 100$ для антиподального класса F. Из теоремы следует, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$, причем $|G|$ не делится на 49 и на 121.

Лемма 7. *Пусть f — элемент порядка r из G, g — элемент простого порядка $p < r$ из $C_G(f)$. Тогда*

(1) *если $r = 11$, то $p = 2$, $t = 12$, $s \in \{2, 4, 6, 8\}$, $\alpha_1(g) = 40l - 108s + 96$ и $s - 2l + 4$ делится на 11;*

(2) *если $r = 7$, то либо $p = 3$, $s = 9$, $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов, $n = 0, t = 7$ или $n = 3, t = 10$, или $n = 6, t = 13$, либо $p = 2$ и*

(i) *Ω — пустой граф, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ для некоторого l, кратного 7, $40m + 2$ делится на 7, или*

(ii) *$\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой и $t = 2$, или*

(iii) *$\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов и либо $n = 1, t = 8$, либо $n = 3, t = 10$, либо $n = 5, t = 12$;*

(3) *если $r = 7$, то $|C_G(f) : C_G(f)_a|$ не делится на 4 для $a \in \mathrm{Fix}(f)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r = 11$. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ — антиподальный класс и $\alpha_1(f) = 220l - 44$.

Если $p = 7$, то Ω является t-кликой, $t \in \{2, 9\}$ и 11 не делит $t - 1$, противоречие.

Если $p = 5$, то $t \in \{15, 20, \ldots, 35\}$ и 11 не делит $t - 1$, противоречие.

Если $p = 3$, то либо $s = 2$ и $t \in \{1, 4, \ldots, 25\}$, либо $s = 5$ и $t = 1, 4, 7, \ldots, 22$, либо $s = 8$ и $t = 1, 4, 7, 10, 13$. В любом случае 11 не делит $t - 1$, противоречие.

Если $p = 2$, то t четно и либо $s = 2$ и $t \leq 28$, либо $s = 4$ и $t \leq 28$, либо $s = 6$ и $t \leq 18$, либо $s = 8$ и $t \leq 12$. Отсюда $t = 12$ и $s = 2, 4, 6, 8$. Далее, $\chi_1(g) = (96s + \alpha_1(g) - 12(8 - s))/20 - 5$ и $108s + \alpha_1(g) - 96$ делится на 40. Поэтому $\alpha_1(g) = 40l - 108s + 96$ делится на 22. Отсюда $s - 2l + 4$ делится на 11.

Пусть $r = 7$. По теореме $\mathrm{Fix}(f)$ является e-кликой, $e = 2, 9$.

Если $p = 5$, то $t \in \{15, 20, \ldots, 35\}$. Далее, g фиксирует антиподальный класс F, пересекающий $\mathrm{Fix}(f)$, противоречие с тем, что $s = 3$.

Если $p = 3$, то $s - 1$ делится на 7, поэтому $s = 8$ и $t \in \{1, 4, 7, 10, 13\}$. Так как 7 не делит $t - 2$, то $e = 9$. Пусть $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов. Тогда 3 делит $9 - n$ и 7 делит $t - n$, поэтому либо $n = 0, t = 7$, либо $n = 3, t = 10$, либо $n = 6, t = 13$.

Допустим, что $|C_G(f)|$ делится на 9. Если $C_G(f)$ содержит элемент h порядка 9, то можно считать, что $h^3 = g$. Так как S_7 не содержит элементов порядка 9, то $n = 0, t = 7$. Противоречие с тем, что 93 не делится на 9. Пусть $C_G(f)$ содержит элементарную абелеву подгруппу $W = \langle g, h \rangle$ порядка 9. Тогда h фиксирует антиподальнй класс из Ω, не пересекающий $\mathrm{Fix}(f)$. Поэтому W действует полурегулярно на $\Gamma - (\mathrm{Fix}(f) \cup \Omega)$, противоречие с тем, что 9 не делит 84.

Если $p = 2$, то либо Ω — пустой граф и $\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой, либо $s = 8$ и $t \in \{2, 4, 8, 10, 12\}$.

В первом случае $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 16l - 40m$ для некоторого l, кратного 7, причем $40m + 2$ делится на 7.

Во втором случае либо $\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой и $t = 2$, либо $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, $\mathrm{Fix}(fg)$ пересекает ровно n антиподальных классов. Тогда 2 делит $9-n$ и 7 делит $t-n$, поэтому либо $n = 1, t = 8$, либо $n = 3, t = 10$, либо $n = 5, t = 12$.

Допустим, что $|C_G(f) : C_G(f)_a|$ делится на 4. Тогда $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой. Противоречие с тем, что силовская 2-подгруппа из $C_G(f)$ фиксирует точку из $\mathrm{Fix}(f)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если G — неразрешимая группа, $\bar{G} = G/S(G)$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *$S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой*;

(2) *если $|G|$ не делится на 7 и на 11, то каждая компонента группы $\bar{G}$ изоморфна A_5, A_6, $PSp_4(3)$*;

(3) *если $|G|$ делится на 7, но не делится на 11, то цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ изоморфен $L_2(7)$, $L_2(8), U_3(3)$, A_n, $n \in \{7, 8, 9, 10\}$, $U_3(5), L_3(4), J_2, U_4(3), Sp_6(2), \Omega_8^+(2)$*;

(4) *если $|G|$ делится на 11, то цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ изоморфен $L_2(11)$, M_{11}, M_{12}, M_{22}, A_{11}, A_{12}, $U_5(2)$, McL, HS, $U_6(2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $v = 800$, то $S(G)$ является $\{2, 5\}$-группой.

Пусть $|G|$ не делится на 11, $\bar{L}$ — компонента группы $\bar{G}$. Если $|L|$ не делится на 7, то группа $\bar{L}$ изоморфна $A_5, A_6, PSp_4(3)$.

Если $|G|$ делится на 7, то цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ — простая неабелева группа. Если $|\bar{T}|$ не делится на 5, то группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7), L_2(8), U_3(3)$.

Если же $|\bar{T}|$ делится на 35, то ввиду [5, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна A_n, $n = 7, 8, 9, 10$, $U_3(5), L_3(4), J_2, U_4(3), Sp_6(2), \Omega_8^+(2)$.

Пусть $|G|$ делится на 11. Тогда цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G}$ — простая неабелева группа. Ввиду [5, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(11), M_{11}, M_{12}, M_{22}, A_{11}, A_{12}, U_5(2), McL, HS, U_6(2)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если $|G|$ делится на 7 или на 11, то $S(G)$ является 2-группой, $\bar{T} \cong U_3(5)$, $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$ и $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим сначала, что $|G|$ делится на 11. Заметим, что группы $L_2(11), M_{11}, M_{12}, M_{22}, A_{11}, A_{12}, U_5(2), McL, U_6(2)$ не содержат подгрупп индекса, делящего 100. Группа Хигмена — Симса HS содержит подгруппу индекса 100, изоморфную M_{22}. В этом случае $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, поэтому $|S(G)|$ делит 8. Далее, либо $|S(G) : S(G)_a| = 8$, либо $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}(HS)$, $\bar{G}_a \cong M_{22}$ и $|S(G) : S(G)_a| = 4$. В любом случае имеем противоречие с тем, что элемент порядка 7 из G поточечно фиксирует антиподальный класс.

Пусть $|G|$ делится на 7, но не делится на 11. Так как $\bar{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 100, то либо

(1) $\bar{T} \cong A_{10}$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_9$, либо

(2) $\bar{T} \cong U_3(5)$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong A_7$, либо

(3) $\bar{T} \cong J_2$ и $\bar{T}_{\{F\}} \cong U_3(3)$.

Если $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, то $|S(G)|$ делит 8. В случаях (1,3) имеем противоречие с тем, что элемент порядка 7 из G поточечно фиксирует антиподальный класс. В частности, случай (3) не возникает.

В случае (2) число $|S(G) : S(G)_{\{F\}}|$ делит 2, поэтому $S(G)$ является 2-группой. Далее, A_7 фиксирует вершину $a \in F$ и, естественно, действует на оставшихся 7 вершинах. Если $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс, то $|S(G)| = 8$, $\bar{G} \cong U_3(5).Z_2$ и $\bar{G}_{\{F\}} \cong A_7$. Компьютерные вычисления показывают, что построенный граф не является дистанционно регулярным.

В случае (1) число $|S(G) : S(G)_{\{F\}}|$ делится на 5. Поэтому $S(G)$ содержит главный фактор V группы G, являющийся 5-группой, причем $C_V(f) = 1$ для элемента f порядка 7 из G. Противоречие с тем, что $|V : V_{\{F\}}| = 5, 25$ и $V_{\{F\}}$ допускает f. Лемма доказана.

Доказательство следствия. Имеем $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = 50$, поэтому $|S(G) : S(G)_a| = 4, 8$. Из лемм 8, 9 и действия элемента $f \in G_a$ порядка 7 на $S(G)$ следует, что $|S(G) : S(G)_a| = 8$ и $C_{S(G)}(f) \leq S(G)_a$ для любой вершины $a \in \mathrm{Fix}(f)$. Если $\mathrm{Fix}(f)$ является 2-кликой, то $\mathrm{Fix}(z)$ является объединением двух антиподальных классов, пересекающих $\mathrm{Fix}(f)$ для любой инволюции $z \in S(G)_a$. Так как 98 не делится на 4, то $|S(G)_a|$ делит 2, противоречие. Если $\mathrm{Fix}(f)$ является 9-кликой, то $\mathrm{Fix}(z)$ содержит объединение девяти антиподальных классов, пересекающих $\mathrm{Fix}(f)$. Противоречие с леммой 7. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (99,14,1,2) // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 6. С. 606–609.
2. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
3. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
4. **Махнев А.А., Минакова И.М.** Об автоморфизмах графов с $\lambda = 1$, $\mu = 2$ // Дискрет. математика. 2004. Т. 16, № 1. С. 95–104.
5. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: i_belousov@mail.ru

Поступила 22.04.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.532.2

ПОЛУМОДУЛЯРНЫЕ И ДЕЗАРГОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ЭПИГРУПП. I[1]

Б. М. Верников, Д. В. Скоков

В работе получено описание многообразий эпигрупп, содержащих по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу, решетка подмногообразий которых модулярна, дистрибутивна, дезаргова или полумодулярна.

Ключевые слова: эпигруппа, многообразие, решетка подмногообразий, дистрибутивность, дезарговость, модулярность, полумодулярность.

B. M. Vernikov, D. V. Skokov. Semimodular and Arguesian varieties of epigroups. I.

We describe varieties of epigroups such that they contain at least one 3-step nilpotent epigroup and their lattice of subvarieties is modular, distributive, Arguesian, or semimodular.

Keywords: epigroup, variety, lattice of subvarieties, distributivity, Arguesian variety, modularity, semimodularity.

MSC: 20M07, 08B15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-31-43

1. Введение и формулировки результатов

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т. е. принадлежит некоторой подгруппе в S. Обширную информацию об эпигруппах можно найти в работах [10; 17]. Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя, в частности, все периодические полугруппы (которые можно определить как полугруппы, в которых некоторая степень каждого элемента лежит в некоторой конечной циклической подгруппе) и все вполне регулярные полугруппы (т. е. полугруппы, в которых каждый элемент является групповым).

Эпигруппы естественно рассматривать как *унарные полугруппы*, т. е. полугруппы с дополнительной унарной операцией, которая вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно (см., например, [10; 17]), что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$. Обозначим через $\overline{x}$ элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Отображение $x \longmapsto \overline{x}$ и есть упомянутая выше унарная операция на эпигруппе S. Элемент $\overline{x}$ называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр в указанной сигнатуре. Хорошо известно, что во всякой периодической эпигруппе операция псевдообращения может быть выражена через умножение (см., например, [10; 17]). Таким образом, периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп.

[1]Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства и образования и науки РФ), поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-5161.2014.1) и РФФИ (грант 14-01-00524).

Некоторая информация о многообразиях эпигрупп приведена в [10; 11; 17]. Там же сформулирован ряд открытых проблем. В частности, в этих работах Л. Н. Шевриным была поставлена задача описания многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Не менее естественным представляется и рассмотрение многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых удовлетворяет другим решеточным тождествам (прежде всего, дистрибутивности и дезарговости), а также некоторым близким условиям (таким, как полумодулярность).

Отметим, что все эти условия были рассмотрены ранее первым автором и М. В. Волковым применительно к решеткам многообразий полугрупп. При этом были получены следующие результаты:

1) описаны многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий (анонсировано в [7], доказательство по модулю ниль-случая опубликовано в [4–6; 21], а в ниль-случае — в [1; 3; 8]);

2) описаны многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых дезаргова, полумодулярна вверх, слабо полумодулярна вверх, полумодулярна вниз или слабо полумодулярна вниз [1; 3; 8]; в частности, показано, что первые три из этих пяти ограничений на решетку подмногообразий эквивалентны модулярности, а два последних — эквивалентны между собой, но не эквивалентны модулярности;

3) описаны (по модулю многообразий периодических групп) многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий за пределами одного, достаточно узкого, класса[2] (легко извлекается из результатов работ [4–6; 19]).

Более подробную информацию обо всех этих результатах можно найти в § 11 обзорной статьи [11]. Отметим, что для многообразий, содержащих 3-ступенно нильпотентные полугруппы, эти результаты имеют две особенности. Во-первых, в данном случае модулярность решетки подмногообразий эквивалентна выполнению в этой решетке некоторых тождеств, намного более сильных, чем дезарговость (а именно тождеств решетки $M_{4,3}$, изображенной на рис. 1). Во-вторых, многообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий описаны здесь не по модулю групп, а полностью.

В силу сказанного выше результаты, указанные в пп. 1)–3), дают описание периодических многообразий эпигрупп с упомянутыми в пп. 1)–3) свойствами. В данной работе авторами получены аналоги этих результатов для непериодических многообразий эпигрупп, содержащих по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Отметим, что для многообразий эпигрупп, не содержащих 3-ступенно нильпотентных эпигрупп, аналогичные результаты получены первым автором, М. В. Волковым и В. Ю. Шапрынским. Они будут опубликованы отдельно. Все полученные результаты в совокупности дают полный эпигрупповой аналог результатов, упомянутых в пп. 1)–3). Тем самым в частности, полностью решена упомянутая выше проблема Шеврина об описании многообразий эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.

Чтобы привести точные формулировки основных результатов работы, нам понадобится ряд обозначений и определений. Напомним, что решетка $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется [*слабо*] *полумодулярной вверх*, если для любых $x, y \in L$ из того, что x покрывает $x \wedge y$ [x и y покрывает $x \wedge y$], вытекает, что $x \vee y$ покрывает y. Двойственно определяются [*слабо*] *полумодулярные вниз* решетки. Как обычно, через $L(\mathcal{V})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, а через $\mathrm{var}\,\Sigma$ — многообразие эпигрупп, заданное системой тождеств Σ. Легко понять, что условия [слабой] полумодулярности (как вверх, так и вниз), вообще говоря, не наследуются подрешетками. Но эти условия, очевидно, наследуются интервалами решеток. Отсюда вытекает, что указанные условия переносятся с решетки подмногообразий данного многообразия на решетки подмногообразий содержащихся в нем многообразий (так как если $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, то $L(\mathcal{U})$ — интервал в $L(\mathcal{V})$). Мы будем придерживаться обычного соглашения, в соответствии с которым через $w = 0$ обозначается система тождеств вида $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая

[2]Этот класс состоит из *многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом*, т. е. многообразий, в которых квадрат всякой полугруппы является вполне регулярной полугруппой.

в слово w. Если n — натуральное число, а π — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, то через $p_n[\pi]$ обозначается тождество $x_1x_2 \cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}$. Если перестановка π нетривиальна, то тождество $p_n[\pi]$ называется *перестановочным*. Через $\mathcal{AG}$ обозначается многообразие всех абелевых групп, через $\mathcal{SL}$ — многообразие всех полурешеток, а через $\mathcal{T}$ — тривиальное многообразие. Положим $\mathcal{C}_m = \operatorname{var}\{x^m = x^{m+1}, xy = yx\}$, где m — произвольное натуральное число. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. Для удобства изложения будем также считать, что $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Многообразие эпигрупп называется *многообразием ступени* n, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени $\le n$, причем n — наименьшее число с таким свойством. Отметим, что многообразия ступени 1 — это в точности вполне регулярные многообразия. Будем говорить, что многообразие эпигрупп имеет *ступень* $> n$, если оно не является многообразием ступени $\le n$. Отметим, что многообразие эпигрупп имеет ступень > 2 тогда и только тогда, когда оно содержит по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Обозначим через $M_{4,3}$ решетку, изображенную на рис. 1, а через $\mathbf{M}_{4,3}$ — многообразие, порожденное этой решеткой. Отметим, что решетка $M_{4,3}$ дезаргова.

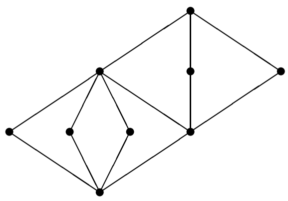


Рис. 1. Решетка $M_{4,3}$.

Первым из двух основных результатов данной работы является

Теорема 1. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны*:

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх*;
б) *решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз*;
в) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх*;
г) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз*;
д) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна*;
е) *решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова*;
ж) $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$;
з) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где* $0 \le m \le 2$, *а многообразие* $\mathcal{N}$ *удовлетворяет тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0 \tag{1}$$

и $p_4[\pi]$, *где* π *— одна из перестановок*

$$(123),\ (124),\ (134),\ (234),\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23); \tag{2}$$

и) *многообразие* $\mathcal{V}$ *удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ xyx = xy\,\overline{\overline{x}}\,,\ p_4[\pi], \tag{3}$$

где π *— одна из перестановок* (2).

Как видно из теоремы 1, для непериодических многообразий эпигрупп ступени > 2 слабая полумодулярность вниз решетки его подмногообразий эквивалентна ее модулярности. В периодическом случае это не так (см. [1]).

Вторым основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 следующие условия эквивалентны*:

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна*;

б) $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, *где $0 \leq m \leq 2$, а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (1) *и $p_3[\pi]$, где π — одна из перестановок*

$$(12),\ (13),\ (23),\ (123); \tag{4}$$

в) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств*

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y,\ \ xyx = xy\,\overline{\overline{x}},\ \ p_3[\pi],$$

где π — одна из перестановок (4).

Для полноты картины укажем кратко, как выглядят аналоги теорем 1 и 2 для периодических многообразий. Если $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого удовлетворяет одному из условий а)–ж) теоремы 1, то согласно результатам работ [1; 3; 8] либо $\mathcal{V}$ содержится в некотором непериодическом многообразии с тем же свойством (и потому “покрывается” теоремой 1), либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие, удовлетворяющее одной из систем тождеств, в явном виде перечисленных в [1] (а также в [3]). Число этих систем тождеств составляет 146 — для условий а), в), д), е) и ж) теоремы 1 и 113 — для условий б) и г) этой теоремы, и мы не будем здесь их приводить. Как вытекает из результатов работ [4–6; 19], аналогично устроены и периодические многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, не являющиеся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Многообразие $\mathcal{N}$ в этом случае удовлетворяет одной из 21 системы тождеств, указанных в [19] (а также в [18]).

Работа состоит из четырех разделов. В разд. 2 собраны необходимые для дальнейшего вспомогательные утверждения, разд. 3 посвящен доказательству основных результатов, а в разд. 4 указаны некоторые следствия из основных результатов данной работы и результатов работ [1; 3; 8].

2. Предварительные сведения

Как обычно, мы обозначаем через $\mathrm{Gr}\, S$ множество всех групповых элементов эпигруппы S. Для удобства ссылок сформулируем в виде леммы несколько часто используемых в дальнейшем простых фактов.

Лемма 1. *Пусть S — эпигруппа.*

(i) *Эпигруппа S вполне регулярна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству*

$$x = \overline{\overline{x}}\,. \tag{5}$$

(ii) *Если S — нильполугруппа, то она удовлетворяет тождеству*

$$\overline{x} = 0. \tag{6}$$

(iii) *Если S удовлетворяет тождеству $x^m = x^{m+1}$, то в S выполнены тождества $\overline{x} = \overline{\overline{x}} = x^m$.* □

Положим $\mathcal{P} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}} = \mathrm{var}\,\{xy = xy^2,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$. Следующее утверждение было приведено без доказательства в [20, теорема 3.2][3]. Его доказательство можно найти в [13, предложение 2.12].

[3] В формулировке этого результата в [20] допущена опечатка: вместо слов “правый идеал” написано “левый идеал”.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп. Во всякой эпигруппе $S \in \mathcal{V}$ множество* Gr S *является правым идеалом тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$.* □

Через var S обозначается многообразие эпигрупп, порожденное эпигруппой S. Из предложения 1 легко вытекает

Следствие 1. *Если S — эпигруппа с единицей такая, что многообразие* var S *не содержит многообразий $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$, то эпигруппа S вполне регулярна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 1 множество Gr S — правый идеал в S. Единица эпигруппы S является ее групповым элементом, а значит, $x = 1 \cdot x \in \mathrm{Gr}\ S$ для любого $x \in S$. Следовательно, $S \subseteq \mathrm{Gr}\ S$. В силу очевидности обратного включения имеем $S = \mathrm{Gr}\ S$, т. е. S — вполне регулярная эпигруппа. □

Положим $\mathcal{LZ} = \mathrm{var}\,\{xy = x\}$ и $\mathcal{RZ} = \mathrm{var}\,\{xy = y\}$. Следующее утверждение играет важную роль в доказательстве основных результатов.

Предложение 2 [16, предложение 2.6]. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, не содержащее многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.* □

Следующее утверждение (точнее, его полугрупповой аналог) является частью полугруппового фольклора. Поскольку оно легко выводится из предложения 2, мы, для полноты изложения, приводим его доказательство.

Следствие 2. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп, то $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие групп, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многообразие $\mathcal{V}$ очевидным образом не содержит многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$ и $\mathcal{SL}$. Поскольку многообразие $\mathcal{SL}$ содержится в $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, два последних многообразия также не содержатся в $\mathcal{V}$. Согласно предложению 2 многообразие $\mathcal{V}$ представимо в виде $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Многообразие $\mathcal{SL}$ содержится в $\mathcal{C}_2$, значит, $\mathcal{C}_2 \nsubseteq \mathcal{V}$. Далее из следствия 1 вытекает, что эпигруппа, порождающая многообразие $\mathcal{M}$, вполне регулярна. Значит, и само многообразие $\mathcal{M}$ вполне регулярно. Но, как хорошо известно, всякое вполне регулярное многообразие, не содержащее нетривиальных полугрупп идемпотентов, является многообразием групп. □

Лемма 2 [16, лемма 2.7]. *Если многообразие эпигрупп $\mathcal{M}$ порождается коммутативной эпигруппой с единицей, то $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$.* □

Для произвольного многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ положим $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \wedge \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие всех групп (иными словами, $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{V})$ — наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$). Напомним, что многообразие эпигрупп называется *комбинаторным*, если все группы в нем тривиальны.

Лемма 3. *Если $\mathcal{G}$ — многообразие групп, а $\mathcal{K}$ — комбинаторное многообразие эпигрупп, то $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K}) = \mathcal{G}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $\mathcal{G} \subseteq \mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K})$. Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что любое тождество, выполненное в $\mathcal{G}$, выполнено и в $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K})$. Будучи комбинаторным, многообразие $\mathcal{K}$ удовлетворяет тождеству $x^n = x^{n+1}$ для некоторого n. Пусть $u = v$ — тождество многообразия $\mathcal{G}$. Тогда в $\mathcal{G} \vee \mathcal{K}$ выполнено тождество

$u^{n+1}v^n = u^n v^{n+1}$. Сокращая это тождество слева на u^n и справа на v^n, получаем, что $u = v$ в $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{G} \vee \mathcal{K})$. $\square$

В заключение раздела приведем необходимую для дальнейшего информацию о нильмногообразиях полугрупп со слабо полумодулярной вверх, слабо полумодулярной вниз или дистрибутивной решеткой подмногообразий. Поскольку нильмногообразия полугрупп периодичны, ее можно применять и при рассмотрении многообразий эпигрупп с теми же свойствами. Из теорем 1 и 2 работы [1], доказательство которых можно найти в [1; 3; 8], вытекает

Лемма 4. *Если нильмногообразие полугрупп имеет слабо полумодулярную вверх или вниз решетку подмногообразий, то оно удовлетворяет тождеству* $p_4[\pi]$, *где* π *— одна из перестановок* (2). *Если многообразие полугрупп удовлетворяет такому тождеству и тождествам* (1), *то решетка его подмногообразий принадлежит* $\mathbf{M}_{4,3}$. $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из описания нильмногообразий полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, полученного в [19] и передоказанного более простым и коротким способом в [18, предложение 4.2].

Лемма 5. *Если нильмногообразие полугрупп имеет дистрибутивную решетку подмногообразий, то оно удовлетворяет тождеству* $p_3[\pi]$, *где* π *— одна из перестановок* (4). *Если многообразие полугрупп удовлетворяет такому тождеству и тождествам* (1), *то решетка его подмногообразий дистрибутивна.* $\square$

3. Доказательства основных утверждений

Мы будем доказывать теоремы 1 и 2 параллельно. Доказательство теоремы 1 будет проводиться по схеме

$$\begin{tikzcd}
\text{в)} \arrow[rrr] & & & \text{а)} \arrow[d] & \\
\text{д)} \arrow[u] \arrow[d] & \text{е)} \arrow[l] & \text{ж)} \arrow[l] & \text{з)} \arrow[l] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{и).} \\
\text{г)} \arrow[rrr] & & & \text{б)} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Импликации ж) $\longrightarrow$ е) $\longrightarrow$ д) $\longrightarrow$ в) $\longrightarrow$ а) и д) $\longrightarrow$ г) $\longrightarrow$ б) этой теоремы очевидны, поэтому нам достаточно доказать только импликации а) $\longrightarrow$ з) $\longrightarrow$ ж), б) $\longrightarrow$ з), з) $\longrightarrow$ и) и и) $\longrightarrow$ з). Доказательство теоремы 2 будет проводиться по схеме а) $\longleftrightarrow$ б) $\longleftrightarrow$ в). Оставшаяся часть раздела делится на четыре подраздела.

3.1. Импликации а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и импликация а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2

Чтобы доказать эти импликации, нам понадобится ряд лемм. Положим

$$\mathcal{ZM} = \mathrm{var}\,\{xy = 0\}, \quad \mathcal{F}_3 = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyz = 0,\ xy = yx\} \text{ и } \mathcal{N}_3 = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyz = 0\}.$$

Хорошо известно и легко проверяется, что интервал $[\mathcal{ZM}, \mathcal{N}_3]$ решетки многообразий полугрупп состоит только из трех введенных сейчас многообразий.

Лемма 6. *Если* $\mathcal{X}$ *— либо одно из многообразий* $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ *и* $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, *либо неабелево многообразие групп, то решетка* $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$ *не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз.*

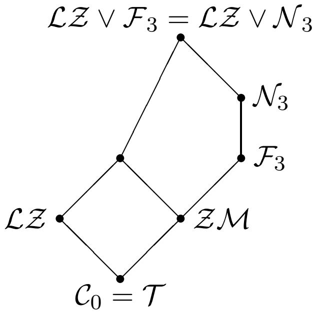


Рис. 2. Решетка $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{F}_3)$.

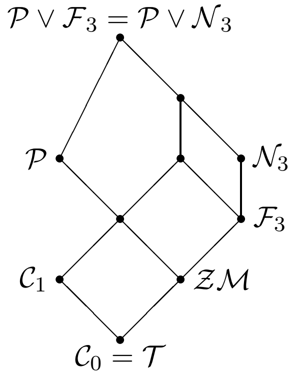


Рис. 3. Решетка $L(\mathcal{P} \vee \mathcal{F}_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Как проверено в [1], решетки $L(\mathcal{LZ} \vee \mathcal{F}_3)$ и $L(\mathcal{P} \vee \mathcal{F}_3)$ имеют вид, изображенный на рис. 2 и 3 соответственно. Очевидно, что ни одна из этих решеток не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Поскольку двойственные друг к другу многообразия имеют изоморфные решетки подмногообразий, указанными свойствами не обладают и решетки $L(\mathcal{RZ} \vee \mathcal{F}_3)$ и $L(\overleftarrow{\mathcal{P}} \vee \mathcal{F}_3)$.

Пусть теперь $\mathcal{X}$ — неабелево многообразие групп. Многообразие $\mathcal{X}$ содержит минимальное неабелево многообразие $\mathcal{X}'$. Обозначим через $\mathcal{G}$ объединение всех собственных подмногообразий многообразия $\mathcal{X}'$. Ясно, что $\mathcal{X}'$ покрывает $\mathcal{G}$ в решетке $L(\mathcal{X}')$. Покажем, что интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$ не является слабо полумодулярным ни вверх, ни вниз. Пусть $\mathcal{W}$ — любое многообразие из этого интервала. Заметим, что в многообразии $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3$ выполнено тождество $x\overline{x} = y\overline{y}$. В силу леммы 1(iii) в любом многообразии идемпотентных эпигрупп это тождество равносильно тождеству $x = y$. Это значит, что многообразие $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3$, а следовательно, и $\mathcal{W}$, не содержит нетривиальных многообразий идемпотентных эпигрупп. Используя следствие 2, получаем, что $\mathcal{W} = \mathcal{H} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{H}$ — некоторое многообразие групп, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Согласно лемме 3 $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{W}) = \mathrm{Gr}\,(\mathcal{H} \vee \mathcal{N}) = \mathcal{H}$ и $\mathrm{Gr}\,(\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3) = \mathcal{X}'$. Поскольку, $\mathcal{W} \in [\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3]$, получаем, что $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}'$, а значит $\mathcal{H}$ — одно из многообразий $\mathcal{G}$ или $\mathcal{X}'$. Заметим, что $\mathcal{ZM} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_3$, а значит, $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{F}_3$ или $\mathcal{N}_3$. Следовательно, многообразие $\mathcal{W}$ совпадает с одним из шести многообразий: $\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}_3$, $\mathcal{G} \vee \mathcal{N}_3$, $\mathcal{X}' \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3$ или $\mathcal{X}' \vee \mathcal{N}_3$. Дословно повторяя соответствующую часть доказательства леммы 1 работы [4], можно проверить, что если $\mathcal{Y}$ — некоммутативное многообразие эпигрупп, то $\mathcal{Y} \vee \mathcal{F}_3 \supseteq \mathcal{N}_3$. Это означает, что $\mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3 = \mathcal{X}' \vee \mathcal{N}_3$. Следовательно, интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$ имеет вид, изображенный на рис. 4. В частности, он не является слабо полумодулярным ни вверх, ни вниз. $\square$

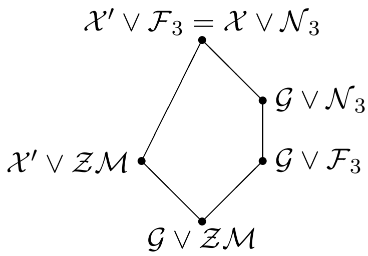


Рис. 4. Интервал $[\mathcal{G} \vee \mathcal{ZM}, \mathcal{X}' \vee \mathcal{F}_3]$ решетки $L(\mathcal{X} \vee \mathcal{F}_3)$.

Лемма 7. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, а $\mathcal{X}$ — подмногообразие ступени ≤ 2 многообразия $\mathcal{V}$, то многообразие $\mathcal{X}$ коммутативно.*

Доказательство. Согласно лемме 6 многообразие $\mathcal{X}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Используя предложение 2, получаем, что $\mathcal{X} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ является многообразием, порожденным эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразием. Поскольку $\mathcal{X}$ — многообразие ступени ≤ 2, многообразие $\mathcal{N}$ содержится в $\mathcal{ZM}$. В частности, оно коммутативно. Осталось показать, что многообразие $\mathcal{M}$ также коммутативно. Очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2$ не является многообразием ступени ≤ 2. Следовательно, оно не может содержаться в многообразии $\mathcal{X}$, а значит и в $\mathcal{M}$. В силу следствия 1 многообразие $\mathcal{M}$ порождается вполне регулярной эпигруппой. Известно, что любая вполне регулярная полугруппа является полурешеткой прямоугольных связок групп. Поскольку многообразие $\mathcal{X}$, а значит и $\mathcal{M}$, не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$, многообразие $\mathcal{M}$ состоит из полурешеток групп. Из леммы 6 следует, что $\mathcal{M}$ не содержит неабелевых многообразий групп. Следовательно, $\mathcal{M}$ состоит из полурешеток абелевых групп, а значит, оно коммутативно. □

Будем называть слово *полугрупповым*, если оно не содержит операции псевдообращения. Напомним, что полугрупповое слово называется *линейным*, если всякая буква входит в него не более одного раза.

Лемма 8. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, то всякая эпигруппа с единицей из $\mathcal{V}$ коммутативна.*

Доказательство. Обозначим через S произвольную эпигруппу с единицей, принадлежащую $\mathcal{V}$. Положим $\mathcal{R} = \operatorname{var}\{x^2 = xyx = 0\}$. Из леммы 4 легко вытекает, что решетка $L(\mathcal{R})$ не является слабо полумодулярной ни вверх, ни вниз, а значит, $\mathcal{R} \nsubseteq \mathcal{V}$. Следовательно, существует тождество $u = v$, выполненное в $\mathcal{V}$, но не выполненное в $\mathcal{R}$. Отметим, что тождество $u = v$ выполнено в эпигруппе S. Если каждое из эпигрупповых слов u и v содержит операцию псевдообращения, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{R}$ в силу леммы 1(ii). Поэтому без ограничения общности можно считать, что слово u является полугрупповым.

Предположим сначала, что слово v также является полугрупповым. Если существует буква x, входящая в запись одного из слов u и v, но не входящая в запись другого, то, подставив в тождество $u = v$ единицу вместо всех букв, кроме x, мы получим, что S удовлетворяет тождеству $x^n = 1$ для некоторого натурального n. Но тогда в $\operatorname{var} S$ выполнено тождество $x = x^{n+1}$, а значит, многообразие $\operatorname{var} S$ является многообразием ступени 1. Согласно лемме 7 оно коммутативно. Следовательно, эпигруппа S будет коммутативной.

Далее будем считать, что слова u и v зависят от одних и тех же букв. Если ни одно из этих слов не является линейным, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{R}$. Без ограничения общности будем считать, что слово u линейно. Если слово v также линейно, то $u = v$ — перестановочное тождество. Всякая эпигруппа с единицей, удовлетворяющая перестановочному тождеству, коммутативна. Пусть, наконец, слово v не линейно, т. е. существует буква x, входящая в запись v более одного раза. Подставляя в тождество $u = v$ единицу вместо всех букв, кроме x, мы получим, что $\operatorname{var} S$ удовлетворяет тождеству $x^m = x$ для некоторого $m > 1$. Как и выше, из леммы 7 вытекает, что эпигруппа S коммутативна.

Осталось рассмотреть случай, когда слово v содержит операцию псевдообращения. В силу леммы 1(ii) в этом случае $v = 0$ в любом нильмногообразии. Если слово u не линейно, то $u = 0 = v$ в $\mathcal{R}$. Поэтому далее можно считать, что u линейно, т. е. совпадает со словом $x_1 x_2 \cdots x_n$ для некоторого n. В любой нильполугруппе из $\mathcal{V}$ выполнены тождества $x_1 x_2 \cdots x_n = v = 0$. Следовательно, $\mathcal{V}$ не содержит многообразия $\mathcal{C}_2$. Поскольку решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ слабо полумодулярна вверх или вниз, из леммы 6 вытекает, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Пользуясь следствием 1, получаем, что эпигруппа S вполне регулярна. Вновь из леммы 7 вытекает, что эта эпигруппа коммутативна. □

Положим $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\,\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$.

Лемма 9. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз, и $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие, то либо $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{Z}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{N} \nsubseteq \mathcal{Z}$. В силу леммы 8 многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Из леммы 2 вытекает, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$. Многообразие $\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из теорем 1 и 2 работы [1] вытекает, что при $m > 1$ решетка $L(\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N})$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Следовательно, $m \leq 1$. Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{G}$ нетривиально. Тогда $\mathcal{G}$ содержит нетривиальное многообразие периодических групп $\mathcal{H}$. Многообразие $\mathcal{H} \vee \mathcal{N}$ периодично, и потому его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из результатов работ [1;3;8] вытекает, что решетка $L(\mathcal{H} \vee \mathcal{N})$ не является ни слабо полумодулярной вверх, ни слабо полумодулярной вниз. Следовательно, $\mathcal{G} = \mathcal{T}$, и потому $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \subseteq \mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. □

Приступим к непосредственной проверке импликаций а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и импликации а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2. Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое многообразие эпигрупп ступени > 2, решетка подмногообразий которого слабо полумодулярна вверх или вниз. В силу леммы 7 всякое содержащееся в $\mathcal{V}$ многообразие ступени ≤ 2 коммутативно. В частности, это означает, что $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. В силу предложения 2 $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное эпигруппой с единицей, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. В силу леммы 8 многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Применяя лемму 2, мы получаем, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \geq 0$. При этом $\mathcal{G} = \mathcal{AG}$, так как в противном случае многообразие $\mathcal{M}$, а значит и многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, периодично. Как хорошо известно, всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ содержит наибольшее нильподмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{Nil}\,(\mathcal{X})$. Многообразие $\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ периодично. Положим $\mathcal{N}' = \mathrm{Nil}\,(\mathcal{C}_m \vee \mathcal{N})$. Ясно, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}'$. В силу леммы 9 либо $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$. Но первый случай невозможен, так как в этом случае многообразие $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}'$ было бы периодическим. Следовательно, $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$, и потому $\mathrm{Nil}\,(\mathcal{C}_m) = \mathrm{var}\,\{x^m = 0,\ xy = yx\} \subseteq \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$. Поскольку, очевидно, $\mathrm{var}\,\{x^m = 0,\ xy = yx\} \nsubseteq \mathcal{Z}$ при $m > 2$, мы получаем, что $m \leq 2$. Кроме того, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}' \subseteq \mathcal{Z}$, т. е. $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1), а из леммы 4 вытекает, что $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождеству $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2). Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию з) теоремы 1. Импликации а) $\longrightarrow$ з) и б) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 доказаны.

Предположим теперь, что решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна. В силу сказанного выше $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \leq m \leq 2$, а $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1). Очевидно, что решетка $L(\mathcal{N})$ дистрибутивна. Поэтому из леммы 5 вытекает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $p_3[\pi]$, где π — одна из перестановок (4). Таким образом, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию б) теоремы 2. Тем самым мы доказали импликацию а) $\longrightarrow$ б) теоремы 2.

3.2. Импликации з) $\longrightarrow$ ж) теоремы 1 и б) $\longrightarrow$ а) теоремы 2

В силу [16, предложение 2.9] решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$ изоморфна прямому произведению решеток $L(\mathcal{AG})$ и $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$. Обозначим через C_3 3-элементную цепь $\mathcal{T} \subset \mathcal{SL} \subset \mathcal{C}_2$. Поскольку многообразие $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z}$ периодично, оно может рассматриваться как многообразие полугрупп. Как показано в [5, лемма 3] (а также в [19, лемма 7]), решетка $L(\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$ изоморфна подпрямому произведению решеток C_3 и $L(\mathcal{Z})$. Из сказанного вытекает, что решетка $L(\mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_2 \vee \mathcal{Z})$ изоморфно вкладывается в прямое произведение решетки $L(\mathcal{AG})$, 3-элементной цепи и решетки $L(\mathcal{Z})$. Общеизвестно, что решетка $L(\mathcal{AG})$ дистрибутивна. Из леммы 4 теперь вытекает, что если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, удовлетворяющее условию ж) теоремы 1, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Мы доказали импликацию з) $\longrightarrow$ ж) теоремы 1. Аналогично ссылка на лемму 5 завершает доказательство импликации б) $\longrightarrow$ а) теоремы 2.

3.3. Импликации з) $\longrightarrow$ и) теоремы 1 и б) $\longrightarrow$ в) теоремы 2

Предположим, что $\mathcal{V} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $0 \le m \le 2$, а многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1) и $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2). В силу леммы 1 многообразие $\mathcal{AG}$ удовлетворяет тождеству (5), многообразие $\mathcal{C}_2$ — тождеству $\overline{\overline{x}} = x^2$, а многообразие $\mathcal{N}$ — тождеству (6). Учитывая еще, что многообразия $\mathcal{AG}$ и $\mathcal{C}_2$ коммутативны, а $\mathcal{C}_2$, кроме того, удовлетворяет тождеству $x^2 = x^3$, легко убедиться в том, что в каждом из многообразий $\mathcal{AG}$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{N}$, а значит и в $\mathcal{V}$, выполнены тождества

$$x^2y = yx^2 = \overline{\overline{x}}^{\,2}y, \quad xyx = xy\overline{\overline{x}}\,.$$

Кроме того, ясно, что всякое перестановочное тождество, выполненное в $\mathcal{N}$, выполнено и в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (3), где π — одна из перестановок (2). Это доказывает импликацию з) $\longrightarrow$ и) теоремы 1. Импликация б) $\longrightarrow$ в) теоремы 2 проверяется вполне аналогично.

3.4. Импликации и) $\longrightarrow$ з) теоремы 1 и в) $\longrightarrow$ б) теоремы 2

Предположим, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет системе тождеств (3), где π — одна из перестановок (2). Очевидно, что эта система тождеств не выполнена в многообразиях $\mathcal{LZ}$ и $\mathcal{RZ}$. А из [9, лемма 7] и двойственного утверждения вытекает, что она не выполнена и в многообразиях $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Следовательно, ни одно из этих четырех многообразий не содержится в $\mathcal{V}$. Кроме того, все эпигруппы с единицей в $\mathcal{V}$ коммутативны, поскольку в систему тождеств (3) входит перестановочное тождество. Из предложения 2 и леммы 2 вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \ge 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ непериодично, $\mathcal{G} = \mathcal{AG}$. Далее, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^2y = \overline{\overline{x}}^{\,2}y$. В силу леммы 1(iii) в многообразии $\mathcal{C}_m$ правая часть этого тождества равна $x^{2m}y$. Ясно, что при $m > 2$ тождество $x^2y = x^{2m}y$ в $\mathcal{C}_m$ не выполнено. Следовательно, $0 \le m \le 2$. Наконец, из выполнимости в $\mathcal{V}$ системы тождеств (3) и леммы 1(ii) вытекает, что многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (1), а выполнимость в нем тождества вида $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2), вытекает из выполнимости тождества такого вида в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию з) теоремы 1. Мы доказали импликацию и) $\longrightarrow$ з) теоремы 1. Импликация в) $\longrightarrow$ б) теоремы 2 проверяется вполне аналогично. Таким образом, теоремы 1 и 2 полностью доказаны. $\square$

4. Следствия

Теоремы 1 и 2 относятся к непериодическим многообразиям эпигрупп. В этом разделе указываются некоторые следствия из этих теорем и результатов работ [1; 3; 8], относящихся к произвольным эпигрупповым многообразиям.

Следствие 3. *Для произвольного многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ ступени > 2 условия* а), в), д), е) *и* ж) *теоремы* 1 *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 1 можно считать, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, его можно рассматривать как многообразие полугрупп. Из [1, теорема 2; 3, следствие 6.2] вытекает, что если многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Если же $\mathcal{V}$ не комбинаторно, то, с учетом того что $\mathcal{V}$ — многообразие ступени > 2, из [1, теорема 2]

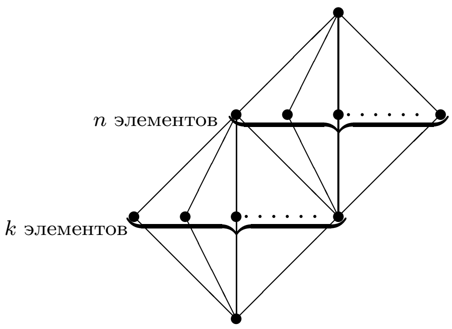


Рис. 5. Решетка $M_{k,n}$.

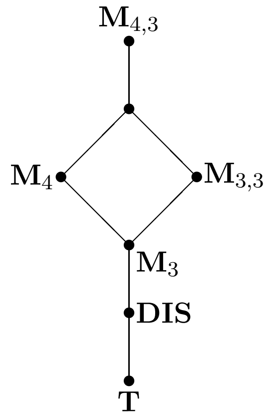


Рис. 6. Решетка $L(\mathbf{M}_{4,3})$.

вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет следующему "периодическому аналогу" условия з) теоремы 1: $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, $0 \le m \le 2$, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам (1) и $p_4[\pi]$, где π — одна из перестановок (2). Положим $\mathcal{W} = \mathcal{AG} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$. В силу теоремы 1 $L(\mathcal{W}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. Поскольку $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, получаем, что $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$. $\square$

Мы показали, в частности, что в решетках многообразий эпигрупп ступени > 2 дезарговость эквивалентна принадлежности многообразию $\mathbf{M}_{4,3}$. Отметим, что в абстрактных решетках второе из этих условий является намного более сильным ограничением, чем первое. Чтобы придать этому высказыванию более строгий смысл, сравним число подмногообразий многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ и многообразия всех дезарговых решеток. Последнее многообразие имеет континуум подмногообразий (это легко вытекает из доказательства основного результата работы [12]; см. также [14, теорема 3.12]). В то же время многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ имеет всего семь подмногообразий. Чтобы перечислить эти подмногообразия, введем некоторые новые обозначения. Для произвольных натуральных чисел k и n мы обозначим через M_k решетку, состоящую из наименьшего и наибольшего элементов и k атомов, а через $M_{k,n}$ — решетку, изображенную на рис. 5. Как и в случае эпигрупп, будем обозначать через var L многообразие решеток, порожденное решеткой L. Положим $\mathbf{M}_k = \mathrm{var}\, M_k$ и $\mathbf{M}_{k,n} = \mathrm{var}\, M_{k,n}$. Легко проверяется, что список неодноэлементных подпрямо неразложимых подрешеток решетки $M_{4,3}$ исчерпывается 2-элементной цепью и решетками M_3, M_4, $M_{3,3}$ и $M_{4,3}$. Отсюда вытекает, что решетка подмногообразия $\mathbf{M}_{4,3}$ имеет вид, изображенный на рис. 6, где через **T** и **DIS** обозначены тривиальное многообразие решеток и многообразие всех дистрибутивных решеток соответственно.

Отметим, что следствие 3 нельзя усилить, заменив в его формулировке многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ каким-либо его собственным подмногообразием: используя теорему 1 и результаты работы [2], легко привести примеры многообразий эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, но не принадлежит никакому собственному подмногообразию многообразия $\mathbf{M}_{4,3}$.

Следствие 4. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она принадлежит многообразию, порожденному некоторой конечной решеткой.*

Доказательство. Если многообразие $\mathcal{V}$ не периодично, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{M}_{4,3}$ в силу теоремы 1, а если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх, то тот же вывод вытекает из следствия 3. Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{V}$ периодично и решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вниз, но не слабо полумодулярна вверх. Из теорем 2 и 3 работы [1] вытекает, что в этом случае многообразие $\mathcal{V}$ комбинаторно. Требуемое заключение непосредственно вытекает теперь из [3, следствие 6.3]. $\square$

Хорошо известно, что всякая конечная решетка порождает наследственно конечно базируемое многообразие решеток [15]. Поэтому из следствия 4 непосредственно вытекает

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2. Если решетка $L(\mathcal{V})$ слабо полумодулярна вверх или вниз, то она имеет конечный базис тождеств.* □

Следующее утверждение для периодических многообразий эпигрупп вытекает из доказательств [4, теорема 1; 5, теорема 2], а для непериодических — из доказательства теоремы 1.

Следствие 6. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2, а $\mathbf{L}$ — нетривиальное квазимногооообразие модулярных решеток, то $L(\mathcal{V}) \in \mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие абелевых групп, $0 \le m \le 2$, многообразие $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам* (1) *и $L(\mathcal{N}) \in \mathbf{L}$.* □

Нильмногообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит произвольному, наперед заданному, квазимногообразию модулярных решеток $\mathbf{L}$, полностью описаны в работе [2]. Таким образом, следствие 6 фактически дает описание многообразий эпигрупп ступени > 2 с тем же свойством. Обозначим через C_2 2-элементную цепь. Будем говорить, что две решетки [*квази*]*эквационально эквивалентны*, если они порождают одно и то же [квази]многообразие решеток. Из следствия 6 и теорем 1–4 работы [2] вытекает

Следствие 7. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп ступени > 2 с модулярной решеткой подмногообразий, то решетка $L(\mathcal{V})$* [*квази*]*эквационально эквивалентна одной из решеток $C_2, M_3, M_4, M_{3,3}, M_4 \times M_{3,3}$ и $M_{4,3}$.* □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верников Б. М.** Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2002. № 22 (4). С. 16–42.
2. **Верников Б. М.** Квазитождества в модулярных решетках многообразий полугрупп // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2005. № 38 (8). С. 5–35.
3. **Верников Б. М., Волков М. В.** Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2004. № 30 (6). С. 5–36.
4. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Изв. вузов. Математика. 1989. № 6. С. 51–60.
5. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Изв. вузов. Математика. 1992. № 7. С. 3–8.
6. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. III // Изв. вузов. Математика. 1992. № 8. С. 21–29.
7. **Волков М. В.** Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. Акад. наук. 1992. Т. 326, № 3. С. 409–413.
8. **Волков М. В.** Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика, механика. 2002. № 22 (4). С. 43–61.
9. **Голубов Э. А., Сапир М. В.** Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1982. № 11. С. 21–29.
10. **Шеврин Л. Н.** К теории эпигрупп. I, II // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.
11. **Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В.** Решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2009. № 3. С. 3–36.
12. **Baker K. A.** Equational classes of modular lattices // Pacific J. Math. 1969. Vol. 28, no. 1. P. 9–15.
13. **Gusev S.V., Vernikov B.M.** Endomorphisms of the lattice of epigroup varieties [Электрон. ресурс]. P. 22. URL: http://arxiv.org/pdf/1404.0478v4.
14. **Jipsen P., Rose H.** Varieties of lattices. Berlin: Springer Verlag, 1992. 162 p. (Lect. Notes Math.; vol. 1533.)
15. **McKenzie R.N.** Equational bases for lattice theories // Math. Scand. 1970. Vol. 27, no. 1. P. 24–38.
16. **Shaprynskiĭ V.Yu., Skokov D.V., Vernikov B.M.** Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis. 2016. Vol. 76, iss. 1. P. 1–30.

17. **Shevrin L. N.** Epigroups // Structural theory of automata, semigroups, and universal algebra. Dordrecht: Springer, 2005. P. 331–380.
18. **Vernikov B. M., Volkov M. V.** Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol. 12. P. 391–417.
19. **Volkov M. V.** Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, pt. 3. P. 295–316.
20. **Volkov M. V.** "Forbidden divisor" characterizations of epigroups with certain properties of group elements // RIMS Kokyuroku. (Algebraic Systems, Formal Languages and Computations). 2000. Vol. 1166. P. 226–234.
21. **Volkov M. V., Ershova T. A.** The lattice of varieties of semigroups with completely regular square // Monash Conf. on Semigroup Theory. N. Y.: World Sci. Publ., 1991. P. 306–322.

Поступила 02.08.2015

Верников Борис Муневич
профессор
кафедра алгебры и дискретной математики
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: bvernikov@gmail.com

Скоков Дмитрий Вячеславович
ассистент
кафедра алгебры и дискретной математики
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dmitry.skokov@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.853.65

НОВЫЙ КЛАСС ТЕОРЕМ ОБ АЛЬТЕРНАТИВАХ[1]

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко

Показана связь теорем об альтернативах линейных систем равенств и/или неравенств и теорем двойственности линейного программирования. Приводятся новые варианты теорем об альтернативах, при которых альтернативные системы имеют различные матрицы разных размеров.

Ключевые слова: теоремы об альтернативах, системы линейных равенств и неравенств, линейное программирование, двойственность.

A. I. Golikov, Yu. G. Evtushenko. A new class of theorems of the alternative.

The connection is established between theorems of the alternative for linear systems of equations and/or inequalities and duality theorems in linear programming. We give new versions of theorems of the alternative in which the alternative systems have different matrices of various sizes.

Keywords: theorems of the alternative, systems of linear equations and inequalities, linear programming, duality.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-44-49

Введение

Существуют различные варианты теорем об альтернативах, применяющиеся в основном для доказательства теорем существования, вывода условий экстремума в задачах оптимизации (см., например, [1;2]). Теоремы об альтернативах имеют не только теоретическое значение, но весьма полезны с вычислительной точки зрения [3; 4]. Они дают возможность вычислять нормальные решения систем линейных равенств и неравенств, находить направление наискорейшего спуска в задачах нелинейного программирования, строить разделяющие гиперплоскости, производить коррекцию несобственных задач, конструировать новые алгоритмы решения задач линейного программирования и т. д.

В формулировках теорем об альтернативах всегда присутствуют две системы равенств и/или неравенств, которые обозначим соответственно через I и II. Теоремы об альтернативах утверждают, что всегда разрешима одна и только одна из систем (либо I, либо II), но не обе одновременно.

Входными данными систем I и II являются элементы матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и компоненты вектора $b \in \mathbb{R}^m$.

Пусть система, определяющая множество X, имеет вид

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$

где A — матрица размерности $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|b\| \neq 0$. Альтернативная система, определяющая множество U, записывается в виде

$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-07-00805 и 15-01-08259), ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1) и Министерства образования и науки Республики Казахстан (номер государственной регистрации проекта 0115PK00554).

Здесь и всюду ниже ρ — произвольная фиксированная положительная константа.

Всегда совместна одна и только одна из систем: (I) или (II). Это утверждение при использовании в (II) записи $b^\top u > 0$ известно как лемма Фаркаша (теорема Фаркаша) (см., например, [1; 4]).

Если в (I) вместо системы линейных равенств при неотрицательных переменных используется система неравенств

$$Ax \leq b,$$

то по аналогии с (II) альтернативной будет согласно теореме Гейла [1; 4] следующая система:

$$A^\top u = 0_m, \quad -b^\top u = \rho > 0, \quad u \geq 0_m.$$

В теоремах Фаркаша и Гейла для альтернативных линейных систем используются одни и те же матрица A и вектор b. Ниже в разд. 1 приведены новые альтернативные системы, которые строятся по-иному, с использованием различных матриц разной размерности. Более того, в разд. 2 показано, что альтернативными могут быть два семейства систем. При этом любая система из одного семейства альтернативна любой системе из другого семейства.

1. Новые варианты теорем об альтернативах

Рассмотрим частный случай системы

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$

когда матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет ранг m, т. е. $m < n$, и $\|b\| \neq 0$. Именно для этого частного случая матрицы A ранга m покажем, что система, альтернативная к (I), может иметь вид, отличный от используемой в теореме Фаркаша:

$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

Покажем, что в альтернативной системе будет присутствовать матрица, отличная от $A^\top$, и вместо $b^\top$ будет использоваться иной вектор.

Для этого, следуя [5–8], введем в рассмотрение матрицу $K \in \mathbb{R}^{\nu \times n}$, где $\nu = n - m$ — дефект матрицы A. Строки матрицы K линейно независимы, принадлежат нуль-пространству матрицы A, и поэтому натянутое на них подпространство $\mathrm{im}\, K^\top$ совпадает с нуль-пространством (ядром) матрицы A. В качестве K можно использовать любую матрицу, ν строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы A. Поэтому $AK^\top = 0_{m\nu}$. Здесь через 0_{ij} обозначена матрица размерности $(i \times j)$ с нулевыми элементами.

В выборе матрицы K имеется определенный произвол. Она может быть построена различными способами. Если матрицу A представить в блочном виде $A = [B \,|\, N]$, где B невырождена, то матрицу K можно записать в следующем виде: $K = [-N^\top (B^{-1})^\top \,|\, I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса — Жордана матрицу A привести к виду $A = [I_m \,|\, N]$, то матрица K представима в виде $K = [-N^\top \,|\, I_\nu]$.

Так как матрица A имеет ранг m, система

$$Ax = b \tag{1}$$

всегда разрешима, но среди ее решений может и не быть неотрицательных. Обозначим через $\bar{X}$ множество решений системы (1). Подчеркнем, что множество $\bar{X}$ всегда непусто в отличие от множества X — множества решений системы (I). Запишем общее решение неоднородной системы (1) в виде

$$x = \bar{x} - K^\top y, \tag{2}$$

где $\bar{x}$ — произвольное частное решение системы (1), т. е. $\bar{x} \in \bar{X}$, а $K^\top y$ — общее решение однородной системы $Ax = 0_m$ и $y \in \mathbb{R}^\nu$.

Определим множество
$$Y = \{y \in \mathbb{R}^{\nu} \colon \bar{x} - K^{\top} y \geq 0_n\}.$$

Формулу (2) можно рассматривать как аффинное отображение из $\mathbb{R}^{\nu}$ в $\mathbb{R}^{n}$. При этом образом множества Y является множество X, задаваемое системой (I). Между непустыми множествами X и Y существует взаимно однозначное соответствие. Действительно, для любого $y \in Y$ по формуле (2) однозначно определяется $x \in X$, т. е.

$$X = \bar{x} - K^{\top} Y. \tag{3}$$

Для переопределенной системы (2) полного ранга, содержащей n линейных уравнений и ν неизвестных y, всегда определено псевдорешение

$$y = (KK^{\top})^{-1} K(\bar{x} - x) = (K^{\top})^{+}(\bar{x} - x), \tag{4}$$

которое является единственным решением системы (2) тогда и только тогда, когда $\bar{x} - x \in \operatorname{im} K^{\top}$. Это включение имеет место тогда и только тогда, когда $x \in \bar{X}$. Для любого $x \in \bar{X}$ формула (4) определяет аффинное преобразование, обратное к (2). Поэтому можно записать

$$Y = (K^{\top})^{+}(\bar{x} - X). \tag{5}$$

Таким образом, либо одновременно множества $X \neq \varnothing$ и $Y \neq \varnothing$, либо одновременно $X = \varnothing$ и $Y = \varnothing$, как следует из (2).

Итак, приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Две системы*
$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$
$$K^{\top} y \leq \bar{x} \tag{I_y}$$
либо одновременно разрешимы, и множества их решений связаны между собой соотношениями (3) *и* (5)*, либо одновременно неразрешимы.*

По теореме Гейла для системы (I_y) альтернативной будет система, определяющая множество
$$V = \{v \in \mathbb{R}^{n} \colon Kv = 0_{\nu},\ -\bar{x}^{\top} v = \rho > 0,\ v \geq 0_n\}. \tag{II_v}$$
Общее решение однородной системы $Kv = 0_{\nu}$ всегда можно выразить с помощью матрицы A следующим образом:
$$v = -A^{\top} u. \tag{6}$$
Поэтому, сделав в (II_v) замену переменных $v = -A^{\top} u$ и учитывая, что $A\bar{x} = b$ и $KA^{\top} = 0_{\nu n}$, систему (II_v) можно записать в виде

$$A^{\top} u \leq 0_n, \quad b^{\top} u = \rho > 0. \tag{II}$$

Если множество V непусто, то $v \geq 0_n$ и из (6) следует, что непусто и множество U, задаваемое системой (II).

Верно и обратное. Если $U \neq \varnothing$, то $-A^{\top} u \geq 0_n$ и из (6) следует, что непусто и множество V. При этом между этими множествами существует взаимно однозначное соответствие, выражаемое формулами
$$V = -A^{\top} U, \quad U = -(A^{\top})^{+} V, \tag{7}$$
где псевдообратная матрица $(A^{\top})^{+}$ имеет вид $(A^{\top})^{+} = (AA^{\top})^{-1} A$.

Как следует из (6), множества V и U могут быть несовместны только одновременно.

Отсюда следует лемма.

Лемма 2. *Две системы*

$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0, \tag{II}$$

$$Kv = 0_\nu, \quad -\bar{x}^\top v = \rho > 0, \quad v \geq 0_n \tag{II$_v$}$$

либо одновременно разрешимы, и множества их решений связаны между собой соотношениями (7), *либо одновременно неразрешимы.*

Леммы 1 и 2 выделяют семейства I и II, состоящие из систем, которые одновременно разрешимы или неразрешимы. В этом смысле системы (I) и (I$_y$) из семейства I эквивалентны. Аналогично эквивалентны системы (II) и (II$_v$) из семейства II.

Следующая теорема об альтернативах является аналогом теорем Фаркаша и Гейла.

Теорема. *Пусть матрица* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *имеет ранг* m, *а матрица* $K \in \mathbb{R}^{\nu \times n}$ *имеет ранг* $\nu = n - m$ *и* $AK^\top = 0_{m\nu}$, *вектор* $\|b\| \neq 0$, ρ *— любое положительное число, вектор* $\bar{x}$ *есть произвольное решение системы линейных уравнений* $Ax = b$. *Тогда*:

1) *всегда совместна либо система*

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n, \tag{I}$$

либо система

$$Kv = 0_\nu, \quad -\bar{x}^\top v = \rho > 0, \quad v \geq 0_n; \tag{II$_v$}$$

2) *всегда совместна либо система*

$$K^\top y \leq \bar{x}, \tag{I$_y$}$$

либо система

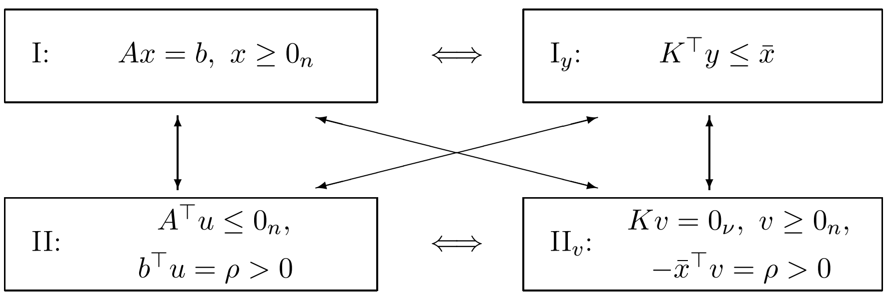
$$A^\top u \leq 0_n, \quad b^\top u = \rho > 0. \tag{II}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как согласно лемме 1 системы (I) и (I$_y$) эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а система (I$_y$) по теореме Гейла альтернативна системе (II$_v$), то системы (I) и (II$_v$) альтернативны.

2) Поскольку согласно лемме 2 системы (II) и (II$_v$) эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а системы (II) и (I) по теореме Фаркаша альтернативны, то система (II) также альтернативна системе (I$_y$).

Теорема доказана.

Связь между альтернативными системами представлена на схеме.



Двойные стрелки обозначают, что системы эквивалентны в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости, а обычные стрелки обозначают альтернативность систем. Вертикальная стрелка слева соответствует теореме Фаркаша, а вертикальная справа — теореме Гейла.

2. Альтернативные системы и линейное программирование

Приведем интерпретацию теоремы Фаркаша об альтернативах с точки зрения линейного программирования. Систему (I) можно рассматривать как задачу линейного программирования на минимум с вектором коэффициентов целевой функции, все компоненты которого тождественно равны нулю:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n_+}\{0_n^\top x\colon Ax=b,\ x\geq 0_n\}. \tag{P}$$

Двойственная задача к (P) имеет вид

$$\max_{u\in\mathbb{R}^m}\{b^\top u\colon A^\top u\leq 0_n\}. \tag{D}$$

Известно, что для пары двойственных задач линейного программирования всегда имеет место один из следующих случаев [9]:

1) прямая и двойственная задачи имеют решения;

2) прямая задача несовместна, двойственная задача неограничена;

3) двойственная задача несовместна, прямая задача неограничена;

4) прямая и двойственная задачи несовместны.

Для задач (P) и (D) последние два условия не могут быть выполнены, так как ограничения в (D) всегда совместны, вектор $u=0_m$ является допустимым.

Возможны только два первых случая.

В случае 1) оптимальные значения целевых функций задач (P) и (D) равны нулю, и в силу слабой теоремы двойственности имеет место неравенство $b^\top u\leq 0$ для всех допустимых векторов u. Отсюда следуют разрешимость системы (I) и, при любом неотрицательном ρ, неразрешимость системы

$$A^\top u\leq 0_n,\quad b^\top u=\rho>0. \tag{II}$$

В случае 2) система (I) несовместна, и в силу неограниченности двойственной задачи (D) система (II) совместна при любом $\rho>0$.

Итак, используя специальный вид задач линейного программирования (P) и (D) и привлекая его теорию двойственности, получаем простейшее доказательство альтернативности систем (I) и (II).

В работе [8] приведены различные эквивалентные постановки задач линейного программирования с использованием матрицы K и произвольного решения $\bar{x}$ системы $Ax=b$. Из этих постановок легко следуют новые варианты теорем об альтернативах, если положить все коэффициенты целевой функции в семействе прямых задач равными нулю и ограничиться случаем, когда ранг матрицы $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ равен m и $m<n$. Итак, существует произвольное решение $\bar{x}$ системы $Ax=b$. Тогда из [8, следствие 3, теорема 1 (о слабой двойственности)] получаем два семейства альтернативных систем I и II.

I:	II:	
$Ax=b,\ \ x\geq 0_n,$	$Kv=0_\nu,\ \ v\geq 0_n,$	$-\bar{x}^\top v=\rho>0,$
$K^\top y\leq\bar{x},$	$A^\top u\leq 0_n,$	$b^\top u=\rho>0,$
$Ax=b,\ \ x\geq 0_n,$	$A^\top u\leq 0_n,$	$b^\top u=\rho>0,$
$K^\top y\leq\bar{x},$	$Kv=0_\nu,\ \ v\geq 0_n,$	$-\bar{x}^\top v=\rho>0,$
$K^\top y+x=\bar{x},\ \ x\geq 0_n,$	$A^\top u+v=0_n,\ \ v\geq 0_n,$	$-\bar{x}^\top v=\rho>0,$
$Aw=0_m,\ \ w\leq\bar{x},$	$Kv=0_\nu,\ \ v\geq 0_n,$	$-\bar{x}^\top v=\rho>0,$
$K^\top y\leq\bar{x},$	$A^\top u+v=0_n,\ \ v\geq 0_n,$	$-\bar{x}^\top v=\rho>0.$

В первом столбце приводится множество ограничений соответствующей прямой задачи из семейства эквивалентных прямых задач линейного программирования. Отметим еще раз, что целевая функция этих прямых задач тождественно равна нулю. Таким образом, первый столбец представляет семейство эквивалентных в смысле одновременной разрешимости или неразрешимости систем. Это семейство обозначено через I. Во втором столбце приведены множества ограничений задач из семейства эквивалентных двойственных задач. В третьем столбце представлено неравенство для целевой функции двойственной задачи, которое может выполняться на допустимых векторах только тогда, когда двойственная задача неограничена сверху. Второй и третий столбец определяют альтернативную систему из семейства II. Отметим, что можно комбинировать каждую систему из семейства I с любой из семейства II и получить дополнительно альтернативные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mangasarian O. L.** Nonlinear programming. Philadelphia: SIAM, 1994. 220 p.
2. **Giannessi F.** Theorems of the alternative and optimization // Encyclopedia of Optimization. Dordrecht [et al.]: Kluwer Acad. Publ., 2001. Vol. 5. P. 437–444.
3. **Dax A.** The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions, and degeneracy: A review // Ann. Operat. Res. 1993. Vol. 46, no. 1. P. 11–60.
4. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 354–375.
5. **Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.** Барьерно-проективные и барьерно-ньютоновские численные методы оптимизации (случай линейного программирования). М.: Изд-во ВЦ РАН, 1992. 76 с.
6. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. An interior point approach. Chichester: Wiley, 1997. 508 p.
7. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1766–1386.
8. **Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г.** Два параметрических семейства задач линейного программирования и их приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 4. С. 31–44.
9. **Еремин И.И.** Теория двойственности в линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во Южно-Урал. гос. ун-та, 2005. 195 с.

Голиков Александр Ильич
канд. физ.-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

Поступила 21.04.2016

Евтушенко Юрий Гаврилович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
директор
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН
e-mail: evt@ccas.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.17

О ГРАФАХ ДЕЗА С НЕСВЯЗНОЙ ВТОРОЙ ОКРЕСТНОСТЬЮ ВЕРШИНЫ[1]

С. В. Горяинов, Г. С. Исакова, В. В. Кабанов, Н. В. Маслова, Л. В. Шалагинов

Граф Γ называется графом Деза, если Γ регулярен и число общих соседей пары произвольных различных вершин принимает одно из двух значений. Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, не являющийся сильно регулярным графом. В 1992 г. Гарднер (Gardiner), Годсил (Godsil), Хенсел (Hensel) и Ройл (Royle) показали, что сильно регулярный граф, содержащий вершину с несвязной второй окрестностью, является полным многодольным графом с долями одинакового размера, больше 2. В данной работе мы изучаем точные графы Деза с несвязной второй окрестностью вершин. В разд. 2 мы докажем, что если каждая вершина точного графа Деза имеет несвязную вторую окрестность, то этот граф является либо реберно регулярным, либо кореберно регулярным. В разд. 3 и 4 мы изучаем точный граф Деза, содержащий по крайней мере одну вершину с несвязной второй окрестностью. В разд. 3 показано, что если такой граф реберно регулярен, то он является s-кокликовым расширением сильно регулярного графа с параметрами (n, k, λ, μ), где $s \geq 2$ и $\lambda = \mu$. В разд. 4 показано, что если такой граф кореберно регулярен, то он является 2-кликовым расширением полного многодольного графа с долями одинакового размера, больше либо равного 3.

Ключевые слова: граф Деза; точный граф Деза; несвязная вторая окрестность; реберно регулярный граф; кореберно регулярный граф.

S. V. Goryainov, G. S. Isakova, V. V. Kabanov, N. V. Maslova, L. V. Shalaginov. On Deza graphs with disconnected second neighborhood of a vertex.

A graph Γ is called a Deza graph if it is regular and the number of common neighbors of two distinct vertices is one of two values. A Deza graph Γ is called a strictly Deza graph if it has diameter 2 and is not strongly regular. In 1992, Gardiner, Godsil, Hensel, and Royle proved that a strongly regular graph that contains a vertex with disconnected second neighborhood is a complete multipartite graph with parts of the same size and this size is greater than 2. In this paper we study strictly Deza graphs with disconnected second neighborhoods of vertices. In Section 2, we prove that, if each vertex of a strictly Deza graph has disconnected second neighborhood, then the graph is either edge-regular or coedge-regular. In Sections 3 and 4, we consider strictly Deza graphs that contain at least one vertex with disconnected second neighborhood. In Section 3, we show that, if such a graph is edge-regular, then it is an s-coclique extension of a strongly regular graph with parameters (n, k, λ, μ), where s is integer, $s \geq 2$, and $\lambda = \mu$. In Section 4, we show that, if such a graph is coedge-regular, then it is a 2-clique extension of a complete multipartite graph with parts of the same size greater than or equal to 3.

Keywords: Deza graph, strictly Deza graph, disconnected second neighborhood, edge-regular graph, coedge-regular graph.

MSC: 05C40, 05C07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-50-61

Введение

Все графы в данной работе являются неориентированными, не содержат петель и кратных ребер.

Пусть Γ — граф. Смежность вершин u и v мы будем обозначать как $u \sim v$. *Расстоянием между вершинами* u и v в связном графе будем называть длину кратчайшего пути, соединяющего эти вершины, и обозначать через $d(u, v)$. *Диаметром графа* называется максимальное расстояние между двумя вершинами этого графа.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00316). Четвертый автор частично поддержан грантом Президента Российской Федерации для молодых ученых (проект МК-6118.2016.1), а также является победителем конкурса молодых математиков 2013 г. Фонда Дмитрия Зимина "Династия".

Окрестность $N_1(v) \equiv N(v)$ вершины v, *вторую окрестность* $N_2(v)$ вершины v и *общую окрестность* $N(u,v)$ двух вершин u и v определим равенствами $N(v) := \{u \;:\; u \sim v\}$, $N_2(v) := \{u \;:\; d(v,u) = 2\}$ и $N(u,v) := N(u) \cap N(v)$.

Граф Γ называется *реберно регулярным* с параметрами (n,k,λ), если Γ содержит n вершин, регулярен валентности k и любые две его смежные вершины имеют точно λ общих соседей. Граф Γ называется *кореберно регулярным* с параметрами (n,k,μ), если Γ содержит n вершин, регулярен валентности k и любые две его несмежные вершины имеют точно μ общих соседей. Граф Γ называется *сильно регулярным* с параметрами (n,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с параметрами (n,k,λ) и кореберно регулярнен с параметрами (n,k,μ) (см. [2] или [4]).

В 1998 г. в работе [6] в качестве обобщения понятия сильно регулярного графа было введено понятие графа Деза.

Пусть n, k, b, и a — это целые неотрицательные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \le a \le b \le k < n$. Граф Γ называется *графом Деза* с параметрами (n,k,b,a), если Γ содержит n вершин, регулярен валентности k и для любых различных вершин u и v справедливо $|N(u,v)| = a$ или $|N(u,v)| = b$.

Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, который не является сильно регулярным. Заметим, что для точного графа Деза с параметрами (n,k,b,a) выполняется неравенство $a < b$.

Подграф Δ графа Γ называется *индуцированным*, если для любых различных вершин $u, v \in V(\Delta)$ $u \sim v$ в Δ тогда и только тогда, когда $u \sim v$ в Γ. В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, мы будем одинаково обозначать индуцированный подграф и множество вершин, которые его индуцируют.

Пусть $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ — графы. *Расширением* $\Gamma_1[\Gamma_2]$ графа Γ_1 с помощью графа Γ_2 будем называть граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$ и смежностью, определенной по правилу $(u_1,u_2) \sim (v_1,v_2)$ тогда и только тогда, когда либо $u_1 \sim v_1$, либо $u_1 = v_1$ и $u_2 \sim v_2$. В случае если граф Γ_2 — это 2-клика, расширение $\Gamma_1[\Gamma_2]$ называется 2-*кликовым расширением* графа Γ_1. *Раздуванием* (inflation) графа Γ будем называть реберный граф такого графа, который получается из Γ с помощью замены всех его ребер на пути длины два.

В [8, лемма 3.1] показано, что сильно регулярный граф, содержащий вершину с несвязной второй окрестностью, является полным многодольным графом с долями одинакового размера большего 2. В [5] Циоба и Куленом было получено интересное обобщение этого результата для дистанционно регулярных графов. А. Л. Гаврилюк предложил изучить точные графы Деза, содержащие вершину с несвязной второй окрестностью. Результатом данной работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть Γ — точный граф Деза. Если вторая окрестность каждой вершины несвязна, то Γ является либо реберно регулярным, либо кореберно регулярным графом.*

Следующий пример показывает, что теорему 1 не получится обобщить на случай графов Деза большего диаметра. А именно для любого целого $m \ge 2$ существует граф Деза диаметра $m+1$, не являющийся реберно регулярным, у которого вторая окрестность каждой вершины несвязна. Из [1] следует, что раздувание кубического графа является графом Деза. Рассмотрим кубический граф $A(m)$, являющийся циклом на $2m$ вершинах с соединенными антиподальными вершинами. Несложно показать, что раздувание графа $A(m)$ является графом Деза с параметрами $(6m, 3, 1, 0)$, имеет диаметр $m+1$, при этом каждая вторая окрестность есть объединение ребра с парой изолированных вершин, т. е. несвязна.

Теорема 2. *Пусть Γ — реберно регулярный точный граф Деза, содержащий вершину x такую, что граф $N_2(x)$ несвязен. Тогда граф Γ является расширением $\Gamma_1[\Gamma_2]$, где Γ_1 является сильно регулярным графом с параметрами (n,k,λ,μ), $\lambda = \mu$, а Γ_2 — коклика размера s при $s \ge 2$.*

Теорема 3. *Пусть Γ — кореберно регулярный граф Деза диаметра 2, содержащий вершину x такую, что граф $N_2(x)$ несвязен. Тогда Γ является 2-кликовым расширением полного многодольного графа с долями одинакового размера s, где $s > 2$.*

Остается открытым вопрос изучения точных графов Деза, которые не являются ни реберно регулярными, ни кореберно регулярными и содержат по крайней мере одну связную и одну несвязную вторые окрестности, а также вопрос изучения графов Деза диаметра больше 2, содержащих несвязные вторые окрестности.

1. Предварительные результаты

В данном разделе мы приводим вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть Γ — граф без треугольников, имеющий n вершин. Тогда число ребер в графе Γ не более $n^2/4$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из [7, Theorem 7.1.1]. □

Лемма 2 [6, Proposition 1.1]. *Пусть $\Gamma = (V, E)$ — граф Деза с параметрами (n, k, b, a). Для вершины v определим числа α_v и β_v по следующему правилу: $\alpha_v := |\{u \in V : |N(v, u)| = a\}|$ и $\beta_v := |\{u \in V : |N(v, u)| = b\}|$. Тогда α_v и β_v не зависят от выбора вершины v и могут быть выражены через параметры графа Γ :*

$$\alpha := \alpha_v = \begin{cases} \dfrac{b(n-1) - k(k-1)}{b-a}, & \text{если } a \neq b, \\ \dfrac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b; \end{cases} \qquad \beta := \beta_v = \begin{cases} \dfrac{a(n-1) - k(k-1)}{a-b}, & \text{если } a \neq b, \\ \dfrac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Лемма 3 [6, Theorem 2.6]. *Пусть Γ — граф Деза с параметрами (n, k, b, a). Равенство $b = k$ выполняется тогда и только тогда, когда Γ является расширением $\Gamma_1[\Gamma_2]$, где Γ_1 — сильно регулярный граф с параметрами (n_1, k_1, λ, μ), $\lambda = \mu$, а Γ_2 — коклика размера n_2 при $n_2 \geq 2$, для некоторых целых n_1, k_1, λ и n_2. Более того, параметры удовлетворяют соотношениям $n = n_1 n_2$, $\quad k = b = k_1 n_2$, $\quad a = \lambda n_2$ и $n_2 = \dfrac{k^2 - an}{k - a}$.*

Лемма 4. *Граф Деза с параметрами (n, k, b, a), где $k = b$, является реберно регулярным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку число общих соседей пары смежных вершин в регулярном графе степени k не превосходит $k - 1 < b$, то в условиях леммы произвольная пара смежных вершин будет иметь a общих соседей, т. е. Γ является реберно регулярным графом. □

В условии 1 описывается ситуация, которая является ключевой в теоремах 1 и 2.

Условие 1. *Граф Γ является точным графом Деза с параметрами (n, k, b, a), содержит вершину x такую, что граф $N_2(x)$ несвязен. Кроме того, $N_2(x)$ содержит вершину t, для которой справедливо равенство $|N(x, t)| = a$.*

Для графа, удовлетворяющего условию 1, обозначим через $C_{x,t}$ связную компоненту в $N_2(x)$, содержащую вершину t, и положим $D_{x,t} := N_2(x) \setminus C_{x,t}$.

Лемма 5. *Пусть Γ — граф, удовлетворяющий условию 1. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *для любой вершины $u \in D_{x,t}$ справедливо включение $N(x, t) \subseteq N(x, u)$;*
(2) *для любой вершины $y \in N(x, t)$ справедливо включение $D_{x,t} \subseteq N(y)$;*
(3) *каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $D_{x,t}$.*

Доказательство. Поскольку вершины t и u принадлежат различным компонентам связности графа $N_2(x)$, общие соседи вершин t и u принадлежат $N(x)$. Вершина t имеет в точности $|N(x,t)| = a$ соседей в $N(x)$, а вершины t и u имеют как минимум a общих соседей в Γ. Таким образом, справедливо равенство $N(u,t) = N(x,t)$, и каждая вершина из $N(x,t)$ смежна с вершиной u. Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует из (1). Утверждение (3) следует из (1) и (2). □

Лемма 6. *Пусть* Γ *— граф, удовлетворяющий условию* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *для любой вершины* $y \in N(x,t)$ *справедливо* $|N(x,y)| = a$;

(2) *для любой вершины* $u \in D_{x,t}$ *справедливо* $|N(x,u)| = b$;

(3) $a \leq k-3$.

Доказательство. Предположим, что существует вершина $y \in N(x,t)$ такая, что $|N(x,y)| = b$. Тогда вершина y имеет как минимум $b+2$ соседей в $\Gamma \setminus D_{x,t}$. В силу п. (2) леммы 5 вершина y смежна с каждой вершиной из $D_{x,t}$. Таким образом, $|D_{x,t}| \leq k-b-2$. С другой стороны, вершина x и произвольная вершина $u \in D_{x,t}$ имеют не более b общих соседей, т. е. вершина u имеет как минимум $k-b$ соседей в $D_{x,t}$. Отсюда $|D_{x,t}| \geq k-b+1$. Противоречие. Утверждение (1) доказано.

Предположим, что существует вершина $u \in D_{x,t}$ такая, что $|N(x,u)| = a$. Поскольку вершины x и u имеют a общих соседей, вершина u имеет $k-a$ соседей в $D_{x,t}$, откуда вытекает неравенство $|D_{x,t}| \geq k-a+1$. С другой стороны, зафиксируем вершину $y \in N(x,t)$. В силу п. (1) вершина y имеет a соседей в $N(x)$. Кроме того, вершина y смежна с вершинами x и t. Таким образом, вершина y имеет по меньшей мере $a+2$ соседей в $\Gamma \setminus D_{x,t}$. В силу п. (2) леммы 5 вершина y смежна с каждой вершиной в $D_{x,t}$. Отсюда $|D_{x,t}| \leq k-a-2$, и мы получили противоречие. Утверждение (1) доказано.

Поскольку $k-b+1 \leq |D_{x,t}| \leq k-a-2$, то $a \leq b-3 \leq k-3$. □

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим точный граф Деза Γ с параметрами (n,k,b,a), у которого вторая окрестность каждой вершины несвязна. Покажем, что Γ либо реберно регулярный, либо кореберно регулярный. От противного. До конца раздела будем предполагать, что Γ не является ни реберно регулярным, ни кореберно регулярным.

Лемма 7. *Существует вершина* x *такая, что граф* Γ *удовлетворяет условию* 1.

Доказательство следует из того, что граф Γ не является кореберно регулярным. □

В леммах 8–18 мы предполагаем, что граф Γ удовлетворяет условию 1.

Лемма 8. *Каждая вершина из* $C_{x,t}$ *имеет* a *общих соседей с вершиной* x.

Доказательство. Предположим, что существует вершина $t_b \in C_{x,t}$ такая, что $|N(x,t_b)| = b$. Обозначим через $B_{x,t} := \{r \in C_{x,t} \mid |N(x,r)| = b\}$ множество вершин из $C_{x,t}$, имеющих b общих соседей с вершиной x. Достаточно рассмотреть два случая.

1) Для каждой вершины $r \in B_{x,t}$ и для каждой вершины $u \in D_{x,t}$ выполняется $|N(r,u)| = b$. Поскольку вершины r и u принадлежат различным компонентами связности графа $N_2(x)$, общие соседи вершин r и u лежат в $N(x)$. В силу того что выбор вершин r и u происходил произвольно, имеем $N(r_1,u_1) = N(r_2,u_2)$ для всех $r_1, r_2 \in B_{x,t}$ и всех $u_1, u_2 \in D_{x,t}$. Другими словами, в $N(x)$ существуют b вершин, которые являются общими соседями для произвольных вершин $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$. Обозначим это множество через W. Отметим также, что для произвольной вершины $u \in D_{x,t}$ справедливо равенство $N(x,u) = W$. Поскольку компонента

связности $C_{x,t}$ не зависит от выбора вершины $t \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$, то в силу п. (1) леммы 5 мы имеем включение $N(x,t) \subseteq N(x,u)$ для любой вершины $t \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$. Таким образом, соседи вершин из $C_{x,t}$ и $D_{x,t}$ в множестве $N(x)$ содержатся в W. Это означает, что ребра между $N(x)$ и $N_2(x)$ — это в точности ребра между W и $N_2(x)$, т. е. ребра между $N(x) \setminus W$ и $N_2(x)$ отсутствуют.

Предположим, что $|N(x) \setminus W| \geq 2$. Возьмем различные $y_1, y_2 \in N(x) \setminus W$. Тогда $b = |W| \leq k-2 < k-1 = |N(y_1, y_2)|$, противоречие. Таким образом, либо множество $N(x) \setminus W$ пусто, либо $|N(x) \setminus W| = 1$. В первом случае мы имеем $b = k$, поэтому в силу леммы 4 граф Γ реберно регулярен. Во втором случае мы имеем $b = k-1$. В этом случае вершина t_b имеет $k-1$ соседей в $N(x)$ и в точности одного соседа в $N_2(x)$. Обозначим эту единственную вершину через y. Если $y \in B_{x,t}$, то отсутствуют ребра между $\{t_b, y\}$ и $C_{x,t} \setminus \{t_b, y\}$, поэтому $C_{x,t}$ не связен, противоречие. Таким образом, $y \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$ и $|N(x,y)| = a$. В силу п. (3) леммы 6 мы имеем $a < k-2$. Значит, существуют по крайней мере два соседа вершины y в $N_2(x)$. Заметим, что эти соседи принадлежат $C_{x,t}$ и один из них — вершина t_b. Таким образом, существует вершина $z \in C_{x,t}$ такая, что $z \neq t_b$ и $z \sim y$. Если $z \in B_{x,t}$, то $N(z,t_b) = W \cup \{y\}$ и $|N(z,t_b)| = k > k-1 = b$, противоречие. Если $z \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$, то $N(z,t_b) = N(x,z) \cup \{y\}$ и $|N(z,t_b)| = |N(x,z)|+1 = a+1$. В силу п. (3) леммы 6 мы имеем $a < k-2$ и $a+1 < k-1 = b$. Таким образом, $a < |N(z,t_b)| < b$. Противоречие с определением графа Деза.

2) Существуют $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$ такие, что справедливо $|N(r,u)| = a$. Поскольку $|N(x,r)| = b, |N(x,u)| = b$ и $|N(r,u)| = a$, то существует вершина r' такая, что $r' \in N(x,r)$ и $r' \notin N(x,u)$. Тогда вершина r' и вершины из множества $C_{x,t}$ принадлежат одной и той же компоненте связности в $N_2(u)$. Значит, эта связная компонента содержит вершину r такую, что справедливо $|N(u,r)| = a$. Таким образом, граф Γ, вершина u и вершина $r \in N_2(u)$ удовлетворяют условию 1, поэтому справедливо включение $C_{x,t} \cup \{x\} \cup \{r'\} \subseteq C_{u,r}$ и $|C_{u,r}| > |C_{x,t}|$. В силу п. (2) леммы 6 справедливо $|N(x,u)| = b$, т. е. множество $B_{u,r}$ не пусто. Таким образом, для вершины u и для вершины $r \in N_2(u)$ справедливы аналогичные аргументы, что и для вершины x и $t \in N_2(x)$.

Отметим, что мы описали процедуру, которая для данной вершины x и вершины $t \in N_2(x)$ таких, что $|N(x,t)| = a$ и $B_{x,t}$ не пусто, находит вершину u и вершину $r \in N_2(u)$ такие, что $|N(u,r)| = a$, $B_{u,r}$ не пусто и $|C_{u,r}| > |C_{x,t}|$. Применяя эту процедуру к конечному графу Γ, мы получим противоречие за конечное число шагов. □

Лемма 9. *Пусть $t' \in N_2(x)$ — еще одна вершина такая, что граф Γ, вершина x и вершина t' удовлетворяют условию 1. Тогда множества $C_{x,t'}$ и $D_{x,t'}$ не зависят от выбора вершины $t' \in N_2(x)$ такой, что $|N(x,t')| = a$, и справедливы равенства $C_{x,t'} = C_{x,t}$, $D_{x,t'} = D_{x,t}$.*

Доказательство. Из п. (2) леммы 6 следует, что для любой вершины $u \in D_{x,t}$ выполнено равенство $|N(x,u)| = b$. Поскольку $|N(x,t')| = a$, то $t' \in C_{x,t}$ и справедливы равенства $C_{x,t'} = C_{x,t}$, $D_{x,t'} = D_{x,t}$. □

В силу леммы 9, если граф Γ, вершина x и вершина $t \in N_2(x)$ удовлетворяют условию 1, мы будем использовать обозначения C_x и D_x вместо $C_{x,t}$ и $D_{x,t}$ соответственно. При этом ввиду леммы 8 C_x состоит из всех вершин $N_2(x)$, имеющих a общих соседей с вершиной x, а D_x состоит из всех вершин $N_2(x)$, имеющих b общих соседей с вершиной x. Кроме того, введем обозначение U_x для множества $\bigcup_{t \in C_x} N(x,t)$.

Лемма 10. *Каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из D_x.*

Доказательство следует из леммы п. (3) леммы 5. □

Лемма 11. *Каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из $N(x) \setminus U_x$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные вершины $y \in U_x$ и $z \in N(x) \setminus U_x$. По определению множеств C_x и U_x существует вершина $t \in C_x$ такая, что $t \sim y$. Отметим, что вершина t не имеет соседей в D_x и вершина z не имеет соседей в C_x. Таким образом, справедливо включение $N(z,t) \subset N(x)$. Но вершина t имеет в точности a соседей в $N(x)$. Значит, справедливо равенство $N(z,t) = N(x,t)$. В силу того что $y \in N(x,t)$, мы получаем $y \sim z$. □

Лемма 12. *Справедливо неравенство* $|U_x| > a$.

Доказательство. Зафиксируем вершину $t' \in C_x$. Отметим, что $|U_x| = |\bigcup_{t\in C_x} N(x,t)| \geq |N(x,t')| = a$. Достаточно показать, что $|U_x| \neq a$. Предположим, что $|U_x| = a$. Тогда каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из C_x. Также в силу п. (3) леммы 5 каждая вершина из U_x смежна с каждой вершиной из D_x. Таким образом, каждая вершина из $N(x,t)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$. Далее, оценим с двух сторон мощность $N_2(x)$ и получим противоречие. Возьмем произвольную вершину $y \in U_x$. Поскольку $|N(x,y)| \geq a$, вершина y имеет не более чем $k-a-1$ соседей в $N_2(x)$, откуда $|N_2(x)| \leq k-a-1$. Возьмем теперь произвольную вершину $t \in C_x$. Поскольку $|N(x,t)| = a$, вершина t имеет в точности $k-a$ соседей в $N_2(x)$. Таким образом, $N_2(x)$ содержит как минимум $k-a+1$ вершин (вершина t и ее $k-a$ соседей), и справедливо $|N_2(x)| \geq k-a+1$. Противоречие. □

Лемма 13. *Не существует вершины $y_b \in U_x$ такой, что $|N(x,y_b)| = b$. Другими словами, для каждой вершины $y \in U_x$ справедливо $|N(x,y)| = a$.*

Доказательство. Предположим, что существует вершина $y_b \in U_x$ такая, что справедливо $|N(x,y_b)| = b$. Таким образом, существует вершина $t \in C_x$ такая, что $y_b \in N(x,t)$. В силу п. (1) леммы 6 имеем $N(x,y_b) = a$. Противоречие. □

Пусть x — вершина такая, что граф Γ и вершина x удовлетворяют условию 1. Рассмотрим подграф Δ_x графа Γ, индуцированный множеством вершин $\{x\} \cup (N(x) \setminus U_x) \cup D_x$. Тогда Γ состоит из трех частей: Δ_x, U_x и C_x.

Лемма 14. *Каждая вершина из Δ_x смежна с каждой вершиной из U_x и не имеет соседей в C_x.*

Доказательство следует из лемм 10 и 11. □

Лемма 15. *Для любых двух вершин $u_1, u_2 \in \Delta_x$ справедливо равенство $|N(u_1,u_2)| = b$.*

Доказательство. Отметим, что справедливо включение $U_x \subset N(x)$. В силу п. (3) леммы 5 имеем включение $U_x \subseteq N(u)$ для каждой вершины $u \in D_x$. В силу леммы 11 имеем включение $U_x \subseteq N(z)$ для каждой вершины $z \in N(x) \setminus U_x$. Таким образом, для произвольной пары вершин $u_1, u_2 \in \Delta_x$ таких, что $u_1 \neq u_2$, справедливо включение $U_x \subseteq N(u_1,u_2)$. В силу леммы 12 имеем $|N(u_1,u_2)| \geq |U_x| > a$. □

Лемма 16. *Пусть $z \in \Delta_x$ и $x' \in \Gamma \setminus \{z\}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:
(1) $|N(z,x')| = b$, *если* $x' \in \Delta_x$;
(2) $|N(z,x')| = a$, *если* $x' \notin \Delta_x$;
(3) *мощность множества Δ_x не зависит от выбора вершины x и равна $n^* := \beta + 1$.*

Доказательство. (1) Справедливо в силу леммы 15.

(2) Пусть $x' \notin \Delta_x$. Рассмотрим сначала случай $z = x$. Если $x' \in C_x$, то в силу леммы 8 имеем $|N(z,x')| = |N(x,x')| = a$. Если $x' \in U_x$, то в силу леммы 13 имеем $|N(z,x')| = |N(x,x')| = a$. Таким образом, множество всех вершин, которые имеют a общих соседей с вершиной $z = x$, — это в точности множество $U_x \cup C_x$. Следовательно, справедливы равенства $\alpha = |U_x \cup C_x|$ и $\beta = |\Delta_x| - 1$.

Теперь рассмотрим случай $z \neq x$. В силу (1) каждая вершина из $\Delta_x \setminus \{z\}$ имеет b общих соседей с вершиной z. Отметим, что $|\Delta_x \setminus \{z\}| = |\Delta_x| - 1 = \beta$. Таким образом, каждая вершина из $\Gamma \setminus \Delta_x = U_x \cup C_x$ имеет a общих соседей с вершиной z.

(3) Следует из (2). □

Лемма 17. *Граф Δ_x является сильно регулярным графом с параметрами $(n_x, k_x, \lambda_x, \mu_x)$, где $n_x = |\Delta_x| = \beta + 1$, $k_x = k - |U_x|$ и $\lambda_x = \mu_x = b - |U_x|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольную вершину $x' \in \Delta_x$. Тогда вершина x' имеет $|U_x|$ соседей (в точности, множество U_x) за пределами Δ_x. Следовательно, вершина x' имеет $k - |U_x|$ соседей внутри Δ_x.

Зафиксируем произвольные вершины $x'_1, x'_2 \in \Delta_x$, $x_1 \neq x_2$. Тогда x'_1, x'_2 имеют $|U_x|$ соседей (в точности, множество U_x) за пределами Δ_x. В силу п. (1) леммы 16 вершины x'_1, x'_2 имеют b общих соседей в Γ. Таким образом, вершины x'_1, x'_2 имеют $b - |U_x|$ общих соседей в Δ_x. □

Лемма 18. *Граф Γ и любая его вершина x' удовлетворяет условию* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для любой вершины x' графа Γ в $N_2(x')$ существует вершина t' такая, что $|N(x', t')| = a$. Предположим, что существует вершина x' такая, что для любой вершины t' из $N_2(x')$ справедливо равенство $|N(x', t')| = b$. Поскольку по условию теоремы 1 каждая вторая окрестность несвязна, граф $N_2(x')$ несвязен. В силу несвязности графа $N_2(x')$ общие соседи вершин из разных компонент связности графа $N_2(x')$ лежат в $N(x')$. Возможны следующие два случая. Либо любые две вершины из разных компонент связности графа $N_2(x')$ имеют b общих соседей, либо существует пара вершин t_1, t_2 из разных компонент связности графа $N_2(x')$ такая, что $|N(t_1, t_2)| = a$.

Рассмотрим сначала первый случай. Зафиксируем вершину t_1. Тогда для любой вершины t_2 из другой компоненты связности графа $N_2(x')$ имеет место равенство $N(t_1, t_2) = N(t_1, x')$. Теперь, фиксируя вершину t_2 и делая выбор вершины t_1 произвольным, мы получим, что вершины из $N_2(x')$ имеют в качестве b соседей в $N(x')$ одни и те же b вершин.

В силу леммы 4 справедливо неравенство $b < k$, поэтому в $N(x')$ найдется по крайней мере одна вершина, не имеющая соседей в $N_2(x')$. Таким образом, эта вершина имеет $k - 1$ общих соседей с вершиной x', и для графа Γ справедливо равенство $b = k - 1$. Применим теперь это равенство к графу Δ_x. В силу леммы 17 граф Δ_x является сильно регулярным (напомним, что x — это вершина, для которой граф Γ удовлетворяет условию 1; существование такой вершины показано в лемме 7) с параметрами $k_x = k - |U_x|$ и $\lambda_x = \mu_x = b - |U_x|$. Отсюда в силу равенства $b = k - 1$ граф Δ_x является сильно регулярным с параметрами $(n_x, k_x, k_x - 1, k_x - 1)$. Сильно регулярный граф с таким набором параметров является либо полным графом, и в этом случае $k_x = n_x - 1$, либо объединением изолированных ребер, и в этом случае $k_x = 1$. Во первом случае имеем противоречие с тем, что Δ_x содержит пару несмежных вершин (поскольку D_x не пусто, в качестве пары можно взять вершину x и вершину из D_x). Пусть $k_x = 1$, т. е. Δ_x является объединением изолированных ребер. Заметим сначала, что в этом случае справедливо равенство $|U_x| = k - 1 = b$. С другой стороны, для вершины x' существует в точности $k - 1$ вершин, имеющих с ней a общих соседей. Таким образом, для графа Γ справедливо равенство $\alpha = k - 1$. По построению граф Δ_x состоит из вершины x и всех вершин, имеющих b общих соседей с вершиной x в графе Γ. Это означает, что множество $U_x \cup C_x$ состоит из всех вершин в графе Γ, имеющих a общих соседей с вершиной x. Далее имеем $|U_x| + |C_x| = \alpha = k - 1 = b = |U_x|$, откуда C_x — это пустое множество. Противоречие с тем, что C_x содержит по крайней мере вершину t.

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть существует пара вершин t_1, t_2 из разных компонент связности графа $N_2(x')$ такая, что $|N(t_1, t_2)| = a$. Тогда граф Γ, вершина t_1 и вершина t_2 удовлетворяют условию 1. Заметим, что в C_{t_1,t_2} есть вершина x' такая, что $|N(t_1, x')| = b$. Таким образом, множество B_{t_1,t_2} не пусто, и мы получили противоречие с леммой 8. □

Лемма 19. *Пусть R — бинарное отношение на множестве вершин Γ, определенное по правилу "либо совпадать, либо иметь b общих соседей". Тогда R является отношением эквивалентности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рефлексивность и симметричность очевидны.

Покажем транзитивность. В силу леммы 7 в графе Γ существует вершина такая, что граф Γ и эта вершина удовлетворяют условию 1. В силу леммы 18 граф Γ и каждая его вершина удовлетворяют условию 1. Зафиксируем вершины $x'_1, x'_2, x'_3 \in V(\Gamma)$ такие, что x'_1 имеет b общих соседей с x'_2, а x'_2 имеет b общих соседей с x'_3. В силу леммы 16 вершины x'_1, x'_3 принадлежат множеству $\Delta_{x'_2}$ и имеют b общих соседей. Транзитивность доказана. Таким образом, R — отношение эквивалентности. Лемма доказана.

Теперь мы готовы завершить д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

В силу леммы 19 множество вершин графа Γ может быть разбито на равномощные классы эквивалентности, причем классом эквивалентности для произвольной вершины x будет множество вершин, имеющих b общих соседей с вершиной x, т.е. множество вершин Δ_x. В силу леммы 17 каждый класс эквивалентности индуцирует сильно регулярный граф. В силу леммы 16 пара различных вершин имеет b общих соседей в Γ, если эти вершины лежат в одном классе, и a общих соседей, если эти вершины лежат в различных классах. В силу леммы 14 любые две вершины из произвольного класса эквивалентности Δ в качестве множества общих соседей за пределами Δ имеют соответствующее множество U. Рассмотрим произвольную вершину y из множества U. Поскольку каждая вершина из Δ смежна с каждой вершиной из U, то все вершины из Δ содержатся в $N(y)$. Рассмотрим класс эквивалентности Δ_y. Вершины из Δ лежат за пределами Δ_y и содержатся в $N(y)$, поэтому каждая вершина из Δ_y смежна с каждой вершиной из Δ. Аналогично рассматривая вершину $z \in C$, можно показать, что ребра между классами эквивалентности Δ и Δ_z отсутствуют. Таким образом, произвольные классы эквивалентности Δ_1 и Δ_2 либо соединены всеми возможными ребрами, либо не соединены ни одним ребром.

Рассмотрим граф Γ', множеством вершин которого является множество упомянутых классов эквивалентности, причем два класса смежны в Γ' тогда и только тогда, когда в графе Γ есть ребро между этими классами.

Покажем, что Γ' является сильно регулярным с параметрами (n', k', λ', μ') для некоторых целых положительных n', k', λ', μ'.

Отметим, что Γ' имеет $n' := n/n^*$ вершин.

Рассмотрим произвольную пару различных несмежных вершин Δ_1, Δ_2 в графе Γ и рассмотрим произвольные вершины $y_1 \in \Delta_1$ и $y_2 \in \Delta_2$. В точном графе Деза Γ несмежные вершины y_1 и y_2 имеют как минимум a соседей, при этом выполняется $a > 0$. Из несмежности вершин Δ_1 и Δ_2 в графе Γ' вытекает, что общие соседи вершин y_1 и y_2 в графе Γ лежат вне множеств Δ_1 и Δ_2. Рассмотрим произвольную вершину $z \in N(y_1, y_2)$, тогда вершина Δ_z является общим соседом вершин Δ_1 и Δ_2 в графе Γ', и, следовательно, Γ' связен. Теперь для доказательства регулярности Γ' достаточно установить, что произвольные смежные в Γ' вершины имеют одинаковую валентность. Рассмотрим пару смежных вершин $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \in V(\Gamma')$. Посчитаем число соседей Γ вершин $x_1, x_2 \in V(\Gamma)$. Имеем $|N_\Gamma(x_1)| = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})||\Delta_{x_1}| + k_{x_1}$ и $|N_\Gamma(x_2)| = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})||\Delta_{x_2}| + k_{x_2}$. Поскольку $|N_\Gamma(x_1)| = k = |N_\Gamma(x_2)|$, получаем $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})||\Delta_{x_1}| + k_{x_1} = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})||\Delta_{x_2}| + k_{x_2}$. В силу п. (3) леммы 16 справедливо $|\Delta_{x_1}| = |\Delta_{x_2}| = n^*$. Таким образом, получаем $k_{x_1} - k_{x_2} = (|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})| - |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})|)\ n^*$. Поскольку $0 < k_{x_1} < |\Delta_{x_1}|$ и $0 < k_{x_2} < |\Delta_{x_2}|$, мы заключаем $k_{x_1} = k_{x_2}$ и $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1})| = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_2})|$. Таким образом, граф Γ' регулярен. В частности, мы доказали, что значение k_{x_1} не зависит от выбора вершины x_1. Обозначим это число через k^*.

Покажем, что Γ' является реберно регулярным. Рассмотрим пару смежных вершин Δ_{x_1}, $\Delta_{x_2} \in V(\Gamma')$. В силу леммы 16 справедливо равенство $|N_\Gamma(x_1, x_2)| = a$. С другой стороны, число общих соседей вершин $x_1, x_2 \in \Gamma$ равно $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^* + k_{x_1} + k_{x_2}$. Таким образом, имеем $a = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^* + k_{x_1} + k_{x_2} = |N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^* + 2k^*$ и, следовательно, $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})| = (a - 2k^*)/n^* = \lambda'$. В частности, $a = \lambda' n^* + 2k^*$.

Покажем, что Γ' является кореберно регулярным. Рассмотрим пару несмежных вершин $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2} \in V(\Gamma')$. В силу леммы 16 справедливо равенство $|N_\Gamma(x_1, x_2)| = a$. С другой стороны, число общих соседей вершин $x_1, x_2 \in \Gamma$ равно $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^*$. Таким образом, имеем $a =$

$|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})|\ n^*$ и, следовательно, $|N_{\Gamma'}(\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2})| = \frac{a}{n^*} = \mu'$. В частности, $a = \mu' n^*$.

Приравнивая два выражения для параметра a, получим $\lambda' n^* + 2k^* = \mu' n^*$ и, следовательно, $(\mu' - \lambda')n^* = 2k^*$. Поскольку $0 < k^* < n^*$, имеем $n^* = 2k^*$ и, следовательно, $n^* - 1$ и k^* взаимно просты. Рассмотрим соотношение на параметры сильно регулярного графа Δ. Имеем $\lambda^*(n^* - 1) = k^*(k^* - 1)$. В силу взаимной простоты чисел $n^* - 1$ и k^* заключаем, что $n^* - 1$ делит $k^* - 1$. В силу того что $k^* < n^*$, получили противоречие. □

3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим точный граф Деза Γ с параметрами (n, k, b, a), который является реберно регулярным с параметрами (n, k, λ) и содержит вершину x с несвязной второй окрестностью.

Если Γ обладает свойством $b = k$, то лемма 3 покрывает этот случай и дает описание таких графов. А именно граф Γ является расширением $\Gamma_1[\Gamma_2]$, где Γ_1 сильно регулярен с условием $\lambda = \mu$ и Γ_2 — коклика размера $s \geq 2$. Легко видеть, что вторая окрестность каждой вершины в этом случае несвязна.

Предположим, что справедливо неравенство $b < k$. В этом предположении докажем ряд вспомогательных лемм и получим противоречие.

Лемма 20. *Граф Γ и вершина x удовлетворяют условию 1, т. е. существует вершина $t \in N_2(x)$ такая, что $|N(x, t)| = a$.*

Доказательство. Предположим, что равенство $|N(x, t)| = b$ справедливо для любой вершины $t \in N_2(x)$. Следовательно, каждая вершина y, такая что равенство $|N(x, y)| = a$ справедливо, принадлежит $N(x)$ (поскольку граф Γ не является сильно регулярным, существует по крайней мере одна вершина $y \in V(\Gamma)$, такая что $|N(x, y)| = a$). В силу реберной регулярности графа Γ каждая вершина из $N(x)$ имеет $\lambda = a$ общих соседей с вершиной x и $N(x)$ состоит из всех вершин графа Γ, которые имеют a общих соседей с вершиной x. Таким образом, параметр α (см. лемму 2) равен $|N(x)| = k$. Также в силу реберной регулярности графа Γ для произвольной вершины $x' \in V(\Gamma)$ окрестность $N(x')$ состоит из всех вершин графа Γ, имеющих a общих соседей с вершиной x'. Таким образом, для любой вершины $x' \in V(\Gamma)$ вторая окрестность $N_2(x')$ состоит из всех вершин графа Γ, имеющих b общих соседей с вершиной x', и граф Γ является сильно регулярным. Противоречие. □

Лемма 21. *Справедливо равенство $\lambda = a$.*

Доказательство. В силу леммы 20 граф Γ и вершина x удовлетворяют условию 1, поскольку существует вершина $t \in N_2(x)$ такая, что справедливо равенство $|N(x, t)| = a$. Следовательно, в силу п. (1) леммы 6 равенство $|N(x, y)| = a$ справедливо для всех $y \in N(x, t)$. В силу реберной регулярности графа Γ мы имеем $\lambda = a$. □

Зафиксируем произвольную вершину $t \in N_2(x)$ такую, что выполняется $|N(x, t)| = a$.

Лемма 22. *Все вершины из $C_{x,t}$, имеющие a общих соседей с вершиной x, имеют одних и тех же общих соседей с вершиной x.*

Доказательство. Предположим, что существует вершина $t' \in C_{x,t}$ такая, что выполнены условия $|N(x, t')| = a$ и $N(x, t') \neq N(x, t)$. В силу п. (1) леммы 5 для каждой вершины $u \in D_{x,t}$ справедливо включение $N(x, t) \subseteq N(x, u)$. Поскольку вершины t и t' принадлежат одной и той же компоненте связности графа $N_2(x)$, имеем равенство $C_{x,t} = C_{x,t'}$ и, следовательно, $D_{x,t} = D_{x,t'}$. Таким образом, снова по п. (1) леммы 5 справедливо включение $N(x, t') \subseteq N(x, u)$ для каждой вершины $u \in D_{x,t'} = D_{x,t}$. Теперь мы можем заключить, что для всех $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ выполнено соотношение $|N(u_1, u_2)| \geq |N(x, t) \cup N(x, t')| > a$. Это означает, что для любых различных вершин $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ выполнено равенство $|N(u_1, u_2)| = b$. В силу реберной регулярности графа Γ и условия $\lambda = a$ мы можем заключить, что для любых различных вершин $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ справедливо $u_1 \not\sim u_2$ и, следовательно, $D_{x,t}$ — это коклика. Таким образом, $b = k$, противоречие. □

Лемма 23. *Компонента $C_{x,t}$ содержит вершину t_b такую, что $|N(x, t_b)| = b$.*

Доказательство. Предположим, что для любой вершины $t' \in C_{x,t}$ выполнено равенство $|N(x, t')| = a$. В силу леммы 22 каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $C_{x,t}$. В силу п. (3) леммы 5 каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $D_{x,t}$. Таким образом, каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$. В силу леммы 21 справедливо равенство $\lambda = a$. Отсюда каждая вершина из $N(x)$ имеет $\lambda = a$ соседей в $N(x)$ и $k - a - 1$ соседей в $N_2(x)$. Поскольку каждая вершина из $N(x, t)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$ и справедливо включение $N(x, t) \subseteq N(x)$, мы заключаем, что каждая вершина из $N(x)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$ и, следовательно, $b = k$. Противоречие. Лемма доказана.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 2.

Пусть $B_{x,t} := \{r \in C_{x,t} \mid |N(x, r)| = b\}$ — множество всех вершин из $C_{x,t}$, имеющих b общих соседей с вершиной x. Для доказательства теоремы 2 достаточно рассмотреть следующие два случая и получить противоречие в каждом из них.

1) Для любых вершин $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$ выполнено равенство $|N(r, u)| = b$.

Зафиксируем вершину $r \in B_{x,t}$ и вершину $u \in D_{x,t}$. В силу того, что выбор вершин r и u произволен, для любых $r_1, r_2 \in B_{x,t}$ и для любых $u_1, u_2 \in D_{x,t}$ справедливо равенство $N(r_1, u_1) = N(r_2, u_2)$. Таким образом, в $N(x)$ существует подмножество из b вершин, являющееся множеством общих соседей произвольной пары вершин r, u, где $r \in B_{x,t}$ и $u \in D_{x,t}$. Обозначим это множество через W.

В силу п. (1) леммы 5 для каждой вершины $t' \in C_{x,t} \setminus B_{x,t}$ и для каждой вершины $u' \in D_{x,t}$ справедливо включение $N(x, t') \subseteq N(x, u')$. В силу леммы 22 в W найдется вершина, которая смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$. В силу реберной регулярности графа Γ мы можем заключить, что каждая вершина из $N(x)$ смежна с каждой вершиной из $N_2(x)$ и, следовательно, $k = b$. Противоречие.

2) Существуют вершина $r \in B_{x,t}$ и вершина $u \in D_{x,t}$ такие, что справедливо равенство $|N(r, u)| = a$. Отметим, что выполняется включение $N(x, r) \cap N(x, u) \subseteq N(x)$. Таким образом, справедлива оценка $k = |N(x)| \geq |N(x, r) \cup N(x, u)| = |N(x, r)| + |N(x, u)| - |N(x, r) \cap N(x, u)| = b + b - |N(r, u)| = 2b - a$. Следовательно, $a \geq 2b - k$.

Оценим параметр a с другой стороны. Сначала мы покажем, что граф $D_{x,t}$ не содержит треугольников. Рассмотрим произвольную пару смежных вершин $u_1, u_2 \in D_{x,t}$. Отметим, что справедливы включения $N(x, t) \subseteq N(u_1, t)$ и $N(x, t) \subseteq N(u_2, t)$. Таким образом, $|N(u_1, u_2)| \geq |N(x, t)| = a$. Но в силу реберной регулярности графа Γ мы имеем $|N(u_1, u_2)| = \lambda = a$. Следовательно, вершины u_1, u_2 не имеют общих соседей в $D_{x,t}$, и поэтому $D_{x,t}$ — граф без треугольников. Также отметим, что $D_{x,t}$ — регулярный граф валентности $k - b$. Таким образом, $|E(D_{x,t})| = \dfrac{(k-b)|D_{x,t}|}{2}$. В силу леммы 1 справедливо неравенство $|E(D_{x,t})| \leq \dfrac{|D_{x,t}|^2}{4}$. Зафиксируем вершину из $z \in N(x, t)$. В силу п. (1) леммы 6 вершина z имеет a соседей в $N(x)$, смежна с вершиной x и имеет по крайней мере одного соседа в $C_{x,t}$. В силу п. 3 леммы 5 вершина z смежна с каждой вершиной $D_{x,t}$. Поскольку z имеет k соседей в Γ, то справедливо неравенство $|D_{x,t}| \leq k - a - 2$. Таким образом, имеем $2(k-b) \leq |D_{x,t}| \leq k - a - 2 \leq k - (2b - k) - 2 = 2(k-b) - 2$. Противоречие. □

4. Доказательство теоремы 3

Зафиксируем параметры (n, k, b, a) графа Γ и μ в качестве параметра кореберной регулярности. Если выполняется $b = k$, то в силу леммы 4 граф Γ является реберно регулярным и, следовательно, сильно регулярным, что противоречит условию теоремы. Далее будем считать, что $b < k$.

Зафиксируем вершину $y_1 \in N_2(x)$. Обозначим через C_{y_1} компоненту связности в $N_2(x)$, содержащую вершину y_1. Выберем произвольную вершину $y_2 \in N_2(x) \setminus C_{y_1}$. Тогда общие соседи вершин y_1, y_2 принадлежат $N(x)$. Заметим, что вершины y_1, y_2 имеют как минимум a общих соседей. Поскольку $|N(x, y_1)| = \mu$ и $|N(x, y_2)| = \mu$, справедливо $N(x, y_1) = N(x, y_2) = N(y_1, y_2)$. Далее, фиксируя вершину y_2 и делая выбор вершины y_1 произвольным, мы получим, что для любых $y_1, y_2 \in N_2(x)$ справедливо равенство $N(x, y_1) = N(x, y_2)$. Другими словами, вершины из $N_2(x)$ имеют одних и тех же μ соседей в $N(x)$. Обозначим через M_x это множество общих соседей.

Достаточно рассмотреть два случая: $\mu = a$ и $\mu = b$.

1) Пусть справедливо $\mu = a$. В силу кореберной регулярности графа Γ мы имеем $|N(x, y)| = \mu = a < b$ для каждой вершины $y \in N_2(x)$. Поскольку $|M_x| = \mu = a < b \le k$, множество M строго содержится в $N(x)$. Отметим, что вершины из $N(x) \setminus M_x$ не имеют соседей в $N_2(x)$. Таким образом, в силу регулярности графа Γ, если $x' \in N(x) \setminus M_x$, то справедливо $N(x') = \{x\} \cup (N(x) \setminus \{x'\})$ и, следовательно, $b = k - 1$.

Пусть A — произвольная связная компонента графа $N_2(x)$. Покажем, что A — клика размера $k - \mu + 1$. Каждая вершина из A имеет μ соседей в $N(x)$ и $k - \mu$ соседей в A. Таким образом, в A содержится не менее $k - \mu + 1$ вершин. Предположим, что A содержит пару несмежных вершин. Тогда A содержит пару вершин x_1, x_2 таких, что расстояние между ними в графе A равно 2. Таким образом, справедливо $|N(x_1, x_2)| \ge |M_x| + 1 \ge \mu + 1 > \mu = a$. Противоречие с тем, что Γ является кореберно регулярным.

Отметим, что граф $\{x\} \cup (N(x) \setminus M_x)$ также является кликой размера $k - \mu + 1$. Следовательно, мы можем мыслить граф Γ как соединение графа M с графом, представляющим собой объединение $t \ge 3$ изолированных клик размера $k - \mu + 1$.

Пусть A — клика размера $k - \mu + 1$. Зафиксируем вершину $y \in M_x$ и вершину $z \in A$. Посчитаем число общих соседей вершин y и z. Для этого достаточно посчитать общих соседей внутри A и снаружи A. Число общих соседей внутри A равно $k - \mu$, а число общих соседей снаружи A равно $k - (n - \mu)$. Действительно, вершина y имеет в качестве соседей все $n - \mu$ вершин вне M_x и следовательно, $k - (n - \mu)$ соседей внутри M_x. Вершина z смежна с каждой вершиной M_x. Таким образом, $|N(y, z)| = k - \mu + k - (n - \mu) = 2k - n$. Поскольку клик как минимум три, существуют по крайней мере две клики, отличных от A. Поскольку эти клики не пусты, существуют как минимум две вершины (по одной в каждой клике), которые смежны с y и не смежны с z. Следовательно, справедливо неравенство $|N(y, z)| \le k - 2 < k - 1 = b$, и мы заключаем, что $|N(y, z)| = a = \mu$. Таким образом, имеем $2k - n = \mu$ и, следовательно, $k - \mu = n - k$. Отсюда число вершин в каждой клике равно $n - k + 1$. Но множество вершин по крайней мере в одной клике есть подмножество в $N_2(x)$, и справедливо равенство $|N_2(x)| = n - k - 1$. Мы получили противоречие в случае $\mu = a$.

2) Пусть $\mu = b$. Достаточно рассмотреть случаи $\mu = k$ и $\mu < k$.

Если $b = \mu = k$, то Γ является кореберно регулярным со свойством $k = \mu$. Хорошо известно (например, [3, с. 3]), что в этом случае Γ является полным многодольным графом с долями одинакового размера и, в частности, сильно регулярным.

Если $b = \mu < k$, то множество $N(x) \setminus M_x$ не пусто, и для каждой вершины $x' \in N(x) \setminus M_x$ справедливо $N(x') = \{x\} \cup (N(x) \setminus \{x'\})$. Таким образом, выполняется $|N(x, x')| = k - 1 = b = \mu$. Это означает, что множество $N(x) \setminus M_x$ состоит только из вершины x'. Кроме того, это означает, что вторая окрестность каждой вершины несвязна, поскольку является объединением изолированных ребер. Поэтому для произвольной вершины графа Γ будут справедливы те же самые рассуждения, что и для вершины x. Граф, индуцированный множеством вершин $\{x, x'\} \cup N_2(x)$, является объединением $(n - k + 1)/2$ изолированных ребер, и число ребер не меньше 3. Обозначим этот граф через L_x, а число ребер в нем — через s. Отметим, что для любой вершины $z \in L_x$ справедливо равенство $L_z = L_x$и и z смежна со всеми вершинами из M_x. Таким образом, множество вершин графа Γ может быть разбито как минимум на 2 подмножества, каждое из которых индуцирует граф, являющийся объединением s изолированных ребер, и любые две вершины из разных подмножеств смежны. Мы получили, что Γ является 2-кликовым расширением полного многодольного графа с долями одинакового размера $s \geq 3$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **А. В. Митянина.** О $K_{1,3}$-свободных точных графах Деза // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 22, № 1. С. 231–234.
2. **Biggs N.** Algebraic graph theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 216 p.
3. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
4. **Brouwer A.E., van Lint J. H.** Strongly regular graphs and partial geometries, enumeration and design // Proc. of the Silver Jubilee Conference at the University of Waterloo / eds. D. M. Jackson and S. A. Vanstone. Toronto: Academic Press, 1984. P. 85–122.
5. **Cioaba S. M., Koolen J. H.** On the connectedness of the complement of a ball in distance-regular graphs // J. Algebraic Combinator. 2013. Vol. 38, iss. 1. P. 191–195.
6. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson, S. Fernando, W. H. Haemers, D. Hardy, J Hemmeter // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
7. **Diestel R.** Graph theory. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 410 p.
8. Second neighbourhoods of strongly regular graphs / A. D. Gardiner, C. D. Godsil., A. D. Hensel, G. F. Royle // Discrete Math. 1992. Vol. 103. P. 161–170.

Поступила 10.12.2015

Горяинов Сергей Викторович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
преподаватель
Челябинский государственный университет
e-mail: 44g@mail.ru

Исакова Галина Сергеевна
студент
Челябинский государственный университет
e-mail: carleink@gmail.com

Кабанов Владислав Владимирович
д-р. физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Шалагинов Леонид Викторович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Челябинский государственный университет
e-mail: leonidshalaginov@rambler.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.911

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В АЛГЕБРЕ C-ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Я. Дерр

Задача Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — производными функций ограниченной вариации «погружается» в пространство обобщенных функций Коломбо. Для коэффициентов — производных ступенчатых функций в явном виде находится решение $\mathcal{R}(\varphi_\mu,\, t)$ задачи Коши в представителях, предел которого при $\mu \to +0$ объявляется решением исходной задачи. Так появляется оператор $\mathbf{T}$, который ставит в соответствие исходной задаче ее решение в виде правильной функции и который определен сначала лишь на плотном множестве. С помощью известной топологической теоремы о продолжении по непрерывности $\mathbf{T}$ продолжается до оператора $\widehat{\mathbf{T}}$ и который определен на всем пространстве функций ограниченной вариации. Решение оказывается правильной функцией.

Ключевые слова: правильные функции, функции ограниченной вариации, распределения, обобщенные функции Коломбо, системы диффереициальных уравнений.

V. Ya. Derr. Differential equations in the algebra of C-generalized functions.

We consider the Cauchy problem for a system of linear differential equations whose coefficients are derivatives of functions of bounded variation. The problem is immersed in the space of Colombeau generalized functions. If the coefficients are derivatives of step functions, we find an explicit solution $\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)$ of the Cauchy problem in terms of representatives, and the limit of the solution as $\mu \to +0$ is defined to be the solution of the original problem. In this way, we obtain a densely defined (on the space of regulated functions) operator $\mathbf{T}$, which associates the Cauchy problem with its solution. Next, using a known topological result on continuous extension, we extend $\mathbf{T}$ to the operator $\widehat{\mathbf{T}}$ defined on the entire space of functions of bounded variation. It turns out that the solution is a regulated function.

Keywords: regulated functions, functions of bounded variation, distributions, Colombeau generalized functions, systems of differential equations.

MSC: 34A30, 34A37, 46F05, 46F10, 26A45

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-62-75

Введение

В работе [1] рассматривается скалярное линейное дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в качестве коэффициента и правой части. Здесь методика работы [1] распространяется на систему $n,\ n \geqslant 1$, таких уравнений.

По традиции (см. пионерские работы [2;3], см также [4–6] и др.) задача Коши для системы линейных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах записывается в виде

$$x' = B'x + f', \quad t \in \mathcal{I}, \quad x(t_0) = x^0. \tag{0.1}$$

Если $n \times n$-матрица B и n-вектор f локально абсолютно непрерывны, то B' и f' локально суммируемы, и задача Коши (0.1) — классическая задача Каратеодори; под ее решением понимается локально абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая уравнению в (0.1) почти всюду. Если B и f не являются локально абсолютно непрерывными, то дифференцирование в (0.1) приходится понимать в каком-либо обобщенном смысле, например, в смысле теории обобщенных функций (распределений), решение, как правило оказывается разрывным, произведение $B'x$ — некорректным; эта запись в (0.1) становится лишь традиционным символом. Авторы процитированных (и многих других) работ, налагая различные условия на B и f, обходят упомянутую проблему каждый по-своему.

В настоящей работе предполагается, что элементы матрицы этой системы и компоненты правой части представляют собой производные в смысле теориии обобщенных функций от *правильных* (см. ниже) функций. Задача (0.1) "погружается" в алгебру обобщенных функций Коломбо (см. ниже; см. также [7;8]), где все необходимые операции корректно определены. Далее, решается вопрос о существовании и некоторых свойствах решений — обобщенных функций Коломбо. Затем с помощью корректно определенного предельного перехода осуществляется переход к решению — обычной функции. На этом пути возникает оператор, который ставит в соответствие паре (B, f) решение задачи (0.1) — обычную функцию. Сначала этот оператор определяется на множестве ступенчатых (B, f), затем он продолжается общий случай.

Центральный результат статьи опирается на следующую теорему о продолженииии отображения по непрерывности из [9, с. 114].

Теорема 1. *Пусть X — топологическое пространство, A — всюду плотное множество в X и $f : X \to Y$ — отображение множества A в регулярное пространство Y. Для того чтобы существовало непрерывное отображение $\widehat{f} : X \to Y$, продолжающее f, необходимо и достаточно, чтобы, каково бы ни было $x \in X$, $f(y)$ стремилось к некоторому пределу в Y, когда y стремится к x, оставаясь в A. Непрерывное продолжение $\widehat{f}$ отображения f на X единственно.*

В отличие от большинства работ, рассматривающих дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций Коломбо (см., например, [10; 11]) мы получаем в качестве решений задачи (0.1) обычные функции. При этом удалось избежать "геометрических" ограничений на коэффициенты (как это сделано в работах, например, [8; 12; 13]).

1. C-обобщенные функции и числа

1.1. Для удобства чтения приведем необходимые сведения из [7;8]. Более подробно см. [1].

Пусть $\mathcal{I} = (\alpha, \beta)$ — промежуток вещественной оси (быть может, полуось или вся ось). Обозначим через $\mathcal{D}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, имеющих компактный в $\mathcal{I}$ носитель (финитных функций). Для $k = 1, 2, \dots$ положим

$$\mathcal{A}_k \doteq \Big\{\varphi \in \mathcal{D} : \int\limits_{\mathcal{I}} \varphi(t)\,dt = 1,\ \ \int\limits_{\mathcal{I}} t^i \varphi(t)\,dt = 0,\ i = 1, 2, \dots, k\Big\}.$$

Множества $\mathcal{A}_k$ непустые; $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots \supset \mathcal{A}_k \supset \dots,$ $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \varnothing$; $\varphi_\mu \doteq \dfrac{1}{\mu}\varphi\Big(\dfrac{t}{\mu}\Big)$, $\mu > 0$. Легко непосредственно убедиться, что $\varphi_\mu \in \mathcal{A}_k$ в том и только том случае, когда $\varphi \in \mathcal{A}_k$.

Через $\mathcal{E}$ обозначим множество отображений $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ таких, что функция $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\varphi, t)$ бесконечно дифференцируема по t при любой фиксированной $\varphi \in \mathcal{A}_1$. Из $\mathcal{E}$ выделим подмножество "умеренных" элементов

$$\mathcal{E}_{mod} \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E} : (\forall [a, b] \subset \mathcal{I})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_N)$$
$$(\exists C,\, \eta)\ \Big(\sup_{t \in [a,b]} \Big|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\Big| \leqslant \frac{C}{\mu^N} \quad (0 < \mu < \eta)\Big)\Big\}.$$

Множество $\mathcal{E}_{mod}$ — алгебра относительно сложения и умножения функций, а $\mathfrak{N} \subset \mathcal{E}_{mod}$,

$$\mathfrak{N} \doteq \Big\{\mathcal{R} \in \mathcal{E}_{mod} : (\forall [a, b] \subset \mathcal{I})\ (\forall m \in \mathbb{N})\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall k \in \mathbb{N},\ k > N)\ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_k)$$
$$(\exists C,\, \eta)\ \Big(\sup_{t \in [a,b]} \Big|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu, t)\Big| \leqslant C\mu^{k-N} \quad (0 < \mu < \eta)\Big)\Big\}$$

— двусторонний идеал этой алгебры. Элементы фактор-алгебры $\mathfrak{G} \doteq \mathcal{E}_{mod}/\mathfrak{N}$ называются *C-обобщенными функциями* (в терминологии Коломбо — *новыми обобщенными функциями* [7]). Таким образом, C-обобщенные функции — это классы эквивалентных отображений $\mathcal{R}(\varphi, t)$: $\mathcal{R}_1 \sim \mathcal{R}_2 \iff \mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2 \in \mathfrak{N}$.

1.2. *Производной элемента* $G \in \mathfrak{G}$ называется класс $\dfrac{dG}{dt}$, содержащий производную $\dfrac{d\mathcal{R}(\varphi,t)}{dt}$, где $\mathcal{R}(\varphi, t)$ — произвольный представитель класса G. C-обобщенные функции бесконечно дифференцируемы.

Бесконечно дифференцируемой функции $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие класс из $\mathfrak{G}$, содержащий в качестве представителя $\mathcal{R}(\varphi, t) = f(t)$. Это отображение из алгебры бесконечно дифференцируемых функций в алгебру $\mathfrak{G}$ инъективно. Образ множества бесконечно дифференцируемых функций при этом вложении обозначим как $\mathfrak{C}^\infty$; $\mathfrak{C}^\infty$ — *подалгебра* в $\mathfrak{G}$. Локально суммируемые функции специальным образом (см. [1]) вкладываются в $\mathfrak{G}$. Образ пространства локально суммируемых (непрерывных) функций при этом вложении обозначим через $\mathfrak{L}$ $(\mathfrak{C})$.

Класс $\mathfrak{T} \in \mathfrak{G}$ называется *распределением*, если существует натуральное число m и локально суммируемая на $\mathcal{I}$ функция f такие, что $\mathfrak{T} = \dfrac{d^m\mathfrak{f}}{dt^m}$, где $\mathfrak{f}$ — класс, порожденный функцией f. Это приводит к известному определению обобщенной функции Соболева — Шварца (распределению). Например, дельта-функция δ определяется как производная от единичной функции $f(t) = 0$ при $t < 0$, $f(t) = 1$ при $t > 0$; при этом оказывается $\mathcal{R}_\delta(\varphi, t) = \varphi(-t)$.

Пространство распределений (вне его связи с $\mathfrak{G}$) с обычной топологией обозначим через $\mathcal{D}'$. Пусть $\mathbf{V}$ — оператор вложения $\mathcal{D}'$ и различных его подмножеств в $\mathfrak{G}$.

Многие трудности в работе с C-обобщенными функциями обусловлены тем, что $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}'$ хоть и являются линейными подпространствами в $\mathfrak{G}$, *но не являются подалгебрами*: класс, порожденный произведением $f_1 \cdot f_2$, вообще говоря, не совпадает с произведением классов, порожденных локально суммируемыми функциями f_1 и f_2; $\delta^2 \in \mathfrak{G}$ есть класс, содержащий $\mathcal{R}(\varphi, t) = \varphi^2(-t)$, но $\delta^2 \notin \mathcal{D}'$ (см. [1]).

1.3 По аналогии с C-обобщенными функциями вводятся C-обобщенные вещественные числа. В алгебре всех функционалов $\mathcal{R} : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{R}$ выделяется подалгебра умеренных элементов, т. е. таких, что

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_1) \ (\exists C, \eta > 0) \quad \Big(|\mathcal{R}(\varphi_\mu)| \leqslant \frac{C}{\mu^N} \ \ (0 < \mu < \eta)\Big);$$

двусторонний идеал в этой алгебре образуют функционалы, обладающие свойством

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \ (\forall k \in N) \ (\forall \varphi \in \mathcal{A}_1) \ (\exists C, \eta > 0) \quad \big(|\mathcal{R}(\varphi_\mu)| \leqslant C\mu^{k-N} \ \ (0 < \mu < \eta)\big).$$

Элементы фактор-алгебры $\widehat{\mathbb{R}}$ умеренных элементов по этому идеалу называются *C-обобщенными вещественными числами.* Это понятие позволяет говорить о значении C-обобщенной функции в точке, которое полностью совпадает со значением функции в точке только для бесконечно дифференцируемой функции.

2. Вспомогательные обозначения, определения и утверждения

2.1. Пусть X — некоторая структура (множество, векторное пространство, алгебра). В дальнейшем $X^{n\times n}$ (X^n) означает $n \times n$-матрицу (n-вектор), элементами которой (компонентами которого) являются элементы X. Таким образом, будем иметь дело с матрицами из

$$\mathfrak{G}^{n\times n}, \quad \mathfrak{C}^{\infty,\, n\times n}, \quad \mathfrak{L}^{n\times n}, \quad \mathfrak{C}^{n\times n}, \quad \mathcal{D}'^{n\times n}, \quad \mathfrak{D}'^{n\times n}, \quad \widehat{\mathbb{R}}^{n\times n}$$

и векторами из

$$\mathfrak{G}^n, \quad \mathfrak{C}^{\infty,\, n}, \quad \mathfrak{L}^n, \quad \mathfrak{C}^n, \quad \mathcal{D}'^n, \quad \mathfrak{D}'^n, \quad \widehat{\mathbb{R}}^n,$$

а также с другими матрицами и векторами подобного рода.

Очевидно, $\mathfrak{G}^{n\times n}$ — алгебра, $\mathfrak{C}^{\infty,n\times n}$ — ее подалгебра. Оператор вложения $\mathcal{D}'^{n}$ $\left(\mathcal{D}'^{n\times n}\right)$ в $\mathfrak{G}^{n}$ $\left(\mathfrak{G}^{n\times n}\right)$ по-прежнему обозначаем одной буквой $\mathbf{V}$; аналогично поступаем и с другими операторами вложения. Так, пишем $\mathfrak{D}'^{n} = \mathbf{V}\mathcal{D}'^{n}$, $\mathfrak{D}'^{n\times n} = \mathbf{V}\mathcal{D}'^{n\times n}$.

2.2. Функция $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ называется *правильной*, если в каждой точке $t \in \mathcal{I}$ существуют конечные односторонние пределы

$$x(t+),\ x(t-), \quad t \in \mathcal{I}. \tag{2.2}$$

Впервые соответствующий англоязычный термин “regulated”, по-видимому, появился в [14]. Переводчик книги [14] (см.[15]) интерпретировал этот термин как “простые”, что совершенно неприемлемо, поскольку этот термин означает функции, принимающие не более чем счетное множество значений. Ряд авторов употребляет для таких функций термин “прерывистые” (см., например, [16]), что также неприемлемо, так как класс правильных функций содержит непрерывные функции. Применяется и термин “линейчатые” ([17]), также, на наш взгляд, не отражающий существо дела. Термин “правильные функции”, по-видимому, ввел переводчик книги [18] Б. П. Пугачев. Этот термин использовался в статье [19], а также в [20–23] и в последующих работах этих авторов.

Непрерывные, кусочно-непрерывные функции, функции ограниченной вариации являются правильными. Правильные функции, у которых кроме пределов (2.2) существуют также пределы $x(\alpha+)$, $x(\beta-)$, являются ограниченными [22] и, следовательно, локально суммируемыми на $\mathcal{I}$. Так как непрерывно дифференцируемая функция интегрируема по правильной функции в смысле Римана — Стилтьеса [22, с. 65], то для производной b' от правильной функции b имеет место представление [1]

$$\mathcal{R}_{b'}(\varphi,\, t) = (RS)\int\limits_{\mathcal{I}-t} \varphi(s)\, db(s+t). \tag{2.3}$$

2.3. Будем рассматривать два пространства правильных функций. Пусть $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ означает множество ограниченных правильных функций, т. е. таких ограниченных функций, что существуют конечные односторонние пределы (2.2), а через $\mathbf{R}(\mathcal{I})$ обозначим множество правильных функций, у которых наряду с пределами (2.2) существуют также пределы

$$x(\alpha+)\ \big(x(-\infty)\big), \quad x(\beta-)\ \big(x(+\infty)\big).$$

Как уже было отмечено, функции из таких множеств ограничены. Очевидно, $\mathbf{R}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$; оба множества являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$. Введем на них норму

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathcal{I}} |x(t)|. \tag{2.4}$$

Для $[a, b] \subset \mathcal{I}$ пространства $\mathbf{R}([a, b]) = \mathbf{R}_b([a, b])$ являются банаховыми относительно нормы (2.4) (см., например, [19;22]). Полнота пространств $\mathbf{R}(\mathcal{I})$, $\mathbf{R}_b(\mathcal{I}])$ относительно этой нормы доказана в [1].

Пусть далее $H(\mathcal{I})$ — множество простых функций $x : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ (ступенчатых) с конечным множеством $\mathcal{T}(x)$ точек разрыва, $H_v(\mathcal{I})$ — множество простых функций с не более чем счетным множеством $\mathcal{T}(x)$ и сходящимся рядом скачков

$$\sum_{t\in\mathcal{T}(x)} |\sigma_t(x)|, \tag{2.5}$$

$H_b(\mathcal{I})$ — множество ограниченных простых функций с возможно расходящимся рядом скачков (2.5). Очевидно, имеют место включения

$$H(\mathcal{I}) \subset H_v(\mathcal{I}) \subset H_b(\mathcal{I}). \tag{2.6}$$

Нормированные пространства с нормой (2.4) обозначаем соответственно через $\mathbf{RH}(\mathcal{I}), \mathbf{RH}_v(\mathcal{I})$ $\mathbf{RH}_b(\mathcal{I})$.

В [15; 19; 22] (см. также [16]) доказано, что пространство $\mathbf{RH}([a,b])$ плотно в пространстве $\mathbf{R}_b([a,b]) = \mathbf{R}([a,b])$. В силу включений (2.6) в $\mathbf{R}([a,b])$ плотны также пространства $\mathbf{RH}_v([a,b]), \mathbf{RH}_b([a,b])$. Для открытого интервала ситуация несколько иная: пространства $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$, $\mathbf{RH}_v(\mathcal{I})$ плотны в пространстве $\mathbf{R}(\mathcal{I})$, однако в пространстве $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ множество $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$ плотным не является. Множество $\mathbf{RH}_b(\mathcal{I})$ плотно в пространстве $\mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ в *топологии равномерной сходимости на отрезках* ([1]).

Обозначение $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$ сохраним за векторным пространством $H_v(\mathcal{I})$ с нормой (см. (2.5))

$$\|x\| \doteq \sup_{t\in\mathcal{I}}|x(t)| + \sum_{t\in\mathcal{T}(x)} |\sigma_t(x)|; \tag{2.7}$$

относительно этой нормы $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$ — банахово пространство.

2.4. Работа с правильными функциями требует некоторой модификации понятия полной вариации. Пусть $x \in \mathbf{R}_b(\mathcal{I})$ $\big(\mathbf{R}(\mathcal{I})\big)$. Рассмотрим разбиение $\mathfrak{d}$ интервала $\mathcal{I}$:

$$\alpha < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < \beta \quad \big(\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\big).$$

Составим сумму

$$v_{\mathfrak{d}}(f) \doteq \sum_{k=1}^{m} |f(t_k-) - f(t_{k-1}+)|.$$

Назовем *полной вариацией* x величину (или символ $+\infty$)

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x) \doteq \sup_{\mathfrak{d}} v_{\mathfrak{d}}(x).$$

Пространство функций, для которых определенная полная вариация конечна, с нормой

$$\|x\| \doteq \sup_{t\in\mathcal{I}}|x(t)| + \bigvee_{\mathcal{I}}(x) \tag{2.8}$$

будет обозначаться как $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$. Нетрудно убедиться (см., например, [23, с. 69, 274]), что $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$ — банахово пространство. Через $\mathbf{CBV}(\mathcal{I})$ будем обозначать множество непрерывных функций ограниченной вариации как подмножество из $\mathbf{R}(\mathcal{I})$.

Заметим, что норма (2.8) в $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$ совпадает с нормой (2.7); следовательно, $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$ — (замкнутое) подпространство пространства $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$. По этой причине $\mathbf{H}_v(\mathcal{I})$ не является плотным в $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$.

Векторное пространство функций, для которых полная вариация конечна, относительно нормы (2.4) полным не является. Обозначим это множество, в котором действует норма (2.4), как $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$. Так как имеют место включения нормированных векторных пространств с нормой (2.4)

$$\mathbf{RH}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{RH}_v(\mathcal{I}) \subset \mathbf{RBV}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{R}(\mathcal{I}),$$

то $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ также плотно в $\mathbf{R}(\mathcal{I})$.

Как известно (см., например, [22, с. 22]), функции $x \in \mathbf{BV}(\mathcal{I})$ можно единственным образом представить в виде

$$x(t) = x_d(t) + x_c(t), \text{где} \quad x_d \in H_v(\mathcal{I}), \quad x_c \in \mathbf{CBV}(\mathcal{I}), \quad x_d(\alpha+) = 0, \tag{2.9}$$

называем x_c *непрерывной*, а x_d *дискретной составляющей функции* x. При этом (см., например, [22, с. 26])

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x) = \bigvee_{\mathcal{I}}(x_d) + \bigvee_{\mathcal{I}}(x_c). \tag{2.10}$$

Так как $\mathbf{BV}(\mathcal{I})$ и $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ как множества представляют собой одно и то же, то о представлении (2.9) можем говорить и для $x \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$.

Пусть $x \in \mathbf{CBV}(\mathcal{I})$, разбиение $\mathfrak{d}$ определяется так: $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta$, $\mathcal{I}_k = (t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, $\mathcal{I}_m = (t_{n-1}, t_n)$; положим

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{m} x(t_k)\chi_{\mathcal{I}_k}(t) \quad \big(\chi_{\mathcal{I}_k} \text{ — характеристическая функция промежутка } \mathcal{I}_k\big). \tag{2.11}$$

По теореме Кантора функция x равномерно непрерывна на любом отрезке из $\mathcal{I}$, а в силу существования пределов $x(\alpha+)$, $x(\beta-)$ можно сделать колебания функции x вблизи α и β сколь угодно малыми. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\mathfrak{d}$, что $w_k(x) \doteq \sup\limits_{t\in\mathcal{I}_k} x(t) - \inf\limits_{t\in\mathcal{I}_k} x(t) < \varepsilon$; m определяется этим ε. Так как (см. [23, с. 128]) $\sum_{k=1}^{m} \chi_{\mathcal{I}_k}(t) = 1$ $(t \in \mathcal{I})$, то $\|x_m - x\|_{\mathbf{R}(\mathcal{I})} < \varepsilon$; кроме того, так как $x_m \in \mathbf{RH}(\mathcal{I})$, то ее полная вариация на $\mathcal{I}$ равна сумме модулей ее скачков (см. [22, с. 26]), и, следовательно,

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(x_m) \leqslant \bigvee_{\mathcal{I}}(x). \tag{2.12}$$

Пусть теперь $x \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$. Представим x согласно (2.9); при этом выполняется равенство (2.10). Как показано в [22, с. 53], существует последовательность $\{x_{dm}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{RH}(\mathcal{I})$ такая, что

$$x_{dm}(t) \rightrightarrows x_d(t), \quad \bigvee_{\mathcal{I}}(x_{dm}) \leqslant \bigvee_{\mathcal{I}}(x_d). \tag{2.13}$$

Таким образом, суммируя сказанное в двух последних абзацах и учитывая соотношения (2.11)–(2.13), приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. *Для любой $x \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$ существует последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{RH}(\mathcal{I})$ такая, что $\|x_m - x\|_{\mathbf{R}(\mathcal{I})} \to 0$ $(m \to \infty)$; при этом выполняется неравенство* (2.12).

Пусть теперь $x = (x_{j\,k})_{j,k=1}^{n}$ — $n \times n$-матричная функция, элементы которой — функции ограниченной вариации. Назовем *полной вариацией x число* $\bigvee\limits_{\mathcal{I}}(x) \doteq \sum\limits_{j,k=1}^{n} \bigvee\limits_{\mathcal{I}}(x_{j\,k})$. При таком соглашении *сохраняют свою силу определения* (2.11), (2.13), *неравенство* (2.12), *а также утверждение предложения* 1, где норма должна быть заменена матричной нормой.

2.5. Пусть $\mathbf{X}$ — одно из пространств, введенных выше. Назовем две функции из $\mathbf{X}$ эквивалентными, если они различаются только своими значениями в точках разрыва. Легко видеть, что введенное отношение действительно является отношением эквивалентности на $\mathbf{X}$. Обозначим через $\widehat{\mathbf{X}}$ фактор-множество по этому отношению эквивалентности (фактор-пространство). На $\widehat{\mathbf{X}}$ вводится обычная норма: если $\widehat{x}$ — класс из $\widehat{\mathbf{X}}$, то полагаем $\|\widehat{x}\| = \inf\limits_{x\in\widehat{x}} \|x\|$. Если пространство $\mathbf{X}$ полное, то и фактор-пространство $\widehat{\mathbf{X}}$ также является полным (см., например, [23, с. 55, 259]). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Пространства $\widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{BV}}(\mathcal{I})$ банаховы. Множества $\widehat{\mathbf{RH}}(\mathcal{I})$, $\widehat{\mathbf{RH}_{\mathbf{v}}}(\mathcal{I}), \widehat{\mathbf{RBV}}(\mathcal{I})$ плотны в пространстве $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$.*

(см. также [23, с. 71, 278, 281]). Справедливо и утверждение в [23, с. 72, 281]).

Предложение 3. *Пространства $\mathbf{X^n}$, $\mathbf{X^{n\times n}}$ полны тогда и только тогда, когда полно пространство $\mathbf{X}$.*

Выбор конкретной векторной или матричной нормы в зависимости от нормы скалярной функции не является существенным. Пусть норма вектора есть сумма норм координатных функций, а норма матрицы — сумма норм элементов этой матрицы. Условимся одинаково обозначать норму скалярной функции из X, норму вектора из X^n и норму матрицы из $X^{n\times n}$; это не приведет ни к какой путанице, так как из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

2.6. Следуя [24], введем в $\mathfrak{G}$ топологию. Пусть K — компактное подмножество в $\mathcal{I}$, $k\in\mathbb{N}$, $\beta>0$. Полагаем

$$Q_{K,k,\beta} \doteq \Big\{G\in\mathfrak{G} : \exists\mathcal{R}\in\mathcal{E}_{mod} \text{ (представитель } G\text{) такой, что} \\ \forall m\leqslant k \sup_{t\in K,\,\varphi\in\mathcal{A}_1}\Big\|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)\Big\|\leqslant\beta\Big\}.$$

Скажем, что множество $\mathfrak{V}\subset\mathfrak{G}$ *открытое*, если для каждого $G\in\mathfrak{V}$ найдутся $\beta>0$, $k\in\mathbb{N}$ и компактное подмножество $K\subset\mathcal{I}$ такие, что $G+Q_{K,k,\beta}\subset\mathfrak{V}$. Эти открытые множества определяют топологию $\mathfrak{G}$. Точнее, семейство $\{G+Q_{K,k,\beta}\}$ образует базу окрестностей $\mathfrak{G}$.

Для $G\in\mathfrak{G}$ полагаем

$$p_{K,k}(G) \doteq \inf\Big\{\beta\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\} : \exists\mathcal{R}\in\mathcal{E}_{mod} \text{ (представитель } G\text{) такой, что} \\ \forall m\leqslant k \sup_{t\in K,\,\varphi\in\mathcal{A}_1}\Big\|\frac{d^m}{dt^m}\mathcal{R}(\varphi_\mu,t)\Big\|\leqslant\beta\Big\}.$$

На прямом произведении $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ рассмотрим фильтр $\mathfrak{U}$, порожденный множествами

$$U_{K,k,\nu} \doteq \{(G,H)\in\mathfrak{G}\times\mathfrak{G} : p_{K,k}(G-H)<\nu\} \quad (\nu>0,\ k\in\mathbb{N},\ K\subset\mathcal{I} \text{ — компактное множество}).$$

Фильтр $\mathfrak{U}$ определяет на $\mathfrak{G}$ *равномерную структуру* (см. [9, с. 201]), которая в свою очередь порождает введенную выше топологию. И хотя эта топология не является отделимой на $\mathfrak{G}$, на $\mathfrak{D}'$ она индуцирует отделимую топологию $\tau^{('')}$, которая сильнее обычной топологии $\tau^{(')}$ пространства $\mathcal{D}'$ (точнее, ее образа в $\mathfrak{D}'$ при вложении $\mathbf{V}$) [24, с. 174].

Пусть ниже $\mathcal{Y}$ означает одно из пространств

$$\mathbf{R}_b(\mathcal{I}),\ \mathbf{R}(\mathcal{I}),\ \widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I}),\ \widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I}),$$

образы этих пространств в $\mathfrak{G}$ при вложении $\mathbf{V}$ будем обозначать соответствующими готическими буквами; так, $\mathfrak{Y}=\mathbf{V}\mathcal{Y}$ (см. также выше обозначение $\mathfrak{L}$). Через $\mathfrak{Y}^{(')}$ обозначим множество производных элементов из $\mathfrak{Y}$; $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Y}^{(')}$ рассматриваем как топологические (векторные) пространства с топологиями, индуцированными из $\mathfrak{G}$ (точнее, уже из $\mathfrak{D}'$).

Обозначим $\mathbf{D}$ — оператор дифференцирования, определенный на $\mathfrak{G}$; точно так же будем обозначать его сужения на $\mathfrak{D}'$ и $\mathfrak{Y}$; таким образом, $\mathfrak{Y}^{(')}=\mathbf{D}(\mathfrak{Y})$.

Пусть τ — топология банахова пространства $\mathcal{Y}$. Так как вложение $\mathbf{V}:\mathcal{Y}\to\mathfrak{Y}$ биективно (инъективность обсуждается в [7], сюръективность следует из определения $\mathfrak{Y}$), то в силу соотношений (см., например, [22, с. 78, 270]) $\mathbf{V}\big(\bigcup_\gamma \mathbf{g}_\gamma\big)=\bigcup_\gamma\big(\mathbf{V}\mathbf{g}_\gamma\big)$ и $\mathbf{V}\big(\bigcap_\gamma \mathbf{g}_\gamma\big)=\bigcap_\gamma\big(\mathbf{V}\mathbf{g}_\gamma\big)$ $\mathbf{V}(\tau)$ образует топологию в $\mathfrak{Y}$, которая сильнее топологии $\tau^{('')}$, индуцированной в $\mathfrak{Y}$ из $\mathfrak{G}$; об этой топологии шла речь выше. Таким образом,

$$\mathbf{V}(\tau)\succ\tau^{('')}\succ\tau^{(')}. \tag{2.14}$$

Как уже отмечалось, второе соотношение в (2.14) доказано в [24, с. 174], первое может быть доказано вполне аналогично.

Так как вложение $\mathbf{V}:\mathcal{Y}\to\mathfrak{Y}$, очевидно, непрерывно в топологиях $(\tau,\mathbf{V}(\tau))$, то оно тем более непрерывно в топологиях $(\tau,\tau^{('')})$ (см. [9, с. 35]); далее, так как оператор дифференцирования $\mathbf{D}$ непрерывен в топологиях $(\tau^{(')},\tau^{(')})$, то он тем более непрерывен в топологиях $(\tau^{('')},\tau^{(')})$.

В дальнейшем будут использоваться пространства $\mathcal{Y}^n$, $\mathfrak{Y}^n$ и др., а также пространства матриц $\mathfrak{G}^{n\times n}$ и др. Топологии, которые порождаются в этих пространствах n-векторов и $n\times n$-матриц, введенных выше топологиями соответствующих пространств скалярных функций, будем обозначать по-прежнему $\tau^{('')}$, $\tau^{(')}$, τ, $\mathbf{V}(\tau)$.

3. Дифференциальные уравнения с коэффициентами из $\mathbf{RH}(\mathcal{I})$ и $\mathbf{RH}_{\mathbf{v}}(\mathcal{I})$

3.1. Рассмотрим задачу (0.1). В отличие от [8], в настоящей работе предполагается, что $B\in\mathcal{Y}^{n\times n}$, $f\in\mathcal{Y}^n$, $x^0\in\mathbb{R}^n$. Так же, как и в [8], задача (0.1) “погружается” в пространство $\mathfrak{G}^n$. А именно, рассматривается задача

$$\mathfrak{x}'=\mathfrak{B}'(t)\circ\mathfrak{x}+\mathfrak{f}'(t),\quad t\in\mathcal{I},\quad \mathfrak{x}(t_0)=x^0, \tag{3.1}$$

где $\mathfrak{B}=\mathbf{V}B$, $\mathfrak{f}=\mathbf{V}f$, $x^0\in\mathbb{R}^n$ (ср.[1]).

Задаче (3.1) соответствует задача в представителях

$$R'(\varphi,t)=R_{\mathfrak{B}'}(\varphi,t)R(\varphi,t)+R_{\mathfrak{f}'}(\varphi,t),\quad R(\varphi,t_0)=x^0\quad(t_0\in\mathcal{I}), \tag{3.2}$$

$\big(R_{\mathfrak{B}'}(\varphi,t)$ — $n\times n$-матрица, $R(\varphi,t_0)$, $R(\varphi,t)$ — n-векторы$\big)$. Пусть задача в представителях (3.2) имеет умеренное решение $R(\varphi,t)$, которое является представителем решения $\mathfrak{x}\in\mathfrak{G}^n$ задачи (3.1), и существует обычная n-вектор-функция x (возможно, из $\mathcal{Y}^n$) такая, что

$$x(t)\doteq\lim_{\mu\to 0}R(\varphi_\mu,t). \tag{3.3}$$

Эту n-вектор-функцию естественно назвать *решением задачи* (0.1).

Обозначим через $\mathbf{C}:\mathfrak{G}^{n\times n}\times\mathfrak{G}^n\to\mathfrak{G}^n$ оператор, который ставит в соответствие задаче Коши (3.1) (т. е. паре $(\mathfrak{B},\,\mathfrak{f})$) ее решение $\mathfrak{x}$ (такое решение существует в силу предположения о существовании умеренного решения задачи в представителях (3.2)); этот оператор естественно назвать *оператором задачи Коши*); $\mathbf{C}$ — заведомо нелинейный оператор. Через $\mathbf{P}:\mathfrak{G}^n\to\mathcal{Y}^n$ обозначим оператор, который ставит в соответствие решению $\mathfrak{x}$ функцию x, определяемую соотношением (3.3) (если таковая существует). Если в (3.1) $\mathfrak{f}=0$, то считаем, что $\mathbf{C}:\mathfrak{G}^{n\times n}\to\mathfrak{G}^n$. Таким образом, нуждается в доказательстве не только непрерывность операторов $\mathbf{C}$ и $\mathbf{P}$ в топологиях соответственно $(\tau^{(')},\tau^{('')})$ и $(\tau^{('')},\tau)$, но и (прежде всего) их существование.

Пусть далее $\mathbf{T}=\mathbf{PCDV}$. Тогда $\mathbf{V}$ переводит пару $(B,f)\in\mathcal{Y}^{n\times n}\times\mathcal{Y}^n$, порождающую задачу Коши (0.1), в пару $(\mathfrak{B},\,\mathfrak{f})\in\mathfrak{Y}^{n\times n}\times\mathfrak{Y}^n$, $\mathbf{D}$ переводит пару $(\mathfrak{B},\,\mathfrak{f})$ в пару $(\mathfrak{B}',\,\mathfrak{f}')\in\mathfrak{Y}^{(')n\times n}\times\mathfrak{Y}^{(')n}$, $\mathbf{C}$ переводит пару $(\mathfrak{B}',\,\mathfrak{f}')$, порождающую задачу Коши (3.1), в решение $\mathfrak{x}$ этой задачи; наконец, $\mathbf{P}$ переводит представитель этого решения в решение x задачи (0.1). Таким образом, оператор $\mathbf{T}:\mathcal{Y}^{\mathbf{n\times n}}\times\mathcal{Y}^{\mathbf{n}}\to\mathcal{Y}^{\mathbf{n}}$ в случае, если он существует, ставит в соответствие исходной задаче Коши (0.1) ее решение $x:\ x=\mathbf{T}(B,f)$. Об операторах $\mathbf{D}$ и $\mathbf{V}$ речь шла выше. Непосредственное исследование по отдельности операторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{C}$ представляется весьма затруднительным. По этой причине в дальнейшем изучаем непосредственно оператор $\mathbf{T}:\mathcal{Y}^{n\times n}\times\mathcal{Y}^n\to\mathcal{Y}^n$, не расчленяя его в произведение операторов.

Подход, предлагаемый в настоящей работе, заключается в том, что существование (и определенного рода непрерывность) оператора $\mathbf{T}$ доказывается сначала для плотного в $\mathcal{Y}$ множества, а затем с помощью теоремы 1 этот оператор продолжается до непрерывного на все пространство $\mathcal{Y}$ (см. [9, с. 114]).

3.2. Рассмотрим однородную задачу

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x(t_0)=x^0,\quad A(t)=B'(t), \tag{3.4}$$

где $B(t)$ — ступенчатая функция (из $\mathbf{RH}^{n\times n}(\mathcal{I})$). Пусть $\mathcal{T}(B)\doteq\{c_1,\dots,c_p\}$ — множество точек разрыва B, $S_i(B)\doteq S_i\doteq\big(\sigma_{ikj}\big)_{k,j=1}^n$ — матрица ее скачков в точке c_i, $i\in\{1:p\}$, где запись $i \in \{k : l\}$ означает, что i может принимать (принимает, пробегает) значения $k,\ k+1,\dots,l,\ k \leqslant l$; при $k > l\ \ \{k : l\} = \varnothing$; пусть далее $\rho(t) = 0$ при $t < 0,\ \rho(t) = 1$ при $t > 0$ (при $t = 0$ значение ρ не определяем). Тогда можно представить

$$B(t) = \sum_{i=1}^{p} S_i \rho(t - c_i), \quad A(t) = \sum_{i=1}^{p} S_i \delta(t - c_i).$$

Пусть сначала матрица B имеет одну точку разрыва, $\mathcal{T}(B) = \{c\}$, $\ S = \big(\sigma_{kj}\big)_{k,j=1}^{n}$ — матрица ее скачков в точке c. Уравнение (3.4) в этом случае принимает вид

$$\dot{x} = S\delta(t - c)\, x, \quad x(t_0) = x^0 \quad (t_0 < c). \tag{3.5}$$

Решение уравнения в представителях (ср. (3.2))

$$R = e^{S\int\limits_{t_0}^{t} \varphi\left(-(s-c)\right) ds} x^0. \tag{3.6}$$

При $t_0 < t < c$ и $\mu \to +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{S\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\mu}\varphi\left(-\frac{s-c}{\mu}\right) ds} x^0 = e^{-S\int\limits_{\frac{c-t_0}{\mu}}^{\frac{c-t}{\mu}} \varphi(s)\, ds} x^0 \to e^{S\cdot 0} x^0 = Jx^0 = x^0, \tag{3.7}$$

где J — единичная $n \times n$-матрица; при $t = c$ и $\mu \to +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{S\int\limits_{t_0}^{c} \frac{1}{\mu}\varphi(-\frac{s-c}{\mu})\, ds} x^0 = e^{-S\int\limits_{-\frac{t_0-c}{\mu}}^{0} \varphi(s)\, ds} x^0 \to e^{S\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(s)\, ds} x^0. \tag{3.8}$$

Заметим, что компоненты решения x в точке разрыва коэффициента суть обобщенные числа, $x(c) \in \widehat{\mathbb{R}}^n$; при $t > c$ и $\mu \to +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{S\int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\mu}\varphi(-\frac{s-c}{\mu})\, ds} x^0 = e^{-S\int\limits_{-\frac{t_0-c}{\mu}}^{-\frac{t-c}{\mu}} \varphi(s)\, ds} x^0 \to e^{S\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\, ds} x_0 = e^S x^0. \tag{3.9}$$

Рассмотрим отдельно случай, когда начальное условие задается в точке разрыва коэффициента, $t_0 = c$; ввиду сказанного выше естественно считать, что $x^0 \in \widehat{\mathbb{R}}^n$. Теперь при $\mu \to +0$

$$R(\varphi_\mu, t) = e^{S\int\limits_{c}^{t} \frac{1}{\mu}\varphi(-\frac{s-c}{\mu})\, ds} x^0 = e^{-S\int\limits_{0}^{-\frac{t-c}{\mu}} \varphi(s)\, ds} x^0 \to \begin{cases} e^{-S\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(s)\, ds} x^0 & \text{при } t < c, \\ e^{S\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(s)\, ds} x^0 & \text{при } t > c. \end{cases} \tag{3.10}$$

Для удобства ссылок сформулируем сказанное для случая одной точки разрыва матрицы B в виде следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть $t_0 \leqslant c$. Тогда решение задачи (3.5) в смысле п.* **3.1** (*см.*(3.3))

а) при $t^0 < c$ дается равенствами $x(t) = \big(\mathbf{T}(B)\big) = \begin{cases} x^0 & \textit{при } \ t_0 \leqslant t < c, \\ e^{S\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(s)\, ds} x^0 & \textit{при } \ t = c, \\ e^S x^0 & \textit{при } \ t > c; \end{cases}$

б) при $t_0 = c$ — равенствами $x(t) = \big(\mathbf{T}(B)\big) = \begin{cases} e^{-S\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(s)\, ds} x^0 & \textit{при } \ t < c, \\ e^{S\int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(s)\, ds} x^0 & \textit{при } \ t > c, \quad \varphi \in \mathcal{A}_1. \end{cases}$

Доказательство следует из соотношений (3.6)–(3.10). □

Замечание. Решение $x \in \mathcal{Y}^n$ является обычной функцией, только если пренебречь его значениями в точке разрыва коэффициента B и не задавать начальные условия в этой точке.

В связи с этим замечанием поступим следующим образом (см. [1]). Пусть теперь $\mathcal{Y}$ означает одно из пространств $\widehat{\mathbf{R}}_b(\mathcal{I})$ или $\widehat{\mathbf{R}}(\mathcal{I})$ и $t_0 < c$. Тогда лемма 1 может быть переформулирована следующим образом.

Лемма 1bis. Пусть $B \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$; тогда решение задачи (3.5) в смысле п. **3.1** (см.(3.3)) принадлежит $\widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$ и дается равенствами $x(t) = \big(\mathbf{T}(B)\big) = \begin{cases} x^0 & \text{при} \ \ t_0 \leqslant t < c, \\ e^S x^0 & \text{при} \ \ t > c; \end{cases}$

3.3. Рассмотрим теперь общий случай задачи (3.4) при $B \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$.

Теорема 2. *Решение задачи* (3.4) *в смысле п.* **3.1** (*см.*(3.3)) *принадлежит* $\widehat{H}^n$ *и дается равенствами* $x(t) = \big(\mathbf{T}(B)\big) = \begin{cases} x^0 & \text{при} \ \ t_0 \leqslant t < c, \\ e^{S_i}e^{S_{i-1}}\dots e^{S_1}x^0 & \text{при} \ \ c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{1:p-1\}, \\ e^{S_p}e^{S_{p-1}}\dots e^{S_1}x^0 & \text{при} \ \ t > c_p. \end{cases}$

Доказательство проведем индукцией по числу p точек разрыва. При $p = 1$ утверждение теоремы следует из леммы 1bis. Предположим, что теорема верна для $\mathcal{T}(B) = \{c_1, \dots, c_p\}$ при некотором p, и пусть теперь $\mathcal{T}(B) = \{c_1, \dots, c_p, c_{p+1}\}$. Достаточно доказать третье равенство. Полагаем
$$x^{0'} \doteq e^{S_p}e^{S_{p-1}}\dots e^{S_1}x^0, \quad c_p < t_{0'} < c_{p+1},$$
и будем решать исходную задачу на множестве $t > t_{0'}$ при начальном условии $x(t_{0'}) = x^{0'}$. Тогда по лемме 1bis при $t < c_{p+1}$ $\quad x(t) = x^{0'}$, а при
$$t > c_{p+1} \qquad x(t) = e^{S_{p+1}}x^{0'} = e^{S_{p+1}}e^{S_p}e^{S_{p-1}}\dots e^{S_1}x^0.$$
Таким образом, утверждение теоремы верно для $\mathcal{T}(B) = \{c_1, \dots, c_p, c_{p+1}\}$. По индукции утверждение теоремы верно для любого натурального p. □

Для удобства дальнейшей записи положим $c_0 = \alpha$, $c_{p+1} = \beta$, $S_0 = S_{p+1} = O$, O — нулевая $n \times n$-матрица.

Следствие. *Решение задачи* (3.4) *в смысле п.* **3.1** (*см.*(3.3)) *может быть записано одной строкой в виде*
$$x(t) = \big(\mathbf{T}(B)\big) = e^{S_i}e^{S_{i-1}}\dots e^{S_1}e^{S_0}x^0 \ \ \text{при} \ \ c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0:p\}.$$
Фундаментальную матрицу X системы из (3.4) *и ее матрицу Коши C можно представить в виде*
$$X(t) = e^{S_i}e^{S_{i-1}}\dots e^{S_1}e^{S_0} \ \ \text{при} \ \ c_i < t < c_{i+1}, \ i \in \{0:p\}, \quad C(t,s) = X(t)X^{-1}(s) \ \ (s \leqslant t). \quad (3.11)$$

3.4. Рассмотрим неоднородную задачу (0.1) при $B \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$, $f \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n}(\mathcal{I})$. Не ограничивая общности, можно считать, что точки разрыва B и f совпадают: $\mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(f) = \{c_1, \dots, c_p\}$; пусть далее $s_i(f)$ означает вектор скачков f в точке разрыва c_i, $i \in \{1:p\}$.

Обычным путем сведем неоднородную задачу Коши (0.1) к задаче Коши для однородной системы: введем дополнительную неизвестную функцию $x_{n+1} = 1$; далее полагаем
$$y = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^\top, \quad y^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, 1)^\top$$
и введем $(n+1)\times(n+1)$-матрицу $M \doteq \left(\begin{array}{c|c} B & f \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$; в итоге задача Коши (0.1) примет вид
$$y' = M'y, \quad t \in \mathcal{I}, \quad y(t_0) = y^0; \qquad (3.12)$$

при этом матрица скачков $S_i(M)$ матрицы M в точке разрыва c_i будет иметь вид $S(M) \doteq \left(\begin{array}{c|c} S_i(B) & s_i(f) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $\ i \in \{1:p\}$.

Применяя теорему 2 к однородной задаче (3.12), с учетом введенных обозначений сразу получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Решение задачи* (0.1) *в смысле п.* **3.1** (*см.* (3.3)) *принадлежит* $\widehat{\mathbf{RH}}^n(\mathcal{I})$ *и дается равенствами* $x(t) = \big(\mathbf{T}(B,f)\big)(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\big)^\top$, *где*

$$y(t) = e^{S_i(M)} e^{S_{i-1}(M)} \dots e^{S_1(M)} e^{S_0(M)} y^0 \ \ \text{\textit{при}} \ \ c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0:p\}, \quad y \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n+1}(\mathcal{I}).$$

Теорема 4. *Решение x задачи* (0.1) *в смысле п.* **3.1** (*см.*(3.3)) *при условиях настоящего пункта можно представить обычным способом в виде*

$$x(t) = e^{S_i} e^{S_{i-1}} \dots e^{S_1} e^{S_0} x^0 + \int\limits_{t_0}^{t} C(t,s)\, df(s) \ \ \text{\textit{при}} \ \ c_i < t < c_{i+1}, \quad i \in \{0:p\},$$

где матрица Коши $C(t,s)$ определяется соотношениями (3.11), *а интеграл понимается в смысле работы* [21].

Доказательство заключается в записи решения уравнения в представителях (3.2) по формуле Коши, применении равенства (2.3) и предельной теоремы 12 из [21]. □

Сказанное в этом разделе практически без изменений переносится на случай, когда коэффициенты из $\widehat{\mathbf{RH}}$ заменяются коэффициентами из $\widehat{\mathbf{RH}_\mathbf{v}}$.

4. Дифференциальные уравнения с коэффициентами из $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$

4.1. Рассмотрим однородную систему (3.4) при $B \in \widehat{\mathbf{RBV}}^{n\times n}(\mathcal{I})$.

Теорема 5. *Существует непрерывный оператор* $\widehat{\mathbf{T}} : \widehat{\mathbf{RBV}}^{n\times n}(\mathcal{I}) \to \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$ *такой, что решение x задачи* (3.4) *в смысле п.* **3.1** (*см.*(3.3)) *существует, единственно и имеет представление* $x(t) = \big(\widehat{\mathbf{T}}(B)\big)(t)$.

Доказательство. Пусть $B \in \widehat{\mathbf{RBV}}^{n\times n}(\mathcal{I})$. В силу плотности $\widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$ в $\widehat{\mathbf{RBV}}^{n\times n}(\mathcal{I})$ и предложения 1 найдется последовательность $\{B_l\}_{l=1}^\infty \subset \widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$, сходящаяся к B в $\widehat{\mathbf{R}}^{\mathbf{n\times n}}(\mathcal{I})$:

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists L > 0) \quad (\forall l > L) \quad \Big(\|B_l - B\| < \frac{\varepsilon}{2}\Big)$$

при $l, m > L \quad \|B_l - B_m\| < \varepsilon$; пусть $\mathcal{T}(B_l) \bigcap \mathcal{T}(B_m) = \{c_1, c_2, \dots, c_p\} \quad (p = p(l,m))$; найдется натуральное $L_1 \geqslant L$ такое, что при $l, m > L_1$ будут выполняться также неравенства $\|S_i(B_l) - S_i(B_m)\| < \varepsilon$ $(i \in \{1:p\})$, а при $l, m > L_2 \geqslant L_1$ и неравенства $\|e^{S_i(B_l)} - e^{S_i(B_m)}\| < \varepsilon$ $(i \in \{1:p\})$. При этом (см.(2.12))

$$\bigvee_{\mathcal{I}}(B_l) \leqslant \bigvee_{\mathcal{I}}(B) \doteq \mathbf{v} \quad (l = 1, 2, \dots).$$

Согласно вышесказанному при $l, m > L_2$

$$\|\mathbf{T}(B_l) - \mathbf{T}(B_m)\| \leqslant \big\|e^{S_i(B_l)} e^{S_{i-1}(B_l)} \dots e^{S_1(B_l)} e^{S_0(B_l)} - e^{S_i(B_m)} e^{S_{i-1}(B_m)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)}\big\| \cdot \|x^0\|$$

$$\leqslant \big\|e^{S_i(B_l)} e^{S_{i-1}(B_l)} \dots e^{S_1(B_l)} e^{S_0(B_l)} - e^{S_i(B_l)} e^{S_{i-1}(B_m)} \dots e^{S_1(B_m)} e^{S_0(B_m)}$$

$$+ e^{S_i(B_l)}e^{S_{i-1}(B_m)}\dots e^{S_1(B_m)}e^{S_0(B_m)} - e^{S_i(B_l)}e^{S_{i-1}(B_l)}\dots e^{S_1(B_m)}e^{S_0(B_m)}$$
$$+ e^{S_i(B_l)}e^{S_{i-1}(B_l)}\dots e^{S_1(B_m)}e^{S_0(B_m)}$$
$$- \dots e^{S_i(B_l)}e^{S_{i-1}(B_l)}\dots e^{S_1(B_l)}e^{S_0(B_m)} - e^{S_i(B_m)}e^{S_{i-1}(B_m)}\dots e^{S_1(B_m)}e^{S_0(B_m)}\| \cdot \|x^0\|$$
$$\leqslant \|x^0\| \cdot \max_{1\leqslant\nu\leqslant p}\|e^{S_\nu(B_l)} - e^{S_\nu(B_m)}\| \cdot e^{\mathbf{v}} < \varepsilon \cdot \|x^0\| \cdot e^{\mathbf{v}},$$

Таким образом, доказано, что последовательность $\{\mathbf{T}(B_l)\}_{l=1}^{\infty}$ фундаментальна в банаховом пространстве $\widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$ и, следовательно, сходится. Это означает, что выполнены условия теорем 1, в силу которой выполнены и утверждения настоящей теоремы. (Здесь X — $\widehat{\mathbf{RBV}}^{n\times n}(\mathcal{I})$, $A - \widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$, $Y - \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$, $f - \mathbf{T}$, $\widehat{f} - \widehat{\mathbf{T}}$.) □

Неоднородную задачу (0.1) при $B \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n\times n}(\mathcal{I})$, $f \in \widehat{\mathbf{RH}}^{n}(\mathcal{I})$ так же, как в п. 3.4 сведем к однородной задаче (3.12), к которой применим только что доказанную теорему 5. В итоге придем к следующему утверждению.

Теорема 6. *Существует непрерывный оператор* $\widehat{\mathbf{T}}\colon \widehat{\mathbf{RBV}}^{n\times n}(\mathcal{I}) \times \widehat{\mathbf{RBV}}^{n}(\mathcal{I}) \to \widehat{\mathbf{R}}^n(\mathcal{I})$ *такой, что решение x задачи* (0.1) *в смысле п.* **3.1** *см.* (3.3) *существует, единственно и имеет представление* $x(t) = \big(\widehat{\mathbf{T}}(B, f)\big)(t)$.

З а м е ч а н и е. Хотя первообразные B коэффициентов исходной задачи (0.1) — функции ограниченной вариации, о решении ее мы можем лишь утверждать, что это правильные функции (это обусловлено неполнотой пространства $\mathbf{RBV}(\mathcal{I})$).

4.2. Рассмотрим задачу Коши для линейного скалярного уравнения n-го порядка (ср. (0.1)):

$$y^{(n)} + p_1'(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_n'(t)y = p_{n+1}'(t), \quad y^{(k-1)}(t_0) = y_{0k}, \quad k \in \{1 : n\} \tag{4.13}$$

($p_k \in \mathbf{RBV}(\mathcal{I})$, $k \in \{1 : n+1\}$). Полагая, как обычно,

$$x_k \doteq y^{(k-1)}, \quad x_{0k} \doteq y^{(k-1)}(t_0), \quad k \in \{1 : n\}, \tag{4.14}$$

запишем задачу (4.13) в виде задачи (0.1), где положено

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top, \quad x^0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})^\top, \quad x_{0k} = y^{(k-1)}(t_0), \quad k \in \{1 : n\},$$

B — произвольная первообразная матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -p_n' & -p_{n-1}' & -p_{n-1}' & \ldots & -p_2' & -p_1' \end{pmatrix}, \quad f = (0, 0, \ldots, p_{n+1})^\top.$$

Применив к полученной задаче теорему 6 и учитывая (4.14), убедимся в том, что *задача* (4.13) *имеет единственное решение y такое, что $y^{(n-1)}$ — правильная функция, а $y^{(k)}$ имеет производные порядка $n-k-1$* $(k \in \{0 : n-2\})$, *являющиеся правильными функциями.*

4.3. Таким образом, исходная задача Коши ставится в привычных для теории дифференциальных уравнений терминах, хотя такая постановка и не является вполне корректной (операция умножения обобщенной функции на разрывную не может быть корректно определена в рамках классической теории обобщенных функций). Затем "погружается" в алгебру обобщенных функций Коломбо, где все необходимые операции корректно определены. Сначала решается вопрос о существовании решений — обобщенных функций Коломбо для уравнений, коэффициенты которых — "производные" от ступенчатых функций, совершается предельный переход вида (3.3), который возвращает нас в пространство решений — обычных функций.

В итоге возникает оператор, ставящий в сооответствие коэффициентам — обычным функциям решение — обычную функцию. В дальнейшем этот оператор, вначале определенный на множестве ступенчатых функциях, с помощью теоремы 1 продолжается по непрерывности на пространство функций ограниченной вариации.

Укажем также на еще одну из достигнутых целей автора: избежать ограничений типа “геометрических” (см., например, [8]). Ограничения такого типа мешают достаточно успешно изучать краевые задачи для рассматриваемых уравнений, вопросы теории неосцилляции и другие вопросы качественной теории.

Вместе с тем замечание к теореме 6 указывает на один из недостатков предлагаемой схемы: не доказано вполне естественное утверждение, что первообразная решения есть функция ограниченной вариации.

Возникает также вопрос: можно ли распространить теорему 6 на все пространство правильных функций, как это сдедано в [1] для $n = 1$. Скорее всего, для этого потребуются дополнительные, возможно, “геометрические условия” (см., например, [12; 13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дерр В.Я., Ким И. Г.** Пространство правильных функций и дифференциальное уравнение с обобщенными функциями в коэффициентах // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. 2014. №1. С. 3–18.
2. **Kurzweil J.** Generalized ordinary differential equations // Czechoslovak Math. J. 1958. No. 8 (83). C. 360–388.
3. **Левин А.Ю.** Вопросы теории обыкновенного дифференциального уравнения. II. // Вестн. Ярослав. ун-та. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
4. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. **Дерр В.Я.** К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298, № 2. С. 269–272.
6. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
7. **Colombeau J.F.** Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1985. 300 p. (North-Holland Mathematics Studies, vol. 113.)
8. **Дерр В.Я., Дизендорф К.И.** О дифференциальных уравнениях в C-обобщенных функциях // Изв. вузов. Математика. 1996. № 11 (414). С. 39–49.
9. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 274 с.
10. **Егоров Ю. В.** К теории обобщенных функций // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 5. С. 3–40.
11. **Радыно Я. В., Нго Фу Тхань.** Дифференциальные уравнения в алгебре новых обобщенных функций // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 4. С. 5–20.
12. **Ligeza J.** On some boundary value problems for ordinary linear differential equations of second order in the Colombeau algebra // Acta Univ. Palacki. Olomouc. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica. 1996. Vol 35. P. 103–119.
13. **Ligeza J.** Boundary value problems for ordinary linear differential equations in the Colombeau algebra // Acta Univ. Palacki. Olomouc. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica. 1999. Vol 38. P. 95–112.
14. **Dieudonne J.** Foudations of modern analysis. New York; London: Academic Press, 1960. 408 p.
15. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
16. **Родионов В.И.** Присоединенный интеграл Римана — Стилтьеса // Изв. вузов. Математика. 2007. № 2 (537). С. 79–82.
17. **Федоров В.М.** Теория функций и функциональный анализ. Ч. II. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2000. 191 с.
18. **Шварц Л.** Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.
19. **Толстоногов А.А.** О некоторых свойствах пространства правильных функций // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 6. С. 303–312.
20. **Дерр В.Я.** О дифференциальных уравнениях с обобщенными функциями и C-интегральных уравнениях // Вестн. Удмурт. ун-та. 2000. № 1. С. 49–60.

21. **Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М.** Альфа-интеграл типа Стилтьеса // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. 2006. № 1. С. 41–65.
22. **Дерр В.Я.** Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высш. шк., 2008. 384 с.
23. **Дерр В.Я.** Функциональный анализ. Лекции и упражнения. М.: Кнорус, 2013. 462 с.
24. **Biagioni H.A., Colombeau J.F.** New generalized functions and C^{∞} functions with values in generalized complex numbers // J. London Math. Soc. 1986. Vol. 2, no. 33. P. 169–179.

Дерр Василий Яковлевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Удмуртский государственный университет
e-mail: derr@uni.udm.ru, vandv4@gmail.com

Поступила 24.02.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.544

БИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ[1]

Г. А. Дубосарский

Предложен метод решения основной краевой задачи для бигармонических функций, состоящий в ортогонализации специальной системы функций и рассмотрения рядов Фурье по полученной системе. Доказано, что построенные ряды сходятся внутри области. Также на основе ортогонализированной системы построены бигармонические всплески и установлено, что ряды всплесков сходятся равномерно в области вместе с границей.

Ключевые слова: бигармоническая функция, краевая задача, всплески.

G. A. Dubosarskii. Biharmonic wavelets and their applications.

We propose a solution method for the basic boundary value problem for biharmonic functions. In this method, a special system of functions is orthogonalized and Fourier series in this system are considered. It is proved that the constructed series converge inside the domain. Biharmonic wavelets are constructed based on the orthogonalized system. It is established that series of wavelets converge uniformly in the domain with boundary.

Keywords: biharmonic function, boundary value problem, wavelets.

MSC: 31B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-76-89

Введение

Данная статья продолжает цикл работ, посвященный решению основных задач математической физики в областях, которые получаются путем удаления из круга малых непересекающихся кругов, не налегающих на границу внешнего круга. В работах [1; 2] были построены ортогональные и неортогональные всплески, удобные для решения задачи Дирихле. Задача Дирихле состоит в восстановлении вещественной гармонической функции внутри области по ее известным граничным значениям. В [2; 3] были построены ортогональные и неортогональные всплески для решения задачи Неймана. Эта задача заключается в восстановлении вещественной гармонической функции по известным производным по нормали к границе области. В данной статье мы построим всплески, удобные для решения основной краевой задачи для бигармонических функций, состоящей в определении функции внутри области по известным граничным значениям и производным по нормали к границе области.

Отметим, что при построении всплесков мы будем опираться на статью [4], в которой Ю. Н. Субботиным и Н. И. Черных были построены гармонические всплески в единичном круге, центральном и нецентральном кольцах. Далее эти идеи были перенесены в работе [5] на случай бигармонических функций в круге и центральном кольце.

Обозначим через $C_r(a)$ окружность с центром в точке a радиуса r. Будем также использовать обозначение $B_r(a) = \{z\colon |z-a| < r\}$. Рассмотрим область комплексной плоскости $\widetilde{K} = \widetilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \ldots, z_m, r_m)$, получающуюся путем удаления из единичного круга m попарно не пересекающихся и не налегающих на границу внешнего круга кругов. Точнее, область $\widetilde{K}$ ограничена окружностями $C_{r_k}(z_k)$, $k = \overline{0, m}$, где $z_0 = 0, r_0 = 1$, $|z_k| + r_k < 1, k = \overline{1, m}$, и

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

$|z_k - z_l| > r_k + r_l, k \neq l$. Основная краевая задача для бигармонических функций в области $\widetilde{K}$ запишется в следующем виде:

$$\Delta^2 u(z) \equiv 0, \quad z \in \widetilde{K},$$

$$u(z_k + r_k e^{ix}) = \varphi_k(x), \quad k = \overline{0,m},$$

$$\frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} = \psi_k(x), \quad k = \overline{0,m}.$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, а функции φ_k, ψ_k являются непрерывными.

В разд. 2 сформулированы специальные представления гармонических и бигармонических функций в области $\widetilde{K}$ и дано описание рассматриваемого в работе класса бигармонических функций. В разд. 3 определена специальная система бигармонических функций, которая образует всюду плотное множество в пространстве решений основной краевой задачи. Далее путем ортогонализации этой системы функций относительно специального скалярного произведения в том же разделе построена новая ортогональная система функций. Также в разд. 3 сформулированы теоремы об асимптотике функций построенной ортогональной системы и о сходимости ряда Фурье по этой системе для бигармонической функции внутри области. В разд. 4 на основе построенной ортогональной системы и всплесков работы [4] построены бигармонические всплески. Далее сформулирована теорема о сходимости ряда по гармоническим всплескам в замыкании области. В разд. 5 доказываются необходимые вспомогательные утверждения.

1. Специальные представления гармонической и бигармонической функций

Нам потребуются следующие два утверждения о представлении гармонической и бигармонической функций. Они справедливы только при предположении гармоничности (бигармоничности) функции в области $\widetilde{K}$ без условия о существовании граничных значений. Доказательство существования разложения в утверждении 1 можно найти в [6], а единственность проверяется так же, как в лемме 2.1 работы [7].

Утверждение 1. *Пусть функция $u(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|, \tag{1.1}$$

где $u_0(z)$ — гармоническая в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u(z) = 0, k = \overline{1,m}$, и $A_k, k = \overline{1,m}$, — некоторые вещественные константы.

Используя предыдущее утверждение, в разд. 5 мы установим справедливость следующего представлении бигармонической функции в области $\widetilde{K}$.

Утверждение 2. *Пусть функция $u(z)$ является бигармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + |z|^2 v_0(z) + \sum_{k=1}^{m} |z-z_k|^2 v_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z-z_k| + \sum_{k=1}^{m} B_k |z-z_k|^2 \ln|z-z_k|, \tag{1.2}$$

где $u_0(z), v_0(z)$ — гармонические функции в $B_1(0)$, функции $u_k(z), v_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = 0$, $v_k(\infty) = 0, k = \overline{1,m}$, и A_k, B_k, $k = \overline{1,m}$, — вещественные константы.

Везде далее будем предполагать, что бигармоническая функция непрерывна в замыкании $\widetilde{K}$ вместе со своими производными по x и y. Кроме этого потребуем, чтобы компоненты u_k и v_k разложения (1.2) функции $u(z)$ также были непрерывны вместе со своими производными первого порядка в замыкании $\widetilde{K}$.

2. Ортогональная система функций

В работе [2] было установлено, что следующая система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \ln|z-z_l|,\ \ \mathrm{Re}z^k,\ \ \mathrm{Im}z^k,\ \ \mathrm{Re}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ -\mathrm{Im}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ l=\overline{1,m},\ \ k\in\mathbb{N}\right\} \tag{2.1}$$

является всюду плотным множеством в любом пространстве $h_p(\widetilde{K})$ типа Харди $(1\le p\le\infty)$ гармонических в $\widetilde{K}$ и суммируемых на границе $\widetilde{K}$ функций. Чтобы построить всюду плотное множество в пространстве бигармонических функций, решим для каждой функции $f(x)$ из предыдущей системы (2.1) уравнение $\Delta u(z)=f(x)$ (это удобно сделать, записав оператор Лапласа в полярных координатах). После указанных операций, а также после некоторых элементарных операций (например, умножения функции на константу) и добавления всех решений к системе (2.1), мы получим следующую систему функций:

$$\Big\{h_0^0(z)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ g_0^0(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}|z|^2,\ \ h_0^l(z)=\ln|z-z_l|,\ \ g_0^l(z)=|z-z_l|^2\ln|z-z_l|,$$

$$h_k^0(z)=\mathrm{Re}z^k,\ \ g_k^0(z)=|z|^2\mathrm{Re}z^k,\ \ \widetilde{h}_k^0(z)=\mathrm{Im}z^k,\ \ \widetilde{g}_k^0=|z|^2\mathrm{Im}z^k,$$

$$h_k^l(z)=\mathrm{Re}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ g_k^l(z)=|z-z_l|^2\mathrm{Re}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,$$

$$\widetilde{h}_k^l(z)=-\mathrm{Im}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ \widetilde{g}_k^l(z)=-|z-z_l|^2\mathrm{Im}\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \ l=\overline{1,m},\ \ k\in\mathbb{N}\Big\}. \tag{2.2}$$

Строго доказать, что система функций (2.2) является всюду плотным множеством в пространстве бигармонических в $\widetilde{K}$ функций, можно будет с помощью утверждения 2, которое мы докажем далее в разделе 5.

Рассмотрим следующее произведение для бигармонических в $\widetilde{K}$ функций:

$$(u,v)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}u(z_k+r_ke^{ix})v(z_k+r_ke^{ix})dx+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u(z_k+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}\frac{\partial v(z_k+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}dx. \tag{2.3}$$

Выпишем функции системы (2.2) в следующем порядке:

$$h_0^0(z),g_0^0(z),h_0^1(z),g_0^1(z),h_0^2(z),\ldots,h_0^m(z),g_0^m(z),$$

$$h_1^0(z),g_1^0(z),\widetilde{h}_1^0(z),\widetilde{g}_1^0(z),h_1^1(z),g_1^1(z),\widetilde{h}_1^1(z),\widetilde{g}_1^1(z),\ldots$$

$$h_1^m(z),g_1^m(z),\widetilde{h}_1^m(z),\widetilde{g}_1^m(z),$$

$$h_2^0(z),g_2^0(z),\widetilde{h}_2^0(z),\widetilde{g}_2^0(z),h_2^1(z),g_2^1(z),\widetilde{h}_2^1(z),\widetilde{g}_2^1(z),$$

$$\ldots,h_2^m(z),g_2^m(z),\widetilde{h}_2^m(z),\widetilde{g}_2^m(z),\ldots \tag{2.4}$$

и ортогонализируем их относительно произведения (2.3). Полученную систему функций будем нумеровать так же, как и исходную и обозначать заглавными буквами:

$$H_0^0(z),G_0^0(z),H_0^1(z),G_0^1(z),H_0^2(z),\ldots,H_0^m(z),G_0^m(z),$$

$$H_1^0(z),G_1^0(z),\widetilde{H}_1^0(z),\widetilde{G}_1^0(z),H_1^1(z),G_1^1(z),\widetilde{H}_1^1(z),\widetilde{G}_1^1(z),\ldots\,. \tag{2.5}$$

Будем также нумеровать функции систем (2.4) и (2.5) в том же порядке последовательными натуральными числами и обозначать через t_k и T_k соответственно. Наконец, на основании системы (2.2) построим еще следующую систему функций:

$$\Big\{\mathbb{H}_0^0(z)\equiv 1,\ \ \mathbb{G}_0^0(z)=|z|^2,\ \ \mathbb{H}_0^l(z)=\ln|z-z_l|,\ \ \mathbb{G}_0^l(z)=|z-z_l|^2\ln|z-z_l|,$$

$$\mathbb{H}_k^0(z)=\frac{\mathrm{Re}z^k}{\sqrt{k^2+1}},\quad \mathbb{G}_k^0(z)=\frac{(k^2+1)|z|^2\mathrm{Re}z^k-(k+1)^2\mathrm{Re}z^k}{2\sqrt{k^2+1}},$$

$$\widetilde{\mathbb{H}}_k^0(z)=\frac{\mathrm{Im}z^k}{\sqrt{k^2+1}},\quad \widetilde{\mathbb{G}}_k^0(z)=\frac{(k^2+1)|z|^2\mathrm{Im}z^k-(k+1)^2\mathrm{Im}z^k}{2\sqrt{k^2+1}},$$

$$\mathbb{H}_k^l(z)=\frac{\mathrm{Re}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{\sqrt{1+k^2/r_l^2}},\quad \mathbb{G}_k^l(z)=\frac{(1+k^2/r_l^2)|z-z_l|^2\mathrm{Re}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k-(r_l^2+k^2-2k)\mathrm{Re}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{2r_l\sqrt{1+k^2/r_l^2}},$$

$$\widetilde{\mathbb{H}}_k^l(z)=-\frac{\mathrm{Im}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{\sqrt{1+k^2/r_l^2}},$$

$$\left.\widetilde{\mathbb{G}}_k^l(z)=\frac{-(1+k^2/r_l^2)|z-z_l|^2\mathrm{Im}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k+(r_l^2+k^2-2k)\mathrm{Im}\Big(\dfrac{r_l}{z-z_l}\Big)^k}{2r_l\sqrt{1+k^2/r_l^2}}\right\}, \tag{2.6}$$

где $k\in\mathbb{N}$, $l=\overline{1,m}$. Функции системы (2.6) были найдены из следующих соображений. Каждая функция в (2.6) получается путем умножения функции системы (2.2) на число или является линейной комбинацией двух функций из (2.2). Введем следующие произведения при $l=\overline{0,m}$:

$$(u,v)_l=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(z_l+r_le^{ix})v(z_l+r_le^{ix})dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\frac{\partial v}{\partial r}(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}dx.$$

Коэффициенты перед функциями были найдены так, чтобы при $l=\overline{0,m},k,k'\in\mathbb{N}$, выполнялись равенства

$$(\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l,\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_{k'}^l)_l=\delta_{k,k'},\quad (\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_k^l,\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_{k'}^l)_l=\delta_{k,k'},\quad (\mathbb{H}_k^l,\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_{k'}^l)_l=0,\quad (\widetilde{\mathbb{H}}_k^l,\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_{k'}^l)_l=0. \tag{2.7}$$

Будем нумеровать функции системы (2.6) последовательными натуральными числами, как и функции системы (2.2), и полученную после перенумерации систему обозначим через $\mathbb{T}_n(z)$.

Через $\tau,\ 0<\tau<1$, обозначим величину

$$\tau=\max\Big\{|z_k|+r_k,\frac{r_k}{1-|z_k|},\frac{r_k}{|z_k-z_l|-r_l}:k,l=\overline{1,m},k\neq l\Big\}. \tag{2.8}$$

Будем говорить, что для последовательности положительных чисел a_n и функций $f_n(z)$, определенных в $\widetilde{K}$, выполняется $f_n(z)=O(a_n),n\to\infty$, если $\sup_{z\in\widetilde{K}}|f_n(z)|\leq Ca_n$ при положительной константе C, зависящей только от геометрии области $\widetilde{K}$.

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема об асимптотическом поведении функций системы (2.5). Она доказывается по аналогии с доказательством теоремы 1 в [1] с помощью леммы 3, которая будет сформулирована и доказана в разд. 5. Поэтому доказательство самой теоремы 1 в работе не приводится.

Теорема 1. *Пусть число τ определено по формуле* (2.8). *Для числа τ', удовлетворяющего неравенствам $\tau<\tau'<1$, и для функций из систем* (2.5) *и* (2.6) *при $l=\overline{0,m}$ и $k\to\infty$ справедливы оценки*

$$\overset{(\sim)}{H}{}_k^l(z)=\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l(z)+O(\tau'^k),\quad \overset{(\sim)}{G}{}_k^l(z)=\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_k^l(z)+O(\tau'^k).$$

Сопоставим бигармонической в $\widetilde{K}$ функции $u(z)$ ряд

$$\sum_{l=0}^{m}\left\{H_0^l(u,H_0^l)+G_0^l(u,G_0^l)\right\}+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{H_k^l(u,H_k^l)+\widetilde{H}_k^l(u,\widetilde{H}_k^l)+G_k^l(u,G_k^l)+\widetilde{G}_k^l(u,\widetilde{G}_k^l)\right\}. \quad (2.9)$$

По аналогии с доказательством теоремы 2 в [1], пользуясь леммой 3 из разд. 5, можно установить следующую теорему (ее доказательство тоже не приведено в работе).

Теорема 2. *Для бигармонической функции $u(z)$ ряд* (2.9) *будет равномерно сходиться на любом компакте в области $\widetilde{K}$.*

3. Бигармонические всплески

Чтобы добиться сходимости не только внутри области $\widetilde{K}$ (как в случае ряда (2.9)), но и на границе, на основании системы (2.5) построим новую систему всплесков. Построение будем основывать на всплесках из статьи [4].

Для этого нам потребуется функция Мейера $\widehat{\theta}(\omega)$. Рассмотрим неотрицательную четную, дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$, которая удовлетворяет требованиям

$$\widehat{\varphi}(\omega)\equiv 1 \text{ при } |\omega|\le\frac{1-\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}(\omega)\equiv 0 \text{ при } |\omega|\ge\frac{1+\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}^2\Big(\omega+\frac12\Big)-\frac12 \text{ нечетна при } |\omega|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

где $0<\varepsilon\le 1/3$. Функция $\widehat{\theta}(\omega)$ неотрицательна и определяется соотношением $\widehat{\theta}^2(\omega)=\widehat{\varphi}^2(\omega/2)-\widehat{\varphi}^2(\omega)$. Заметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\theta}(\omega)\subseteq\{\omega\in\mathbb{R}:(1-\varepsilon)/2<|\omega|<1+\varepsilon\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ — четная и дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Перейдем теперь к построению гармонических всплесков, являющихся базисом пространств $C[0,2\pi]$ и $L_p[0,2\pi], 1\le p<\infty$. Выпишем всплески статьи [4] в явном виде

$$w_0(x)\equiv\frac{1}{\sqrt2},\quad w_n(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\cos\nu x,\quad \widetilde{w}_n(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\sin\nu x,$$

где

$$\theta_\nu^n=2^{(2-j)/2}\widehat{\theta}\left(\frac{\nu}{2^j}\right)\sin\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j},\quad n=2^{j-1}+k,\quad j\in\mathbb{N},\quad k=0,1,\dots,2^{j-1}-1.$$

Заметим, что система функций $\left\{1/\sqrt2,\cos nx,\sin nx,n\in\mathbb{N}\right\}$ ортогональна относительно произведения $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ и система $\{w_0(x),w_n(x),\widetilde{w}_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ также ортогональна. Это эквивалентно некоторым соотношениям на коэффициенты θ_ν^n. Таким образом, преобразование произвольной системы $\{\gamma_0,\gamma_n,\widetilde{\gamma}_n,n\in\mathbb{N}\}$, переводящее γ_0 в γ_0 и $\overset{(\sim)}{\gamma}_n$ — в $\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{\gamma}_\nu$ сохраняет свойство ортонормированности системы.

Мы можем применить это преобразование при каждом $l=\overline{0,m}$ к системам функций $\{H_0^l(z),H_n^l(z),\widetilde{H}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\}$, $\{G_0^l(z),G_n^l(z),\widetilde{G}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\}$ и получим ортонормированные системы функций (ортогональные между собой)

$$\{\mathcal{H}_0^l(z),\mathcal{H}_n^l(z),\widetilde{\mathcal{H}}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\},\quad \{\mathcal{G}_0^l(z),\mathcal{G}_n^l(z),\widetilde{\mathcal{G}}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\},$$

где функции строятся по правилу

$$\mathcal{H}_0^l(z)=H_0^l(z),\quad \overset{(\sim)}{\mathcal{H}}{}^l_n(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{H}{}^l_\nu(z),\quad \mathcal{G}_0^l(z)=G_0^l(z),\quad \overset{(\sim)}{\mathcal{G}}{}^l_n(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{G}{}^l_\nu(z).$$

Теперь сопоставим по аналогии с (2.9) бигармонической в $\widetilde{K}$ функции $u(z)$ ряд

$$\sum_{l=0}^{m}\{\mathcal{H}_0^l(u,\mathcal{H}_0^l)+\mathcal{G}_0^l(u,\mathcal{G}_0^l)\}+\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathcal{H}_k^l(u,\mathcal{H}_k^l)+\widetilde{\mathcal{H}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{H}}_k^l)+\mathcal{G}_k^l(u,\mathcal{G}_k^l)+\widetilde{\mathcal{G}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{G}}_k^l)\}.$$

Введем для бигармонической функции $u(z)$ частичную сумму $S_n(z;u),\ n \in \mathbb{N}:$

$$S_n(\cdot;u) = \sum_{l=0}^{m}\{\mathcal{H}_0^l(u,\mathcal{H}_0^l) + \mathcal{G}_0^l(u,\mathcal{G}_0^l)\} + \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=1}^{n-1}\{\mathcal{H}_k^l(u,\mathcal{H}_k^l) + \widetilde{\mathcal{H}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{H}}_k^l) + \mathcal{G}_k^l(u,\mathcal{G}_k^l) + \widetilde{\mathcal{G}}_k^l(u,\widetilde{\mathcal{G}}_k^l)\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 4 в [1] с помощью теоремы 1 проверяется, что справедлива следующая теорема, доказательство которой мы здесь не приводим.

Теорема 3. *Для бигармонической функции $u(z)$ частичные суммы $S_n(\cdot;u)$ сходятся равномерно в замыкании области $\widetilde{K}$.*

4. Вспомогательные результаты

Доказательство утверждения 2. Докажем *существование* разложения (1.2). Для бигармонической $u(z)$ функция Δu — гармоническая. Для нее справедливо разложение (1.1):

$$\Delta u = \sum_{k=0}^{m} f_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z-z_k|, \tag{4.1}$$

где $f_0(z)$ — гармоническая в $B_1(0)$, $f_k(z)$ — в $\mathbb{C}\setminus\overline{B_{r_k}(z_k)}$ и выполнено $f_k(\infty)=0, k=\overline{1,m}$.

Рассмотрим разложение функции f_0 в гармонический ряд

$$f_0(re^{ix}) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\alpha_k r^k\cos kx + \beta_k r^k \sin kx\Big)$$

и введем гармоническую функцию v_0 следующим образом:

$$v_0(re^{ix}) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(4k+4)\Big(\alpha_k r^k\cos kx + \beta_k r^k \sin kx\Big).$$

Прямым вычислением проверяется, что $\Delta(|z|^2 v_0(z)) = f_0(z)$. Аналогичным образом находятся гармонические функции $v_k(z), k=\overline{1,m}$, такие, что $\Delta(|z-z_k|^2 v_k(z)) = f_k(z)$ и $v_k(\infty)=0$. Откуда, пользуясь тем, что $\Delta(|z-z_k|^2\ln|z-z_k| - |z|^2) = 4\ln|z-z_k|$ и (4.1), получаем, что

$$\Delta\Big(u - |z|^2 v_0(z) - \sum_{k=1}^{m}|z-z_k|^2 v_k(z) + \frac{m}{4}|z|^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}A_k|z-z_k|^2\ln|z-z_k|\Big) = 0.$$

Осталось применить к гармонической функции

$$u - |z|^2 v_0(z) - \sum_{k=1}^{m}|z-z_k|^2 v_k(z) + \frac{m}{4}|z|^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{m}A_k|z-z_k|^2\ln|z-z_k|$$

утверждение 1 и получить требуемое разложение.

Докажем теперь *единственность* разложения (1.2). Проверим ее сначала для случая, когда $\widetilde{K}$ является центральным кольцом, ограниченным окружностями $C_\rho(0)$ и $C_1(0)$ при $\rho<1$.

В этом случае представление (1.2) будет иметь вид

$$u = u_0 + |z|^2 v_0 + u_1 + |z|^2 v_1 + A\ln|z| + B|z|^2\ln|z|. \tag{4.2}$$

Разложим функции u_l, v_l $(l=0,1)$ в гармонические ряды

$$u_l(re^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\{a_k^l\cos kx + b_k^l \sin kx\}, \quad v_l(re^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\{c_k^l\cos kx + d_k^l\sin kx\}. \tag{4.3}$$

Нам достаточно доказать однозначность представления (4.2) в случае, когда $u(z) \equiv 0$. Подставляя формулы (4.3) в (4.2) и приравнивая к нулю ряды на окружностях $C_\rho(0)$ и $C_1(0)$, а также их производные по r (т. е. фактически решая основную задачу для бигармонических функций в центральном кольце), получаем системы уравнений для коэффициентов. Более подробно эта процедура будет описана при доказательстве леммы 2. Из этих систем можно найти, что все коэффициенты равны нулю. Тем самым, однозначность для центрального кольца доказана.

Проверим теперь *единственность в общем случае*. Установим, что функции u_0 и v_0 в представлении (1.2) определяются единственным образом. Доказательство однозначности других компонент разложения (1.2) проводится аналогично. Пусть выполнено разложение (1.2). Выберем число ρ, $0 < \rho < 1$ так, чтобы все круги $\overline{B_{r_k}(z_k)}$ $(k = \overline{1,m})$, лежали внутри $B_\rho(0)$. Рассмотрим кольцо, ограниченное окружностями $C_\rho(0)$ и $C_{\rho'}(0)$ при $\rho < \rho' < 1$.

Исходя из области определения функций в разложении (1.2), получаем, что $u - u_0 - |z|^2 v_0$ является бигармонической вне $\overline{B_\rho(0)}$. Следовательно, $u - u_0 - |z|^2 v_0$ представима в виде

$$u - u_0 - |z|^2 v_0 = U_1 + |z|^2 V_1,$$

где $U_1(z)$, $V_1(z)$ являются гармоническими вне $B_\rho(0)$. Следовательно, там же существуют гармонические функции $\widetilde{U}_1(z)$, $\widetilde{V}_1(z)$ такие, что $\widetilde{U}_1(\infty) = 0$, $\widetilde{V}_1(\infty) = 0$ и выполняются равенства $U_1(z) = A \ln |z| + \widetilde{U}_1(z)$, $V_1(z) = B \ln |z| + \widetilde{V}_1(z)$. Таким образом,

$$u = u_0 + |z|^2 v_0 + U_1 + |z|^2 V_1 = u_0 + |z|^2 v_0 + \widetilde{U}_1 + |z|^2 \widetilde{V}_1 + A \ln |z| + B|z|^2 \ln |z|. \tag{4.4}$$

В кольце разложение (4.2) единственно. Исходя из этого и представления (4.4), мы заключаем, что функции u_0 и v_0 в кольце определяются единственным образом. Доказательство можно считать законченным. □

Справедливость следующей леммы, которая потребуется при доказательстве леммы 3 данной работы, устанавливается аналогично доказательству леммы 5 в [3]. Ее смысл в том, что система (2.6) является “почти ортонормированной” относительно произведения (2.3) с точностью до малой величины, стремящейся к нулю со скоростью геометрической прогрессии.

Лемма 1. *Для функций системы* (2.6) *и произведения* (2.3) *равномерно по* l *при* $\tau < \tau' < 1$ (τ *определено в* (2.8)) *при* $k \to \infty$ *выполняются оценки*

$$(\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^s_k, \overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^j_l) = \delta_{k,l}\delta_{s,j} + O(\tau'^k), \quad (\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^s_k, \mathbb{G}^j_l) = O(\tau'^k),$$

$$(\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}^s_k, \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}^j_l) = \delta_{k,l}\delta_{s,j} + O(\tau'^k), \quad (\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}^s_k, \widetilde{\mathbb{G}}^j_l) = O(\tau'^k).$$

Эти оценки можно переписать в виде $(\mathbb{T}_k, \mathbb{T}_l) = \delta_{k,l} + O(\tau'^{k/(4m+4)})$, *где* $\mathbb{T}_k$ *даны после* (2.7).

Для дальнейшего, используя (1.2), найдем представление бигармонических в $\widetilde{K}$ функций с помощью (2.4) – (2.6). Разложим соответствующие функции $u_l(z_l + r_l e^{ix})$, $v_l(z_l + r_l e^{ix})$ при $l = \overline{0,m}$ в ряды Фурье

$$u_l(z_l + r_l e^{ix}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_0^l + \sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma_k^l \cos kx + \widetilde{\gamma}_k^l \sin kx\}, \tag{4.5}$$

$$v_l(z_l + r_l e^{ix}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_0^l + \sum_{k=1}^{\infty}\{\sigma_k^l \cos kx + \widetilde{\sigma}_k^l \sin kx\}, \tag{4.6}$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\gamma_0^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \tag{4.7}$$

$$\sigma_0^l = (v_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^l = (v_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}. \tag{4.8}$$

Поскольку для функций системы (2.2) выполняются равенства $h_0^0(e^{ix}) = 1/\sqrt{2}$, $h_k^0(e^{ix}) = \cos kx$ и $\widetilde{h}_k^0(e^{ix}) = \sin kx$, в $\widetilde{K}$ при $l = \overline{0,m}$ в силу (4.5), (4.6) выполняются соотношения

$$u_l(z) = \gamma_0^l h_0^l(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l(z) + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l(z)\}, \tag{4.9}$$

$$v_l(z) = \sigma_0^l h_0^l(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_k^l h_k^l(z) + \widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{h}_k^l(z)\}. \tag{4.10}$$

Из (4.10) и равенства $|z - z_l|^2 \overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z) = \overset{(\sim)}{g}{}_k^l(z)$ следует, что

$$|z - z_l|^2 v_l(z) = \sigma_0^l g_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_k^l g_k^l + \widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{g}_k^l\}. \tag{4.11}$$

Функции $\overset{(\sim)}{h}{}_k^l$ и $\overset{(\sim)}{g}{}_k^l = \overset{(\sim)}{h}{}_k^l |z - z_l|^2$ системы (2.2) легко выражаются через функции $\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l$ и $\overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_k^l$ системы (2.6). Действительно, из (2.2) и (2.6) следуют соотношения

$$\overset{(\sim)}{h}{}_k^l = \begin{cases} \sqrt{1+k^2}\,\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^0, & l = 0, \\ \sqrt{1 + \dfrac{k^2}{r_l^2}}\,\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l, & l = \overline{1,m}, \end{cases}$$

$$\overset{(\sim)}{g}{}_k^l = O(k)(\overset{(\sim)}{\mathbb{H}}{}_k^l + \overset{(\sim)}{\mathbb{G}}{}_k^l), \quad k \to \infty.$$

Из (4.9) и (4.11) находим

$$u_l = \gamma_0^l \mathbb{H}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{O(k)\gamma_k^l \mathbb{H}_k^l + O(k)\widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l\}, \tag{4.12}$$

$$v_l|z - z_l|^2 = O(1)\sigma_0^l \mathbb{H}_0^l + O(1)\widetilde{\sigma}_0^l \mathbb{G}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{O(k)\sigma_k^l \mathbb{H}_k^l + O(k)\widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l + O(k)\sigma_k^l \mathbb{G}_k^l + O(k)\widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{\mathbb{G}}_k^l\right\}, \tag{4.13}$$

где множители $O(k)$ перед $\gamma_k^l, \ldots, \widetilde{\sigma}_k^l$ зависят только от k и r_l. Перепишем (4.12) и (4.13) в виде

$$u_l = \beta_0^l \mathbb{H}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\beta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\beta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l\}, \tag{4.14}$$

$$v_l|z - z_l|^2 = \eta_0^l \mathbb{H}_0^l + \chi_0^l \mathbb{G}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{\eta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\eta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l + \chi_k^l \mathbb{G}_k^l + \widetilde{\chi}_k^l \widetilde{\mathbb{G}}_k^l\}. \tag{4.15}$$

В силу (1.2) (с учетом (4.7)–(4.10) и (2.2)) выполняются равенства

$$0 = u_l(\infty) = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2} = v_l(\infty) = (v_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2}, \quad l = \overline{1,m},$$

и, следовательно, выполняются соотношения $\gamma_0^l = 0,\ \sigma_0^l = 0,\ l = \overline{1,m}$.

Используя утверждение 2, равенства (4.9), (4.10) и то, что $|z - z_l|^2 \overset{(\sim)}{h}{}_k^l = \overset{(\sim)}{g}{}_k^l$, где $\overset{(\sim)}{g}{}_k^l$ определены в (2.2), получаем, что в $\widetilde{K}$ выполняется

$$u = \sum_{l=0}^{m} \gamma_0^l h_0^l + \sum_{l=0}^{m} \sigma_0^l g_0^l + \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l\} + \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \{\sigma_k^l g_k^l + \widetilde{\sigma}_k^l \widetilde{g}_k^l\}, \tag{4.16}$$

где $\gamma_0^l = A_l$, $\sigma_0^l = B_l$. Таким образом, $u = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t_k$, где t_k определены ниже формулы (2.5).

Из (1.2), (4.14), (4.15) следует, что в $\widetilde{K}$ также справедливо представление

$$u = \sum_{l=0}^{m} \Big(\beta_0^l \mathbb{H}_0^l + \eta_0^l \mathbb{H}_0^l + \chi_0^l \mathbb{G}_0^l + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \beta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\beta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l \} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ \eta_k^l \mathbb{H}_k^l + \widetilde{\eta}_k^l \widetilde{\mathbb{H}}_k^l + \chi_k^l \mathbb{G}_k^l + \widetilde{\chi}_k^l \widetilde{\mathbb{G}}_k^l \} \Big). \tag{4.17}$$

Перепишем (4.17) в терминах функций $\mathbb{T}_k$, введенных после формулы (2.7):

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbb{T}_k. \tag{4.18}$$

Введем частичные суммы $s_n(\cdot; u)$ и $s_n^*(\cdot; u)$

$$s_n(\cdot; u) = \sum_{k=1}^{n} (u, T_k) T_k, \quad s_n^*(\cdot; u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbb{T}_k, \tag{4.19}$$

где T_k и $\mathbb{T}_k$ определены ниже выражений (2.5) и (2.7), соответственно, а произведение $(\cdot, \cdot)$ введено в (2.3).

Введем следующую норму:

$$\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_1} + \sum_{k=0}^{m} \Big\| \frac{u(z_k + r e^{ix})}{\partial r} \Big|_{r=r_k} \Big\|_{L_1}. \tag{4.20}$$

Лемма 2. *Пусть функция $u(z)$ является бигармонической в $\widetilde{K}$, тогда для коэффициентов $\overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k$ ряда* (4.16) *выполняются соотношения*

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k = O(k)\|u\|_1, \quad \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k = O(k)\|u\|_1, \quad k \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем оценку на $\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k$. Остальные коэффициенты $\overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k$, $l = \overline{1, m}$, оцениваются аналогично. Рассмотрим круг $B_\rho(0)$ такой, что $0 < \rho < 1$ и $B_\rho(0)$ содержит внутри себя все круги $B_{r_k}(z_k), k = \overline{1, m}$. В центральном кольце, образованном окружностями $C_1(0)$ и $C_\rho(0)$ для бигармонических в K функций, справедливо утверждение 2 с $m = 1$. Откуда получаем, что существуют функции $u_0^*(z)$, $u_1^*(z)$, $v_0^*(z)$, $v_1^*(z)$ и константы A^* и B^* такие, что

$$u(z) = u_0^*(z) + u_1^*(z) + |z|^2 v_0^*(z) + |z|^2 v_1^*(z) + A^* \ln|z| + B^* |z|^2 \ln|z|,$$

где $u_0^*(z)$ и $v_0^*(z)$ гармонические в $B_1(0)$, $u_1^*(z)$ и $v_1^*(z)$ гармонические вне $\overline{B_\rho(0)}$, $u_1^*(\infty) = v_1^*(\infty) = 0$. В этом центральном кольце ряд, представляющий $u(z)$ (см. (4.16)), имеет вид

$$u(re^{ix}) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \frac{b_0 r^2}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + \widetilde{a}_k \sin kx) + \sum_{k=1}^{\infty} r^{k+2} (b_k \cos kx + \widetilde{b}_k \sin kx)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{r^k} (a_{-k} \cos kx + \widetilde{a}_{-k} \sin kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{r^{k-2}} (b_{-k} \cos kx + \widetilde{b}_{-k} \sin kx) + A \ln r + B r^2 \ln r, \tag{4.21}$$

где коэффициенты $\overset{(\sim)}{a}_k$ и $\overset{(\sim)}{b}_k$ согласно (4.7), (4.8) в случае, когда $\widetilde{K}$ является центральным кольцом, определяются по формулам

$$a_0 = (u_0^*(e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{a}_k = (u_0^*(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \tag{4.22}$$

$$b_0 = (v_0^*(\rho e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{b}_k = (v_0^*(\rho e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \tag{4.23}$$

$$\overset{(\sim)}{a}_{-k} = (u_1^*(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{b}_{-k} = (v_1^*(\rho e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}.$$

Докажем теперь, что в (4.16) при $k \ge 0$ выполняются равенства

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^0 = \overset{(\sim)}{a}_k, \qquad \overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^0 = \overset{(\sim)}{b}_k. \tag{4.24}$$

В силу (1.2) в $\widetilde{K}$, а следовательно, и в кольце $B_1(0)\backslash\overline{B_\rho(0)}$, справедливо равенство

$$u(z) = u_0(z) + \Big(\sum_{k=1}^m u_k(z) + \sum_{k=1}^m A_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big|\Big) + |z|^2 v_0(z)$$

$$+ |z|^2\Big(\sum_{k=1}^m v_k(z) + \sum_{k=1}^m B_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big|\Big) + \Big(\sum_{k=1}^m A_k\Big)\ln|z| + \Big(\sum_{k=1}^m B_k\Big)|z|^2\ln|z|.$$

Учитывая, что разложение типа (1.2) в кольце тоже однозначно, и принимая во внимание области определения функций, мы заключаем, что справедливы соотношения

$$u_0^*(z) = u_0(z), \quad v_0^*(z) = v_0(z) \ \text{— в} \ B_1(0), \tag{4.25}$$

$$u_1^*(z) = \sum_{k=1}^m u_k(z) + \sum_{k=1}^m A_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big|, \quad v_1^*(z) = \sum_{k=1}^m v_k(z) + \sum_{k=1}^m B_k \ln\Big|1 - \frac{z_k}{z}\Big| \ \text{— вне} \ \overline{B_\rho(0)},$$

$$A^* = \sum_{k=1}^m A_k, \qquad B^* = \sum_{k=1}^m B_k.$$

Из формул (4.7), (4.22) и (4.25) следует, что

$$\gamma_0^0 = (u_0(e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2} = (u_0^*(e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2} = a_0,$$

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^0 = (u_0(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2} = (u_0^*(e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2} = \overset{(\sim)}{a}_k.$$

Аналогичным образом с помощью (4.8) и (4.23) проверяется, что $\overset{(\sim)}{\sigma}{}_k^0 = \overset{(\sim)}{b}_k$ при $k \ge 0$.

Разложим следующие функции в ряды Фурье:

$$u(e^{ix}) \sim A_0^0 + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(0)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(0)} \sin kx), \quad u(\rho e^{ix}) \sim A_0^{(1)} + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(1)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(1)} \sin kx), \tag{4.26}$$

$$\frac{u(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1} \sim A_0^{(2)} + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(2)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(2)} \sin kx), \tag{4.27}$$

$$\frac{u(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=\rho} \sim A_0^{(3)} + \sum_{k=1}^\infty (A_k^{(3)} \cos kx + \widetilde{A}_k^{(3)} \sin kx). \tag{4.28}$$

Подставляя $r = 1$ и $r = \rho$ в (4.21) и приравнивая коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$ в формулах (4.21) и (4.26), получаем уравнения

$$a_k + \rho^k a_{-k} + b_k + \rho^k b_{-k} = A_k^{(0)}, \quad \rho^k a_k + a_{-k} + \rho^{k+2} b_k + b_{-k} = A_k^{(1)}. \tag{4.29}$$

Дифференцируя (4.21) по r, подставляя $r = 1$ и $r = \rho$ и приравнивая коэффициенты при $\cos kx$ и $\sin kx$ в получившемся ряду и (4.27), (4.28), получаем

$$\begin{gathered} ka_k - k\rho^k a_{-k} + (k+2)b_k - (k-2)\rho^k b_{-k} = A_k^{(2)}, \\ k\rho^{k-1} a_k - k\rho^{-1} a_{-k} + (k+2)\rho^{k+1} b_k - (k-2)\rho b_{-k} = A_k^{(3)}. \end{gathered} \tag{4.30}$$

Аналогичные уравнения мы получим для $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$. Решив систему из уравнений (4.29) и (4.30) (решение не будем выписывать ввиду его громоздкости) и принимая во внимание (4.24), для каждой их четырех величин $\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k$, $\overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k$ можно получить, что

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k, \overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k = \overset{(\sim)}{a}_k, \overset{(\sim)}{b}_k = O(k)\max\Big\{|\overset{(\sim)}{A}{}^{(0)}_k|, |\overset{(\sim)}{A}{}^{(1)}_k|, |\overset{(\sim)}{A}{}^{(2)}_k|, |\overset{(\sim)}{A}{}^{(3)}_k|\Big\}, \quad k \to \infty. \tag{4.31}$$

Поскольку $\overset{(\sim)}{A}{}^{(l)}_k$ являются коэффициентами Фурье, выполняются неравенства

$$|\overset{(\sim)}{A}{}^{(0)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u(e^{ix})|dx, \quad |\overset{(\sim)}{A}{}^{(1)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u(\rho e^{ix})|dx, \tag{4.32}$$

$$|\overset{(\sim)}{A}{}^{(2)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big|dx, \quad |\overset{(\sim)}{A}{}^{(3)}_k| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big|dx. \tag{4.33}$$

Из (4.31)–(4.33) следует, что при $k \to \infty$ выполняются четыре соотношения

$$\overset{(\sim)}{\gamma}{}^0_k, \overset{(\sim)}{\sigma}{}^0_k = O(k)\Big(\sum_{k=0}^{m} \|u(e^{ix})\|_{L_1} + \|u(\rho e^{ix})\|_{L_1} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|_{L_1} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|_{L_1}\Big). \tag{4.34}$$

Функция $u(z)$ восстанавливается в $\widetilde{K}$ через граничные значения и производные по нормали по формуле

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi} u(z_k + r_k e^{ix}) F_k^{(1)}(x,z)dx + \sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k} F_k^{(2)}(x,z)dx, \tag{4.35}$$

где $F_k^{(l)}(x,z)$ — ядра, определяемые однозначно по геометрии области $\widetilde{K}$, такие, что $F_k^{(l)}(x,z)$ и $\dfrac{\partial F_k^{(l)}}{\partial r}(x,z)$ непрерывны при $x, z \in \widetilde{K}$, в частности при $z = \rho e^{ix}$. Откуда, дифференцируя (4.35) по r, получаем

$$\begin{gathered} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big| \le \sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|dx \max_{|z|=\rho, x\in[0,2\pi]} \Big|\frac{\partial F_k^{(1)}}{\partial r}\Big|_{r=\rho}(x,z)\Big| \\ + \sum_{k=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big|dx \max_{|z|=\rho, x\in[0,2\pi]} \Big|\frac{\partial F_k^{(2)}}{\partial r}\Big|_{r=\rho}(x,z)\Big|, \end{gathered}$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|_{L_1} \le C_1\Big(\sum_{l=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_1} + \sum_{l=0}^{m} \Big\|\frac{u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k}\Big\|_{L_1}\Big) = C_1\|u\|_1, \tag{4.36}$$

где константа C_1, как и другие константы C_k в работе, положительная и зависящая только от геометрии области $\widetilde{K}$. Аналогичная оценка верна также для $\|u(\rho e^{ix})\|_{L_1}$. Из нее, из (4.34) и (4.36) следует нужная оценка в лемме 2. □

Аналогично доказательству леммы 6 в [1] проверяется справедливость следующей леммы. Однако ее доказательство содержит ряд нюансов, таких как, например, использование леммы 2 и представления (4.17). Поэтому приведем доказательство этой леммы полностью.

Лемма 3. *Пусть* $s_n(\cdot;u)$ *и* $s_n^*(\cdot;u)$ *— суммы, определенные по формулам* (4.19), $\|\cdot\|_1$ *— норма, введенная в* (4.20), *а* τ *— в* (2.8). *При* $\tau<\tau'<1$ *в* $\widetilde{K}$ *выполняется оценка*

$$s_n(\cdot;u)-s_n^*(\cdot;u)=O(\tau'^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \quad n\to\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v^*(z)\in h_p(\widetilde{K})$, T_K и t_K определены после (2.5), а $\mathbb{T}_k$ — после (2.7). Поскольку функции $T_s(z), s\in\mathbb{N}$, образуют ортонормированную по (2.3) систему и являются линейными комбинациями функций $t_l(z), l\le s$, то частичная сумма $s_n(\cdot,v^*)$, являющаяся линейной комбинацией функций $t_l(z), l=\overline{1,n}$, однозначно определяется из условия

$$(v^*-s_n(\cdot,v^*),t_k)=0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{4.37}$$

Представим сумму $s_n(z,v^*)$ в следующем виде: $s_n(z,v^*)=\sum_{l=1}^n\alpha_l^*t_l(z)$. Тогда из условия (4.37) следует, что коэффициенты α_l^* удовлетворяют системе уравнений

$$A\alpha^*=V^*, \tag{4.38}$$

где A — матрица Грама, $A=((t_l,t_k))_{l,k=1}^n$, $\alpha^*=(\alpha_l^*)_{l=1}^n$, $V^*=((v^*,t_k))_{k=1}^n$. Решение системы уравнений (4.38) записывается в виде $\alpha^*=A^{-1}V^*$.

Оценим следующую норму: $\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)}=\max_{\|V\|_{l_\infty}=1}\|A^{-1}V\|_{l_\infty}$, где $\|(y_1,y_2,\ldots,y_n)\|_{l_\infty}=\max_{k=\overline{1,n}}|y_k|$. Пусть $\|V\|_{l_\infty}=\|(V_1,V_2,\ldots,V_n)\|_{l_\infty}=1$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $t_k(z), k=\overline{1,n}$, удовлетворяющую условию

$$(v,t_k)=V_k, \quad k=\overline{1,n}. \tag{4.39}$$

Разложим функцию $v(z)$ в ряд по функциям $T_s(z), s=\overline{1,n}$:

$$v(z)=\sum_{s=1}^n(T_s,v)T_s(z). \tag{4.40}$$

Представим функцию $T_s(z)$ в виде

$$T_s(z)=\sum_{l=1}^s\alpha_{l,s}t_l(z). \tag{4.41}$$

Из леммы 2 и того, что $(T_k,T_k)=1$ следует, что $\alpha_{l,s}=O(l)=O(s)$. Пусть $v(z)=\sum_{k=1}^n\alpha_k^vt_k(z)$. Подставив выражение (4.41) в (4.40), мы получим, что $\alpha_l^v=\sum_{s=l}^n(T_s,v)\alpha_{l,s}$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\alpha_l^v|=\left|\sum_{s=l}^n(T_s,v)\alpha_{l,s}\right|\le C_2\sum_{s=l}^ns|(T_s,v)|=C_2\sum_{s=l}^ns\left|\left(\sum_{\nu=1}^s\alpha_{\nu,s}t_\nu,v\right)\right|$$
$$\le C_3\sum_{s=l}^n\sum_{\nu=1}^ss^2|(t_\nu,v)|=O(n^4)\max_\nu|(t_\nu,v)|. \tag{4.42}$$

Учитывая (4.39), (4.42) и $\|V\|_\infty=1$, отсюда получаем оценки $|\alpha_k^v|\le C_4n^4$ $(k=\overline{1,n})$. Заметим, что коэффициенты α_k^v являются решением системы уравнений $A\alpha=V$, где $\alpha=(\alpha_k^v)_{k=1}^n$. Таким образом, из равенства $\|V\|_\infty = 1$, и (4.42) следует, что $\|A^{-1}V\|_\infty = \|(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\|_\infty \le C_4 n^4$. Поэтому выполняется неравенство

$$\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} \le C_4 n^4. \tag{4.43}$$

Частичная сумма $s_n(\cdot, u)$ является полиномом наилучшего приближения по гармоникам t_l, $l = \overline{1, n}$, функции $u(z)$ по норме $(\cdot, \cdot)$. Следовательно, сумма $s_n(\cdot; u)$ сохраняет линейные комбинации функций $t_k(z), k = \overline{1, n}$. Отсюда, полагая $v^*(z) = u(z) - s_n^*(z; u)$, выводим, что

$$s_n(\cdot; v^*) = s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u) = s_n(\cdot; u - s_n^*(\cdot; u)). \tag{4.44}$$

Частичная сумма $s_n(\cdot; v^*)$ находится из системы (4.38). В силу оценки (4.43) получаем, что справедливо неравенство

$$\|\alpha^*\|_{l_\infty} \le \|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} \|V^*\|_{l_\infty} \le C_4 n^4 \|V^*\|_{l_\infty}. \tag{4.45}$$

Оценим теперь величину $\|V^*\|_{l_\infty}$. Координаты V_k^* вычисляются по формуле $V_k^* = (v^*, t_k) = (u - s_n^*(\cdot, u), t_k)$. Из (4.18) и второго равенства в (4.19) следует

$$u(z) - s_n^*(z; u) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_l \mathbb{T}_l(z).$$

Из (4.12)–(4.15) и леммы 2 получаем, что в (4.17)

$$\overset{(\sim)}{\beta}{}^l_k = O(k) \overset{(\sim)}{\gamma}{}^l_k = O(k^2)\|u\|_1, \quad \overset{(\sim)}{\eta}{}^l_k = O(k) \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k = O(k^2)\|u\|_1, \quad \overset{(\sim)}{\chi}{}^l_k = O(k) \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k = O(k^2)\|u\|_1. \tag{4.46}$$

Из (4.46) вытекает, что в (4.19) $\lambda_k = O(k^2)\|u\|_1$. Отсюда с помощью леммы 1 с τ', замененной на τ'', $\tau < \tau'' < \tau' < 1$, имеем следующую оценку:

$$(u - s_n^*(\cdot; u), t_k) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_l (\mathbb{T}_l, t_k) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \lambda_l O(\tau''^{(l/(4m+4))})$$

$$= \|u\|_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} O(l^2 \tau''^{(l/(4m+4))}) = \|u\|_1 O(n^2 \tau''^{(n/(4m+4))}), \quad n \to \infty,$$

из которой следует, что выполняется оценка

$$\|V^*\|_{l_\infty} = \max_{k=\overline{1,n}} |(v^*, t_k)| = \max_{k=\overline{1,n}} |(u - s_n(\cdot; u), t_k)| = O(n^2 \tau''^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \qquad n \to \infty.$$

Остается только подставить это соотношение в (4.45) и получить

$$\max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| = \|\alpha^*\|_{l_\infty} = O(n^6 \tau''^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \quad n \to \infty. \tag{4.47}$$

Из определения коэффициентов α_k^* следует, что выполняются равенства $s_n(z; u - s_n^*(\cdot; u)) = s_n(z; v^*) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* t_k(z)$. Как следствие из (4.44), (4.47) и соотношения $t_k(z) = O(1)$ в $\widetilde{K}$ выводим

$$s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u) = s_n(u - s_n^*(\cdot; u)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* h_k(z) = \max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| O(n)$$

$$= O(n^7 \tau''^{(n/(4m+4))})\|u\|_1 = O(\tau'^{(n/(4m+4))})\|u\|_1, \quad n \to \infty.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 99–114.
2. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами и их приложения к задачам математической физики// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 109–124.
3. **Дубосарский Г.А.** Неортогональные гармонические всплески и их приложение к решению задачи Неймана// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 136–151.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески в краевых задачах для гармонических и бигармонических функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 281–296.
6. **Голузин Г. М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
7. **Субботин Ю. Н., Черных Н. И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.

Дубосарский Глеб Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: glebUU@mail.ru

Поступила 16.03.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.856

ВАРИАНТ ДВОЙСТВЕННОГО СИМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Г. Жадан

Рассматривается линейная задача полуопределенного программирования в стандартной постановке. Для ее решения предлагается вариант двойственного симплекс-метода, обобщающий соответствующий метод для задач линейного программирования. Приводится описание перехода из одной крайней точки допустимого множества в другую крайнюю точку. Дается обоснование сходимости метода.

Ключевые слова: линейная задача полуопределенного программирования, двойственная задача, крайние точки, двойственный симплекс-метод.

V. G. Zhadan. A variant of the dual simplex method for a linear semidefinite programming problem.

A linear semidefinite programming problem in the standard statement is considered, and a variant of the dual simplex method is proposed for its solution. This variant generalizes the corresponding method for linear programming problems. The transfer from an extreme point of the feasible set to another extreme point is described. The convergence of the method is proved.

Keywords: linear semidefinite programming problem, dual problem, extreme points, dual simplex method.

MSC: 90C22

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-90-100

Введение

Линейные задачи полуопределенного программирования являются важным обобщением задач линейного программирования [1; 2]. В свою очередь они представляют собой частный случай задач конического программирования, где переменные должны принадлежать замкнутому выпуклому конусу (в полуопределенном программировании в качестве такого конуса берется конус симметричных положительно полуопределенных матриц). Многие выпуклые нелинейные задачи математического программирования, а также задачи дискретной и комбинаторной оптимизации сводятся к указанным постановкам [3; 4]. Поэтому понятен интерес к численным методам решения таких задач.

К настоящему времени наиболее хорошо разработаны методы внутренней точки, главным образом аффинно-масштабирующего типа [4]. Наряду с ними были предложены обобщения прямого симплекс-метода, причем как для задач полуопределенного программирования, так и для задач конического программирования [5–7].

Одна из трудностей при перенесении симплекс-метода на задачи полуопределенного программирования в стандартной постановке заключается в том, что количество ограничений типа равенства, как правило, не является “треугольным” числом, т. е. числом элементов симметричной матрицы, стоящих на диагонали и под диагональю. Это требует специального перехода из одной крайней точки допустимого множества в другую крайнюю точку в данной ситуации. Возможный способ такого перехода в прямом симплекс-методе был описан в [8]. В настоящей работе аналогичный прием используется при обобщении двойственного симплекс-метода.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 15-01-08259), а также при содействии Программы ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1) и Программы РАН I.33 П.

Работа состоит из трех разделов. В разд. 1 дается постановка задачи и приводятся условия оптимальности. В разд. 2 и 3 рассматривается отдельно переход из одной крайней точки допустимого множества двойственной задачи в другую крайнюю точку в зависимости от того, выполняется ли неравенство, связывающее ранг матрицы двойственной невязки с числом ограничений в задаче, как равенство или нет. В конце разд. 3 дается обоснование локальной сходимости метода.

1. Постановка задачи и условия оптимальности

Пусть $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n. Пусть, кроме того, $\mathbb{S}^n_+$ — подмножество из $\mathbb{S}^n$, состоящее из положительно полуопределенных матриц. Множество $\mathbb{S}^n_+$ является конусом в $\mathbb{S}^n$. Для указания на то, что матрица $M \in \mathbb{S}^n$ положительно полуопределена, будем пользоваться также неравенством $M \succeq 0$. Конус $\mathbb{S}^n_+$ не является полиэдральным, его размерность равняется "треугольному" числу $n_\triangle = n(n+1)/2$.

Скалярное (внутреннее) произведение между двумя матрицами M_1 и M_2, обозначаемое $M_1 \bullet M_2$, определяется следующим образом: $M_1 \bullet M_2 = \mathrm{tr}\,(M_1^T M_2)$, т. е. сумма всех произведений элементов матриц M_1 и M_2, стоящих на одинаковых позициях. Если M_1 и M_2 — две положительно полуопределенные матрицы из $\mathbb{S}^n$, то $M_1 \bullet M_2 \geq 0$ и $M_1 \bullet M_2 = 0$ в том и только в том случае, когда $M_1 M_2 = M_2 M_1 = 0_{nn}$. Конус $\mathbb{S}^n_+$ является самосопряженным [4].

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\min\ C \bullet X, \quad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad X \succeq 0. \tag{1.1}$$

Здесь все матрицы C, X и A_i, $1 \leq i \leq m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$. Относительно матриц A_i, $1 \leq i \leq m$, считаем, что они линейно независимы.

Двойственной к (1.1) является задача

$$\max\ \langle b, u \rangle, \quad V = V(u) = C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i \succeq 0, \tag{1.2}$$

в которой $b = (b^1, \dots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, угловые скобки обозначают обычное евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что обе задачи (1.1) и (1.2) имеют решения и $b \neq 0_m$.

Пусть $\mathcal{F}_D$ — допустимое множество в двойственной задаче (1.2), т. е.

$$\mathcal{F}_D = \left\{ [u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n_+ \colon V = V(u) \right\}.$$

Проекцией $\mathcal{F}_D$ на пространство $\mathbb{R}^m$ является множество

$$\mathcal{F}_{D,u} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m \colon [u, V] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } V \in \mathbb{S}^n_+ \right\}.$$

Условия оптимальности для пары задач (1.1) и (1.2) заключаются в существовании $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$, удовлетворяющих следующей системе равенств:

$$X \bullet V = 0, \quad A_i \bullet X = b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad V = C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i. \tag{1.3}$$

Представим данные равенства в несколько ином виде, используя операцию векторизации матриц.

Для квадратной матрицы M порядка n обозначим через $\mathrm{vec}\ M$ вектор-столбец длины n^2, являющийся прямой суммой столбцов M. Если матрица M — симметричная, то вместо $\mathrm{vec}\ M$ целесообразно пользоваться вектором-столбцом $\mathrm{svec}\, M$, имеющим меньшую размерность $n_\triangle$. В него помещаются нижние части столбцов M, начинающиеся с диагонального элемента, причем все внедиагональные элементы умножаются на $\sqrt{2}$. Тогда скалярное произведение $M_1 \bullet M_2$

между двумя матрицами $M_1 \in \mathbb{S}^n$ и $M_2 \in \mathbb{S}^n$ записывается как обычное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{n_\triangle}$, т. е. $M_1 \bullet M_2 = \langle \operatorname{svec} M_1, \operatorname{svec} M_2 \rangle$. Таким образом, равенства (1.3) с помощью векторных представлений матриц принимают вид:

$$\langle \operatorname{svec} X, \operatorname{svec} V \rangle = 0, \quad \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X = b, \quad \operatorname{svec} V = \operatorname{svec} C - \mathcal{A}_{svec}^T u. \tag{1.4}$$

Здесь через $\mathcal{A}_{svec}$ обозначена матрица размера $m \times n_\triangle$ со строками $\operatorname{svec} A_i$, $1 \le i \le m$.

Ниже рассматривается численный метод решения задачи (1.2), а следовательно и (1.1), основанный на решении системы (1.4) специальным образом. Его можно трактовать как обобщение двойственного симплекс-метода для задач линейного программирования. В нем все точки итерационного процесса в пространстве $\mathbb{R}^m$ принадлежат границе множества $\mathcal{F}_{D,u}$ и являются крайними точками этого множества.

Возьмем точку $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, которой соответствует двойственная невязка $V = V(u)$. Пусть $\operatorname{rank} V = s$ и пусть $s_\triangle = s(s+1)/2$ — s-е “треугольное” число. Для того чтобы u была *крайней* точкой множества $\mathcal{F}_{D,u}$, необходимо, чтобы ранг матрицы V удовлетворял неравенству $s_\triangle \le n_\triangle - m$ (см. [4]). Поскольку здесь присутствуют “треугольные” числа и между соседними “треугольными” числами существуют разрывы, может оказаться, что для конкретных n и m из определения задачи (1.1) данное неравенство выполняется только как строгое. Назовем крайнюю точку u *регулярной*, если $s_\triangle = n_\triangle - m$. Иначе, когда $s_\triangle < n_\triangle - m$, крайнюю точку u назовем *нерегулярной*.

2. Итерация в регулярной точке

Пусть задана начальная крайняя точка $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ и строится последовательность крайних точек $\{u_k\}$, причем таким образом, что соответствующие значения целевой функции в задаче (1.2) монотонно возрастают от итерации к итерации.

Предположим, что $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ — текущая крайняя точка, в которой матрица двойственной невязки $V = V(u)$ имеет ранг $s < n$. Для матрицы V справедливо разложение $V = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица; θ — вектор собственных значений V. Так как V — матрица неполного ранга, то матрицу H и вектор θ можно разбить на две части в соответствии с нулевыми и положительными собственными значениями V. Считаем для определенности, что это разбиение имеет вид

$$H = [H_B, H_N], \quad \theta = [\theta_B, \theta_N], \quad \theta_B = 0_r, \quad \theta_N > 0_s, \quad r = n - s. \tag{2.1}$$

В соответствии с (2.1) разложим пространство $\mathbb{S}^n$ на два линейных подпространства $\mathbb{S}^n_B$ и $\mathbb{S}^n_N$. Второе подпространство $\mathbb{S}^n_N$ состоит из таких матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых только правый нижний блок порядка s может содержать ненулевые элементы. Первое подпространство $\mathbb{S}^n_B$, напротив, состоит из матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых правый нижний блок нулевой. Эти два подпространства ортогональны друг другу, и любую матрицу $M \in \mathbb{S}^n$ можно представить как $M = M_1 + M_2$, где $M_1 \in \mathbb{S}^n_B$, $M_2 \in \mathbb{S}^n_N$.

Если перейти от матрицы V к матрице $V^H = H^T V H$, т. е. к представлению V в базисе, задаваемом столбцами ортогональной матрицы H, то для V^H получаем: $V^H = V^H_B + V^H_N$, где

$$V^H_B = H^T V_B H = 0_{nn}, \quad V^H_N = H^T V_N H = \begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sr} \\ 0_{rs} & D(\theta_N) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Аналогичным образом будем поступать и с другими матрицами X, C и A_i, $1 \le i \le m$, т. е. переходить от них к матрицам $X^H = H^T X H$, $C^H = H^T C H$, $A^H_i = H^T A_i H$, разбивая каждую из них на две составляющие матрицы. Например,

$$X^H = X^H_B + X^H_N, \quad X^H_B = \begin{bmatrix} H_B^T X H_B & H_B^T X H_N \\ H_N^T X H_B & 0_{rr} \end{bmatrix}, \quad X^H_N = \begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sr} \\ 0_{rs} & H_N^T X H_N \end{bmatrix}.$$

Матрица X_B^H оказывается матрицей окаймления, если ее внедиагональные блоки ненулевые. Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ — крайняя в том и только в том случае, когда матрицы $A_{i,B}^H$, $1 \le i \le m$, линейно независимы [4].

Поскольку $X \bullet V = \mathrm{tr}\, V^H X^H = V^H \bullet X^H$, то первое равенство из (1.4) может быть переписано как $\langle \mathrm{svec}\, X, \mathrm{svec}\, V\rangle = \langle \mathrm{svec}\, X^H, \mathrm{svec}\, V^H\rangle = 0$. Кроме того, данное равенство эквивалентно следующему:

$$\langle \mathrm{svec}\, X^H, \mathrm{svec}\, V^H\rangle = \langle \mathrm{svec}\, X_B^H, \mathrm{svec}\, V_B^H\rangle + \langle \mathrm{svec}\, X_N^H, \mathrm{svec}\, V_N^H\rangle = 0. \tag{2.3}$$

Если учесть, что в точке u соответствующие матрицы V_B^H и V_N^H имеют вид (2.2), то вектор $\mathrm{svec}\, V_B^H$ — нулевой, а вектор $\mathrm{svec}\, V_N^H$ равняется $\mathrm{svec}\, D(\theta)$, т. е. у него первые $n_\triangle - s_\triangle$ компоненты также нулевые. Поэтому равенство (2.3) заведомо будет выполняться, если матрица X^H такова, что соответствующая матрица X_N^H нулевая. Число $n_\triangle - s_\triangle$ играет важную роль и всюду ниже обозначается символом l.

Пусть u не является оптимальным решением двойственной задачи (1.2), и нам желательно перейти в новую крайнюю точку $\bar{u}$ с большим значением целевой функции. Считаем сначала для простоты, что u — регулярная крайняя точка. В этом случае $m = l$.

Наряду с разбиением матрицы $M \in \mathbb{S}^n$ на компоненты $M_B \in \mathbb{S}_B^n$ и $M_N \in \mathbb{S}_N^n$ нам потребуется разбиение вектора $\mathrm{svec}\, M$ на два подвектора, а именно $\mathrm{svec}\, M = [\mathrm{svec}_B M, \mathrm{svec}_N M]^T$, где первая компонента $\mathrm{svec}_B M$ имеет размерность l, вторая компонента $\mathrm{svec}_N M$ — размерность $s_\triangle$. В частности, $\mathrm{svec}\, V^H = \left[\mathrm{svec}_B V^H, \mathrm{svec}_N V^H\right]^T$, причем с учетом регулярности точки u справедливы равенства

$$\mathrm{svec}_B V^H = \mathrm{svec}_B V_B^H = 0_m, \quad \mathrm{svec}_N V^H = \mathrm{svec}_N V_N^H = \mathrm{svec}\, D(\theta_N) \in \mathbb{R}^{s_\triangle}.$$

Пусть $\mathcal{A}_{svec}^H$ — $(m \times n_\triangle)$-матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}\, A_i^H$, $1 \le i \le m$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}_{svec_B}^H$ — подматрица матрицы $\mathcal{A}_{svec}^H$, состоящая из ее первых m столбцов, т. е. из строк $\mathrm{svec}_B\, A_i^H$. Второе равенство из условий оптимальности (1.4) с использованием введенных обозначений может быть переписано в эквивалентной векторной форме как $\mathcal{A}_{svec}^H \mathrm{svec}\, X^H = b$. Если теперь потребовать, чтобы $\mathrm{svec}_N X^H = 0_{s_\triangle}$, то данное равенство сведется к системе линейных уравнений относительно вектора $\mathrm{svec}_B\, X^H$:

$$\mathcal{A}_{svec_B}^H \,\mathrm{svec}_B X^H = b. \tag{2.4}$$

Так как u — крайняя точка, то матрица этой системы неособая. Поэтому, разрешая систему (2.4), получаем

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}_{svec_B}^H\right)^{-1} b. \tag{2.5}$$

Для всей матрицы $X^H \in \mathbb{S}^n$ векторное представление следующее:

$$\mathrm{svec}\, X^H = \mathrm{svec}\, X_B^H = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{A}_{svec_B}^H\right)^{-1} b \\ 0_{s_\triangle} \end{bmatrix}.$$

Отсюда, в частности, следует, что у матрицы X^H правый нижний блок порядка s — нулевой. Поэтому у нее обязательно найдутся отрицательные собственные значения, если она оказывается матрицей окаймления.

В случае, когда матрица X^H, а следовательно и подобная ей матрица X, — положительно полуопределенная, получаем, что точка u вместе с соответствующей слабой двойственной переменной $V(u)$ составляют решение двойственной задачи (1.2), поскольку выполнены все условия оптимальности (1.3). Точка X будет решением исходной задачи (1.1).

Далее предполагаем, что X не является положительно полуопределенной матрицей. Обратимся к ее разложению $X = QD(\eta)Q^T$, где Q — ортогональная матрица; η — вектор собственных значений матрицы X, совпадающих с собственными значениями матрицы $X^H = X_B^H$. Проводя векторизацию матрицы X, с помощью известной формулы

$$\mathrm{vec}\ M_1 M_2 M_3 = (M_3^T \otimes M_1)\,\mathrm{vec}\ M_2, \tag{2.6}$$

где знак $\otimes$ означает произведение матриц по Кронекеру, получаем $\mathrm{vec}\, X = (Q \otimes Q)\, \mathrm{vec}\, D(\eta)$.

Перейдем в данной формуле от $\mathrm{vec}\, X$ и $\mathrm{vec}\, D(\eta)$ к $\mathrm{svec}\, X$ и $\mathrm{svec}\, D(\eta)$. Для этого нам потребуются специальные *элиминационные* и *дуплицирующие* матрицы (см. [9]), которые мы обозначим как $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n$. Обе матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ являются матрицами полного ранга и имеют соответственно размеры $n_\triangle \times n^2$ и $n^2 \times n_\triangle$. Если M — симметричная матрица порядка n, то $\mathrm{svec}\, M = \widetilde{\mathcal{L}}_n\, \mathrm{vec}\, M$, $\mathrm{vec}\, M = \widetilde{\mathcal{D}}_n \mathrm{svec}\, M$. Используя введенные матрицы, получаем

$$\mathrm{svec}\, X = \widetilde{\mathcal{L}}_n (Q \otimes Q)\, \mathrm{vec}\, D(\eta) = \widetilde{\mathcal{L}}_n (Q \otimes Q) \widetilde{\mathcal{D}}_n\, \mathrm{svec}\, D(\eta).$$

Заметим, что $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n$ несколько отличаются от элиминационных и дуплицирующих матриц $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ из [9], а именно: $\widetilde{\mathcal{L}}_n = \mathrm{Diag}\,(\mathrm{svec}\, E_n)\, \mathcal{L}_n$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n \mathrm{Diag}^{-1}(\mathrm{svec}\, E_n)$. Здесь E_n — квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице, $\mathrm{Diag}\,(a)$ — диагональная матрица с вектором a на диагонали.

Пусть q_i, $1 \le i \le n$, — столбцы ортогональной матрицы Q (собственные векторы матрицы X). Тогда X можно записать также в следующем матричном и векторном виде:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i q_i q_i^T, \quad \mathrm{vec}\, X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \left(q_i \otimes q_i \right). \tag{2.7}$$

Предположим, что η^k — отрицательное собственное значение матрицы X и q_k — соответствующий собственный вектор. Перейдем в новую точку $\bar{u}$, положив

$$\bar{u} = u - \alpha \Delta u, \tag{2.8}$$

где $\alpha > 0$. От вектора $\Delta u \in \mathbb{R}^m$ потребуем, чтобы он удовлетворял системе линейных уравнений

$$\left(\mathcal{A}^H_{svec_B} \right)^T \Delta u = \mathrm{svec}_B\, Q_k^H. \tag{2.9}$$

Здесь и ниже $Q_k^H = H^T Q_k H$, $Q_k = q_k q_k^T$. Симметричная матрица Q_k — положительно полуопределенная и имеет единичный ранг.

Поскольку матрица $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ неособая, то, разрешая данную систему, находим

$$\Delta u = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B} \right)^{-T} \mathrm{svec}_B\, Q_k^H, \tag{2.10}$$

где используется условное обозначение $M^{-T} = (M^T)^{-1}$.

Утверждение 1. *Вектор q_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(H_N)$, порожденному столбцами матрицы H_N.*

Доказательство. В самом деле, если допустить, что $q_k = H_N z$ для некоторого ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^s$, то должно выполняться $X q_k = X H_N z = \eta^k H_N z$. Отсюда после умножения этого равенства слева на матрицу H_N^T получаем $H_N^T X H_N z = \eta^k z$, что невозможно, поскольку матрица $H_N^T X H_N$ нулевая.

Утверждение доказано.

Замечание. Так как ненулевой вектор q_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(H_N)$, то его можно представить в виде

$$q_k = H_B q_k^{H,B} + H_N q_k^{H,N}, \tag{2.11}$$

причем обязательно $q_k^{H,B} = H_B^T q_k \neq 0_r$. Если $q_k^{H,N} = H_N^T q_k = 0_s$, то $q_k = H_B q_k^{H,B}$, и матрица Q_k оказывается принадлежащей грани $\mathcal{G}^*_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)$, которая является сопряженной к минимальной грани $\mathcal{G}_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)$ конуса $\mathbb{S}^n_+$, содержащей точку $V = V(u)$.

Рассмотрим вопрос о том, как изменится значение целевой функции в двойственной задаче (1.2) при переходе в новую точку $\bar{u}$.

Утверждение 2. *Имеет место следующая формула для приращения значения целевой функции в двойственной задаче*:

$$\langle b, \bar{u}\rangle = \langle b, u\rangle - \alpha\eta^k > \langle b, u\rangle. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле пересчета (2.8) $\langle b, \bar{u}\rangle = \langle b, u\rangle - \alpha\langle b, \Delta u\rangle$. Но

$$\langle b, \Delta u\rangle = \langle b, \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-T} \operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle = \langle \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-1} b, \operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle$$
$$= \langle \operatorname{svec}_B X^H_B,\ \operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle = \langle \operatorname{svec} X^H_B, \operatorname{svec} Q^H_k\rangle = \langle \operatorname{vec}\, X^H_B, \operatorname{vec}\, Q^H_k\rangle.$$

Здесь мы учли, что у вектора $\operatorname{svec} X^H_B$ последние $s_\triangle$ компоненты нулевые.

Поскольку $X^H_B = X^H$, то согласно (2.7) $X^H = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta^i Q^H_i$, где $Q^H_i = H^T q_i q_i^T H$. Тогда, используя (2.6), получаем: $\operatorname{vec} X^H_B = (H^T \otimes H^T) \sum\limits_{i=1}^{m} \eta^i \operatorname{vec}(q_i q_i^T) = (H \otimes H)^T \sum\limits_{i=1}^{m} \eta^i (q_i \otimes q_i)$. Отсюда, принимая во внимание, что $\operatorname{vec}\, Q^H_k = (H \otimes H)^T (q_k \otimes q_k)$, приходим к $\langle \operatorname{vec}\, X^H_B, \operatorname{vec}\, Q^H_k\rangle = \eta^k$. Таким образом, выполнено (2.12).

Утверждение доказано.

Введем в рассмотрение матрицу $\Delta V^H = \sum_{i=1}^m (\Delta u)^i A^H_i$ и разобьем ее на две составляющие матрицы: $\Delta V^H = \Delta V^H_B + \Delta V^H_N$. Для первой матрицы ΔV^H_B получаем

$$\operatorname{svec}_B \Delta V^H_B = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \Delta u = \operatorname{svec}_B Q^H_k. \tag{2.13}$$

Поскольку правый нижний блок у матриц $A_{i,B}$, $1 \le i \le m$, нулевой, то из (2.13) следует, что $\Delta V^H_B = (Q^H_k)_B$. Отметим, что у матрицы $(Q^H_k)_B$ правый нижний блок также нулевой. Вычислим далее ΔV^H_N. Снова проводя векторизацию, получаем

$$\operatorname{svec}_N \Delta V^H_N = \left(\mathcal{A}^H_{svec_N}\right)^T \Delta u = \left(\mathcal{A}^H_{svec_N}\right)^T \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-T} \operatorname{svec}_B Q^H_k. \tag{2.14}$$

Формуле пересчета (2.8) соответствует формула пересчета слабой двойственной переменной

$$\bar{V}^H(\alpha) = V^H(\bar{u}) = V^H(u) + \alpha\Delta V^H. \tag{2.15}$$

Утверждение 3. *Существует* $\bar{\alpha} > 0$ *такое, что* $\bar{V}^H(\alpha) \succeq 0$ *для любого* $0 < \alpha \le \bar{\alpha}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся представлением (2.11) вектора q_k. Тогда вектор $q^H_k = H^T q_k$ разбивается на два подвектора: $q^H_k = \left[q^{H,B}_k, q^{H,N}_k\right]^T$, где $q^{H,B}_k \in \mathbb{R}^r$; $q^{H,N}_k \in \mathbb{R}^s$, причем $q^{H,B}_k \ne 0_r$. Представим также матрицу-приращение ΔV^H в блочном виде:

$$\Delta V^H = \begin{bmatrix} \Omega_{BB} & \Omega_{BN} \\ \Omega_{NB} & \Omega_{NN} \end{bmatrix},$$

в которой диагональные блоки Ω_{BB} и Ω_{NN} имеют соответственно порядки r и s. Так как $\Delta V^H_B = (Q^H_k)_B$, то $\Omega_{BB} = q^{H,B}_k (q^{H,B}_k)^T$ и $\Omega_{BN} = (\Omega_{NB})^T = q^{H,B}_k (q^{H,N}_k)^T$. Матрица Ω_{NN} имеет векторное представление (2.14). Поэтому согласно (2.2) и (2.15)

$$\bar{V}^H(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha q^{H,B}_k \left(q^{H,B}_k\right)^T & \alpha q^{H,B}_k \left(q^{H,N}_k\right)^T \\ \alpha q^{H,N}_k \left(q^{H,B}_k\right)^T & D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN} \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Добавляя и вычитая в правом нижнем блоке матрицу $\alpha q^{H,N}_k (q^{H,N}_k)^T$, получаем еще одно представление матрицы $\bar{V}^H(\alpha)$, а именно:

$$\bar{V}^H(\alpha) = \alpha Q^H_k + \begin{bmatrix} 0_{rr} & 0_{rs} \\ 0_{sr} & D(\theta_N) + \alpha\widetilde{\Omega}_{NN} \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

где $\widetilde{\Omega}_{NN} = \Omega_{NN} - q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$.

Матрица единичного ранга Q_k^H является положительно полуопределенной. Кроме того, принимая во внимание, что $\theta_N > 0_s$, приходим к выводу, что правая нижняя подматрица $\widetilde{Y}_{NN}(\alpha) = D(\theta_N) + \alpha\widetilde{\Omega}_{NN}$ во второй матрице в (2.17) будет оставаться положительно определенной при α достаточно малом. Следовательно, можно указать такое $\bar{\alpha} > 0$, для которого $\bar{V}^H(\alpha) \succeq 0$ для всех $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$.

Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Если матрица Ω_{NN} такова, что $\Omega_{NN} \succeq q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$, то матрица $\widetilde{\Omega}_{NN}$, а следовательно и матрица $\widetilde{Y}_{NN}(\alpha)$, являются положительно полуопределенными для всех $\alpha > 0$. В этом случае двойственная задача (1.2) не имеет решения.

Предположим далее, что у матрицы $\widetilde{\Omega}_{NN}$ имеются отрицательные собственные значения, т. е. неравенство $\Omega_{NN} \succeq q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$ не выполняется. В этом случае верхняя оценка на максимальное $\bar{\alpha}$, сохраняющее положительную полуопределенность матрицы $\bar{V}^H(\alpha)$, получается как то минимальное α, при котором впервые у матрицы $\widetilde{Y}_{NN}(\alpha)$ появляется нулевое собственное значение.

Можно уточнить оценку на максимально возможное $\bar{\alpha}$. В самом деле, опять из-за того, что $\theta_N > 0_s$, правая нижняя матрица $Y_{NN}(\alpha) = D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}$ остается положительно определенной при α достаточно малом. Поэтому вся матрица $\bar{V}^H(\alpha)$, как видно из (2.16), будет положительно полуопределенной, если дополнение по Шуру матрицы $Y_{NN}(\alpha)$, т. е. матрица

$$\bar{Y}_{NN}(\alpha) = \alpha \left\{ q_k^{H,B}\left(q_k^{H,B}\right)^T - \alpha q_k^{H,B}\left(q_k^{H,N}\right)^T \left[D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}\right]^{-1} q_k^{H,N}\left(q_k^{H,B}\right)^T \right\},$$

также является положительно полуопределенной.

Понятно, что это условие выполняется, если вектор $q_k^{H,N}$ нулевой. Матрица $\bar{V}^H$ в этом случае становится блочно-диагональной. Далее считаем, что $q_k^{H,N}$ отличен от нулевого вектора. Обозначая $p(\alpha) = \left(q_k^{H,N}\right)^T \left[D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}\right]^{-1} q_k^{H,N}$, получаем, что

$$\bar{Y}_{NN}(\alpha) = \alpha\left[1 - \alpha p(\alpha)\right] q_k^{H,B}\left(q_k^{H,B}\right)^T.$$

Матрица $\bar{Y}_{NN}$ также остается положительно полуопределенной при α достаточно малом. Отсюда делаем вывод, что $\bar{\alpha}$ определяется из двух условий. Первое условие — это то минимальное α (обозначим его $\bar{\alpha}_1$), при котором у матрицы $Y_{NN}(\alpha)$ впервые появляется нулевое собственное значение. Второе условие заключается в выполнении неравенства $\alpha \leq p(\alpha)^{-1}$. Если оказывается, что оно впервые нарушается при некотором $\bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1$, то верхняя оценка на $\bar{\alpha}$ следующая: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_2$. Иначе $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$.

3. Итерация в нерегулярной точке

Предположим теперь, что точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ является нерегулярной, т. е. ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет строгому неравенству $s_\triangle < n_\triangle - m$. В этом случае система (2.4) становится недоопределенной. Возьмем тогда в качестве $\mathrm{svec}_B X^H$ решение (2.4) с минимальной нормой

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \left[\mathcal{A}^H_{svec_B}\left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T\right]^{-1} b. \tag{3.1}$$

Оно принадлежит пространству строк матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Общее решение системы (2.4) имеет следующий вид: $\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \left[\mathcal{A}^H_{svec_B}\left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T\right]^{-1} b + g$, где g — произвольный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Если $m + p = l$, то размерность нуль-пространства $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ равняется p. Ниже считаем, что $p < s$. Такие нерегулярные точки u, в которых ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет неравенству $s_\triangle + s > n_\triangle - m$, в дальнейшем называются *квазирегулярными*.

Рассмотрим матрицу $X = HX^H H^T$. Она подобна матрице $X^H = X^H_B$, вектор $\mathrm{svec}_B\, X^H$ которой определяется равенством (3.1). Пусть η^k — отрицательное собственное значение матрицы X, ему соответствует собственный вектор q_k. Как и в регулярной точке u, вектор q_k не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{R}(H_N)$.

Система (2.9) для определения направления Δu в этом случае становится переопределенной. Поэтому рассмотрим другой, более общий, способ нахождения Δu. Перейдем от Δu к направлению ΔV в V-пространстве, которое будем искать в следующем виде:

$$\Delta V = [q_k \; H_N] \left[\begin{array}{cc} 1 & w^T \\ w & \Delta Z \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} q_k^T \\ H_N^T \end{array} \right] = Q_k + q_k w^T H_N^T + H_N w q_k^T + H_N \Delta Z H_N^T. \tag{3.2}$$

Здесь $\Delta Z \in \mathbb{S}^s$, $w \in \mathbb{R}^s$.

Потребуем, чтобы вектор w выбирался следующим образом: $w = Wy$, где все столбцы $w_j \in \mathbb{R}^s$, $1 \le j \le p$, матрицы W линейно независимы, $y \in \mathbb{R}^p$. Кроме того, потребуем, чтобы векторы $h_{w_j} = H_N w_j$, $1 \le j \le p$, были ортогональны вектору q_k, т. е.

$$\langle q_k, h_{w_j} \rangle = \langle H_N^T q_k, w_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le p. \tag{3.3}$$

Все векторы h_{w_j}, $1 \le j \le p$, принадлежат подпространству $\mathcal{R}(H_N)$.

Наряду с (3.2) имеет место связь между ΔV и Δu, а именно $\Delta V = \sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i$. Приравнивая между собой это представление для ΔV и (3.2), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i = Q_k + q_k y^T W^T H_N^T + H_N W y q_k^T + H_N \Delta Z H_N^T.$$

Проведем его векторизацию. Предварительно обозначим для сокращения записи:

$$W_N = H_N W, \quad U_{W_N, q_k} = W_N \otimes q_k + q_k \otimes W_N, \quad \mathcal{H}_N = H_N \otimes H_N.$$

Тогда с учетом того, что $\mathrm{vec}\; y^T = \mathrm{vec}\; y = y$, получаем

$$\mathcal{A}^T_{vec}\, \Delta u - U_{W_N, q_k} y - \mathcal{H}_N \,\mathrm{vec}\; \Delta Z = \mathrm{vec}\; Q_k. \tag{3.4}$$

Перепишем далее равенство (3.4) в базисе, задаваемом ортогональной матрицей H. Для этого умножим его слева на матрицу $(H \otimes H)^T = H^T \otimes H^T$. Так как

$$(H^T \otimes H^T)(H_N \otimes H_N) = \left[\begin{array}{c} 0_{rs} \\ I_s \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} 0_{rs} \\ I_s \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} 0_{(rn)s^2} \\ \mathrm{Diag}\left(\left[\begin{array}{c} 0_{rs} \\ I_s \end{array} \right], \ldots, \left[\begin{array}{c} 0_{rs} \\ I_s \end{array} \right] \right) \end{array} \right] \tag{3.5}$$

и $U^H_{W_N, q_k} = (H^T \otimes H^T) U_{W_N, q_k} = W_N^H \otimes q_k^H + q_k^H \otimes W_N^H$, где $q_k^H = H^T q_k$, $W_N^H = H^T W_N$, то имеем

$$(\mathcal{A}^H_{vec})^T \Delta u - \left\{ U^H_{W_N, q_k} y + \Gamma^H \,\mathrm{vec}\; \Delta Z \right\} = \mathrm{vec}\; Q_k^H, \tag{3.6}$$

где Γ^H — матрица, стоящая в правой части (3.5).

Столбцы матриц $U^H_{W_N, q_k}$ и Γ^H соответствуют симметричным матрицам (в случае матрицы Γ^H единственные единичные элементы в столбце стоят на позициях диагональных элементов). В силу указанного обстоятельства систему (3.6) можно переписать следующим образом:

$$(\mathcal{A}^H_{svec})^T \Delta u - \widetilde{U}^H_{W_N, q_k} y - \widetilde{\Gamma}^H \mathrm{svec}\, \Delta Z = \mathrm{svec}\, Q_k^H, \tag{3.7}$$

где $\widetilde{U}^H_{W_N,q_k} = \widetilde{\mathcal{L}}_n U^H_{W_N,q_k}$; $\widetilde{\Gamma}^H = \widetilde{\mathcal{L}}_n \Gamma^H \widetilde{\mathcal{D}}_s$. Заметим, что матрица $\widetilde{\Gamma}^H$ размера $n_\triangle \times s_\triangle$ такова, что ее верхняя подматрица размера $l \times s_\triangle$ нулевая. Система (3.7) есть система $n_\triangle$ линейных уравнений относительно $n_\triangle$ переменных: Δu, y и $\operatorname{svec}\Delta Z$. Если матрица этой системы

$$\mathcal{M} = \left[(\mathcal{A}^H_{svec})^T \vdots -\widetilde{U}^H_{W_N,q_k} \vdots -\widetilde{\Gamma}^H\right]$$

неособая, то она имеет единственное решение.

Предположим далее, что матрица $\mathcal{M}$ неособая. Так как матрицы A_i, $1 \le i \le m$, линейно независимы, то матрица $\mathcal{A}^H_{svec}$ имеет полный ранг, равный m. Более того, поскольку u — крайняя точка множества $\mathcal{F}_{D,u}$, матрица $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ размера $m \times l$ также имеет ранг m, т. е. полный ранг по строкам.

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольная матрица размера $p \times l$, строками которой являются линейно независимые векторы из нуль-пространства матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Составим с использованием матриц $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ и $\mathcal{K}$ квадратную матрицу

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}^H_{svec_B} & 0_{ls_\triangle} \\ 0_{s_\triangle l} & I_{s_\triangle} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{A}}^H_{svec_B} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^H_{svec_B} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix},$$

причем матрица $\bar{\mathcal{A}}^H_{svec_B}$ по своему определению является неособой. Если умножить систему (3.7) слева на неособую матрицу $\mathcal{Q}$, то ее решение не изменится.

Обозначим через $\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$ верхнюю подматрицу матрицы $\widetilde{U}^H_{W_N,q_k}$ размера $l \times p$. Имеем после умножения (3.7) на первую строку матрицы $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{W}\Delta u = \mathcal{A}^H_{svec_B}\left[\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k} y + \operatorname{svec}_B Q^H_k\right], \quad \mathcal{K}\left[\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k} y + \operatorname{svec}_B Q^H_k\right] = 0_p, \tag{3.8}$$

где $\mathcal{W} = \mathcal{A}^H_{svec_B}(\mathcal{A}^H_{svec_B})^T$.

Квадратная матрица $\mathcal{W}$ порядка m неособая, поэтому

$$\Delta u = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k} y + \operatorname{svec}_B Q^H_k\right]. \tag{3.9}$$

Если квадратная матрица $\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$ порядка p неособая, то, разрешая вторую систему (3.8), получаем $y = -\left(\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^{-1}\mathcal{K}\operatorname{svec}_B Q^H_k$. После подстановки найденного y в выражение (3.9) для Δu приходим к

$$\Delta u = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[I_l - \mathcal{P}\right]\operatorname{svec}_B Q^H_k, \quad \mathcal{P} = \widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\left(\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^{-1}\mathcal{K}. \tag{3.10}$$

Вычислим теперь изменение значения целевой функции в двойственной задаче (1.2) вдоль направления Δu.

Утверждение 4. *Пусть для столбцов w_j матрицы W, $1 \le j \le p$, выполняются равенства* (3.3). *Тогда двойственная целевая функция в точке $\bar{u}$ принимает значение* (2.12).

Доказательство. Имеем после подстановки Δu из (3.10):

$$\begin{aligned}\langle b, \Delta u\rangle &= \langle b, \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[I_l - \mathcal{P}\right]\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle = \langle(\mathcal{A}^H_{svec_B})^T\mathcal{W}^{-T}b, \operatorname{svec}_B Q^H_k - \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle \\ &= \langle \operatorname{svec}_B X^H, \operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle - \langle \operatorname{svec}_B X^H, \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle \\ &= \langle \operatorname{vec} X, \operatorname{vec} Q_k\rangle - \langle \operatorname{svec}_B X^H, \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle = \eta^k - \langle \operatorname{svec}_B X^H, \mathcal{P}\operatorname{svec}_B Q^H_k\rangle.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Рассмотрим более подробно матрицу $\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$, предварительно уточнив вид матрицы $U^H_{W_N,q_k}$. Поскольку $W^H_N = [0_{rs} \vdots W]^T$, то i-й столбец матрицы $W^H_N \otimes q^H_k$ есть $\operatorname{vec}\left[0_{nr} \vdots w_i \otimes q^H_k\right]$,

$1 \le i \le p$. Поэтому у матрицы $W_N^H \otimes q_k^H$ верхняя подматрица размера $(rn)\times p$ нулевая. Следовательно, у матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}_n(W_N^H \otimes q_k^H)$ верхняя подматрица размера $l\times p$ также будет нулевой. Таким образом, матрица $\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}$ совпадает с верхней $(l \times p)$-подматрицей матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}_n(q_k^H \otimes W_N^H)$.

Вычислим p-мерный вектор $z = \left(\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^T \mathrm{svec}_B X^H$. Так как последние $s_\triangle$ элементы вектора svec X^H нулевые, то j-й элемент вектора z определяется как

$$z^j = \langle \widetilde{\mathcal{L}}_n \left(q_k^H \otimes (H^T H_N w_j)\right), \mathrm{svec}\ X^H\rangle = \langle q_k^H \otimes (H^T H_N w_j), \mathrm{vec}\ X^H\rangle$$
$$= \langle (H\otimes H)\left((H^T q_k)\otimes (H^T H_N w_j)\right), \mathrm{vec}\ X\rangle = \langle q_k \otimes (H_N w_j), \mathrm{vec}\ X\rangle$$
$$= (q_k \otimes (H_N w_j))^T \mathrm{vec}\ X = \left(q_k^T \otimes (H_N w_j)^T\right) \mathrm{vec}\ X.$$

Отсюда с учетом условия (3.3) и равенства $\mathrm{vec}\ X = \sum\limits_{i=1}^n \eta^i (q_i \otimes q_i)$ получаем

$$z^j = \sum_{i=1}^n \eta^i \left(q_k^T \otimes (w_j^T H_N^T)\right)(q_i \otimes q_i) = \eta^k w_j^T H_N^T q_k = 0.$$

Следовательно $z = 0_p$, что приводит к равенству

$$\langle \mathrm{svec}_B\, X_B^H, \mathcal{P}\mathrm{svec}_B\, Q_k^H\rangle = \left\langle \left(\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^T \mathrm{svec}_B\, X_B^H, \left(\mathcal{K}\widetilde{U}^{H,B}_{W_N,q_k}\right)^{-1} \mathcal{K}\mathrm{svec}_B\, Q_k^H \right\rangle = 0.$$

Осталось воспользоваться равенством (3.11).

Утверждение доказано.

Рассмотрим в заключение вопрос о сходимости метода. Мы скажем, что задача (1.2) *квазирегулярная*, если все крайние точки из $\mathcal{F}_{D,u}$ регулярные или квазирегулярные. Предполагаем дополнительно, что в качестве отрицательного собственного значения η^k на каждом шаге берется максимальное по модулю значение.

Теорема. *Пусть задача* (1.2) *является квазирегулярной, начальная точка* $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ *такова, что множество* $\mathcal{F}_{D,u}(u_0) = \{u \in \mathcal{F}_{D,u} \colon \langle b, u\rangle \ge \langle b, u_0\rangle\}$ *ограничено. Тогда двойственный симплекс-метод порождает последовательность точек* $\{u_k\} \subset \mathcal{F}_{D,u}(u_0)$, *которая либо конечна, и тогда последняя точка есть решение* (1.2), *либо* $\{u_k\}$ *бесконечна, и тогда любая ее предельная точка также является решением* (1.2).

Доказательство. Ограничимся рассмотрением только случая, когда последовательность $\{u_k\}$ бесконечная. Так как она ограниченная, то у нее существуют предельные точки. Пусть $u_{k_s} \to \bar{u}$. Точка $\bar{u}$ является крайней.

Последовательности $\{u_k\}$ соответствует последовательность матриц $\{V_k\}$, где $V_k = V(u_k)$. Ранг таких матриц в крайних точках ограничен. Это приводит к тому, что все соответствующие матрицы H_N также ограничены по норме (Фробениуса), т. е. принадлежат компактному множеству. Поэтому из $\{V_{k_s}\}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой матрицы H_N сходятся к некоторой матрице $\bar{H}_N$. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{V_{k_s}\}$ обладает этим свойством и ранг у всех матриц H_N один и тот же. Обозначим через $\bar{H}$ ортогональную матрицу, у которой вторая компонента есть $\bar{H}_N$.

Если обратиться к матрице $\mathcal{A}^{\bar{H}}_{svec_B}$, входящей в систему (2.4) для определения вектора $\mathrm{svec}_B X^{\bar{H}}$ в точке $\bar{u}$, то, поскольку $\bar{u}$ — крайняя точка, данная матрица имеет полный ранг, совпадающий с рангом по строкам. Отсюда приходим к выводу, что решения системы (2.4), а именно векторы $\mathrm{svec}_B X^{H_{k_s}}$, определяемые либо (2.5), либо (3.1), сходятся к $\mathrm{svec}_B \bar{X}^{\bar{H}}$.

Матрица $\bar{X}$ должна быть положительно полуопределенной, так как иначе у $\bar{X}$ имеется отрицательное собственное значение. Но собственные значения матриц непрерывны по Липшицу. Поэтому у матриц X_{k_s}, достаточно близких к $\bar{X}$, также существуют отрицательные собственные значения. Отсюда следует, что на этих итерациях должен осуществляться переход из точек u_{k_s} в последующие точки u_{k_s+1} с шагом α_{k_s} и с увеличением значения целевой функции на величину $-\alpha_{k_s}\bar{\eta}_{k_s}$, где $\bar{\eta}_{k_s}$ — максимальная по модулю отрицательная компонента вектора η_{k_s}. Однако из-за ограниченности векторов Δu_k шаги α_{k_s} не могут стремиться к нулю. Поэтому на некоторой k_s-й итерации обязательно получим, что $\langle b, u_{k_s+1}\rangle > \langle b, \bar{u}\rangle$; это в силу монотонного увеличения значений целевой функции вдоль траектории противоречит сходимости $\{u_{k_s}\}$ к $\bar{u}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 312 с.
2. **Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 347 с.
3. **Vandenberghe L., Boyd S.** Semidefinite programming // SIAM Review. 1996. Vol. 38, № 1. P. 49–95.
4. Handbook of Semidefinite Programming / eds. H. Wolkowicz, R. Saigal, L. Vandenberghe. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 656 p.
5. **Lasserre J. B.** Linear programming with positive semi-definite matreces // Math. Problems in Engineering. 1996. Vol. 2. P. 499–522.
6. **Pataki G.** Cone-LP’s and semidefinite programs: geometry and simplex-type method // Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5). Vancouver, 1996. P. 1–13.
7. **Косолап А. И.** Симплекс-метод для решения задач полуопределенного программирования // Вестн. Донец. нац. ун-та. 2009. Вып. 2. С. 365–369. (Сер. А: Естественные науки.)
8. **Жадан В. Г.** Об одном варианте симплекс-метода для линейной задачи полуопределенного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 117–127.
9. **Магнус Я. Р., Нейдеккер Ч.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.

Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
профессор
главный науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына
ФИЦ “Информатика и управление” РАН
e-mail: zhadan@ccas.ru

Поступила 16.05.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУППАХ НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ[1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно разных характеристик. Доказано, что если G — классическая группа достаточно большого лиева ранга, то графы простых чисел групп G и G_1 могут совпадать только при выполнении одного из трех случаев. Также доказано, что если $G = A_1(q)$ и G_1 — классическая группа, то графы простых чисел групп G и G_1 совпадают только если $\{G, G_1\}$ равно $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$ или $\{A_1(49), {}^2A_3(3)\}$.

Ключевые слова: конечная простая классическая группа, граф простых чисел, спектр.

M. R. Zinov'eva. On finite simple classical groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs.

Suppose that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. We define a graph on $\pi(G)$ with the following adjacency relation: different vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of G and is denoted by $GK(G)$. Let G and G_1 be two nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders q and q_1, respectively, with different characteristics. It is proved that, if G is a classical group of a sufficiently high Lie rank, then the prime graphs of the groups G and G_1 may coincide only in one of three cases. It is also proved that, if $G = A_1(q)$ and G_1 is a classical group, then the prime graphs of the groups G and G_1 coincide only if $\{G, G_1\}$ is equal to $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, or $\{A_1(49), {}^2A_3(3)\}$.

Keywords: finite simple classical group, prime graph, spectrum.

MSC: 05C25, 20D05, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-101-116

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В “Коуровской тетради” [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одним и тем же графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случаях, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Мы в [4] исследовали этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В данной работе продолжается это исследование. Мы рассматриваем две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является классической группой.

[1]Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 15-11-10025).

Далее $q = p^f$ и $q_1 = p_1{}^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа.

Мы рассматриваем только простые группы. Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ через $A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$, через $D^{\varepsilon}_n(q)$ обозначается $D_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2D_n(q)$ при $\varepsilon = -$, а через $E^{\varepsilon}_6(q)$ обозначается $E_6(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2E_6(q)$ при $\varepsilon = -$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество конечных простых классических групп $A^{\pm}_{n-1}(q)$, где $n \geq 7$, $B_n(q)$, где $n \geq 5$, $C_n(q)$, где $n \geq 5$, $D^{\pm}_n(q)$, где $n \geq 5$.

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [5–8], мы получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $G = A_1(q)$ и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая классическая группа над полем из q_1 элементов. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то $\{G, G_1\}$ равно $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$ или $\{A_1(49), {}^2A_3(3)\}$.*

Теорема 2. *Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Если $G \in \mathcal{M}$ и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) $\{G, G_1\} = \{A^{\varepsilon}_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$ и $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$;*

(2) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где либо n четно, либо $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 нечетно;*

(3) $\{G, G_1\} = \{D^{\varepsilon}_n(q), D^{\varepsilon}_n(q_1)\}$, *где n четно и $\varepsilon \in \{+,-\}$.*

З а м е ч а н и е. Нам известны следующие пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик с одним и тем же графом простых чисел: $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, $\{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$, $\{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$, $\{G_2(3), A_1(13)\}$.

Г и п о т е з а. Указанные в замечании пары исчерпывают все пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик с одним и тем же графом простых чисел.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент в графе $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [5; 6] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [7; 8] получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Индуцированный подграф называется *кокликой*, если его вершины попарно несмежны. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком. Максимальной по включению кокликой* будем называть коклику, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Согласно [8, определения 3.3–3.8] определяются подмножества $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ множества $\pi(G)$. Если G — одна из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A^{\varepsilon}_2(q)$, то $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ определяются согласно [8, определения 3.3–3.7]. Если G не является одной из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A^{\varepsilon}_2(q)$, то согласно [8, определение 3.8], через $\theta(G)$ обозначается пересечение всех коклик максимального размера графа $GK(G)$, а через $\Theta(G)$ — множество $\{\theta(G)\}$. Множество $\Theta'(G)$ состоит из всех подмножеств $\theta'(G)$ из $\pi(G) \setminus \theta(G)$, для которых $\theta(G) \cup \theta'(G)$ — коклика максимального размера в графе $GK(G)$.

Лемма 1 (теорема Жигмонди, 1892 [9]). *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.*

Таблица 1

Конечные простые группы G лиева типа над полем характеристики 2 с $t(G) = 5$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$C_6(2)$		2	5	1	$\{7, 11, 13, 17, 31\}$	$\{\varnothing\}$
$C_6(q)$	$q > 2$	2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
$A_8(q)$	$q > 2$	3	5	1	$\{r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{\varnothing\}$
$A_9(q)$	$q > 2$	3	5	1	$\{r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_5\}$, $\{r_{10}\}$
${}^2A_8(q)$		3	5	1	$\{r_3, r_8, r_{10}, r_{14}, r_{18}\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2A_9(q)$		3	5	1	$\{r_3, r_8, r_{14}, r_{18}\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$C_5(q)$	$q > 2$	3	5	1	$\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2D_7(2)$		3	5	1	$\{11, 13, 31, 43\}$	$\{7\}$,$\{17\}$
$A_{10}(2)$		3	5	2	$\{17, 73, 127, r_{11}\}$	$\{11\}$,$\{31\}$
$F_4(q)$	$q > 2$	3	5	3	$\{r_3, r_4, r_6, r_8, r_{12}\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2D_6(2)$		4	5	1	$\{11, 13, 17, 31\}$	$\{5\}$,$\{7\}$
${}^2D_6(q)$	$q > 2$	4	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$E_6(2)$		4	5	2	$\{5, 17, 31, 73\}$	$\{7\}$,$\{13\}$
$E_6(q)$	$q > 2$	4	5	2	$\{r_5, r_8, r_9\}$	$\{r_3, r_4\}$, $\{r_4, r_{12}\}$, $\{r_6, r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$	$q > 2$	4	5	2	$\{r_8, r_{10}, r_{18}\}$	$\{r_3, r_{12}\}$, $\{r_4, r_6\}$, $\{r_4, r_{12}\}$
${}^2F_4(q)$	$q \geq 32$	4	5	3	$\{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2E_6(2)$		4	5	4	$\{11, 13, 17, 19\}$	$\{5\}$,$\{7\}$

Согласно [7] если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod 4$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod 4$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n.

Для натурального n через n_p обозначается p-часть числа n.

Определяем, как в [7; 8], функции $\eta(x)$, $\nu(x)$ и $\nu_\varepsilon(x)$ на множестве натуральных чисел:

$$\eta(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \text{ нечетном,} \\ x/2 & \text{при } x \text{ четном,} \end{cases} \quad \nu(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \equiv 0 \pmod 4, \\ x/2 & \text{при } x \equiv 2 \pmod 4, \\ 2x & \text{при } x \equiv 1 \pmod 2, \end{cases} \quad \nu_\varepsilon(x)=\begin{cases} x & \text{при } \varepsilon = +, \\ \nu(x) & \text{при } \varepsilon = -. \end{cases}$$

Пусть n — натуральное число. Следуя [7; 8], положим $m_1(G, n) = 3^{2n+1} - 1$, $m_2(G, n) = 3^{2n+1} + 1$, $m_3(G, n) = 3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1$, $m_4(G, n) = 3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1$, $m_1(F, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(F, n) = 2^{2n+1} + 1$, $m_3(F, n) = 2^{4n+2} + 1$, $m_4(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{2n+1} + 1$, $m_5(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{3n+2} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_6(F, n) = 2^{4n+2} + 2^{3n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Если G — одна из групп ${}^2F_4(2^{2n+1})$ или ${}^2G_2(3^{2n+1})$, то через $S_i(G)$ обозначаются множество $\pi(m_i(F, n)) \setminus \{3\}$ для $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$ $(i = 1, \ldots, 6)$ и множество $\pi(m_i(G, n)) \setminus \{2\}$ для $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Если группа G фиксирована, то положим $S_i = S_i(G)$ и через s_i обозначим любой элемент из S_i.

На основе результатов [5–8] нами были составлены таблицы (см. [4, табл. 1 и 2]), в которых описаны некоторые числовые характеристики и максимальные коклики графов простых чисел конечных простых групп G лиева типа с $t(G) \leq 6$ для четного q и с $t(G) \leq 4$ для нечетного q. Мы продолжим эти описания, приведя все конечные простые группы G лиева типа с $t(G) = 5$ (табл. 1, 2).

Лемма 2 (Героно, 1870 [10]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Таблица 2

Конечные простые группы G лиева типа над полем нечетной характеристики p с $t(G) = 5$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$A_8(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{\varnothing\}$
$^2A_8(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_8, r_{10}, r_{14}, r_{18}\}$	$\{\varnothing\}$
$B_5(q)$, $C_5(q)$	$q \neq 3$	2	5	1	$\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$	$\{\varnothing\}$
$A_9(q)$		2	5	1	$\{r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$^2A_9(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_8, r_{14}, r_{18}\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$B_6(q)$, $C_6(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
$^2D_6(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$F_4(q)$		2	5	2	$\{r_3, r_4, r_6, r_8, r_{12}\}$	$\{\varnothing\}$
$B_5(3)$, $C_5(3)$		2	5	2	$\{7, 11, 13, 41, 61\}$	$\{\varnothing\}$
$E_6(q)$		3	5	2	$\{r_5, r_8, r_9\}$	$\{r_3, r_4\}, \{r_4, r_{12}\}, \{r_6, r_{12}\}$
$^2E_6(q)$		3	5	2	$\{r_8, r_{10}, r_{18}\}$	$\{r_3, r_{12}\}, \{r_4, r_6\}, \{r_4, r_{12}\}$
$^2G_2(3^{2n+1})$	$n \geq 1$	3	5	3	$\{3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$\{\varnothing\}$

Лемма 3. *Пусть p — простое число, f — натуральное число и α — четное натуральное число. Тогда уравнение $2^{2f} + 2^f + 1 = p^\alpha$ не имеет решений.*

Доказательство. Так как α четно, то $\alpha = 2k$ для некоторого натурального k. Поэтому уравнение $2^{2f} + 2^f + 1 = p^\alpha$ можно записать в виде $2^f(2^f + 1) = (p^k - 1)(p^k + 1)$. Учитывая, что p нечетно, получаем $(p^k - 1, p^k + 1) = 2$. Таким образом, 2^{f-1} делит $p^k - 1$ или $p^k + 1$.

Предположим, что 2^{f-1} делит $p^k - 1$. Получаем $p^k - 1 = 2^{f-1}t$ и $p^k + 1 = 2(2^f + 1)/t$, где t — нечетное натуральное число. Если $t = 1$, то $2^{f-1} + 2 = 2^{f+1} + 2$; противоречие. Если $t \geq 3$, то $3 \cdot 2^{f-1} + 1 \leq p^k \leq 2(2^f + 1)/3 - 1$, т. е. $2^f \leq -8/5$; противоречие. Аналогично получаем противоречие в случае, когда 2^{f-1} делит $p^k + 1$. Лемма доказана.

Лемма 4 [8, предложение 2.4]. *Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2, p\}$, $k = e(r, q)$, $l = e(s, q)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. Тогда r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k) + \eta(l) > n$ и l/k не является нечетным натуральным числом.*

Лемма 5 [8, предложение 2.5]. *Пусть $r, s \in \pi(D_n^\epsilon(q)) \setminus \{2, p\}$, $k = e(r, q)$, $l = e(s, q)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. Тогда r, s несмежны в $GK(D_n^\epsilon(q))$ тогда и только тогда, когда $2 \cdot \eta(k) + 2 \cdot \eta(l) > 2n - (1 - \epsilon(-1)^{k+l})$, l/k не является нечетным натуральным числом, и если $\epsilon = +$, то система равенств $n = l = 2\eta(l) = 2\eta(k) = 2k$ не верна.*

Далее в леммах $q = p^f$ и $q_1 = p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа, G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно.

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 6. *Пусть G — одна из групп $A_2(2)$, $A_2(4)$, $A_6(2)$, $A_7(2)$, $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, $A_8(2)$, $A_9(2)$, $A_{10}(2)$, $A_{11}(2)$, $B_5(3)$, $C_5(2)$, $C_5(3)$, $C_6(2)$, $C_7(2)$, $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, $D_7(2)$, $^2A_3(3)$, $^2A_5(2)$, $^2A_7(3)$, $^2A_7(7)$, $^2A_6(2)$, $^2A_7(2)$, $^2A_8(2)$, $^2A_9(2)$, $^2A_{10}(2)$, $^2A_{11}(2)$, $^2D_4(2)$, $^2D_5(2)$, $^2D_5(3)$, $^2D_6(2)$, $^2D_7(2)$. Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих утверждений*: (1) $\{G, G_1\} = \{A_1(7), A_1(8)\}$; (2) $\{G, G_1\} = \{^2A_3(3), A_1(49)\}$.

Доказательство. Предположим, что $GK(G_1) = GK(G)$ для некоторой группы G_1.

Если G — одна из групп $B_5(3)$, $C_5(2)$, $C_5(3)$, $C_6(2)$, $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_6(2)$, ${}^2A_7(2)$, ${}^2A_8(2)$, ${}^2A_9(2)$, ${}^2A_{10}(2)$, ${}^2A_{11}(2)$, ${}^2D_4(2)$, ${}^2D_5(2)$, ${}^2D_5(3)$, ${}^2D_6(2)$, ${}^2D_7(2)$, то по [11] $\pi(G_1) \neq \pi(G)$ и, следовательно, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = A_2(2) \cong A_1(7)$. Имеем $\pi(G_1) = \pi(G) = \{2, 3, 7\}$ и по [11] $G_1 \in \{A_1(8), {}^2A_2(3)\}$. По [4, табл. 2] имеем $G_1 \neq {}^2A_2(3)$. Значит, $G_1 = A_1(8)$. Выполняется утверждение (1) леммы.

Пусть $G \in \{A_2(4), {}^2A_3(3)\}$. Имеем $\pi(G_1) = \pi(G) = \{2, 3, 5, 7\}$. По [11] $G_1 \in \{A_1(49), A_2(4), A_3(2), C_2(7), C_3(2), D_4(2), {}^2A_2(5), {}^2A_3(3)\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем $\{G, G_1\} = \{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$. Выполняется утверждение (2) леммы.

Пусть $G = A_7(3)$. Имеем $\pi_1(G_1) = \pi_1(G) = \{2, 3, 7, 11, 13, 41\}$. Поэтому $p_1 \in \{2, 7, 11, 13, 41\}$. По [4, табл. 2] кокликами максимального размера в $GK(A_7(3))$ являются $\{5, 7, 11, 1093\}$ и $\{7, 11, 41, 1093\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем G_1 — одна из групп: $A_2(q_1)$, где $(q_1 - 1)_3 = 3$ и $q_1 + 1 \neq 2^k$; $A_6(q_1)$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 = 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^k$; ${}^2A_6(q_1)$; $B_4(q_1)$; $C_4(q_1)$; или ${}^2D_4(q_1)$, причем q_1 нечетно, если $G \neq C_4(q_1)$. Пусть $G_1 = A_6(q_1)$. По [4, табл. 2] коклики максимального размера в $GK(A_6(q_1))$ имеют вид $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_6(q_1), r_7(q_1)\}$. Из описания коклик максимального размера в $GK(G_1)$ получаем, что $p_1 \notin \{7, 11, 41\}$. Значит, $q_1 = 13^f$. Имеем $\{2, 3, 30941\} = \pi(13^5 - 1) \subseteq \pi(q^5 - 1) \subseteq \pi_1(A_6(q_1)) = \pi_1(A_7(3))$; противоречие. Случай $G_1 = {}^2A_6(q_1)$ рассматривается аналогично случаю $G_1 = A_6(q_1)$. Пусть $G_1 = B_4(q_1)$ или $C_4(q_1)$. По [4, табл. 1, 2] коклики максимального размера в $GK(B_4(q_1))$ имеют вид $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$. По малой теореме Ферма $11 \notin R_i(q_1)$, где $i \in \{3, 4, 6, 8\}$; противоречие. Пусть $G_1 = {}^2D_4(q_1)$. По [4, табл. 2] коклики максимального размера в $GK({}^2D_4(q_1))$ имеют вид $\{p_1, r_3(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$ или $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1), r_8(q_1)\}$. По малой теореме Ферма $p_1 = 11$, $5 \in R_4(q_1)$, $7, 1093 \in R_3(q_1) \cup R_6(q_1)$. Из равенства графов $GK(A_7(3))$ и $GK({}^2D_4(q_1))$ получаем равенство коклик $\{5, 7, 11, 1093\} = \{p_1, r_3(q_1), r_4(q_1), r_6(q_1)\}$; противоречие. В случаях $G_1 = A_2(q_1)$ и $G_1 = {}^2A_2(q_1)$ все коклики максимального размера содержат 3; противоречие.

Пусть $G = A_7(5)$. Аналогично случаю $G = A_7(3)$ получаем противоречие.

Пусть $G = A_7(9)$. Имеем $\pi_1(G_1) = \pi_1(G) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 41, 61, 73, 193\}$. По [4, табл. 2] кокликой максимального размера в $GK(A_7(9))$ является, например, $\{11, 41, 73, 547\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем $G_1 \in \{A_6(q_1), {}^2A_6(q_1)\}$, где q_1 четно. Пусть $G_1 = A_6(q_1)$. Тогда $\{31\} = \pi(2^5 - 1) \subseteq \pi(q^5 - 1) \subseteq \pi_1(A_6(q_1)) = \pi_1(A_7(9))$; противоречие. Пусть $G_1 = {}^2A_6(q_1)$. По [4, табл. 1] коклики максимального размера в $GK({}^2A_6(q_1))$ имеют вид $\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_{10}(q_1), r_{14}(q_1)\}$. По малой теореме Ферма и из сравнения коклик максимального размера получаем $41 \in R_4(q_1)$. Так как 41 делит $q_1^4 - 1 = 2^{4f_1} - 1$, то 5 делит f_1. Имеем $\{3, 5, 11, 31, 41\} = \pi(2^{20} - 1) \subseteq \pi(q_1^4 - 1) \subseteq \pi_1({}^2A_6(q_1)) = \pi_1(A_7(9))$; противоречие.

Пусть $G \in \{A_6(2), A_7(2)\}$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, \ldots, 127\}$. По [11] $G_1 \in \{A_1(19^3), A_2(19), A_2(107), G_2(19)\}$. По [4, табл. 1, 2] имеем $G_1 \in \{A_2(19), A_2(107), G_2(19)\}$. Заметим, что $\pi_1(A_6(2)) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$, $\pi_1(A_7(2)) = \{2, 3, 5, 7, 17, 31\}$, $\pi_1(A_2(19)) = \{2, 3, 5, 19\}$, $\pi_1(A_2(107)) = \{2, 3, 53, 107\}$, $\pi_1(G_2(19)) = \{2, 3, 5, 19, 381\}$. Значит, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G \in \{A_8(2), A_9(2), A_{10}(2), A_{11}(2), C_7(2), D_7(2)\}$. Тогда по [8, табл. 2, 3] $t(G) \geq 4$ и $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, \ldots, 127\}$. По [11] $G_1 \in \{A_1(19^3), A_2(19), A_2(107), G_2(19)\}$. По [4, табл. 2] имеем $t(G_1) \leq 3$, значит, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2A_7(3)$. Тогда $\pi(G_1) = \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, \ldots, 547\}$. По [11] $G_1 \in \{{}^2A_2(41), {}^2A_3(41)\}$. По [4, табл. 2] имеем $G_1 = {}^2A_2(41)$. Заметим, что $\pi_1(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 41, 61\}$, $\pi_1({}^2A_2(41)) = \{2, 3, 5, 7, 41\}$. Значит, $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G = {}^2A_7(7)$. Аналогично случаю $G = A_7(9)$ получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $G = A_1(q)$ и $G_1 = A_1(q_1)$ — неизоморфные простые группы для $q, q_1 > 3$. Графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают тогда и только тогда, когда $\{G, G_1\} \in \{\{A_1(9), A_1(4)\}, \{A_1(9), A_1(5)\}, \{A_1(7), A_1(8)\}\}$.*

Доказательство. Пусть $G = A_1(q)$ и $3 < q = p^f \equiv \epsilon \pmod 4$ для $\epsilon = \pm 1$. Предположим, что $G = A_1(q_1)$, $q_1 = 2^{f_1} > 2$. Тогда либо $\pi(q - \epsilon) = \{2\}$ и $\pi(q_1 - 1) = \{p\}$, либо

$\pi(q-\epsilon)=\{2\}$ и $\pi(q_1+1)=\{p\}$.

Пусть $\pi(q-\epsilon)=\{2\}$, $\pi(q_1-1)=\{p\}$ и $\pi((q+\epsilon)/2)=\pi(q_1+1)$. Получаем систему

$$\begin{cases} p^f-\epsilon=2^s, \\ 2^{f_1}-1=p^t, \\ \pi((p^f+\epsilon)/2)=\pi(2^{f_1}+1), \end{cases} \tag{1}$$

где s, t — натуральные числа.

Предположим, что $\epsilon=1$. Тогда $p^f-1=2^s$. По лемме 2 отсюда следует, что либо $p^f=9$ и $2^s=8$, либо $f=1$, либо $s=1$. Если $s=1$, то $q=3$; противоречие.

Пусть $q=9$. Из (1) получаем, что $2^{f_1}-1=3^t$, т. е. $2^{f_1}-3^t=1$. Так как $q_1>2$, то $f_1>1$. По лемме 2 имеем $t=1$. Отсюда $q_1=4$. Так как $GK(A_1(9))=GK(A_1(4))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(9),A_1(4)\}$.

Пусть $f=1$, т. е. $q=p$. Из (1) получаем, что $2^{f_1}-1=p^t$, т. е. $2^{f_1}-p^t=1$. Так как $f_1>1$, то по лемме 2 имеем $t=1$. Из (1) получаем, что $\pi((p+1)/2)=\pi(p+2)$; противоречие, так как $(p+2,(p+1)/2)=1$.

Предположим, что $\epsilon=-1$. Тогда $p^f+1=2^s$, т. е. $2^s-p^f=1$. По лемме 2 отсюда следует, что $f=1$. Из (1) получаем, что $2^{f_1}-p^t=1$. Так как $f_1>1$, то по лемме 2 имеем $t=1$. Тогда $2^{f_1}=p+1=2^s$, поэтому $f_1=s$. Из (1) получаем, что $\pi(2^{s-1}-1)=\pi((p-1)/2)=\pi(p+2)=\pi(2^s+1)$. По лемме 1 при $s\neq 3$ существует примитивный простой делитель u числа $2^{2s}-1$, т. е. u делит 2^s+1 и не делит $2^{s-1}-1$; противоречие. При $s=3$ имеем $p=7$ и $q=7$. Так как $f_1=s=3$, то $q_1=8$. Так как $GK(A_1(7))=GK(A_1(8))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(7),A_1(8)\}$.

В случаях $\pi(q-\epsilon)=\{2\}$, $\pi(q_1+1)=\{p\}$ и $\pi((q+\epsilon)/2)=\pi(q_1-1)$ аналогично получаем противоречие.

Предположим, что $G_1=A_1(q_1)$ и $3<q_1={p_1}^{f_1}\equiv\epsilon_1 \pmod 4$ для $\epsilon_1=\pm1$. Тогда $\pi(q-\epsilon)=\pi(q_1-\epsilon_1)$, $\pi((q+\epsilon)/2)=\{p_1\}$, $\pi((q_1+\epsilon_1)/2)=\{p\}$. Получаем систему

$$\begin{cases} p^f+\epsilon=2p_1^{m_1}, \\ p_1^{f_1}+\epsilon_1=2p^m, \\ \pi(p^f-\epsilon)=\pi(p_1^{f_1}-\epsilon_1), \end{cases} \tag{2}$$

где m, m_1 — натуральные числа.

Предположим, что $\epsilon=\epsilon_1=1$. Из (2) следует, что $\pi(p^f-1)=\pi(2p^m-2)=\pi(p^m-1)$. Если $f>m$ или $(f,p)\neq(2,2^s-1)$ для некоторого простого числа s, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель u числа p^f-1, значит, u не делит p^m-1; противоречие. Пусть $(f,p)=(2,2^s-1)$ для некоторого простого числа s. Тогда $\pi(p-1)=\pi(p^2-1)=\pi(p^m-1)$. Если $m\geq 3$, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель v числа p^m-1, значит, v не делит $p-1$; противоречие. Если $f<m$ или $(m,p)\neq(2,2^s-1)$ для некоторого простого s, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель u_1 числа p^m-1, значит, u не делит p^f-1; противоречие. Пусть $(m,p)=(2,2^s-1)$ для некоторого простого числа s. Тогда $\pi(p-1)=\pi(p^2-1)=\pi(p^f-1)$. Если $f\geq 3$, то по лемме 1 существует примитивный простой делитель v_1 числа p^f-1, значит, v_1 не делит $p-1$; противоречие. Поэтому либо $f=m$, либо $p=2^s-1$ и $(f,m)\in\{(1,2),(2,1)\}$.

Пусть $f=m$. Из (2) следует, что $p_1^{f_1}=2(2p_1^{m_1}-1)-1=4p_1^{m_1}-3$. Поэтому $p_1=3$ и $3^{f_1-1}=4\cdot 3^{m_1-1}-1$. Если $m_1-1>1$ и $f_1-1>1$, то левая часть последнего равенства делится на 3, а правая не делится; противоречие. Если $m_1=2$, то $3^{f_1-1}=11$; противоречие. Если $f_1=1$, то $3^{m_1-1}=1/2$; противоречие. Если $f_1=2$, то $m_1=1$. Итак, $m_1=1$. Тогда $3^{f_1-1}=3$, т. е. $f_1=2$ и $q_1=9$. Из (2) следует, что $q=5$. Так как $GK(A_1(5))=GK(A_1(9))$, то $\{G,G_1\}=\{A_1(5),A_1(9)\}$.

Пусть $p=2^s-1$ и $(f,m)\in\{(1,2),(2,1)\}$. Без ограничения общности можно считать, что $f=2$, $m=1$. Из (2) следует, что $p_1^{f_1}=2p-1$ и $p^2=2p_1^{m_1}-1$. Поэтому $(p_1^{f_1}+1)^2=4(2p_1^{m_1}-1)$.

Отсюда $p_1^{2f_1} + 2p_1^{f_1} - 8p_1^{m_1} + 5 = 0$, поэтому $p_1 = 5$. Имеем $5^{2f_1} + 2 \cdot 5^{f_1} - 8 \cdot 5^{m_1} + 5 = 0$. Пусть $f_1 < m_1$. Тогда $5^{f_1}(5^{f_1} - 8 \cdot 5^{m_1 - f_1} + 2) + 5 = 0$. Если $f_1 \geq 2$, то получаем противоречие. Если $f_1 = 1$, то $8 \cdot 5^{m_1 - 1} = 8$, т. е. $m_1 = 1$, но $m_1 \geq 2$; противоречие. Пусть $f_1 \geq m_1$. Тогда $5^{m_1}(5^{2f_1 - m_1} + 2 \cdot 5^{f_1 - m_1} - 8) + 5 = 0$. Если $m_1 \geq 2$, то получаем противоречие. Значит, $m_1 = 1$. Тогда $5^{2f_1 - 1} + 2 \cdot 5^{f_1 - 1} - 7 = 0$. Если $f_1 \geq 2$, то получаем противоречие. Следовательно, $f_1 = 1$ и $q_1 = 5$. Из (2) следует, что $p = 3$ и $q = 9$. Так как $GK(A_1(9)) = GK(A_1(5))$, то $\{G, G_1\} = \{A_1(9), A_1(5)\}$.

Аналогично случаю $\epsilon = \epsilon_1 = 1$ рассматриваются случаи $\epsilon\epsilon_1 = -1$. Получаем, что система (2) не имеет решений.

Предположим, что $\epsilon = \epsilon_1 = -1$. Система (2) принимает вид

$$\begin{cases} p^f = 2p_1^{m_1} + 1, \\ p_1^{f_1} = 2p^m + 1, \\ \pi(p^f + 1) = \pi(p_1^{f_1} + 1), \end{cases} \tag{3}$$

где m, m_1 — натуральные числа.

Отсюда $\pi(p^f + 1) = \pi(p^m + 1)$. Если $f \neq m$, то ввиду леммы 1 получаем противоречие. Значит, $f = m$. Из системы (3) следует, что $\pi(p_1^{f_1} + 1) = \pi(p_1^{m_1} + 1)$. Если $f_1 \neq m_1$, то ввиду леммы 1 получаем противоречие. Значит, $f_1 = m_1$. Из системы (3) следует, что $p^f = -1$; противоречие. Лемма доказана.

Пусть $G = A_1(q)$. Если G_1 — классическая группа, то по [4, табл. 1, 2] имеем $G_1 \in \{A_1(q_1), A_2(2), {}^2A_3(3), {}^2A_5(2)\}$ и из лемм 6, 7 получаем заключение теоремы 1.

3. Доказательство теоремы 2

Для любой неединичной конечной группы G положим $\mathcal{T}(G) = \{t(r, G) \mid r \in \pi(G)\}$ и будем рассматривать $\mathcal{T}(G)$ как строго убывающую последовательность $(t(r_1, G), t(r_2, G), \ldots)$, где r_i — некоторые числа из $\pi(G)$.

Если G — группа лиева типа над полем порядка q, то иногда при $q = 2$ одно из чисел $t(r, G)$ для некоторого $r \in \pi(G)$ исчезает; если при $q \neq 2$ оно есть, мы пишем $(t(r, G))$.

Лемма 8. *Пусть $G = B_n(q)$ или $C_n(q)$, где $4 \leq n \leq 24$, $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2), (6, 2), (7, 2)$ или $n = 27$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: $n = 4$, $\mathcal{T}(G) = (4, 2)$; $n = 5$, $\mathcal{T}(G) = (5, 4, 3, 2)$; $n = 6$, $\mathcal{T}(G) = (5, 3, 2)$; $n = 7$, $\mathcal{T}(G) = (6, 3, 2)$; $n = 8$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 2)$; $n = 9$, $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 10$, $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 4, 3, 2)$; $n = 11$, $\mathcal{T}(G) = (9, 7, 5, 3, 2)$; $n = 12$, $\mathcal{T}(G) = (10, 8, 6, 5, 4, 2)$; $n = 13$, $\mathcal{T}(G) = (11, 10, 9, 6, 4, 3, 2)$; $n = 14$, $\mathcal{T}(G) = (11, 10, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 15$, $\mathcal{T}(G) = (12, 10, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 16$, $\mathcal{T}(G) = (13, 11, 10, 7, 4, 2)$; $n = 17$, $\mathcal{T}(G) = (14, 13, 12, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 18$, $\mathcal{T}(G) = (14, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 2)$; $n = 19$, $\mathcal{T}(G) = (15, 13, 12, 9, 8, 7, 6, 3, 2)$; $n = 20$, $\mathcal{T}(G) = (16, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 2)$; $n = 21$, $\mathcal{T}(G) = (17, 16, 15, 13, 12, 11, 9, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 22$, $\mathcal{T}(G) = (17, 16, 14, 13, 10, 9, 8, 6, 4, 3, 2)$; $n = 23$, $\mathcal{T}(G) = (18, 16, 15, 13, 11, 9, 6, 5, 3, 2)$; $n = 24$, $\mathcal{T}(G) = (19, 17, 16, 14, 12, 10, 8, 7, 5, 4, 2)$; $n = 27$, $\mathcal{T}(G) = (21, 19, 18, 16, 14, 12, 11, 10, 8, 7, 5, 3, 2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = 5$. Тогда $t(G) = 5$. Пусть $k = 1$. Найдем $t(r_1, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2, p\}$ такие, что $e(r, q) = 1$, $l = e(s, q)$ и $1 \leq \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(l) > 4$ и l не является нечетным натуральным числом. Отсюда $l = 10$ и $t(r_1, G) = 2$.

Пусть $k = 2$. Найдем $t(r_2, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2, p\}$ такие, что $e(r, q) = 2$, $l = e(s, q)$ и $1 \leq \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(l) > 4$ и $l/2$ не является нечетным натуральным числом. Отсюда $l = 5$ и $t(r_2, G) = 2$.

Пусть $k = 4$. Найдем $t(r_4, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2, p\}$ такие, что $e(r, q) = 4$, $l = e(s, q)$ и $2 \leq \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(l) > 3$ и $l/4$ не является нечетным натуральным числом. Отсюда $l \in \{5, 8, 10\}$ и $t(r_4, G) = 4$.

По табл. 1 и 2 $\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$ — коклика максимального размера в графе $GK(G)$, поэтому $t(r_k, G) = 5$, где $k \in \{3, 5, 6, 8, 10\}$. По [7, табл. 4, 6] $t(p, G) = 3$. Таким образом, $\mathcal{T}(G) = (5, 4, 3, 2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть $G = D_n(q)$, где $5 \leq n \leq 22$ и $(n, q) \neq (5, 2), (6, 2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: $n = 5$, $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; $n = 6$, $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; $n = 7$, $\mathcal{T}(G) = (6, (5), 3, 2)$; $n = 8$, $\mathcal{T}(G) = (6, (5), 3, 2)$; $n = 9$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 10$, $\mathcal{T}(G) = (7, 6, 4, 3, 2)$; $n = 11$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, (4), 3, 2)$; $n = 12$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 13$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 6, (5), 4, 3, 2)$; $n = 14$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 5, 3, 2)$; $n = 15$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 10, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 16$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 9, 7, 6, 4, 3, 2)$; $n = 17$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 18$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 9, 7, 6, 5, 3, 2)$; $n = 19$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 13, 12, 11, 9, 8, 7, 6, (5), 3, 2)$; $n = 20$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 12, 11, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 21$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 22$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 12, 10, 8, 5, 4, 3, 2)$.*

Доказательство использует [7, табл. 4, 6] и лемму 5 и аналогично доказательству леммы 8. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G = {}^2D_n(q)$, где $4 \leq n \leq 22$, $(n, q) \neq (4, 2), (5, 2), (5, 3), (6, 2), (7, 2)$ или $n \in \{24, 26, 28, 30\}$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: $n = 4$, $\mathcal{T}(G) = (4, 2)$; $n = 5$, $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; $n = 6$, $\mathcal{T}(G) = (5, 4, 2)$; $n = 7$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (6, 5, 3, 2)$; $n = 7$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (6, 5, 3)$; $n = 8$, $\mathcal{T}(G) = (7, 6, 4, 2)$; $n = 9$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; $n = 9$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3)$; $n = 10$, $\mathcal{T}(G) = (8, 5, 4, 2)$; $n = 11$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, (5), 4, 3, 2)$; $n = 11$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, 4, 3)$; $n = 12$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 7, 5, 4, 2)$; $n = 13$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 13$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 6, 5, 4, 3)$; $n = 14$, $\mathcal{T}(G) = (11, 9, 7, 6, 4, 2)$; $n = 15$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 10, 8, 6, 5, 3, 2)$; $n = 15$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (12, 11, 10, 8, 6, 5, 3)$; $n = 16$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 8, 7, 5, 4, 2)$; $n = 17$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 10, 8, 7, (5), 4, 3, 2)$; $n = 17$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (13, 12, 11, 10, 8, 7, 5, 4, 3)$; $n = 18$, $\mathcal{T}(G) = (14, 12, 10, 8, 5, 4, 2)$; $n = 19$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 13, 12, 11, 9, 8, 7, (6), 5, 3, 2)$; $n = 19$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (15, 14, 13, 12, 11, 9, 8, 7, 6, 5, 3)$; $n = 20$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 12, 10, 8, 7, 6, 4, 2)$; $n = 21$, $q \neq 3$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2)$; $n = 21$, $q = 3$, $\mathcal{T}(G) = (16, 15, 14, 13, 11, 9, 8, 6, 5, 4, 3)$; $n = 22$, $\mathcal{T}(G) = (17, 15, 14, 11, 10, 9, 7, 5, 4, 2)$; $n = 24$, $\mathcal{T}(G) = (19, 18, 17, 15, 13, 11, 10, 9, 7, 5, 4, 2)$; $n = 26$, $\mathcal{T}(G) = (20, 18, 17, 15, 13, 11, 8, 6, 4, 2)$; $n = 28$, $\mathcal{T}(G) = (22, 21, 20, 18, 17, 14, 13, 11, 8, 7, 5, 4, 2)$; $n = 30$, $\mathcal{T}(G) = (23, 21, 20, 18, 16, 14, 13, 12, 10, 8, 7, 5, 4, 2)$.*

Доказательство использует [7, табл. 4, 6] и лемму 5 и аналогично доказательству леммы 8. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $G = A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$, где $n \geq 7$ при $(\varepsilon, q) \neq (+, 2)$ и $n \geq 13$ при $(\varepsilon, q) = (+, 2)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений: (1) n нечетно, $(n, \varepsilon, q) \notin \{(13, +, 2), (15, +, 2), (17, +, 2), (19, +, 2)\}$, $\mathcal{T}(G) = ((n+1)/2, (n-1)/2, (n-3)/2, (n-5)/2, (n-7)/2, \ldots, 2)$; (2) $(n, \varepsilon, q) = (13, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; (3) $(n, \varepsilon, q) = (15, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (4) $(n, \varepsilon, q) = (17, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (5) $(n, \varepsilon, q) = (19, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (6) n четно, $(n, \varepsilon, q) \notin \{(8, -, 2), (10, -, 2), (12, -, 2), (14, +, 2), (16, +, 2), (18, +, 2), (20, +, 2)\}$, $n_3 \neq 3$ при $(\varepsilon, q) = (-, 2)$, $n_2 \neq 4$ при $(\varepsilon, q) = (-, 3)$, $\mathcal{T}(G) = (n/2, n/2-1, n/2-2, n/2-3, n/2-4, \ldots, 2)$; (7) $n_3 = 3$ при $(\varepsilon, q) = (-, 2)$, $n_2 = 4$ при $(\varepsilon, q) = (-, 3)$, $\mathcal{T}(G) = (n/2, n/2-1, n/2-2, n/2-3, n/2-4, \ldots, 3)$; (8) $(n, \varepsilon, q) = (14, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (7, 5, 4, 3, 2)$; (9) $(n, \varepsilon, q) = (16, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (10) $(n, \varepsilon, q) = (18, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$; (11) $(n, \varepsilon, q) = (20, +, 2)$, $\mathcal{T}(G) = (10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2)$. Более того, если $(\varepsilon, q) = (+, 2)$ и $13 \leq n \leq 20$, то $GK(G) \neq GK(G_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть n нечетно. Тогда $t(G) = (n+1)/2$. Пусть k — натуральное число такое, что $\nu_\varepsilon(k) = (n-1)/2$, и r — простое число такое, что $k = e(r,q)$. Найдем $t(r_k, G)$. По [7, предложение 3.1] r и p смежны. Пусть $s \in \pi(A^\varepsilon_{n-1}(q)) \setminus \{p\}$, $l = e(s,q)$ и $\nu_\varepsilon(l) = 1$. По [7, предложения 4.1,4.2] r и s смежны. Пусть $s \in \pi(A^\varepsilon_{n-1}(q)) \setminus \{2,p\}$, $l = e(s,q)$ и $2 \le \nu_\varepsilon(k) \le \nu_\varepsilon(l)$. По [7, предложения 2.1,2.2] r, s несмежны в $GK(A^\varepsilon_{n-1}(q))$ тогда и только тогда, когда $\nu_\varepsilon(k) + \nu_\varepsilon(l) > n$ и $\nu_\varepsilon(k)$ не делит $\nu_\varepsilon(l)$. Отсюда $\nu_\varepsilon(l) \in \{(n+3)/2, (n+5)/2, \dots n-2, n\}$. Следовательно, $t(r_k, G) = (n-1)/2$. Рассматривая натуральные числа k такие, что $\nu_\varepsilon(k) \in \{(n-3)/2, (n-5)/2, \dots\}$, и простые числа r такие, что $k = e(r,q)$, получаем утверждение леммы. Случай четного n рассматривается аналогично. Выполнен один из пп. (1)–(11).

Пусть $G \in \{A_{12}(2), A_{13}(2)\}$. По леммам 8–10 и доказанному в предыдущем абзаце имеем $G_1 \in \{D_9(q_1), {}^2D_9(q_1)\}$. Ввиду [5; 6] $2 = s(G) \ne s(G_1) = 1$, поэтому $GK(G) \ne GK(G_1)$. Пусть $G \in \{A_{14}(2), A_{15}(2)\}$. По леммам 8–10 и доказанному в предыдущем абзаце имеем $G_1 \in \{B_9(q_1), C_9(q_1)\}$. Ввиду [7, табл. 4, 6] имеем $3 = t(2,G) \ne t(2,G_1) = 2$, поэтому $GK(G) \ne GK(G_1)$. Если $G \in \{A_{18}(2), A_{19}(2)\}$, то по леммам 8–10 и доказанному в предыдущем абзаце имеем $GK(G) \ne GK(G_1)$.

Пусть $G \in \{A_{16}(2), A_{17}(2)\}$. По леммам 8–10 и и доказанному в первом абзаце имеем $G_1 \in \{D_{11}(q_1), {}^2D_{11}(q_1)\}$. По [5; 6] $s(G) = 2$, $s(D_{11}(q_1)) = 2$ при $q_1 \in \{3,5\}$ и $s({}^2D_{11}(q_1)) = 2$ при $q_1 = 3$. Ввиду [7, табл. 4, 6] $3 = t(2,G) \ne t(2, D_{11}(3)) = 2$, поэтому $G_1 \in \{D_{11}(5), {}^2D_{11}(3)\}$. Так как $23 \in \pi_1(A_{16}(2)) \setminus (\pi_1(D_{11}(5)) \cup \pi_1({}^2D_{11}(3)))$, $23 \in \pi_1(A_{17}(2)) \setminus (\pi_1(D_{11}(5)) \cup \pi_1({}^2D_{11}(3)))$, $29 \in \pi_1(D_{11}(5)) \setminus (\pi_1(A_{16}(2)) \cup \pi_1(A_{17}(2)) \cup \pi_1({}^2D_{11}(3)))$, $37 \in \pi_1({}^2D_{11}(3)) \setminus (\pi_1(A_{16}(2)) \cup \pi_1(A_{17}(2)) \cup \pi_1(D_{11}(5)))$, то $GK(G) \ne GK(G_1)$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $G = B_n(q)$ или $C_n(q)$, где $n \ge 25$ и $n \ne 27$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n \equiv 0 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1, 3n/4-1, 3n/4-2, 3n/4-4, 3n/4-5, \dots)$;

(2) $n \equiv 1 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+5/4, 3n/4+1/4, 3n/4-3/4, 3n/4-11/4, 3n/4-15/4, \dots)$;

(3) $n \equiv 2 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1/2, 3n/4-1/2, 3n/4-5/2, 3n/4-7/2, 3n/4-11/2, \dots)$;

(4) $n \equiv 3 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+3/4, 3n/4-5/4, 3n/4-9/4, 3n/4-17/4, 3n/4-21/4, \dots)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n \equiv 0 \pmod 4$. Ввиду [8, табл. 3] имеем $t(G) = 3n/4+1$, и $\{r_i \mid n/2 \le \eta(i) \le n\}$ — коклика максимального размера в $GK(G)$. По [12] $|G| = q^{n^2} \prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)/d$, где $d = (2, q-1)$.

Пусть $k = n/2 - 1$. Найдем $t(r_k, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2,p\}$ такие, что $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l) > n$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Таким образом, $\eta(l) > n/2+1$, т. е. $\eta(l) \in \{n/2+2, \dots, n\}$. Значит, $l \in \{n/2+3, n/2+5, \dots, n-1, 2(n/2+2), \dots, 2n\}$. Так как $3(n/2-1) > n-1$, то l/k не является нечетным натуральным числом для любого l. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n/2+3, \dots, 2n\}$, получаем $3n/4-2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_{n/2-1}, G) = 3n/4-1$.

Пусть $k = n/2 - 3$. Как в предыдущем абзаце, получаем, что $t(r_{n/2-3}, G) = 3n/4-4$.

Пусть $k \le n/2-5$ и k нечетно. Оценим сверху число $t(r_k, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2,p\}$ такие, что $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l) > n$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Таким образом, $\eta(l) > n-k$, т. е. $\eta(l) \in \{n-k+1, \dots, n\}$. Значит, $l \in \{n-k+2, n-k+4, \dots, n-1, 2(n-k+1), \dots, 2n\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n-k+2, \dots, 2n\}$, получаем не более $3k/2-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k, G) \le 3k/2+1/2 \le 3n/4-7$.

Пусть $k = n-2$. Как и ранее, находим, что $t(r_{n-2}, G) = 3n/4-1$. Если $k = n-4$, то $t(r_{n-4}, G) = 3n/4-2$. Если $k = n-6$, то $t(r_{n-6}, G) = 3n/4-4$. Если $k = n-8$, то $t(r_{n-8}, G) = 3n/4-5$.

Пусть $k \le n-10$ и k четно. Оценим сверху число $t(r_k, G)$. Пусть $r, s \in \pi(B_n(q)) \setminus \{2,p\}$ такие, что $k = e(r,q)$, $l = e(s,q)$ и $1 \le \eta(k) \le \eta(l)$. По лемме 4 r, s несмежны в $GK(B_n(q))$

тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l)>n$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Таким образом, $\eta(l)>n-k/2$, т. е. $\eta(l)\in\{n-k/2+1,\dots,n\}$.

Предположим, что $k/2$ четно. Тогда $k\leq n-12$. Таким образом, $l\in\{n-k/2+1,n-k/2+3,\dots,n-1,2(n-k/2+1),2(n-k/2+2),\dots,2n\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n-k/2+1,\dots,2n\}$, получаем не более $3k/4$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G)\leq 3k/4+1\leq 3/4(n-12)+1=3n/4-8$.

Предположим, что $k/2$ нечетно. Тогда $k\leq n-10$. Таким образом, $l\in\{n-k/2+2,n-k/2+4,\dots,n-1,2(n-k/2+1),2(n-k/2+2),\dots,2n\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n-k/2+2,\dots,2n\}$, получаем не более $3k/4-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G)\leq 3k/4+1/2\leq 3/4(n-10)+1/2=3n/4-7$.

Таким образом, $\mathcal{T}(G)=(3n/4+1,3n/4-1,3n/4-2,3n/4-4,3n/4-5,\dots)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть $G=D_n(q)$, где $n\geq 23$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n\equiv 0\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4,3n/4-1,3n/4-3,3n/4-4,3n/4-6,\dots)$;

(2) $n\equiv 1\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4+1/4,3n/4-3/4,3n/4-7/4,3n/4-11/4,3n/4-15/4,3n/4-19/4,\dots)$;

(3) $n\equiv 2\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4-1/2,3n/4-3/2,3n/4-5/2,3n/4-9/2,3n/4-11/2,\dots)$;

(4) $n\equiv 3\pmod 4$, $\mathcal{T}(G)=(3n/4+3/4,3n/4-1/4,3n/4-5/4,3n/4-9/4,3n/4-13/4,3n/4-17/4,\dots)$.

Доказательство. Пусть $n\equiv 0\pmod 4$. Ввиду [8, табл. 3] имеем $t(G)=3n/4$, и $\{r_i\mid n/2\leq\eta(i)\leq n, i\neq 2n\}$ — коклика максимального размера в $GK(G)$. По [12] $|G|=q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, где $d=(4,q^n-1)$.

Пусть $k=n/2-1$. Найдем $t(r_k,G)$. Пусть $r,s\in\pi(D_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(k)\leq\eta(l)$. По лемме 5 r,s несмежны в $GK(D_n(q))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2n-(1-(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l>n$, т. е. $l\in\{n+2,n+4,\dots,2(n-1)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n+2,\dots,2(n-1)\}$, получаем $n/2-1$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Пусть l нечетно. Тогда $l>n/2+1$, т. е. $l\in\{n/2+3,n/2+5,\dots,n-1\}$. Так как $3(n/2-1)>n-1$, то l/k не является нечетным натуральным числом для любого l. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n/2+3,\dots,n-1\}$, получаем $n/4-1$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_{n/2-1},G)=3n/4-1$.

Пусть $k=n/2-3$. Как в предыдущем абзаце, получаем, что $t(r_{n/2-3},G)=3n/4-4$.

Пусть $k\leq n/2-5$ и k нечетно. Оценим сверху число $t(r_k,G)$. Пусть $r,s\in\pi(D_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(k)\leq\eta(l)$. По лемме 5 r,s несмежны в $GK(D_n(q))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2n-(1-(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l>2n-2k-2$, т. е. $l\in\{2n-2k,2n-2k+2,\dots,2(n-1)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{2n-2k,\dots,2(n-1)\}$, получаем k попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Пусть l нечетно. Тогда $l>n-k$, т. е. $l\in\{n-k+2,n-k+4,\dots,n-1\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l=e(s,q)\in\{n-k+2,\dots,n-1\}$, получаем не более $k/2-1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G)\leq 3k/2+1/2\leq 3n/4-7$.

Пусть $k=n-2$. Как и ранее, находим, что $t(r_{n-2},G)=3n/4-1$. Если $k=n-4$, то $t(r_{n-4},G)=3n/4-3$. Если $k=n-6$, то $t(r_{n-6},G)=3n/4-4$. Если $k=n-8$, то $t(r_{n-8},G)=3n/4-6$.

Пусть $k\leq n-10$ и k четно. Оценим сверху число $t(r_k,G)$. Пусть $r,s\in\pi(D_n(q))\setminus\{2,p\}$ такие, что $k=e(r,q)$, $l=e(s,q)$ и $1\leq\eta(k)\leq\eta(l)$. По лемме 5 r,s несмежны в $GK(D_n(q))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l)>2n-(1-(-1)^{k+l})$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l>2n-k$, т. е. $l\in\{2n-k+2,2n-k+4,\dots,2(n-1)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{2n-k+2,\dots,2(n-1)\}$, получаем не более $k/2-1$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Пусть l нечетно. Тогда $l > n-k/2-1$.

Предположим, что $k/2$ четно. Тогда $k \le n-12$. Таким образом, $l \in \{n-k/2+1, n-k/2+3,\dots,n-1\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n-k/2+1,\dots,n-1\}$, получаем $k/4$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G) \le 3k/4 \le 3/4(n-12) = 3n/4-9$.

Предположим, что $k/2$ нечетно. Тогда $k \le n-10$. Таким образом, $l \in \{n-k/2+2, n-k/2+4,\dots,n-1\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s,q) \in \{n-k/2+2,\dots,n-1\}$, получаем $k/4+1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G)$. Следовательно, $t(r_k,G) \le 3k/4+1/2 \le 3/4(n-10)+1/2 = 3n/4-7$.

Таким образом, $\mathcal{T}(G) = (3n/4, 3n/4-1, 3n/4-3, 3n/4-4, 3n/4-6,\dots)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $G = {}^2D_n(q)$, где $n \ge 23$ и $n \ne 24, 26, 28, 30$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $n \equiv 0 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1, 3n/4, 3n/4-1, 3n/4-3, 3n/4-4, 3n/4-6,\dots)$;

(2) $n \equiv 1 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1/4, 3n/4-3/4, 3n/4-7/4, 3n/4-11/4, 3n/4-15/4, 3n/4-19/4,\dots)$;

(3) $n \equiv 2 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+1/2, 3n/4-3/2, 3n/4-5/2, 3n/4-9/2, 3n/4-11/2,\dots)$;

(4) $n \equiv 3 \pmod 4$, $\mathcal{T}(G) = (3n/4+3/4, 3n/4-1/4, 3n/4-5/4, 3n/4-9/4, 3n/4-13/4, 3n/4-17/4,\dots)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

Лемма 15. *Пусть $\{G,G_1\}$ — одна из пар $\{A_8^\varepsilon(q), B_5(q_1)\}$, $\{A_8^\varepsilon(q), C_5(q_1)\}$, $\{A_9^\varepsilon(q), B_5(q_1)\}$, $\{A_9^\varepsilon(q), C_5(q_1)\}$, $\{A_6^\varepsilon(q), D_5^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, $\{A_6^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, $\{A_7^\varepsilon(q), D_5^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, $\{A_7^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, $\{D_5^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$, $\{D_7^\varepsilon(q), D_8(q_1)\}$, где $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$. Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Пусть $\{G,G_1\}$ равно $\{A_9(q), B_5(q_1)\}$ или $\{A_9(q), C_5(q_1)\}$. Так как $t(2,G) = t(2,G_1)$, то по [7, табл. 4, 6] q и q_1 нечетны. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2 и 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_9(q)\}$ при $(q-1)_2 = 2$; $\{2, r_{10}(q)\}$ при $(q-1)_2 > 2$; $\{r_2(q), r_9(q)\}$; $\{5, r_{10}(q)\}$ при $(q-1)_5 > 5$, $5 \mid (q-1)$; $\{r_1(q), r_{10}(q)\}$, где $r_1(q) \ne 5$; $\{5, r_9(q), r_{10}(q)\}$ при $(q-1)_5 = 5$; $\{p, r_9(q), r_{10}(q)\}$; $\{r_3(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_5(q_1)\}$ при $(q_1-1)_2 = 2$; $\{2, r_{10}(q_1)\}$ при $(q_1-1)_2 > 2$; $\{r_1(q_1), r_{10}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \ne 2$; $\{r_2(q_1), r_5(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \ne 2$; $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$.

Пусть $(q-1)_2 = 2$ и $(q_1-1)_2 = 2$. Если $\{2, r_9(q)\}$ — некоторая коклика, содержащая 2 в $GK(A_9(q))$, то $\{2, r_9(q)\} = \{2, r_5(q_1)\}$ для некоторого $r_5(q_1) \in R_5(q_1)$, поэтому $R_9(q) \subseteq R_5(q_1)$. Обратное включение тоже верно. Значит, $R_9(q) = R_5(q_1)$. Максимальные коклики одного порядка в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$ одинаковы. Но множество троек вида $\{r_3(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ не совпадает с множеством троек вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$; противоречие. В случае, когда $(q-1)_2 = 2$ и $(q_1-1)_2 > 2$, аналогично получаем противоречие.

Пусть $(q-1)_2 > 2$ и $(q_1-1)_2 = 2$. Как в предыдущем абзаце, получаем, что $R_{10}(q) = R_5(q_1)$. Заметим, что множество троек вида $\{r_3(q), r_8(q), r_{10}(q)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$, поэтому $p_1 \in R_3(q) \cup R_8(q)$. Так как множество троек вида $\{p, r_9(q), r_{10}(q)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$, то $p_1 \in R_9(q)$; противоречие. В случае $(q-1)_2 > 2$ и $(q_1-1)_2 > 2$ аналогично получаем противоречие.

Случаи, когда $\{G,G_1\}$ — одна из пар $\{A_8^\varepsilon(q), B_5(q_1)\}$, $\{A_8^\varepsilon(q), C_5(q_1)\}$, $\{{}^2A_9(q), B_5(q_1)\}$ или $\{{}^2A_9(q), C_5(q_1)\}$ рассматриваются аналогично. Во всех случаях получаем противоречие.

Пусть $\{G,G_1\} = \{A_6^\varepsilon(q), D_5(q_1)\}$. Так как по [5;6] имеем $s(A_6^\varepsilon(q)) = 2$, то $s(D_5(q_1)) = 2$ и $q_1 \in \{2,3,5\}$. По лемме 6 $GK(G_1) \ne GK(G)$; противоречие. Аналогично получаем противоречие в случаях $\{G,G_1\} = \{A_6^\varepsilon(q), {}^2D_5(q_1)\}$ и $\{G,G_1\} = \{A_6^\varepsilon(q), D_6(q_1)\}$.

Пусть $\{G, G_1\} = \{A_7(q), D_5(q_1)\}$. Как и в случае $\{G, G_1\} = \{A_9(q), B_5(q_1)\}$, вычисляя максимальные по включению коклики порядков 2, 3 и 4, получаем, что максимальные коклики вида $\{r_4(q), r_5(q), r_6(q), r_7(q)\}$ из $GK(G)$ не совпадают с максимальными кокликами из $GK(G_1)$; противоречие.

Случаи, когда $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{{}^2A_7(q), D_5(q_1)\}$, $\{A_7^{\varepsilon}(q), {}^2D_5(q_1)\}$ или $\{A_7^{\varepsilon}(q), D_6(q_1)\}$, рассматриваются аналогично. Во всех случаях получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_5(q), D_6(q_1)\}$. Так как $t(2, G) = t(2, G_1)$, то по [7, табл. 4, 6] q нечетно и если q_1 четно, то $q \equiv 5 \pmod 8$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2 и 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_5(q)\}$ при $q \equiv 3 \pmod 4$; $\{2, r_8(q)\}$ при $q \equiv 1 \pmod 8$; $\{r_1(q), r_8(q)\}$, где $r_1(q) \neq 2$; $\{r_2(q), r_5(q)\}$, где $r_2(q) \neq 2$; $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$ при $q \equiv 5 \pmod 8$; $\{p, r_5(q), r_8(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_5(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 3 \pmod 4$; $\{2, r_{10}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $\{r_1(q_1), r_{10}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \neq 2$; $\{r_2(q_1), r_5(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \neq 2$; $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$; $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$.

Предположим сначала, что q_1 четно и $q \equiv 5 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и в $GK(G_1)$, получаем, что любая тройка вида $\{2, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ совпадает с тройкой $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$. Отсюда $\{r_5(q_1), r_{10}(q_1)\} = \{r_5(q), r_8(q)\}$. Множество троек вида $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{p, r_5(q), r_8(q)\}$. Значит, $R_4(q_1) = \{p\}$. Получаем уравнение $q_1^2 + 1 = p^t$ для некоторого натурального t. По лемме 2 имеем $t = 1$ и $q_1 = 2^{2^{n-1}}$. Если $n = 1$, то $G_1 = D_6(2)$, откуда по лемме 6 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Если $n \geq 2$, то $q \equiv 1 \pmod 8$; противоречие с предположением.

Предположим теперь, что q_1 нечетно. Если $q \equiv 5 \pmod 8$, то коклика вида $\{2, r_5(q), r_8(q)\}$ в $GK(D_5(q))$ не совпадает с кокликами вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ и $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ в $GK(D_6(q_1))$; противоречие.

Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 3 \pmod 4$. Как и ранее, имеем $R_5(q) = R_5(q_1)$. Так как $\{r_1(q), r_8(q)\} = \{r_1(q_1), r_{10}(q_1)\}$, то $R_8(q) \subseteq R_1(q_1) \cup R_{10}(q_1)$. Значит, множество троек вида $\{p, r_5(q), r_8(q)\}$ совпадает с множеством троек вида $\{r_4(q_1), r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ в $GK(D_6(q_1))$, а коклик вида $\{p_1, r_5(q_1), r_{10}(q_1)\}$ нет в $GK(D_5(q))$; противоречие. Аналогично получаем противоречие в случаях $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 3 \pmod 4$; $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$.

Случаи, когда $\{G, G_1\}$ равно $\{{}^2D_5(q), D_6(q_1)\}$ или $\{D_7^{\varepsilon}(q), D_8(q_1)\}$, рассматриваются аналогично. Во всех случаях получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 четно, $\{D_n^{\varepsilon}(q), D_n^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, где n нечетно, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+, -\}$, $\{A_{n-1}^{\varepsilon}(q), D_{n_1}^{\varepsilon_1}(q_1)\}$, где n_1 нечетно, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+, -\}$, $\{D_n(q), {}^2D_{n-2}(q_1)\}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$. Тогда графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ не совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G) = GK(G_1)$.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_n(q), {}^2D_{n-2}(q_1)\}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$. Заметим, что по [7, табл. 4] $t(p, D_n(q)) = 3$. Так как $p \neq p_1$, то $p = r_i(q_1)$ для некоторого числа i. Проверим, что для любого $r_i(q_1) \in \pi({}^2D_{n-2}(q_1))$ имеем $t(r_i(q_1), {}^2D_{n-2}(q_1)) \neq 3$. По [7, табл. 4, 6] $t(2, {}^2D_{n-2}(q_1)) \in \{2, 4\}$. Используя лемму 5, получаем, что $\{r_1(q_1), r_{2n-4}(q_1)\}$ и $\{r_2(q_1), r_{2n-4}(q_1)\}$ — максимальные коклики порядка 2 в графе $GK(G_1)$.

Пусть $k \geq 3$ и k нечетно. Оценим снизу число $t(r_k, {}^2D_{n-2}(q_1))$. Пусть $r, s \in \pi({}^2D_{n-2}(q_1)) \setminus \{2, p_1\}$ такие, что $k = e(r, q_1)$, $l = e(s, q_1)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. По лемме 5 r, s несмежны в $GK({}^2D_{n-2}(q_1))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k) + 2\eta(l) > 2(n-2) - (1 - (-1)^l)$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l > 2n - 2k - 4$, т. е. $l \in \{2n - 2k - 2, 2n - 2k, \ldots, 2(n-2)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{2n - 2k - 2, \ldots, 2(n-2)\}$, получаем k попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Пусть l нечетно. Тогда $l > n - k - 3$, т. е. $l \in \{n - k - 2, n - k, \ldots, n - 3\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{n - k - 2, \ldots, n - 3\}$, получаем не менее $k/2 - 1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Следовательно, $t(r_k, G) \geq 3k/2 + 1/2 \geq 5$.

Пусть $k \geq 4$ и k четно. Оценим снизу число $t(r_k, {}^2D_{n-2}(q_1))$. Пусть $r, s \in \pi({}^2D_{n-2}(q_1)) \setminus \{2, p_1\}$ такие, что $k = e(r, q_1)$, $l = e(s, q_1)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. По лемме 5 r, s несмежны в $GK({}^2D_{n-2}(q_1))$ тогда и только тогда, когда $2\eta(k)+2\eta(l) > 2(n-2)-(1+(-1)^l)$ и l/k не является нечетным натуральным числом. Пусть l четно. Тогда $l > 2n-k-6$, т. е. $l \in \{2n-k-4, 2n-k-2, \ldots, 2(n-2)\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{2n-k-4, \ldots, 2(n-2)\}$, получаем не менее $k/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Пусть l нечетно. Тогда $l > n-k/2-2$. Предположим, что $k/2$ четно. Тогда $k \geq 4$ и $l \in \{n-k/2-1, n-k/2+1, \ldots, n-3\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{n-k/2-1, \ldots, n-3\}$, получаем $k/4$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Следовательно, $t(r_k, G) \geq 3k/4 + 1 \geq 4$. Предположим, что $k/2$ нечетно. Тогда $k \geq 6$ и $l \in \{n-k/2, n-k/2+2, \ldots, n-3\}$. Рассматривая простые числа s такие, что $l = e(s, q) \in \{n-k/2, \ldots, n-3\}$, получаем $k/4 - 1/2$ попарно несмежных вершин графа $GK(G_1)$. Следовательно, $t(r_k, G) \geq 3k/4 + 1/2 \geq 5$.

Таким образом, $t(r_i(q_1), {}^2D_{n-2}(q_1)) \neq 3$. Поэтому $3 \neq t(p, {}^2D_{n-2}(q_1)) = t(p, D_n(q)) = 3$. Следовательно, $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$, то аналогично получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 четно. По [7, табл. 4, 6] либо $2 = t(2, G) \neq t(2, G_1) = 3$, либо $2 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 3$; противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_n(q), D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядка 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$, $\{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ при $q \equiv 5 \pmod 8)$. В $GK(G_1)$ это $\{p_1, r_n(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$; $\{2, r_n(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 5 \pmod 8$. Если q четно, то коклик вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$ нет в $GK(G)$; противоречие. Аналогично получаем противоречие, если q_1 четно. Значит, q и q_1 нечетны. Так как $t(p, G) = 3$ и $p = r_i(q_1)$ для некоторого числа i, то $t(p, G_1) = 3$; противоречие.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, $\{{}^2D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$, то аналогично получаем противоречие.

Пусть $\{G, G_1\} = \{D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 3 \pmod 4$. Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2 и 3 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ это $\{2, r_n(q)\}$ при $q \equiv 3 \pmod 4$, $\{2, r_{2n-2}(q)\}$ при $q \equiv 1 \pmod 8$; $\{r_1(q), r_{2n-2}(q)\}$, где $r_1(q) \neq 2$; $\{r_2(q), r_n(q)\}$, где $r_2(q) \neq 2$; $\{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ при $q \equiv 5 \pmod 8$; $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$; $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$. В $GK(G_1)$ это $\{2, r_{2n}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $\{2, r_{2n-2}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 7 \pmod 8$; $\{r_1(q_1), r_{2n}(q_1)\}$, где $r_1(q_1) \neq 2$; $\{r_2(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$, где $r_2(q_1) \neq 2$; $\{2, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ при $q_1 \equiv 3 \pmod 8$; $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$; $\{r_4(q_1), r_{2n-4}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$.

Предположим, что q четно. Так как $t(2, G) = t(2, G_1) = 3$, то по [7, табл. 4, 6] $q_1 \equiv 3 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Отсюда $\{r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Максимальной коклики вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ нет в $GK(G)$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае, когда q_1 четно.

Предположим, что q и q_1 нечетны. Пусть $q \equiv 5 \pmod 8$. Так как $t(2, D_n(q)) = 3 = t(2, {}^2D_n(q_1))$, то $q_1 \equiv 3 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{2, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Тогда $\{r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\} = \{r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$. Заметим, что любая тройка вида $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ и $p = p_1$; противоречие.

Пусть $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$. Как и ранее, $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$. Заметим, что $\{r_1(q), r_{2n-2}(q)\} = \{r_2(q_1), r_{2n-2}(q_1)\}$, поэтому $R_{2n-2}(q) \subseteq R_2(q_1) \cup R_{2n-2}(q_1)$. Получаем, что любая тройка вида $\{p, r_n(q), r_{2n-2}(q)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p_1, r_{2n-2}(q_1), r_{2n}(q_1)\}$ и $p = p_1$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случаях, когда $q \equiv 3 \pmod 4$ и $q_1 \equiv 7 \pmod 8$; $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 1 \pmod 4$; $q \equiv 1 \pmod 8$ и $q_1 \equiv 7 \pmod 8$.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{D_n(q), D_n(q_1)\}$, $\{{}^2D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, где $n \equiv 3 \pmod 4$, то аналогично получаем противоречие.

Пусть $\{G,G_1\}=\{A_{n-1}(q),D_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1\equiv 3 \pmod 4$. Так как $t(G)=t(G_1)$ и $n_1\equiv 3 \pmod 4$, то $n\equiv 0 \pmod 3$ при n четном и $n\equiv 2 \pmod 3$ при n нечетном.

Рассмотрим все максимальные по включению коклики порядков 2, 3 и 4 в $GK(G)$ и в $GK(G_1)$. В $GK(G)$ – это $\{2,r_n(q)\}$, где $n_2<(q-1)_2$; $\{2,r_{n-1}(q)\}$, где $n_2>(q-1)_2$ и q нечетно; $\{2,r_{n-1}(q)\}$, где $n_2=(q-1)_2=2$; $\{2,r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, где $2<n_2=(q-1)_2$; $\{r_1(q),r_n(q)\}$, где $n_{r_1(q)}<(q-1)_{r_1(q)}$; $\{r_1(q),r_{n-1}(q)\}$, где $n_{r_1(q)}>(q-1)_{r_1(q)}$; $\{r_1(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, где $n_{r_1(q)}=(q-1)_{r_1(q)}$; $\{r_2(q),r_{n-1}(q)\}$ при n четном; $\{r_2(q),r_n(q)\}$ при n нечетном; $\{p,r_{n-1}(q),r_n(q)\}$; $\{r_3(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q)\}$ при $n\equiv 0 \pmod 3$; $\{r_3(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ при $n\equiv 2 \pmod 3$; $\{r_4(q), r_{n-3}(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q)\}$ при $n\equiv 0 \pmod 4$; $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-2}(q),r_n(q)\}$ при $n\equiv 1 \pmod 4$; $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ при $n\equiv 2 \pmod 4$; $\{r_4(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ при $n\equiv 3 \pmod 4$. В $GK(G_1)$ — это $\{2,r_{n_1}(q_1)\}$ при $q_1\equiv 3 \pmod 4$; $\{2,r_{2n_1-2}(q_1)\}$ при $q_1\equiv 1 \pmod 8$; $\{r_1(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$, где $r_1(q_1)\neq 2$; $\{r_2(q_1),r_{n_1}(q_1)\}$, где $r_2(q_1)\neq 2$; $\{2,r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$ при $q_1\equiv 5 \pmod 8$; $\{p_1,r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$; $\{r_4(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1)\}$; $\{r_6(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ при $n_1\equiv 5 \pmod 6$.

Предположим, что q нечетно, q_1 четно или $q_1\equiv 5 \pmod 8$. Так как $t(2,G_1)=3=t(2,G)$, то $2<n_2=(q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2,r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}=\{2,r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, поэтому $\{r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}=\{r_{n-1}(q),r_n(q)\}$. Заметим, что любая тройка вида $\{p,r_{n-1}(q_1),r_n(q_1)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p_1,r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$ и $p=p_1$; противоречие.

Предположим, что q нечетно, $q_1\equiv 3 \pmod 4$ и $n_2<(q-1)_2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2,r_{n_1}(q_1)\}=\{2,r_n(q)\}$. Тогда $R_{n_1}(q_1)=R_n(q)$. Заметим, что любая пара $\{r_1(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$ совпадает либо с парой $\{r_1(q),r_{n-1}(q)\}$, либо с парой $\{r_2(q),r_{n-1}(q)\}$, поэтому при $q_1\neq 3$ имеем $R_{2n_1-2}(q_1)\subseteq R_1(q)\cup R_2(q)\cup R_{n-1}(q)$. Если $q_1=3$, то любая тройка вида $\{3,r_{n_1}(3),r_{2n_1-2}(3)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{r_1(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, поэтому $R_{2n_1-2}(3)\subseteq R_1(q)\cup R_{n-1}(q)$. Также заметим, что любая тройка вида $\{r_4(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p,r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, $\{r_1(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ или $\{r_3(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ при $n\equiv 2 \pmod 3$. Тогда $R_{n_1-2}(q_1)\subseteq\{p\}\cup R_1(q)\cup R_3(q)\cup R_{n-1}(q)$. Получаем, что любая четверка вида $\{r_6(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$ не совпадает с четверками вида $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q)\}$, $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-2}(q),r_n(q)\}$, $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ или $\{r_4(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$; противоречие.

Предположим, что q нечетно, $q_1\equiv 3 \pmod 4$, $n_2>(q-1)_2$ или $n_2=(q-1)_2=2$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2,r_{n_1}(q_1)\}=\{2,r_{n-1}(q)\}$. Тогда $R_{n_1}(q_1)=R_{n-1}(q)$. Заметим, что $\{r_1(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}=\{r_1(q),r_n(q)\}$, поэтому при $q_1\neq 3$ имеем $R_{2n_1-2}(q_1)\subseteq R_1(q)\cup R_n(q)$. Если $q_1=3$, то любая тройка вида $\{3,r_{n_1}(3),r_{2n_1-2}(3)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{r_1(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, поэтому $R_{2n_1-2}(3)\subseteq R_1(q)\cup R_n(q)$. Также заметим, что любая тройка вида $\{r_4(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1)\}$ совпадает с одной из троек вида $\{p,r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, $\{r_1(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, $\{r_3(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q)\}$ или $\{r_3(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$. Тогда $R_{n_1-2}(q_1)\subseteq\{p\}\cup R_1(q)\cup R_3(q)\cup R_{n-2}(q)\cup R_n(q)$.

При $n\equiv 2 \pmod 3$ любая четверка вида $\{r_6(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$ не совпадает с четверками вида $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q)\}$, $\{r_4(q),r_{n-3}(q),r_{n-2}(q),r_n(q)\}$, $\{r_4(q),r_{n-3}(q), r_{n-1}(q),r_n(q)\}$ или $\{r_4(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$; противоречие.

При $n\equiv 0 \pmod 3$ любая четверка вида $\{r_6(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$ совпадает с четверкой вида $\{r_4(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q),r_n(q)\}$, поэтому $n\equiv 3 \pmod 4$. Но тогда n нечетно, поэтому $n\equiv 2 \pmod 3$; противоречие.

Аналогично получаем противоречие в случае, когда при q нечетно и $q_1\equiv 1 \pmod 8$.

Предположим, что $q=2^f$. Так как $t(2,G)=3=t(2,G_1)$, то $q_1\equiv 5 \pmod 8$. Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем $\{2,r_{n-1}(q),r_n(q)\}=\{2,r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$. Тогда $\{r_{n-1}(q),r_n(q)\}=\{r_{n_1}(q_1),r_{2n_1-2}(q_1)\}$.

При $n\equiv 0 \pmod 3$ любая тройка вида $\{r_4(q_1),r_{n_1-2}(q_1),r_{n_1}(q_1)\}$ совпадает с тройкой вида $\{r_3(q),r_{n-2}(q),r_{n-1}(q)\}$, поэтому $R_{n_1-2}(q_1)\subseteq R_3(q)\cup R_{n-2}(q)$. Любая четверка вида

$\{r_6(q_1), r_{n_1-2}(q_1), r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$ совпадает с четверкой вида $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$, поэтому $n \equiv 3 \pmod 4$. Но тогда n нечетно, поэтому $n \equiv 2 \pmod 3$; противоречие.

При $n \equiv 2 \pmod 3$ любая тройка вида $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ совпадает с тройкой вида $\{p_1, r_{n_1}(q_1), r_{2n_1-2}(q_1)\}$, поэтому $R_3(q) = \{p_1\}$. Таким образом, $(2^{3f}-1)/((2^f-1)(3, 2^f-1)) = p_1^\alpha$. Пусть f четно, т.е. $f = 2f_1$ для натурального числа f_1. Если $f_1 = 1$, то $p_1 = 7$, но $p_1 \equiv 5 \pmod 8$; противоречие. Если $f_1 = 2$, то $p_1^\alpha = 91$ и p_1 непростое; противоречие. Если $f_1 \geq 3$, то по лемме 1 существуют числа $r = r_{6f_1}(2) \neq 3$ и $r_1 = r_{3f_1}(2) \neq 3$, причем $r \neq r_1$. Тогда p^α непростое, а значит, и p_1 непростое; противоречие. Значит, f нечетно и $(3, 2^f - 1) = 1$ и $2^f(2^f + 1) + 1 = p_1^\alpha$. Если $q = 2$, то $p_1 = 7$, но $p_1 \equiv 5 \pmod 8$; противоречие. Если $q = 4$, то $p_1^\alpha = 21$ и p_1 непростое; противоречие. Если $q \geq 8$, то $q \equiv 0 \pmod 8$ и $p_1^\alpha \equiv 1 \pmod 8$. Так как $p_1 \equiv 5 \pmod 8$, то α четно. По лемме 3 получаем противоречие.

Если $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A^\varepsilon_{n-1}(q), D^{\varepsilon_1}_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 1 \pmod 4$ и $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$: $\{A_{n-1}(q), {}^2D_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 3 \pmod 4$; $\{{}^2A_{n-1}(q), D^\varepsilon_{n_1}(q_1)\}$, где $n_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$, то аналогично получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть $G, G_1 \in \mathcal{M}$. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то выполнено одно из следующих утверждений*: (1) $\{G, G_1\} = \{A^\varepsilon_{n-1}(q), A^{\varepsilon_1}_{n_1-1}(q_1)\}$, *где* $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$; (2) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар* $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, *где либо n четно, либо* $n \equiv 3 \pmod 4$ *и qq_1 нечетно*; (3) $\{G, G_1\} = \{D^\varepsilon_n(q), D^\varepsilon_n(q_1)\}$, *где n четно,* $\varepsilon \in \{+,-\}$.

Доказательство. Пусть $GK(G) = GK(G_1)$. Тогда $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1)$. Сравнивая множества $\mathcal{T}(G)$ и $\mathcal{T}(G_1)$, указанные в леммах 8–14, получаем, что либо выполняется заключение леммы, либо $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{A^\varepsilon_8(q), B_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_8(q), C_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_9(q), B_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_9(q), C_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_6(q), D^{\varepsilon_1}_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_6(q), D_6(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_7(q), D^{\varepsilon_1}_5(q_1)\}$, $\{A^\varepsilon_7(q), D_6(q_1)\}$, $\{D^\varepsilon_5(q), D_6(q_1)\}$, $\{D^\varepsilon_7(q), D_8(q_1)\}$, $\{D^\varepsilon_n(q), D^{\varepsilon_1}_n(q_1)\}$, где n нечетно, $\{A^{\varepsilon_1}_{n-1}(q), D^{\varepsilon_1}_{n_1}(q_1)\}$, где n_1 нечетно, $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+,-\}$, $\{D_n(q), {}^2D_{n-2}(q_1)\}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$, $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$, где $n \equiv 1 \pmod 4$ или $n \equiv 3 \pmod 4$ и qq_1 четно. Из лемм 15 и 16 получаем, что выполняется заключение леммы. Лемма доказана.

Лемма 18. *Если $G = E_7(q)$, то* $\mathcal{T}(G) = (8, 7, 5, 3)$.

Доказательство использует [8, предложение 2.7] и аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 19. *Пусть $G \in \mathcal{M}$ и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают. Тогда $G_1 \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Так как $G \in \mathcal{M}$, то $t(G) \geq 4$ или $G \in \{A_6(2),\ A_7(2),\ {}^2D_5(2)\}$. Если $G \in \{A_6(2),\ A_7(2),\ {}^2D_5(2)\}$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Значит, $t(G_1) = t(G) \geq 4$. Предположим, что $G_1 \notin \mathcal{M}$. Заметим, что $t(G) = t(G_1) \in \{4, 5, 8, 12\}$.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 4$. Тогда [4, табл. 1, 2] G — одна из групп $A_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_6(q)$; $A_7(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_7(q)$; $C_5(2)$; $D_5(q)$; $D_6(q)$; ${}^2D_5(q)$, $q \neq 2$ и, в частности, $s(G) \in \{1, 2, 3\}$. По [4, табл. 1, 2] заметим, что G_1 — одна из групп $F_4(2)$; ${}^2B_2(2^{2n+1})$, где $n \geq 1$; $A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 4$, $(q_1-1)_3 = 3$, $q_1+1 \neq 2^k$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 = 3$, $q_1-1 \neq 2^k$; $C_4(q_1)$, $q_1 \neq 2$; ${}^2D_4(q_1)$, $q_1 \neq 2$ или $A_2(4)$. Если $G_1 = F_4(2)$, то по [11] $G \in \{A_1(13^2), C_2(13)\}$, поэтому $G \notin \mathcal{M}$; противоречие. Если $G_1 = {}^2B_2(2^{2n+1})$, то $s(G_1) = 4$, но $s(G_1) = s(G) \in \{1, 2, 3\}$; противоречие. Если $G_1 = A_2(4)$, то по лемме 6 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Итак, G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 4$, $(q_1 - 1)_3 = 3$, $q_1 + 1 \neq 2^k$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 = 3$, $q_1 - 1 \neq 2^k$; $C_4(q_1)$ или ${}^2D_4(q_1)$, где $q_1 \neq 2$. Так как $s(G_1) = 2$, то $s(G) = 2$. Отсюда по [5; 6] G — одна из групп $A_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_6(q)$; $A_7(q)$, $q \in \{3, 5, 9\}$; ${}^2A_7(q)$, $q \in \{3, 7\}$; $C_5(2)$; $D_5(q)$, $q \in \{2, 3, 5\}$; $D_6(2)$ или $D_6(3)$. Если G — одна из групп $A_7(3)$, $A_7(5)$, $A_7(9)$, ${}^2A_7(3)$, ${}^2A_7(7)$, $C_5(2)$, $D_5(2)$, $D_5(3)$, $D_5(5)$, $D_6(2)$, $D_6(3)$, то по лемме 6 $GK(G_1) \neq GK(G)$; противоречие. Значит, G — одна из групп $A_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_6(q)$. Если G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 4$, $(q_1 - 1)_3 = 3$, $q_1 + 1 \neq 2^k$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1 + 1)_3 = 3$,

$q_1 - 1 \neq 2^k$, то по [8, табл. 2] коклики максимального размера графа $GK(G_1)$ содержат 3, а коклики максимального размера графа $GK(G)$ нет; противоречие. Таким образом, $G_1 = C_4(q_1)$ или ${}^2D_4(q_1)$, где $q_1 \neq 2$. По лемме 6 $G \neq {}^2A_6(2)$. По леммам 8 и 10 $\mathcal{T}(G_1) = (4, 2)$, а по лемме 11 $\mathcal{T}(G) = (4, 3, 2)$; противоречие.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 5$. Тогда по табл. 1 и 2 G — одна из групп $A_8(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_8(q)$; $A_9(q)$, $q \neq 2$; ${}^2A_9(q)$; $A_{10}(2)$; $B_5(q)$, $q \neq 2$; $C_5(q)$, $q \neq 2$; $C_6(2)$; $B_6(q)$, $q \neq 2$; $C_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2D_6(q)$, $q \neq 2$; ${}^2D_6(2)$ или ${}^2D_7(2)$. Если $G \in \{A_{10}(2), B_5(3), C_5(2), C_5(3), {}^2D_6(2), {}^2D_7(2)\}$, то по лемме 6 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Значит, $G \notin \{A_{10}(2), B_5(3), C_5(2), C_5(3), {}^2D_6(2), {}^2D_7(2)\}$, поэтому $s(G) = 1$. Заметим, что G_1 — одна из групп $F_4(q_1)$, $q_1 \neq 2$; $E_6(q_1)$; ${}^2E_6(q_1)$; ${}^2G_2(3^{2n+1})$, $n \geq 1$; ${}^2F_4(2^{2n+1})$, $n \geq 2$, поэтому $s(G_1) \in \{2, 3\}$; противоречие.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 8$. Тогда $G_1 = E_7(q_1)$. Так как $t(2, G_1) = t(2, G)$, $s(G_1) = s(G)$, то по [7, табл. 4–9] G — одна из групп $A_{14}(q)$; $A_{15}(q)$; ${}^2A_{14}(q)$; ${}^2A_{15}(q)$; $B_9(q)$ или $C_9(q)$. По лемме 11 имеем $G \notin \{A_{14}(2), A_{15}(2)\}$, $\mathcal{T}(A^{\varepsilon}_{14}(q))$ и $\mathcal{T}(A^{\varepsilon}_{15}(q))$ равно либо $(8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$, либо $(8, 7, 6, 5, 4, 3)$, а по лемме 8 $\mathcal{T}(B_9(q)) = \mathcal{T}(C_9(q)) = (8, 7, 5, 4, 3, 2)$, по лемме 18 $\mathcal{T}(E_7(q_1)) = (8, 7, 5, 3)$. Следовательно, $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $t(G) = t(G_1) = 12$. Тогда $G_1 = E_8(q_1)$. Так как $s(G_1) = s(G)$, то по [5, 6, 8, табл. 4] $G = E_8(q)$; противоречие. Лемма доказана.

Из лемм 6, 17 и 19 следует теорема 2.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, позволившие значительно улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Зиновьева М.Р.** Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.
5. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
6. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
8. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
9. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
10. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 69–471.
11. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
12. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

Поступила 10.02.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 004.652.6

ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ В БАЗАХ ДАННЫХ

С. В. Зыкин

В статье рассматривается один из вариантов решения проблемы проектирования схемы базы данных, в которой допускается наличие неопределенных значений. Эта актуальная проблема до сих пор не имеет удовлетворительного решения. Новая формальная теория должна быть обобщением классической теории: удаление из рассмотрения неопределенных значений должно обобщенную теорию сводить к классической теории. Существующие теории не удовлетворяют этому принципу: меняется система аксиом, вводятся новые операторы реляционной алгебры, не реализуемые средствами SQL, и т. д. В этой статье предлагается оригинальное решение этой проблемы, основанное на областях определения зависимостей (доменах).

Ключевые слова: база данных, функциональные зависимости, аксиоматика, область определения.

S. V. Zykin. Domains of functional dependences in databases.

We consider a solution to the problem of designing a database schema allowing for the presence of null values. This urgent problem still has no satisfactory solution. A new formal theory should generalize the classical theory: the removal of null values should reduce the generalized theory to the classical theory. The existing theories do not satisfy this principle: the system of axioms is changed, new operators of relational algebra that cannot be implemented in the SQL are introduced, etc. We propose an original solution to this problem based on the dependence domain.

Keywords: database, functional dependences, axiomatics, domain.

MSC: 68P15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-117-129

Введение

Основой проектирования структуры реляционной базы данных (БД) являются зависимости, которым подчиняются все данные в прикладной области. В настоящее время исследованы и используются в проектировании схемы БД функциональные зависимости, многозначные зависимости, зависимости соединения и зависимости включения. Исторически первыми были исследованы функциональные зависимости (ФЗ). Они впоследствии явились основой формальной теории проектирования схем БД [1; 2], эту теорию в данной статье мы будем называть классической. Согласно этой теории проектирование реляционной схемы БД начинается с универсального реляционного отношения R, заданного на множестве атрибутов $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Предполагается, что отношение R содержит только те кортежи t, значения атрибутов в которых удовлетворяют свойствам реальных данных. Основные свойства данных задаются функциональными зависимостями.

Определение 1. Пусть X и Y — некоторые подмножества из множества атрибутов U. Будем говорить, что X функционально определяет Y, и записывать $X \to Y$, если в любой реализации отношения R не могут присутствовать два кортежа $t, u \in R$, такие что $t[X] = u[X]$ и $t[Y] \neq u[Y]$.

В определении 1 $t[X]$ — значения атрибутов множества X в кортеже t, равенство кортежей $t[X] = u[X]$ означает совпадение значений одноименных атрибутов, а неравенство $t[Y] \neq u[Y]$ означает неравенство значений хотя бы для одного атрибута.

Функциональные зависимости используются для формирования отношений и определения первичных ключей [1; 2]. Первичные ключи позволяют предотвратить дублирование информации в БД.

Определение 2. Множество атрибутов X называется первичным ключом отношения R, если существует функциональная зависимость $X \to A_1, A_2, \ldots, A_n$ и не существует множества атрибутов Y, где $Y \subset X$ и $Y \to A_1, A_2, \ldots, A_n$.

При проектировании БД должно быть получено множество отношений $\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$, называемое декомпозицией R. Каждое из отношений должно удовлетворять ряду свойств, которые обсуждаются в данной работе. В частности, в отношениях R_i задаются собственные первичные ключи, которые удовлетворяют определению 2 на множестве атрибутов R_i. В данной работе первичные ключи выделяются подчеркиванием соответствующего ключу множества атрибутов.

Для манипулирования отношениями была разработана реляционная алгебра [1; 2], послужившая основой для непроцедурного языка запросов SQL (structured query language). Таким образом, сложилась технология создания и эксплуатации реляционных БД, которая занимает доминирующее положение среди других информационных технологий. Однако с самого начала практического использования реляционных БД появилась проблема неопределенных значений, имеющих метку $Null$ в языке SQL. В настоящее время эта метка присваивается любым неопределенным значениям. При выполнении логических операций с неопределенными значениями в командах SQL результатом является $unknown$. Далее будет показано, что это не всегда правильный результат.

В статье [3] делается вывод, что интерпретация неопределенностей сводится к двум видам: 1) значение, возможно, существует, но оно не известно; 2) значение не существует. При этом, значение $Null$ не может быть отождествлено с каким-либо другим значением, в том числе само с собой. В [3] предложено обобщение реляционной алгебры на случай наличия значения ni, обозначающее отсутствие значения. Однако это предложение не реализовано в стандартах языков запросов к БД. Кроме того, в статье [3] рассматривается пример, на котором можно обнаружить специфическую проблему значения $Null$: задано отношение R (<u>№ сотрудника</u>, ФИО сотрудника, № руководителя). В отношении подчеркнут первичный ключ. Вывод можно сделать такой, что для всех сотрудников, кроме одного, № руководителя будет определен либо неизвестен, а для одного сотрудника (директора) это значение будет несуществующим. Рассуждая формально строго, нет зависимостей, на основании которых сформировано отношение R. В нем присутствуют аномалии дополнения и модификации: при смене начальника структурного подразделения необходимо менять несколько записей. Кроме того, атрибуты первый и третий в отношении R являются синонимами. То есть пример является надуманным; при устранении синонимов и дополнениями атрибутов "Должность сотрудника" и "Место работы" будет получена корректная схема БД на основании ФЗ: R^* (<u>№ сотрудника</u>, ФИО сотрудника, Должность сотрудника, Место работы); отношение R становится вычисляемым. Проблема смешения неопределенностей не возникает. Следовательно, решение семантических проблем на начальном этапе проектирования позволит избавиться от смешения неопределенностей.

Серьезный вклад в исследования неопределенностей был сделан в работах [4;5]. В развитие этого направления в работе [6] сформулирована система аксиом совместно для сильных и слабых ФЗ, для которой рассматривается полнота и надежность. Но полученная система аксиом сильно отличается от аксиом классической теории, следовательно, полученная теория не является обобщением классической: если удалить из рассмотрения значение $Null$, то не получим аксиомы классической теории. Авторы [7] существенно продвинулись в исследовании свойств функциональных и многозначных зависимостей в присутствии неопределенностей. Получена система из восьми аксиом, также как и в классической теории. Однако аксиомами стали правила (теоремы классической теории), что не позволяет сказать о полученном обобщении. Основная причина — допущение наличия неопределенности в левой части ФЗ и допущение отождествления двух неопределенных значений и, как следствие, отсутствие транзитивности.

С точки зрения приложений левая часть ФЗ становится ключом отношения и идентификатором объектов. Наличие неопределенности в неключевых атрибутах — это неопределенность характеристики объекта, тогда как наличие неопределенности в ключевых атрибутах — это неопределенность объекта, что отвергается в существующих технологиях БД. Эта принципиальная разница проигнорирована в указанных работах.

Интересное с теоретической точки зрения обобщение неопределенностей предложено в работе [8]. Вводится определение нечеткой ФЗ: зависимость выполнена, если равны левые части ФЗ и доля кортежей (мера) с определенными значениями для правой части зависимости в отношении не меньше β $(0 \leq \beta \leq 1)$. Кроме того, рассмотрены операции реляционной алгебры для отношений, сформированных по таким зависимостям. Использование нечетких зависимостей при проектировании схемы БД имеет ограниченное прикладное значение, поскольку на момент формирования схемы БД отсутствуют собственно данные. Это не позволяет определить меру неопределенности зависимости. Кроме того, в процессе эксплуатации БД мера может кардинально измениться. Если после этого потребуется замена схемы БД, то, как следствие, потребуется замена уже разработанного программного обеспечения. То есть нечеткие ФЗ не удовлетворяют принципу независимости данных.

Для пояснения дальнейших формальных построений рассмотрим два примера формирования схемы БД.

П р и м е р 1. Пусть задано множество атрибутов (схема отношения R): A_1 — № пациента, A_2 — ФИО пациента, A_3 — № показателя, A_4 — Показатель, A_5 — Значение показателя, A_6 — № дня получения показателя, A_7 — Группа пациентов. На предложенном множестве атрибутов существуют следующие зависимости: $F = \{A_1 \to A_2A_7,\ A_3 \to A_4,\ A_1A_3A_6 \to A_5\}$. По правилам построения нормальных форм будет получена следующая схема БД (вертикальная декомпозиция или разбиение одного общего отношения R по столбцам): Пациенты $= R_1(\underline{A}_1, A_2, A_7)$, Перечень анализов $= R_2(\underline{A}_3, A_4)$, Результаты анализов $= R_3(\underline{A}_1, \underline{A}_3, \underline{A}_6, A_5)$.

В примере 1 в явном виде отсутствуют атрибуты, которые могут принимать неопределенные значения. Допустим, что при эксплуатации БД появилась необходимость хранить адрес пациента. Поскольку схема БД была сформирована на основе ФЗ, то изменения будут выполнены без разрушения существующей схемы и необходимости переписывания прикладных программ (принцип независимости данных). Для этого достаточно дополнить атрибут A_8 — "Адрес пациента" в отношение R_1. На начальном этапе после модернизации схемы атрибут будет принимать значение $Null$ почти во всех кортежах отношения R_1. Однако в процессе эксплуатации БД постепенно значения $Null$ будут заменены на реальные значения.

Рассмотрим другой пример.

П р и м е р 2. Пусть задано множество атрибутов: A_1 — № сотрудника, A_2 — ФИО сотрудника, A_3 — должность сотрудника, A_4 — дата увольнения сотрудника. На предложенном множестве атрибутов существуют следующие зависимости: $F = \{A_1 \to A_2,\ A_1 \to A_3,\ A_1 \to A_4\}$. По правилам построения нормальных форм будет получена следующая схема БД: Сотрудники $= R(\underline{A}_1, A_2, A_3, A_4)$.

В примере 2 атрибут A_4 будет иметь неопределенное значение $Null$ для всех не уволенных сотрудников. Выполнение операции сравнения в запросе на языке SQL для атрибута A_8 в примере 1 и для атрибута A_4 в примере 2 выдаст значение *unknown* в тех кортежах, где есть значение $Null$. Это соответствует действительности для примера 1, тогда как для примера 2 это ложный результат: известно, что данная информация отсутствует для не уволенных сотрудников.

Более правильная декомпозиция с практической точки зрения в примере 2 должна иметь вид: Сотрудники $= R_1(\underline{A}_1, A_2, A_3)$, Увольнение $= R_2(\underline{A}_1, A_4)$ (в R_2 есть кортежи только для уволенных сотрудников). Такой способ преобразования схемы состоит из вертикальной и горизонтальной декомпозиции, и значения для отсутствующей информации не появляются в БД.

В данной статье мы рассмотрим формальные основания для построения такой декомпозиции, которые не зависят от способа и места использования и хранения данных и не зависят от текущего состояния БД. Кроме того, будет предложено обобщение классической теории, которое естественным образом встраивается в существующие технологии проектирования и функционирования БД. Вновь вводимое понятие области определения зависимостей позволяет применять его на практике в самом начале проектирования, когда данных еще нет, поскольку является неотъемлемым свойством зависимости. Так, в примере 2 область определения зависимости $A_1 \to A_4$ легко определить как "Уволенные сотрудники" без использования собственно данных. Кроме того, эти области не зависят от текущего состояния БД, места и способа хранения данных, места и способа использования данных в приложениях. Следовательно, подход, основанный на областях определения зависимостей, удовлетворяет принципу независимости данных в БД.

Чтобы показать, что предлагаемый подход является обобщением классической теории, будем излагать материал в последовательности, как это сделано в [1].

1. Основные определения и свойства зависимостей

По аналогии с классической теорией откажемся от использования неопределенного значения $Null$ (значение возможно существует, но оно не известно) при проектировании схемы БД. Действительно, для получения устойчивой схемы БД не корректно использовать неопределенную информацию, поскольку неопределенность будет заложена в схему БД. А значения, про которые известно, что они не существуют, являются основой областей определения зависимостей и должны принять участие в проектировании, чтобы затем отсутствовать среди значений БД. То есть в проектировании участвует только определенная информация, а значение $Null$ может затем использоваться при заполнении БД для всех атрибутов, где это не противоречит целостности данных. Результат *unknown* при обращении к таким данным будет согласован с семантикой запроса.

Идея использования только определенных значений атрибутов для построения системы аксиом функциональных зависимостей с областями их определения предложена в работе [9]. В данной работе рассматривается развитие этого подхода с использованием формальной теории в практике проектирования схем БД. Пусть *nov* (no value) — метка значения, про которое известно, что оно не существует. Относительно значения *nov* сделаем только одно допущение: его не должно быть ни в одном отношении БД после проектирования. Текущая реализация отношения R (универсальное реляционное отношение), где $[R] = U$, является отправным объектом проектирования схемы БД и содержит только определенные значения атрибутов и значения *nov*.

Определение 3. Пусть задана произвольная реализация отношения R на множестве атрибутов U, X — произвольное подмножество U. Областью определения $dom(X)$ атрибутов X будем называть кортежи $t \in R$, для которых выполнено: $t[A_j] \neq nov$ для всех атрибутов $A_j \in X$.

Пусть $X_1, X_2, \dots X_m$ — произвольные множества атрибутов, $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$. Из определения 3 следует равенство:

$$dom(X) = dom(X_1) \cap dom(X_2) \cap \ldots \cap dom(X_m). \tag{1.1}$$

Пусть X и Y — множества атрибутов, для которых $Y \subseteq X$. Из определения 3 следует еще одно очевидное соотношение:

$$dom(X) \subseteq dom(Y). \tag{1.2}$$

Определение 4. Пусть задана произвольная реализация отношения R на множестве атрибутов U. Областью определения $dom(X \to Y)$ зависимости $X \to Y$ будем называть кортежи $t \in R$, для которых выполнено:

а) $t[A_j] \neq nov$ для всех атрибутов $A_j \in X \cup Y$;

б) для любой пары кортежей $t_1, t_2 \in R$, если $t_1[X] = t_2[X]$ то $t_1[Y] = t_2[Y]$.

Пусть $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$ — множество ФЗ. Из определения 4 следует равенство:

$$dom(F) = dom(F_1) \cap dom(F_2) \cap \ldots \cap dom(F_k).$$

Отношение R будем считать *принадлежащим* $dom(X \to Y)$, если для любого кортежа $t \in R$ выполнено $t \in dom(X \to Y)$.

Определение 5. Зависимость $X \to Y$ будем считать выполненной (логически следует) в области определения $dom(F)$ зависимостей F, если она выполнена для любого отношения $R \in dom(F)$.

Из определений 4 и 5 следует, если $D_i = dom(X \to Y)$, тогда зависимость $X \to Y$ выполнена в области D_i. Далее для краткости будем говорить, что зависимость выполнена, подразумевая, что она выполнена в области $dom(F)$.

Следующая лемма используется при доказательстве надежности системы аксиом, правил вывода и доказательстве эквивалентности множеств зависимостей.

Лемма 1. *Если зависимость $X \to Y$ выполнена, то $dom(X \to Y) = dom(X) \cap dom(Y)$.*

Доказательство. Включение $dom(X \to Y) \subseteq dom(X) \cap dom(Y)$ следует непосредственно из определений 3 и 4. Покажем включение в обратную сторону. Пусть R — произвольное отношение, удовлетворяющее зависимостям F. Предположим, что существует кортеж $t_1 \in dom(X) \cap dom(Y)$ и $t_1 \notin dom(X \to Y)$. Из предположения следует, что в соответствии с определением 4 существует кортеж $t_2 \in dom(X) \cap dom(Y)$, $t_1[X] = t_2[X]$ и $t_1[Y] \neq t_2[Y]$. Тогда зависимость $X \to Y$ в соответствии с определением 5 не является выполненной. Полученное противоречие доказывает лемму.

Заметим, что полученный результат согласуется с семантикой приложений. Так, в примере 2 $dom(A_1 \to A_4) = dom(A_1) \cap dom(A_4)$. Действительно, зависимость $dom(A_1 \to A_4)$ может иметь место только на кортежах, в которых определенное значение имеют и № сотрудника и дата увольнения. С другой стороны, в реализации R не могут появиться два кортежа с совпадающим № сотрудника и различными датами увольнения, поскольку это противоречит исходному множеству ФЗ.

Рассмотрим еще одно важное свойство областей определения зависимостей. Для этого заметим, что в примере 1 имеем: $dom(A_1A_3A_6 \to A_5) \subseteq dom(A_3 \to A_4)$. Действительно, любое отношение $R \in dom(A_3 \to A_4)$, определенное на всем множестве атрибутов, может содержать кортежи, в которых A_1, A_5 и A_6 содержат значения nov. Например, анализы по какому-либо показателю запрещены для определенной группы пациентов. С другой стороны, если $R \in dom(A_1A_3A_6 \to A_5)$, то в R любой кортеж должен содержать определенные значения атрибутов A_3 и A_4, и любая пара кортежей, содержащая совпадающие значения атрибута A_3, должна содержать совпадающие значения атрибута A_4. Это обусловлено семантикой приложения. Аналогичные соображения в примере 2 были использованы для декомпозиции. Опираясь на данные рассуждения, сформулируем следующее определение.

Определение 6. Будем полагать, что $dom(X \to Y) \subseteq dom(V \to Z)$, если для любой реализации отношения $R \in dom(X \to Y)$ выполнено $R \in dom(V \to Z)$.

Из определения 6 непосредственно следует еще одно свойство логического следствия, которое доказано в следующей лемме и используется при построении замыкания множеств атрибутов.

Лемма 2. *Пусть зависимость $X \to Y$ выполнена в области D_j, тогда она выполнена в области D_i, где $D_i \subseteq D_j$.*

Доказательство. Пусть R произвольное отношение в области D_i. По определению 6 $R \in D_j$. В D_j зависимость $X \to Y$ выполнена. Следовательно, любая пара кортежей отношения R удовлетворяет условиям определения 4, а значит, зависимость $X \to Y$ выполнена в D_i. Лемма доказана.

2. Система аксиом зависимостей

Впервые система аксиом для ФЗ была предложена Армстронгом [10]. Позднее была получена эквивалентная система с меньшим количеством аксиом [1]. Система имеет следующий вид:

A1. (Рефлексивность) Если $Y \subseteq X \subseteq U$, то $X \to Y$.

A2. (Пополнение) Если $X \to Y$ и $Z \subseteq U$, то $XZ \to YZ$ (где $XZ = X \cup Z$).

A3. (Транзитивность) Если $X \to Y$ и $Y \to Z$, то $X \to Z$.

Заметим, что аксиомы одновременно являются правилами вывода. В них подразумевается, что полученная зависимость имеет максимальную область определения $dom(X \to Y) = All$, совпадающую со всем множеством кортежей отношения R, поскольку не допускается наличие неопределенных и несуществующих значений.

Перепишем систему аксиом Армстронга в соответствии с определением 4 и леммой 1:

A1*. (Рефлексивность) Если $Y \subseteq X \subseteq U$, то $X \to Y$ и $dom(X \to Y) = dom(X)$.

A2*. (Пополнение) Если $X \to Y$ и $Z \subseteq U$, то $XZ \to YZ$ и $dom(XZ \to YZ) = dom(X) \cap dom(Y) \cap dom(Z)$.

A3*. (Транзитивность) Если $X \to Y$ и $Y \to Z$, то $X \to Z$ и $dom(X \to Z) = dom(X) \cap dom(Z)$.

Очевидно, что замена области определения зависимостей значением *All* приведет к исходной системе аксиом. При доказательстве полноты системы аксиом будет показано, что именно аксиомы **A1*–A3*** соответствуют ФЗ с областями определения.

Рассмотрим надежность (непротиворечивость) системы аксиом.

Теорема 1. *Система аксиом* **A1*–A3*** *надежна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо показать, что если зависимость выводима за счет аксиом, то она выполнима (логически следует). Формально это записывается следующим образом: $F \vdash \{X \to Y\} \Rightarrow F \models \{X \to Y\}$.

Для обоснования *надежности аксиомы* **A1*** рассмотрим произвольное отношение R, определенное на множестве атрибутов U. Любая пара кортежей, имеющая определенные значения для всех атрибутов множества X и совпадающая по этим атрибутам, будет совпадать по атрибутам Y, т. е. зависимость $X \to Y$ всегда выполнена. По лемме 1 имеем: $dom(X \to Y) = dom(X) \cap dom(Y)$. Применив соотношение 1.2, окончательно получим: $dom(X \to Y) = dom(X)$. Это доказывает надежность **A1***.

Надежность аксиомы **A2***. Задано отношение R на множестве атрибутов U. Пусть существуют два кортежа t_1 и t_2 в R, имеющие определенные значения на атрибутах X, Y и Z, причем $t_1[XZ] = t_2[XZ]$ и $t_1[YZ] \neq t_2[YZ]$. Поскольку $X \to Y$, то $t_1[Y] = t_2[Y]$ и $t_1[Z] \neq t_2[Z]$, что противоречит условию $t_1[XZ] = t_2[XZ]$. Следовательно, $t_1[YZ] = t_2[YZ]$ и зависимость $XZ \to YZ$ выполнена. По лемме 1 имеем: $dom(XZ \to YZ) = dom(XZ) \cap dom(YZ)$. Применив равенство 1.1, окончательно получим: $dom(XZ \to YZ) = dom(X) \cap dom(Y) \cap dom(Z)$. Это доказывает надежность **A2***.

Надежность **A3***. Рассмотрим произвольное отношение R, в котором выполнены зависимости $X \to Y$ и $Y \to Z$. То, что в R выполнена зависимость $X \to Z$ доказывается по аналогии с доказательством надежности **A2***: предполагаем, что не выполнена зависимость $X \to Z$, получаем противоречие зависимости $X \to Y$ или $Y \to Z$. Поскольку зависимость $X \to Z$ выполнена, то по лемме 1 $dom(X \to Z) = dom(X) \cap dom(Z)$. Надежность **A3*** доказана. Теорема доказана.

Убедившись в надежности аксиом **A1*–A3***, можно получить некоторые полезные правила (теоремы). Наибольшее значение при проектировании схемы БД при построении нормальных форм имеют два правила: объединение (при синтезе отношений) и декомпозиция (при декомпозиции отношений) [1, с. 158]. В следующей лемме доказываются оба правила.

Лемма 3. *Из аксиом* **A1*–A3*** *выводимы следующие правила*:

Ru-1. (*Объединение*) *Если* $X \to Y$ *и* $X \to Z$, *то* $X \to YZ$ *и* $dom(X \to YZ) = dom(X) \cap dom(Y) \cap dom(Z)$.

Ru-2. (*Декомпозиция*) *Если* $X \to Y$ *и* $Z \subseteq Y$, *то* $X \to Z$ *и* $dom(X \to Z) = dom(X) \cap dom(Z)$.

Доказательство. Выводимость обоих правил доказана в лемме 5.2 [1]. Для обоснования областей определения зависимостей достаточно показать их выполнимость, что делается по аналогии с доказательством надежности системы аксиом. Далее, используя лемму 1, получаем соотношения для областей определения зависимостей. Лемма доказана.

В [1] доказательство полноты следует сразу после определения замыкания множества атрибутов и основывается на этом замыкании. При поверхностном изучении материала возникает иллюзия, что наличие замыкания является необходимым и достаточным условием полноты системы аксиом. Это заблуждение можно встретить в некоторых Интернет-изданиях, где двустрочное доказательство полноты по смыслу сводится к фразе: “потому что, потому” без упоминания самих аксиом. Однако если при доказательстве полноты какая-либо аксиома не используется, то закономерным является вывод о ее избыточности. При этом не обязательна выводимость этой аксиомы из остальных аксиом. Например, можно дополнить аксиому:

A4*. (Значность) Если $X \to Y$ и $Y \neq C$, то $X \neq \varnothing$, где C — константа.

Эта аксиома не выводима из остальных, но она описывает ненужное для выводимости свойство объекта, следовательно, является избыточной.

В [1] эта ситуация исправляется последующим исследованием свойств замыкания и доказательством эквивалентности выводимости замыканию. Из сказанного следует, что сначала надо исследовать замыкания множества атрибутов с учетом областей определения зависимостей, а затем доказать полноту системы аксиом.

Наличие областей определения позволяет рассматривать различные замыкания. Однако основной целью далее является выяснение выводимости зависимости в заданной области. Следовательно, нужно вычислять замыкание в определенной области, а не область определения уже полученного замыкания.

Замыканием X_D^+ *множества атрибутов* X *в области определения* D будем называть атрибуты $Y \subseteq U$ такие, что зависимость $X \to Y$ выводима из F за счет аксиом **A1*–A3*** и $D \subseteq dom(X \to Y)$.

Рассмотрим следующий алгоритм. Текущее замыкание обозначим через X^+.

Алгоритм 1: Построение замыкания множества атрибутов X в области D.

$X^+ = \varnothing$
$IF\ D \nsubseteq dom(X)\ THEN\ STOP$
$X^+ = X$
$substitution = TRUE$
$WHILE\ substitution$
  $substitution = FALSE$
  $FOR\ EACH\ X_i \to Y_i\ FROM\ F$
    $IF\ D \subseteq dom(X_i \to Y_i)\ THEN$
      $IF X_i \subseteq X^+ AND\ Y_i - X^+ \neq \varnothing\ THEN$
        $X^+ = X^+ \cup Y_i$; $substitution = TRUE$
      $END\ IF$
    $END\ IF$
  $END\ FOR$
$END\ WHILE$
$STOP$

Внешний цикл $WHILE$ не имеет явного ограничения. Но для выполнения следующего цикла необходимо дополнение хотя бы одного атрибута к замыканию во внутренних циклах.

Следовательно, максимальное количество итераций в алгоритме равно nk, где n — количество атрибутов во множестве U и k — количество зависимостей во множестве F.

З а м е ч а н и е. Фактически в построении замыкания X^+ в соответствии с леммой 2 участвуют не все зависимости F, а только такие $F_i \in F$, для которых $D \subseteq dom(F_i)$. Кроме того, замыкание множества атрибутов, независимо от использования областей определения, есть некоторый индикатор возможности вывода зависимости, но не сам вывод. Так, при построении замыкания явно не использовалась аксиома **A2***, но это не значит, что она лишняя: правило объединения (лемма 3) без нее вывести невозможно. Тем не менее обе правые части зависимостей этого правила присутствуют в замыкании левой части, что свидетельствует об их выводимости.

Доказательство корректности построения замыкания по структуре похоже на доказательство теоремы 5.2 [1]. Все же учитывая специфику алгоритма построения замыкания и его важность для доказательства полноты системы аксиом, рассмотрим полностью доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Алгоритм построения замыкания корректно формирует множество* X_D^+.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y — произвольное множество атрибутов. Необходимо показать, что $Y \subseteq X_D^+$ тогда и только тогда, когда $Y \subseteq X^+$ или $X_D^+ = X^+$.

Необходимость. Пусть $Y \subseteq X^+$. Пополнение множества X^+ выполняется в двух операторах:

а) $X^+ = X$ — все атрибуты множества X выводимы из X по аксиоме рефлексивности. Если $D \not\subseteq dom(X)$, то по определениям 3 и 4 при любом выводе зависимости $X \to Y$ выполнено: $dom(X \to Y) \subseteq dom(X)$, следовательно $X \to Y$ не выводима в области D. Более того, при $D \not\subseteq dom(X)$ из X ничего не выводимо в области D, даже само множество X, что соответствует пустому замыканию.

б) $X^+ = X^+ \cup Y_i$, где $X_i \to Y_i \in F$, $D \subseteq dom(X_i \to Y_i)$ и $X_i \subseteq X^+$. По аксиоме рефлексивности $X^+ \to X_i$ и по аксиоме транзитивности $X^+ \to Y_i$ в области D, следовательно, все атрибуты Y_i принадлежат X_D^+ (до или после подстановки), и зависимость $X \to Y$ выводима в области D.

Достаточность. Пусть $Y \subseteq X_D^+$. Тогда существует k строк вывода зависимости $X \to Y$. Область определения каждой строки вывода содержит область D. При $k = 0$ имеем $Y \subseteq X$ и вывод получен по аксиоме рефлексивности, либо $X \to Y \in F$. В обоих случаях $Y \subseteq X^+$ по алгоритму.

Пусть условие теоремы выполнено для вывода из $k - 1$ строк, и зависимость $X \to Y$ — это k-я строка вывода при $k > 0$. Кроме вариантов вывода при $k = 0$ может иметь место вывод за счет аксиомы транзитивности из двух строк вывода: $X \to Z$ и $Z \to Y$. Поскольку вывод $X \to Z$ выполняется за количество строк менее k, то $Z \subseteq X^+$. Следовательно, Y будет принадлежать X^+ на следующей итерации алгоритма.

Пусть последняя строка вывода $X \to Y$ получена за счет аксиомы пополнения: атрибуты Z дополняются к атрибутам зависимости $V \to W$. Тогда $X = VZ$ и $Y = WZ$. Поскольку $Z \subseteq X$, то $Z \subseteq X^+$ и $W \subseteq X^+$. Так как цепочка вывода зависимости $V \to W$ содержит меньшее k строк, то атрибуты Y также будут принадлежать X^+. Теорема доказана.

Полученное доказательство эквивалентности выводимости и принадлежности замыканию существенно упрощает доказательство полноты системы аксиом. Достаточно показать для произвольной зависимости $X \to Y$, выполненной в области D, что $Y \subseteq X_D^+$.

Теорема 3. *Система аксиом* **A1***–**A3*** *полна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D — произвольная область определения зависимостей. Необходимо показать, что если зависимость $X \to Y$ выполнима в области D: $F \models \{X \to Y\}$, то она выводима $F \vdash \{X \to Y\}$ в этой области: $Y \subseteq X_D^+$.

По аналогии с доказательством полноты в [1] рассмотрим отношение R, содержащее всего два кортежа: t_1 и t_2: $t_1[A_j] = t_2[A_j]$, если $A_j \in X_D^+$, и $t_1[A_j] \neq t_2[A_j]$ — в противном случае. Все зависимости $V \to W \in F$, для которых $D \subseteq dom(V \to W)$, выполнены в R. Действительно, если $V \in X_D^+$, то $W \in X_D^+$ по алгоритму.

Предположим, что зависимость $X \to Y$ не выводима. Тогда существует атрибут A^*: $A^* \in Y$ и $A^* \notin X_D^+$. Следовательно, R является реализацией отношения, в котором зависимость $X \to Y$ не выполнена. Полученное противоречие доказывает теорему.

Полученные свойства выводимости зависимостей в заданных областях определения далее будем использовать для построения нормальных форм отношений.

3. Нормальные формы

На основе множества ФЗ можно построить две финальные нормальные формы: а) третья нормальная форма (3НФ) и б) нормальная форма Бойса — Кодда (БКНФ), которая еще считается усиленной третьей нормальной формой. Алгоритм построения БКНФ основан на последовательном отщеплении выводимых атрибутов от главного отношения. С теоретической точки зрения БКНФ считается более совершенной, чем 3НФ, поскольку лучше решает проблему аномалий в отношениях и является основой для построения последующих нормальных форм.

С практической точки зрения БКНФ обладает существенными недостатками. Во-первых, экспоненциальный алгоритм поиска очередной выводимой ФЗ в реальных системах проектирования БД может просто не достигнуть результата из-за ограничений по времени. Причем эта задача предполагает поиск только глобального решения на всем множестве атрибутов. Во-вторых, БКНФ не сохраняет зависимости за счет удаления из дальнейшего рассмотрения выводимых атрибутов, что приводит к потере некоторых объектов БД. Это происходит, когда удаленные атрибуты участвуют в других зависимостях и с другими областями определения. Поэтому на практике чаще используется 3НФ с полиномиальным алгоритмом построения и без потери каких-либо ФЗ. Кроме того, если некоторое отношение в 3НФ имеет аномалию, то для решения проблемы достаточно провести локальную декомпозицию этого отношения на сравнительно небольшом количестве атрибутов.

Рассмотренный в [1] синтетический подход к формированию отношений, основанный на построении минимального покрытия множества ФЗ, достаточно просто обобщается на случай наличия областей определения у ФЗ.

В данной работе не вводилось определение замыкания множества ФЗ, поскольку при построении нормальных форм достаточно определить выводимость некоторой ФЗ. В соответствии с этим условием определим эквивалентность множеств ФЗ, которое далее используется для построения минимального покрытия множества ФЗ.

Два множества зависимостей F и E будем считать *эквивалентными* ($F \equiv E$), если каждая зависимость $X \to Y \in F$ с областью определения $D = dom(X \to Y)$ выводима на множестве E: $Y \subseteq X_D^+(E)$ и каждая зависимость $V \to W \in E$ с областью определения $C = dom(V \to W)$ выводима на множестве F: $W \subseteq V_C^+(F)$, где $X_D^+(E)$ — замыкание множества атрибутов X в области D на множестве зависимостей E.

Построим множество зависимостей E из множества F. Для каждой зависимости $X \to Y$ множества F во множество E дополняем зависимости $X \to A_i^{'}$, $i = \overline{1,m}$, где $Y = A_1^{'}, A_2^{'}, \dots A_m^{'}$. По правилу декомпозиции (лемма 3) $dom(X \to A_i^{'}) = dom(X) \cap dom(A_i^{'})$.

Лемма 4. *Множества зависимостей F и E эквивалентны.*

Доказательство. По правилу декомпозиции (лемма 3) зависимости $X \to A_i^{'} \in E$ выводимы в F и $dom(X \to A_i^{'}) = dom(X) \cap dom(A_i^{'})$. Зависимость $X \to Y \in F$ выводима во множестве E по правилу объединения зависимостей (лемма 3) $X \to A_i^{'}$, $i = \overline{1,m}$. Используя уравнение 1.1, получаем $dom(X \to Y) = dom(X) \cap dom(Y)$, что совпадает с исходной областью определения зависимости $X \to Y$. Лемма доказана.

Далее, используя полученное условие эквивалентности, построим множество зависимостей, которое в [1] называется минимальным покрытием. Строго говоря, использование слова "минимальный" не является корректным, поскольку отсутствует критерий минимальности. В данном случае строится не избыточное и непротиворечивое множество зависимостей, которое позволяет при синтетическом подходе получить не избыточную и непротиворечивую БД. В данной работе представим формальную версию такого алгоритма, где F — исходное множество, G — результат (он составлен с учетом анализа исходного алгоритма в работе [11]):

А л г о р и т м 2

$G = \varnothing$
$FOR\ EACH\ X_i \to Y_i\ FROM\ F$
  $FOR\ EACH\ A_j\ FROM\ Y_i$
    $G = G \cup \{X_i \to A_j\}$
    $dom(X_i \to A_j) = dom(X_i) \cap dom(A_j)$
  $ENDFOR$
$ENDFOR$
$modify = TRUE$
$WHILE\ modify$
  modify = FALSE
  $FOR\ EACH\ X \to A_j\ FROM\ G$
    $IF\ A_j \in X^+_{dom(X \to A_j)}(G - \{X \to A_j\})\ THEN$
      $G = G - \{X \to A_j\}$; $modify = TRUE$
    $END\ IF$
  $END\ FOR$
  $FOR\ EACH\ X \to A_j\ FROM\ G$
    $FOR\ EACH\ A_i\ FROM\ X$
      $Z = X - A_i$; $log1 = log2 = log3 = FALSE$
      $G' = G - \{X \to A_j\} \cup \{Z \to A_j\}$
      $IF A_j \in Z^+_{dom(X \to A_j)}(G)\ THEN\ log1 = TRUE$
      $IF dom(X \to A_j) = dom(Z \to A_j)\ THEN\ log2 = TRUE$
      $IF A_j \in X^+_{dom(Z \to A_j)}(G')\ THEN\ log3 = TRUE$
      $IF\ log1\ AND\ (log2\ OR\ log3)\ THEN$
        $G = G'$; $modify = TRUE$
        $dom(Z \to A_j) = dom(Z) \cap dom(A_j)$
      $END\ IF$
    $END\ FOR$
  $END\ FOR$
$END\ WHILE$
$STOP$

За один проход в цикле $WHILE$ алгоритма удаляется одна зависимость или один атрибут, следовательно, максимальное количество проходов этого цикла равно $n+m$, где n — количество атрибутов во множестве U, m — количество зависимостей во множестве G при первоначальном формировании до цикла $WHILE$. Тогда с учетом затрат на построение замыканий можно определить максимальное количество итераций для всего алгоритма: $nk+(n+m)(m^2n+2m^2n^2)$, где k — количество зависимостей во множестве F. Очевидно, что реально алгоритм будет делать значительно меньше итераций. Главное в этой оценке то, что она полиномиальная. А это значит, что алгоритм применим для схемы БД любого размера.

Докажем корректность алгоритма удаления избыточных зависимостей и атрибутов во множестве F.

Теорема 4. *Множества зависимостей F и G эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность множества G множеству F на предварительном этапе (до цикла WHILE) доказана в лемме 4. В цикле WHILE множество G подвергается изменению в двух операторах. Покажем, что всякий раз получаем эквивалентное множество зависимостей.

Если выполнено условие $A_j \in X^+_{dom(X\to A_j)}(G - \{X \to A_j\})$, то удаляется зависимость $X \to A_j$ из множества G. Исходное множество G и результирующее множество G отличаются только наличием зависимости $X \to A_j$ в исходном множестве. Поэтому проверять выводимость остальных зависимостей нет необходимости. Условие $A_j \in X^+_{dom(X\to A_j)}(G - \{X \to A_j\})$ говорит о выводимости зависимости $X \to A_j$ из остальных зависимостей множества G в области определения, включающей в себя $dom(X \to A_j)$. Следовательно, эта зависимость избыточна и ее удаление не повлияет на количество выводимых зависимостей.

При выполнении условия $log1\ AND\ (log2\ OR\ log3)$ атрибут A_i удаляется из левой части зависимости $X \to A_j$, где $A_i = X - Z$. Исходное множество G и результирующее множество G' отличаются двумя зависимостями: $X \to A_j$ есть только в исходном множестве, $Z \to A_j$ есть только в результирующем множестве. Остальные зависимости совпадают. Следовательно, надо проверить выводимость обеих зависимостей с собственными областями определения во множествах, которым эти зависимости не принадлежат. Из леммы 1, соотношений 1.1 и 1.2 следует, что $dom(X \to A_j) \subseteq dom(Z \to A_j)$, и если удаление атрибута A_i из множества X оставляет область определения X без изменений, то условие $A_j \in X^+_{dom(Z\to A_j)}(G')$ (условие $log3 = TRUE$) благодаря аксиоме **A1*** всегда выполнено. Следовательно, замена исходной зависимости на зависимость $Z \to A_j$ не повлияет на количество выводимых зависимостей при одновременном выполнении условий $log1$ и $log3$. Теорема доказана.

Конечной целью данной работы является построение схемы БД, учитывающей области определения функциональных зависимостей, и БД, построенная для этой схемы, не должна содержать значений nov. Исходными данными являются множества: $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — атрибуты в прикладной области, $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\}$ — зависимости $F_i = X_i \to Y_i$, для которых удалены избыточные зависимости и избыточные атрибуты в левых частях, и соответствующие им области определения зависимостей $\{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$.

Алгоритм 3

```
FOR i = 1 TO m − 1
  IF Y_i ≠ ∅ THEN
    FOR j = i + 1 TO m
      IF X_i = X_j AND D_i = D_j AND Y_j ≠ ∅ THEN
        Y_i = Y_i ∪ Y_j ; Y_j = ∅
      END IF
    END FOR
  END IF
END FOR
k = 0
FOR i = 1 TO m
  IF Y_i ≠ ∅ THEN
    k = k + 1 ; R_k = TABLE(PRIMARY KEY(X_i), Y_i)
    dom(R_k) = dom(X_i → Y_i)
  END IF
END FOR
```

Команда $R_k = TABLE(PRIMARY\ KEY(X_i),\ Y_i)$ формирует отношение R_k со схемой $X_i \cup Y_i$ и первичным ключом X_i. Отношению R_k приписывается область определения, совпадающая с соответствующей ФЗ. Сложность алгоритма — $(m+1)m/2$ итераций.

Рассмотренный алгоритм формирует изначально пустую БД: $\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$, в отношения которой нельзя дополнить значения nov, поскольку это будет противоречить области определения отношений. По аналогии с [1] несложно показать, что каждое R_i удовлетворяет требованиям третьей нормальной формы (3НФ).

Далее обычно определяются условия, при которых “декомпозиция” $\{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ (в нашем случае — синтез) [1] обладает свойством соединения без потерь информации (СБПИ). В классической теории это свойство рассматривается сразу для всего множества отношений БД. Ничего не изменилось и в более поздних публикациях, например [12], где это свойство исследуется для нечетких ФЗ. В обоих случаях это оправдано, поскольку выполнимость ФЗ предполагается для всей прикладной области. В данной работе это не так, и говорить о выполнении данного свойства для всех отношений некорректно: это свойство может быть формально выполнено, но в пустой области определения. По аналогии с построением замыкания надо говорить о выполнении свойства СБПИ в некоторой фиксированной области определения. В соответствии с леммой 2 в проверке свойства будут участвовать только те зависимости и отношения, область определения которых не меньше заданной.

Алгоритм проверки свойства СБПИ и доказательство его корректности аналогичны алгоритму и доказательству в [1], только если взять множество отношений $\{R'_1, R'_2, \ldots, R'_m\}$, множество атрибутов X и подмножество зависимостей $F_i \in F$, для которых $D \subseteq dom(F_i)$.

4. Заключение

В работе получена формальная теория функциональных зависимостей с учетом областей определения, которая является обобщением классической теории и согласуется с практикой применения нормальных форм в базах данных. На основе полученных результатов разработаны алгоритмы формирования не избыточного множества зависимостей и третьей нормальной формы с учетом областей определения.

С учетом взаимосвязи функциональных зависимостей с другими видами зависимостей планируется распространить на них понятие области определения. Так, с практической точки зрения нет различий между встроенными и обычными многозначными зависимостями, тогда как для первого вида зависимостей формальная теория аксиоматически неполна, а для вторых — полна и непротиворечива. Планируется построить общую модель многозначных зависимостей. Аналогичные планы существуют относительно других видов зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ullman J.** Principles of database systems / Stanford University. Stanford: : Computer Science Press, 1980. 379 p.
2. **Maier D.** The theory of relational databases / Oregon Graduate Center. Rockville: Computer Science Press, 1983. 637 p.
3. **Zaniolo C.** Database relations with null values // J. Comput. System Sci. 1984. No. 28. P. 142–166.
4. **Vassiliou Y.** Functional dependencies and incomplete information // Proc. of 6th Internat. Conf. on Very Large Data Bases (VLDB ’80). Montreal, 1980. Vol. 6. P. 260–269.
5. **Atzeni P., Morfuni N.** Functional dependencies and constraints on null values in database relations // Information and Control. 1986. Vol. 70, no 1. P. 1–31.
6. **Levene M., Loizou G.** Axiomatisation of functional dependencies in incomplete relations // Theoretical Computer Science. 1998. Vol. 206, no 1-2. P. 283–300.
7. **Hartmann S., Link S.** The implication problem of data dependencies over SQL table definitions: axiomatic, algorithmic and logical characterizations // ACM Transactions on Database Systems. 2012. Vol. 37, no 2. P. 1–40.
8. Non-transitive fuzzy dependencies (I) / J.C. Cubero, J.M. Medina, O. Pons, M.A. Vila // Fuzzy Sets and Systems. 1999. Vol. 106, no 3. P. 401–431.
9. **Zykin S.V.** Domain of dependencies in database scheme // Omsk publishing house of OmSTU: Applied mathematics and fundamental informatics. 2014. P. 75–80.
10. **Armstrong W.W.** Dependency structures of data base relationships // Proc. IFIP Congress. Amsterdam, 1974. P. 580–583.

11. **Филиппович А.Ю.** Принципы взаимных функциональных зависимостей // Интеллектуальные технологии и системы: сб. ст. М.: Изд-во МГУП, 2002. No 4. С. 222–241.
12. **Liu J.Y.-C.** Lossless Join decomposition for extended possibility-based fuzzy relational databases // J. Appl. Math. 2014. Article ID 842680. P. 1–9.

Зыкин Сергей Владимирович
д-р техн. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: szykin@mail.ru

Поступила 10.10.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.518.86

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕЧЕТНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ОГРАНИЧЕНИИ[1]

Д. О. Зыков

В данной статье исследуются наибольшие и наименьшие значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов, при условии, что полиномы ограничены сверху на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией $\varphi(x) = x$. Исследование наибольших и наименьших значений первого и второго коэффициентов были осуществлены автором ранее.

Ключевые слова: тригонометрический полином, одностороннее ограничение.

Keywords: trigonometric polynomials, one-sided constraints.

D. O. Zykov. Sharp estimates for coefficients of odd trigonometric polynomials under a one-sided constraint.

We study the largest and the smallest values of coefficients of odd trigonometric polynomials bounded from above by the function $\varphi(x) = x$ on the interval $[0, 2\pi]$. A similar problem for the first and second coefficients was studied by the author earlier.

Keywords: trigonometric polynomial, one-sided constraint.

MSC: 41A17

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-130-136

1. Введение

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}_n$ нечетных тригонометрических полиномов

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

с вещественными коэффициентами порядка $n \geq 1$, удовлетворяющих ограничению

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leq x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{1.1}$$

Нас интересует, в каких границах могут меняться коэффициенты таких полиномов, а точнее, нас интересуют при $1 \leq k \leq n$ величины

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(f_n)\colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}, \quad A_k^-(n) = \inf\{a_k(f_n)\colon f_n \in \mathfrak{F}_n\}. \tag{1.2}$$

Экстремальные задачи для алгебраических и тригонометрических полиномов — обширный раздел теории функций. Такие задачи изучаются с середины XVIII в. К настоящему времени большое число исследований посвящено, в частности, экстремальным задачам для полиномов с ограничениями на их значения, см., к примеру, монографии [1, разд. VI; 2, гл. IV, V] и

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-5344.2006.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

приведенную там библиографию. Важную роль в теории функций и ее приложениях играет результат Л. Фейера [3] о максимальном значении первого коэффициента неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением; такую задачу для старших коэффициентов решили позже Е. Егервари и О. Сасс [4]. Различные применения имеют задачи для тригонометрических полиномов с ограничениями на их значения и коэффициенты. В частности, такие задачи возникают при исследовании нулей ζ-функции Римана и остаточного члена в асимптотической формуле для распределения простых чисел (см. работы [5–7] и библиографию в них). Близкие экстремальные задачи для полиномов обсуждаются в [8; 9]. В работах автора [10] и [11] решены задачи (1.2) для первого и второго коэффициентов.

Условие (1.1) можно переписать в более удобной для дальнейшего использования форме. В неравенстве (1.1) на отрезке $[\pi, 2\pi]$ заменим x на $2\pi - x,\ x \in [0,\pi]$. В результате получим ограничение

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \ge x - 2\pi, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Таким образом, неравенство (1.1) эквивалентно двум неравенствам

$$x - 2\pi \le f_n(x) \le x, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{1.3}$$

2. Основной результат

В ходе исследования задач (1.2) автором была доказана следующая теорема.

Теорема. *Для величин* (1.2) *справедливы следующие утверждения.*

1. *При любых* $1 \le k \le n$ *для величины* $A_k^+(n)$ *выполняется неравенство*

$$A_k^+(n) \le \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.1}$$

2. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} A_k^+(n) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.2}$$

3. *При любых* $1 \le k \le n$ *для величины* $A_k^-(n)$ *выполняется неравенство*

$$A_k^-(n) \ge \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.3}$$

4. *Имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} A_k^-(n) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с обоснования первого утверждения. Пусть f_n — нечетный тригонометрический полином порядка $n \ge 1$, удовлетворяющий условиям (1.3). Исходя из этих условий, оценим сверху коэффициенты полинома. Разделим отрезок $[0,\pi]$ на k равных частей, в результате получим набор отрезков $I_m = [(m-1)\pi/k, m\pi/k],\ 1 \le m \le k$. Для удобства обозначим все нечетные значения m (не превосходящие k) как m_o, а четные — как m_e. Теперь для коэффициента $a_k = a_k(f_n)$ с номером $k,\ 1 \le k \le n$, полинома f_n имеем

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_n(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\int_{I_m} f_n(x)\sin kx\,dx$$

$$\le \frac{2}{\pi}\Bigg(\sum_{m_o}\int\limits_{I_{m_o}} x\sin kx\,dx + \sum_{m_e}\int\limits_{I_{m_e}} (x-2\pi)\sin kx\,dx\Bigg)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Bigg(\int\limits_0^{\pi} x\sin kx\,dx - \sum_{m_e}\int\limits_{I_{m_e}} 2\pi\sin kx\,dx\Bigg)$$

$$= 2\Bigg(\frac{(-1)^{k+1}}{k} + 2\Big[\frac{k}{2}\Big]\int\limits_0^{\pi/k}\sin kx\,dx\Bigg) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big).$$

Таким образом, получена оценка

$$a_k \le \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big), \tag{2.5}$$

которая влечет неравенство (2.1). Первое утверждение теоремы проверено.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Определим на интервале $(0,\pi)$ функцию f соотношениями

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \Big(\dfrac{(m_0-1)\pi}{k}, \dfrac{m_0\pi}{k}\Big); \\ x-2\pi, & x \in \Big(\dfrac{(m_e-1)\pi}{k}, \dfrac{m_e\pi}{k}\Big). \end{cases} \tag{2.6}$$

Распространим ее нечетно на интервал $(-\pi,0)$: $f(x) = -f(-x)$, $x \in (-\pi,0)$. Построенную функцию распространим 2π-периодически на всю ось; получившуюся функцию обозначим тем же символом f. Функция f на данный момент определена всюду на $\mathbb{R}$, кроме точек $m\pi/k$, $m \in \mathbb{Z}$; в этих точках доопределим функцию f полусуммой пределов слева и справа. Довольно легко увидеть, что f обладает свойством

$$f(x) \le x, \quad x > -\pi/k. \tag{2.7}$$

Функция f была выбрана на основе анализа возможности достижения равенства в (2.5). Коэффициент $a_k = a_k(f)$ ряда Фурье $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin\nu x$ функции f имеет значение

$$a_k(f) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.8}$$

Так что в некотором смысле эта функция экстремальная, однако она не является полиномом. Сейчас с помощью функции f будет построено семейство полиномов с экстремальными свойствами.

Обозначим через φ_δ, $0 < \delta < \pi/k$, функцию Соболева со следующими свойствами: функция φ_δ определена, неотрицательна, четна и бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$; носитель функции φ_δ лежит на отрезке $[-\delta,\delta]$, т. е. $\varphi_\delta(x) = 0$, $x \notin [-\delta,\delta]$, и, наконец,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_\delta(x)dx = 1.$$

С ее помощью зададим на отрезке $[0,2\pi]$ вспомогательную функцию f_δ соотношением

$$f_\delta(x) = (f*\varphi_\delta)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_\delta(t-x)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+x)\varphi_\delta(t)dt. \tag{2.9}$$

Функция f_δ, очевидно, бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ и 2π-периодическая. Поскольку $\varphi_\delta(x) = 0,\ x \notin [-\delta, \delta]$, то функцию f_δ можно представить в виде

$$f_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\varphi_\delta(t-x)dt. \tag{2.10}$$

Отметим, что если для $t \in [x-\delta, x+\delta]$ функция f линейная, то $f_\delta(x) = f(x)$. В самом деле, пусть $f(t) = At + B$. Тогда имеем

$$f_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} (At+B)\varphi_\delta(t-x)dt = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \left(A(t-x) + Ax + B\right)\varphi_\delta(t-x)dt$$

$$= A\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} (t-x)\varphi_\delta(t-x)dt + (Ax+B)\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi_\delta(t-x)dt = Ax + B = f(x).$$

Убедимся, что функция f_δ удовлетворяет ограничениям (1.1), а точнее,

$$f_\delta(x) \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{2.11}$$

Если $x \ge 0$, то $x-\delta \ge -\delta > -\pi/k$, а следовательно, в интеграле (2.10) для значения функции f выполняется оценка (2.7). Поэтому

$$f_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\varphi_\delta(t-x)dt \le \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} t\varphi_\delta(t-x)dt = x, \quad x \ge 0,$$

в частности, имеет место (2.11). Впрочем, в силу нечетности функции f_δ свойство (2.11) можно записать в эквивалентной форме:

$$x - 2\pi \le f_\delta(x) \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{2.12}$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; f_\delta) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\delta)\sin\nu x$$

ряда Фурье функции f_δ. Коэффициенты Фурье $a_\nu(\delta)$ функции f_δ убывают быстрее любой отрицательной степени ν; в частности, с некоторым множителем $C(\delta)$ выполняется оценка

$$|a_\nu(\delta)| \le \frac{C(\delta)}{\nu^3}, \quad \nu \ge 1.$$

Ряд Фурье функции f_δ сходится к f_δ равномерно. Поэтому, в частности, имеем

$$f_\delta(x) - S_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu(\delta)\sin\nu x.$$

Следовательно,

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu(\delta)| \cdot |\sin\nu x| \le \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{C(\delta)}{\nu^3}\,|x|\nu \le |x|\,\epsilon_n, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\epsilon_n = \epsilon_n(\delta) = C(\delta) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2};$$

последняя величина обладает свойством $\epsilon_n \to 0,\ n \to \infty$. Отсюда и из (2.11) для сумм S_n при $x \in [0, 2\pi]$ получаем

$$S_n(x) = f_\delta(x) + S_n(x) - f_\delta(x) \le f_\delta(x) + |f_\delta(x) - S_n(x)| \le x + x\epsilon_n = x(1 + \epsilon_n).$$

Тригонометрический полином

$$s_n(x) = \frac{S_n(x)}{1 + \epsilon_n}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \le x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Коэффициент с номером k полинома s_n есть $a_k(\delta)/(1 + \epsilon_n)$. Поэтому для величины $A_k^+(n)$ справедливы оценки

$$\frac{a_k(\delta)}{1 + \epsilon_n} \le A_k^+(n) \le \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что при любом $0 < \delta < \pi/k$

$$a_k(\delta) \le \lim_{n\to\infty} A_k^+(n) \le \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} + 4\Big[\frac{k}{2}\Big]\Big). \tag{2.13}$$

Найдем предел величины

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx$$

при $\delta \to +0$. Из определения (2.9) следует, что в точках непрерывности $x \in \mathbb{R}$ функции f имеет место предельное соотношение

$$f_\delta(x) \to f(x), \quad \delta \to +0. \tag{2.14}$$

Функция f непрерывна всюду на оси, кроме точек $m\pi/k,\ m \in \mathbb{N}$. Поэтому соотношение (2.14) выполняется всюду на $[0, \pi]$, за исключением конечного числа точек. Помимо того, согласно (2.12) семейство функций $\{f_\delta,\ 0 < \delta < \pi/k\}$ равномерно ограничено. Применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости (см., например, [12, гл. 3, § 5]), заключаем, что

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx \ \to\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx = a_k(f) \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Соотношения (2.8) и (2.13) влекут теперь утверждение (2.2). Второе утверждение теоремы доказано.

Исследование величины $A_k^-(n)$ осуществляется с помощью тех же соображений, что и величины $A_k^+(n)$. Обоснуем третье утверждение теоремы. Пусть вновь f_n — нечетный тригонометрический полином порядка $n \ge 1$, удовлетворяющий условиям (1.3). Для его коэффициента $a_k = a_k(f_n)$ с номером $k,\ 1 \le k \le n$, имеем

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(x) \sin kx\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{n} \int_{I_m} f_n(x) \sin kx\, dx$$

$$\ge \frac{2}{\pi}\Big(\sum_{m_o} \int_{I_{m_o}} (x - 2\pi) \sin kx\, dx + \sum_{m_e} \int_{I_{m_e}} x \sin kx\, dx \Big)$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} x\sin kx\,dx - \sum_{m_o}\int\limits_{I_{m_e}} 2\pi\sin kx\,dx\Big)$$

$$= 2\bigg(\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \left[\frac{k+1}{2}\right] 2\int\limits_0^{\pi/k}\sin kx\,dx\bigg) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big).$$

Отсюда следует неравенство (2.3). Тем самым доказано третье утверждение теоремы.

Доказательство четвертого утверждения осуществляется аналогично второму. В данном случае вместо (2.6) рассмотрим на $(0,\pi)$ функцию

$$g(x) = \begin{cases} x - 2\pi, & x \in \Big(\dfrac{(m_0-1)\pi}{k}, \dfrac{m_0\pi}{k}\Big); \\ x, & x \in \Big(\dfrac{(m_e-1)\pi}{k}, \dfrac{m_e\pi}{k}\Big). \end{cases} \tag{2.15}$$

Распространим ее нечетно на $(-\pi,0)$, продолжим с $(-\pi,\pi)$ на всю ось 2π-периодически и доопределим полусуммой пределов слева и справа в точках разрыва $m\pi/k$, $m\in\mathbb{Z}$. Полученную в результате функцию обозначим тем же символом g. Коэффициент $b_k = b_k(g)$ ряда Фурье $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sin\nu x$ функции g имеет значение

$$b_k(g) = \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.16}$$

Легко понять, что построенная функция обладает свойством

$$g(x) \le x, \quad x > 0. \tag{2.17}$$

По аналогии с (2.9), рассмотрим свертку $g_\delta = g * \varphi_\delta$; ее можно записать в виде

$$g_\delta(x) = \int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)\varphi_\delta(t-x)dt = \int\limits_{-\delta}^{\delta} g(t+x)\varphi_\delta(t)dt. \tag{2.18}$$

Убедимся, что если $0<\delta<\pi/(2k)$, то

$$g_\delta(x) \le x, \quad x > 0. \tag{2.19}$$

При $x>\delta$ имеем $x-\delta>0$, а следовательно, в первом интеграле (2.18) для значения функции g выполняется оценка (2.17). Отсюда следует, что свойство (2.19) выполняется при $x\ge\delta$. Обоснуем теперь свойство (2.19) для $x\in(0,\delta)$. Согласно (2.15) если $x\in(0,\pi/k)$, то $g(x)=x-2\pi<0$. Кроме того, функция g нечетная. Поэтому, исходя из второй формулы (2.18), можно сделать вывод, что $g_\delta(x)<0$ для $x\in(0,\delta)$. Тем более для таких значений аргумента будет выполняться неравенство $g_\delta(x)<x$. Свойство (2.19) функции g_δ проверено.

Частичные суммы

$$S_n(x) = S_n(x; g_\delta) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(\delta)\sin\nu x \tag{2.20}$$

ряда Фурье функции g_δ обладают свойством

$$|g_\delta(x) - S_n(x)| \le |x|\,\epsilon_n, \quad x\in\mathbb{R},$$

где $\epsilon_n = \epsilon_n(\delta) \to 0$, $n\to\infty$. Отсюда и из (2.19) для сумм (2.20) при $x\in[0,2\pi]$ получаем $S_n(x) \le x(1+\epsilon_n)$. Следовательно, тригонометрический полином

$$s_n(x) = \frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \le x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$.

Коэффициент с номером k полинома s_n есть $b_k(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому для величины $A_k^-(n)$ справедливы оценки
$$\frac{b_k(\delta)}{1+\epsilon_n} \ge A_k^-(n) \ge \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big).$$
Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем, что при любом $0 < \delta < \pi/(2k)$
$$b_k(\delta) \ge \lim_{n\to\infty} A_k^-(n) \ge \frac{2}{k}\Big((-1)^{k+1} - 4\Big[\frac{k+1}{2}\Big]\Big). \tag{2.21}$$
Вновь с помощью теоремы Лебега о мажорантной сходимости заключаем, что $b_k(\delta) \to\ b_k(g)$ при $\delta \to +0$. Соотношения (2.16) и (2.21) влекут теперь утверждение (2.4). Доказательство четвертого утверждения, а вместе с тем и всей теоремы завершено.

Автор признателен своему научному руководителю В. В. Арестову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. I, 392 с.; Т. II, 432 с.
2. **Milovanović G. V., Mitrinovic D. S., Rassias Th. M.** Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
3. **Fejer L.** Uber trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
4. **Egervary E.V, Szasz 0.** Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome // Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27. P. 641–652.
5. **Арестов В.В., Кондратьев В.П.** Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 15–28.
6. **Révész Sz.Gy.** A Fejér type extremal problem // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, nos. 3–4. P. 279–283.
7. **Révész Sz.** On some extremal problems of Landau // Serdica Math. J. 2007. Vol. 33, no. 1. P. 125–162.
8. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials that deviate the least from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852–1878.
9. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
10. **Зыков Д.О.** Коэффициенты тригонометрических полиномов при одностороннем ограничении // Тр. Ин-та мататики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 152–160.
11. **Зыков Д.О.** Исследование второго коэффициента нечетного тригонометрического полинома при одностороннем ограничении // Материалы 47-й Междунар. молодеж. шк.-конф. “Современные проблемы математики и ее приложений” (e-resource) / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2016. С. 179–185.
12. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011. 166 с.

Зыков Дмитрий Олегович
аспирант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: mitya130@mail.ru

Поступила 06.05.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.17

О ГРАФАХ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫ С ПАРАМЕТРАМИ (85,14,3,2) ИЛИ (325,54,3,10)[1]

М. М. Исакова, А. А. Махнев, А. А. Токбаева

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением, не большим t, для данного натурального числа t. Ранее эта задача была решена для $t = 3$. В случае $t = 4$ ранее была получена редукция к графам, в которых окрестности вершин имеют параметры (352,26,0,2), (352,36,0,4), (243,22,1,2), (729,112,1,20), (204,28,2,4), (232,33,2,5), (676,108,2,20), (85,14,3,2), (325,54,3,10). В данной работе доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ или $(325, 54, 3, 10)$, имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ или $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$. Кроме того, найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, локально $\mathcal{X}$-граф, автоморфизм графа.

M. M. Isakova, A. A. Makhnev, A. A. Tokbaeva. On graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters (85,14,3,2) or (325,54,3,10).

J. Koolen posed the problem of studying distance regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with nonprincipal eigenvalue at most t for a given positive integer t. This problem was solved earlier for $t = 3$. In the case $t = 4$, a reduction to graphs in which neighborhoods of vertices have parameters (352,26,0,2), (352,36,0,4), (243,22,1,2), (729,112,1,20), (204,28,2,4), (232,33,2,5), (676,108,2,20), (85,14,3,2), or (325,54,3,10) was obtained. In the present paper, we prove that a distance regular graph in which neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters $(85, 14, 3, 2)$ or $(325, 54, 3, 10)$ has intersection array $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ or $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$. In addition, we find possible automorphisms of a graph with intersection array $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$.

Keywords: strongly regular graph, locally $\mathcal{X}$-graph, automorphism of a graph.

MSC: 05C25, 20F29
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-137-143

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$.

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением $\leqslant t$ для данного натурального числа t. Ранее эта задача была решена для $t = 3$ [1]. В работе [2] начата программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с собственным значением r, $3 < r \leqslant 4$. В этой работе получена редукция к локально исключительным графам. В [3] найдены параметры исключительных

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

графов с собственным значением 4 и получена редукция дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются исключительными графами с неглавным собственным значением 4, к случаям, когда эти окрестности имеют параметры (352,26,0,2), (352,36,0,4), (243,22,1,2), (729,112,1,20), (204,28,2,4), (232,33,2,5), (676,108,2,20), (85,14,3,2), (325,54,3,10).

В данной работе получены

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(85, 14, 3, 2)$ *или* $(325, 54, 3, 10)$. *Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ *или* $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *пересекает по* s *вершинам* t *антиподальных классов. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17, 43\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и либо* $p = 43$, $\alpha_1(g) = 86$, $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 430$, *либо* $p = 2, 3$, $\alpha_1(g) = 86 - 2l$, $\alpha_3(g) = 12l$ *и* $\alpha_2(g) = 430 - 10l$;

(2) $t = 1$, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170w$ *и* $\alpha_2(g) = 170(3 - w)$;

(3) $p = 7$ *и* $t = 2$;

(4) $p = 5$ *и* Ω *является* t*-кликой,* $t \in \{1, 6, 11\}$;

(5) $p = 3$, $s = 6$ *и* Ω *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$ *или* $s = 3$, $t = 8, 11, \ldots, 26$ *и в случае* $t = 8$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$;

(6) $p = 2$, $s = 6$ *и* $t \leqslant 14$ *или* $s = 4$ *и* $t \leqslant 21$, *или* $s = 2$ *и* $t \leqslant 42$.

Следствие. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ *не является вершинно симметричным.*

1. Графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ или $(325, 54, 3, 10)$

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 [3, лемма 1.2]. *Пусть* Γ *— вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $4, \theta_2$, u, w *— вершины из* Γ *с* $d(u, w) = 2$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $(\mu' - 4)v'/(k' - 4) \leqslant \mu \leqslant (\mu' - \theta_2)v'/(k' - \theta_2)$;

(2) *если* X, Y *— такие подмножества из* $[u]$, *что между* X *и* Y *нет ребер, то* $|X| \cdot |Y| \leqslant (v' - |X|)(v' - |Y|)(4 - \theta_2)^2/(2k' - 4 - \theta_2)^2$;

(3) *если* $|X| = |Y|$, *то* $|X| \leqslant v'(4 - \theta_2)/(2k' - 2\theta_2)$.

Для сильно регулярного графа с параметрами $(85, 14, 3, 2)$ имеем

$$|X| \cdot |Y| \leqslant (85 - |X|)(85 - |Y|)7^2/27^2.$$

Для сильно регулярного графа с параметрами (325,54,3,10) имеем

$$|X| \cdot |Y| \leqslant (325 - |X|)(325 - |Y|)3^2/23^2.$$

Лемма 1.2 [3, лемма 1.4]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф диаметра* $d \geqslant 3$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* (v', k', λ', μ') *и неглавными собственными значениями* $4, -m$. *Если* $\theta_0 = k > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ *— собственные значения графа* Γ, *то* $\theta_1 \leqslant b_1/(m - 1) - 1$ *и* $\theta_d \geqslant -b_1/5 - 1$.

Лемма 1.3. *Если* Γ *— связный вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(325, 54, 3, 10)$*, то* $d(\Gamma) = 3$*,* $\mu \in \{45, 50, 54, 65, 75, 78, 90\}$ *и* $b_2 \leqslant 9, 14, 17, 19, 17, 15, 9$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть Γ — сильно регулярный граф с неглавными собственными значениями $n-m, -m$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(325, 54, 3, 10)$. Тогда $m-1$ делит 270 и $n-m = 270/(m-1)-1$, поэтому тройка $(m, n-m, \mu)$ совпадает с (10,29,35), (11,26,59), (19,14,59), (28,9,73), (31,8,77), (55,4,105); противоречие с тем, что μ не делит $325 \cdot 270$.

Пусть $d(\Gamma) > 2$. Тогда утверждение следует из доказательства утверждения (5) леммы 5.3 из [3].

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(325, 54, 3, 10)$*. Тогда* Γ *имеет массив пересечений* $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$.

Доказательство. Пусть u — вершина графа Γ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Если $\mu = 90$, то $k_2 = 325 \cdot 3$ и $b_2 \leqslant 9$. Далее, либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. Пусть $\mu = 78$. Тогда $k_2 = 25 \cdot 45$, b_2 делится на 13 и $b_2 \leqslant 15$. Снова либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. С помощью компьютерных вычислений получим, что в любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть $\mu = 75$. Тогда $k_2 = 65 \cdot 18$, b_2 делится на 5 и $b_2 \leqslant 17$. Далее, либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. Пусть $\mu = 65$. Тогда $k_2 = 25 \cdot 54$, b_2 делится на 13 и $b_2 \leqslant 19$. Снова либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть $\mu = 54$. Тогда $k_2 = 325 \cdot 5$ и $b_2 \leqslant 17$. В этом случае Γ имеет массив пересечений $\{325, 270, 1; 1, 54, 325\}$.

Пусть $\mu = 50$. Тогда $k_2 = 65 \cdot 27$, b_2 делится на 5 и $b_2 \leqslant 14$. Далее, либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. Пусть $\mu = 45$. Тогда $k_2 = 325 \cdot 6$ и $b_2 \leqslant 9$. Снова либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 170$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Пусть до конца раздела Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d > 2$, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами $(85, 14, 3, 2)$. Пусть $\theta_0 = k > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ.

Лемма 1.5. *Имеем* $d > 2$*,* $\theta_1 \leqslant 34$*,* $\theta_2 \geqslant -15$ *и либо* Γ *имеет массив пересечений* $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$*, либо* $\mu \in \{7, 10\}$ *и* $d > 3$.

Доказательство. Пусть $d = 2$ и $\theta_1 = n - m, \theta_2 = -m$. Тогда $m - 1$ делит $b_1 = 70$, $n - m = b_1/(m-1) - 1$ и $\mu = 85 - m(n-m)$, поэтому тройка $(m, n-m, \mu)$ — одна из следующих (5,13,20), (7,9,22), (10,6,25) или (14,4,29). Так как μ делит $85 \cdot 70$, то $\mu = 25$ и кратность 6 равна $9 \cdot 85 \cdot 95/(16 \cdot 25)$, противоречие.

Пусть $d > 2$. Так как $b_1 = 70$, то $\theta_1 \leqslant 34$ и $\theta_d \geqslant -15$.

Из доказательства утверждения (1) леммы 6.1 из [3] следует, что либо $\mu \in \{5, 7, 10\}$ и b_2 не больше 40, 36, 25 соответственно, либо Γ имеет массив пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$.

Покажем, что $\mu \neq 5$. Если $\mu = 5$, то каждый μ-подграф в Γявляется пятиугольником. Пусть u — вершина графа Γ, $\Delta = [u]$. Тогда каждый μ-подграф в Δ является 2-кокликой, поэтому окрестность любой вершины в Δ есть объединение изолированных клик. Далее, для $w \in \Delta$ подграф $\Delta(w)$ является регулярным графом степени 3 на 14 вершинах, поэтому $\Delta(w)$ — объединение изолированных 4-клик; противоречие с тем, что 14 не делится на 4.

Пусть $d = 3$. Тогда либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 51$. Если $\mu = 10$, то $k_2 = 85 \cdot 7$, a_2 четно, поэтому b_2 и c_3 нечетны, $b_2 \leqslant 25$. Отсюда либо $c_3 \in \{51, 85\}$, либо $c_3 = 55, 77$, $b_2 = 11$, либо $c_3 = 63$, $b_2 = 9$, либо $c_3 = 65$, $b_2 = 13$, либо $c_3 = 75$, $b_2 = 15$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $\mu = 7$, то $k_2 = 85 \cdot 10$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Лемма 1.6. *Параметр μ не равен* 10.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 10$. Тогда $k_2 = 85 \cdot 7$, $c_3 \geqslant 15$, a_2 четно, поэтому b_2 и c_3 нечетны, b_3 четно и $b_2 \leqslant 25$. Далее, $c_3 - b_3 \geqslant 10 - 25 + 16$, поэтому $d \leqslant 5$ и $b_3 \leqslant c_3 - 1$. Компьютерные вычисления дают неравенство $d \neq 5$.

Значит, $d = 4$. Имеем $\theta_1 > 34$ или $c_3 \geqslant 38$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Лемма 1.7. *Параметр μ не равен* 7.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 7$. Тогда $k_2 = 85 \cdot 10$, $c_3 \geqslant 11$ и $b_2 \leqslant 36$. Далее, $c_4 - b_4 \geqslant 7 - 36 + 2 \cdot 16$ и $d \leqslant 7$.

Компьютерные вычисления в случае $d \geqslant 5$ дают массив пересечений $\{85, 70, 36, 7, 1; 1, 7, 36, 70, 85\}$; противоречие с тем, что некоторое собственное значение графа имеет нецелую кратность.

Значит, $d = 4$. Если b_2 не делится на 7, то при $b_2 = 36, b_3 = 7, c_3 = 28, c_4 = 85$ имеем $\theta_1 > 34$ или $\theta_2 < -15$, противоречие. Аналогичное противоречие получается и при $7 < b_2 \leqslant 34$.

Если $b_2 = 7$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 48$. Отсюда $c_3 \in \{50, 70\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $b_2 = 14$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 43$. Отсюда $c_3 \in \{50, 70\}$. Если $b_2 = 21$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 38$. Отсюда $c_3 \in \{42, 50, 70\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет.

Если $b_2 = 28$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 33$. Отсюда $c_3 \in \{35, 40, 50, 70\}$. Если $b_2 = 35$, то либо $\theta_1 > 34$, либо $c_3 \geqslant 28$. Отсюда $c_3 \in \{35, 50, 70\}$. В любом случае допустимых массивов пересечений нет. Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ и спектром $85^1, \sqrt{85}^{215}, -1^{85}, -\sqrt{85}^{215}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что Γ содержит 86 антиподальных классов, в каждом из которых 6 вершин.

Лемма 2.1. *Пусть χ_1 — характер проекции мономиального представления ψ группы G в $\mathbf{C}^{516}$ на подпространство размерности* 215*, отвечающее собственному значению $\sqrt{85}$, χ_2 — характер проекции на подпространство размерности* 85*. Тогда*

$$\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/12 + (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{85}/85,$$

$$\chi_2(g) = \frac{\alpha_0(g) + \alpha_3(g)}{6} - 1 = -\frac{\alpha_1(g) + \alpha_2(g)}{6} + 85.$$

Далее, $\chi_1(g) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа и если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 85$ делится на p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Модифицируя вычисления из [4], получим

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 215 & 43\sqrt{85}/17 & -43\sqrt{85}/85 & -43 \\ 85 & -1 & -1 & 85 \\ 215 & -43\sqrt{85}/17 & 43\sqrt{85}/85 & -43 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g)\sqrt{85}/17 - \alpha_2(g)\sqrt{85}/85 - \alpha_3(g))/12$ и $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/12 + (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(12\sqrt{85})$.

Далее, $\chi_2(g) = (85\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 85\alpha_3(g))/516$. Учитывая равенство $\alpha_0(g) + \alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 516$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/6 - 1 = 85 - (\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/6$.

По [4, лемма 2] с $d = 85$ имеем $\chi_1(g) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа.

Последнее утверждение леммы следует из [5, лемма 2].

Лемма 2.2. *Если Ω является пустым графом, то либо $p = 43$, $\alpha_1(g) = 86$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 430$, либо $p = 2, 3$, $\alpha_1(g) = 86 - 2l$, $\alpha_3(g) = 12l$ и $\alpha_2(g) = 430 - 10l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $516 = 12 \cdot 43$, то $p = 2, 3$ или 43.

Если $p = 43$, то $\alpha_3(g) = 0$ и $\chi_1(g) = (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(12\sqrt{85})$. Так как $\chi_1(g) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа, то $\chi_1(g) = 0$, поэтому $5\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 430$.

Если $p = 2, 3$, то $5\alpha_1(g) = \alpha_2(g)$, $\alpha_3(g) = 12l$ и $\alpha_1(g) = 86 - \alpha_3(g)/6$. Лемма доказана.

До конца раздела предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $p > 5$, то g поточечно фиксирует содержащий a антиподальный класс, поэтому $\alpha_3(g) = 0$. Пусть Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам.

Лемма 2.3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $s = 6$, t нечетно и $p > 5$, то $t = 1$, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 170w$ и $\alpha_2(g) = 170(3 - w)$;*

(2) *если $t > 1$, то $p \leqslant 7$ и либо*

(*i*) *$p = 7$ и $t = 2$, либо*

(*ii*) *$p = 5$ и Ω является t-кликой, $t \in \{1, 6, 11\}$, либо*

(*iii*) *$p = 3$, $s = 6$ и Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$ или $s = 3$, $t = 8, 11, \ldots, 26$ и в случае $t = 8$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$, либо*

(*iv*) *$p = 2$, $s = 6$ и $t \leqslant 14$ или $s = 4$ и $t \leqslant 21$, или $s = 2$ и $t \leqslant 42$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A_i — множество вершин из Γ, сдвигаемых g на расстояние i.

Если $s = 6$ и t нечетно, то $86 - t$ делится на p, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 516 - 6t$ и $\chi_1(g) = 5t/2 + (5\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(12\sqrt{85}) = a + b(1 + \sqrt{85})/2$, где a, b — целые числа. Поэтому $5\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 6(\alpha_1(g) + t - 86)$ делится на $85 \cdot 6$ и $\alpha_1(g) + t - 1$ делится на 85. Далее, вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω и $t \leqslant 13$.

В случае $t = 1$ имеем $p = 5, 17$, в случае $t = 5$ имеем $p = 3$, в случае $t = 9$ имеем $p = 7, 11$, в случае $t = 11$ имеем $p = 3, 5$, и в случае $t = 13$ имеем $p = 73$. В последнм случае Ω — регулярный граф степени 12; противоречие с тем, что $\lambda_\Omega = 14$. Если $t = 1$, $p = 17$, то $\chi_1(g) = 5/2 + (\alpha_1(g) - 85)/(2\sqrt{85})$ и $\alpha_1(g) = 170w$.

Если $t = 9$ и $p = 7$, то $\chi_1(g) = 45/2 + (\alpha_1(g) - 77)/(2\sqrt{85})$ и $\alpha_1(g) \geqslant 97 \cdot 7$. Если $t = 9$ и $p = 11$, то $\chi_1(g) = 45/2 + (\alpha_1(g) - 77)/(2\sqrt{85})$ и $\alpha_1(g) \geqslant 92 \cdot 11$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть далее для $p > 5$ число t четно. Если $p > 13$, то для вершин $a, b \in \Omega$ с условием $d(a, b) \leqslant 2$ подграф $[a] \cap [b]$ содержится в Ω. В этом случае Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t - 1, t - 16, 1; 1, 14, t - 1\}$ и $t - 16 = 5 \cdot 14$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда $86 - t$ делится на 13 и $t \in \{8, 34, \ldots, 60\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 1 по модулю 13. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 8$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 2 вершин из $a^\perp$ и по вершине из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 5, 1; 1, 1, 7\}$; противоречие с тем, что число $k\lambda = 7 \cdot 1$ нечетно.

Пусть $p = 11$. Тогда $86 - t$ делится на 11 и $t \in \{20, 42, 64\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 3 по модулю 11. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t \leqslant 14$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $86 - t$ делится на 7 и $t \in \{2, 16, \ldots, 84\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 0 по модулю 7. Вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2$.

Пусть $p = 5$. Тогда $86 - t$ делится на 5 и $t \in \{1, 6, 11, \ldots, 85\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 4 по модулю 5. Если $s = 6$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 6, 11$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 5 вершин из $a^\perp$ и по 4 вершины из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, противоречие.

Если $s = 1$, то Ω является t-кликой, $t \in \{1, 6, 11\}$.

Пусть $p = 3$. Тогда $86 - t$ делится на 3 и $t \in \{2, 5, \ldots, 84\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 2 по модулю 3. Если $s = 6$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 8, 14$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 3 вершин из $a^\perp$ и по 2 вершины из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{13, 10, 1; 1, 2, 13\}$.

Пусть $s = 3$. Тогда число ребер между A_3 и $A_1 \cup A_2$ равно $3t(86 - t)$. Так как $|A_1 \cup A_2| = 6(86-t)$, то некоторая вершина из $A_1 \cup A_2$ смежна не более чем с $t/2$ вершинами из A_3, поэтому $t \leqslant 28$. Если F — антиподальный класс, содержащий a и $c \in \Omega(a)$, то $\Omega(c)$ содержит не менее 3 вершин из $a^\perp$ и не менее 2 вершин из $[b]$, $b \in F - \{a\}$, поэтому $8 \leqslant t$ и в случае $t = 8$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $86 - t$ делится на 2 и $t \in \{2, 4, \ldots, 86\}$. Для любых двух вершин $a, b \in \Omega$ таких, что $d(a, b) \leqslant 2$, число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 0 по модулю 2. Если $s = 6$, то вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с t вершинами из Ω, поэтому $t = 2, 4, \ldots, 14$.

Пусть $s = 4$. Тогда число ребер между A_3 и $A_1 \cup A_2$ равно $2t(86 - t)$. Так как $|A_1 \cup A_2| = 6(86 - t)$, то некоторая вершина из $A_1 \cup A_2$ смежна не более чем с $t/3$ вершинами из A_3 и не менее чем с $2t/3$ вершинами из Ω, поэтому $t \leqslant 21$.

Пусть $s = 2$. Тогда число ребер между A_3 и $A_1 \cup A_2$ равно $4t(86 - t)$. Так как $|A_1 \cup A_2| = 6(86 - t)$, то некоторая вершина из $A_1 \cup A_2$ смежна не более чем с $2t/3$ вершинами из A_3, поэтому $t \leqslant 42$. Лемма и теорема 2 доказаны.

З а м е ч а н и е. Пусть окрестность некоторой вершины из Ω в графе Γ является сильно регулярным графом с параметрами (85,14,3,2). С учетом того, что Ω — регулярный граф степени $t - 1$ по [6, теорема 1] в случае $p = 5$ число $t - 1$ равно 0 или 5, в случае $p = 3$ число $t - 1$ равно 4 или 10, а в случае $p = 2$ число $t - 1$ равно 5, 7 или 9.

3. Граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ не является вершинно симметричным

Пусть до конца работы Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{85, 70, 1; 1, 14, 85\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда $\{2, 3, 43\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17, 43\}$ и ввиду теоремы 2 $|G|$ не делится на 49.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если f — элемент порядка 43 из G, g — элемент простого порядка $p \leqslant 7$ из $C_G(f)$, то Ω — пустой граф, $p = 2$ и либо $\alpha_3(g) = 516$, либо $\alpha_1(g) = 86$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 430$ — в любом случае $|C_G(f)|$ не делится на 4*;

(2) $S(G) = O_2(G)$;

(3) *цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/S(G)$ изоморфен $U_3(7)$ или $U_4(7)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — элемент порядка 43 из G, g — элемент простого порядка $p \leqslant 7$ из $C_G(f)$. По теореме 2 $Fix(f)$ — пустой граф, $\alpha_1(f) = 86$, $\alpha_3(f) = 0$ и $\alpha_2(f) = 430$.

Ввиду теоремы 2 Ω — пустой граф, $p = 2, 3$, числа $\alpha_1(g) = 86 - 2l$, $\alpha_3(g) = 12l$ и $\alpha_2(g) = 430 - 10l$ делятся на $43p$, поэтому $p = 2$, либо $l = 43$, либо $l = 0$. Так как $\alpha_1(f) = 86$, то $|C_G(f)|$ не делится на 4.

Пусть K — максимальная подгруппа из G, фиксирующая каждый антиподальный класс. Ввиду утверждения 1 $|K|$ делит 2.

Пусть $Q = O_2(G) \neq K$. Тогда длины Q-орбит на множестве антиподальных классов равны 2 и $\Phi(Q) \leqslant K$.

Из действия $S(G)$ на множестве антиподальных классов следует, что $S(G) = O_2(G)$. Пусть $\bar{G} = G/S(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}$. По [7, табл. 1] группа $\bar{T}$ изоморфна группе $U_3(7)$ порядка $2^7 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 43$ или группе $U_4(7)$ порядка $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 43$. Лемма доказана.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о следствия. По лемме 3.1 $|G|$ делится на 49; противоречие с тем, что ввиду теоремы 2 $|G|$ не делится на 49. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. АН. 2015. Vol. 464, № 4. P. 396–400.
2. **Махнев А.А.** Сильно регулярные графы с неглавным собственным значением 4 и их расширения // Изв. Гомел. гос. ун-та. 2014. Т. 84, № 3. С. 84–85.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О расширениях сильно регулярных графов с собственным значением 4 // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 233–255.
4. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{\mathbf{24}, \mathbf{21}, \mathbf{3}; \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{18}\}$ // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 4. С. 476–495.
5. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
6. **Падучих Д.В.** Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (85,14,3,2) // Дискрет. математика. 2009. Т. 21, № 1. С. 78–104.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Исакова Мариана Малиловна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Кабардино-Балкарский университет
e-mail: isakova2206@mail.ru

Поступила 17.10.2015

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Токбаева Альбина Аниуаровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Кабардино-Балкарский университет
e-mail: tok2506@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.16 + 519.85

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА КЛАСТЕРЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ИХ МОЩНОСТЬ[1]

А. В. Кельманов, Л. В. Михайлова, С. А. Хамидуллин, В. И. Хандеев

Рассматривается задача разбиения конечной последовательности точек евклидова пространства на заданное число кластеров (подпоследовательностей) по критерию минимума суммы по всем кластерам внутрикластерных сумм квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров. Предполагается, что центр одного из искомых кластеров задан в начале координат, а центр каждого из остальных кластеров неизвестен и определяется как среднее значение по всем элементам, образующим этот кластер. При этом разбиение подчиненно структурным ограничениям на элементы последовательности, входящие в кластеры с неизвестными центрами: (1) конкатенация номеров элементов этих кластеров является возрастающей последовательностью, (2) разность между последующим и предыдущим номерами ограничена сверху и снизу заданными константами, (3) суммарная мощность кластеров с неизвестными центрами задана на входе. Показано, что задача NP-трудна в сильном смысле. Построен 2-приближенный алгоритм, полиномиальный при фиксированном числе кластеров.

Ключевые слова: разбиение, последовательность, евклидово пространство, минимум суммы квадратов расстояний, NP-трудность, приближенный алгоритм.

A. V. Kel'manov, L. V. Mikhailova, S. A. Khamidullin, V. I. Khandeev. An approximation algorithm for the problem of partitioning a sequence into clusters with constraints on their cardinalities.

We consider the problem of partitioning a finite sequence of points in Euclidean space into a given number of clusters (subsequences) minimizing the sum over all clusters of intracluster sums of squared distances from elements of the clusters to their centers. It is assumed that the center of one of the desired clusters is specified at the origin, while the centers of the other clusters are unknown. Very unknown cluster center is defined as the mean value of cluster elements. Additionally, there are a few structural constraints on the elements of the sequence that enter the clusters with unknown centers: (1) the concatenation of indices of elements of these clusters is an increasing sequence, (2) the difference between two consequent indices is bounded from below and above by prescribed constants, and (3) the total number of elements in these clusters is given as an input. It is shown that the problem is strongly NP-hard. A 2-approximation algorithm that is polynomial for a fixed number of clusters is proposed for this problem.

Keywords: partitioning, sequence, Euclidean space, minimum sum of squared distances, NP-hardness, approximation algorithm.

MSC: 68W25, 68Q25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-144-152

Введение

Предметом исследования является одна из задач разбиения конечной последовательности точек евклидова пространства на подпоследовательности. Цели исследования — выяснение сложностного статуса задачи и построение приближенного эффективного алгоритма с гарантированной оценкой точности.

Исследование мотивировано слабой изученностью задачи и ее актуальностью, в частности, для математических проблем аппроксимации, кластеризации и анализа последовательностей (временных рядов), а также для многих естественно-научных и технических приложений, в которых требуется классификация упорядоченных по времени данных численных экспериментов или результатов наблюдения за состояниями каких-либо материальных объектов (см.,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10041).

например, [1–4] и цитированные там работы). Примеры приложений (истоков) исследуемой задачи приведены в разд. 1.

Настоящая работа является развитием результатов, полученных ранее в [5–7]. Каждая из цитируемых работ послужила необходимым элементом для предложенного ниже, первого на сегодняшний день, алгоритма решения задачи с гарантированной оценкой точности.

1. Формулировка задачи, ее истоки и сложность

Всюду далее $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^q$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Рассматриваемая задача имеет следующую формулировку.

З а д а ч а 1. Дано: последовательность $\mathcal{Y}=(y_1,\ldots,y_N)$ точек из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, L и M. Найти непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_L$ множества $\mathcal{N}=\{1,\ldots,N\}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такие, что

$$F(\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_L)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{j\in\mathcal{M}_l}\|y_j-\overline{y}(\mathcal{M}_l)\|^2+\sum_{i\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{M}}\|y_i\|^2\longrightarrow\min, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{M}=\bigcup_{l=1}^{L}\mathcal{M}_l$, $\overline{y}(\mathcal{M}_l)=(1/|\mathcal{M}_l|)\sum\limits_{j\in\mathcal{M}_l}y_j$ — центроид (геометрический центр) подмножества $\{y_j\mid j\in\mathcal{M}_l\}$ при ограничениях: (1) мощность объединенного множества $\mathcal{M}$ равна M, (2) в последовательности, образованной конкатенацией множеств $\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_L$, номера упорядочены по возрастанию при условии, что элементы каждого множества образуют возрастающую последовательность, (3) номера из объединенного набора $\mathcal{M}=\{n_1,\ldots,n_M\}$ связаны неравенствами

$$T_{\min}\le n_m-n_{m-1}\le T_{\max}\le N,\qquad m=2,\ldots,M. \tag{1.2}$$

Из приведенной формулировки видно, что задача 1 относится к классу задач кластеризации с квадратичным критерием. Кластерами являются искомые подмножества $\mathcal{M}_1$, …, $\mathcal{M}_L$, $\mathcal{N}\setminus\mathcal{M}$ номеров и соответствующие им подпоследовательности входной последовательности.

Одним из источников задачи 1 является следующая, общая для многих естественно-научных и технических приложений, содержательная проблема, характерная, в частности, для помехоустойчивого дистанционного мониторинга объектов, электронной разведки, анализа и распознавания биомедицинских и речевых сигналов и др.

Дана последовательность $\mathcal{Y}$, содержащая N упорядоченных по времени результатов $y_1,\ldots$, y_N измерения набора y из q числовых характеристик некоторого объекта, который может находиться в $L+1$ состояниях. Среди этих состояний L активных и одно пассивное. В пассивном состоянии все элементы набора равны нулю, а в каждом из активных — хотя бы одна из компонент набора не равна нулю. Измерения сопровождаются инструментальной ошибкой. Известно, что объект некоторое время находится в одном из активных состояний, а затем переключается в другое активное состояние. При этом все активные состояния объекта сопровождаются переключениями в пассивное состояние на некоторое ограниченное сверху и снизу неизвестное время. Кроме того, известны (заданы) натуральные числа $T_{\min}$ и $T_{\max}$, которые соответствуют минимальному и максимальному интервалам времени между любыми двумя последовательными активными состояниями объекта. Соответствие элемента последовательности какому-либо состоянию объекта неизвестно. Требуется найти в последовательности все элементы, соответствующие активным состояниям объекта, и оценить характеристики объекта в каждом из активных состояний.

Формализация этой содержательной проблемы с использованием критерия минимума суммы квадратов уклонений индуцирует следующую задачу аппроксимации. Даны последовательность $y_1,\ldots,y_N$ точек из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, L и M. Требуется найти аппроксимирующую последовательность $z_1, \ldots, z_N$ вида

$$z_n = \begin{cases} x_1, & n \in \mathcal{M}_1, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_L, & n \in \mathcal{M}_L, \\ 0, & n \in \mathcal{N} \backslash \mathcal{M}, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $x_1, \ldots, x_L$ — произвольные неизвестные точки из $\mathbb{R}^q$, такую, что

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \|y_i - z_i\|^2 \longrightarrow \min \tag{1.4}$$

при тех же, что и в задаче 1, ограничениях на номера из подмножеств $\mathcal{M}_l$, $l = 1, \ldots, L$, и объединенного множества $\mathcal{M}$.

Схематически участок последовательности z_n, $n \in \mathcal{N}$, можно представить в виде

$$\ldots 0x_{l-1}0 \ldots 0x_{l-1}0 \ldots\ldots 0x_l0 \ldots 0x_l0 \ldots . \tag{1.5}$$

Здесь $x_{l-1},\ x_l \in \mathbb{R}^q$ — неизвестные ненулевые точки (соответствующие $(l-1)$-у и l-у активным состояниям объекта), 0 — начало координат (соответствующее пассивному состоянию), а число нулей между ненулевыми точками неизвестно и лежит в допустимом интервале от $T_{\min} - 1$ до $T_{\max} - 1$ в соответствии с ограничениями (1.2).

Раскрыв сумму (1.4) с учетом (1.3) и сгруппировав члены, легко проверить с помощью дифференцирования, что оптимальными в смысле (1.4) являются значения $x_l = \overline{y}(\mathcal{M}_l)$, $l = 1, \ldots, L$, а сформулированная задача аппроксимации индуцирует задачу 1. При этом в найденной оптимальной аппроксимирующей последовательности участок, соответствующий (1.5), как видно из формулировки задачи 1, имеет вид:

$$\ldots 0\overline{y}(\mathcal{M}_{l-1})0 \ldots 0\overline{y}(\mathcal{M}_{l-1})0 \ldots\ldots 0\overline{y}(\mathcal{M}_l)0 \ldots 0\overline{y}(\mathcal{M}_l)0 \ldots .$$

В этой последовательности для всех $l = 1, \ldots, L$ номера из набора $\mathcal{M}_l$, кластер $\{y_j \mid j \in \mathcal{M}_l\}$ и его центроид $\overline{y}(\mathcal{M}_l)$ определяются в результате решения задачи 1. Центроид $\overline{y}(\mathcal{M}_l)$ является оценкой для точки x_l.

Из приведенной выше схематичной строковой записи последовательностей видно, что их можно интерпретировать как последовательности, содержащие участки с серийными квазипериодическими (в силу ограничений (1.2)) повторами. Если условиться о границах серий, например, по первому (или по последнему) повтору, то все рассмотренные выше задачи можно трактовать как задачи разбиения последовательности на серийные участки с квазипериодическими повторами неизвестных точек совместно с оцениванием точек и отысканием их положения в последовательности.

Сложностной статус задачи 1 устанавливает следующее

Утверждение. *Задача* 1 *NP-трудна в сильном смысле.*

Доказательство утверждения следует из того, что частный случай задачи 1, в котором $L = 1$, является [5] NP-трудной в сильном смысле задачей.

Из этого утверждения следует, что сформулированная выше характерная для многих приложений содержательная задача, а также задача аппроксимации относится к числу труднорешаемых задач.

2. Известные и полученные результаты

Задача 1 относится к числу слабоизученных проблем дискретной оптимизации. Близкой в постановочном плане является задача (см. [7]), в которой входная последовательность $\mathcal{Y}$ одномерна, т. е. $q = 1$. Точки из набора $(x_1, \ldots, x_L)$ заданы на входе и принадлежат $\mathbb{R}^d$, где

$d \geq 1$, причем $T_{\min} \geq d$ в ограничениях (1.2). В целевой функции этой задачи вместо центроидов $\overline{y}(\mathcal{M}_1), \ldots, \overline{y}(\mathcal{M}_L)$ искомых подмножеств в формуле (1.1) фигурируют элементы заданного набора $(x_1, \ldots, x_L)$. Искомыми переменными являются множества $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_L$. Эту задачу можно трактовать как задачу поиска в последовательности серийных участков с квазипериодическими повторами точек из заданного набора (шаблона) совместно с отысканием положения этих точек в последовательности. В [7] показано, что эта задача разрешима за полиномиальное время с помощью построенной схемы динамического программирования. Ниже мы применяем упрощенную модификацию этой схемы для построения предлагаемого алгоритма.

В настоящее время для задачи 1, за исключением ее частного случая, когда $L = 1$ в формуле (1.1), а также двух подслучаев этого случая отсутствуют какие-либо эффективные алгоритмы с оценками точности. Для указанного частного случая задачи получены следующие результаты.

В [5] анализировался вариант задачи, в котором $T_{\min}$ и $T_{\max}$ — параметры. В цитируемой работе установлено, что в случае $L = 1$ параметрический вариант задачи 1 NP-труден в сильном смысле для любых $T_{\min} < T_{\max}$. В тривиальном случае, когда $T_{\min} = T_{\max}$, задача разрешима за полиномиальное время.

В [6] для этого же случая (когда $L = 1$) задачи 1 предложен 2-приближенный полиномиальный алгоритм, временная сложность которого оценивается величиной $\mathcal{O}(N^2(MN + q))$.

Кроме того, в [8] и [9] исследованы два подслучая этого же случая задачи, в которых размерность q пространства фиксирована. Для подслучая с целочисленными входами задачи в [8] предложен точный псевдополиномиальный алгоритм, трудоемкость которого есть величина $\mathcal{O}(MN^2(MD)^q)$, где D — максимальное абсолютное значение координат входных точек. Для подслучая с вещественными входами в [9] обоснована полностью полиномиальная приближенная схема. Предложенный в этой работе алгоритм при заданной относительной погрешности ε позволяет находить $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи 1 за время $\mathcal{O}(MN^3(1/\varepsilon)^{q/2})$.

В настоящей работе для задачи 1 предложен алгоритм, позволяющий находить 2-приближенное решение за время $\mathcal{O}(LN^{L+1}(MN + q))$, полиномиальное при фиксированном числе L кластеров.

3. Основы алгоритма

Для построения алгоритма нам потребуются несколько базовых утверждений, вспомогательная задача и точный полиномиальный алгоритм ее решения.

Геометрической базой алгоритма являются следующие утверждения.

Лемма 1. *Для произвольной точки $u \in \mathbb{R}^q$ и конечного непустого множества $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^q$ имеет место равенство*

$$\sum_{z \in \mathcal{Z}} \|z - u\|^2 = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \|z - \overline{z}\|^2 + |\mathcal{Z}|\, \|u - \overline{z}\|^2, \tag{3.1}$$

где $\overline{z} = 1/|\mathcal{Z}| \sum\limits_{z \in \mathcal{Z}} z$ — центроид множества $\mathcal{Z}$.

Эта лемма доказывается весьма просто и относится к общеизвестным результатам. Ее доказательство представлено во множестве публикаций, в частности в [10].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда если некоторая точка $u \in \mathbb{R}^q$ лежит ближе* (*в смысле расстояния*) *к центроиду $\overline{z}$ множества $\mathcal{Z}$, чем все точки этого множества, то справедливо неравенство $\sum\limits_{z \in \mathcal{Z}} \|z - u\|^2 \leq 2 \sum\limits_{z \in \mathcal{Z}} \|z - \overline{z}\|^2$.*

Справедливость леммы следует из (3.1), так как по условию леммы $\|u - \overline{z}\| \leq \|z - \overline{z}\|$ для всех $z \in \mathcal{Z}$.

Всюду далее будем использовать обозначение $f^x(y)$ для функции $f(x,y)$ при фиксированном аргументе x.

Лемма 3. *Пусть*

$$S(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L,x_1,\dots,x_L) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{j\in\mathcal{M}_l}\|y_j - x_l\|^2 + \sum_{i\in\mathcal{N}\setminus\mathcal{M}}\|y_i\|^2, \tag{3.2}$$

$$G(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L,x_1,\dots,x_L) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{j\in\mathcal{M}_l}(2\langle y_j, x_l\rangle - \|x_l\|^2),$$

где $x_1,\dots,x_L$ — точки из $\mathbb{R}^q$, а элементы множеств $\mathcal{M}_l,\dots,\mathcal{M}_L$ и $\mathcal{M}$ удовлетворяют ограничениям задачи 1. *Тогда для условных оптимумов функции* (3.2) *справедливы следующие утверждения*: 1) *для любых непустых фиксированных подмножеств $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L$ минимум функции* (3.2) *по переменным $x_1,\dots,x_L$ достигается в точках $x_l = \overline{y}(\mathcal{M}_l)$, $l = 1,\dots,L$, и равен $F(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L)$*; 2) *для любого набора $x = (x_1,\dots,x_L)$ фиксированных точек из $\mathbb{R}^q$ минимум функции $S^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L)$ по подмножествам $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L$ достигается на подмножествах $\mathcal{M}_1^x,\dots,\mathcal{M}_L^x$ номеров элементов $\{y_i \mid i \in \bigcup_{l=1}^{L}\mathcal{M}_l^x\}$ последовательности $\mathcal{Y}$, для которых максимальна функция $G^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы легко проверяется дифференцированием и следует также из леммы 1. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что справедливо следующее легко проверяемое равенство

$$S^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L) = \sum_{j\in\mathcal{N}}\|y_j\|^2 - G^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L), \tag{3.3}$$

в правой части которого сумма не зависит от $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L$.

Лемма доказана.

Вычислительной базой предлагаемого алгоритма является точный полиномиальный алгоритм решения следующей вспомогательной задачи.

З а д а ч а 2. Дано: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1,\dots,y_N)$ и набор $x = (x_1,\dots,x_L)$ точек из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$ и M. Найти непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L$ множества $\mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такие, что целевая функция $G^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L)$ максимальна при тех же, что и в задаче 1, ограничениях на искомые переменные.

Для изложения алгоритма решения вспомогательной задачи определим функцию

$$g_l^x(n) = 2\langle y_n, x_l\rangle - \|x_l\|^2, \qquad n \in \mathcal{N}, \qquad l = 1,\dots,L, \tag{3.4}$$

где x_l — точка из набора x, y_n — элемент последовательности $\mathcal{Y}$. В соответствии с этим определением для целевой функции $G^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L)$ имеем $G^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{n\in\mathcal{M}_l} g_l^x(n)$. Кроме того, заметим, что утверждение 2) леммы 3 означает равенства

$$(\mathcal{M}_1^x,\dots,\mathcal{M}_L^x) = \arg\min_{\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L} S^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L) = \arg\max_{\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L} G^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L). \tag{3.5}$$

В следующей лемме и следствии к ней приведена схема динамического программирования, гарантирующая отыскание оптимального решения $\mathcal{M}_1^x,\dots,\mathcal{M}_L^x$ задачи 2 и (согласно приведенным выше равенствам (3.5)) оптимального решения задачи минимизации функции $S^x(\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_L)$. Схема следует из результатов работы [7].

Лемма 4. *Пусть выполнены условия задачи 2. Тогда для любых натуральных L и M таких, что $(M-1)T_{\min} < N$ и $L \le M$, оптимальное значение $G^x_{\max}$ целевой функции этой задачи находится по формуле*

$$G^x_{\max} = \max_{n \in \{1+(M-1)T_{\min},\dots,N\}} G^x_{L,M}(n), \tag{3.6}$$

а значения функции $G^x_{L,M}(n)$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам

$$G^x_{l,m}(n) = g^x_l(n) + \begin{cases} 0, \quad \text{если} \;\; l=1, \quad m=1, \\ \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{1,m-1}(j), \quad \text{если} \;\; l=1, \quad m=2,\dots,M-(L-1), \\ \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l-1,m-1}(j), \quad \text{если} \;\; l=2,\dots,L, \quad m=l, \\ \max\{\max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l,m-1}(j), \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l-1,m-1}(j)\}, \\ \qquad \text{если} \;\; l=2,\dots,L, \quad m=l+1,\dots,M-(L-l), \end{cases} \tag{3.7}$$

где

$$\gamma_{m-1}(n) = \big\{ j \mid \max\{1+(m-2)T_{\min}, n-T_{\max}\} \le j \le n - T_{\min} \big\}, \qquad m=2,\dots,M \tag{3.8}$$

при каждом $n = 1+(m-1)T_{\min},\dots,N-(M-m)T_{\min}$.

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 4. Пусть, кроме того,*

$$r^x_{l,m}(n) = \begin{cases} 1, \quad \text{если} \;\; l=1, \quad m=2,\dots,M-(L-1), \\ l-1, \quad \text{если} \;\; l=2,\dots,L, \quad m=l, \\ l-1, \quad \text{если} \quad \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l,m-1}(j) < \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l-1,m-1}(j), \\ \qquad l=2,\dots,L, \quad m=l+1,\dots,M-(L-l), \\ l, \quad \text{если} \quad \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l,m-1}(j) \ge \max\limits_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l-1,m-1}(j), \\ \qquad l=2,\dots,L, \quad m=l+1,\dots,M-(L-l); \end{cases}$$

$$I^x_{l,m}(n) = \arg\max_{j \in \gamma_{m-1}(n)} G^x_{l,m-1}(j), \qquad l=1,\dots,L, \qquad m=l+1,\dots,M-(L-l)$$

при каждом $n = 1+(m-1)T_{\min},\dots,N-(M-m)T_{\min}$;

$$n^x(m) = \begin{cases} \arg\max\limits_{n \in \{1+(M-1)T_{\min},\dots,N\}} G^x_{L,M}(n), \quad \text{если} \;\; m=M, \\ I^x_{k^x(m),m+1}(n^x(m+1)), \quad \text{если} \;\; m=M-1,\dots,1; \end{cases}$$

$$k^x(m) = \begin{cases} L, \quad \text{если} \;\; m=M, \\ r^x_{k^x(m+1),m+1}(n^x(m+1)), \quad \text{если} \;\; m=M-1,\dots,1; \end{cases}$$

$$J^x(l) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \;\; l=0, \\ \big|\{ m \in \{1,\dots,M\} \mid k^x(m) \le l \}\big|, \quad \text{если} \;\; l=1,\dots,L. \end{cases}$$

Тогда множества $\mathcal{M}^x_1,\dots,\mathcal{M}^x_L$ определяются по правилу

$$\mathcal{M}^x_l = \{ n \mid n = n^x(m), \; m = J^x(l-1)+1,\dots,J^x(l) \} \tag{3.9}$$

при каждом $l = 1,\dots,L$.

Запишем алгоритм, реализующий приведенную схему, в пошаговом виде.

А л г о р и т м $\mathcal{A}_1$.

Вход алгоритма: последовательность $\mathcal{Y}$, набор $(x_1,\dots,x_L)$ точек, числа $T_{\min}$, $T_{\max}$ и M.

Ш а г 1. Вычислим значения $g_l^x(n)$ для $l=1,\dots,L$, $n=1+(l-1)T_{\min},\dots,N-(L-l)T_{\min}$ по формуле (3.4).

Ш а г 2. Используя рекуррентные формулы (3.7) и (3.8), вычислим значения $G_{l,m}^x(n)$ для каждого $l=1,\dots,L$, $m=l,\dots,M-(L-l)$, $n=1+(m-1)T_{\min},\dots,N-(M-m)T_{\min}$.

Ш а г 3. Найдем значение $G_{\max}^x$ максимума целевой функции G^x по формуле (3.6) и оптимальные подмножества $\mathcal{M}_l^x$ по формуле (3.9).

Выход алгоритма: набор подмножеств $\{\mathcal{M}_1^x,\dots,\mathcal{M}_L^x\}$.

З а м е ч а н и е 1. Перед началом работы алгоритма требуется проверка справедливости двух условий леммы 4. Эти необходимые условия обеспечивают совместность ограничений в задачах 1 и 2, а также корректность входных данных алгоритма.

З а м е ч а н и е 2. В [7] установлено, что алгоритм $\mathcal{A}_1$ находит оптимальное решение задачи 2 за время $\mathcal{O}(LN(M(T_{\max}-T_{\min}+1)+q))$. В этом выражении значение $T_{\max}-T_{\min}+1$ не превосходит N. Поэтому время работы алгоритма оценивается величиной $\mathcal{O}(LN(MN+q))$.

4. Приближенный алгоритм

Суть подхода к поиску решения заключается в следующем. Для каждого упорядоченного набора, содержащего L элементов последовательности $\mathcal{Y}$, находим точное решение вспомогательной задачи 2 — набор подмножеств номеров элементов последовательности, который является допустимым решением исходной задачи 1. Найденный набор подмножеств объявляется претендентом на решение исходной задачи и включается в семейство допустимых решений. В качестве окончательного решения из построенного семейства выбирается набор подмножеств, доставляющий наибольшее значение целевой функции задачи 2.

Сформулируем алгоритм решения задачи 1, реализующий описанный подход. В приведенной ниже пошаговой записи предполагается, что входные натуральные числа заданы в соответствии с ограничениями задачи и условиями леммы 4 (см. замечание 1).

А л г о р и т м $\mathcal{A}$.

Вход алгоритма: последовательность $\mathcal{Y}$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$, M и L.

Ш а г 1. Для каждого набора $x=(x_1,\dots,x_L)\in\mathcal{Y}^L$, сформированного из элементов последовательности $\mathcal{Y}$, с помощью алгоритма $\mathcal{A}_1$ найдем оптимальное решение $\{\mathcal{M}_1^x,\dots,\mathcal{M}_L^x\}$ задачи 2.

Ш а г 2. Найдем наборы $x(A)=\arg\max\limits_{x\in\mathcal{Y}^L} G^x(\mathcal{M}_1^x,\dots,\mathcal{M}_L^x)$ и $\{\mathcal{M}_1^A,\dots,\mathcal{M}_L^A\}=\{\mathcal{M}_1^{x(A)},\dots,\mathcal{M}_L^{x(A)}\}$. Если оптимальных решений несколько, то выберем любое из них.

Выход алгоритма: набор $\{\mathcal{M}_1^A,\dots,\mathcal{M}_L^A\}$.

Лемма 5. *Пусть* $\{\mathcal{M}_1^*,\dots,\mathcal{M}_L^*\}$ *— оптимальное решение задачи* 1, *а* $\{\mathcal{M}_1^A,\dots,\mathcal{M}_L^A\}$ *— решение, полученное в результате работы алгоритма* $\mathcal{A}$. *Тогда*

$$F(\mathcal{M}_1^A,\dots,\mathcal{M}_L^A)\le 2F(\mathcal{M}_1^*,\dots,\mathcal{M}_L^*).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оптимальному решению $\{\mathcal{M}_1^*,\dots,\mathcal{M}_L^*\}$ задачи 1 соответствует набор $\{\overline{y}(\mathcal{M}_1^*),\dots,\overline{y}(\mathcal{M}_L^*)\}$ центроидов. Рассмотрим точку $t_l=\arg\min\limits_{y\in\mathcal{M}_l^*}\|y-\overline{y}(\mathcal{M}_l^*)\|$, $l=1,\dots,L$, из подмножества $\mathcal{M}_l^*$, ближайшую к центроиду этого подмножества. Эта точка и само подмножество $\mathcal{M}_l^*$ удовлетворяют условиям леммы 2. Поэтому, применяя неравенство этой леммы к каждому из подмножеств $\mathcal{M}_l^*$, $l = 1, \ldots, L$, вычислим оценку для величины

$$S(\mathcal{M}_1^*, \ldots, \mathcal{M}_L^*, t_1, \ldots, t_L) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{y \in \mathcal{M}_l^*} \|y - t_l\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}^*} \|y_i\|^2$$

$$\leq 2 \sum_{l=1}^{L} \sum_{y \in \mathcal{M}_l^*} \|y - \overline{y}(\mathcal{M}_l^*)\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}^*} \|y_i\|^2$$

$$\leq 2 \sum_{l=1}^{L} \sum_{y \in \mathcal{M}_l^*} \|y - \overline{y}(\mathcal{M}_l^*)\|^2 + 2 \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}^*} \|y_i\|^2 = 2F(\mathcal{M}_1^*, \ldots, \mathcal{M}_L^*), \tag{4.1}$$

где $\mathcal{M}^* = \bigcup_{l=1}^{L} \mathcal{M}_l^*$.

С другой стороны, заметим, что набор $t = (t_1, \ldots, t_L)$ точек, ближайших к центроидам $\mathcal{M}_1^*, \ldots, \mathcal{M}_L^*$, является одним из наборов $(x_1, \ldots, x_L) \in \mathcal{Y}^L$, рассмотренных на шаге 1 алгоритма $\mathcal{A}$. Пусть $\{\mathcal{M}_1^t, \ldots, \mathcal{M}_L^t\}$ — оптимальное решение задачи 2 при $x = t$, полученное на шаге 1 алгоритма $\mathcal{A}$. Тогда в соответствии с утверждением 2) леммы 3, т. е. согласно (3.5), набор $\{\mathcal{M}_1^t, \ldots, \mathcal{M}_L^t\}$ доставляет минимум функции $S^x(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_L)$ при $x = t$. Поэтому

$$S(\mathcal{M}_1^t, \ldots, \mathcal{M}_L^t, t_1, \ldots, t_L) \leq S(\mathcal{M}_1^*, \ldots, \mathcal{M}_L^*, t_1, \ldots, t_L). \tag{4.2}$$

Далее, по определению шага 2 в соответствии с (3.3) справедлива оценка

$$S(\mathcal{M}_1^A, \ldots, \mathcal{M}_L^A, x_1^A, \ldots, x_L^A) \leq S(\mathcal{M}_1^t, \ldots, \mathcal{M}_L^t, t_1, \ldots, t_L), \tag{4.3}$$

где $(x_1^A, \ldots, x_L^A) = x(A)$. Кроме того, из первого утверждения леммы 3 следует неравенство

$$F(\mathcal{M}_1^A, \ldots, \mathcal{M}_L^A) \leq S(\mathcal{M}_1^A, \ldots, \mathcal{M}_L^A, x_1^A, \ldots, x_L^A). \tag{4.4}$$

Наконец, объединяя (4.1)–(4.4), получим цепочку оценочных неравенств

$$F(\mathcal{M}_1^A, \ldots, \mathcal{M}_L^A) \leq S(\mathcal{M}_1^A, \ldots, \mathcal{M}_L^A, x_1^A, \ldots, x_L^A) \leq S(\mathcal{M}_1^t, \ldots, \mathcal{M}_L^t, t_1, \ldots, t_L)$$
$$\leq S(\mathcal{M}_1^*, \ldots, \mathcal{M}_L^*, t_1, \ldots, t_L) \leq 2F(\mathcal{M}_1^*, \ldots, \mathcal{M}_L^*),$$

которая завершает доказательство леммы.

Свойства изложенного алгоритмического решения устанавливает

Теорема. *Алгоритм* $\mathcal{A}$ *находит* 2*-приближенное решение задачи* 1 *за время*

$$\mathcal{O}(LN^{L+1}(M(T_{\max} - T_{\min} + 1) + q)).$$

Оценка 2 *точности алгоритма достижима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка 2 точности алгоритма следует из леммы 5. Оценка трудоемкости алгоритма следует из того, что на шаге 1 для каждого из N^L наборов $(x_1, \ldots, x_L) \in \mathcal{Y}^L$ алгоритм $\mathcal{A}_1$ находит оптимальное решение задачи 2 за время $\mathcal{O}(LN(M(T_{\max}-T_{\min}+1)+q))$, а на шаге 2 выбор наименьшего элемента осуществляется за $\mathcal{O}(N^L)$ операций. Достижимость оценки точности алгоритма $\mathcal{A}$ следует из достижимости оценки точности 2-приближенного алгоритма для частного случая (когда $L = 1$) задачи 1 (см. [6]).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Согласно замечанию 2 время работы алгоритма $\mathcal{A}$ оценивается величиной $\mathcal{O}(LN^{L+1}(MN + q))$, полиномиальной при фиксированном числе L кластеров.

Заключение

В работе показано, что к числу NP-трудных в сильном смысле проблем относится одна из актуальных задач разбиения конечной последовательности точек евклидова пространства на заданное число кластеров при ограничениях на их мощность. Для этой задачи предложен алгоритм, который позволяет находить 2-приближенное решение задачи за полиномиальное время при фиксированном числе кластеров. На наш взгляд, представленный в работе алгоритм решения задачи будет полезен как одно из инструментальных средств решения проблем в области приложений, связанных с анализом и распознаванием временных рядов (сигналов).

Значительный интерес представляет обоснование более быстрых приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности, а также поиск подклассов рассмотренной задачи, для которых возможно построение таких алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tak-chung Fu.** A review on time series data mining // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2011. Vol. 24, no. 1. P. 164–181.
2. Remote sensing time series: Revealing Land Surface Dynamics / eds. C. Kuenzer, S. Dech, W. Wagner. New York etc.: Springer International Publishing, 2015. 441 p. (Remote Sensing and Digital Image Processing; vol. 22.)
3. **T. Warren Liao.** Clustering of time series data — a survey // Pattern Recognition. 2005. Vol. 38, no. 11. P. 1857–1874.
4. **Aggarwal C. C.** Data mining: The textbook. New York etc.: Springer International Publishing, 2015. 734 p.
5. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. Т. 20, № 2. С. 47–57.
6. **Кельманов А. В., Хамидуллин С. А.** Приближенный алгоритм для одной задачи разбиения последовательности // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 1. С. 53–66.
7. **Кельманов А. В., Михайлова Л. В.** Совместное обнаружение в квазипериодической последовательности заданного числа фрагментов из эталонного набора и ее разбиение на участки, включающие серии одинаковых фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 1. С. 172–189.
8. **Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Хандеев В. И.** Точный псевдополиномиальный алгоритм для одной задачи бикластеризации последовательности // XV Всеросс. конф. “Математическое программирование и приложения”: тез. докл. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 139.
9. **Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Хандеев В. И.** Полностью полиномиальная аппроксимационная схема для одной задачи двухкластерного разбиения последовательности // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 21–40.
10. **Кельманов А. В., Романченко С. М.** FPTAS для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 3. С. 41–52.

Поступила 30.05.2016

Кельманов Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Михайлова Людмила Викторовна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: mikh@math.nsc.ru

Хамидуллин Сергей Асгадуллович
канд. тех. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: kham@math.nsc.ru

Хандеев Владимир Ильич
аспирант
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: khandeev@math.nsc.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.161

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ ВЕРШИННОГО ПОКРЫТИЯ В КЛАССЕ ПЛАНАРНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ[1]

К. С. Кобылкин

В работе исследуется вычислительная сложность задачи вершинного покрытия в классе простых планарных графов (планарных триангуляций), допускающих плоское представление, имеющее только треугольные грани. Показывается NP-трудность задачи в сильном смысле в классе 4-связных планарных триангуляций со степенями всех вершин порядка $O(\log n)$, где n — число вершин, а также в классе плоских 4-связных триангуляций Делоне, основанных на треугольном расстоянии Минковского. Смежность пары вершин в такой триангуляции имеет место тогда и только тогда, когда для некоторых $p \in \mathbb{R}^2$ и $\lambda > 0$ найдется равносторонний треугольник $\nabla(p, \lambda)$, не содержащий внутри себя вершин триангуляции и имеющий границу, которая включает эту пару вершин и только ее, где $\nabla(p, \lambda) = p+\lambda\nabla = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x = p+\lambda a,\ a \in \nabla\}$, ∇ — равносторонний треугольник с единичными сторонами, имеющий 0 в качестве барицентра, при этом одна из вершин ∇ лежит на отрицательной y-оси.

Ключевые слова: вычислительная сложность, триангуляция Делоне, TD-триангуляция Делоне.

K. S. Kobylkin. Computational complexity of the vertex cover problem in the class of planar triangulations.

We study the computational complexity of the vertex cover problem in the class of planar graphs (planar triangulations) admitting a planar representation whose faces are triangles. It is shown that the problem is strongly NP-hard in the class of 4-connected planar triangulations in which the degrees of all vertices are of order $O(\log n)$, where n is the number of vertices, and in the class of planar 4-connected Delaunay triangulations based on the Minkowski triangular distance. A pair of vertices in such a triangulation is adjacent if and only if there is an equilateral triangle $\nabla(p, \lambda)$ with $p \in \mathbb{R}^2$ and $\lambda > 0$ whose interior does not contain triangulation vertices and whose boundary contains this pair of vertices and only it, where $\nabla(p, \lambda) = p+\lambda\nabla = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x = p+\lambda a,\ a \in \nabla\}$; here, ∇ is the equilateral triangle with unit sides such that its barycenter is the origin and one of the vertices belongs to the negative y-axis.

Keywords: computational complexity, Delaunay triangulation, Delaunay TD-triangulation.

MSC: 68Q25, 05C10, 05C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-153-159

1. Введение

Вычислительная сложность классических задач о вершинном покрытии и максимальном независимом множестве в заданном графе является объектом интенсивных исследований [2; 5; 15] ввиду приложений этих задач в компьютерном зрении, анализе сетей, кодировании, картографии и других областях. Доказательства результатов об NP-трудности и полиномиальной разрешимости этих двух взаимосвязанных задач для различных классов графов активно используют аппарат теории паросочетаний, древесных декомпозиций, декомпозиций на основе кликовых сепараторов, а также другие интересные техники из теории графов. В данной работе задача о вершинном покрытии графа исследуется в ее классической постановке:

З а д а ч а Vertex Cover (VC). Для заданного графа $G = (V, E)$ требуется найти такое подмножество $V' \subseteq V$ наименьшей мощности, что $V' \cap e \neq \varnothing$ для всякого $e = \{u, v\} \in E$, где V и E обозначают множества вершин и ребер G соответственно.

Вычислительная сложность задачи вершинного покрытия нами изучается в специальном классе простых (т. е. без петель и кратных ребер) планарных графов, которые в литературе

[1]Исследования поддержаны грантом Российского научного фонда, проект 14-11-00109.

принято называть *планарными триангуляциями.* Этот класс состоит из планарных графов, допускающих такую укладку на плоскости без пересечений ребер, что всякая *грань* этой укладки, определяемая набором ребер, ограничивающим некоторую открытую (в $\mathbb{R}^2$) область без ребер и вершин, является в общем случае криволинейным треугольником за исключением быть может грани, отвечающей неограниченной области в $\mathbb{R}^2$, называемой далее *внешней* гранью. Сложность задачи вершинного покрытия нами также изучается в специальных классах геометрических триангуляций, точнее, в классах евклидовых и обобщенных триангуляций Делоне. Пусть $t > 0$. Взвешенный граф с множеством вершин, лежащим в $\mathbb{R}^2$, веса ребер которого совпадают с евклидовыми расстояниями между их концевыми точками, а длина кратчайшего пути в графе между любой парой вершин отличается не более, чем в t раз от евклидова расстояния между этой парой вершин, называется *геометрическим t-спаннером* [17]. Геометрические t-спаннеры возникают в приложениях в качестве графовых моделей уличных сетей. Так, задача вершинного покрытия может быть сформулирована следующим образом: расставить на перекрестках улиц минимальное число видеокамер таким образом, чтобы всякий участок любой улицы, заключенный между соседними перекрестками, попадал бы в область действия хотя бы одной из камер. Выяснение сложностного статуса задачи VC в классах триангуляций Делоне и рассматриваемых в работе обобщенных триангуляций Делоне представляет интерес, поскольку эти триангуляции являются t-спаннерами при $t = (4\pi\sqrt{3})/9$ и $t = 2$ соответственно.

Более формально, задача VC будет нами рассматриваться в классе связных *плоских* графов вида $G = (V, E, F)$: под *плоским* графом понимается простой планарный граф вместе с некоторой своей укладкой на плоскости без пересечений ребер, где $V \subset \mathbb{R}^2$, ребра из E суть прямолинейные отрезки, при этом F состоит из граней G. Точнее, будет предполагаться, что G является либо простой планарной (плоской) триангуляцией, либо триангуляцией Делоне или ее обобщением. Определим два типа триангуляций Делоне, рассматриваемых в работе. Пусть задано множество S из n точек в общем положении на плоскости, никакие четыре из которых не лежат на одной окружности. Назовем плоский граф $G = (V, E, F)$ *триангуляцией Делоне*, если $V = S$ и $e = \{u, v\} \in E$ тогда и только тогда, когда найдется такой круг $d(u, v)$, что $u, v \in \mathrm{bd}\, d(u, v)$[2] и $\mathrm{int}\, d(u, v) \cap S = \varnothing$[3].

Положим $\nabla(p, \lambda) = p + \lambda\nabla = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x = p + \lambda a,\ a \in \nabla\}$, где $p \in \mathbb{R}^2$, $\lambda > 0$, ∇ — ориентированный равносторонний треугольник с единичными сторонами, имеющий 0 в качестве барицентра, при этом одна из вершин ∇ лежит на отрицательной y-оси. Предположим, что точки множества S находятся в общем положении и прямая, проходящая через всякую пару точек в S, не образует с горизонталью угол $0°$, $60°$ или $120°$. Плоский граф $G = (V, E, F)$, в котором $V = S$, называется TD-*триангуляцией Делоне*, если $e = \{u, v\} \in E$ тогда и только тогда, когда существуют такие $p \in \mathbb{R}^2$ и $\lambda > 0$, что $u, v \in \mathrm{bd}\,\nabla(p, \lambda)$ и $\mathrm{int}\,\nabla(p, \lambda) \cap S = \varnothing$.

Если рассмотреть более общую ситуацию, когда G — произвольный планарный (или плоский) граф, вычислительная сложность задачи VC оказывается хорошо изученной. NP-трудность задачи VC известна в классе 2-связных 3-регулярных планарных графов [16], а также в классе 3-регулярных планарных гамильтоновых графов [12]. Наиболее близким к рассматриваемым в работе результатам является результат работы [7] об NP-трудности задачи VC в классе графов, полученных после конечного числа стелляций 3-связных 3-регулярных планарных графов, где отдельная стелляция состоит из серии элементарных стелляций (примененных к реберно непересекающимся граням), которые, в свою очередь, представляют собой добавление вершины внутрь грани с последующим ее соединением ребрами с вершинами этой грани. Графы, получаемые в [7] в результате стелляций, вообще говоря, не являются планарными триангуляциями.

Насколько нам известно, единственным классом триангуляций Делоне, для которого задача VC полиномиально разрешима, является (с учетом результата работы [9]) класс триангуляций Делоне, изоморфных произвольным 2-связным внешнепланарным триангуляциям.

[2] $\mathrm{bd}\, T$ обозначает множество граничных точек множества T.

[3] $\mathrm{int}\, T$ состоит из внутренних точек множества T.

Сложностной статус задачи VC в широком классе триангуляций Делоне и их обобщений остается неясным, несмотря на серию работ [3; 10; 18], изучающих теоретико-графовые свойства таких триангуляций. Нами, в частности, дается ответ на вопрос о сложности задачи VC в классе TD-триангуляций Делоне.

В данной работе показывается NP-трудность задачи VC в сильном смысле в классе 4-связных планарных триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань (подкласс максимальных планарных графов) и степень всех вершин, не превосходящую $\log n + 9$, где n — число вершин триангуляции. В отличие от перечисленных выше сложностных результатов, в нашем случае рассматриваемый класс состоит из планарных графов, имеющих максимальное число ребер, примерно вдвое большее, чем у 3-регулярных планарных графов. В [10] показано, что 4-связные планарные триангуляции с треугольной внешней гранью изоморфны (в обычном графовом смысле) триангуляциям Делоне, при этом, однако, данное в [10] построение изоморфной триангуляции Делоне неконструктивно. Тем не менее нам удается получить результат об NP-трудности задачи VC в сильном смысле в классе 4-связных TD-триангуляций Делоне, применяя известный факт о том, что всякая простая планарная триангуляция с треугольной внешней гранью допускает [6] укладку на плоскости в виде TD-триангуляции Делоне за полиномиальное время.

2. NP-трудность задачи вершинного покрытия в классе планарных триангуляций

В этом и следующем разделах будет установлена NP-трудность задачи VC в классе высокосвязных простых планарных и геометрических триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань. Для доказательства NP-трудности в классе планарных триангуляций нам понадобится результат [16] об NP-полноте задачи о максимальном независимом множестве граней в классе (возможно, содержащих кратные ребра) плоских триангуляций с треугольной внешней гранью. Здесь под плоской триангуляцией понимается плоская укладка планарной триангуляции (в общем случае включающей кратные ребра) без пересечений ребер, которые, в свою очередь, могут быть отрезками или кусочно-линейными ломаными. Подробнее, рассмотрим следующую задачу.

Задача Maximum Facial Independent Set (Facial MIS). Для заданной плоской (возможно, содержащей кратные ребра) триангуляции $G = (V, E, F)$, имеющей треугольник в качестве внешней грани, найти максимальное по мощности подмножество граней $F' \subset F$ с условием, что всякая пара граней в F' не имеет общего ребра.

Задача Facial MIS получается из классической задачи о максимальном независимом множестве в простом 2-связном 3-регулярном плоском графе $G_0 = (V_0, E_0, F_0)$, если к вершинам, ребрам и граням G_0 применить классическое преобразование геометрической двойственности [8]: вершинам из V_0 соответствуют грани двойственного графа G, а граням из F_0, наоборот, отвечают вершины G; ребрам из E_0 при этом соответствуют ребра G.

Из доказательства [16, теорема 4.1] вытекает следующий результат.

Теорема 1 (Мохар, 2001). *Задача* Facial MIS (*в форме проверки свойства*) *NP-полна в сильном смысле в некотором подклассе* (*возможно, содержащих кратные ребра*) *планарных триангуляций* $\mathcal{T}_0$, *имеющих треугольную внешнюю грань.*

Заметим, что для всякого графа $G_0 \in \mathcal{T}_0$ можно с полиномиальными затратами времени и памяти построить изоморфный ему плоский граф (см. доказательство теоремы 4.1 в [16]).

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной результат работы.

Теорема 2. *Задача* VC *является NP-трудной в сильном смысле в классе простых 4-связных* (*гамильтоновых*)[4] *планарных триангуляций с треугольной внешней гранью, имею-*

[4]Гамильтоновость 4-связных планарных графов дана в [8, теорема 10.1.3].

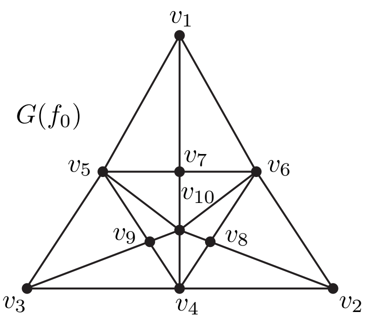


Рис. 1. Граф $G(f_0)$, соответствующий грани f_0 графа G_0.

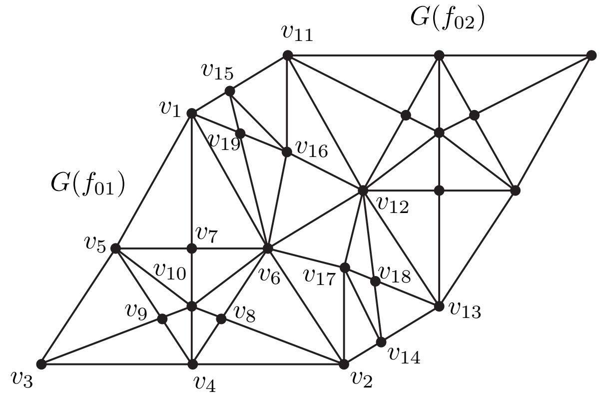


Рис. 2. Графы $G(f_{01})$ и $G(f_{02})$ вместе с соответствующим графом-коннектором $G(e_0)$.

щих степень всех вершин, не превосходящую $\log n+9$, *где* n *— число вершин в триангуляции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача VC принадлежит к классу NP в рассматриваемом классе планарных триангуляций [1, теорема 3.3].

Покажем NP-полноту в сильном смысле задачи VC в заявленном классе 4-связных планарных триангуляций с ограниченной $\log n + 9$ степенью вершин. Обозначим через $\mathcal{T}$ класс всех простых плоских (3-связных) триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань. Доказательство проведем редукцией к задаче VC задачи Facial MIS, являющейся NP-полной в сильном смысле по теореме 1.

Для всякого плоского графа $G_0 = (V_0, E_0, F_0) \in \mathcal{T}_0$ построим плоский граф $G = (V, E, F) \in \mathcal{T}$ следующим образом. Заменим всякую грань $f_0 = v_1(f_0)v_2(f_0)v_3(f_0) \in F_0\backslash\{f_{0,\infty}\}$ графом $G(f_0)$, показанным на рис. 1 (обозначение грани f_0 в обозначениях вершин графа $G(f_0)$ будет в дальнейшем опускаться), где $f_{0,\infty}$ — внешняя грань G_0. Легко убедиться в том, что минимальное вершинное покрытие графа $G(f_0)$ не содержит вершину v_{10} и совпадает с $U_{f_0} = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Это непосредственно следует из того факта, что всякий треугольник из тройки треугольников $\Delta v_1v_5v_7$, $\Delta v_2v_6v_8$ и $\Delta v_3v_4v_9$ (см. рис. 1) требует для покрытия его ребер по крайней мере пару вершин. Рассматривая всевозможные случаи, мы приходим к тому, что $|V'_{f_0}| \geq 7$ для любого вершинного покрытия V'_{f_0} графа $G(f_0)$ в случае, когда $v_{10} \in V'_{f_0}$. Также нетрудно убедиться в том, что $W_{f_0} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_{10}\}$ — вершинное покрытие $G(f_0)$.

Разместим внутри грани f_0 граф $G(f_0)$ таким образом, чтобы стороны, вообще говоря, криволинейного треугольника $v_1v_2v_3$ были бы параллельны сторонам грани f_0 (например, масштабированием на заданный рациональный множитель). Соединим графы $G(f_{01})$ и $G(f_{02})$, отвечающие граням f_{01} и f_{02} из $F_0\backslash\{f_{0,\infty}\}$, включающим общее ребро $e_0 \in E_0$, используя граф-коннектор $G(e_0)$, как показано на рис. 2. Граф $G(e_0)$ содержит пару общих ребер с каждым из двух графов $G(f_{01})$ и $G(f_{02})$. Граф $G(f_{0,\infty})$, которому отвечает внешняя грань $f_{0,\infty}$ триангуляции, изоморфен графу $G(f_0)$ для любого $f_0 \in F_0\backslash\{f_{0,\infty}\}$. Этот граф показан на рис. 3 вместе с соответствующими графами-коннекторами G_i, $i = 1, 2, 3$ (графы G_i изображены схематично без некоторых ребер и вершин). Ребра графов $G(f_0)$, $f_0 \in F_0$ и $G(e_0)$, $e_0 \in E_0$ изображаются таким образом, чтобы ребра графов $G(e_{01})$ и $G(e_{02})$ пересекались бы лишь в их общих вершинах (если таковые существуют) для любых e_{01} и e_{02} из E_0.

Для любого $v_0 \in V_0$ множество $E_0(v_0) = \{e_0 \in E_0\colon v_0 \in e_0\}$ определяет множество $\mathcal{Q}(v_0) = \{G(e_0)\colon e_0 \in E_0(v_0)\}$ мощности $\deg(v_0)$, состоящее из графов-коннекторов, где $\deg(v_0) = |E_0(v_0)|$. Вершина v_0 лежит внутри некоторого, вообще говоря, криволинейного простого $2\deg(v_0)$-угольника $M(v_0)$, ограниченного ребрами коннекторов из $\mathcal{Q}(v_0)$ (см. рис. 4).

Пусть $U(v_0) = \{u_1, \ldots, u_{2\deg(v_0)}\}$ — упорядоченная по часовой стрелке последовательность вершин $M(v_0)$, где u_1 совпадает с одной из вершин v_{14} или v_{15} одного из графов-коннекторов

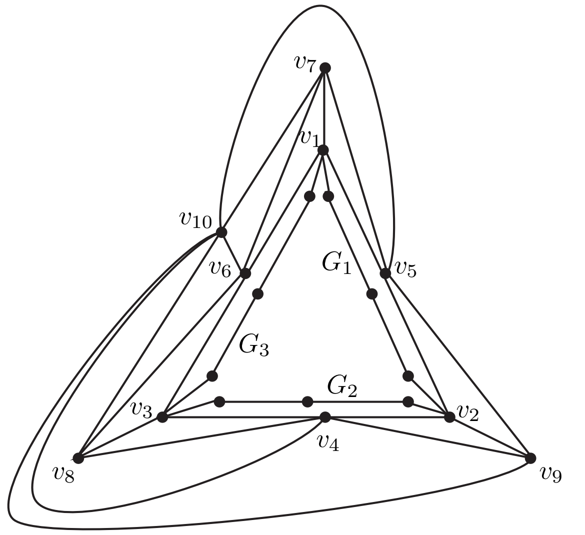


Рис. 3. Граф $G(f_{0,\infty})$, построенный для внешней грани графа G_0.

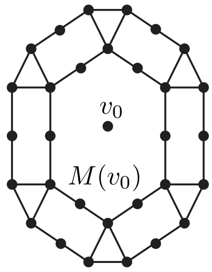


Рис. 4. Графы $G(f_0)$ и графы-коннекторы $G(e_0)$, ограничивающие многоугольник $M(v_0)$.

из $\mathcal{Q}(v_0)$. Триангулируем $M(v_0)$ следующим образом, обозначая полученный граф через $G(v_0)$: добавляем набор ребер $\{u_1, u_3\}, \{u_3, u_5\}, \ldots$, затем набор ребер $\{u_1, u_5\}, \{u_5, u_9\}, \ldots$, продолжая процесс до тех пор, пока $M(v_0)$ не будет полностью триангулирован. Положим $G := \bigcup_{f_0 \in F_0} G(f_0) \cup \bigcup_{v_0 \in V_0} G(v_0) \cup \bigcup_{e_0 \in E_0} G(e_0)$. По построению графа G имеем, что $|V| = 10\,|F_0| + 6\,|E_0|$. Для любых $f_0 \in F_0$ и $e_0 \in E_0$ степень всякой вершины $G(f_0)$ и любой отличной от v_{14} и v_{15} вершины $G(e_0)$ ограничена сверху 9. В процессе триангуляции $M(v_0)$ мощность добавляемого на каждом шаге набора ребер уменьшается по крайней мере вдвое, следовательно, степень вершин v_{14} и v_{15} ограничена сверху $\log n + 5$. Поскольку число графов-коннекторов равно $|E_0|$, то сложность построения графа G по графу G_0 имеет порядок $O(|F_0| + |E_0| \log |E_0|)$. При этом общее число вершин, ребер и граней графа G имеет порядок $O(|F_0| + |E_0|)$. Кроме того, длина представления вершин графа G отличается в константное число раз от длины представления вершин графа G_0. Поскольку G — простой граф, являющийся плоской триангуляцией с треугольной внешней гранью (мы “разбили” все кратные ребра в G_0), то G — 3-связен. Граф G не содержит ребер, соединяющих вершины графа $G(f_0) \backslash G(e_0)$ с вершинами графа $G(e_0) \backslash G(f_0)$; то же самое справедливо для графов $G(f_0)$ и $G(v_0)$, а также для графов $G(e_0)$ и $G(v_0)$. Для графов $G(f_0),\ f_0 \in F_0$ и $G(e_0),\ e_0 \in E_0$ легко убедиться в том, что любой их цикл длины 3 совпадает с некоторой их гранью. Треугольники, которые возникают в процессе триангуляции многоугольника $M(v_0)$, являются гранями по построению. Следовательно, всякий цикл длины 3 в графе G является его гранью. По [20, лемма 2.3] получаем, что G — 4-связен.

Покажем, что всякое независимое множество граней $F_0' \subset F_0$, если $|F_0'| \geq k$, может быть преобразовано в вершинное покрытие V' графа G, где $|V'| \leq 7\,|F_0| - k + 4\,|E_0|$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим $V_{f_0}' := U_{f_0}$ для любого $f_0 \in F_0'$; для всякого $f_0 \in F_0 \backslash F_0'$ положим $V_{f_0}' := W_{f_0}$. Чтобы получить вершинное покрытие V_{e_0}' графа $G(e_0)$, соединяющего $G(f_{01})$ и $G(f_{02})$ для некоторых $f_{01},\ f_{02} \in F_0$, выберем вершины v_{14} и v_{15}, а также по одной вершине в каждой паре $\{v_{16}, v_{19}\}$ и $\{v_{17}, v_{18}\}$. Мы выбираем вершины в каждой такой паре в зависимости от выполнения включений $f_{01} \in F_0'$ и $f_{02} \in F_0'$; точнее, если $f_{01} \in F_0'$ и $f_{02} \notin F_0'$, мы выбираем вершины v_{17} и v_{19}; в случае, когда $f_{01}, f_{02} \notin F_0'$, выбор вершин в каждой из этих пар произволен. Очевидно, $V' = \bigcup_{f_0 \in F_0} V_{f_0}' \cup \bigcup_{e_0 \in E_0} V_{e_0}'$ покрывает ребра графа G и $|V'| \leq 7\,|F_0| - k + 4\,|E_0|$.

Обратно, пусть V' — вершинное покрытие графа G минимальной мощности и $|V'| \leq 7\,|F_0| - k + 4\,|E_0|$. Положим $V_{f_0}' = V' \cap V(f_0)$ для всякого $f_0 \in F_0$, где $V(f_0)$ — множество вершин графа $G(f_0)$. По крайней мере пара вершин нужна для покрытия ребер, принадлежащих либо одновременно графам $G(f_{01})$ и $G(e_0)$, либо одновременно графам $G(f_{02})$ и $G(e_0)$, где e_0 — общее ребро граней f_{01} и f_{02}. По крайней мере 4 вершины необходимы для покрытия ребер треугольников на множествах вершин $V_1(e_0) = \{v_{15}, v_{16}, v_{19}\}$ и $V_2(e_0) = \{v_{14}, v_{17}, v_{18}\}$. Если $|V' \cap V_1(e_0)| = 2$ или $|V' \cap V_2(e_0)| = 2$, то $|V'_{f_{02}}| \geq 7$ в случае, когда $|V'_{f_{01}}| = 6$. Ввиду минимальности множества V' случай, когда одновременно $|V' \cap V_1(e_0)| = |V' \cap V_2(e_0)| = 3$ и $|V'_{f_{01}}| = |V'_{f_{02}}| = 6$, невозможен. Следовательно, множество граней $F'_0 = \{f \in F_0 \colon |V'_{f_0}| = 6\}$ является независимым. Поскольку $|V' \cap (V_1(e_0) \cup V_2(e_0))| \geq 4$, то $6|F'_0| + 7(|F_0| - |F'_0|) + 4|E_0| \leq |V'|$, откуда $|F'_0| \geq k$.

Теорема 2 доказана.

Ниже будет показано, что некоторые классы планарных триангуляций, для которых задача VC полиномиально разрешима, содержат мало 4-связных графов. Последнее может отчасти объяснять высокую сложность задачи в классе высокосвязных триангуляций.

Пример 1. Простой планарный 2-связный граф называется *внешнепланарным*, если существует такой изоморфный ему плоский граф G, что все его вершины принадлежат простому циклу, ограничивающему внешнюю грань G. Задача VC полиномиально разрешима в классе внешнепланарных графов [4, лемма 78]. Легко непосредственно убедиться в том, что для числа вершин, большего 3, не существует 4-связных внешнепланарных триангуляций.

Рассмотрим произвольный простой граф и цикл в нем. Ребро графа назовем *хордой* данного цикла, если оно соединяет две непоследовательных вершины в этом цикле. Длина наидлиннейшего цикла без хорд в графе называется его *хордальностью.* Из [14, утверждение 2, теорема 8] и критерия планарности Вагнера следует, что задача VC является полиномиально разрешимой в классе планарных графов, имеющих ограниченную хордальность.

Пример 2. Простой граф, имеющий хордальность 3, называется *хордальным* графом. Задача VC полиномиально разрешима в классе хордальных графов [13, разд. 3]. С учетом [19, теорема 1; 20, лемма 2.1] хордальный граф становится триангуляцией с треугольной внешней гранью в случае, когда он планарен и 3-связен. Если хордальный граф G планарен, 4-связен и содержит более 6 вершин, в нем найдется [11, следствие теоремы 1] клика из 4 вершин, удаление которой делает G несвязным. Это, в свою очередь, противоречит 4-связности G [20, лемма 2.3]. Покажем, что G не может быть 4-связным при числе вершин, равном 5 или 6. Степень всякой вершины G не меньше, чем 4 в случае, когда G содержит по крайней мере 5 вершин. Ввиду своей планарности G содержит 6 вершин. Кроме того, в G отсутствуют циклы длины 3, не являющиеся гранями. Поэтому всякая вершина, не принадлежащая внешней грани G, обязана быть соединена ровно с двумя вершинами этой грани. Это определяет единственный граф, который не является хордальным.

3. NP-трудность в классе евклидовых и TD-триангуляций Делоне

Для доказательства NP-трудности задачи VC в классе TD-триангуляций Делоне нам понадобится один вспомогательный результат.

Лемма [6, следствие 2]. *Для всякой простой планарной триангуляции на n вершинах, все грани которой суть треугольники, можно за полиномиальное по n время построить изоморфную ей* TD-*триангуляцию Делоне.*

Применяя теорему 2 и сформулированную лемму, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Задача* VC *NP-трудна в сильном смысле в классе* 4-*связных* (*гамильтоновых*) TD-*триангуляций Делоне, имеющих степень всех вершин, ограниченную* $\log n + 9$.

Несмотря на то, что всякая 4-связная простая планарная триангуляция с треугольной внешней гранью изоморфна (в графовом смысле) некоторой триангуляции Делоне [10, теорема 3.6], до сих пор остается открытым вопрос о сложности построения изоморфной триангуляции Делоне по заданной 4-связной простой планарной триангуляции. Тем не менее мы надеемся, что полиномиальный по сложности алгоритм построения такой укладки удастся получить для планарных триангуляций, описанных в доказательстве теоремы 2.

В работе доказано, что задача вершинного покрытия графа является NP-трудной в сильном смысле в классе простых 4-связных планарных триангуляций, имеющих треугольную внешнюю грань, а также в классе 4-связных TD-триангуляций Делоне. Гипотеза об NP-трудности задачи в классе обычных триангуляций Делоне в свете полученных результатов выглядит весьма правдоподобной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. **Alekseev V.E., Malyshev D.S.** Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time // J. Appl. Ind. Math. 2009. Vol. 3, no. 1. P. 1–4.
3. **Biniaz A., Maheshwari A., Smid M.** Higher-order triangular-distance Delaunay graphs: graph-theoretical properties // Comput. Geometry. 2015. Vol. 48, no. 9. P. 646–660.
4. **Bodlaender H. L.** A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth // Theoret. Comput. Sci. 1998. Vol. 209, no. 1-2. P. 1–45.
5. **Brause C., Le N. C., Schiermeyer I.** The maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // Discrete Math. 2015. Vol. 338, no 10. C. 1766–1778.
6. Connections between θ-graphs, Delaunay triangulations and orthogonal surfaces / N. Bonichon, C. Gavoille, N. Hanusse, D. Ilcinkas // Graph Theoretic Concepts in Computer Science: Proc. Workshop. Berlin: Springer, 2010. P. 266–278. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 6410.)
7. **Das G., Goodrich M. T.** On the complexity of optimization problems for 3-dimensional convex polyhedra and decision trees // Comput. Geometry. 1997. Vol. 8, no. 3. P. 123–137.
8. **Diestel R.** Graph theory. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 451 p.
9. **Dillencourt M. B.** Realizability of Delaunay triangulations // Inform. Process. Lett. 1990. Vol. 33, no. 6. P. 283–287.
10. **Dillencourt M. B., Smith W. D.** Graph-theoretical conditions for inscribability and Delaunay realizability // Discrete Math. 1996. Vol. 161, no. 1-3. P. 63–77.
11. **Dirac G. A.** On rigid circuit graphs // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1961. Vol. 25, no. 1. P. 71–76.
12. **Fleischner H., Sabidussi G., Sarvanov I.** Maximum independent sets in 3- and 4-regular Hamiltonian graphs // Discrete Math. 2010. Vol. 310, no. 20. P. 2742–2749.
13. **Gavril F.** Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph // SIAM J. Comput. 1972. Vol. 1, no. 2. P. 180–187.
14. **Kaminski M., Lozin V.V., Milanic M.** Recent developments on graphs of bounded clique-width // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, no. 12. P. 2747–2761.
15. **Malyshev D.S.** Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable // J. Appl. Ind. Math. 2013. Vol. 7. no. 4. P. 537–548.
16. **Mohar B.** Face covers and the genus problem for apex graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 2001. Vol. 82, no. 1. P. 102–117.
17. **Narasimhan G., Smid M.** Geometric spanner networks. Cambridge; N Y; Melbourne: Cambridge Univ. Press, 2007. 500 p.
18. Proximity graphs: E, δ, Δ, χ and ω / P. Bose, V. Dujmovic, F. Hurtado, J. Iacono, S. Langerman, H. Meijer, V. Sacristan, M. Saumell, D. Wood // Internat. J. Comput. Geom. Appl. 2012. Vol. 22, no. 5. P. 439–470.
19. **Rote G.** Strictly convex drawings of planar graphs // Proc. of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms (electronic). N. Y.: ACM, 2005. P. 728–734.
20. Triangulating with high connectivity / T. K. Dey, M. B. Dillencourt, S. K. Ghosh, J. M. Cahill // Comput. Geometry. 1997. Vol. 8, no. 1. P. 39–56.

Кобылкин Константин Сергеевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: kobylkinks@gmail.com

Поступила 02.04.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.977.5, 519.86

НЕКОТОРЫЕ ФАКТЫ О МОДЕЛИ РЭ́МЗИ[1]

А. А. Красовский, П. Д. Лебедев, А.М. Тарасьев

Уравнение Рэ́мзи, моделирующее динамику капитала, в случае производственной функции Кобба — Дугласа сводится к линейному дифференциальному уравнению заменой Бернулли. Это уравнение используется в задаче оптимального роста с логарифмическими предпочтениями. В работе решается соответствующая задача оптимального управления с бесконечным горизонтом времени. Рассматривается векторное поле гамильтоновой системы принципа максимума Понтрягина с учетом ограничений на управление. Доказано существование двух альтернативных установившихся состояний в зависимости от ограничений. Этот результат дополняет анализ модели в рамках теории оптимального управления.

Ключевые слова: математическое моделирование, задача оптимального роста, принцип максимума Понтрягина, установившиеся состояния.

A. A. Krasovskii, P. D. Lebedev, A. M. Tarasyev. Some facts about the Ramsey model.

In modeling the dynamics of capital, the Ramsey equation coupled with the Cobb—Douglas production function is reduced to a linear differential equation by means of the Bernoulli substitution. This equation is used in the optimal growth problem with logarithmic preferences. The study deals with solving the corresponding infinite horizon optimal control problem. We consider a vector field of the Hamiltonian system in the Pontryagin maximum principle, taking into account control constraints. We prove the existence of two alternative steady states, depending on the constraints. This result enriches our understanding of the model analysis in the optimal control framework.

Keywords: mathematical modeling, optimal growth problem, Pontryagin maximum principle, steady states.

MSC: 91B62, 49J15, 37C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-160-168

Введение

В работе рассматривается модель неоклассического роста, опирающаяся на уравнение Рэ́мзи[2] [1], и поэтому также известная как модель Рэ́мзи [2]. Формализованная в модели задача оптимального роста стимулирует современные исследования, посвященные новым формулировкам принципа максимума Понтрягина [3] для класса задач с бесконечным горизонтом [4]. В стандартной постановке задачи, восходящей к модели Солоу [5], нелинейное уравнение Рэ́мзи сводится к линейному дифференциальному уравнению заменой Бернулли [6]. Работа посвящена решению задачи при ограничениях на управление. Дается характеристика векторного поля гамильтоновой системы для допустимых режимов управления. Она выявляет установившиеся состояния, в которых выполняются необходимые условия оптимальности, и определяет поведение сопряженной переменной в принципе максимума Понтрягина. Основной результат связан со случаем жестких ограничений на управление, который выявляет дополнительное установившееся состояние. Оно отличается от установившегося состояния, стандартно рассматриваемого в литературе. Обоснование этого случая, который дополняет анализ модели в рамках теории оптимального управления, является целью данной публикации.

---

[1]Постановка задачи и методы решения в части конструкций динамической оптимизации предложены А.М. Тарасьевым при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 14-18-00574). Анализ векторного поля гамильтоновой системы в рамках принципа максимума Понтрягина выполнен А. А. Красовским. Разработка программного комплекса и численное моделирование проведены П. Д. Лебедевым при поддержке РФФИ (проект 16-31-00356-мол_а).

[2]Передача фамилии на русский язык выполнена с опорой на правила транскрипции и фактическое произношение. В источниках иногда встречаются искаженные написания, например, Рамсей.

1. Задача оптимального роста

Рассматривается задача оптимального роста с функцией Кобба — Дугласа, технологическим изменением и логарифмическими предпочтениями [2]. Производство Y в каждый момент времени $t \geq 0$ зависит от производственных факторов. Эта зависимость задана формулой

$$Y(t) = Y[A(t), K(t), L(t)] = A(t)F[K(t), L(t)] = A(t)K^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t), \quad \alpha \in (0,1),$$

где F — производственная функция Кобба — Дугласа, $A > 0$ — экзогенный фактор технологического развития [5], $L > 0$ — рабочая сила (труд), $K > 0$ — капитал. Постоянная α обозначает эластичность капитала. Динамика капитала описывается уравнением Рэ́мзи

$$\dot{K} = sY(A, K, L) - \mu K, \quad K(t_0) = K^0 > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mu > 0$ — постоянный коэффициент амортизации капитала, $s(t)$ — доля текущего производства, которая сберегается и инвестируется в рост капитала и удовлетворяет ограничениям $s \in [0, g]$, $0 < g < 1$, где g — заданная граница инвестиций. Предполагается, что инвестиционный процесс, подчиненный динамике (1.1), начинается в момент времени t_0 со стартового капитала K^0. В работе следуем стандартному предположению об экспоненциальном росте рабочей силы:

$$\dot{L} = nL, \quad L(t_0) = L^0,$$

с постоянным темпом $n \geq 0$ и начальным уровнем трудовых ресурсов $L^0 > 0$.

1.1. Замена Бернулли в уравнении Рэ́мзи

Замена Бернулли

$$x = \frac{1}{A}\Big(\frac{K}{L}\Big)^{1-\alpha}$$

преобразует уравнение (1.1) к линейному виду

$$\dot{x} = ax + bu,$$

где $u(t) = s(t)$ — управление; коэффициенты a и b вычисляются по формулам

$$a(t) = -(1-\alpha)\lambda - \frac{\dot{A}}{A}, \quad b = (1-\alpha) > 0, \quad \lambda = \mu + n. \tag{1.2}$$

В модели экономического роста полезность является функцией от потребления, C, которое вычисляется по формуле

$$C(t) = (1 - s(t))Y(t).$$

Будем рассматривать логарифмическую полезность

$$\mathrm{U}(C(t)) = \beta(t) + \gamma \ln x(t) + \ln(1 - s(t)), \quad \beta(t) = \frac{\ln A(t)}{(1-\alpha)}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}. \tag{1.3}$$

В задаче динамической оптимизации инвестиций требуется максимизировать дисконтированный индекс потребления на бесконечном горизонте времени:

$$J = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \mathrm{U}(C(t))e^{-\delta t}dt,$$

где $\delta > 0$ — коэффициент дисконтирования.

1.2. Задача оптимального управления

Рассмотрим случай, когда экзогенная динамика технологического роста задана согласно модели Солоу линейным уравнением

$$\dot{A} = rA, \quad A(t_0) = A^0.$$

Здесь $r \geq 0$ — постоянный темп роста, $A^0 > 0$ — начальный уровень технологии. В этом случае коэффициент a (1.2) является постоянным:

$$a(t) = a = -(1-\alpha)\lambda - r < 0.$$

Экзогенный рост $A(t)$, входящий в параметр $\beta(t)$ (в формуле (1.3)) не участвует в оптимизации.

З а д а ч а 1. Управляемый объект x начинает движение из начального положения $x(t_0) = x_0$. Его состояние описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = ax + bu,$$

где $a < 0$, $b > 0$ и $0 < g < 1$ — заданные постоянные. Требуется среди допустимых управлений $u \in [0, g]$ найти оптимальное управления u^0, которое максимизирует функционал

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \big(\gamma \ln x(t) + \ln(1-u(t))\big) e^{-\delta t} dt \to \max,$$

где $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ — заданные числа.

2. Анализ векторного поля гамильтоновой системы

Под векторным полем будем понимать векторное поле скоростей переменной x и сопряженной переменной ψ. После стандартных замен [7] гамильтониан в принципе максимума представляется в следующем виде:

$$H(x, \psi, u, t) = \gamma \ln x + \ln(1-u) + \psi(ax + bu).$$

Максимум гамильтониана по u, определяемый уравнением

$$\frac{-1}{1-u} + \psi b = 0,$$

доставляется управлением

$$u^0 = 1 - \frac{1}{b\psi}. \tag{2.1}$$

В силу вогнутости гамильтониана по переменной u определим максимизирующее управление с учетом ограничений $u \in [0, g]$ и формулы (2.1):

$$u^0(x, \psi) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x, \psi) \in \mathcal{D}_1, \\ 1 - \dfrac{1}{b\psi}, & \text{если} \quad (x, \psi) \in \mathcal{D}_2, \\ g, & \text{если} \quad (x, \psi) \in \mathcal{D}_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь области $\mathcal{D}_i,\ i = 1, 2, 3$, определены следующим образом:

$$\mathcal{D}_1 = \big\{(x, \psi)\colon 0 < \psi \leq 1/b,\ x > 0\big\}, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{D}_2 = \Big\{(x, \psi)\colon 1/b \leq \psi \leq \frac{1}{b(1-g)},\ x > 0\Big\}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{D}_3 = \Big\{(x, \psi)\colon \psi \geq \frac{1}{b(1-g)},\ x > 0\Big\}. \tag{2.5}$$

Как видим, замена Бернулли значительно упрощает вид линий переключения — они стали прямыми, параллельными оси x (ср. [8]). Следующая динамика сопряженной переменной принципа максимума

$$\dot{\psi} = \delta\psi - \frac{\partial H}{\partial x} = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x} \tag{2.6}$$

— справедлива для всех областей $\mathcal{D}_i, i = 1, 2, 3$. Знак скорости сопряженной переменной ψ (2.6) определяется кривой

$$\Psi(x) = \frac{\gamma}{(\delta - a)x}. \tag{2.7}$$

С учетом $a < 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ функция $\Psi(x)$ монотонно убывает с ростом x. Выполняются условия

$$\begin{array}{lll} \dot{\psi} & < 0 & \text{при} \quad \psi(x) < \Psi(x), \\ \dot{\psi} & = 0 & \text{при} \quad \psi(x) = \Psi(x), \\ \dot{\psi} & > 0 & \text{при} \quad \psi(x) > \Psi(x). \end{array} \tag{2.8}$$

Ниже будем рассматривать гамильтонову систему

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = ax + bu^0, \\ \dot{\psi} & = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x} \end{array} \right. \tag{2.9}$$

для различных режимов управления u^0 (2.2). При этом будем интересоваться направлением скоростей переменной x в каждой из областей (2.3)–(2.5).

Существенным фактором нашего анализа является то, что оптимальная траектория (x^0, ψ^0) должна удовлетворять следующему условию трансверсальности на бесконечности [7]:

$$\lim_{t \to +\infty} x^0(t)\psi^0(t)e^{-\delta t} = 0. \tag{2.10}$$

Гамильтонова система в области нулевого управления $\mathcal{D}_1$. В области $\mathcal{D}_1$ (2.3) гамильтонова система (2.9) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = ax, \\ \dot{\psi} & = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{array} \right. \tag{2.11}$$

В области $\mathcal{D}_1$

$$\dot{x} < 0. \tag{2.12}$$

Гамильтонова система в области установившегося состояния $\mathcal{D}_2$. Гамильтонова система (2.9) в области $\mathcal{D}_2$ (2.4) представляется в виде

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = ax + b - \frac{1}{\psi}, \\ \dot{\psi} & = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Определив функцию

$$X(\psi) = \frac{1 - b\psi}{a\psi}, \quad \psi \in \mathcal{D}_2, \tag{2.14}$$

получаем следующие соотношения:

$$\begin{array}{lll} \dot{x} > 0 & \text{при} & x(\psi) < X(\psi), \\ \dot{x} = 0 & \text{при} & x(\psi) = X(\psi), \\ \dot{x} < 0 & \text{при} & x(\psi) > X(\psi). \end{array} \tag{2.15}$$

Гамильтонова система в области интенсивного управления $\mathcal{D}_3$. В области $\mathcal{D}_3$ (2.5) гамильтонова система (2.9) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = ax + bg, \\ \dot{\psi} & = (\delta - a)\psi - \frac{\gamma}{x}. \end{array} \right. \tag{2.16}$$

Таким образом, в области $\mathcal{D}_3$ имеем

$$\begin{array}{lll} \dot{x} & > 0 \quad \text{при} & 0 \le x \le -gb/a, \\ \dot{x} & = 0 \quad \text{при} & x = -gb/a, \\ \dot{x} & < 0 \quad \text{при} & x \ge -gb/a. \end{array} \tag{2.17}$$

3. Установившиеся состояния в зависимости от ограничений на управление

Условия (2.8), (2.12), (2.15), (2.17) характеризуют векторное поле гамильтоновой системы с учетом всех режимов управления.

О п р е д е л е н и е. Установившееся состояние гамильтоновой системы (2.9) есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} ax + bu^0(x,\psi) & = 0, \\ (\delta - a)\psi - \dfrac{\gamma}{x} & = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где режимы управления $u^0(x,\psi)$ определены соотношением (2.2).

Исходя из нашего анализа, видим, что уравнения, входящие в систему (3.1), выполняются на линиях Ψ (2.7), X (2.14) в области $\mathcal{D}_2$ (2.3), а также в области $\mathcal{D}_3$ (2.5) на следующей линии (см. (2.17)):

$$Z = \big\{(x,\psi) \in \mathcal{D}_3 \colon\ x = -ga/b\big\}. \tag{3.2}$$

Теорема. *Существует два альтернативных установившихся состояния гамильтоновой системы* (2.9)*, обусловленные ограничениями* $u \in [0, g]$ *в задаче* 1.

1. *Если*

$$0 < g \le \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \tag{3.3}$$

то существует единственное установившееся состояние в области $\mathcal{D}_3$ (2.5):

$$x_S^* = -g\frac{b}{a}, \quad \psi_S^* = \frac{-\gamma a}{gb(\delta - a)}. \tag{3.4}$$

2. *Если*

$$\frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma} \le g < 1, \tag{3.5}$$

то существует единственное установившееся состояние в области $\mathcal{D}_2$ (2.4):

$$x^* = \frac{b\gamma}{\delta - a - a\gamma}, \quad \psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)}. \tag{3.6}$$

Каждое из этих установившихся состояний является точкой покоя седлового типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условиям задачи 1: $a < 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $g \in (0, 1)$. Заметим, что выполняются неравенства

$$0 < \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma} < 1.$$

Найдем установившиеся состояния гамильтоновой системы (2.9), удовлетворяющее определению. Приравняв правые части (2.13) к нулю, получаем установившееся состояние (3.6) в области $\mathcal{D}_2$, геометрически соответствующее единственно возможному пересечению линий X (2.14) и Ψ (2.7). Определение области $\mathcal{D}_2$ (2.4) включает в себя параметр g. Для того чтобы установившееся состояние (x^*, ψ^*) существовало в области $\mathcal{D}_2$, должны выполняться условия

$$\frac{1}{b} \le \psi^* \le \frac{1}{b(1-g)}. \tag{3.7}$$

Неравенство слева выполняется автоматически:

$$\psi^* = \frac{\delta - a - a\gamma}{b(\delta - a)} > \frac{\delta - a}{b(\delta - a)} = \frac{1}{b}.$$

Подставив в правое неравенство в (3.7) выражение для ψ^* (3.6), получаем неравенство относительно параметра g, которое есть в точности (3.5). При этом управление в установившемся состоянии (x^*, ψ^*) определяется выражением

$$u^* = \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma},$$

которое удовлетворяет ограничениям $0 < u^* \leq g$ (см. (3.5)).

Исходя из анализа, приведенного выше, установившееся состояние (3.4) задаем возможным пересечением линий Z (3.2) и Ψ (2.7) в области $\mathcal{D}_3$ (2.5). Для того чтобы пересечение (x_S^*, ψ_S^*) существовало, должно выполняться следующее условие:

$$\psi_S^* \geq \frac{1}{b(1-g)}. \tag{3.8}$$

Подставив в (3.8) выражение (3.4), приходим к неравенству (3.3). В точке (x_S^*, ψ_S^*) управление является граничным $u_S^* = g$ (2.2).

В случае равенства в (3.5), (3.3)

$$g = \frac{-a\gamma}{\delta - a - a\gamma},$$

установившиеся состояния совпадают: $x^* = x_S^*$, $\psi^* = \psi_S^*$.

Напомним, что установившегося состояния гамильтоновой системы (2.9) в области $\mathcal{D}_1$ (2.3) не существует (2.11), (2.12). Итак, мы доказали единственность каждого из двух альтернативных установившихся состояний.

Матрица Якоби гамильтоновой системы (2.13), линеаризованной в окрестности установившегося состояния (3.6), определяется выражением

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_2}(x^*, \psi^*) = \begin{pmatrix} a & \dfrac{1}{\psi^{*2}} \\ \dfrac{\gamma}{x^{*2}} & (\delta - a) \end{pmatrix}.$$

Собственные числа вычисляются по формуле

$$\xi_{\text{О,П}} = 0.5\left(\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4a(\delta - a) + \frac{(\delta - a)^2}{\gamma^2}}\right).$$

С учетом $a < 0$ и $\delta > 0$ получаем

$$\xi_{\text{О}} < 0, \quad \xi_{\text{П}} > 0.$$

Собственные числа — действительные и противоположных знаков, что свидетельствует о седловом типе установившегося состояния (x^*, ψ^*). Устойчивым является направление собственного вектора, отвечающего отрицательному собственному числу $\xi_{\text{О}}$ (см. [9]).

Матрица Якоби гамильтоновой системы (2.16), линеаризованной в окрестности установившегося состояния (3.4), задается выражением

$$\mathcal{J}_{\mathcal{D}_3}(x_S^*, \psi_S^*) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \dfrac{\gamma a^2}{g^2 b^2} & (\delta - a) \end{pmatrix}.$$

Решение характеристического уравнения определяется формулой

$$\sigma_{\text{О,П}} = 0.5\big(\delta \mp \sqrt{\delta^2 - 4a(\delta - a)}\big).$$

Здесь собственные числа — также действительные и противоположных знаков:

$$\sigma_{\text{О}} < 0, \quad \sigma_{\text{П}} > 0,$$

что указывает на седловой характер установившегося состояния (x_S^*, ψ_S^*).

З а м е ч а н и е 1. Случай 2 с ограничениями (3.5) стандартно рассматривается в литературе. Например, в [7], где $g = 1 - \varepsilon$, авторы предполагают малость параметра $\varepsilon \to 0$ (см. [7, с. 138]). В результате этого предположения они получают единственное установившееся состояние гамильтоновой системы (см. [7, с. 143]). Тем не менее случай достаточно большого ε, т. е. (3.3), рассмотренный здесь, также представляет интерес и дополняет анализ модели.

4. Пример

Из приведенного выше анализа следует, что существует две качественные картины, изображающие векторное поле гамильтоновой системы. Они связаны с ограничениями на управление g (3.5), (3.3).

Случай стандартных ограничений на управление. На рис. 1 изображен случай векторного поля с установившимся состоянием в области $\mathcal{D}_2$ (2.4). Он соответствует ситуации, когда ограничения на управления достаточно велики (3.5). Такой случай является стандартным.

Из рис. 1 видно, что условие трансверсальности на бесконечности (2.10) выполняется только в точке покоя (x^*, ψ^*) (3.6). Таким образом, для начального положения $x(t_0)$ требуется найти такое значение $\psi(t_0)$, чтобы решение гамильтоновой системы, стартующее из этой точки, сходилось к установившемуся состоянию на бесконечности.

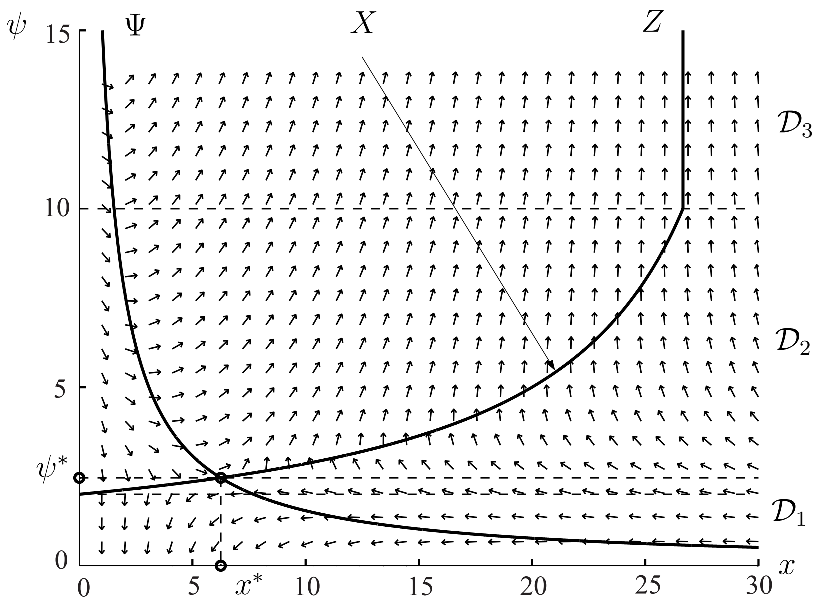


Рис. 1. Векторное поле гамильтоновой системы (2.9) в случае стандартных ограничений на управление (3.5). Обозначения жирных линий: Z (3.2), X (2.14), Ψ (2.7). Стре́лки указывают направление вектора $(\dot{x}, \dot{\psi})$ в точке (x, ψ). Установившееся состояние $(x^*, \psi^*) = (6.25, 2.46)$ (3.6) принадлежит области $\mathcal{D}_2$ (2.4). Векторное поле построено для следующих параметров: $a = -0.015$, $b = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.05$, $g = 0.8$.

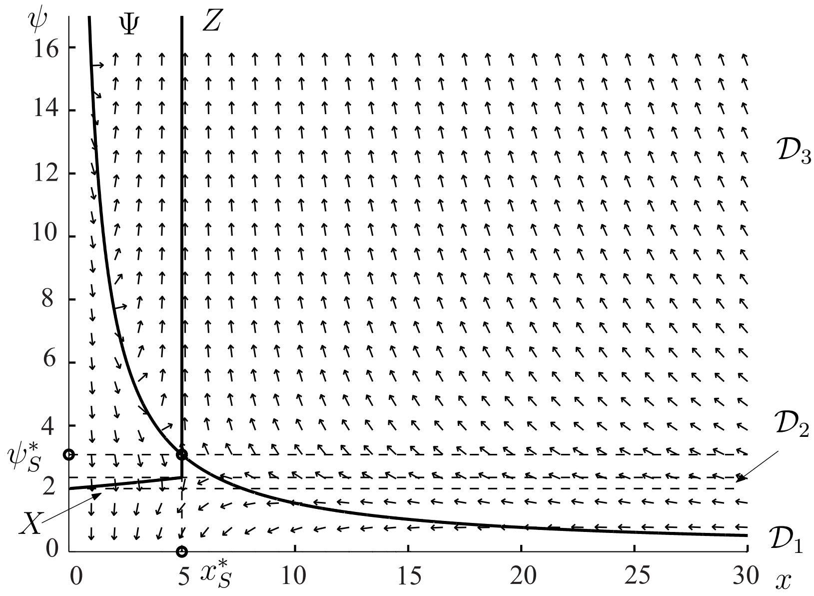


Рис. 2. Векторное поле гамильтоновой системы в случае жестких ограничений (3.3). Обозначения линий: Z (3.2), X (2.14), Ψ (2.7). Установившееся состояние $(x_S^*, \psi_S^*) = (5, 3.077)$ принадлежит области $\mathcal{D}_3$ (2.5). Векторное поле построено для следующих параметров: $a = -0.015$, $b = 0.5$, $\gamma = 1$, $\delta = 0.05$, $g = 0.15$.

Случай жестких ограничений на управление. На рис. 2 построено векторное поле для случая установившегося состояния в области $\mathcal{D}_3$ (2.5). Назовем ситуацию, когда ограничения на управление малы, случаем жестких ограничений на инвестиции. В этом случае оптимальная траектория должна сходиться в точку покоя (x_S^*, ψ_S^*).

Если $x(t_0) \le x_S^*$, то оптимальная траектория всегда принадлежит области $\mathcal{D}_3$. Это, в свою очередь, означает, что оптимальное управление является постоянным: $u^0(t) = g$. В этом случае решение $x^0(t)$ можно записать, применив формулу Коши для решения линейного дифференциального уравнения (2.16):

$$x^0(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)} + \int\limits_{t_0}^{t} bge^{a(t-\tau)}d\tau = \Big(x(t_0) + \frac{bg}{a}\Big)e^{a(t-t_0)} - \frac{bg}{a}.$$

В силу $a < 0$ и (3.4) имеет место соотношение

$$\lim_{t\to+\infty} x^0(t) = -\frac{bg}{a} = x_S^*.$$

З а м е ч а н и е 2. Случай, когда траектория полностью принадлежит области $\mathcal{D}_3$ и решение задается постоянным управлением, отсылает нас к истокам теории экономического роста. Именно постоянное заданное экзогенно управление рассматривал Роберт Солоу в своей модели, использующей уравнение Рэ́мзи (см., например, [2]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ramsey F. P.** A mathematical theory of saving // Econ. J. 1928. Vol. 38, no. 152. P. 543–559.
2. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. 1008 p.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 393 с.

4. **Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 2 (404). С. 3–64.
5. **Solow R. M.** Technical change and the aggregate production function // Rev. Econ. Stat. 1957. Vol. 39, no. 3. P. 312–320.
6. **Smith W. T.** A closed form solution to the Ramsey model // Contrib. Macroecon. 2006. Vol. 6, no. 1. P. 1–27.
7. **Асеев С. М., Кряжимский А. В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. № 257. С. 3–271.
8. **Красовский А. А., Тарасьев А. М.** Свойства гамильтоновых систем в принципе максимума Понтрягина для задач экономического роста // Тр. МИАН. 2008. № 262. С. 127–145.
9. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

Красовский Андрей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия
e-mail: krasov@iiasa.ac.at

Поступила 09.04.2016

Лебедев Павел Дмитриевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: pleb@yandex.ru

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Институт экономики УрО РАН
e-mail: tam@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 515.126.27+517.988.57

УСЛОВИЯ НЕРАЗЛОЖИМОСТИ И ПРИМИТИВНОСТИ МОНОТОННЫХ СУБОДНОРОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Вл. Д. Мазуров, А. И. Смирнов[1]

Представлены необходимые и достаточные условия локальной неразложимости монотонных субоднородных преобразований конуса $\mathbb{R}^q_+$. Основное внимание при этом уделяется понятию неразложимости отображения в нуле, которое является ослаблением классического понятия неразложимости отображения. Анализируются свойства неразложимых в нуле монотонных положительно однородных первой степени отображений и субоднородных отображений. Получены также условия примитивности таких отображений.

Ключевые слова: положительно однородное первой степени отображение, субоднородное отображение, неразложимое отображение, неразложимое в нуле отображение, примитивное отображение.

Vl. D. Mazurov, A. I. Smirnov. Conditions for the irreducibility and primitivity of monotone subhomogeneous mappings.

We present necessary and sufficient conditions for the local irreducibility of monotone subhomogeneous transformations of the cone $\mathbb{R}^q_+$. The main attention is paid to the notion of irreducibility of a mapping at zero, which is a weakening of the classical notion of irreducibility of a mapping. We analyze the properties of monotone first-degree positively homogeneous mappings irreducible at zero and of subhomogeneous mappings. Necessary and sufficient conditions are obtained for the primitivity of such mappings.

Keywords: first-degree positively homogeneous mapping, subhomogeneous mapping, irreducible mapping, irreducible at zero mapping, primitive mapping.

MSC: 47N05, 37N25, 37N40

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-169-177

1. Введение. Мотивация и основные определения

Мы будем рассматривать дискретную динамическую систему вида

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

на конусе $\mathbb{R}^q_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)\colon x_i \geqslant 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, q\}$. Система имеет тривиальное состояние равновесия, что означает наличие нулевой неподвижной точки порождающего ее отображения: $F(0) = 0$.

Для некоторых классов отображений асимптотические свойства итерационного процесса (1) достаточно хорошо изучены и во многом определяются спектральными свойствами отображения F. Так, в математической экономике имеется хорошо развитая спектральная теория для монотонных положительно однородных первой степени отображений, обобщающая основные утверждения спектральной теории для линейных отображений [1]. В работе [2] асимптотические свойства итерационного процесса (1) охарактеризованы для класса монотонных субоднородных отображений, содержащего как граничный случай класс положительно однородных первой степени отображений. При этом существенными в доказательствах многих ключевых утверждений нелинейной теории Перрона — Фробениуса оказываются свойства неразложимости и примитивности отображения F, являющиеся обобщениями соответствующих свойств неотрицательной матрицы.

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 16-07-00266).

Далее используются следующие обозначения:

$$x \leqq y, \text{ если } y - x \in \mathbb{R}^q_+; \quad x \leq y, \text{ если } x \leqq y; \quad x \neq y \text{ и } x < y, \text{ если } y - x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^q_+.$$

Для краткости будем записывать вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_q)$ и отображение $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_q(x))$ в виде $x = (x_i)$ и $F(x) = (f_i(x))$ соответственно.

Будем использовать стандартные определения монотонности и положительной однородности отображений. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *монотонно возрастающим*, если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+ \colon x \leqq y \Rightarrow F(x) \leqq F(y).$$

Монотонно возрастающее отображение будем также называть для краткости просто *монотонным* или *возрастающим*.

Отображение $H \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *положительно однородным степени* m, если

$$H(\alpha x) = \alpha^m H(x) \quad \forall \alpha \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^q_+.$$

Основным требованием к отображению, генерирующему динамическую систему (1), в данной работе является свойство субоднородности.

Определение 1. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *субоднородным*, если выполнено условие

$$F(\alpha x) \geqq \alpha F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^q_+, \quad \alpha \in (0, 1). \tag{2}$$

Заметим, что отображения, удовлетворяющие аналогичному свойству (иногда со строгим неравенством) в банаховых пространствах, рассматривались в целом ряде работ (см., например, обзор в недавней монографии [3]). В настоящее время за отображениями, действующими в банаховых пространствах с частичным порядком (порождаемым некоторым конусом) и удовлетворяющими условию (2), в основном закрепилось название “субоднородные отображения” (см. монографии [3–5]). Этот же термин используется в исследованиях по популяционной биологии (см. монографию [6]). Мы также будем здесь придерживаться этого термина.

Свойство (2), определяющее субоднородность, равносильно каждому из следующих условий:

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+ \quad \forall \beta \in (1, +\infty) \quad F(\beta x) \leqq \beta F(x),$$

$$0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \Rightarrow (\alpha_1)^{-1} F(\alpha_1 x) \geqq (\alpha_2)^{-1} F(\alpha_2 x). \tag{3}$$

Последнее свойство означает, что при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^q_+$ отображение $\alpha^{-1} F(\alpha x)$ является убывающим по $\alpha \in \mathbb{R}_+$, и, следовательно, могут быть определены положительно однородные первой степени отображения

$$F_0(x) = \lim_{\alpha \to +0} \alpha^{-1} F(\alpha x), \quad F_\infty(x) = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha^{-1} F(\alpha x), \tag{4}$$

являющиеся соответственно мажорантой и минорантой отображения F на $\mathbb{R}^q_+$. В работе [2] в терминах доминирующих собственных значений этих отображений получены необходимые и достаточные условия существования положительной неподвижной точки монотонного субоднородного отображения.

Для положительно однородного первой степени отображения H доказана [1] разрешимость задачи о собственных значениях и подтверждено существование наибольшего среди всех его собственных значений — числа $\lambda(H)$, которому соответствует неотрицательный собственный вектор. Это число называется *доминирующим собственным значением* отображения H, поскольку многие его свойства аналогичны свойствам доминирующего собственного значения неотрицательной квадратной матрицы. Более сильные спектральные свойства положительно однородных первой степени отображений получены в предположении их неразложимости.

Неотрицательная матрица $A = [a_{i,j}]$ порядка $q > 1$ называется *разложимой*, если

$$\exists I \subseteq \overline{1,q}, \quad \varnothing \neq I \neq \overline{1,q} \colon a_{i,j} = 0 \quad \forall i \notin I, \ j \in I. \tag{5}$$

В противном случае матрица называется *неразложимой*.

Для разложимой матрицы A координаты $(Ax)_i$ вектора Ax с номерами $i \in J$, где $J = \overline{1,q}\,\backslash I$, зависят только от координат x_i вектора x с теми же номерами. Действительно, имеем

$$(Ax)_i = \sum_{j \in I} a_{i,j} x_j + \sum_{j \in J} a_{i,j} x_j = \sum_{j \in J} a_{i,j} x_j \quad \forall i \in J.$$

Это означает, что итерационный процесс (1) с линейным оператором шага, определяемым разложимой матрицей, содержит изолированную подсистему — проекцию вектора x исходной системы в подпространство с координатами из множества $i \in J$. Это обстоятельство дает основания рассматривать линейные процессы (1) только с неразложимыми матрицами.

Определим следующие группы координат векторов $x, y \in \mathbb{R}^q_+$:

$$I^+(x,y) = \{j \in \overline{1,q} \colon x_j > y_j\}, \quad I^0(x,y) = \{j \in \overline{1,q} \colon x_j = y_j\},$$
$$I^+(x) = \{i \in \overline{1,q} \colon x_i > 0\}, \qquad I^0(x) = \{i \in \overline{1,q} \colon x_i = 0\}.$$

В нелинейной теории Перрона — Фробениуса используется следующее обобщение понятия неразложимости матрицы [1].

Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым*, если

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^q_+ \colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing, \quad I^0(x,y) \subseteq I^0(F(x), F(y)). \tag{6}$$

Отображение F называется *неразложимым*, если оно не является разложимым, т. е. если

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+ \colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \backslash I^0(F(x), F(y)) \neq \varnothing.$$

Далее будет дано также определение неразложимости в точке (введенное в работе [7]). Будем называть разложимое в смысле (6) отображение *глобально разложимым* (на $\mathbb{R}^q_+$) и неразложимое в смысле (6) отображение — *глобально неразложимым* (на $\mathbb{R}^q_+$).

Поскольку далее отображение F всюду предполагается монотонно возрастающим, то условие $i \notin I^0(F(x), F(y))$ означает $f_i(x) > f_i(y)$, и определение глобальной неразложимости отображения можно уточнить следующим образом:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^q_+ \colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \cap I^+(F(x), F(y)) \neq \varnothing. \tag{7}$$

Линейное отображение, определяемое неразложимой матрицей, естественно является глобально неразложимым в смысле этого определения. Действительно, если матрица A разложима и I — множество из определения (5) разложимости матрицы, то, обозначая $J = \overline{1,q} \backslash I \neq \varnothing$, из равенств $x_i = y_i \ \forall i \in J$ получаем:

$$(Ax)_i = \sum_{j \in I} a_{i,j} x_j + \sum_{j \in J} a_{i,j} x_j = \sum_{j \in J} a_{i,j} x_j = \sum_{j \in J} a_{i,j} y_j = (Ay)_i \quad \forall i \in J.$$

Таким образом, если координаты векторов x, y с номерами из множества $J = \overline{1,q} \backslash I$ совпадают, то и образы Ax, Ay этих векторов имеют координаты, совпадающие на тех же местах: $(Ax)_j = (Ay)_j \ \forall j \in J$.

Усилением свойства неразложимости матрицы является ее примитивность. Неотрицательная матрица $A = [a_{i,j}]$, $i, j \in \overline{1,q}$, $q > 1$ называется *примитивной*, если при некотором $k = 1, 2, \ldots$ матрица A^k положительна (т. е. все ее элементы положительны). В противном случае матрица называется *импримитивной*.

В работе [1] дано следующее обобщение понятия примитивности матрицы. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *примитивным* в точке $y \in \mathbb{R}^q_+$, если

$$\forall x\colon x \geq y \Rightarrow \exists k\colon F^k(x) > F^k(y).$$

Примитивное в точке $y = 0$ отображение будем для краткости называть также *примитивным в нуле* (или *в нулевой точке*).

В нелинейной теории Перрона — Фробениуса свойство примитивности отображения в точке (или на некотором подмножестве исходного конуса) является существенным в ряде ключевых утверждений. С другой стороны, также активно используемое классическое свойство неразложимости отображения (7) имеет, как уже отмечалось выше, глобальный характер. Как показано в работе [7], для доказательства некоторых утверждений о свойствах положительно однородных и субоднородных отображений достаточно локального варианта свойства неразложимости. Приведем соответствующие определения.

Определение 2. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым в точке* $y \in \mathbb{R}^q_+$, если

$$\exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing, \quad I^0(x,y) \subseteq I^0(F(x),F(y)).$$

Отображение, разложимое в каждой точке множества $M \subseteq \mathbb{R}^q_+$, называется *разложимым на множестве* M.

Соответственно отображение F называется *неразложимым в точке* y, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq y, \quad I^0(x,y) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x,y) \cap I^+(F(x),F(y)) \neq \varnothing.$$

Отображение, неразложимое в каждой точке множества $M \subseteq \mathbb{R}^q_+$, называется *неразложимым на множестве* M.

Определение 3. Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *разложимым в точке* $y = 0$ (*разложимым в нуле*, *в нулевой точке*), если

$$\exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq 0, \quad I^0(x) \neq \varnothing, \quad I^0(x) \subseteq I^0(F(x)).$$

Соответственно отображение F называется *неразложимым в точке* $y = 0$ (*в нуле, в нулевой точке*), если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon x \geq 0, \quad I^0(x) \neq \varnothing \Rightarrow I^0(x) \cap I^+(F(x)) \neq \varnothing.$$

Глобальная неразложимость отображения по определению влечет за собой неразложимость в любой точке $\mathbb{R}^q_+$, и в частности неразложимость в нуле. Для линейных отображений понятие неразложимости в нуле, как показано в работе [7], совпадает с понятием глобальной неразложимости (совпадающим, в свою очередь, с понятием неразложимости матрицы линейного отображения).

2. Некоторые свойства неразложимых и примитивных монотонных субоднородных отображений

Рассмотрим сначала некоторые вопросы, связанные с существованием нулей субоднородных отображений. В работе [2] доказано следующее полезное утверждение.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ является субоднородной и возрастающей на $\mathbb{R}^q_+$. Если $f(\bar{x}) = 0$ для некоторого $\bar{x} \geq 0$, то $f(x) = 0$ на множестве $\{x \in \mathbb{R}^q_+\colon I^0(x) \supseteq I^0(\bar{x})\}$. В частности, если $f(\bar{x}) = 0$ при некотором $\bar{x} > 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^q_+$.*

Замечание. Естественно предполагать в дальнейшем отсутствие полностью нулевых компонент отображения F: $\forall i \in \overline{1,q}\ \exists x \in \mathbb{R}^q_+\colon f_i(x) > 0$. В этом случае образ положительного вектора для субоднородного возрастающего отображения положителен:

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+\colon x > 0 \Rightarrow F(x) > 0. \tag{8}$$

Действительно, предполагая противное, получаем существование номера $i_0 \in \overline{1,q}$ и вектора $\bar{x} > 0$, удовлетворяющих условию $f_{i_0}(\bar{x}) = 0$, что приводит в силу предыдущей леммы к равенству $f_{i_0}(x) \equiv 0$. Свойство (8) означает для субоднородного возрастающего отображения справедливость включения $F(\operatorname{int}\mathbb{R}^q_+) \subseteq \operatorname{int}\mathbb{R}^q_+$.

При анализе свойств субоднородных отображений и асимптотических свойств, порождаемых ими итерационных процессов, удобно использовать частный случай проективной метрики Гильберта — метрику Биркгофа — Томпсона. Если задан замкнутый конус K в банаховом пространстве X, то метрика Томпсона определяется как

$$d_T(x,y) = \log\max\{\alpha(x,y), \alpha(y,x)\} \tag{9}$$

для сравнимых элементов x, y при $y \neq 0$, $d_T(0,0) = 0$ и $d_T(x,y) = +\infty$ в противном случае, где $\alpha(x,y) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}\colon x \leqq \alpha y\}$.

Легко убедиться, что $d_T(x,y)$ является метрикой на каждой компоненте сравнимых векторов конуса K. Метрика Томпсона широко используется в исследованиях по линейному и нелинейному анализу (см., например, обзор в статье [8]).

В ряде отечественных исследований (см. обзор в работе [9]) метрика $d_T(x,y)$ называется также метрикой Биркгофа, поэтому будем называть ее в дальнейшем *метрикой Биркгофа — Томпсона*. Следуя В. И. Опойцеву [10], на $\operatorname{int}\mathbb{R}^q_+$ будем ее использовать в виде

$$\rho_0(x,y) = \min\{\alpha > 0\colon e^{-\alpha}x \leqq y \leqq e^{\alpha}x\}. \tag{10}$$

Равенство расстояний в метрике Биркгофа — Томпсона (9) и в метрике (10) доказано, например, в работе [11].

Метрика ρ_0 эквивалентна [10] евклидовой метрике, т. е. из сходимости последовательности в метрике Биркгофа — Томпсона вытекает ее сходимость в евклидовой метрике, и обратно. Класс субоднородных отображений определен таким образом, что именно метрика Биркгофа — Томпсона является наиболее подходящей для анализа свойств определяемых ими итерационных процессов. В частности, известно [3], что субоднородное возрастающее отображение является нерасширяющим в метрике Биркгофа — Томпсона на внутренности конуса в банаховом пространстве и, следовательно, непрерывным; для конуса $\mathbb{R}^q_+$ это доказано в работе [2]. Здесь же показано, что субоднородное возрастающее отображение имеет непрерывное расширение на весь конус $\mathbb{R}^q_+$. Это позволяет считать субоднородное возрастающее отображение непрерывным на всем $\mathbb{R}^q_+$.

В процессе математического моделирования необходимость приближения построенных моделей к реальности обуславливает переход от линейных моделей к нелинейным, связанный в нашем случае с переходом от линейных отображений к нелинейным. Первым шагом на этом пути может являться использование так называемых *сепарабельных* нелинейных отображений, аддитивных по координатам.

Отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ называется *сепарабельным*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^q_+ \quad F(x) = \sum_{j=1}^{q} F_j(x_j),\ F_j(x_j) = f_{i,j}(x_j). \tag{11}$$

Заметим, что равенство $F(0) = 0$ в силу неотрицательности функций $f_{i,j}(x_j)$ приводит к равенствам $f_{i,j}(0) = 0\ \forall i,j \in \overline{1,q}$. Отсюда, используя определение (3) субоднородности для вектора $x(j)$, $j \in \overline{1,q}$, имеющего ненулевую координату только на j-м месте, получаем, что субоднородность сепарабельного отображения $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ равносильна субоднородности всех функций $f_{i,j}(x_j)$, $i,j \in \overline{1,q}$.

Сепарабельное отображение $F(x) = f_i(x)$ имеет компоненты $f_i(x) = \sum_{j=1}^q f_{i,j}(x_j)$, $i \in \overline{1,q}$. Если $F(0) = 0$, то

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j\in I^0(x)}^{q} f_{i,j}(0) + \sum_{j\in I^+(x)} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j\in I^+(x)} f_{i,j}(x_j).$$

Таким образом, если $x \geq 0$ и $I^0(x) \neq \varnothing$, то равенство (11) можно уточнить:

$$F(x) = \sum_{j \in I^+(x)} F_j(x_j), \quad f_i(x) = \sum_{j \in I^+(x)} f_{i,j}(x_j), \quad i \in \overline{1,q}. \tag{12}$$

Сепарабельному отображению F можно поставить в соответствие матрицу

$$A_F = [a^F_{i,j}], \quad a^F_{i,j} = f_{i,j}(1), \quad i,j \in \overline{1,q}. \tag{13}$$

Уточним смысл понятия неразложимости для монотонного субоднородного сепарабельного отображения.

Теорема 1. *Сепарабельное субоднородное возрастающее отображение* $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$, $F(0) = 0$, *неразложимо в нуле тогда и только тогда, когда неразложима матрица* A_F.

Доказательство. *Необходимость.* Докажем, что из разложимости матрицы A_F вытекает разложимость в нуле отображения F.

Действительно, если матрица A_F разложима, то согласно определению (5) из (13) получаем: $a^F_{ij} = f_{i,j}(1) = 0 \ \forall i \notin I, \ j \in I$, где $I \neq \varnothing$, $J \neq \varnothing$, $J = \overline{1,q}/I$. Тогда из леммы следует $f_{i,j}(x_j) \equiv 0 \ \forall i \in J, \ j \in I$. Возьмем вектор $x \in \mathbb{R}^q_+$, для которого $I^0(x) = J$, тогда

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j \in J} f_{i,j}(x_j) = \sum_{j \in J} f_{i,j}(0) = 0,$$

т. е. $f_i(x) = 0 \ \forall i \in J$.

Таким образом, для данного вектора x мы получили $I^0(x) \subseteq I^0(F(x))$. Это означает, что отображение F разложимо в нуле.

Достаточность. Покажем, что из разложимости в нулевой точке отображения F следует разложимость матрицы A_F.

Пусть отображение F разложимо в нуле. Это означает, что для некоторого вектора $x \in \mathbb{R}^q_+$ справедливы равенства $f_i(x) = 0 \ \forall i \in I^0$, причем $I^0 = I^0(x) \neq \varnothing$, $I^+ = I^+(x) \neq \varnothing$. Отсюда согласно (12) для всех $i \in I^0$ получаем $f_i(x) = \sum_{j \in I^+} f_{i,j}(x_j) = 0$, и в силу неотрицательности слагаемых в последней сумме имеем $f_{i,j}(x_j) = 0 \ \forall i \in I^0, \ j \in I^+$. Из условия $x_j > 0 \ \forall j \in I^+$ согласно лемме следует $f_{i,j} x_j \equiv 0 \ \forall i \in I^0, \ j \in I^+$. Используя определение (13) элемента $a^F_{i,j} = f_{i,j}(1)$, получаем равенства $a^F_{i,j} = 0 \ \forall i \notin I^+, \ j \in I^+$, и согласно определению (5) матрица A_F разложима, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

В общем случае неразложимость матрицы A_F еще не гарантирует глобальной неразложимости отображения F. Тем не менее в частном случае сепарабельного отображения F неразложимости матрицы A_F достаточно для выполнения многих свойств, справедливость которых в общем случае гарантируется глобальной неразложимостью отображения F. В частности, оказывается, что глобальная неразложимость сепарабельных отображений, ненулевые функции-слагаемые которых в аддитивных представлениях их компонент являются строго возрастающими, определяется локальной неразложимостью только в нулевой точке.

Теорема 2. *Пусть отображение* $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ *является сепарабельным, субоднородным и возрастающим* $(F(0) = 0)$. *Пусть выполнено условие*

$$\forall i,j\colon f_{i,j}(x_i) \not\equiv 0 \Rightarrow f_{i,j}(x_j) \text{ строго возрастает.} \tag{14}$$

Тогда глобальная неразложимость отображения F равносильна его неразложимости в нуле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что из глобальной разложимости отображения F следует разложимость в нуле.

Если отображение F глобально разложимо, то для некоторой пары векторов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^q_+$, $\bar{x} \geq \bar{y}$, справедливы равенства $f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{y})$ $\forall i \in I^0$, где $I^0 = I^0(\bar{x}, \bar{y}) \neq \varnothing$, $I^+ = I^+(\bar{x}, \bar{y}) \neq \varnothing$. Отсюда для $i \in I^0$ получаем равенство

$$0 = f_i(\bar{x}) - f_i(\bar{y}) = \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(\bar{x}_j) - \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(\bar{y}_j) = \sum_{j \in I^+} (f_{i,j}(\bar{x}_j) - f_{i,j}(\bar{y}_j)).$$

Поскольку каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно, то выполняются равенства $f_{i,j}(\bar{x}_j) = f_{i,j}(\bar{y}_j)$ $\forall i \in I^0,\ j \in I^+$. Тогда из (14) следует, что $f_{i,j}(x_j) \equiv 0$ $\forall i \in I^0,\ j \in I^+$, поэтому при всех $i \in I^0$ имеем $f_i(x) = \sum_{j \in I^0} f_{i,j}(x_j)$ $\forall x \in \mathbb{R}^q_+$. Отсюда для вектора $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ получаем

$$f_i(\bar{z}) = \sum_{j \in I^0} f_{i,j}(\bar{x}_j - \bar{y}_j) = \sum_{j \in I^0} f_{i,j}(0) = 0 \quad \forall i \in I^0.$$

Но $I^0(\bar{z}) = I^0$, т. е. мы получили $I^0(\bar{z}) \subseteq I^0(F(\bar{z}))$, и, следовательно, отображение F разложимо в нуле.

Теорема доказана.

Заметим, что всякое возрастающее ($F(0) = 0$) субоднородное примитивное в нуле отображение F является неразложимым в нуле. Анализ неразложимости отображения F в нуле, как показывает следующее утверждение, может быть сведен к соответствующему анализу отображения F_0, определенному в (4), особенно простому для сепарабельного отображения.

Теорема 3. *Если отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ является субоднородным и возрастающим и отображение F_0 конечно, то отображение F неразложимо в нуле тогда и только тогда, когда отображение F_0 неразложимо в нуле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Неразложимость отображения F_0 в нуле следует из неразложимости в нуле отображения F в силу неравенства $F_0(x) \leqq F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^q_+$.

Достаточность. Пусть отображение $F_0(x) = (f^0_i(x))$ неразложимо в нуле.

Если отображение F разложимо в нуле, то $\varnothing \neq I^0(\bar{x}) \subseteq I^0(F(\bar{x}))$ для некоторого вектора $\bar{x} \geq 0$, т. е. имеет место равенство $f_i(\bar{x}) = 0$ $\forall i \in I^0(\bar{x})$. Отсюда в силу монотонности функций $f_i(x)$ следует, что $f_i(\alpha\bar{x}) = 0$ $\forall i \in I^0(\bar{x}),\ \alpha \in [0, 1]$. Поэтому с учетом определения (4) получаем $f^0_i(\bar{x}) = \lim\limits_{\alpha \to +0} \alpha^{-1} f_i(\alpha\bar{x}) = 0$ $\forall i \in I^0(\bar{x})$, т. е. $I^0(\bar{x}) \subseteq I^0(F^0(\bar{x}))$, и отображение F_0 разложимо в нуле. Полученное противоречие доказывает неразложимость в нуле отображения F.

Теорема доказана.

В общем случае проверка примитивности отображения в нуле довольно затруднительна, но для сепарабельного отображения удается свести анализ примитивности в нуле к анализу (значительно более простому и конструктивному) примитивности некоторой матрицы. Заметим, что отображение F_0 для субоднородного отображения F может иметь несобственные компоненты. Этот случай в следующем утверждении исключается.

Теорема 4. *Верны следующие утверждения*:

1) *Если отображение $F \in \{\mathbb{R}^q_+ \mapsto \mathbb{R}^q_+\}$ является субоднородным и возрастающим, то отображение F примитивно в нуле тогда и только тогда, когда отображение F_0 примитивно в нуле.*

2) *Сепарабельное возрастающее субоднородное отображение F примитивно в нуле тогда и только тогда, когда примитивна матрица $A_F = [f_{i,j}(1)],\ i, j \in \overline{1, q}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если отображение F примитивно в нуле, то в силу неравенства $F_0 x) \leqq F(x)$ вытекает примитивность отображения F_0 в нуле.

Пусть теперь отображение F_0 примитивно в нуле и $x \geq 0$ — некоторый фиксированный вектор. В силу примитивности отображения F в нуле существует такое натуральное число k, что $a = (F_0)^k(x) > 0$. Отображение F^k также субоднородно, и для него справедливы [2] условие (3) и равенство $(F^k)_0 = (F_0)^k$. Поэтому для сколь угодно малого вектора $e \in (0, a)$ с координатами $e_i = \varepsilon > 0$, $i \in \overline{1, q}$, существует такое достаточно малое число α, что

$$\alpha^{-1} F^k(\alpha x) > (F^k)_0(x) - e = (F_0)^k(x) - e = a - e > 0.$$

Можно считать $\alpha \in (0, 1)$, и отсюда в силу монотонности отображения F^k получаем: $F^k(x) \geqq F^k(\alpha x) > \alpha(a - e) > 0$, т. е. отображение F также примитивно в нуле. Первая часть утверждения доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда отображение F сепарабельно. Обозначим $F^k(x) = (f_i^k(x))$. Зафиксируем $x \geq 0,\ i \in \overline{1, q}$ и покажем, что справедливо следующее утверждение:

$$f_i^k(x) > 0 \Leftrightarrow [(A_F)^k x]_i > 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Докажем это утверждение, используя математическую индукцию. Введем множества $I_\ell^+ = I^+(F^\ell(x)),\ I_\ell^0 = I^0(F^\ell(x)),\ \ell = 0, 1, 2, \ldots$. Используя лемму, получаем следующую цепочку неравенств:

$$f_i(x) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(x_j) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_0^0} f_{i,j}(x_j) + \sum_{j \in I_0^+} f_{i,j}(x_j) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_0^+} f_{i,j}(x_j) > 0$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in I_0^+ \colon f_{i,j}(x_j) \neq 0 \Leftrightarrow \exists j \in I_0^+ \colon a_{i,j}^F > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_0^+} a_{i,j}^F x_j > 0 \Leftrightarrow [A_F x]_i > 0.$$

Это означает, что при $k = 1$ свойство (15) выполнено.

Предположив, что свойство (15) справедливо для $k = \ell$, докажем его для $k = \ell + 1$. Принимая в силу предположения индукции $I_\ell^+ = \{j \in \overline{1, q} \colon [\ (A_F)^\ell x]_j > 0\}$, получаем

$$f_i^{\ell+1}(x) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} f_{i,j}(f_j^\ell(x)) > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_\ell^+} f_{i,j}\ (f_j^\ell(x)) > 0 \Leftrightarrow \exists j \in I_\ell^+ \colon f_{i,j}(x_j) \not\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \exists j \in I_\ell^+ \colon a_{i,j}^F > 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in I_\ell^+} a_{i,j}^F [(A_F)^\ell x]_j > 0 \Leftrightarrow [(A_F)^{\ell+1} x]_i = \sum_{j=1}^{q} a_{i,j}^F [(A_F)^\ell x]_j > 0,$$

что и требовалось.

Таким образом, свойство (15) доказано. Поэтому из примитивности матрицы A_F, означающей положительность матрицы $(A_F)^k$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$ следует примитивность отображения F в нуле.

Обратно, если отображение F примитивно в нуле, то для вектора a_i, имеющего единственный ненулевой элемент — единицу на i-м месте, при некотором k_i выполнено неравенство $F^{k_i}(a_i) > 0,\ i \in \overline{1, q}$. Но тогда в силу (15) матрица $(A_F)^k$, где $k = \max\{k_i \colon i \in \overline{1, q}\}$, положительна.

Теорема доказана.

Поскольку положительно однородное первой степени отображение в принятой здесь терминологии является субоднородным, то все результаты, полученные для субоднородных отображений, справедливы и для положительно однородных первой степени отображений.

3. Заключение

В работе анализируется ослабление классического понятия неразложимости — понятие неразложимости в нуле, в случае линейного отображения совпадающее с классическим. Показано совпадение этих свойств также для некоторых классов нелинейных отображений. Изучены некоторые свойства неразложимых в нуле субоднородных отображений. Анализ наличия свойства неразложимости и примитивности в нуле субоднородного отображения сведен к соответствующему анализу для некоторого положительно однородного отображения, а в случае сепарабельности исходного отображения — к существенно более простому и конструктивному анализу наличия этих свойств у некоторой матрицы. Результаты данной статьи применимы к анализу свойств итераций субоднородных монотонных отображений при более слабых предположениях типа неразложимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 518 с.
2. **Смирнов А. И.** Квазивогнутые отображения в некоторых моделях эволюционирующих систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1983. 136 с.
3. **Lemmens B., Nussbaum R. D.** Nonlinear Perron — Frobenius theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. Vol. 189. 323 p. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 189).
4. **Krause U.** Positive dynamical systems in discrete time: theory, models and applications. Berlin etc.: Walter de Gruyter GmbH, 2015. 363 p.
5. **Pallaschke D., Rolewicz S.** Foundation of mathematical optimization. Convex analysis without linearity. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1997. 582 p. (Math. Appl.; vol. 388.)
6. **Zhao X.-Q.** Dynamical systems in population biology. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 276 p.
7. **Смирнов А. И.** О некоторых ослаблениях понятия неразложимости // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 3. С. 26–30.
8. **Lemmens B., Roelands M.** Unique geodesics for Thompson's metric // Ann. Institut Fourier. 2015. Vol. 65, no. 1. P. 315–348.
9. **Смирнов А.И.** Субоднородные отображения в теории монотонных динамических систем // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 1. С. 68–80.
10. **Опойцев В. И.** Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. 245 с.
11. **Cobzas S., Rus M.-D.** Normal cones and Thompson metric // Topics in Mathematical Analysis and Applications / eds. T. M. Rassias, L. Tóth. 2014. P. 209–258. (Springer Optim. Appl.; vol. 94.)

Поступила 17.05.2016

Мазуров Владимир Данилович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: mazurov@imm.uran.ru

Смирнов Александр Иванович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: smirnov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

НЕАБЕЛЕВЫ КОМПОЗИЦИОННЫЕ ФАКТОРЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ВСЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ КОТОРОЙ ХОЛЛОВЫ[1]

Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Получено описание неабелевых композиционных факторов конечной группы, каждая максимальная подгруппа нечетного индекса которой холлова.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, холлова подгруппа, композиционный фактор, нечетный индекс.

N. V. Maslova, D. O. Revin. Nonabelian composition factors of a finite group whose maximal subgroups of odd indices are Hall subgroups.

We obtain a description of nonabelian composition factors of a finite nonsolvable group in which any maximal subgroup of odd index is a Hall subgroup.

Keywords: finite group, maximal subgroup, Hall subgroup, composition factor, odd index.

MSC: 20D20, 20D30, 20D60

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-178-187

1. Введение

Всюду в работе мы будем употреблять термин “группа” в значении “конечная группа”.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, которые не принадлежат π. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество его простых делителей, а для группы G через $\pi(G)$ — множество $\pi(|G|)$. Натуральное число n, для которого $\pi(n) \subseteq \pi$, называется *π-числом*, а группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*. Наибольшее π-число, делящее натуральное число n, будем обозначать через n_π. Подгруппа H группы G называется *π-холловой подгруппой*, если $|H| = |G|_\pi$. *Холлова подгруппа* — это π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел.

В. С. Монахов в [11] начал изучение групп G со следующим свойством:

(*) для фиксированного множества π простых чисел все максимальные подгруппы в G, индексы которых являются π-числами, холловы.

Основной результат [11] полностью описывает π-разрешимые группы (т. е. группы, обладающие (суб)нормальными рядами, каждый фактор которых либо абелев, либо π'-группа) со свойством $(*)$: это, в точности, группы, в которых главные π-факторы изоморфны силовским подгруппам.

Строение произвольных групп со свойством $(*)$ более сложно и зависит от множества π. К настоящему моменту полностью исследован [10] вопрос о строении таких групп в ситуации, когда π совпадает с множеством всех простых чисел, т. е. групп, в которых все максимальные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК-6118.2016.1), Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Первый автор является победителем конкурса молодых математиков фонда Дмитрия Зимина “Династия” 2013 г.

подгруппы холловы. Данная ситуация была особо выделена В.С. Монаховым, который в 2010 г. записал под номером 17.92 в “Коуровскую тетрадь” [5] следующий

Вопрос 1. Каковы неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы, у которой все максимальные подгруппы холловы?

Ответ на данный вопрос был найден первым автором в [9]. С использованием этого результата в [10] авторами было получено полное описание групп с холловыми максимальными подгруппами. Поэтому как усиление вопроса 1 и как важный этап описания групп со свойством $(*)$ естественно рассмотреть

Вопрос 2. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Каковы неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы, у которой холловыми будут все максимальные подгруппы с индексами, являющимися π-числами?

Ответ на вопрос 1 удалось получить, во многом, за счет рассмотрения ”больших” подгрупп четного порядка и четного индекса в простых группах и с использованием предложения 1 (см. ниже), доказанного в [9] для случая, когда π совпадает с множеством всех простых чисел. В данной работе мы ответим на вопрос 2 в случае, когда π совпадает со множеством всех нечетных простых чисел. Основным результатом является

Теорема. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Неабелевы композиционные факторы конечной группы, в которой все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы, изоморфны группам из следующего списка*:

(1) $PSL_2(2^l)$, *где* $l \geq 2$;

(2) $PSL_2(p^l)$, *где* p — *нечетное простое число и*
либо $l = 2^w \geq 2$,
либо $l = 1$ *и* $p \equiv \pm 1 \pmod 8$,
либо $l = 1$ *и* $p \equiv \pm 5, \pm 11, \pm 13, \pm 29 \pmod{72}$;

(3) $PSL_3(2^{2l-1})$, *где* $l \geq 1$;

(4) $PSL_5(2^l)$, *где* l *не делится на* 4;

(5) $PSL_n(p)$, *где* n — *простое число Ферма,* p — *нечетное простое число,* $(n, p-1) = 1$ *и если* $p \equiv 1 \pmod 4$, *то* $p > n$ *и для любого простого числа* $r \leq n$
либо r *делит* $p - 1$,
либо $[n/r] = [n/(r-1)]$, $(p^{r-1} - 1)_r = r$ *и* $r - 1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p^i \equiv 1 \pmod r\}$;

(6) $PSp_4(2^l)$, *где* $l \geq 2$;

(7) $Sz(2^{2l+1})$, *где* $l \geq 1$;

(8) A_n, *где* $n = 6$ *или* n — *простое число Ферма*;

(9) J_1, M_{23}.

(ii) *Для каждой простой группы* S *из приведенного в п.* (i) *списка найдется группа* G, *в которой все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы и цоколь которой изоморфен* S.

2. Используемые обозначения и предварительные результаты

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [2;4;13;17]. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathfrak{V}(\pi)$ класс всех групп, где все максимальные подгруппы, индексы которых являются π-числами, холловы, а через $\mathfrak{A}(\pi)$ — класс всех неабелевых простых групп, изоморфных композиционным факторам групп из класса $\mathfrak{V}(\pi)$.

Основными инструментами исследования в настоящей работе будут классификация конечных простых групп и следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* π — *некоторое множество простых чисел и* S — *простая неабелева группа, обладающая подгруппой* X *такой, что*

(1) *класс сопряженности* $X^S = \{X^s \mid s \in S\}$ *является инвариантным относительно* $\mathrm{Aut}(S)$;

(2) *индекс* $|S : X|$ *является* π*-числом*;

(3) *любая подгруппа* Z *такая, что* $X \leq Z < S$, *не холлова в* S.

Тогда $S \notin \mathfrak{A}(\pi)$.

Доказательство. Мы используем ту же схему, что и в доказательстве [9, предложение 1].

Заметим, что класс групп $\mathfrak{V}(\pi)$ замкнут относительно взятия факторгрупп. Допустим, что заключение предложения не верно. Среди групп из класса $\mathfrak{V}(\pi)$, обладающих композиционным фактором, изоморфным S, выберем группу G наименьшего порядка. Так же, как и в доказательстве [9, предложение 1], замечаем, что если L — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $L = L_1 \times \dots \times L_m$, где $L_i \cong S$, и группа G действует сопряжениями транзитивно на множестве $\{L_1, \dots, L_m\}$, причем $m = |G : N_G(L_1)|$. Не уменьшая общности, считаем, что $L_1 = S$. Зафиксируем некоторую полную систему $\{g_1, \dots, g_m\}$ представителей правых смежных классов группы G по подгруппе $N_G(L_1)$. Тогда подгруппы $L_1^{g_1}, L_1^{g_2}, \dots, L_1^{g_m}$ попарно различны, и, не уменьшая общности, мы будем считать, что $L_i = L_1^{g_i}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Для подгруппы $X \leq S$, удовлетворяющей условиям (1)–(3), положим $X_i = X^{g_i}$ и $Y = \langle X_1, \dots, X_m \rangle$. Как и в доказательстве [9, предложение 1], заключаем, что класс сопряженности Y^L инвариантен относительно сопряжений элементами из G, откуда ввиду аргумента Фраттини $G = LN_G(Y)$.

С использованием соответствующей теоремы о гомоморфизмах легко показать, что

$$|G : N_G(Y)| = |L : L \cap N_G(Y)| = |S : N_S(X)|^m,$$

откуда следует, что индекс $|G : N_G(Y)|$ является π-числом. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(Y)$. Тогда индекс $|G : M|$ также является π-числом и, следовательно, M — холлова подгруппа в G. Кроме того, $G = LN_G(Y) = LM$, следовательно, $L \not\leq M$. В частности, найдется подгруппа L_i, $1 \leq i \leq m$, такая, что $L_i \not\leq M$. Как и в доказательстве [9, предложение 1], замечаем, что $X_i \leq Y \leq M$, откуда $X_i \leq L_i \cap M = Z_i < L_i$, т. е. Z_i — собственная подгруппа в L_i, содержащая X_i. Ввиду субнормальности подгруппы L_i в G и холловости M в G заключаем, что Z_i — холлова подгруппа группы L_i ввиду [16, лемма 1]. Значит, в S есть холлова собственная подгруппа Z, содержащая X, что противоречит выбору S и X. Предложение доказано.

Зафиксируем некоторые обозначения, связанные с классическими группами. Пусть q — натуральная степень простого числа и G — одна из конечных простых классических групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$, $PSp_n(q)$ для четного n, $P\Omega_n(q)$ для нечетных n и q и $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Будем обозначать через V векторное пространство размерности n над полем F с соответствующей билинейной или квадратичной формой, ассоциированное с группой G, где $F = \mathbb{F}_q$ для линейных, симплектических и ортогональных групп и $F = \mathbb{F}_{q^2}$ для унитарных групп. В случае группы $P\Omega_n^\varepsilon(q)$ для четного n параметр ε называется *знаком* этой группы и соответствующего ей векторного пространства V и обозначается через $\mathrm{sign}(V)$. Для каждого невырожденного подпространства U четной размерности m из V определяется также знак $\upsilon = \mathrm{sign}(U)$ [17, гл. 2]. Положим

$$D(U) = D_m^\upsilon(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } \upsilon = + \text{ и } (q-1)m/4 \text{ четно или } \upsilon = - \text{ и } (q-1)m/4 \text{ нечетно}, \\ -1 & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Важную роль в рассуждениях будет играть функция ψ, введенная в [6]. Напомним ее определение. Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i, с конечным числом ненулевых компонент. Введем на $\mathcal{M}$ естественный частичный порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, \dots)$ из $\mathcal{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Через ψ обозначаем функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность

$(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \ldots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

Лемма 1. *Пусть $G = PGL_2(q)$, где $q = p^f \geq 5$ и p — нечетное простое число. Тогда максимальные подгруппы группы G, которые не содержат $Soc(G)$, представлены в следующем списке*:

(1) $(C_p)^f \leftthreetimes C_{q-1}$;

(2) $D_{2(q-1)}$, *где* $q \neq 5$;

(3) $D_{2(q+1)}$;

(4) S_4, *где* $q = p \equiv \pm 3 \pmod 8$;

(5) $PGL_2(q_0)$, *где* $q = q_0^r$ *и* r — *нечетное простое число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует, например, из [14, табл. 8.7]. См. также [15, теорема 3.5].

Лемма 2. *Пусть $q > 1$ и n — натуральные числа, r — нечетное простое число такое, что $(q, r) = 1$. Пусть $e = e(q, r)$ — наименьшее натуральное число такое, что $q^e \equiv 1 \pmod r$. Справедливы следующие утверждения*:

(1) $(n!)_r = r^\alpha$, *где* $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{\infty}[n/r^i]$;

(2) $\prod\limits_{i=1}^{n}(q^i - 1)_r = (q^e - 1)_r^{[n/e]}([n/e]!)_r$;

(3) $\prod\limits_{i=1}^{n}(q^i - 1)_r = (n!)_r$ *тогда и только тогда, когда* $e = r - 1$, $(q^{r-1} - 1)_r = r$ *и* $[n/r] = [n/(r-1)]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения (1) и (2) хорошо известны (см, например, [21, лемма 2; 20, лемма 2.6]). Докажем (3). Заметим сначала, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$[[x]/m] = [x/m]. \tag{2.1}$$

Действительно, так как $[x] \leq x$, левая часть равенства (2.1) не превосходит его правой части. Допустим, что левая часть строго меньше. Тогда $[x]/m < [x/m]$, откуда получаем $[x] < m[x/m]$ и $x < m[x/m] \leq m \cdot (x/m) = x$; противоречие.

Пусть $A = \prod\limits_{i=1}^{n}(q^i - 1)_r$. Тогда по утв. (2) и согласно малой теореме Ферма

$$A = (q^e - 1)_r^{[n/e]}([n/e]!)_r \geq r^{[n/e]}([n/e]!)_r \geq r^{[n/(r-1)]}([n/(r-1)]!)_r \geq r^{[n/r]}([n/r]!)_r = r^\beta, \tag{2.2}$$

где с учетом (1) и равенства (2.1) для $x = n/r$ и $m = r^i$

$$\beta = [n/r] + \sum_{i=1}^{\infty}\left[[n/r]/r^i\right] = [n/r] + \sum_{i=1}^{\infty}\left[n/r^{i+1}\right] = \sum_{i=1}^{\infty}\left[n/r^i\right] = \log_r(n!)_r.$$

Поэтому $A \geq (n!)_r$, причем неравенство строгое тогда и только тогда, когда строгим является хотя бы одно из неравенств в цепочке (2.2) или, эквивалентно, тогда и только тогда, когда строгим является хотя бы одно из неравенств $r - 1 \geq e$, $(q^e - 1)_r \geq r$ или $[n/(r-1)] \geq [n/r]$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Используя классификацию конечных простых групп, для каждой известной простой группы S мы либо с помощью предложения 1 покажем, что $S \notin \mathfrak{A}(2')$, либо построим группу $G \in \mathfrak{V}(2')$ такую, что $S = Soc(G)$.

1. Пусть S изоморфна одной из 26 спорадических групп или группе Титса ${}^2F_4(2)'$. Ввиду [13] если $S \in \{J_1, M_{23}\}$, то все максимальные подгруппы нечетных индексов холловы в S. Если $S \notin \{J_1, M_{23}\}$, то в S есть максимальная подгруппа нечетного индекса X, не являющаяся холловой, класс сопряженности которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

2. Пусть $S \cong A_n$ при $n \geq 5$. Ввиду [13] группа $A_6 \cong PSL_2(9)$, принадлежащая списку из утв. (i) теоремы, содержит максимальную подгруппу, изоморфную S_4 и не являющуюся холловой. Однако все максимальные подгруппы нечетных индексов группы $\mathrm{Aut}(A_6)$ изоморфны ее силовским 2-подгруппам, следовательно холловы. Для группы $A_6 \cong PSL_2(9)$, тем самым, имеет место утв. (ii). Далее будем считать, что $n \neq 6$ и, следовательно, $\mathrm{Aut}(A_n) = S_n$. Поскольку $A_8 \cong PSL_4(2)$, положим $n \neq 8$, а группу A_8 рассмотрим в п. 3.3.3.

2.1. Пусть $n = 2^w + 1$ и X — максимальная подгруппа нечетного индекса в S. Тогда ввиду основного результата [7] имеем $X \cong (S_m \times S_{n-m}) \cap A_n$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$. Отсюда $m \in \{1, n-1\}$ и $|S : X| = n$. Рассуждая, как в [9, предложение 3], показываем, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Теперь заметим, что если n — простое число, то n не делит порядок X, и, следовательно, X — холлова подгруппа в S. Если n не является простым числом, то подгруппа X не холлова, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

2.2. Предположим, что n не является ни числом вида $2^w + 1$, ни степенью числа 2. Пусть m — наибольшее число такое, что $\psi(n) \geq \psi(m)$ и $m < n/2$, если $n \neq 7$; и пусть $m = 5$, если $n = 7$. Тогда $1 < m \neq n/2$. Рассмотрим подгруппу $X = K \cap S$, где $S_n > K \cong S_m \times S_{n-m}$. Рассуждая, как в [9, предложение 3], показываем, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [7] подгруппа X является максимальной подгруппой нечетного индекса в S. Легко понять, что подгруппа X неразрешима и ввиду [21] не является холловой подгруппой в S. Поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

2.3. Пусть $n = 2^w > 8$. Рассмотрим в S подгруппу $X = K \cap S$, где $S_n > K \cong S_{n/2} \wr S_2$. Заметим, что $X = N_S(X_1)$, где $X_1 \cong (S_{n/2} \times S_{n/2}) \cap A_n$, и класс сопряженности подгруппы X_1 в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Отсюда класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Легко понять, что при $n > 8$ подгруппа X неразрешима и ввиду [21] не является холловой подгруппой в S. Ввиду основного результата [7] подгруппа X является максимальной подгруппой нечетного индекса в S. Поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения.

3. Пусть $S \cong PSL_n(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$.

3.1. Рассмотрим случай $n = 2$.

3.1.1. Пусть $p = 2$. Заметим, что группа S изоморфна группе из п. (1) утв. (i) теоремы. Следовательно, мы должны показать, что в рассматриваемом случае выполнено утв. (ii). Ввиду [18] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S, то H — параболическая максимальная подгруппа в S. Ввиду [14, табл. 8.1] имеем $H \cong C_p^l \rtimes C_{q-1}$; легко понять, что H — холлова подгруппа в S. Таким образом, имеет место утв. (ii), в котором $G = S$.

3.1.2. Пусть p нечетно и $l > 1$ — степень двойки. Случай $PSL_2(9) \cong A_6$ рассмотрен в п. 2. Группа S принадлежит списку из утв. (i) теоремы. Покажем, что в качестве G в утв. (ii) можно взять группу $PGL_2(q)$. Заметим, что $q \equiv 1 \pmod 4$. Поэтому ввиду леммы 1 если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в группе $G = PGL_2(q)$, то $H \cong D_{2(q-1)}$. Очевидно, что H — холлова подгруппа в S.

3.1.3. Пусть p нечетно, $l > 1$ не является степенью двойки и r — нечетный простой делитель числа l. Рассмотрим подгруппу $X = N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S. Ввиду [14, табл. 8.1] подгруппа X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [18] индекс

$|S : X|$ нечетен. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.1.4. Пусть $p \equiv \pm 3 \pmod 8$ и $l = 1$. Рассмотрим подгруппу $X = N_S(P)$, где P — силовская 2-подгруппа группы S. Ввиду [3, следствие] имеем $X \cong A_4$. Заметим, что класс сопряженности подгруппы X в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и индекс $|S : X|$ нечетен. Рассмотрим все возможные остатки числа p по модулю 72. Простота p влечет, что эти остатки не кратны 3.

Если $p \equiv 5, 11, 13, 29, 43, 59, 61, 67 \pmod{72}$, т. е. S — группа из п. (2) утв. (i) теоремы, то рассмотрим группу $G = PGL_2(p)$. Если H — максимальная подгруппа в G, то лемма 1 влечет, что H изоморфна одной из следующих групп: $PSL_2(p)$, $C_p \leftthreetimes C_{p-1}$, $D_{2(p-1)}$ (если $p \neq 5$), $D_{2(p+1)}$ или S_4. Легко понять, что если индекс $|G : H|$ нечетен, то H — холлова подгруппа в G ввиду ограничений на p.

Если $p \equiv 19, 35, 37, 53 \pmod{72}$, то порядок X и индекс $|S : X|$ делятся на 3. Кроме того, ввиду [14, табл. 8.7] либо X — максимальная подгруппа в S, либо $X < Y \cong A_5 < S$ и снова порядок Y и индекс $|S : Y|$ делятся на 3. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.1.5. Пусть $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и $l = 1$, и поэтому S — группа из п. (2) утв. (i) теоремы. По лемме 1 если H — максимальная подгруппа группы $G = PGL_2(p)$, то H изоморфна одной из следующих групп: $PSL_2(p)$, $C_p \leftthreetimes C_{p-1}$, $D_{2(p-1)}$ или $D_{2(p+1)}$. Легко понять, что если индекс $|G : H|$ нечетен, то H — холлова подгруппа в G.

3.2. Пусть q нечетно и $n \geq 3$.

3.2.1. Пусть либо n не является ни степенью числа 2, ни простым числом Ферма, либо n — простое число Ферма вида $2^w + 1$, делящее $q - 1$. Пусть m — наибольшее число такое, что $\psi(n) \geq \psi(m)$ и $m < n/2$, если $n \neq 7$, и пусть $m = 2$, если $n = 7$. Тогда $1 < m < n/2$ или n — простое число Ферма и $m = 1$. Рассмотрим стабилизатор X в S разложения $V = V_1 \oplus V_2$ в прямую сумму подпространств V_1 и V_2, где $\dim V_1 = m$ и $\dim V_2 = n - m$. Ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.1.4] класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [8, предложение 1] подгруппа X является подгруппой нечетного индекса в S. Поскольку числа 2, 3 и p делят порядок X, из [12, теорема 1.2] следует, что любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$, не является холловой в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.2.2. Пусть n — простое число Ферма вида $2^w + 1$, не делящее $q - 1$. Из [8] заключаем, что любая подгруппа нечетного индекса в S является либо стабилизатором подпространства размерности 1 или $n - 1$, либо стабилизатором разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств V_i размерности 1, либо совпадает с $N_S(C_S(\sigma))$, где σ — полевой автоморфизм простого порядка r группы S. Если S допускает полевой автоморфизм σ нечетного простого порядка, то $X = N_S(C_S(\sigma))$ — не холлова максимальная подгруппа, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Поэтому считаем, что $q = p^l$, где $l = 2^u$.

Ввиду того что n не делит $q - 1$, стабилизатор в S подпространства размерности 1 или $n - 1$ является холловой подгруппой в S [12, теорема 1.2].

Рассмотрим в качестве X стабилизатор разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств V_i размерности 1. Ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.5.3; 14, табл. 8.3, 8.18] подгруппа X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности которой в S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Подгруппа X имеет нечетный индекс в S в том и только в том случае, когда $q - 1$ делится на 4 (см. [8]). Согласно [20, лемма 4.3] (см. также [1, теорема 8.2]) и с учетом [12, теорема 1.2] подгруппа X холлова в S тогда и только тогда, когда p не делит $|X|$ (эквивалентно, $p > n$), $q \equiv 1 \pmod{12}$ при $n > 3$, и для любого нечетного простого делителя r порядка группы S_n либо r делит $q - 1$, либо $|S_n|_r = |S|_r$. Заметим, что последнее равенство должно, в частности, выполняться при $r = n$, поскольку мы считаем, что n не делит $q - 1$. Допустим, что $u \geq 1$. Тогда в соответствии с малой теоремой Ферма числа $q^{n-1} - 1$ и

$$q^{(n-1)/2} - 1 = p^{2^u \cdot 2^{w-1}} - 1 = p^{2^{u-1} \cdot 2^w} - 1 = (p^{2^{u-1}})^{n-1} - 1$$

делятся на n и $|S|_n \geq n^2 > n = |S_n|_n$; противоречие. Следовательно, $q = p$ — простое число. Далее, по лемме 2(3) равенство $|S_n|_r = |S|_r$ для простого нечетного числа r эквивалентно условию $[n/r] = [n/(r-1)]$, $(p^{r-1}-1)_r = r$ и $r-1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p^i \equiv 1 \pmod r\}$. Наконец, остается заметить, что если для $r = 3$ выполнено условие $[n/3] = [n/r] = [n/(r-1)] = [n/2]$, то $n \leq 3$. Поэтому при $n > 3$ не выполнено условие $[n/r] = [n/(r-1)]$ при $r = 3$, и холловость подгруппы X эквивалентна тому, что $q \equiv 1 \pmod 4$ и для любого простого числа $r \leq n$ либо r делит $q-1$, либо $[n/r] = [n/(r-1)]$, $(p^{r-1}-1)_r = r$ и $r-1 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid p^i \equiv 1 \pmod r\}$.

Таким образом, либо S — группа из п. (5) в утв. (i) теоремы, либо в S есть $\mathrm{Aut}(S)$ — инвариантный класс сопряженности максимальных нехолловых подгрупп нечетного индекса и $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

3.2.3. Пусть $n = 2^w \geq 4$. Пусть X — стабилизатор в S разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму подпространств V_i размерности 2. Из доказательства [6, теорема 7] следует, что индекс $|S : X|$ нечетен. Ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.2.9; 14, табл. 8.4, 8.44] класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и X является максимальной подгруппой в S, если $(n, q) \neq (4, 3)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$, не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

3.3. Пусть $p = 2$ и $n \geq 3$.

3.3.1. Пусть $n = 3$ и l четно. Тогда $(q-1, n) = 3$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 2$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

3.3.2. Пусть $n = 3$ и l нечетно, т. е. S — группа из п. (3) утв. (i) теоремы. Тогда $(q-1, 3) = 1$. Ввиду [18; 4, § 2] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S, то H — стабилизатор в S подпространства размерности 1 или 2 пространства V. Ввиду [12, теорема 12.2] имеем, что H — холлова подгруппа в S и выполнено утв. (ii).

3.3.3. Пусть $n = 4$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 3$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X удовлетворяет условиям предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

3.3.4. Пусть $n = 5$. Если l делится на 4, то $(q-1, n) = 5$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 1$ и $\dim V_2 = 4$. Это параболическая подгруппа в S, класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ ввиду [17, табл. 3.5.A, предложение 4.1.22; 4, § 2]. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Собственные надгруппы подгруппы X — стабилизатор Y_1 в S подпространства V_1 и стабилизатор Y_2 в S подпространства V_2. Ввиду [12, теорема 11.2] подгруппы X, Y_1 и Y_2 не холловы в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1. Пусть l не делится на 4 и, следовательно, S — группа из п. (4) утв. (i) теоремы. Тогда $(q-1, 5) = 1$. Ввиду [18; 2, § 2] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S, то H — стабилизатор в S подпространства размерности m пространства V, где $1 \leq m \leq 4$. Ввиду [12, теоремы 11.2, 12.2] имеем, что H — холлова подгруппа в S. Таким образом, имеет место утв. (ii), в котором $G = S$.

3.3.5. Пусть $n \geq 6$. Пусть X — стабилизатор в S пары подпространств V_1 и V_2 из V, где $V_1 < V_2$, $\dim V_1 = 2$ и $\dim V_2 = n-2$. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

4. Пусть $S \cong PSU_n(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 3$ и $(n, q) \neq (3, 2)$.

4.1. Пусть $p = 2$. Пусть X — стабилизатор в S вполне изотропного подпространства U размерности 1 из V. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 6], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

4.2. Пусть p нечетно и n не является степенью числа 2. Тогда существует натуральное число m такое, что $1 \leq m \leq n-1$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$. Пусть X — стабилизатор в S невырожденного подпространства U размерности m из V. Ввиду [6, теорема 3] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.B, предложение 4.1.4; 14, табл. 8.5, 8.20, 8.26, 8.37, 8.56, 8.62, 8.72, 8.78] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

4.3. Пусть p нечетно и $n \geq 4$ является степенью числа 2. Пусть X — стабилизатор в S ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму $n/2$ изометричных подпространств V_i размерности 2. Ввиду [6, теорема 8] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.B, предложение 4.2.; 14, табл. 8.10, 8.46] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

5. Пусть $S \cong PSp_{2n}(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 2$ и $(n, q) \neq (2, 2)$.

5.1. Пусть $(n, p) = (2, 2)$. Заметим, что группа S изоморфна группе из п. (6) утв. (i) теоремы. Следовательно, мы должны показать, что в рассматриваемом случае выполнено утв. (ii). Рассмотрим группу G такую, что $S \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(S)$ и $G/S \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{Out}(S))$. Ввиду [18] если H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G, то $X = S \cap H$ является параболической подгруппой в S. Ввиду [4, § 2; 14, табл. 8.14] подгруппа X является нормализатором в G подгруппы Бореля из S. Легко понять, что $H = N_G(X)$, $G = SH$ и $|G : H| = |S : X|$. Из [1, теорема 8.4] следует, что подгруппа X холлова в S, кроме того, индекс $|G : S|$ является степенью числа 2. Значит, H — холлова подгруппа в G.

5.2. Пусть $p = 2$ и $n > 2$. Пусть X — стабилизатор в S вполне изотропного подпространства U размерности 2 из V. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 7], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

5.3. Пусть p нечетно. Пусть X — стабилизатор в S ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму n изометричных подпространств V_i размерности 2. Ввиду [6, теорема 9] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.C, предложение 4.2.10; 14, табл. 8.12, 8.28, 8.48, 8.64, 8.80] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Заметим, что числа 2, 3 и p делят порядок X, поэтому ввиду [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

6. Пусть $S \cong P\Omega_{2n+1}(q)$, где $n \geq 3$ и q нечетно. Пусть X — стабилизатор в S невырожденного подпространства U размерности $2n$ из V такого, что $D(U) = 1$. Ввиду [6, теорема 5] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.D, предложение 4.1.6; 14, табл. 8.39, 8.58, 8.74] следует, что X является максимальной подгруппой в S, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. По [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

7. Пусть $S \cong P\Omega^{\varepsilon}_{2n}(q)$, где $q = p^l$, p — простое число, $n \geq 4$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$.

7.1. Пусть q четно. Выберем подгруппу X так же, как и в доказательствах [9, предложения 9, 10]. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 5], показываем, что подгруппа X находится в условиях предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

7.2. Пусть q нечетно и $D(V) = -1$. Рассмотрим подгруппу X — стабилизатор в S невырожденного подпространства U размерности 2 из V такого, что $D(U) = -1$. Ввиду [6, теорема 6] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [17, табл. 3.5.(E,F), предложение 4.1.6] следует, что класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ и числа 2, 3 и p делят $|X|$. По [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$ не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

7.3. Пусть q нечетно и $D(V) = 1$. Тогда либо $\varepsilon = +$ и $n(q-1)/4$ четно, либо $\varepsilon = -$ и $n(q-1)/4$ нечетно.

Если $n \equiv 2 \pmod 4$, то рассмотрим стабилизатор X двумерного подпространства U такого, что $D(U) = 1$ (знак подбирается). Класс сопряженности X^S этой подгруппы $\mathrm{Aut}(S)$-инвариантен [17, табл. 3.5.(E,F), предложение 4.1.6], ее порядок делится на 2, 3 и p, а индекс нечетен [6, теорема 11]. По [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$, не холлова в S.

Если $n \equiv 0 \pmod 4$, то $\varepsilon = +$. Рассмотрим в качестве X стабилизатор ортогонального разложения пространства V в сумму изометричных подпространств V_i размерности 4 и знака $+$. Заметим, что $D(V_i) = 1$. Это максимальная в S подгруппа, класс сопряженности X^S которой $\mathrm{Aut}(S)$-инвариантен [17, табл. 3.5.E, предложение 4.2.11; 14, табл. 8.50], ее порядок делится на 2, 3 и p, а индекс нечетен [6, теорема 11]. По [12, теорема 1.2] X не является холловой.

Таким образом, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

8. Пусть $S \in \{E_8(q), E_7(q), F_4(q), {}^2E_6(q^2), {}^3D_4(q^3), {}^2F_4(2^{2n+1}), G_2(2^w), {}^2G_2(3^{2n+1})\}$.

8.1. Пусть q четно. Рассмотрим в S параболическую подгруппу X, как указано в [9, предложения 11, 13, 14]. Класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$ (см. [2, III]). Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. По [12, теорема 1.2] любая подгруппа Y такая, что $X \leq Y < S$, не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

8.2. Пусть q нечетно. Ввиду [18] в S найдется подгруппа X, индекс которой нечетен, а порядок делится на числа 2, 3 и p, откуда по [12, теорема 1.2] имеем, что подгруппа X не холлова в S. Из замечания после основной теоремы в [18] следует, что класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

9. Пусть $S \cong E_6(q)$.

9.1. Пусть q четно. Рассмотрим в S параболическую максимальную подгруппу X, как указано в [9, предложение 12]. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Как и в доказательстве [9, предложение 12], показываем, что подгруппа X удовлетворяет условиям предложения 1, поэтому $S \notin \mathfrak{A}(2')$.

9.2. Пусть q нечетно. Рассмотрим подгруппу $X \cong N_S(2 \cdot P\Omega_8^+(q))$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. Из [19, табл. 10.2] следует, что класс сопряженности X^S инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Из [12, теорема 1.2] следует, что в S нет холловых подгрупп, порядки которых делятся одновременно на 2, 3 и p. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

10. Пусть $S = G_2(q)$, где q нечетно. Рассмотрим в S подгруппу $X \cong 2^{\cdot}(PSL_2(q) \times PSL_2(q))$, являющуюся централизатором инволюции в S. Ввиду [14, табл. 8.41, 8.42] X является максимальной подгруппой, класс сопряженности X^S которой инвариантен относительно $\mathrm{Aut}(S)$. Ввиду [18] индекс $|S : X|$ нечетен. По [12, теорема 1.2] подгруппа X не холлова в S. Значит, $S \notin \mathfrak{A}(2')$ ввиду предложения 1.

11. Пусть $S = {}^2B_2(q)$, где $q = 2^l$ и $l > 1$ нечетно. Заметим, что группа S изоморфна группе из п. (7) утв. (i) теоремы. Следовательно, мы должны показать, что в рассматриваемом случае выполнено утв. (ii). Пусть H — максимальная подгруппа нечетного индекса в S. Тогда ввиду [18] H — подгруппа Бореля группы S, имеющая порядок $q(q-1)$ и индекс q^2+1. Легко понять, что H — холлова подгруппа в S. Таким образом, имеет место утв. (ii), в котором $G = S$.

Теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность А.А. Бутурлакину и А.С. Кондратьеву за полезные консультации, а также и анонимному рецензенту за замечания, позволившие улучшить первоначальный текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
2. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 310 с.
3. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
4. **Кондратьев А.С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
5. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.
6. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.

7. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 182–184.
8. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым линейным, унитарным или симплектическим цоколем // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 189–208.
9. **Маслова Н.В.** Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.
10. **Маслова Н.В., Ревин Д.О.** Конечные группы, все максимальные подгруппы которых холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.
11. **Монахов В.С.** Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.
12. **Ревин Д.О.** Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 160–208.
13. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
14. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p.
15. **Giudici M.** Maximal subgroups of almost simple groups with socle $PSL(2,q)$ [e-resource]. 2007. 11 c. URL: http://arxiv.org/pdf/math.GR/0703685.pdf.
16. **Hall P.** Theorems like Sylow's // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1956. Vol. 6, no. 22, P. 286–304.
17. **Kleidman P., Liebeck M.,** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
18. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc (2). 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
19. **Oshima T.** A classification of subsystems of a root system [e-resource]. 2007. 47 p. URL: http://arxiv.org/pdf/math/0611904v4.pdf.
20. **Revin D.O., Vdovin E.P.** On the number of classes of conjugate Hall subgroups in finite simple groups // J. Algebra. 2010. Vol. 324. P. 3614–3652.
21. **Thompson J.G.** Hall subgroups of the symmetric groups // J. Comb. Theory. 1966. Vol. 1. P. 271–279.

Маслова Наталья Владимировна
канд. физ.-мат. наук
старший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 17.05.2016

Ревин Данила Олегович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
профессор
Новосибирский государственный университет
e-mail: revin@math.nsc.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.5

НАДГРУППЫ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЯМИ[1]

Я. Н. Нужин

Описаны подгруппы группы лиева типа над полем, содержащие ее максимальную унипотентную подгруппу. Полученные результаты похожи на описание параболических подгрупп групп с (B,N)-парой, данное Ж.Титсом.

Ключевые слова: Группа лиева типа над полем, унипотентная подгруппа, параболическая подгруппа.

Ya. N. Nuzhin. Overgroups of unipotent subgroups of groups of Lie type over fields.

We describe the subgroups of a group of Lie type over a field containing its maximal unipotent subgroup. The results are similar to the description of parabolic subgroups of groups with (B,N)-pair given by J. Tits.

Keywords: group of Lie type over a field, unipotent subgroup, parabolic subgroup.

MSC: 20G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-188-191

1. Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $\Pi = \{r_1, \ldots, r_l\}$ — множество ее фундаментальных корней, Φ^+ — множество положительных корней относительно Π. Далее $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа Φ ранга l над полем F. Группа $\Phi(F)$ порождается корневыми подгруппами $X_r = \{x_r(t) \mid t \in F\}$, $r \in \Phi$, где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент из $\Phi(F)$. Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы $\Phi(F)$: унипотентная подгруппа $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$, мономиальная подгруппа $N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in F^*\rangle$, диагональная подгруппа $H = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in F^*\rangle$ и борелевская подгруппа $B = UH$. Здесь $\langle M\rangle$— подгруппа, порожденная подмножеством M некоторой группы, F^* — мультипликативная группа поля F и $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$, $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$. Положим также $n_r = n_r(1)$, $I = \{1, 2, \ldots, l\}$.

Аналоги подгрупп X_r, U, N, H, B и множеств Φ, Φ^+, Π, I для групп Шевалле $\Phi(F)$ (нормального типа) существуют и для скрученных групп Шевалле ${}^n\Phi(F)$. Совокупность всех групп $\Phi(F)$ и ${}^n\Phi(F)$ обычно называют группами лиева типа. Далее $G(F)$ — группа лиева типа над полем F, где $G \in \{\Phi,\ {}^n\Phi\}$, n — порядок скручивающего автоморфизма.

Надгруппы борелевской подгруппы B и сопряженные с ними подгруппы называются параболическими подгруппами группы $G(F)$. В силу известного результата Ж. Титса [1] параболические подгруппы, содержащие подгруппу B, исчерпываются подгруппами $P_J = \langle B, n_{r_j} \mid j \in J\rangle$, $J \subseteq I$. В данной работе этот результат обобщается, а именно описываются надгруппы унипотентной подгруппы U. Для любого $J \subseteq I$ положим $Q_J = \langle U, n_{r_j} \mid j \in J\rangle$ и через Φ_J обозначим подсистему корней с базой $\{r_i \mid i \in J\}$. Основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть M — подгруппа группы лиева типа $G(F)$ над полем F, содержащая ее унипотентную подгруппу U. Тогда для некоторого подмножества $J \subseteq I$ и подходящей подгруппы H_M из H, нормализуемой всеми элементами n_{r_j}, $j \in J$, подгруппа M совпадает с произведением $Q_J H_M$, причем $Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J\rangle$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707).

Конечно, для групп лиева типа ранга 1 теорема легко следует из разложения Брюа $G(F) = UNU$. Также только с использованием этого разложения аналогичный результат получен в [2] для групп Шевалле ранга 2. В общем случае доказательство теоремы существенно опирается на один тонкий результат о группах с (B, N)-парой из [1] (см. доказательство леммы 2). Для группы Шевалле типа A_l утверждение теоремы следует из результатов статьи Д. А. Супруненко [3], в которой описаны надгруппы унитреугольной подгруппы общей линейной группы над произвольным телом. Отметим также, что в работе Г. Зейца [4] доказывается принадлежащая Ж. Титсу лемма (1.6), из которой следует такое утверждение: если поле F конечно и $U \leq M < G(F)$, то M содержится в параболической максимальной подгруппе из $G(F)$.

2. Предварительные результаты

Все обозначения и определения, указанные во введении, используются и далее. Через $N^{\pm}$ обозначим подгруппу, порожденную мономиальными элементами n_r, $r \in \Phi$, а через $H^{\pm}$ — подгруппу, порожденную диагональными элементами $h_r(-1) = n_r^2$, $r \in \Phi$. Ясно, что $N = HN^{\pm} = N^{\pm}H$. Следующие равенства обычно называются разложениями Брюа:

$$\Phi(F) = BNB = UNU = UHN^{\pm}U = UN^{\pm}HU.$$

Таким образом, любой элемент $g \in \Phi(F)$ представляется в виде

$$g = u_1 n h u_2, \quad \text{где} \quad u_1, u_2 \in U, \quad n \in N^{\pm}, \quad h \in H.$$

Фактор-группы N/H и $N^{\pm}/H^{\pm}$ изоморфны группе Вейля W типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_{r_i}, $i \in I$. Положим

$$w_{r_i} = w_i.$$

Для любого подмножества $J \subseteq I$ через Φ_J обозначим подсистему корней с базой $\{r_i \mid i \in J\}$, а через W_J — подгруппу группы Вейля W, порожденную элементами w_i, $i \in J$. Ясно, что W_J — группа Вейля системы корней Φ_J.

Лемма 1 [5, теорема 2.5.6(i)]. *Пусть $J, K \subseteq I$. Тогда $\langle W_J, W_K \rangle = W_{J \cup K}$.*

Далее $l(w)$ — длина элемента $w \in W$, т. е. длина минимального представления w через порождающие элементы w_i, $i \in I$.

Лемма 2. *Пусть $w \in W$ является образом элемента $n \in N$ при естественном гомоморфизме N на W, $l(w) = k$,*

$$w = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k} \quad \textit{для} \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in I,$$

$$n = n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k}, \quad \textit{где } n_{i_j} \textit{ — прообраз в } N \textit{ элемента } w_{i_j}.$$

Тогда $h_{i_1} n_{i_1}, h_{i_2} n_{i_2}, \dots, h_{i_k} n_{i_k} \in \langle U, n \rangle$ для некоторых $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \in H$.

Доказательство. Каждый элемент n_{i_j} равен hn_r для подходящего фундаментального корня $r \in \Pi$ и некоторого диагонального элемента $h \in H$.

В [1] доказано, что $n_{i_j} \in \langle UH, n \rangle$ (см. также [5, с. 112] или [6, лемма 4.4.1]). Поэтому $n_{i_j} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$, где α_i есть либо n, либо n^{-1}, либо $u_i h_i$ для некоторых $u_i \in U$, $h_i \in H$. Так как H нормализует U, а N нормализует H, то $n_{i_j} = h_{i_j}^{-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$, где β_i есть либо n, либо n^{-1}, либо v_i для некоторых $v_i \in U$ и подходящего $h_{i_j} \in H$. Поэтому $h_{i_j} n_{i_j} \in \langle U, n \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть Π — база системы корней Φ. Тогда группа Шевалле $\Phi(F)$ над полем F порождается корневыми подгруппами X_r, $r \in \Pi \cup -\Pi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L = \langle X_r \mid r \in \Pi \cup -\Pi\rangle$. Тогда подгруппа $\langle n_r \mid r \in \Pi\rangle$ лежит в L и совпадает с $N^{\pm}$, так как фактор-группа $N^{\pm}/H^{\pm}$ изоморфна группе Вейля W типа Φ, которая порождается фундаментальными отражениями w_r, $r \in \Pi$. Группа $N^{\pm}$ действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах, индексированных корнями одинаковой длины, по правилу

$$n_w X_r n_w^{-1} = X_{w(r)},$$

где n_w — прообраз элемента w группы Вейля W при гомоморфизме $N^{\pm}$ на W. Таким образом, L содержит все корневые подгруппы X_r и, следовательно, совпадает со всей группой Шевалле $\Phi(F)$. Лемма доказана.

Следующая лемма уточняет строение подгруппы Q_J из формулировки основной теоремы.

Лемма 4. *Пусть* $J \subseteq I$, $Q_J = \langle U, n_{r_j} \mid j \in J\rangle$, $U_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \setminus \Phi_J\rangle$, $L_J = \langle X_r \mid r \in \Phi_J\rangle$. *Тогда:* 1) $Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J\rangle$ *и, в частности, подгруппа* Q_J *инвариантна относительно любой диагональной подгруппы из* $\Phi(F)$; 2) U_J — *нормальная подгруппа в* Q_J; 3) $Q_J = U_J L_J$ *и* $U_J \cap L_J = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как $n_{r_j} = x_{r_j}(1)x_{-r_j}(-1)x_{r_j}(1)$ лежит в $\langle X_{r_j}, X_{-r_j}\rangle$, то $Q \subseteq \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J\rangle$. Обратное включение следует из равенства $n_r X_r n_r^{-1} = X_{-r}$ и леммы 3.

Пункты 2) и 3) являются аналогами разложения Леви для параболических подгрупп и следуют из этого разложения (см., например, [5, теорема 8.5.2]). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Аналоги лемм 2–4 справедливы и для скрученных групп Шевалле. Различия возникают только для типов ${}^2A_{2l}$ и ${}^2F_4$ и лишь с представлением аналогов мономиальных элементов $n_{r_j} = x_{r_j}(1)x_{-r_j}(-1)x_{r_j}(1)$ через унипотентные элементы.

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве леммы 2 используются только один результат о группах с (B, N)-парой, нормальность U в B и нормальность H в N. Поэтому лемма 2 справедлива для любой группы с расщепимой (B, N)-парой, т. е. когда $B = (B \cap N)U$, где U — нормальная нильпотентная подгруппа из B.

3. Доказательство теоремы

Выкладки проведем только для групп Шевалле нормального типа, для скрученных групп доказательство подобно.

Пусть M — подгруппа группы Шевалле $\Phi(F)$ над полем F, содержащая унипотентную подгруппу U. Возьмем произвольный элемент g из M. В силу канонического разложения имеем $g = unv$, где $u, v \in U$, $n \in N$. Поэтому $n \in M$. Пусть n — прообраз элемента w группы Вейля W, причем $l(w) = k$ и

$$w = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}, \quad i_1, i_2, \dots, i_k \in I.$$

Тогда для некоторого $h_g \in H$ получаем

$$n = h_g n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_k}, \quad \text{где} \;\; n_m = n_{r_m} = x_{r_m}(1)x_{-r_m}(-1)x_{r_m}(1).$$

Отсюда $h_{i_1}n_{i_1}, h_{i_2}n_{i_2}, \dots, h_{i_k}n_{i_k} \in M$ для некоторых $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k} \in H$ по лемме 2. Так как $hn_rX_rn_r^{-1}h^{-1} = X_{-r}$, то все $n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_k}$ лежат в M и, следовательно, $h_g \in M$. Таким образом, все сомножители элемента n лежат в группе M. Пусть

$$J_g = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}.$$

Тогда $\langle U, g\rangle = \langle Q_{J_g},\ h_g\rangle$, где $Q_{J_g} = \langle U,\ n_{r_j} \mid j \in J_g\rangle$. Ясно, что $M = \langle Q_{J_g},\ h_g \mid g \in M\rangle$. Положим

$$J = \bigcup_{g \in M} J_g, \quad Q_J = \langle U,\ n_{r_j} \mid j \in J\rangle.$$

В силу лемм 1, 3 и 4 и естественного гомоморфизма N на H имеем

$$\langle Q_{J_g}, \mid g \in M\rangle = Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J\rangle.$$

Подгруппа Q_J инвариантна относительно любой диагональной подгруппы. Пусть

$$H_M = \langle h_g,\ n_{r_j} h_g n_{r_j}^{-1} \mid g \in M,\ j \in J\rangle.$$

Тогда $M = \langle Q_J,\ H_M\rangle = Q_J H_M$ и подгруппа H_M инвариантна относительно сопряжений всеми мономиальными элементами n_{r_j}, $j \in J$.

Теорема доказана.

Автор глубоко признателен А. С. Кондратьеву за полезные замечания, которые, несомненно, способствовали улучшению текста статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tits J.** Theoreme de Bruhat et sous groupes paraboliques // C.R. Acad. Sci. Paris. 1962. Vol. 254. P. 2910–2912.
2. **Нужин Я.Н., Осетрова Т.А.** О надгруппах унипотентной подгруппы группы Шевалле ранга 2 над полем // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 2. С. 56–61.
3. **Супруненко Д.А.** Подгруппы полной линейной группы над телом D, содержащие группу всех специальных треугольных матриц $U(n, D)$ // Докл. АН БССР. 1970. Т. 14, № 4. С. 305–308.
4. **Seitz G.** Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Annals Math. 1973. Vol. 97, no. 1. P. 27–56.
5. **Carter R. W.** Simple groups of Lie type. London etc.: John Wiley and Sons, 1972. 331 p.
6. **Кондратьев А. С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 310 с.

Нужин Яков Нифантьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

Поступила 22.01.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.982.272+515.122.55

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ТЕСНОТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА

А. В. Осипов

В работе исследуются различные виды тесноты для пространства непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ на тихоновском пространстве X, наделенного множественно-открытой топологией.

Ключевые слова: множественно-открытая топология, теснота, веерная теснота, сильная веерная теснота, T-теснота, множественная теснота, функциональное пространство.

A. V. Osipov. Different kinds of tightness of a functional space.

We study different kinds of tightness for the space $C(X)$ of continuous real-valued functions on a Tychonoff space X with the set-open topology.

Keywords: set-open topology, tightness, fan tightness, strong fan tightness, T-tightness, set tightness, functional space.

MSC: 54C30, 54C35, 54D65

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-192-199

Введение

На множестве непрерывных вещественнозначных функций $C(X)$ существует широкий спектр классических топологий, при которых пространство $C(X)$ является топологическим кольцом, топологической группой или топологическим векторным пространством (относительно естественных операций поточечного сложения, умножения и умножения на скаляр). Наиболее известные и широко исследуемые топологические кольца на пространстве непрерывных функций — это множество $C(X)$ с топологией поточечной сходимости (обозначаемое как $C_p(X)$) и множество $C(X)$ с компактно-открытой топологией (обозначаемое как $C_c(X)$ или как $C_k(X)$). Естественным обобщение этих топологий является множественно-открытая топология на $C(X)$. Напомним определение этой топологии. Пусть λ — некоторое семейство непустых подмножеств пространства X, тогда предбазисным множеством для λ-открытой топологии является множество вида $[A,U] := \{f \in C(X)\colon f(A) \subseteq U\}$, где $A \in \lambda$ и U — открытое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$. Топологическое пространство $C(X)$, наделенное λ-открытой топологией, будем обозначать как $C_\lambda(X)$.

Заметим, что, если семейство λ совпадает с семейством всех конечных (с семейством всех компактных) подмножеств пространства X, то λ-открытая топология совпадает с топологией поточечной сходимости (с компактно-открытой топологией) т. е. $C_\lambda(X) = C_p(X)$ ($C_\lambda(X) = C_c(X)$). Отметим, что если λ — произвольное семейство, то пространство $C_\lambda(X)$ может не быть топологическим кольцом, топологической группой, однородным и даже хаусдорфовым пространством. В работе [8] было доказано, что $C_\lambda(X)$ есть хаусдорфовое топологическое векторное пространство (топологическая группа, паратопологическая группа, топологическая алгебра) тогда и только тогда, когда семейство λ обладает следующими тремя свойствами:

(а) λ — π-сеть для пространства X (критерий хаусдорфовости $C_\lambda(X)$);

(б) λ состоит из C-компактных подмножеств пространства X (A — C-компактно в X, если $f(A)$ — компакт в $\mathbb{R}$ для любого $f \in C(X)$);

(в) $\lambda = \lambda(C)$, где $\lambda(C) = \{A \in \lambda$ для каждого C-компактного (в X) подмножества $B \subseteq A$, множество $[B,U]$ открыто в $C_\lambda(X)$ для любого открытого U в $\mathbb{R}\}$.

Обозначим через Ψ множество всех семейств λ на пространстве X, обладающих (одновременно) свойствами (а), (б) и (в). Таким образом, $C_\lambda(X)$ — хаусдорфовое топологическое векторное пространство (топологическая алгебра, топологическая группа, паратопологическая группа) тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Psi$. Заметим, что если $\lambda \in \Psi$, то, не уменьшая общности, можно полагать, что λ — π-сеть из замкнутых C-компактных подмножеств, замкнутая относительно C-компактных (в X) подмножеств своих элементов и конечных объединений.

Если семейство λ состоит из всех C-компактных подмножеств пространства X, то λ-открытую топологию будем называть *C-компактно-открытая топология*, а топологическое пространство записывать как $C_{rc}(X)$. Отметим, что для любого тихоновского пространства X пространство $C_{rc}(X)$ линейно гомеоморфно пространству $C_c(\nu X)$, где νX — хьюиттовское пополнение пространства X (см. [2]). Если $A \subseteq X$, а $f \in C(X)$, то через $f \upharpoonright A$ обозначаем сужение функции f на множество A.

1. Основные определения и обозначения

Многие топологические свойства определяются и характеризуются в терминах классических селекционных принципов. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — множества, состоящие из семейств подмножеств топологического пространства (X,τ). Напомним определения некоторых базисных селекционных принципов.

Пространство X удовлетворяет селекционному принципу $S_1^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ($X \in S_1^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$), если для каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{A}$ мы можем выбрать $B_\alpha \in A_\alpha$ такое, что $\{B_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

Пространство X удовлетворяет селекционному принципу $S_{fin}^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ($X \in S_{fin}^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$), если для каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \subset \mathcal{A}$ мы можем выбрать $B_\alpha \in [A_\alpha]^{<\omega}$ такое, что $\bigcup\{B_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \in \mathcal{B}$.

В частности, селекционные принципы $S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ и $S_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ — семейство открытых покрытий топологического пространства X, называют *свойством Менгера* и *Ротбергера* соответственно.

В этой работе мы исследуем различные виды тесноты функционального пространства $C_\lambda(X)$, применяя для этого селекционные принципы $S_1^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $S_{fin}^\kappa(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Напомним определения тесноты и различных видов тесноты для произвольного топологического пространства.

• *Теснотой топологического пространства* (X,τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любого $A \subseteq X$ и $x \in \overline{A}$ существует $B \subseteq A$ такое, что $\mid B \mid \leq \kappa$ и $x \in \overline{B}$. Эту функцию обозначают как $t(X)$.

Для топологического пространства (X,τ) и фиксированной точки $x \in X$ мы используем символ Ω_x для обозначения множества $\{A \subset X \colon x \in \overline{A} \setminus A\}$.

• *Веерной теснотой топологического пространства* (X,τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любой точки $x \in X$ и каждой трансфинитной последовательности $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ элементов семейства Ω_x существует трансфинитная последовательность $\{B_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ конечных множеств таких, что $B_\alpha \subseteq A_\alpha$ для каждого $\alpha < \kappa$, и $x \in cl(\bigcup_{\alpha<\kappa} B_\alpha)$, т. е. выполняется $S_{fin}^\kappa(\Omega_x,\Omega_x)$. Эту функцию обозначают как $vet(X)$.

• *Сильной веерной теснотой топологического пространства* (X,τ) называют наименьший бесконечный кардинал κ такой, что для любой точки $x \in X$ выполняется $S_1^\kappa(\Omega_x,\Omega_x)$. Мы будем обозначать эту функцию как $vet_1(X)$.

• *T-теснотой топологического пространства* X называют наименьший бесконечный кардинал τ такой, что, если $\{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств, где $cf(\kappa) > \tau$, то $\bigcup\{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — замкнутое множество.

Это определение было введено Юхасом в работе [5]. Так как семейство $\{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ возрастающее и $cf(\kappa)$ — регулярный кардинал, мы можем говорить, что T-теснота $T(X)$ — наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств, где κ — регулярный кардинал, больший чем τ, то $\bigcup\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — замкнутое подмножество в X.

• *Множественной теснотой* (*set-tightness*) $t_s(X)$ пространства X называют наименьший бесконечный кардинал τ такой, что если $A \subset X$ и $x \in \overline{A} \setminus A$, то существует семейство $\{A_\alpha\colon \alpha < \tau\}$ подмножеств A таких, что $x \notin \overline{A_\alpha}$ для любого $\alpha < \tau$ и $x \in \overline{\bigcup\{A_\alpha\colon \alpha < \tau\}}$.

Это понятие было впервые введено в работе [3] и называлось как квазихарактер. Термин “set-tightness” был предложен Юхасом в работе [5].

Заметим, что выполняются следующие отношения между кардинальнозначными функциями:

$t_s(X) \leq T(X) \leq t(X) \leq vet(X) \leq vet_1(X)$. (Соотношения $t_s(X) \leq T(X) \leq t(X)$ были показаны в [5].)

Если X компакт, то $t_s(X) = t(X)$ [3].

Напомним, что *нуль-множеством* называют подмножество A пространства X, если $A = f^{-1}(0)$ для некоторой $f \in C(X)$. Подмножество A пространства X называют *ко-нуль* (или *функционально открытым*) множеством, если $X \setminus A$ — нуль-множество.

Ко-нуль (функционально открытое) семейство $\mathbb{U}$ пространства X называют *λ-f-покрытием*, если X не элемент семейства $\mathbb{U}$ и для каждого $A \in \lambda$ существует $U \in \mathbb{U}$ такое, что $A \subseteq U$.

Заметим, что λ-f-покрытие множества $\bigcup \lambda$ может не быть покрытием множества X.

Через $\Lambda(\lambda)$ будем обозначать множество всех λ-f-покрытий относительно семейства λ.

Так как $C_\lambda(X)$ (при $\lambda \in \Psi$) — однородное топологическое пространство, то основные локальные свойства мы можем рассматривать для простоты в точке $\mathbf{0}$ (функции тождественно равной значению 0 на всем множестве X) и символ Ω_0 означает множество $\{A \subset C_\lambda(X)\colon \mathbf{0} \in \overline{A} \setminus A\}$.

2. Свойство тесноты

О п р е д е л е н и е. Пусть X — топологическое пространство, λ — семейство подмножеств пространства X. Определим кардинальнозначную функцию $l_\lambda(X) = \min\{|\mathcal{V}|$: для каждого $\mathcal{U} \in \Lambda(\lambda)$ существует $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ такое, что $\mathcal{V} \in \Lambda(\lambda)\}$.

Теорема 2.1. *Для любого пространства X, $\lambda \in \Psi$ выполняется $t(C_\lambda(X)) = l_\lambda(X)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. ($\Rightarrow$). Пусть $t(C_\lambda(X)) = \kappa$ и $\mathcal{U} \in \Lambda(\lambda)$.

Для каждой пары элементов K из λ and $U \in \mathcal{U}$, $K \subseteq U$ пусть $f_{K,U}$ будет непрерывная функция из X в $[0,1]$ такая, что $f_{K,U}(K) \subseteq \{0\}$ и $f_{K,U}(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Пусть $A = \{f_{K,U}\colon K \in \lambda, K \subseteq U \in \mathcal{U}\}$. Тогда $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества A. Так как $t(C_\lambda(X)) = \kappa$ существует множество $B = \{f_{K_\alpha,U_\alpha}\colon \alpha < \kappa\}$ такое, что $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества B. Мы докажем, что $\{U_\alpha\colon \alpha < \kappa\} \in \Lambda(\lambda)$. Пусть $F \in \lambda$. Так как $\mathbf{0} \in \overline{B}$, то отсюда следует, что существует $\alpha < \kappa$ такое, что $[F,(-1,1)]$ содержит функцию f_{K_α,U_α}. Тогда $F \subseteq U_\alpha$, так как иначе для некоторого $x \in F$ и $x \notin U_\alpha$ выполняется $f_{K_\alpha,U_\alpha}(x) = 1$, что противоречит $f_{K_\alpha,U_\alpha} \in [F,(-1,1)]$.

($\Leftarrow$). Пусть $l_\lambda(X) = \kappa$ и A будет подмножество $C(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$ такое, что $\mathbf{0} \in \overline{A}$.

Если $\{X\} \in \lambda$, т. е. X — псевдокомпакт, то τ_λ топология на множестве $C(X)$ совпадает с C-компактно-открытой топологией и, следовательно, $C_\lambda(X)$ — метризуемое пространство (см. [8, теорема 2.2]), а значит, $C_\lambda(X)$ есть пространство с первой аксиомой счетности. Отсюда следует, что мы можем найти последовательность $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ из A, сходящуюся равномерно к $\mathbf{0}$.

Пусть $\{X\} \notin \lambda$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $K \in \lambda$ окрестность $[K,(-1/n,1/n)]$ точки $\mathbf{0}$ пересекает A, так существует непрерывная функция $f_{K,n} \in A$ такая, что $|f_{K,n}(x)| < 1/n$ для всех

$x \in K$. Так как $f_{K,n}$ непрерывная функция, то существует ко-нуль множество $U_{K,n}$ такое, что $f_{K,n}(U_{K,n}) \subseteq (-1/n, 1/n)$.

Пусть $\mathcal{U}_n = \{U_{K,n} \colon K \in \lambda\}$. Так как для любого $K \in \lambda$, $K \neq X$ мы можем полагать, что $U_{K,n}$ не совпадает со всем X. Ясно, что $\mathcal{U}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Каждое $\mathcal{U}_n$ имеет λ-f-покрытие $\mathcal{V}_n \subseteq \mathcal{U}_n$ такое, что $\mid \mathcal{V}_n \mid \leq \kappa$. Определим множество $B = \{f_{K,n} \colon n \in \mathbb{N}, U_{K,n} \in \mathcal{V}_n\}$. Очевидно, что $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$ и $\mathbf{0} \in \overline{B}$. □

Следствие 2.1. *Пространство $C_\lambda(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда X — λ-линделёфовое пространство.*

Заметим, что если λ — семейство всех конечных подмножеств пространства X, то свойство $l_\lambda(X) = \aleph_0$ эквивалентно следующему: любая конечная степень X^n пространства X является линделёфовым пространством.

Следствие 2.2 (Архангельский — Пыткеев). *Пространство $C_p(X)$ имеет счетную тесноту тогда и только тогда, когда X^n — линделёфовое пространство для любого $n \in \mathbb{N}$.*

3. Свойства веерной и сильной веерной тесноты

Теорема 3.1. *Для любого пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $vet_1(C_\lambda(X)) = \kappa$;

(2) $C_\lambda(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$;

(3) $X \in S_1^\kappa(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Доказательство. Отметим, что утверждения (1), (2) эквивалентны по определению.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ будет трансфинитная последовательность λ-f-покрытий. Для каждой пары $K \in \lambda$ и ко-ноль множества $U \supseteq K$ пространства X пусть $f_{K,U}$ будет любое непрерывное отображение из X в $[0,1]$ такое, что $f_{K,U}(K) \subseteq \{0\}$ и $f_{K,U}(X \setminus U) \subseteq \{1\}$. Для каждого $\alpha < \kappa$ пусть $A_\alpha = \{f_{K,U} \colon K \in \lambda, K \subseteq U \in \mathcal{U}_\alpha\}$. Тогда для каждого $K \in \lambda$ существует $f_{K,U} \in A_\alpha$. Заметим, что $\mathbf{0} \in \overline{A_\alpha}$ для каждого $\alpha < \kappa$. Поскольку $C_\lambda(X) \in S_1^\kappa(\Omega_0, \Omega_0)$, существует трансфинитная последовательность $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$ такая, что для каждого α $K_\alpha \in \lambda$, $U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ и $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} \colon \alpha < \kappa\}$.

Мы докажем, что $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \in \Lambda(\lambda)$. Пусть $F \in \lambda$. Так как $\mathbf{0}$ принадлежит замыканию множества $\{f_{K_\alpha,U_\alpha} : \alpha < \kappa\}$, то отсюда следует, что существует α такое, что $[F, (-1,1)]$ содержит функцию f_{K_α,U_α}. Тогда $F \subseteq U_\alpha$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ — трансфинитная последовательность подмножеств пространства $C(X) \setminus \{\mathbf{0}\}$ таких, что $\mathbf{0} \in \bigcap_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}$.

Если $\{X\} \in \lambda$, то X — псевдокомпактное пространство и λ-открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости, т. е. $C_\lambda(X)$ — метризуемое пространство, а значит, $C_\lambda(X)$ обладает первой аксиомой счетности. Таким образом, можно найти последовательность $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$, $a_i \in A_{\alpha_i}$, сходящуюся равномерно к $\mathbf{0}$.

Пусть $\{X\} \notin \lambda$. Для биекции $i : \omega \times \kappa \mapsto \kappa$ положим $A_{n,\alpha} := A_{i(n,\alpha)}$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \kappa$ и каждого $K \in \lambda$ окрестность $[K, (-1/n, 1/n)]$ точки $\mathbf{0}$ пересекает $A_{n,\alpha}$, а значит, существует непрерывная функция $f_{K,n,\alpha} \in A_{n,\alpha}$ такая, что $|f_{K,n,\alpha}(x)| < 1/n$ для каждого $x \in K$.

Так как $f_{K,n,\alpha}$ — непрерывная функция, существует ко-нуль множество $U_{K,n,\alpha}$ такое, что $f_{K,n,\alpha}(U_{K,n,\alpha}) \subseteq (-1/n, 1/n)$. Пусть $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{U_{K,n,\alpha} : K \in \lambda\}$.

Для любого подмножества $K \in \lambda$, $K \neq X$, поэтому можно полагать, что все множества вида $U_{K,n,\alpha}$ не совпадают с X.

Заметим, что $\mathcal{U}_{n,\alpha} \in \Lambda(\lambda)$ для каждого $\alpha < \kappa$ и $n \in \mathbb{N}$. Для каждой трансфинитной последовательности $\{\mathcal{U}_{n,\alpha}\colon \alpha < \kappa\}$ с учетом условия $X \in S_1^{\kappa}(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$ существуют последовательности $\{U_{K_{n,\alpha}}\colon \alpha < \kappa\}$, где каждое $K_{n,\alpha} \in \lambda$ такие, что $\{U_{K_{n,\alpha}}\colon \alpha < \kappa\} \in \Lambda(\lambda)$.

Определим $B = \{f_{K_{n,\alpha}} : n \in \mathbb{N}, U_{K,n,\alpha} \in \{U_{K_{n,\alpha}} : \alpha < \kappa\}\}$. Очевидно, что $B \subseteq A$, $|B| \leq \kappa$, и $\mathbf{0} \in \overline{B}$. Отсюда следует, что $C_\lambda(X) \in S_1^{\kappa}(\Omega_0, \Omega_0)$. □

Следствие 3.1. *Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

1. $C_\lambda(X)$ *имеет счетную сильную веерную тесноту.*
2. $X \in S_1(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Аналогично предыдущей теореме можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Для тихоновского пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквиваленты:*

1. $vet(C_\lambda(X)) = \kappa$.
2. $C_\lambda(X) \in S_{fin}^{\kappa}(\Omega_0, \Omega_0)$.
3. $X \in S_{fin}^{\kappa}(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Следствие 3.2. *Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны*:

1. $C_\lambda(X)$ *имеет счетную веерную тесноту.*
2. $X \in S_{fin}(\Lambda(\lambda), \Lambda(\lambda))$.

Отметим, что в работе [7] был получен критерий веерной тесноты пространства $C_\lambda(X)$ в случаи, когда семейство λ — сеть из компактных подмножеств пространства X.

Критерий счетной веерной тесноты пространства $C_p(X)$ был получен А. В. Архангельским в работе [1].

Следствие 3.3 (Архангельский). *Пространство $C_p(X)$ имеет счетную веерную тесноту тогда и только тогда, когда X^n — пространство Гуревича для любого $n \in \mathbb{N}$.*

4. Свойство T-тесноты

Для характеризации T-тесноты пространства $C_\lambda(X)$ мы определим свойство $T_\lambda(\tau)$, которое будет естественным обобщением $T(X)$.

Определение. Пространство X обладает свойством $T_\lambda(\tau)$ ($X \in T_\lambda(\tau)$), если для каждого регулярного кардинала κ, большего чем τ, и каждой возрастающей последовательности $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ семейств ко-нуль подмножеств пространства X такой, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$, существует $\beta < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$.

Теорема 4.1. *Для тихоновского пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквиваленты*:

(1) $T(C_\lambda(X)) \leq \tau$;

(2) $X \in T_\lambda(\tau)$.

Доказательство. (1) ⇒ (2). Пусть $T(C_\lambda(X)) \leq \tau$. Тогда если $\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых множеств пространства $C_\lambda(X)$ и κ — регулярный кардинал, больший чем τ, то $\bigcup\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — замкнутое подмножество в $C_\lambda(X)$. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая последовательность семейств ко-нуль подмножеств пространства X такая, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$. Обозначим $\mathcal{U}_{\alpha,K} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_\alpha\colon K \subset \mathcal{U}\}$ для каждого

$\alpha < \kappa$ и $K \in \lambda$. Для каждого $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}$ пусть $f_{K,\mathcal{U}}$ будет непрерывная функция из X в $[0,1]$ такая, что $f_{K,\mathcal{U}}(K) = \{0\}$ и $f_{K,\mathcal{U}}(X \setminus \mathcal{U}) = \{1\}$. Рассмотрим множество $A_\alpha = \{f_{K,\mathcal{U}} \colon \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}\}$, $\alpha < \kappa$.

По условию (1) мы получаем, что множество $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} \overline{A_\alpha}$ — замкнутое подмножество пространства $C_\lambda(X)$.

Пусть $\langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle := \{g \in C(X) \colon |g(x)| < \varepsilon,\ x \in K\}$, где $K \in \lambda$, $\varepsilon > 0$ — стандартная базисная окрестность точки $\mathbf{0}$ в топологии равномерной сходимости на элементах семейства λ. (Заметим, что в нашем случаи, множественно-открытая топология и топология равномерной сходимости на элементах семейства λ совпадают).

Тогда существуют $\alpha < \kappa$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_\alpha$, где $K \subset \mathcal{U}$.

Тогда $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{\alpha,K}$, следовательно, по построению существует $f \in A_\alpha \cap \langle \mathbf{0}, K, \varepsilon\rangle$. Следовательно, окрестность точки $\mathbf{0}$ пересекает некоторое A_α, $\alpha < \kappa$, т. е. $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$. Отсюда следует, что существует $\beta < \kappa$ и $\mathbf{0} \in \overline{A_\beta}$.

Мы докажем, что семейство $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$.

Пусть $F \in \lambda$. Тогда окрестность $\langle \mathbf{0}, F, 1\rangle$ точки $\mathbf{0}$ пересекает A_β; пусть $f_{F,\mathcal{U}} \in A_\beta \cap \langle \mathbf{0}, F, 1\rangle$. Тогда $f_{F,\mathcal{U}}(X \setminus \mathcal{U}) = 1$ и, таким образом, $F \subset \mathcal{U} \in \mathcal{U}_\beta$. Тогда $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что для каждого регулярного кардинала κ, большего чем τ, и каждой возрастающей последовательности $\{\mathcal{U}_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ семейств ко-нуль подмножеств пространства X такой, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$, существует $\beta < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_\beta \in \Lambda(\lambda)$. Пусть κ — регулярный кардинал, больший чем τ и, $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность замкнутых подмножеств пространства $C_\lambda(X)$. Предположим, что $g \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$. Так как $C_\lambda(X)$ — однородное пространство, мы можем предпологать, что $g = \mathbf{0}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \kappa$ $\mathcal{U}_{n,\alpha} = \{f^{-1}(W_n) \colon f \in A_\alpha\}$, где $W_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$, и $\mathcal{U}_n = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathcal{U}_{n,\alpha}$, $\mathcal{U}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть $F \in \lambda$, и рассмотрим окрестность $[F, W_n]$ точки $\mathbf{0}$. В силу того что $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha}$, существует $\alpha < \kappa$ и $f \in A_\alpha \cap [F, W_n]$. Тогда $F \subset f^{-1}(W_n) \in \mathcal{U}_{n,\alpha}$.

Таким образом, $\mathcal{U}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти $\alpha_n < \kappa$ такое, что $\mathcal{U}_{n,\alpha_n} \in \Lambda(\lambda)$. Пусть $\gamma = \sup \alpha_n$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_{n,\gamma} \in \Lambda(\lambda)$. Мы докажем, что $\mathbf{0} \in A_\gamma$. Пусть $[F, W]$ — окрестность $\mathbf{0}$, и выберем $n \in \mathbb{N}$ при $W_n \subset W$. Поскольку $\mathcal{U}_{n,\gamma} \in \Lambda(\lambda)$, существует $f \in A_\gamma$ такое, что $F \subset f^{-1}(W_n)$. Тогда $f \in A_\gamma \cap [F, W]$. Таким образом, $\mathbf{0} \in \overline{A_\gamma} = A_\gamma$. Мы получили, что $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$ — замкнутое подмножество в пространстве $C_\lambda(X)$. $\square$

5. Свойство множественной тесноты

Для характеризации множественной тесноты пространства $C_\lambda(X)$ мы определим свойство $t_s(\tau, \lambda)$, которое будет естественным обобщением свойства $t_s(\tau)$ в C_p-теории [9].

Пусть $\mathcal{U}$ будет семейство ко-нуль множеств пространства X и $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) = \{Z(U) \colon U \in \mathcal{U}\}$ — семейство нуль-множеств пространства X, индексируемое $\mathcal{U}$. Пару $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ будем называть $t_s(\lambda)$-*парой*, если $Z(U) \subset U \neq X$ для каждого $U \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{Z}(\mathcal{U}) \in \Lambda(\lambda)$.

Пространство X обладает свойством $t_s(\tau, \lambda)$ ($X \in t_s(\tau, \lambda)$), если для каждой $t_s(\lambda)$-пары $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ существует $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ ($\alpha < \tau$) такое, что любое $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \notin \Lambda(\lambda)$, при этом $\bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$.

Теорема 5.1. *Для тихоновского пространства X, $\lambda \in \Psi$ следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $t_s(C_\lambda(X)) \leq \tau$;

(2) $X \in t_s(\tau, \lambda)$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $t_s(C_\lambda(X)) \leq \tau$. Пусть $(\mathcal{U}, \mathcal{Z}(\mathcal{U}))$ будет $t_s(\lambda)$-пара в пространстве X. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ выберем $f \in C(X)$ такую, что $f_U \restriction$

$Z(U) \equiv 0$ и $f_U \restriction (X \setminus U) \equiv 1$. Пусть $A = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$. Очевидно, что $\mathbf{0} \in \overline{A} \setminus A$. В силу того что $t_s(C_\lambda(X)) \le \tau$, существует $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ $(\alpha < \tau)$ такое, что

1) $\mathbf{0} \notin \overline{\{f_U : U \in \mathcal{U}_\alpha\}}$ для любого $\alpha < \tau$,

2) $\mathbf{0} \in \overline{\{f_U : U \in \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha\}}$.

Если для некоторого $\alpha < \tau$ $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \in \Lambda(\lambda)$, то $\mathbf{0} \in \overline{\{f_U : U \in \mathcal{U}_\alpha\}}$. Получаем, что по условию 1) $\mathcal{Z}(\mathcal{U}_\alpha) \notin \Lambda(\lambda)$ для любого $\alpha < \tau$. Более того, мы можем заметить, что $\bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha \in \Lambda(\lambda)$. Действительно, пусть $F \in \lambda$. По условию 2) для окрестности $[F, (-1, 1)]$ точки $\mathbf{0}$ существует $U \in \bigcup_{\alpha<\tau} \mathcal{U}_\alpha$ такое, что $f_U \in [F, (-1, 1)]$. Получаем, что $F \subset U$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что $X \in t_s(\tau, \lambda)$. Пусть $A \subset C_\lambda(X)$ и $g \in \overline{A} \setminus A$. Так как пространство $C_\lambda(X)$ однородно, мы можем предполагать, что $g = \mathbf{0}$. Для каждого $f \in A$ и $n \in \mathbb{N}$ пусть $U(n, f) = f^{-1}(W_n)$ и $Z(n, f) = f^{-1}(I_{n+1})$, где $W_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $I_n = \left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right]$. Полагаем $\mathcal{U}_n = \{U(n, f) \colon f \in A\}$ и $\mathcal{Z}_n = \{Z(n, f) \colon f \in A\}$.

Если множество $\{n \in \mathbb{N} \colon X \in \mathcal{U}_n\}$ бесконечно, то мы сможем найти последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, которая равномерно сходится к $\mathbf{0}$, так без уменьшения общности мы можем считать, что $X \notin \mathcal{U}_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что $\mathcal{Z}_n \in \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $F \in \lambda$ и рассмотрим окрестность $[F, W_{n+1}]$ точки $\mathbf{0}$. Так как $\mathbf{0} \in \overline{A}$, существует $f \in [F, W_{n+1}] \cap A$. Тогда $f(F) \subset W_{n+1} \subset I_{n+1}$, получаем, что $F \subset f^{-1}(I_{n+1}) = Z(n, f)$. Таким образом, $(\mathcal{U}_n, \mathcal{Z}(\mathcal{U}_n))$ — $t_s(\lambda)$-пара для каждого $n \in \mathbb{N}$. По условию $t_s(\tau, \lambda)$ мы получаем семейство $\{A_{n,\alpha} \colon n \in \mathbb{N}, \alpha < \tau\}$ подмножеств множества A такое, что

(а) $\{Z(n, f) \colon f \in A_{n,\alpha}\} \notin \Lambda(\lambda)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \tau$;

(б) $\{U(n, f) \colon f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}\} \in \Lambda(\lambda)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Из условия (а) следует, что $\mathbf{0} \notin \overline{A_{n,\alpha}}$. Действительно, пусть $F \in \lambda$ такое, что $F \not\subseteq Z(n, f)$ для любого $f \in A_{n,\alpha}$, и рассмотрим окрестность $[F, W_{n+1}]$ точки $\mathbf{0}$. Тогда очевидно, что $[F, W_{n+1}] \cap A_{n,\alpha} = \varnothing$. По условию (б) $\mathbf{0} \in \overline{\bigcup\{A_{n,\alpha} \colon n \in \mathbb{N}, \alpha < \tau\}}$. Действительно, пусть $F \in \lambda$ и W — окрестность 0 в $\mathbb{R}$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $W_n \subset W$. Так как $\{U(n, f) \colon f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}\} \in \Lambda(\lambda)$, существует $f \in \bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha}$ такое, что $F \subset U(n, f)$. Отсюда следует, что $f \in [F, W] \cap (\bigcup_{\alpha<\tau} A_{n,\alpha})$. Таким образом, $t_s(C_\lambda(X)) \le \tau$.

6. Примеры

Во введении мы заметили, что между рассмотренными видами тесноты существуют следующие соотношения:

$$t_s(X) \le T(X) \le t(X) \le vet(X) \le vet_1(X).$$

Покажем, что существуют примеры пространств X, для которых отношения могут быть строгими.

П р и м е р 1. Пусть $D(\tau^+) = \{x_\alpha \colon \alpha < \tau^+\}$ — дискретное пространство мощности τ^+. Пусть C — александровская компактификация $D(\tau^+)$. Пространство C вкладывается в $\mathbb{R}^{\tau^+}$, пусть E — плотное подмножество $\mathbb{R}^{\tau^+}$ такое, что $E \cap C = \varnothing$ и $|E| = \tau$. Определим пространство $Y_\tau = E \cup D(\tau^+)$. Для пространства Y_τ выполняется $t_s(C_p(Y_\tau)) \le \tau < T(C_p(Y_\tau))$ (см. в [9, Remark 3.4]).

П р и м е р 2. Для любого кардинала τ через X_τ обозначим пространство $R^*(\tau^+)$, построенное в [6, Theorem 2.1]. В [9, Example 2.6] было показано, что $T(C_p(X_\tau)) \le \omega$, но $t(C_p(X_\tau)) > \tau$.

П р и м е р 3. Пусть $\mathbb{P}$ — множество иррациональных чисел. Тогда по теореме II.2.12 в [1] и теореме Архангельского — Пыткеева (следствие 2.2) справедливо $t(C_p(\mathbb{P})) = \aleph_0 < vet(C_p(\mathbb{P}))$.

П р и м е р 4. Заметим, что $C_p(X)$ сепарабельно и имеет счетную сильную веерную тесноту тогда и только тогда, когда X не более чем счетно (см. [4, Proposition 61 и Theorem 57]).

Пусть $X = [a, b]$ — невырожденный отрезок числовой прямой. В силу компактности X $vet(C_p(X)) = \omega$, но в силу несчетности X получаем, что $vet_1(C_p(X)) > \omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Архангельский А.В.** Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. 222 с.
2. **Осипов А.В.** Свойства C-компактно-открытой топологии на пространстве функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 258–277.
3. **Arhangel'skii A.V., Isler R., Tironi G.** On pseudo radial spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. 1986. No. 27. P. 137–154.
4. **Bella A., Bonanzinga M., Matveev M.** Variations of selective separability // Topology Appl. 2009. Vol. 156, no. 7. P. 1241–1252.
5. **Juh*á*sz I.** Variationts on tightness // Studia Sci. Math. Hangar. 1989. Vol. 24, no. 2-3. P. 179–186.
6. **Hodel R.E., Vaughan J.E.** A note on $[a, b]$-compactness // Gen. Topology Appl. 1974. No. 4. P. 179–189.
7. **Lin S.** Tightness of function spaces // Appl. Gen. Topol. 2006. Vol. 7, no. 1. P. 103–107.
8. **Osipov A.V.** Topological-algebraic properties of function spaces with set-open topologies // Topology Appl. 2012. Vol. 159, no. 3. P. 800–805.
9. **Sakai M.** Variations on tightness in function spaces //Topology Appl. 2000. Vol. 101, no. 1. P. 273–280.

Осипов Александр Владимирович
Поступила 04.03.2016
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: OAB@list.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.658.4

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И ВОПРОСЫ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Л. Д. Попов, В. Д. Скарин

Авторы продолжают изучение аппроксимационных свойств альтернативных схем двойственности для несобственных задач линейного программирования. Изучаемые схемы основаны на использовании классической функции Лагранжа, регуляризованной одновременно по прямым и двойственным переменным. Полученные ранее результаты о связи ее седловых точек с лексикографической коррекцией правых частей ограничений несобственных задач 1-го и 2-го рода перенесены на более общий вид несобственности. Приведены теоремы сходимости, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения.

Ключевые слова: линейное программирование, двойственность, несобственные задачи, обобщенные решения, метод регуляризации, метод штрафных функций.

L. D. Popov, V. D. Skarin. Duality and correction of inconsistent constraints for improper linear programming problems.

We continue the study of approximation properties of alternative duality schemes for improper problems of linear programming. The schemes are based on the use of the classical Lagrange function regularized simultaneously in direct and dual variables. The results on the connection of its saddle points with the lexicographic correction of the right-hand sides of constraints in improper problems of the first and second kind are transferred to a more general type of improperness. Convergence theorems are presented and an informal interpretation is given for the obtained generalized solution.

Keywords: linear programming, duality, improper problems, generalized solutions, regularization, penalty methods.

MSC: 90C05, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-200-211

Введение

Несобственными принято называть задачи линейного программирования (ЛП), системы ограничений которых, прямые или двойственные, в силу тех или иных причин содержат противоречия [1;2]. Последние могут возникать, например, из-за погрешностей в задании исходной информации, рассогласования ресурсных ограничений и целей математической модели, противоречивости требований, предъявляемых к объекту моделирования и др.

Несобственные задачи ЛП, не имея решения в обычном понимании этого термина, неизбежно должны быть подвергнуты корректировке. Естественно, что такая корректировка должна вносить в них изменения, минимально необходимые для обеспечения свойств разрешимости задачи, и проводиться при посредстве формальных математических методов, называемых методами оптимальной коррекции.

Основой построения методов оптимальной коррекции обычно служат различные схемы нестандартного формирования двойственности для несобственных задач ЛП [1; 2]. Ниже будут исследованы методы оптимальной коррекции несобственных задач ЛП, построенные на основе симметричной регуляризации классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным [3–6]. Предпочтение будет отдано изучению лексикографической постановки [7; 8]. Работа продолжает исследование, начатое в [9] для несобственных

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

задач ЛП 1-го и 2-го рода, и обобщает ее результаты на произвольный тип несобственности. Технической базой исследования служат работы по устойчивости задач квадратичного программирования [10; 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим пару взаимодвойственных задач ЛП:

$$P\colon \quad \max\{(c,\, x)\colon Ax \leq b,\ x \geq 0\}, \tag{1}$$

$$D\colon \quad \min\{(b,\, y)\colon A^\top y \geq c,\ y \geq 0\}. \tag{2}$$

Здесь векторы $c, x \in \mathbb{R}^n,\ b, y \in \mathbb{R}^m$, A — матрица размера $m \times n$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов.

Хорошо известно, что если разрешима одна из выписанных задач, то разрешима и другая и их оптимальные значения совпадают. Простым критерием разрешимости этих задач является условие одновременной совместности их систем ограничений.

Если хотя бы одна из систем несовместна, обе задачи становятся неразрешимыми (несобственными). При этом задача называется несобственной 1-го рода, если несовместна только ее система ограничений, несобственной 2-го рода, если несовместна только система ограничений двойственной задачи, и несобственной 3-го рода, если несовместны обе системы одновременно. Несобственность 1-го рода достаточно часто встречается на практике в технических и экономических приложениях, несобственность 2-го рода является ее двойственным отражением, несобственность 3-го рода является своеобразной и неустойчивой “тонкой границей” между первыми двумя родами несобственности в “информационном пространстве” [2].

Один из общих формализованных подходов к анализу несобственных задач ЛП состоит в следующем [2]. Задачи (1), (2) погружают в параметрическое семейство задач вида

$$\max\{(c - \Delta c,\, x)\colon Ax \leq b + \Delta b,\ x \geq 0\}, \tag{3}$$

$$\min\{(b + \Delta b,\, y)\colon A^\top y \geq c - \Delta c,\ y \geq 0\}, \tag{4}$$

после чего переходят к поиску таких минимальных (например, относительно евклидовой нормы) векторов коррекции $\widetilde{\Delta} b \geq 0$, $\widetilde{\Delta} c \geq 0$, которые обеспечивали бы совместность ограничений в (3), (4). Соответствующие решения $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ задач (3), (4) объявляют обобщенными решениями пары P, D. При этом наиболее эффективные методы данного направления обязательно совмещают процесс коррекции исходных данных задачи с поиском решения скорректированной постановки.

Легко заметить, что в собственном случае обобщенные решения совпадают с обычными решениями задач (1), (2).

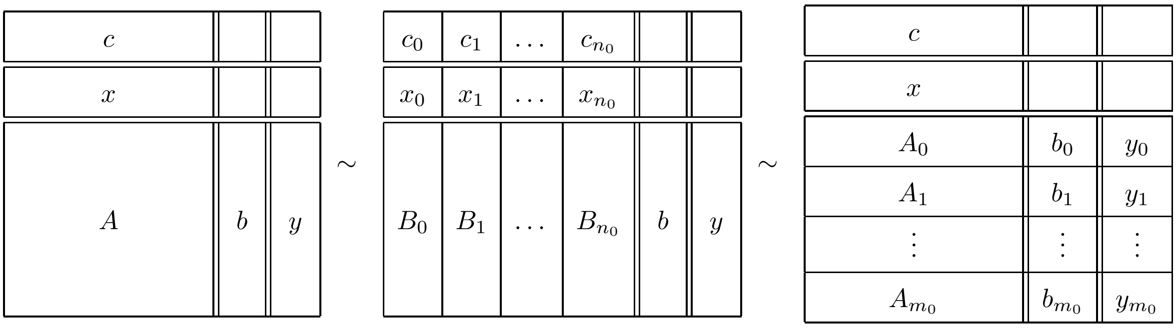
Ниже будет рассмотрен лексикографический вариант приведенной выше постановки. Пусть зафиксировано некоторое разбиение матрицы A на ряд вертикальных и горизонтальных полос:

$$A = [B_0 | B_1 | \ldots | B_{n_0}] = [A_0^\top | A_1^\top | \ldots | A_{m_0}^\top]^\top.$$

Соответственно, векторы c, b, x и y окажутся разбитыми на ряд подвекторов меньшей размерности:

$$c^\top = [c_0^\top | c_1^\top | \ldots | c_{n_0}^\top], \quad b^\top = [b_0^\top | b_1^\top | \ldots | b_{m_0}^\top], \quad x^\top = [x_0^\top | x_1^\top | \ldots | x_{n_0}^\top], \quad y^\top = [y_0^\top | y_1^\top | \ldots | y_{m_0}^\top].$$

Введенное разбиение иллюстрируется далее рисунком. Поскольку размерности полученных подматриц и подвекторов нигде ниже не играют самостоятельной роли, для них не введено специальных обозначений (в частности, допускается, что часть полос, блоков и подвекторов могут быть пустыми).



Разбиение исходных данных задач (1), (2) на блоки.

В соответствии с введенным разбиением исходных данных задач (1), (2) на блоки перепишем задачи (3), (4) в виде

$$\max\Big\{\sum_{i=0}^{n_0}(c_i - \Delta c_i,\, x_i)\colon A_j x \le b_j + \Delta b_j \ (j = 0, 1, \dots, m_0),\ x \ge 0\Big\}, \tag{5}$$

$$\min\Big\{\sum_{j=0}^{m_0}(b_j + \Delta b_j,\, y_j)\colon B_i^\top y \ge c_i - \Delta c_i \ (i = 0, 1, \dots, n_0),\ y \ge 0\Big\} \tag{6}$$

и введем множество их разрешимости $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega^*$, где

$$\Omega = \{\Delta b = [\Delta b_0, \Delta b_1, \dots, \Delta b_{m_0}] \ge 0\colon \text{ограничения задачи (5) совместны}\},$$

$$\Omega^* = \{\Delta c = [\Delta c_0, \Delta c_1, \dots, \Delta c_{n_0}] \ge 0\colon \text{ограничения задачи (6) совместны}\}.$$

Последовательная (лексикографическая) задача отыскания оптимального набора параметров коррекции $\widetilde{\Delta} b = [\widetilde{\Delta} b_0, \widetilde{\Delta} b_1, \dots, \widetilde{\Delta} b_{m_0}]$, $\widetilde{\Delta} c = [\widetilde{\Delta} c_0, \widetilde{\Delta} c_1, \dots, \widetilde{\Delta} c_{n_0}]$ может быть сформулирована в виде следующих двух независимых задач последовательной (лексикографической) оптимизации:

З а д а ч а A. Требуется найти элемент $\widetilde{\Delta} b$ множества Ω_{m_0}, где

$$\Omega_0 = \operatorname{Arg}\min_{\Delta b \in \Omega} \|\Delta b_0\|, \quad \Omega_j = \operatorname{Arg}\min_{\Delta b \in \Omega_{j-1}} \|\Delta b_j\|, \quad j = 1, \dots, m_0.$$

З а д а ч а B. Требуется найти элемент $\widetilde{\Delta} c$ множества $\Omega^*_{n_0}$, где

$$\Omega^*_0 = \operatorname{Arg}\min_{\Delta c \in \Omega^*} \|\Delta c_0\|, \quad \Omega^*_i = \operatorname{Arg}\min_{\Delta c \in \Omega^*_{i-1}} \|\Delta c_i\|, \quad i = 1, \dots, n_0.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем пространстве. В силу ее свойств на каждом шаге решения лексикографических задач A и B единственным образом определяются очередные компоненты $\widetilde{\Delta} b_j$ и $\widetilde{\Delta} c_i$ искомых векторов коррекции $\widetilde{\Delta} b = [\widetilde{\Delta} b_0, \widetilde{\Delta} b_1, \dots, \widetilde{\Delta} b_{m_0}]$ и $\widetilde{\Delta} c = [\widetilde{\Delta} c_0, \widetilde{\Delta} c_1, \dots, \widetilde{\Delta} c_{n_0}]$. Тем самым множества Ω_{m_0} и $\Omega^*_{n_0}$ оказываются одноэлементными.

Отличительной чертой евклидовых норм [2] является также то, что обе задачи A и B в действительности сводятся к решению конечной серии задач квадратичного программирования (КП) следующего вида:

З а д а ч а A'. Требуется найти $x \in X_{m_0}$, где

$$X_0 = \operatorname{Arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n_+} \|(A_0 x - b_0)^+\|^2, \quad X_j = \operatorname{Arg}\min_{x \in X_{j-1}} \|(A_j x - b_j)^+\|^2, \quad j = 1, \dots, m_0.$$

З а д а ч а B'. Требуется найти $y \in Y_{n_0}$, где

$$Y_0 = \mathrm{Arg}\min_{y \in \mathbb{R}^m_+} \|(c_0 - B_0^T y)^+\|^2, \quad Y_i = \mathrm{Arg}\min_{y \in Y_{i-1}} \|(c_i - B_i^T y)^+\|^2, \quad i = 1, \ldots, n_0.$$

Здесь и далее $\mathbb{R}^s_+$ обозначает неотрицательный ортант соответствующего пространства, a^+ означает неотрицательную “срезку” вектора a, т. е. замену его отрицательных компонент нулями.

В самом деле, если на очередном шаге решения задач КП A' и B' уже найдены $x \in X_j$ и $y \in Y_i$, то тем самым однозначно определены векторы $\widetilde{\Delta} b_j = (A_j x - b_j)^+$ и $\widetilde{\Delta} c_i = (c_i - B_i^T y)^+$ как проекции нуля на полиэдральные (а значит, выпуклые и замкнутые) множества $\bigcup\limits_{x \in X_{j-1}} \{z\colon z \geq A_j x - b_j,\ z \geq 0\}$ и $\bigcup\limits_{y \in Y_{i-1}} \{z\colon z \geq c_i - B_i^T y,\ z \geq 0\}$ соответственно, так что множества X_j и Y_i можно представить [9] в виде

$$X_j = \{x\colon A_0 x \leq b_0 + \widetilde{\Delta} b_0, \ldots, A_j x \leq b_j + \widetilde{\Delta} b_j,\ x \geq 0\}, \quad j = 0, 1, \ldots, m_0,$$

$$Y_i = \{y\colon B_0^T y \geq c_0 - \widetilde{\Delta} c_0, \ldots, B_i^T y \geq c_i - \widetilde{\Delta} c_i,\ y \geq 0\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n_0.$$

С содержательной стороны задачи A' и B' описывают так называемый последовательный способ развязки “узких мест” в системах ограничений задач P и D. Суть этого способа в том, что неравенства этих систем предварительно разбиваются на подгруппы по степени их важности для выполнения, причем важность падает с ростом номера соответствующей подматрицы. В процессе их корректировки в первую очередь стремятся минимизировать изменения, вносимые в наиболее важные из корректируемых ограничений, и лишь затем переходят к корректировке менее важных ограничений.

Заметим, что задачи КП, входящие в задачи A' и B', не обязательно решать последовательно. Их можно эффективно свести к единой оптимизационной задаче, для чего ниже будут привлечены идеи теории двойственности и регуляризации.

2. Симметрично регуляризованная функция Лагранжа

Хорошо известно, что разрешимость задач (1), (2) тесно связана с наличием у их функции Лагранжа $L(x, y) = (c, x) - (y, Ax - b)$ седловых точек относительно области $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m_+$. В несобственном случае таковых точек нет. Однако они немедленно появляются, если применить к функции Лагранжа регуляризацию по Тихонову.

В своей предыдущей работе [9] авторы уже рассматривали классическую функцию Лагранжа, дополненную симметричным рядом регуляризующих слагаемых

$$\mathcal{L}(x, y; \sigma) = (c, x) - (y, Ax - b) - \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i \|x_i\|^2 + \sum_{j=0}^{m_0} \beta_j \|y_j\|^2. \tag{7}$$

Здесь $\sigma = [\alpha, \beta]$, $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0}] > 0$, $\beta = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}] > 0$ — параметры регуляризации.

Функция (7) в силу своих свойств сильной выпуклости по x и сильной вогнутости по y всегда обладает седловыми точками независимо от того, разрешимы или нет задачи (1), (2). Она естественным образом порождает пару минимаксных задач, которые всегда разрешимы и оптимальные значения которых совпадают. Эти задачи имеют вид

$$P_\sigma\colon \max_{x \geq 0} \min_{y \geq 0} \mathcal{L}(x, y; \sigma) = \max_{x \geq 0} \Phi_\sigma(x), \tag{8}$$

где

$$\Phi_\sigma(x) = (c, x) - \sum_{i=0}^{n_0} \alpha_i \|x_i\|^2 - \sum_{j=0}^{m_0} \frac{1}{4\beta_j} \|(A_j x - b_j)^+\|^2,$$

и

$$D_\sigma\colon\ \min_{y\ge 0}\max_{x\ge 0}\mathcal{L}(x,y;\sigma)=\min_{y\ge 0}\Psi_\sigma(y), \tag{9}$$

где

$$\Psi_\sigma(x)=(b,y)+\sum_{j=0}^{m_0}\beta_j\|y_j\|^2+\sum_{i=0}^{n_0}\frac{1}{4\alpha_i}\|(c_i-B_i^Ty)^+\|^2.$$

Следующие теоремы сформулированы и доказаны в [9].

Теорема 1 [9, теорема 1]. *Независимо от того, разрешимы или нет задачи* (1) *и* (2), *задачи* (8) *и* (9) *для любого набора параметров* $\sigma>0$ *разрешимы в единственных точках* x^σ *и* y^σ *соответственно и* $\Phi_\sigma(x^\sigma)=\Psi_\sigma(y^\sigma)=\mathcal{L}(x^\sigma,y^\sigma;\sigma)$.

Теорема 2 [9, теорема 2]. *Оптимальные векторы* x^σ *и* y^σ *задач* (8) *и* (9) *являются также решениями соответственно задач* (5) *и* (6) *при* $\Delta c_i=2\alpha_i x_i^\sigma=(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+$ $(i=0,1,\ldots,n_0)$ *и* $\Delta b_j=2\beta_j y_j^\sigma=(A_jx^\sigma-b_j)^+$ $(j=0,1,\ldots,m_0)$.

Именно на изучении задач P_σ и D_σ мы сосредоточимся ниже и, в частности, найдем условия на бесконечно малые параметры регуляризации $\sigma=[\alpha,\beta]>0$, которые гарантировали бы сходимость порождаемых этими задачами векторов

$$\Delta c_i^\sigma=2\alpha_i x_i^\sigma=(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\ (i=0,1,\ldots,n_0),\quad \Delta b_j^\sigma=2\beta_j y_j^\sigma=(A_jx^\sigma-b_j)^+\ (j=0,1,\ldots,m_0)$$

к решению задач A и B. Кроме того, при некоторых условиях последовательности x^σ, y^σ могут давать обобщенное решение одной из исходных несобственных постановок (обеих в собственном случае).

3. Вспомогательные построения

Пусть $\widetilde{\Delta}c=[\widetilde{\Delta}c_0,\widetilde{\Delta}c_1,\ldots,\widetilde{\Delta}c_{n_0}]$, $\widetilde{\Delta}b=[\widetilde{\Delta}b_0,\widetilde{\Delta}b_1,\ldots,\widetilde{\Delta}b_{m_0}]$ — решения задач A и B из разд. 1. Обратимся к аппроксимирующим задачам (5), (6). Обозначим через $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ их нормальные решения, отвечающие параметрам $\Delta c=\widetilde{\Delta}c$, $\Delta b=\widetilde{\Delta}b$.

Лемма 1. *Существует такое число* $K_0>0$, *что при всех* $x\ge 0$, $y\ge 0$ *верно*

$$(c-\widetilde{\Delta}c,x-\tilde{x})\le K_0\sum_{j=0}^{m_0}\|(A_jx-b_j)^+-\widetilde{\Delta}b_j\|,\quad (b+\widetilde{\Delta}b,\tilde{y}-y)\le K_0\sum_{i=0}^{n_0}\|(c_i-B_i^Ty)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $K_0>\max\{\max_j\|\tilde{y}_j\|,\max_i\|\tilde{x}_i\|\}$. Покажем справедливость первого неравенства. Обозначим через $v(\cdot,\widetilde{\Delta}c)$ функцию оптимума прямой задачи в точке $\Delta b=\widetilde{\Delta}b$. Как известно,

$$v(\Delta b,\widetilde{\Delta}c)\le v(\widetilde{\Delta}b,\widetilde{\Delta}c)+\sum_{j=0}^{m_0}(\tilde{y}_j,\Delta b_j-\widetilde{\Delta}b_j).$$

Вектор x удовлетворяет ограничениям задачи (5) при $\Delta b_j=(A_jx-b_j)^+$, $j=0,\ldots,m_0$. Следовательно,

$$(c-\widetilde{\Delta}c,x)\le v(\Delta b,\widetilde{\Delta}c)\le(c-\widetilde{\Delta}c,\tilde{x})+\sum_{j=0}^{m_0}(\tilde{y}_j,(A_jx-b_j)^+-\widetilde{\Delta}b_j)$$

$$\le(c-\widetilde{\Delta}c,\tilde{x})+K_0\sum_{j=0}^{m_0}\|(A_jx-b_j)^+-\widetilde{\Delta}b_j\|,$$

что и требовалось. Справедливость второго неравенства доказывается аналогично с привлечением свойств функции оптимума $v(\widetilde{\Delta}b,\cdot)$ двойственной задачи.

Лемма доказана.

Далее обратимся к задачам КП

$$\min\{\|(A_jx-b_j)^+\|^2\colon A_0x\le b_0+\Delta b_0,\ A_1x\le b_1+\Delta b_1,\ \ldots,\ A_{j-1}x\le b_{j-1}+\Delta b_{j-1},\ x\ge 0\},\quad (10)$$

$$\min\{\|(c_i-B_i^Ty)^+\|^2\colon B_0^Ty\ge c_0+\Delta c_0,\ B_1^Ty\ge c_1+\Delta c_1,\ \ldots,B_{i-1}^Ty\le c_{i-1}+\Delta c_{i-1},\ y\ge 0\}.\ (11)$$

Задачи (10) и (11) при $j=0,1,\ldots,m_0$, $i=0,1,\ldots,n_0$ входят соответственно в состав задач A' и B'. Хотя эти задачи и нелинейны, их оптимальные множества $\widetilde{M_j}(\Delta b)$, $\widetilde{M_i^*}(\Delta c)$, как уже отмечалось выше, полиэдральны и описываются системами неравенств вида

$$\widetilde{M_j}(\Delta b)=\{x\colon A_0x\le b_0+\Delta b_0,\ldots,A_{j-1}x\le b_{j-1}+\Delta b_{j-1},\ A_jx\le b_j+w_j(\Delta b),\ x\ge 0\},$$

$$\widetilde{M_i^*}(\Delta c)=\{y\colon B_0^Ty\ge c_0-\Delta c_0,\ldots,B_{i-1}^Ty\ge c_{i-1}-\Delta c_{i-1},\ B_i^Ty\ge c_i-w^*{}_i(\Delta c),\ y\ge 0\}.$$

Здесь $w_j(\Delta b)=\pi(0;Z_j(\Delta b))$, $w^*{}_i(\Delta c)=\pi(0;Z_i^*(\Delta c))$, множества $Z_j(\Delta b)$ и $Z_i^*(\Delta c)$ определены как

$$Z_j(\Delta b)=\bigcup_{x\in M_j(\Delta b)}\{z\colon z\ge A_jx-b_j\},\quad Z_i^*(\Delta c)=\bigcup_{y\in M_i^*(\Delta c)}\{z\colon z\ge c_i-B_i^Ty\},$$

$M_j(\Delta b)$ — допустимое множество задачи (10), $M_i^*(\Delta c)$ — допустимое множество задачи (11).

Подвергнем задачи (10), (11) линеаризации в точках $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ соответственно. Получим две задачи ЛП вида

$$\min\{(\widetilde{\Delta}b_j,z)\colon A_0x\le b_0+\Delta b_0,\ldots,A_{j-1}x\le b_{j-1}+\Delta b_{j-1},\ A_jx-z\le b_j,\ z\ge 0,\ x\ge 0\},$$

$$\min\{(\widetilde{\Delta}c_i,z)\colon B_0^Ty\ge c_0-\Delta c_0,\ldots,B_{i-1}^Ty\ge c_{i-1}-\Delta c_{i-1},\ B_i^Ty+z\ge c_i,\ z\ge 0,\ y\ge 0\}.$$

Эти задачи разрешимы по крайней мере при всех $\Delta b\in\Omega$, $\Delta c\in\Omega^*$. В частности, при $\Delta b=\widetilde{\Delta}b$, $\Delta c=\widetilde{\Delta}c$ оптимальные значения этих задач равны $\|\widetilde{\Delta}b_j\|^2$ и $\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2$ соответственно.

Лемма 2. *Константу K_0 из леммы 1 можно сделать настолько большой, что при всех $x\ge 0$, $y\ge 0$ и всех $i=1,\ldots,n_0$ и $j=1,\ldots,m_0$ будут выполнены также неравенства*

$$\|\widetilde{\Delta}b_j\|^2-(\widetilde{\Delta}b_j,(A_jx-b_j)^+)\le K_0\sum_{s=0}^{j-1}\|(A_sx-b_s)^+-\widetilde{\Delta}b_s\|,$$

$$\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2-(\widetilde{\Delta}c_i,(c_i-B_i^Ty)^+)\le K_0\sum_{s=0}^{i-1}\|(c_s-B_s^Ty)^+-\widetilde{\Delta}c_s\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о данной леммы дословно следует схеме, использованной при доказательстве леммы 1.

Перейдем к обоснованию сходимости предложенного метода.

4. Обоснование сходимости

В дальнейшем для простоты изложения будем считать число вертикальных и горизонтальных полос на выше приведенном рисунке совпадающим. Это не снижает общности рассуждений, так как при необходимости каждое из этих чисел можно увеличить путем введения дополнительных полос (пустых). По этой же причине можно считать, что все $\alpha_i=\beta_i$. Сохраним за ними единое обозначение $\sigma_i=\alpha_i=\beta_i$, $i=0,1,\ldots,m_0=n_0$.

Начнем со вспомогательного утверждения.

Лемма 3. *Пусть x^σ и y^σ — оптимальные векторы соответственно задач* (8) *и* (9). *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|^2)$$

$$\le\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2)-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}[(\widetilde{\Delta}b_i,(A_ix^\sigma-b_i)^+)+(\widetilde{\Delta}c_i,(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+)]$$

$$+\sum_{i=0}^{m_0}K_0(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|). \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теорем 1, 2 получаем

$$\Phi_\sigma(x^\sigma)=(c,x^\sigma)-\sum_{i=0}^{m_0}\sigma_i\|x_i^\sigma\|^2-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2$$

$$=(c,x^\sigma)-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2,$$

$$\Psi_\sigma(y^\sigma)=(b,y^\sigma)+\sum_{i=0}^{m_0}\sigma_i\|y_i^\sigma\|^2+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2$$

$$=(b,y^\sigma)+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{4\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2.$$

А так как $\Phi_\sigma(x^\sigma)=\Psi_\sigma(y^\sigma)$, то

$$(c,x^\sigma)-(b,y^\sigma)=\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}\|(A_ix^\sigma-b_i)^+\|^2+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+\|^2$$

$$=\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|^2)-\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta}b_i\|^2+\|\widetilde{\Delta}c_i\|^2)$$

$$+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{\sigma_i}[((A_ix^\sigma-b_i)^+,\widetilde{\Delta}b_i)+((c_i-B_i^Ty^\sigma)^+,\widetilde{\Delta}c_i)].$$

Для завершения доказательства остается заметить, что по лемме 1

$$(c,x^\sigma)-(b,y^\sigma)=(c-\widetilde{\Delta}c,x^\sigma-\tilde{x})-(b+\widetilde{\Delta}b,y^\sigma-\tilde{y})+(\widetilde{\Delta}c,x^\sigma)+(\widetilde{\Delta}b,y^\sigma)$$

$$\le\sum_{i=0}^{m_0}K_0(\|(A_ix^\sigma-b_i)^+-\widetilde{\Delta}b_i\|+\|(c_i-B_i^Ty^\sigma)^+-\widetilde{\Delta}c_i\|)+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}((c_i-B_i^Ty^\sigma)^+,\widetilde{\Delta}c_i)$$

$$+\sum_{i=0}^{m_0}\frac{1}{2\sigma_i}((A_ix^\sigma-b_i)^+,\widetilde{\Delta}b_i).$$

Лемма доказана.

Представим теперь условия, при которых будет обоснована сходимость метода. А именно, будем предполагать, что параметры регуляризации σ_i положительны и

$$\sigma_i\to+0\quad(0\le i\le m_0),\qquad \mu_i:=\sigma_{i-1}\sigma_{m_0}^2/\sigma_i^3\to 0\quad(0<i\le m_0). \tag{13}$$

При помощи математической индукции легко показать, что из (13) вытекают условия

$$\gamma_i=\sigma_{i-1}/\sigma_i\to 0,\qquad \gamma_{i-1}/\gamma_i\to 0\quad(0<i\le m_0). \tag{14}$$

Покажем, что при выполнении этих условий $\|(A_s x^\sigma - b_s)^+ - \widetilde{\Delta} b_s\| \to 0$, $0 \le s \le m_0$, и $\|(c_s - B_s^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_s\| \to 0$, $0 \le s \le n_0$, где $\widetilde{\Delta} b = [\widetilde{\Delta} b_0, \ldots, \widetilde{\Delta} b_{m_0}]$ — решение задачи A из разд. 1 и $\widetilde{\Delta} c = [\widetilde{\Delta} c_0, \ldots, \widetilde{\Delta} c_{n_0}]$ — решение задачи B. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Базой этой индукции служит следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть параметры регуляризации σ_i, $i = 0, 1, \ldots, m_0$, положительны и выполнены условия* (13). *Тогда найдется такая константа $N_0 > 0$, что $\delta_0(\sigma) \le N_0 \sqrt{\gamma_1}$, где* $\delta_0(\sigma) := \|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 3. Умножим обе части неравенства (12) на $2\sigma_0 > 0$ и перегруппируем слагаемые. С учетом очевидных неравенств

$$(\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+) \ge 0, \quad (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+) \ge 0$$

и свойств евклидовых проекций, согласно которым

$$\|\widetilde{\Delta} b_0\|^2 \le (\widetilde{\Delta} b_0, (A_0 x^\sigma - b_0)^+), \quad \|\widetilde{\Delta} c_0\|^2 \le (\widetilde{\Delta} c_0, (c_0 - B_0^T y^\sigma)^+),$$

получим оценку

$$\begin{aligned}
&\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\|^2 + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|^2 \\
&\le 2K_0\sigma_0(\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|) + \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_0} 2K_0\sigma_0(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&= 2K_0\sigma_0(\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|) + \sum_{i=1}^{m_0} \frac{\sigma_0}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&\quad - \sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2 - \sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2 \\
&\quad + 2K_0^2\sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i \le 2K_0\sigma_0(\|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|) \\
&\quad + \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \sum_{i=1}^{m_0} (\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) + 2K_0^2\sigma_0 \sum_{i=1}^{m_0} \sigma_i.
\end{aligned}$$

Полученная оценка и элементарное неравенство $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ убеждают нас в том, что найдется такая константа $K_1 > 0$, для которой величина

$$\delta_0(\sigma) = \|(A_0 x^\sigma - b_0)^+ - \widetilde{\Delta} b_0\| + \|(c_0 - B_0^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_0\|$$

удовлетворяет квадратному неравенству

$$\delta_0(\sigma)^2 \le 4K_0\sigma_0\delta_0(\sigma) + 2K_1\sigma_0/\sigma_1,$$

откуда найдется такое $N_0 > 0$, что

$$\delta_0(\sigma) \le 2K_0\sigma_0 + \sqrt{4K_0^2\sigma_0^2 + 2K_1\sigma_0/\sigma_1} \le N_0\sqrt{\sigma_0/\sigma_1}.$$

Здесь учтены сравнительные порядки малости (13), (14) параметров σ_i.

Лемма доказана.

Перейдем к обоснованию шага индукции.

Лемма 5. *Пусть выполнены все предположения леммы 4 и* $\delta_s(\sigma) \le N_s\sqrt{\gamma_{s+1}}$, *где* $\delta_s(\sigma) := \|(A_s x^\sigma - b_s)^+ - \widetilde{\Delta} b_s\| + \|(c_s - B_s^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_s\|$, $s = 0, \dots, k-1 < m_0 - 1$. *Тогда найдется константа* $N_k > 0$ *такая, что также* $\delta_k(\sigma) \le N_k\sqrt{\gamma_{k+1}}$, *где* $\delta_k(\sigma) = \|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|$.

Доказательство. Снова воспользуемся леммой 3. Умножим обе части неравенства (12) на $2\sigma_k > 0$ и перегруппируем его слагаемые следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\|^2 + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|^2 \\
&\le \big(\|\widetilde{\Delta} b_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_k, (A_k x^\sigma - b_k)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_k, (c_k - B_k^T y^\sigma)^+)\big) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}\big[\big(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+)\big)\big] \\
&+ 2K_0\sigma_k \sum_{i=0}^{k-1}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) + \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&+ 2K_0\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) \\
&- \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&+ \frac{\sigma_k}{\sigma_0}\big(\|\widetilde{\Delta} b_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_0, (A_0 x^\sigma - b_0)^+)\big) + \frac{\sigma_k}{\sigma_0}\big(\|\widetilde{\Delta} c_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_0, (c_0 - B_0^T y^\sigma)^+)\big) \\
&- \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \\
&+ 2K_0\sigma_k(\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Оценим сверху отдельные слагаемые в правой части этого неравенства.

Во-первых, по лемме 2 с учетом предположений леммы 5 имеем

$$
\begin{aligned}
&\big(\|\widetilde{\Delta} b_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_k, (A_k x^\sigma - b_k)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_k, (c_k - B_k^T y^\sigma)^+)\big) \\
&\le K_0 \sum_{i=0}^{k-1}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|\widetilde{\Delta} c_i - (c_i - B_i^T y^\sigma)^+\|) \le K_0 \sum_{i=0}^{k-1} N_i\sqrt{\sigma_i/\sigma_{i+1}}.
\end{aligned}
$$

Поскольку имеют место условия (14) на сравнительную малость параметров $\gamma_{i+1} = \sigma_i/\sigma_{i+1}$, то найдется такое $K_2 > 0$, для которого

$$
\big(\|\widetilde{\Delta} b_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_k, (A_k x^\sigma - b_k)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_k\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_k, (c_k - B_k^T y^\sigma)^+)\big) \le K_2\sqrt{\gamma_k}.
$$

Во-вторых, по аналогичным соображениям (см. предположения леммы 5 и условия (13), (14)) найдется такое $K_3 > 0$, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}\big[\big(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+)\big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+)\big)\big] \\
&\le K_0 \sum_{i=1}^{k-1}\Big(\frac{\sigma_k}{\sigma_i}\sqrt{\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}}\Big) \le K_3\sigma_k/\sigma_{m_0} \sum_{i=1}^{k-1}\sqrt{\mu_i}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

В-третьих, найдется и $K_4 > 0$ такое, что

$$
2K_0\sigma_k \sum_{i=0}^{k-1}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|) \le K_4\sigma_k\sqrt{\frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}} = K_4\sqrt{\sigma_k\sigma_{k-1}}.
$$

В-четвертых, найдется такое $K_5 > 0$, что

$$\sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) + 2K_0\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} (\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\| + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|)$$

$$- \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) = \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2)$$

$$- \sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2 - \sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \Big[K_0\sqrt{\sigma_i} - \frac{\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|}{\sqrt{\sigma_i}}\Big]^2$$

$$+ 2K_0^2\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \sigma_i \le \sum_{i=k+1}^{m_0} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|\widetilde{\Delta} c_i\|^2) + 2K_0^2\sigma_k \sum_{i=k+1}^{m_0} \sigma_i \le K_5\sigma_k/\sigma_{k+1}. \qquad (17)$$

И наконец, при доказательстве леммы 4 уже упоминалось, что

$$\big(\|\widetilde{\Delta} b_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_0, (A_0 x^\sigma - b_0)^+)\big) \le 0, \quad \big(\|\widetilde{\Delta} c_0\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_0, (c_0 - B_0^T y^\sigma)^+)\big) \le 0,$$

$$- \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_i}(\|(A_i x^\sigma - b_i)^+ - \widetilde{\Delta} b_i\|^2 + \|(c_i - B_i^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_i\|^2) \le 0.$$

Применяя все эти оценки к правой части соотношения (15), получаем следующее неравенство:

$$\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\|^2 + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|^2$$
$$\le 2K_0\sigma_k(\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|) + K_2\sqrt{\gamma_k} + K_3\sigma_k/\sigma_{m_0}$$
$$+ K_4\sqrt{\sigma_k\sigma_{k-1}} + K_5\gamma_{k+1}.$$

Осталось применить условия (13), (14) о сравнительной малости параметров регуляризации, чтобы убедиться в том, что найдется такое $K_6 > 0$, при котором

$$\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\|^2 + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|^2$$
$$\le 2K_0\sigma_k(\|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|) + K_6\gamma_{k+1}.$$

Поэтому величина

$$\delta_k(\sigma) = \|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|$$

удовлетворяет квадратному неравенству

$$\delta_k(\sigma)^2 \le 4K_0\sigma_k\delta_k(\sigma) + 2K_6\gamma_{k+1}, \qquad (18)$$

откуда следует, что

$$\delta_k(\sigma) \le 2K_0\sigma_k + \sqrt{4K_0^2\sigma_k^2 + 2K_6\gamma_{k+1}} \le N_k\sqrt{\gamma_{k+1}}$$

при подходящем $N_k > 0$.

Лемма доказана.

Осталось установить, что верна

Лемма 6. *При предположениях леммы* 5

$$\delta_{m_0}(\sigma) := \|(A_{m_0} x^\sigma - b_{m_0})^+ - \widetilde{\Delta} b_{m_0}\| + \|(c_{m_0} - B_{m_0}^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_{m_0}\| \to 0.$$

Доказательство проводится при помощи тех же выкладок, которые использовались при доказательстве предыдущей леммы, но с небольшими уточнениями.

Во-первых, оценка (17) не понадобится, так как при $k = m_0$ соответствующие слагаемые просто исчезают из неравенства (15).

Во-вторых, оценка (16) приобретает несколько иной вид, а именно:

$$\sum_{i=1}^{m_0-1} \frac{\sigma_{m_0}}{\sigma_i} \big[\big(\|\widetilde{\Delta} b_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} b_i, (A_i x^\sigma - b_i)^+) \big) + \big(\|\widetilde{\Delta} c_i\|^2 - (\widetilde{\Delta} c_i, (c_i - B_i^T y^\sigma)^+) \big) \big]$$

$$\leq K_0 \sum_{i=1}^{m_0-1} \Big(\frac{\sigma_{m_0}}{\sigma_i} \sqrt{\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}} \Big) \leq K_3 \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\mu_i}.$$

Поэтому неравенство (18) относительно

$$\delta_k(\sigma) = \|(A_k x^\sigma - b_k)^+ - \widetilde{\Delta} b_k\| + \|(c_k - B_k^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_k\|$$

при $k = m_0$ изменится и примет вид $\delta_{m_0}(\sigma)^2 \leq 4K_0 \sigma_{m_0} \delta_{m_0}(\sigma) + \theta_0$, где

$$\theta_0 = K_2 \sqrt{\gamma_{m_0}} + K_3 \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\mu_i} + K_4 \sqrt{\sigma_{m_0} \sigma_{m_0-1}} \to 0,$$

а также

$$\delta_{m_0}(\sigma) \leq 2K_0 \sigma_{m_0} + \sqrt{4K_0^2 \sigma_{m_0}^2 + \theta_0} \to 0.$$

Лемма доказана.

Сформулируем итоговое утверждение, которое вытекает из всех проведенных выше рассуждений и лемм 4–6.

Теорема 3. *Пусть параметры регуляризации $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m_0}$ положительны и выполнены условия* (13), (14). *Тогда*

$$\delta_s(\sigma) = \|(A_s x^\sigma - b_s)^+ - \widetilde{\Delta} b_s\| + \|(c_s - B_s^T y^\sigma)^+ - \widetilde{\Delta} c_s\| \to 0 \quad (s = 0, 1, \ldots, m_0).$$

Замечание. Условия (13) представляются чересчур сильными, однако они обеспечивают сходимость метода в применении к несобственным задачам ЛП 3-го рода в случае, когда число вертикальных и горизонтальных разбиений исходных данных больше двух. Если же число таких разбиений не превышает двух или ограничения хотя бы одной из задач (прямой или двойственной) совместны, то можно обойтись более слабыми условиями (14). Следует также оговорить, что сходимость последовательностей x^σ и y^σ к решению исходной пары задач имеет место только в собственном случае. Если исходная задача — несобственная 1-го рода, то к ее обобщенному решению сходится только последовательность x^σ, а последовательность y^σ не ограничена. Для несобственной задачи 2-го рода к ее обобщенному решению сходится только последовательность y^σ, а последовательность x^σ не ограничена. В случае несобственности 3-го рода обе эти последовательности не ограничены.

5. Заключение

Ранее авторами был предложен и исследован новый подход к лексикографической коррекции несобственных задач линейного программирования. В основе подхода лежит многоступенчатая симметричная регуляризация классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным. Получающаяся функция может быть положена в основу формирования новых схем двойственности для задач такого типа. В предыдущих работах был исследован случай несобственности 1-го и 2-го родов. В данной работе результаты распространены на 3-й род несобственности. Приведены условия сходимости метода, дана содержательная интерпретация получаемого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
4. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
5. **Скарин В. Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
6. **Скарин В. Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
7. **Еремин И. И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 124–129.
8. **Попов Л. Д.** Лексикографические вариационные неравенства и некоторые приложения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 1. С. 103–115.
9. **Попов Л. Д., Скарин В. Д.** Лексикографическая регуляризация и двойственность для несобственных задач линейного программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 279–291.
10. **Guddat J.** Stability in convex quadratic programming // Mathematische Operationsforschung und Statistik. 1976. Vol. 8. P. 223–245.
11. **Dorn W. S.** Duality in quadratic programming // Buart. Appl. Math. 1960. № 18. P. 407–413.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 19.02.2016

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук
e-mail: skavd@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.917

ОТКРЫТЫЕ УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И ОТДЕЛИМОСТЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАЦИИ ЗАМЫКАНИЯ[1]

Е. Г. Пыткеев, А. Г. Ченцов

Исследуются ультрафильтры топологий, а также множества ультрафильтров, мажорирующих всякий раз фильтр открытых окрестностей некоторой фиксированной точки топологического пространства. Упомянутые множества рассматриваются как “укрупненные точки” исходного пространства. Изучаются условия, обеспечивающие различимость (укрупненных) “точек” упомянутого типа. При этом используются нетрадиционные аксиомы отделимости, для которых анализируется связь с известными аксиомами T_0, T_1 и T_2.

Ключевые слова: замыкание, окрестность, ультрафильтр.

E. G. Pytkeev, A. G. Chentsov. Open ultrafilters and separability with the use of the operation of closure.

We study ultrafilters of topologies as well as sets of ultrafilters that each time dominate the open neighborhood filter of some fixed point in a topological space. The sets of ultrafilters are considered as “enlarged points” of the original space. We study conditions that provide the discernibility of (enlarged) “points” of this type. We use nontraditional separability axioms and study their connection with the known axioms T_o, T_1, and T_2.

Keywords: closure, neighborhood, ultrafilter.

MSC: 54A10, 54A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-212-225

Введение

Основным предметом исследования в работе являются открытые ультрафильтры (у/ф), т. е. ультрафильтры топологий или ультрафильтры, “составленные” из открытых множеств. В то же время сами топологии могут рассматриваться как варианты так называемых π-систем, т. е. семейств множеств, замкнутых относительно конечных пересечений. К этому требованию добавляем нижеследующее: рассматриваем π-системы с “нулем” и “единицей”. Фиксируя ту или иную π-систему, мы получаем некоторый аналог измеримого пространства. Можно рассматривать у/ф данного пространства, трактуя открытые у/ф как вариант соответствующего более общего определения. В то же время данный частный случай (открытые у/ф) представляет самостоятельный интерес в связи с понятием абсолюта [1, с. 349]. Отметим работы [2; 3], касающиеся, помимо прочего, вопросов сходимости открытых у/ф. Укажем здесь же, что другой частный случай у/ф π-систем (см. [4, с. 14]) связан с пространствами Стоуна, где используются у/ф алгебры множеств. Конструкции, использующие пространства Стоуна, оказались полезными [2] при построении расширений абстрактных задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера (см. также [2] в части использования для аналогичных целей расширения Волмэна [5]), возникающих в теории управления.

Настоящее исследование непосредственно связано с работой [6], в которой конструируется абсолют хаусдорфова пространства, причем используются для этой цели открытые у/ф (максимальные центрированные системы открытых множеств). В предлагаемой статье элементы

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований президиума РАН “Математические задачи современной теории управления” и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 16-07-00266, 16-01-00505, 16-01-00649).

конструкций [6] рассматриваются без предположения об отделимости пространства; в то же время отмечается (для некоторых положений [6]) исчерпывающий характер T_2-отделимости. Исходному пространству сопоставляется множество “укрупненных точек”, которые отождествляются с непустыми замкнутыми (в естественном смысле) множествами открытых у/ф. При этом открытые у/ф, составляющие “укрупненную точку”, соотносятся с некоторой точкой исходного пространства, а именно: все упомянутые у/ф сходятся к последней (в связи с общими вопросами сходимости у/ф см. [2; 7; 8]). Вполне естественным представляется вопрос о различимости “укрупненных точек”, изучение которого было начато в [3]. В настоящей работе исследуются различные варианты различимости, а также соотношения, связывающие соответствующие условия упомянутой различимости с традиционными аксиомами отделимости (T_0-, T_1- и T_2-пространства). В формулировках условий на исходное пространство, обеспечивающих различимость “укрупненных точек”, удается, в частности, использовать канонически открытые окрестности точек данного пространства. Связь с традиционными условиями отделимости иллюстрируется конкретными примерами.

1. Сводка обозначений общего характера

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки, $\varnothing$ — пустое множество). *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Произвольному объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z в качестве элемента. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) X и полагаем $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$, получая семейство всех непустых п/м X. Через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$. Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; при $f \in B^A$ и $a \in A$ имеем $f(a) \in B$ (значение f в точке a). Если S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(S)\big)$, то $\mathbf{C}_S[\mathcal{S}] \triangleq \{S \setminus \mathbb{S} \colon \mathbb{S} \in \mathcal{S}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(S)\big)$ (семейство, двойственное к $\mathcal{S}$). Для всяких непустого семейства $\mathcal{X}$ и множества Y в виде $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y \colon X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathcal{P}(Y)\big)$ имеем след $\mathcal{X}$ на множество Y. Условимся также о следующих соглашениях: если $\mathcal{E}$ — непустое семейство, то в виде

$$\{\cup\}(\mathcal{E}) \triangleq \Big\{\bigcup_{H \in \mathcal{H}} H \colon \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E})\Big\} = \Big\{\Sigma \in \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\Xi \in \mathcal{E}} \Xi\Big) \,\big|\, \exists\, \mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{E}) \colon \Sigma = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H\Big\},$$

$$\{\cap\}(\mathcal{E}) \triangleq \Big\{\bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \colon \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})\Big\} = \Big\{\Sigma \in \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\Xi \in \mathcal{E}} \Xi\Big) \,\big|\, \exists\, \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) \colon \Sigma = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H\Big\}$$

имеем непустые семейства. Нам потребуются некоторые специальные семейства. В этой связи фиксируем до конца раздела непустое множество M. Тогда

$$\pi[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) \mid (\varnothing \in \mathcal{M}) \,\&\, (M \in \mathcal{M}) \,\&\, (A \cap B \in \mathcal{M} \;\; \forall A \in \mathcal{M} \;\; \forall B \in \mathcal{M})\}$$

есть семейство всех π-систем [4, с. 14] п/м M с “нулем” и “единицей”, а

$$(\mathrm{top})[M] \triangleq \Big\{\tau \in \pi[M] \,\big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \;\; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} = \Big\{\tau \in \pi[M] \,\big|\, \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \;\; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)\Big\}$$

есть множество всех топологий на M. Пусть

$$(\mathrm{LAT})_o[M] \triangleq \{\mathcal{M} \in \pi[M] \mid A \cup B \in \mathcal{M} \;\; \forall A \in \mathcal{M} \;\; \forall B \in \mathcal{M}\}$$

(семейство всех решеток п/м E с “нулем” и “единицей”). Заметим, что

$$(\mathrm{top})[M] \subset (\mathrm{LAT})_o[M] \subset \pi[M]. \tag{1.1}$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[M]$ и $H \in \mathcal{P}(M)$, то через $\mathrm{cl}(H,\tau)$ обозначаем замыкание H в топологическом пространстве (ТП) (M,τ). Наряду с $(\mathrm{top})[M]$ используем множество

$$(\mathrm{clos})[M] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) \,\Big|\, (\varnothing \in \mathcal{F})\,\&\,(M \in \mathcal{F})\,\&\,(A \cup B \in \mathcal{F} \;\; \forall A \in \mathcal{F} \;\; \forall B \in \mathcal{F})\,\&$$

$$\Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F} \;\; \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\Big)\Big\}$$

всех замкнутых топологий [1, с. 98,99] на множестве M. Введем в рассмотрение открытые и замкнутые базы, полагая, что

$$(\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[M] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) \,\Big|\, \Big(M = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big)\,\&$$

$$\big(\forall B_1 \in \mathcal{B} \;\; \forall B_2 \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in B_1 \cap B_2 \;\; \exists\, B_3 \in \mathcal{B}\colon (x \in B_3)\,\&\,(B_3 \subset B_1 \cap B_2)\big)\Big\},$$

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[M] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(M)) \,\Big|\, (M \in \mathcal{B})\,\&\,\Big(\bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \varnothing\Big)\,\&$$

$$\big(\forall B_1 \in \mathcal{B} \;\; \forall B_2 \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in M \setminus (B_1 \cup B_2) \;\; \exists\, B_3 \in \mathcal{B}\colon (B_1 \cup B_2 \subset B_3)\,\&\,(x \notin B_3)\big)\Big\}$$

(введены семейства открытых и замкнутых баз). При этом

$$\big(\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[M] \;\; \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})[M]\big)\,\&\,\big(\{\cap\}(\widetilde{\mathcal{B}}) \in (\mathrm{clos})[M] \;\; \forall \widetilde{\mathcal{B}} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[M]\big).$$

Фильтры и ультрафильтры $\boldsymbol{\pi}$-систем. Фиксируем до конца раздела произвольную π-систему $\mathcal{M} \in \pi[M]$. Ниже используется семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{M}$:

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M}) \,\Big|\, \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\Big\}.$$

В виде

$$\begin{aligned}\mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \;\; \forall A \in \mathcal{F} \;\; \forall B \in \mathcal{F})\,\&\\ \big(\forall F \in \mathcal{F} \;\; \forall \Lambda \in \mathcal{M} \;\; (F \subset \Lambda) \Rightarrow (\Lambda \in \mathcal{F})\big)\big\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

имеем множество всех фильтров π-системы $\mathcal{M}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M}) &\stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \;\; (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}\\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \mid \forall \Lambda \in \mathcal{M} \;\; (\Lambda \cap U \neq \varnothing \;\; \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Lambda \in \mathcal{U})\}\\ &= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \mid \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{M}] \;\; (\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{Z})\}\end{aligned} \tag{1.3}$$

есть множество всех ультрафильтров данной π-системы; $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M}) \neq \varnothing$. При этом $(\mathcal{M}-\mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{\Lambda \in \mathcal{M} \mid x \in \Lambda\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{M}) \;\; \forall x \in M$ (введены тривиальные фильтры π-системы $\mathcal{M}$, отвечающие точкам множества M). Пусть

$$\Phi_{\mathcal{M}}(\Lambda) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{M}) \mid \Lambda \in \mathcal{U}\} \qquad \forall \Lambda \in \mathcal{M}.$$

Тогда $(\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{M}}(\Lambda)\colon \Lambda \in \mathcal{M}\} \in (\mathrm{op}-\mathrm{BAS})\;[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$, а топология

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[M] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}\big((\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}]\big) = \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G} \;\; \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{M}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$$

превращает $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})$ в T_2-пространство. Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{M} \in (\mathrm{LAT})_o[M]$. Тогда [2, § 6] $(\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$ и, как следствие, $\{\cap\}((\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}]) \in (\mathrm{clos})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$; при этом (открытая) топология

$$\mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[M] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})}[\{\cap\}((\mathbb{UF})[M;\mathcal{M}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})]$$

превращает $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})$ в компактное T_1-пространство (см. [2, предложение 6.1]). Итак, в рассматриваемом случае $\mathcal{M} \in (\mathrm{LAT})_o[E]$ на $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M})$ определены две топологии: $\mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[E]$ и $\mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[E]$. При этом [**?**, предложение 4.1] $\mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[E] \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[E]$, и в виде $(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{M}), \mathbf{T}^o_{\mathcal{M}}[E], \mathbf{T}^*_{\mathcal{M}}[E])$ имеем битопологическое пространство.

2. Открытые ультрафильтры и их свойства

Всюду в дальнейшем E — непустое множество и $\tau \in (\mathrm{top})[E]$; итак, (E,τ) — фиксированное ТП. Поскольку (см. (1.1)) $\tau \in (\mathrm{LAT})_o[E]$, то определены топологии $\mathbf{T}^o_\tau[E] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\tau)]$ и $\mathbf{T}^*_\tau[E] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_o^*(\tau)]$. Более того [3], $\mathbf{T}^o_\tau[E] = \mathbf{T}^*_\tau[E]$, а тогда в виде

$$(\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}^*_\tau[E]) = (\mathbb{F}_o^*(\tau), \mathbf{T}^o_\tau[E]) \tag{2.1}$$

имеем непустой нульмерный компакт (см. [3]). Вместе с тем оказывается, что (2.1) — экстремально несвязное [5, с. 540] ТП. Действительно, при $\mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)$ определено множество $\Phi_\tau\big(\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} G\big) \in \mathcal{P}\big(\mathbb{F}_o^*(\tau)\big)$ и, более того,

$$\Phi_\tau\Big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\Big) = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \Phi_\tau(G), \mathbf{T}^*_\tau[E]\Big). \tag{2.2}$$

Поскольку множество в левой части (2.2) открыто в ТП (2.1) (см. разд. 1), то экстремальная несвязность ТП (2.1) установлена.

Итак, (2.1) есть непустой экстремально несвязный компакт. Если $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)$, то полагаем, что $\mathbb{F}_o^*(\tau|\,\mathcal{G}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau) \mid \mathcal{G} \subset \mathcal{U}\}$. В этой связи отметим, что при $x \in E$

$$N^o_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} (\tau - \mathrm{triv})[x] = \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau), \tag{2.3}$$

и, как следствие, определено (непустое замкнутое) множество

$$\mathbb{F}_o^*(\tau|\,N^o_\tau(x)) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\tau)}[\mathbf{T}^*_\tau[E]] \setminus \{\varnothing\}. \tag{2.4}$$

Семейство всех множеств (2.4) будет основным предметом дальнейшего исследования. Сейчас, следуя на идейном уровне [6], отметим, что множество

$$(\tau - \mathrm{Abs})[E] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{x\in E} \mathbb{F}_o^*\big(\tau|\,N^o_\tau(x)\big) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_o^*(\tau)) \tag{2.5}$$

может рассматриваться в виде некоторого аналога абсолюта [6] исходного ТП (E,τ); $\mathrm{cl}((\tau - \mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}^*_\tau[E]) = \mathbb{F}_o^*(\tau)$, а тогда ТП $\big((\tau-\mathrm{Abs})[E], \mathbf{T}^*_\tau[E]\big|_{(\tau-\mathrm{Abs})[E]}\big)$ экстремально несвязно (см. [3]). Заметим, что $\{G \in \tau \mid E = \mathrm{cl}(G,\tau)\} \subset \mathcal{U}\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$.

Возвращаясь к (2.4), отметим, что данные множества можно рассматривать как "укрупненные точки" в (E,τ). В этой связи напомним, что (наряду с (2.3)) в [7] предлагается более общее понятие окрестности:

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, G \in N^o_\tau(x)\colon G \subset H\} \qquad \forall x \in E \tag{2.6}$$

(введено семейство всех окрестностей x в ТП (E,τ)). Кроме того,

$$\beta_o[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(E)) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} \colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\}$$

есть (см. [7]) семейство всех баз фильтров множества E. Если $\mathcal{B} \in \beta_o[E]$, то $\mathfrak{F}[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, B \in \mathcal{B} \colon B \subset H\}$ есть фильтр E, порожденный базой $\mathcal{B}$; при этом (см. [7, гл. I]) $\forall x \in E$

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset \mathfrak{F}[\mathcal{B}]). \tag{2.7}$$

Ясно, что $\mathbb{F}^*(\tau) \subset \beta_o[E]$, а потому (2.7) применимо к открытым фильтрам ТП (E,τ).

Предложение 2.1. *Если $x \in E$, то справедливо равенство*

$$\mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x)) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau) \mid \mathcal{U} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\}. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (2.8), полагая $x \in E$ фиксированным. Пусть $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x))$. Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau)$ и $N^o_\tau(x) \subset \mathfrak{U}$. В частности, $\mathfrak{U} \in \beta_o[E]$ и определен "стоун-чеховский" фильтр $\widetilde{\mathfrak{U}} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{F}[\mathfrak{U}]$, для которого $\mathfrak{U} \subset \widetilde{\mathfrak{U}}$. Как следствие $N^o_\tau(x) \subset \widetilde{\mathfrak{U}}$ и (см. [7, гл. I]) с учетом (2.6) $N_\tau(x) \subset \widetilde{\mathfrak{U}}$, что согласно (2.7) означает сходимость $\mathfrak{U} \stackrel{\tau}{\Rightarrow} x$. Поэтому $\mathfrak{U} \in \Omega$, чем завершается проверка вложения

$$\mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x)) \subset \Omega. \tag{2.9}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\tau)$ и при этом $\mathcal{V} \stackrel{\tau}{\Rightarrow} x$. Заметим, что, в частности, $\mathcal{V} \in \beta_o[E]$ и определен фильтр

$$\mathcal{W} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{F}[\mathcal{V}] = \{H \in \mathcal{P}(E) \mid \exists\, V \in \mathcal{V} \colon V \subset H\},$$

для которого согласно (2.7) $N_\tau(x) \subset \mathcal{W}$. При этом, однако, $N^o_\tau(x) \subset N_\tau(x)$ и $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Тогда $N^o_\tau(x) \subset \mathcal{W} \cap \tau$, где, как легко проверить (см. [9, (2.4.5)]), $\mathcal{W} \cap \tau \in \mathbb{F}^*(\tau)$. При этом $\mathcal{V} \subset \tau$, а потому $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \cap \tau$. Тогда (см. (1.3)) $\mathcal{V} = \mathcal{W} \cap \tau$, и, как следствие, $N^o_\tau(x) \subset \mathcal{V}$. В итоге $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x))$, чем завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbb{F}^*_o\big(\tau|\, N^o_\tau(x)\big)$, откуда с учетом (2.9) следует равенство $\mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x)) = \Omega$.

Предложение доказано.

С учетом предложения 2.1 логично рассматривать множества (2.4) как "укрупненные точки" исходного ТП. Кроме того, из (2.5) и предложения 2.1 следует, что

$$\forall \mathcal{U} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E]\ \ \exists\, x \in E \colon \mathcal{U} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x. \tag{2.10}$$

3. Вопросы различимости "укрупненных точек"

В настоящем разделе исследуются условия на ТП (E,τ), позволяющие в том или ином смысле различать множества (2.4), отвечающие выбору несовпадающих точек множества E.

Предложение 3.1. *Если $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, то*

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x_1)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x_2)) \neq \varnothing\big) \iff \big(\exists\, G \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(x_2 \notin \mathrm{cl}(G,\tau))\big). \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$. Пусть истинно утверждение в левой части (3.1). С учетом этого выберем и зафиксируем у/ф

$$\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x_1)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau|\, N^o_\tau(x_2)).$$

Тогда $\mathfrak{U} \in \mathbb{F}^*_o(\tau)$, $N^o_\tau(x_1) \subset \mathfrak{U}$ и $N^o_\tau(x_2) \setminus \mathfrak{U} \neq \varnothing$. В силу (1.3) имеем, что $\forall G \in \tau$

$$(G \cap U \neq \varnothing\ \ \forall U \in \mathfrak{U}) \Longrightarrow (G \in \mathfrak{U}). \tag{3.2}$$

Пусть $\mathbb{G} \in N^o_\tau(x_2) \setminus \mathfrak{U}$. Тогда (см. (3.2)) для некоторого $U_o \in \mathfrak{U}$ имеем равенство $\mathbb{G} \cap U_o = \varnothing$, откуда следует, что

$$x_2 \notin \mathrm{cl}(U_o, \tau). \tag{3.3}$$

С другой стороны, поскольку $U_o \in \mathfrak{U}$ и $N^o_\tau(x_1) \subset \mathfrak{U}$, имеем, что $U_o \cap G \neq \varnothing \ \forall G \in N^o_\tau(x_1)$. Последнее означает, что $x_1 \in \mathrm{cl}(U_o, \tau)$, откуда согласно (3.3) имеем:

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(U_o, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(U_o, \tau)). \tag{3.4}$$

Поскольку $U_o \in \tau$, из (3.4) вытекает истинность утверждения в правой части (3.1). Установлена импликация

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2)) \neq \varnothing\big) \Rightarrow \big(\exists\, G \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G, \tau))\big). \tag{3.5}$$

Пусть, напротив, истинно утверждение в правой части (3.1) (т. е. утверждение следствия (3.5)). Выберем и зафиксируем $V \in \tau$ со свойством

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(V, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(V, \tau)). \tag{3.6}$$

Тогда (см. (3.6)) $V \cap G \neq \varnothing \ \forall G \in N^o_\tau(x_1)$. Поэтому $\mathcal{A} \triangleq N^o_\tau(x_1) \cup \{V\} \in (\mathrm{Cen})[\tau]$, а тогда, как легко видеть, $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ для некоторого у/ф $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\tau)$. В частности, $N^o_\tau(x_1) \subset \mathcal{V}$, и, следовательно,

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)). \tag{3.7}$$

С другой стороны, $E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in \tau$ и согласно (3.6) $x_2 \in E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau)$. Поэтому $E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in N^o_\tau(x_2)$. Поскольку $V \in \mathcal{V}$, то (см. (1.2))

$$(E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in \mathcal{V}) \implies \big((E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau)) \cap V \neq \varnothing\big). \tag{3.8}$$

Однако $V \subset \mathrm{cl}(V, \tau)$, и потому $(E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau)) \cap V = \varnothing$, а тогда согласно (3.8)

$$E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \notin \mathcal{V}.$$

Получили свойство $E \setminus \mathrm{cl}(V, \tau) \in N^o_\tau(x_2) \setminus \mathcal{V}$. Тогда $N^o_\tau(x_2) \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$ и $\mathcal{V} \notin \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2))$. В итоге (см. (3.7))

$$\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2)).$$

Тем самым установлена импликация, противоположная (3.5), а стало быть, и эквиваленция (3.1).

Предложение доказано.

Следствие 3.1. *Если $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$, то*

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)) \neq \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2))\big) \Longleftrightarrow$$

$$\big((\exists\, G_1 \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau))) \vee (\exists\, G_2 \in \tau \colon (x_1 \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)) \,\&\, (x_2 \in \mathrm{cl}(G_2, \tau)))\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из предложения 3.1 с учетом того, что

$$\big(\mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)) \neq \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2))\big) \Longleftrightarrow$$

$$\big((\mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2)) \neq \varnothing) \vee (\mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_2)) \setminus \mathbb{F}^*_o(\tau |\, N^o_\tau(x_1)) \neq \varnothing)\big).$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем называть ТП (E, τ) $T_{[0]}$-*пространством*, если $\forall x_1 \in E$ $\forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (x_1 \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)) \,\&\, (x_2 \in \mathrm{cl}(G_2, \tau))\big).$$

В силу следствия 3.1 получаем теперь

Предложение 3.2. *Эквивалентны следующие условия:*
1) (E,τ) *есть* $T_{[0]}$*-пространство;*
2) $\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \neq \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \qquad \forall x_1 \in E \qquad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Будем называть ТП (E,τ) $T_{[1]}$*-пространством*, если $\forall x_1 \in E\ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \exists G \in \tau$: $(x_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(x_2 \notin \mathrm{cl}(G,\tau))$.

Из предложения 3.1 получаем очевидное теперь

Предложение 3.3. *Эквивалентны следующие условия:*
1′) (E,τ) *есть* $T_{[1]}$*-пространство;*
2′) $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \neq \varnothing\big)\,\&\,\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) \setminus \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \neq \varnothing\big).$$

Вполне очевидно также следующее свойство: из того, что (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство, вытекает, что (E,τ) является $T_{[0]}$-пространством.

Предложение 3.4. *Если ТП* (E,τ) *есть* $T_{[1]}$*-пространство, то оно является также* T_1*-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство. Выберем произвольно $u \in E$ и $v \in E \setminus \{u\}$. Тогда $v \in E$ и $u \in E \setminus \{v\}$. С учетом определения 3.2 подберем $\mathbb{G} \in \tau$ со свойствами

$$(v \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau))\,\&\,(u \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)). \tag{3.9}$$

Тогда $E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in \tau$ и при этом (см. (3.9)) $u \in E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Это означает, что $E\setminus\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in N_\tau^o(u)$.

С другой стороны, из (3.9) вытекает, что $v \notin E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Стало быть, $\exists\, G \in N_\tau^o(u)\colon v \notin G$. Поскольку выбор u и v был произвольным, установлено, что (E,τ) есть T_1-пространство.

Предложение доказано.

Предложение 3.5. *Из того, что* (E,τ) *есть* T_2*-пространство, следует:* (E,τ) *является также* $T_{[1]}$*-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (E,τ) является T_2-пространством. Выберем произвольно $u \in E$ и $v \in E \setminus \{u\}$. Используя отделимость (E,τ), подберем $G' \in N_\tau^o(u)$ и $G'' \in N_\tau^o(v)$, для которых $G' \cap G'' = \varnothing$. При этом $E \setminus G'' \in \mathbf{C}_E[\tau]$ и $G' \subset E \setminus G''$. Поэтому $\mathrm{cl}(G',\tau) \subset E \setminus G''$, откуда следует, что $u \in \mathrm{cl}(G',\tau)$ и $v \notin \mathrm{cl}(G',\tau)$. Поскольку $G' \in \tau$, получили, что $\exists\, G \in \tau\colon (u \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(v \notin \mathrm{cl}(G,\tau))$. Коль скоро выбор u и v был произвольным, установлено (см. определение 3.2), что (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство.

Предложение доказано.

Отметим еще несколько свойств, имеющих отношение к проблеме различимости "укрупненных точек". Так $\forall x_1 \in E\ \forall x_2 \in E$

$$\big(\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) = \varnothing\big) \Longleftrightarrow \big(\exists\, G_1 \in N_\tau^o(x_1)\ \exists\, G_2 \in N_\tau^o(x_2)\colon G_1 \cap G_2 = \varnothing\big). \tag{3.10}$$

З а м е ч а н и е 3.1. В связи с проверкой (3.10) ограничимся следующим рассуждением. Пусть утверждение в левой части (3.10) выполнено, а утверждение в правой части — нет. Итак,

$$G_1 \cap G_2 \neq \varnothing \qquad \forall G_1 \in N_\tau^o(x_1) \qquad \forall G_2 \in N_\tau^o(x_2) \tag{3.11}$$

(в пределах данного замечания $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ фиксированы). Тогда, как легко видеть, $N_\tau^o(x_1) \cup N_\tau^o(x_2) \in (\mathrm{Cen})[\tau]$, а потому для некоторого у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$ имеем, что $N_\tau^o(x_1) \cup N_\tau^o(x_2) \subset \mathcal{U}$. Поэтому $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2))$, что невозможно. Полученное противоречие опровергает (3.11). Прочие рассуждения по проверке (3.10) очевидным образом следуют из определений.

Введем в рассмотрение канонически открытые и канонически замкнутые множества в ТП (E,τ) (см. [1, с. 105, 106]). Пусть

$$(\tau - \mathrm{Int})[A] \overset{\triangle}{=} \{x \in E \mid A \in N_\tau(x)\} \qquad \forall A \in \mathcal{P}(E) \tag{3.12}$$

(посредством (3.12) введена внутренность произвольного п/м E). Тогда

$$(\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{(\tau - \mathrm{int})[F] \colon F \in \mathbf{C}_E[\tau]\} \in \mathcal{P}'(\tau)$$

есть семейство всех канонически открытых (в (E,τ)) п/м E. Соответственно

$$(\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{cl}(G,\tau) \colon G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\tau]) \tag{3.13}$$

есть семейство всех канонически замкнутых п/м E. Легко видеть, что

$$(E\backslash F \in (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau]\ \forall F \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau])\,\&\,(E\backslash G \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]\ \forall G \in (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau]). \tag{3.14}$$

Предложение 3.6. *Эквивалентны следующие условия:*
1) (E,τ) *есть* $T_{[1]}$*-пространство;*
2) $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \ \exists\, G \in N^o_\tau(x_1) \cap (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \colon x_2 \notin G$.

Доказательство. Проверим импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Итак, пусть истинно 1), т. е. (E,τ) — $T_{[1]}$-пространство. Пусть $x^{(1)} \in E$ и $x^{(2)} \in E \setminus \{x^{(1)}\}$. Тогда (см. определение 3.2) имеем $\mathbb{G} \in \tau$ со свойствами

$$(x^{(2)} \in \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau))\,\&\,(x^{(1)} \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)), \tag{3.15}$$

где $\mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]$. Тогда $E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau]$ в силу (3.14) и при этом $x^{(1)} \in E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Имеем, в частности,

$$E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in \tau \colon x^{(1)} \in E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau).$$

Это означает, что $E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau) \in N^o_\tau(x^{(1)}) \cap (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau]$, причем согласно (3.15) $x^{(2)} \notin E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G},\tau)$. Так как выбор $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ был произвольным, установлено свойство 2). Итак, 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть теперь истинно 2). Выберем произвольно $y_1 \in E$ и $y_2 \in E\setminus\{y_1\}$. Тогда для некоторой окрестности

$$\Gamma \in N^o_\tau(y_2) \cap (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \tag{3.16}$$

имеет место свойство $y_1 \notin \Gamma$ (учитываем, что $y_2 \in E$ и $y_1 \in E \setminus \{y_2\}$). Тогда в силу (3.14) $E \setminus \Gamma \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]$, причем $y_1 \in E \setminus \Gamma$. Вместе с тем $E \setminus \Gamma = \mathrm{cl}(\Omega,\tau)$, где $\Omega \in \tau$. Поэтому $y_1 \in \mathrm{cl}(\Omega,\tau)$. Кроме того, $y_2 \in \Gamma$ в силу (3.16), а потому $y_2 \notin E \setminus \Gamma$ и, стало быть, $y_2 \notin \mathrm{cl}(\Omega,\tau)$. Поэтому

$$\Omega \in \tau \colon (y_1 \in \mathrm{cl}(\Omega,\tau))\,\&\,(y_2 \notin \mathrm{cl}(\Omega,\tau)).$$

Поскольку выбор y_1 и y_2 был произвольным, установлено, что

$$\forall x_1 \in E \qquad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\} \qquad \exists\, G \in \tau \colon (x_1 \in \mathrm{cl}(G,\tau))\,\&\,(x_2 \notin \mathrm{cl}(G,\tau)).$$

С учетом определения 3.2 получаем, что (E,τ) есть $T_{[1]}$-пространство, т. е. истинно 1). Итак, 2) $\Rightarrow$ 1), а потому 1) $\Leftrightarrow$ 2).

Предложение доказано.

Предложение 3.7. *Эквивалентны следующие условия:*
1) (E,τ) *есть* $T_{[0]}$*-пространство;*
2) $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}$

$$(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(x_1) \cap (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \colon x_2 \notin G_1) \vee (\exists\, G_2 \in N^o_\tau(x_2) \cap (\mathrm{can} - \mathrm{op})[\tau] \colon x_1 \notin G_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схема доказательства подобна в значительной степени рассуждению предыдущего доказательства. Тем не менее в целях полноты изложения рассмотрим эту схему. Пусть истинно 1) и выбраны произвольные точки $u_1 \in E$ и $u_2 \in E \setminus \{u_1\}$. Тогда

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (u_1 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(u_2 \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \\ \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (u_1 \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(u_2 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big). \qquad (3.17)$$

Рассмотрим первую возможность в (3.17), фиксируя $\mathbb{G}_1 \in \tau$ со свойствами $(u_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau))\,\&$ $(u_2 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau))$. Тогда $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$ и, как следствие (см. (3.14)), $\mathbb{G}^{(1)} \triangleq E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$, причем $u_2 \in \mathbb{G}^{(1)}$. Тогда $\mathbb{G}^{(1)} \in N^o_\tau(u_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ таково, что $u_1 \notin \mathbb{G}^{(1)}$. Итак, из первого положения в (3.17) следует, что

$$\exists\, G \in N^o_\tau(u_2) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_1 \notin G. \qquad (3.18)$$

Пусть истинно второе утверждение в (3.17) и $\mathbb{G}_2 \in \tau$ таково, что $(u_1 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau))\,\&\,(u_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau))$. Тогда $\mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$, а потому (см. (3.14)) $\mathbb{G}^{(2)} \triangleq E \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2,\tau) \in (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$, причем $u_1 \in \mathbb{G}^{(2)}$ и $u_2 \notin \mathbb{G}^{(2)}$. Итак, из второго положения в (3.17) следует, что

$$\exists\, G \in N^o_\tau(u_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_2 \notin G. \qquad (3.19)$$

Из (3.18) и (3.19) вытекает, что при условии (3.17) непременно

$$(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(u_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_2 \notin G_1) \,\vee\, (\exists\, G_2 \in N^o_\tau(u_2) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon u_1 \notin G_2).$$

Поскольку u_1 и u_2 выбирались произвольно, имеем 2). Следовательно, 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть истинно 2). Выберем произвольно $v_1 \in E$ и $v_2 \in E \setminus \{v_1\}$. Тогда

$$(\exists\, G_1 \in N^o_\tau(v_1) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_2 \notin G_1) \,\vee\, (\exists\, G_2 \in N^o_\tau(v_2) \,\cap\, (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_1 \notin G_2). \qquad (3.20)$$

Пусть сначала истинно первое положение в (3.20), а $\Gamma_1 \in N^o_\tau(v_1) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ таково, что $v_2 \notin \Gamma_1$. Тогда $E \setminus \Gamma_1 \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$ и, стало быть, $E \setminus \Gamma_1 = \mathrm{cl}(\Gamma^o_1,\tau)$, где $\Gamma^o_1 \in \tau$. Тогда $v_1 \notin \mathrm{cl}(\Gamma^o_1,\tau)$ и $v_2 \in \mathrm{cl}(\Gamma^o_1,\tau)$. Итак,

$$\big(\exists G_1 \in N^o_\tau(v_1) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_2 \notin G_1\big) \Longrightarrow \big(\exists G' \in \tau\colon (v_1 \notin \mathrm{cl}(G',\tau))\&(v_2 \in \mathrm{cl}(G',\tau))\big). \qquad (3.21)$$

Пусть истинно второе положение в (3.20), а $\Gamma_2 \in N^o_\tau(v_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]$ таково, что $v_1 \notin \Gamma_2$. Тогда $E \setminus \Gamma_2 \in (\mathrm{can}-\mathrm{clos})[\tau]$, откуда следует, что $E \setminus \Gamma_2 = \mathrm{cl}(\Gamma^o_2,\tau)$, где $\Gamma^o_2 \in \tau$. Тогда $v_1 \in \mathrm{cl}(\Gamma^o_2,\tau)$. Вместе с тем $v_2 \notin E \setminus \Gamma_2$ и, как следствие, $v_2 \notin \mathrm{cl}(\Gamma^o_2,\tau)$. Поэтому

$$\exists\, G'' \in \tau\colon (v_1 \in \mathrm{cl}(G'',\tau))\,\&\,(v_2 \notin \mathrm{cl}(G'',\tau)),$$

чем и завершается проверка истинности импликации

$$\big(\exists G_2 \in N^o_\tau(v_2) \cap (\mathrm{can}-\mathrm{op})[\tau]\colon v_1 \notin G_2\big) \Longrightarrow \big(\exists G'' \in \tau\colon (v_1 \in \mathrm{cl}(G'',\tau))\&(v_2 \notin \mathrm{cl}(G'',\tau))\big). \qquad (3.22)$$

Из (3.20)–(3.22) получаем теперь, что

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (v_1 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(v_2 \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (v_1 \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(v_2 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big).$$

Поскольку выбор v_1 и v_2 был произвольным, установлено (см. определение 3.1), что (E,τ) есть $T_{[0]}$-пространство, т. е. истинно 1). Итак, 2) $\Rightarrow$ 1).

Предложение доказано.

4. Некоторые примеры

В настоящем разделе уточняются соотношения, связывающие $T_{[0]}$- и $T_{[1]}$-пространства с ТП, удовлетворяющими традиционным аксиомам отделимости. Сначала рассмотрим простейший пример T_1-, но не $T_{[0]}$-пространства.

Итак, пусть (здесь и ниже) $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\}$. Через $\mathfrak{K}$ обозначаем далее семейство всех конечных п/м $\mathbb{N}$: $\mathfrak{K} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{Fin}(\mathbb{N}) \cup \{\varnothing\}$.

П р и м е р 1. Пусть $E = \mathbb{N}$ и $\tau = \{\mathbb{N} \setminus K : K \in \mathfrak{K}\} \cup \{\varnothing\}$. Итак, рассматриваем натуральный ряд в топологии Зарисского (см. [8, с. 11]). Легко видеть, что (E, τ) является (в данном случае) T_1-пространством. При этом $\mathbf{C}_E[\tau] = \mathfrak{K} \cup \{E\}$. Покажем сначала, что (E, τ) не является $T_{[1]}$-пространством. Фиксируем $x_1 \in E$ и $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$ (x_1 и x_2 — два различных натуральных числа). Допустим, что для некоторого множества $\mathbb{G} \in \tau$

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)) \,\&\, (x_2 \notin \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)). \tag{4.1}$$

Тогда (см. первое положение в (4.1)) $\mathbb{G} \neq \varnothing$, а потому $\mathbb{G} = E \setminus \mathbb{K}$, где $\mathbb{K} \in \mathfrak{K}$. Тогда $\mathbb{G}$ — бесконечное множество и $\mathbb{G} \subset \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)$, а потому $\mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau) = E$ (поскольку $\mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$) и, вопреки (4.1), $x_2 \in \mathrm{cl}(\mathbb{G}, \tau)$. Полученное противоречие показывает, что (4.1) невозможно ни при каком выборе множества $\mathbb{G} \in \tau$, откуда легко следует, что (E, τ) не является $T_{[1]}$-пространством.

Фактически данный вывод может быть усилен:

$$\mathfrak{W} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{N} \setminus K : K \in \mathfrak{K}\} = \tau \setminus \{\varnothing\} \in \mathbb{F}_o^*(\tau)$$

и, более того, $\mathbb{F}_o^*(\tau) = \{\mathfrak{W}\}$ (действительно, если $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\tau)$, то $\mathcal{F}$ состоит из непустых открытых множеств и, стало быть, $\mathcal{F} \subset \mathfrak{W}$, где $\mathfrak{W} \in \mathbb{F}^*(\tau)$). Ясно также, что в данном случае $N_\tau^o(k) \subset \mathfrak{W}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. В самом деле, открытые окрестности содержатся в $\tau \setminus \{\varnothing\} = \mathfrak{W}$. Поэтому $\mathbb{F}_o^*(\tau | \, N_\tau^o(k)) = \{\mathfrak{W}\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Мы получили свойство “полной неразличимости” (в смысле (2.4)) элементов $E = \mathbb{N}$. Отсюда, кстати, следует (см. предложение 3.2), что (E, τ) не является $T_{[0]}$-пространством (учитываем, что $E = \mathbb{N}$ неодноточечно). Итак, получен пример T_1-, но не $T_{[0]}$-пространства.

Следовательно, существуют T_1-пространства, не являющиеся $T_{[0]}$-пространствами. При этом имеются бесконечные T_1-пространства, для которых все множества (2.4) совпадают.

Теперь рассмотрим пример $T_{[0]}$-, но не T_1-пространства. Для этого воспользуемся схемой построения ТП в терминах систем окрестностей (см. [1; 5; 8]), элементы которой напомним в требуемом (для примера) варианте.

П р и м е р 2. Через $(\mathrm{SYST})[E]$ обозначим множество всех отображений $\mathfrak{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^E$, для каждого из которых

$$(x \in U \;\; \forall x \in E \;\; \forall U \in \mathfrak{U}(x)) \,\&\, (\forall x \in E \;\; \forall U_1 \in \mathfrak{U}(x) \;\; \forall U_2 \in \mathfrak{U}(x) \;\; \exists U_3 \in \mathfrak{U}(x) : U_3 \subset U_1 \cap U_2). \tag{4.2}$$

Легко видеть, что $(\mathfrak{U} - \mathrm{top})_*^o[E] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(E) \mid \forall x \in G \;\; \exists U \in \mathfrak{U}(x) : U \subset G\} \in (\mathrm{top})[E]$ $\forall \mathfrak{U} \in (\mathrm{SYST})[E]$. Пусть далее

$$(\mathrm{SYST})_o[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathfrak{U} \in (\mathrm{SYST})[E] \mid \forall x \in E \;\; \forall U_1 \in \mathfrak{U}(x) \;\; \forall y \in U_1 \;\; \exists U_2 \in \mathfrak{U}(y) : U_2 \subset U_1\}.$$

Легко видеть, что при $\mathfrak{U} \in (\mathrm{SYST})_o[E]$ и $x \in E$ семейство $\mathfrak{U}(x)$ является локальной базой топологии $(\mathfrak{U} - \mathrm{top})_*^o[E]$ в точке x (фундаментальной системой окрестностей) и, в частности, $\mathfrak{U}(x) \subset N^o_{(\mathfrak{U} - \mathrm{top})_*^o[E]}(x)$.

Сейчас мы сконструируем нужный вариант отображения $\mathfrak{U}$. Пусть

$$E \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \tag{4.3}$$

($\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Теперь введем требуемый вариант отображения из $(\mathrm{SYST})_o[E]$. Итак, полагаем при $x \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, что

$$V_\varepsilon(x) \stackrel{\triangle}{=} \{(y, 0) \colon y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times \{0\}.$$

Далее, при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\varepsilon \in]0, |x|[$ полагаем

$$W_\varepsilon(x) \stackrel{\triangle}{=} \{(y, 1) \colon y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\} =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\times \{1\}.$$

Наконец, пусть $U_\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \{(x, 0) \colon x \in] - \varepsilon, \varepsilon[\} \cup \{(y, 1) \colon y \in] - \varepsilon, \varepsilon[\}$ $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Если $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z соответственно:

$$z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)), \qquad \mathrm{pr}_1(z) \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{pr}_2(z) \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

В силу (4.3) соглашение (4.4) применимо к элементам E.

Пусть теперь $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^E$ определяется условиями

$$\big(\mathcal{T}(z) \stackrel{\triangle}{=} \{V_\varepsilon(\mathrm{pr}_1(z)) \colon \varepsilon \in]0, \infty[\} \ \forall z \in \mathbb{R} \times \{0\}\big) \,\&$$
$$\big(\mathcal{T}(z) \stackrel{\triangle}{=} \{W_\varepsilon(\mathrm{pr}_1(z)) \colon \varepsilon \in]0, |\mathrm{pr}_1(z)|[\} \ \forall z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{1\}\big) \,\&$$
$$\big(\mathcal{T}(z_o) \stackrel{\triangle}{=} \{U_\varepsilon \colon \varepsilon \in]0, \infty[\}\big), \tag{4.5}$$

где $z_o \stackrel{\triangle}{=} (0, 1)$. Заметим, что каждая из зависимостей

$$\varepsilon \longmapsto V_\varepsilon(x) \colon]0, \infty[\longrightarrow \mathcal{P}'(E), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon \longmapsto W_\varepsilon(x) \colon]0, |x|[\longrightarrow \mathcal{P}'(E), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\varnothing\},$$

$$\varepsilon \longmapsto U_\varepsilon \colon]0, \infty[\longrightarrow \mathcal{P}'(E)$$

изотонна, а тогда (см. (4.2), (4.5)) $\mathcal{T} \in (\mathrm{SYST})[E]$ и определена топология $(\mathcal{T} - \mathrm{top})^o_*[E] = \{G \in \mathcal{P}(E) \mid \forall z \in G \ \exists U \in \mathcal{T}(z) \colon U \subset G\} \in (\mathrm{top})[E]$. Кроме того, из (4.5) вытекает, что $\forall z \in E \ \forall \widetilde{U}_1 \in \mathcal{T}(z) \ \forall y \in \widetilde{U}_1 \ \exists \widetilde{U}_2 \in \mathcal{T}(y) \colon \widetilde{U}_2 \subset \widetilde{U}_1$. Поэтому $\mathcal{T} \in (\mathrm{SYST})_o[E]$. Полагая в дальнейшем, что $\tau \stackrel{\triangle}{=} (\mathcal{T} - \mathrm{top})^o_*[E]$, мы имеем важное свойство: при $z \in E$ семейство $\mathcal{T}(z) \in \mathcal{P}'(\tau)$ является локальной базой в точке z:

$$(\mathcal{T}(z) \subset N^o_\tau(z)) \,\&\, (\forall G \in N^o_\tau(z) \ \exists T \in \mathcal{T}(z) \colon T \subset G). \tag{4.6}$$

В частности, (4.6) справедливо при $z = z_o$. Тогда (E, τ) не является T_1-пространством, так как при всяком выборе $G \in N^o_\tau(z_o)$ имеем $U_\varepsilon \subset G$ при некотором $\varepsilon \in]0, \infty[$ и, как следствие, $(0, 0) \in G$.

Покажем, что (E, τ) является $T_{[0]}$-пространством. Пусть $a \in E$ и $b \in E \setminus \{a\}$. Надо проверить, что

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau \colon (a \in \mathrm{cl}(G_1, \tau)) \,\&\, (b \notin \mathrm{cl}(G_1, \tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau \colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2, \tau)) \,\&\, (b \in \mathrm{cl}(G_2, \tau))\big).$$

При этом согласно (4.3) $i \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(a) \in \{0; 1\}$ и $j \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(b) \in \{0; 1\}$, где $\{0; 1\} \stackrel{\triangle}{=} \{0\} \cup \{1\}$. Пусть $\alpha \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(a)$ и $\beta \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(b)$, тогда $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Поскольку $a \neq b$, то

$$(\alpha \neq \beta) \vee (i \neq j). \tag{4.7}$$

Оба случая, упомянутые в (4.7), рассмотрим отдельно.

1) Пусть сначала $\alpha \neq \beta$, тогда $|\alpha - \beta| \in]0, \infty[$. При этом $(\alpha \neq 0) \vee (\beta \neq 0)$. Пусть $\alpha \neq 0$. Полагаем, что

$$\varepsilon^o_\alpha \stackrel{\triangle}{=} 1/2 \ \inf(\{|\alpha - \beta|; |\alpha|/2\}).$$

Тогда $\varepsilon^o_\alpha \in]0,\infty[$, $\Sigma \overset{\triangle}{=}]\alpha-\varepsilon^o_\alpha, \alpha+\varepsilon^o_\alpha[\times\{i\} \in \tau$ и $\mathrm{cl}(\Sigma,\tau) = [\alpha-\varepsilon^o_\alpha, \alpha+\varepsilon^o_\alpha]\times\{i\}$, причем $b \notin \mathrm{cl}(\Sigma,\tau)$, так как $\beta \notin [\alpha-\varepsilon^o_\alpha, \alpha+\varepsilon^o_\alpha]$. С другой стороны, $a = (\alpha, i) \in \mathrm{cl}(\Sigma,\tau)$. Итак, имеем, что

$$(\alpha \neq 0) \Longrightarrow \big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big). \tag{4.8}$$

Пусть теперь $\beta \neq 0$. Введем в рассмотрение

$$\varepsilon^o_\beta \overset{\triangle}{=} 1/2\ \inf(\{|\alpha-\beta|; |\beta|/2\}) \in]0,\infty[.$$

Тогда $\varepsilon^o_\beta \in]0,\infty[$ и $\Xi \overset{\triangle}{=}]\beta-\varepsilon^o_\beta, \beta+\varepsilon^o_\beta[\times\{j\} \in \tau$. При этом $\mathrm{cl}(\Xi,\tau) = [\beta-\varepsilon^o_\beta, \beta+\varepsilon^o_\beta]\times\{j\}$. Ясно, что $b \in \mathrm{cl}(\Xi,\tau)$, так как $b = (\beta, j)$. Вместе с тем $\alpha \notin [\beta-\varepsilon^o_\beta, \beta+\varepsilon^o_\beta]$, и, стало быть, $a \notin \mathrm{cl}(\Xi,\tau)$. Поэтому

$$(\beta \neq 0) \Longrightarrow \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big). \tag{4.9}$$

Из (4.8), (4.9) получаем нужное свойство $T_{[0]}$-отделимости векторов a и b в случае 1). Итак, установлена импликация

$$(\alpha \neq \beta) \Longrightarrow \Big(\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big)\Big). \tag{4.10}$$

2) Пусть $i \neq j$. Если при этом $\alpha \neq \beta$, то истинно утверждение в правой части (4.10). Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha = \beta$. Итак, пусть $a = (\alpha, i)$ и $b = (\alpha, j)$. Если $\alpha \neq 0$, то из (4.5) следует, в частности, что

$$\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big) \tag{4.11}$$

(на самом деле можно утверждать большее).

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 0$. Тогда $a = (0, i)$ и $b = (0, j)$, где $i \neq j$. Отдельно обсудим случаи $(i = 0)\,\&\,(j = 1)$ и $(i = 1)\,\&\,(j = 0)$.

1$'$) Пусть $i = 0$ и $j = 1$, тогда $a = (0,0)$ и $b = (0,1)$. Имеем, что $T \overset{\triangle}{=}]-\infty, 0[\,\times\{1\} \in \tau$ и согласно (4.5) $b = (0,1) \in \mathrm{cl}(T,\tau)$, где $\mathrm{cl}(T,\tau) =]-\infty, 0]\ \times\{1\}$. В то же время $a \notin \mathrm{cl}(T,\tau)$. Итак,

$$\big((i=0)\,\&\,(j=1)\big) \Longrightarrow \big(\exists\, G' \in \tau\colon (a \notin \mathrm{cl}(G',\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G',\tau))\big). \tag{4.12}$$

2$'$) Пусть $i = 1$ и $j = 0$, тогда $a = (0,1)$ и $b = (0,0)$. Мы снова используем множество $T \in \tau$ (см. случай 1$'$)). При этом $a = (0,1) \in]-\infty, 0]\times\{1\}$, т. е. $a \in \mathrm{cl}(T,\tau)$, в то время как $b \notin \mathrm{cl}(T,\tau)$. Получили, что

$$\big((i=1)\,\&\,(j=0)\big) \Longrightarrow \big(\exists\, G'' \in \tau\colon (a \in \mathrm{cl}(G'',\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G'',\tau))\big). \tag{4.13}$$

Из (4.12), (4.13) получаем, что и при $\alpha = 0$ справедливо (4.11). С учетом этого имеем, что

$$(i \neq j) \Longrightarrow \Big(\big(\exists\, G_1 \in \tau\colon (a \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(b \notin \mathrm{cl}(G_1,\tau))\big) \vee \big(\exists\, G_2 \in \tau\colon (a \notin \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(b \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\big)\Big). \tag{4.14}$$

Из (4.10) и (4.14) вытекает, что (4.11) справедливо во всех возможных случаях. Поскольку выбор $a \in E$ и $b \in E \setminus \{a\}$ был произвольным, установлено, что в рассматриваемом случае (E,τ) является $T_{[0]}$-пространством, не будучи T_1-пространством.

Итак, существуют T_1-, но не $T_{[0]}$-пространства, и $T_{[0]}$-, но не T_1-пространства.

5. Некоторые замечания о T_2-отделимости

В настоящем разделе мы, следуя идейно конструкциям [6], отметим некоторые простые добавления, связанные со свойством (3.10). Прежде всего отметим (в развитие положений [6]), что в силу (1.2), (1.3) и (3.10) имеет место свойство: (E,τ) есть T_2-пространство тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(x_2)) = \varnothing \qquad \forall x_1 \in E \qquad \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}. \tag{5.1}$$

Из (5.1) и предложения 2.1 получаем, что в случае, когда (E,τ) есть T_2-пространство, имеет место свойство

$$\forall \mathcal{U} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E] \qquad \exists!\, x \in E \colon \mathcal{U} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x, \tag{5.2}$$

являющееся усилением (2.10). Справедливо также следующее предложение.

Предложение 5.1. *Если ТП* (E,τ) *удовлетворяет условию* (5.2), *то оно является* T_2*-пространством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинно (5.2). Покажем, что (E,τ) есть T_2-пространство. Допустим противное. Тогда для некоторых точек $q_1 \in E$ и $q_2 \in E \setminus \{q_1\}$ имеем

$$G_1 \cap G_2 \neq \varnothing \qquad \forall G_1 \in N_\tau^o(q_1) \qquad \forall G_2 \in N_\tau^o(q_2). \tag{5.3}$$

С учетом (3.10) и (5.3) получаем тогда свойство $\mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(q_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(q_2)) \neq \varnothing$.

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(q_1)) \cap \mathbb{F}_o^*(\tau|\, N_\tau^o(q_2))$. Из предложения 2.1 получаем, стало быть, что

$$(\mathcal{V} \overset{\tau}{\Longrightarrow} q_1)\,\&\,(\mathcal{V} \overset{\tau}{\Longrightarrow} q_2), \tag{5.4}$$

где $\mathcal{V} \in (\tau - \mathrm{Abs})[E]$ в силу (2.5). С учетом (5.2) получаем из (5.4), что $q_1 = q_2$. Однако по выбору q_1 и q_2 имеем свойство $q_1 \neq q_2$. Полученное противоречие доказывает тот факт, что (E,τ) является T_2-пространством.

Предложение доказано.

Из (5.1) и предложения 5.1 вытекает с очевидностью

Теорема 5.1. *Эквивалентны следующие условия*:
1) (E,τ) *есть* T_2*-пространство*; 2) *истинно* (5.2).

В связи с построением аналогов T_2-отделимости, использующих операцию замыкания, отметим следующую возможность.

О п р е д е л е н и е 5.1. Назовем ТП (E,τ) $T_{[2]}$-пространством, если $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \ \exists\, G_1 \in \tau\ \ \exists\, G_2 \in \tau$:

$$(x_1 \in \mathrm{cl}(G_1,\tau))\,\&\,(x_2 \in \mathrm{cl}(G_2,\tau))\,\&\,(\mathrm{cl}(G_1,\tau) \cap \mathrm{cl}(G_2,\tau) = \varnothing).$$

З а м е ч а н и е 5.1. Отметим возможный вариант определения 5.1. (E,τ) есть $T_{[2]}$-пространство, если $\forall x_1 \in E\ \ \forall x_2 \in E \setminus \{x_1\}\ \ \exists\, F_1 \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]\ \ \exists\, F_2 \in (\mathrm{can} - \mathrm{clos})[\tau]$:

$$(x_1 \in F_1)\,\&\,(x_2 \in F_2)\,\&\,(F_1 \cap F_2 = \varnothing). \tag{5.5}$$

Эквивалентность определения в терминах (5.5) и определения 5.1 вытекает из (3.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
2. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика, механика, компьютерные науки.)
3. **Пыткеев Е. Г., Ченцов А. Г.** Некоторые свойства открытых ультрафильтров // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2015. Вып. 2(46). С. 140–148.
4. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
5. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
6. **Илиадис С. Д., Фомин С. В.** Метод центрированных систем в теории топологических пространств // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, № 4. С. 47–76.
7. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
8. **Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.** Общая топология: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1979. 336 с.
9. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Ин-т математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 14.01.2016

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: pyt@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.542

О π-ДЛИНЕ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ π-РАЗДЕЛИМЫХ ГРУПП

З. Б. Селяева

Доказана π-разделимость локально конечной группы G, в которой все конечные подгруппы π-разделимы и их π-длины ограничены в совокупности.

Ключевые слова: локально конечная группа, π-разделимые группы, π-длина группы.

Z. B. Selyaeva. On the π-length of locally finite π-separable groups.

We prove the π-separability of a locally finite group G in which all finite subgroups are π-separable and their π-lengths are bounded in total.

Keywords: locally finite groups, π-separable groups, π-length of a group.

MSC: 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-226-230

Введение

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — его дополнение во множестве всех простых чисел. Группа называется *π-группой*, если она периодическая и порядок каждого ее элемента делится только на простые числа из π. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядков элементов G. Группа называется *π-разделимой*, если она обладает конечным нормальным рядом, каждый фактор которого является π-группой или π'-группой. Такой ряд называется *π-рядом*, а *π-длиной π-разделимой группы* называется наименьшее из возможных чисел нетривиальных π-факторов во всех рядах этой группы.

Настоящая работа является продолжением статьи [1] А. Х. Журтова и автора данной статьи, в которой доказано, что π-длина локально конечной π-разделимой группы G ограничена натуральным числом m, если π-длина любой конечной подгруппы группы G не превосходит m.

Наша цель — показать, что условие π-разделимости группы G излишне, а именно справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть m — натуральное число, G — локально конечная группа. Если любая конечная подгруппа группы G π-длины, не превосходящей m, π-разделима, то G π-разделима и ее π-длина не превосходит m.*

Теорема 2. *Если G — конечная π-разделимая группа π-длины m, то в G существует разрешимая подгруппа π-длины m.*

Эта теорема дает возможность усилить заключение теоремы 1.

Следствие. *Локально конечная группа G π-длины, не превосходящей m, π-разделима тогда и только тогда, когда все конечные подгруппы G π-разделимы и π-длина любой ее разрешимой подгруппы не превосходит m.*

В статье построен пример, показывающий, что локально конечная группа, в которой каждая конечная подгруппа π-разделима, не обязана обладать ни возрастающим, ни убывающим нормальным рядом, каждый фактор которого является π-группой или π'-группой.

1. Основные обозначения и предварительные результаты

Для периодической группы G и множества π простых чисел обозначим через $O_\pi(G)$ наибольшую нормальную π-подгруппу группы G, т. е. произведение всех ее нормальных π-групп. Далее, пусть $O_{\pi,\pi'}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_{\pi'}(G/O_\pi(G))$, $O_{\pi,\pi',\pi}(G)$ — полный прообраз в G группы $O_\pi(G/O_{\pi,\pi'}(G))$ и т. д.

Ряд

$$1 = P_0(G) \leqslant N_0(G) \leqslant P_1(G) \leqslant N_1(G) \leqslant \dots \leqslant P_n(G) \leqslant N_n(G) \leqslant \dots \tag{1.1}$$

называется *верхним π-рядом группы G*, если

$$N_0(G) = O_{\pi'}(G), \quad P_1(G) = O_{\pi',\pi}(G), \quad N_1(G) = O_{\pi',\pi,\pi'}(G),$$

а для $i > 1$ $P_i(G)$ — полный прообраз в G группы $O_\pi(G/N_{i-1}(G))$, $N_i(G)$ — полный прообраз в G группы $O_{\pi'}(G/P_i(G))$.

Лемма 1 [1, лемма 1]. (а) *Если $1 = P_0 \leqslant N_0 \leqslant P_1 \leqslant N_1 \leqslant \dots \leqslant P_n \leqslant N_n \leqslant \dots$ — ряд нормальных подгрупп группы G, в котором для любого i N_i/P_i — π'-группа, P_{i+1}/N_i — π-группа, то $P_i \leqslant P_i(G)$.*

(б) *Если группа G π-разделима, то ее верхний π-ряд* (1.1) *доходит до G, и если $N_{m-1} \neq P_m(G) \leqslant N_m(G) = G$, то π-длина G равна m.*

(в) *Если H — подгруппа группы G, то $H \cap P_i(G) \leqslant P_i(H)$, $H \cap N_i(G) \leqslant N_i(H)$ $\forall\ i \geqslant 0$.*

(г) *Если H — подгруппа или фактор-группа π-разделимой группы G, то H π-разделима и ее π-длина не превосходит π-длины G.*

Группа G называется *примарной*, если существует такое простое число p, что порядок каждого элемента группы G — степень p.

Элемент g группы называется *примарным*, если его порядок равен степени некоторого простого числа.

Лемма 2. (а) *Любой элемент g конечного порядка в группе представим в виде $g = g_1 g_2 \dots g_s$, где каждый элемент g_i, $i = 1, 2, \dots, s$, примарен и является степенью g.*

(б) *Если G — конечная группа и для каждого простого числа P_i означает ее некоторую силовскую p_i-подгруппу, то $G = \langle P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_s\rangle$, где s — число простых делителей порядка группы G.*

Доказательство. (а). Любая силовская p_i-подгруппа P_i циклической группы $\langle g\rangle$ имеет вид $\langle g^{m_i}\rangle$ для некоторого целого числа m_i и $\langle g\rangle = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_s$, где s — число простых делителей порядка g. Поэтому $g = g_1 \cdots g_s$, где $g_i \in P_i, i = 1, \dots, s$. Отсюда следует заключение пункта.

(б). Порядок подгруппы $P = \langle P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_s\rangle$ делится на $|P_i|, i = 1, \dots, s$, поэтому он делится на $|P_1| \cdots |P_s| = |G|$, откуда $|G| \leq |P| \leq |G|$ и $P = G$. Лемма доказана.

Если группа A действует на группе B, то обозначим через $C_B(A)$ подгруппу

$$\{b \in B \mid b^\alpha = b \text{ для всех } \alpha \in A\},$$

а через $[B, A]$ подгруппу

$$\big\langle [b, \alpha] = b^{-1} b^\alpha \mid b \in B,\ \alpha \in A \big\rangle.$$

Заметим, что если при этом B и A — подгруппы некоторой общей группы, то $C_B(A)$ — обычный централизатор A в B, а $[B, A]$ — обычный взаимный коммутант B и A.

Лемма 3 [1, лемма 5]. *Если N — нормальная подгруппа конечной группы G и G/N разрешима, то существует разрешимая подгруппа H, для которой $G = NH$.*

Если H — нормальная подгруппа группы G, $N \leqslant K \leqslant G$ и $L \leqslant G$, то *централизатором* K/N в L назовем подгруппу

$$G_L(K/N) = \{x \in L \mid [k, x] \in N \ \text{ для всех } k \in K\}.$$

Лемма 4 [1, лемма 6]. *Пусть G — локально конечная π-разделимая группа. Тогда*
(а) *Если $O_{\pi'}(G) = 1$, то $C_G\left(O_\pi(G)\right) \leqslant O_\pi(G)$.*
(б) $C_G\left(O_{\pi',\pi}(G)/O_{\pi'}(G)\right) \leqslant O_{\pi',\pi}(G)$.

Лемма 5. *Пусть $K = L\langle a\rangle$ — конечная группа, для которой L — π'-группа, нормальная в K, a — примарный π-элемент, не централизующий L. Тогда в L найдется a-инвариантная силовская подгруппа S и нетривиальный элемент $b \in S$ такой, что $B = \langle b^x \mid x \in \langle a\rangle\rangle = [B, \langle a\rangle]$, в частности $b \in [B, \langle a\rangle]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — простое число, делящее $|L|$, P — силовская p-подгруппа из L. По замечанию Фраттини (см. [2, теорема 1.3.7]) $K = LN_K(P)$.

Так как порядки L и $\langle a\rangle$ взаимно просты, то $N_K(P)$ содержит по теореме Цассенхауза [3, теоремы I.18.1 и I.18.2] с учетом [4]) элемент a^x для некоторого $x \in K$ и поэтому a нормализует некоторую силовскую p-подгруппу S_p группы L. По лемме 2(a) $L = \langle S_p \mid p \in \pi(L)\rangle$, поэтому a нормализует, но не централизует некоторую силовскую подгруппу S группы L. Не нарушая общности, можно считать, что $L = S$, т. е. L — p-группа для некоторого простого числа $p \in \pi'$. Можно также считать, что $[L_0, \langle a\rangle] = 1$ для любой собственной a-инвариантной подгруппы L_0 из L. По [2, теорема 5.3.5] $[L, \langle a\rangle] = L$. Пусть b — любой элемент из L, не перестановочный с a. Подгруппа $B = \langle b^x \mid x \in \langle a\rangle\rangle$ не содержится в $C_L(a)$ и a-инвариантна, поэтому $B = L$ по выбору L. Таким образом, $L = B$ — искомая подгруппа. Лемма доказана.

Пусть G — локально конечная группа, m — натуральное число.

Опорной последовательностью длины m назовем упорядоченный набор примарных элементов $A = \{a_1, b_1, \ldots, b_{m-1}, a_m\}$ из G, обладающий при $m \geqslant 2$ следующими свойствами:

(1) $H = \langle A\rangle$ — π-разделимая группа π-длины m; для $i = 1, \ldots, m$ $\ a_i \in P_i(H)/P_{i-1}(H)$; для $j = 1, \ldots, m-1$ $\ b_j \in N_j(H)/N_{j-1}(H)$;

(2) для $i = 1, \ldots, m$ подгруппа $K = \left\langle \overline{a}_i, \overline{b}_{i-1}\right\rangle$ из $\overline{P}_i = P_i(H)/P_{i-1}(H)$, где $\overline{a}_i = P_{i-1}(H) \cdot a_i$, $\overline{b}_i = P_{i-1}(G) \cdot b_{i-1}$, равна $B_{i-1}\langle \overline{a}_i\rangle$, где $B_{i-1} = \left\langle \overline{b}_{i-1}^{\,x} \mid x \in \langle a_i\rangle\right\rangle$ — примарная группа, $\langle a_i\rangle$ действует нетривиально и неприводимо на H, а $\overline{b}_{i-1} \in [B_i\langle a\rangle]$; в частности,

$$\overline{b}_{i-1} \in \left[\left\langle \overline{b}_{i-1}^{\,x} \mid x \in \langle a_i\rangle\right\rangle, \langle a_i\rangle\,\right] \cdot P_{i-1}(G);$$

(3) для $i = 1, \ldots, m-1$ подгруппа $L_j = \left\langle \overline{b}_j, \overline{a}_j\right\rangle$ из $\overline{N}_j = N_j(G)/N_{j-1}(G)$, где $\overline{b}_j = N_{j-1}(G) \cdot b_j$, $\overline{a}_j = N_{j-1}(G) \cdot a_j$, равна $A_j\left\langle \overline{b}_j\right\rangle$, где группа $A_j = \left\langle \overline{a}_j^{\,x} \mid x \in \langle b_j\rangle\right\rangle$ примарна. $\langle b_j\rangle$ действует нетривиально и неприводимо на $A_j/\Phi\left(A_j\right)$ и $\overline{a}_j \in [A_j, \langle b_j\rangle]$.

В частности, $a_j \in \left[\langle a_j{}^x \mid x \in \langle b_j\rangle\rangle, \langle b_j\rangle\right] \cdot N_{j-1}(G)$.

Опорной последовательностью длины 1 назовем набор из одного нетривиального примарного π-элемента.

Следующая лемма доказана в [1].

Лемма 6 [1, лемма 8]. *Для любой локально конечной π-разделимой группы G π-длины m и любого примарного элемента $a_i \in P_m(G) \backslash N_{m-1}(G)$ существует опорная последовательность $A = \{a_1, b_1, \ldots, a_m\}$, для которой $a_m = a$.*

2. Доказательство основных результатов

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть $P_0(G) \leqslant N_0(G) < P_1(G) < N_1(G) < \ldots$ — верхний π-ряд группы G. Его π-длина не превосходит m по теореме из [1], и если объединение N членов этого ряда совпадает с G, то утверждение теоремы верно.

Если же $N \neq G$, т. е. $\overline{G} = G/N \neq 1$, то условие теоремы выполняется для $\overline{G}$ вместо G и можно считать, что $N = 1$, т. е. $O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G) = 1$.

По лемме 1 каждая подгруппа H из G π-разделима и ее π-длина не превосходит π-длины группы G. Не нарушая общности, можно считать, что π-длина H равна m. По лемме 6 в H существует опорная последовательность $A = \{a_1, b_1, \ldots, b_{m-1}, a_m\}$. По определению опорной последовательности π-длина $\langle A\rangle$ равна m, и поэтому можно считать, что $H = \langle A\rangle$. Поскольку $O_\pi(G) = 1$, то $\left\langle a_1^G\right\rangle$ не является π-группой и, следовательно, найдутся элементы $g_1, \ldots, g_t \in G$ такие, что $\langle a_1, a_1^{g_1}, \ldots, a_1^{g_t}\rangle$ не является π-группой.

Пусть $K = \langle H, g_1, \ldots, g_t\rangle$. По условию K конечна и π-разделима, поэтому найдется $i \geqslant 1$, для которого $a_1 \in P_i(K)\backslash P_{i-1}(K)$. Если $b_1 \in N_{i-1}(K)$, то по определению опорной последовательности

$$a_1 \in [\langle a_1^x \mid x \in \langle b_1\rangle\rangle, \langle b_1\rangle]\, P_{i-1}(K) \leqslant N_{i-1}(K).$$

Поскольку a_1 является π-элементом, то из этого включения вытекает, что $a_1 \in P_{i-1}(K)$; противоречие. Поэтому $b_1 \notin N_{i-1}(K)$.

Если теперь $a_2 \in P_i(K)$, то по определению опорной последовательности так же, как в предыдущем абзаце, получаем $b_1 \in N_{i-1}(K)$; противоречие. Поэтому $a_2 \notin P_i(K)$. Продолжая очевидным образом этот процесс, получим, что $a_m \notin P_{i+m-2}(K)$.

Поскольку π-длина K не превосходит m, то $i = 1$ и a_1 не централизует $O_{\pi'}(K)$. По лемме 5 в $O_{\pi'}(K)$ найдется нетривиальный примарный π-элемент b_0 такой, что $b_0 \in [\langle b_0^x \mid x \in \langle a_1\rangle\rangle, \langle a_1\rangle]$.

Так как $O_{\pi'}(G) = 1$, то $\left\langle b_0^G\right\rangle$ не является π'-группой и найдутся $g_1', \ldots, g_s' \in G$, для которых $\left\langle b_0^{g_1'}, \ldots, b_0^{g_s'}\right\rangle$ не является π'-группой.

Пусть $L = \langle K, g_1', \ldots, g_s'\rangle$. Очевидно $b_0 \notin O_{\pi'}(L)$ и поэтому $b_0 \notin N_{i-1}(L)$, для некоторого $i > 1$. Но тогда $a_1 \notin P_1(L)$ и, как и выше, $a_m \notin P_m(L)$, откуда π-длина L не меньше $m+1$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 проведем общей индукцией по $|G|$ и m.

Теорема очевидна при $m = 1$.

Пусть $m \geqslant 2$. Если $O_{\pi'}(G) \neq 1$, то так как π-длина $\overline{G} = G/O_{\pi'}(G)$ равна m, в $\overline{G}$ найдется по индукции разрешаемая подгруппа $\overline{H}$ π-длины m и полный прообраз $\overline{H}$ в G по индукции совпадает с G, т. е. $G/O_{\pi'}(G)$ — разрешимая группа. Пусть H — подгруппа минимального порядка, для которой $G = O_{\pi'}(G)H$. По лемме 3 H разрешима. Очевидно, π-длина H совпадает с π-длиной G, т. е. равна m. Поэтому можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$.

Теперь $O_\pi(G) \neq 1$ и π-длина $G/O_{\pi,\pi'}(G)$ равна $m-1$. По индукции в $G/O_{\pi,\pi'}(G)$ существует разрешимая подгруппа $\overline{H}$ π-длины $m-1$.

Пусть H — прообраз $\overline{H}$ в G наименьшего порядка. Тогда H разрешима по лемме 3 и $H/H \cap O_{\pi,\pi'}(G) \simeq \overline{H}$, откуда следует, что π-длина H не меньше $m-1$.

Если π-длина H равна m, то H — искомая подгруппа. Пусть π-длина H равна $m-1$. Если $\overline{A} = \langle \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m\rangle$ — опорная последовательность в $\overline{H}$, существующая по лемме 6, и $a_2, \ldots,\ a_m$ — примарные прообразы в H элементов $\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ соответственно, то $A = \{a_2, \ldots, a_m\}$ — опорная последовательность в H и $a_2 \notin O_{\pi,\pi'}(G)$.

Пусть $G_1 = O_{\pi,\pi'}(G) \cdot H$. Так как $[O_\pi(G), O_{\pi'}(G_1)] = 1$ и $O_{\pi'}(G) = 1$, то по лемме 4(a) $O_{\pi'}(G_1) = 1$.

Далее, $O_\pi(G_1)/O_\pi(G)$ централизует $O_{\pi,\pi'}(G)/O_\pi(G)$, и по лемме 4(a) $O_\pi(G_1) = O_\pi(G)$. Поэтому $P_1(G_1) = O_\pi(G)$ и, следовательно, $a_2 \notin P_1(G_1)$. Из свойств последовательности $a_2, \ldots, a_m$

теперь вытекает, что $a_m \notin P_{m-1}(G_1)$, т. е. π-длина G_1 равна m. По индукции можно считать, что $G_1 = G$.

По лемме 4(б) a_2 не централизует $R = O_{\pi,\pi'}(G)/O_\pi(G)$.

По лемме 5 в R найдется силовская подгруппа S, которую a_2 нормализует, но не централизует, а также нетривиальный элемент $\overline{b}_1 \in S$ такой, что $\overline{b}_1 \in \left[\langle \overline{b}_1^x \mid x \in \langle a_2\rangle\rangle, \langle a_2\rangle\right]$.

Пусть теперь $\hat{G} = G/O_\pi(G) = R \cdot N_G(S)$ и $\hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m$ — образы $a_2, \dots, a_m$ в $\hat{G}$.

Тогда $\hat{b}_2 = b_2' \cdot g_2, \dots, \hat{a}_m = a_m' \cdot g_m$, где $a_2, b_2', \dots, a_m' \in N(S)$, $g_2, \dots, g_m \in R$. Так как $N(S)/R \cap N(S) \simeq \overline{H}$ — разрешимая группа, минимальный прообраз $\overline{H}$ в $N(S)$ — разрешимая группа по лемме 3 и, в частности, элементы $a_2, b_2', \dots, a_m'$ могут быть выбраны так, чтобы они порождали разрешимую группу в $N(S)$. Поскольку $b_1 \in S$, то $\langle b_1, a_2', \dots, a_m'\rangle$ — разрешимая группа и $\hat{b}_1$ не централизует $O_\pi(G)$.

Отсюда π-длина группы $O_\pi(G) \cdot \langle b_1 a_2, \dots, a_m\rangle$ равна m и можно, как и раньше, с помощью лемм 3 и 5 найти в G разрешимую подгруппу π-длины m.

Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Если G π-длины m π-разделима, то все ее конечные подгруппы π-разделимы и π-длина каждой из них, в том числе и разрешимой, не превосходит m.

Пусть теперь каждая конечная подгруппа G π-разделима, а любая разрешимая подгруппа имеет π-длину, не превосходящую m. По теореме 2 π-длина каждой конечной подгруппы G не превосходит m. По теореме 1 группа G π-разделима, а по [1] π-длина G не превосходит m. Следствие доказано.

Следующий пример показывает невозможность усиления теоремы 1.

П р и м е р. Пусть Z_p означает циклическую группу порядка p. Положим $G_0 = Z_2 \wr Z_3$ — сплетение групп порядков 2 и 3. Далее, для $m \geqslant 0$ определим $G_{4m+1} = Z_3 \wr G_{4m}$, $G_{4m+2} = G_{4m+1} \wr Z_2$, $G_{4m+3} = Z_2 \wr G_{4m+2}$, $G_{4(m+1)} = G_{4m+3} \wr Z_3$. При естественном вложении G_i в G_{i+1}, $i = 0, 1, \dots$, возникает бесконечная возрастающая последовательность $G_0 < G_1 < G_2 \dots$.

Объединение G этой последовательности является счетной локально конечной группой, в которой каждая конечная подгруппа разрешима и, в частности, $\{2\}$-разделима. Тем не менее в G нет нормальных нетривиальных примарных подгрупп, а также G не обладает нетривиальной примарной фактор-группой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Журтов А.Х., Селяева З.Б.** О локально конечных π-разделимых группах // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 2. С. 16–22.
2. **Gorenstein D.** Finite groups. N.Y.: Chelsea, 1980. 549 p.
3. **Huppert B.** Endliche gruppen I. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979. 811 p.
4. **Feit W., Thompson J.G.** Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13, no. 3. P. 775–1029.

Селяева Зулиха Борисовна

Поступила 23.12.2015

аспирант
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
e-mail: zhurtov_a@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.853

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ В МЕТОДЕ НЕВЯЗКИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1]

В. Д. Скарин

Для коррекции несобственных задач выпуклого программирования применяется стандартная процедура регуляризации некорректных моделей оптимизации — метод невязки. Предлагаются новые итерационные реализации метода невязки, в которых ограничения задачи агрегируются с помощью штрафных функций. Устанавливаются условия сходимости алгоритмических схем, определяются оценки точности аппроксимации.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод невязки, методы штрафных функций.

V. D. Skarin. On the choice of parameters in the residual method for optimal correction of improper problems of convex optimization.

For the correction of improper problems of convex programming, the residual method is used, which is the standard regularization procedure for ill-defined optimization models. We propose new iterative implementations of the residual method, in which the constraints of the problem are included by means of penalty functions. New convergence conditions are established for algorithmic schemes, and bounds are found for the approximation error.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, residual method, penalty function methods.

MSC: 90C25, 90C46

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-231-243

Введение

Данная работа развивает исследования из [1], связанные с применением одного из распространенных методов регуляризации некорректно поставленных задач условной оптимизации — метода невязки [2] — для целей коррекции задач выпуклого программирования (ВП) с противоречивой системой ограничений.

Интерес к противоречивым моделям, которые составляют важнейший класс несобственных задач (НЗ) [3], обусловлен, прежде всего, практическими соображениями, а именно частотой их появления при моделировании конкретных постановок из области исследования операций. Поэтому продолжает оставаться актуальной проблема разработки теории и методов численной аппроксимации (коррекции) НЗ ВП, т. е. нахождение близкой, в определенном смысле разрешимой, задачи, решение которой принимается за обобщенное решение несобственной постановки (в этой связи можно отметить, например, работы [4–6] по коррекции НЗ линейного программирования (ЛП) и [7] по аппроксимации НЗ ВП). Близко к проблематике НЗ стоят работы [8; 9] по анализу совместности системы ограничений в задаче ЛП, а также [10] по обработке экспериментальных данных с помощью обобщенного метода наименьших квадратов (TLS — Total Least Squares). Последний метод может рассматриваться как способ матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств по минимуму евклидовой нормы [11; 12].

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

Поскольку задачи с несовместной системой ограничений часто возникают вследствие погрешностей в определении исходных данных, что тесно связано с исследованием устойчивости решений, то такие проблемы представляют интерес для теории и методов некорректных задач оптимизации [2;13–15]. Поэтому при анализе несобственных задач имеет смысл рассматривать стандартные способы регуляризации некорректных моделей, одним из которых и является метод невязки.

Аналогично [1] в работе рассматриваются два подхода в применении метода невязки к анализу НЗ ВП. Первый из них использует для учета ограничений в типовой модели метода невязки квадратичную штрафную функцию, второй — точную штрафную функцию. Особенности структуры штрафной функции обуславливают форму оптимальной коррекции НЗ ВП. В одном случае она определяется минимумом евклидовой нормы невязки ограничений, в другом — октаэдрической нормы. Основное внимание при этом уделяется построению итерационных алгоритмов, основанных на применении отмеченных штрафных функций. Отыскиваются условия согласования параметров предлагаемых процедур, обеспечивающих их сходимость к решению аппроксимирующей задачи.

1. Несобственная задача ВП, метод невязки

Рассмотрим задачу ВП

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Один из классических методов регуляризации некорректных экстремальных задач — метод невязки — состоит [1] в решении последовательности задач

$$\min\{\|x\|^2 \mid x \in X \cap M_\delta\}, \tag{2}$$

где δ — параметр регуляризации, $\delta \ge \bar f$, $M_\delta = \{x \mid f_0(x) \le \delta\}$, $\bar f$ — оптимальное значение задачи (1). Если задача (1) разрешима, то для любого δ задача (2) имеет единственное решение $\bar x_\delta$. Так как $M_{\delta_1} \supset M_{\delta_2} \supset \ldots \supset M_{\bar f}$ при $\delta_1 \ge \delta_2$, то $\|\bar x_{\delta_1}\| \le \|\bar x_{\delta_2}\| \le \ldots \le \|\bar{\bar x}\|$, где $\bar{\bar x}$ — решение (1) с минимальной нормой (нормальное решение). Таким образом, все точки $\bar x_\delta$ лежат в компактном множестве $\{x \mid \|x\| \le \|\bar{\bar x}\|\}$. Пусть $\tilde x$ — предельная точка последовательности $\{\bar x_\delta\}$ при $\delta \to \bar f$. Очевидно, $\tilde x \in X$, $f_0(\tilde x) = \bar f$ и $\|\tilde x\| \le \|\bar{\bar x}\|$. Из единственности $\bar{\bar x}$ следует $\tilde x = \bar{\bar x}$ и $\lim\limits_{\delta \to \bar f} \bar x_\delta = \bar{\bar x}$.

Далее будем предполагать, что система ограничений задачи (1) может быть несовместной, т. е. возможен случай $X = \varnothing$. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Пусть $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \mid \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$. Если для (1) $X = \varnothing$, $\Lambda \ne \varnothing$, то такие задачи принято называть [3] *несобственными задачами* ВП 1-го рода. Эти задачи наиболее распространены на практике, и для них характерно следующее свойство: если вместо X взять $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, так чтобы стало $X_\xi \ne \varnothing$, то $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_\xi\} > -\infty$.

Естественный способ оптимальной коррекции НЗ ВП состоит в замене (1) задачей

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar\xi}\}, \tag{3}$$

где $\bar\xi = \arg\min\{\|\xi\| \mid \xi \in \mathbb{R}^m_+,\ X_\xi \ne \varnothing\}$. Если в (1) $X \ne \varnothing$, то $\bar\xi = 0$ и задачи (1) и (3) совпадают. В противном случае решение (3) принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение НЗ (1). Существование и единственность вектора $\bar\xi$ обеспечивает, например, требование непустоты и ограниченности множества X_ξ для некоторого $\xi = \xi_0$. В дальнейшем, не оговаривая отдельно, будем считать условие ограниченности X_{ξ_0} выполненным. Нетрудно видеть, что $\bar\xi = f^+(\bar x)$, где $\bar x \in \bar X = \operatorname{Arg}\min g(x)$, $g(x) = \|f^+(x)\|^2$, при этом $\bar X = X_{\bar\xi}$.

2. Применение квадратичной штрафной функции

Рассмотрим вопрос о связи между НЗ ВП (1) и задачей (2), при этом вместо (1) будет выступать ее аппроксимация (3). Ограничения задачи (2) будем учитывать с помощью квадратичной штрафной функции (КШФ)

$$F_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\|f^+(x)\|^2 + \rho_0(f_0(x)-\delta)^{+^2}, \qquad r=[\rho,\rho_0]>0, \qquad \delta\in\mathbb{R}^1.$$

Функция $F_\delta(x,r)$ сильно выпуклая по x на $\mathbb{R}^n$, поэтому задача

$$\min_x F_\delta(x,r)$$

разрешима в единственной точке $\bar{x}_{r,\delta}$ для любых $r\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ и $\delta\in\mathbb{R}^1$, в том числе и при $X=\varnothing$, в отличие от задачи (2). Это обстоятельство и позволяет использовать функцию $F_\delta(x,r)$ для анализа НЗ ВП.

Пусть в задаче (1) (соответственно и в (2)) вместо $f_i(x)$ известны непрерывные функции $f_i^\varepsilon(x)$, определенные на $\mathbb{R}^n$, такие что

$$|f_i(x)-f_i^\varepsilon(x)|<\varepsilon \qquad (\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\ i=0,1,\ldots,m), \qquad \varepsilon>0.$$

Тогда метод невязки для задачи (1) сведется к проблеме отыскания точек

$$\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta} = \arg\min_x F^\varepsilon_\delta(x,r), \tag{4}$$

где $F^\varepsilon_\delta(x,r) = \|x\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(x)\|^2 + \rho_0(f^\varepsilon_0(x)-\delta)^{+^2}$, $r=[\rho,\rho_0]>0$, $\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}^1$, $\varepsilon>0$. Задача (4) разрешима для любых r,ε,δ (см. [7, лемма 1]).

Сходимость метода невязки в данном случае характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* (1) *— НЗ ВП* 1*-го рода,* $\bar{x}$ *— решение задачи* (3)*,* $\bar{f}=f_0(\bar{x})$*,* $\Delta=\bar{f}-\delta$*. Тогда для любых* $r=[\rho,\rho_0]>0$*,* $\delta\in\mathbb{R}^1$*,* $0<\varepsilon\le 1$ *справедливы оценки*

$$\|(f^\varepsilon(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})-\bar{\xi})^+\| \le \frac{1}{\sqrt{\rho}}\,B(r,\delta,\varepsilon), \tag{5}$$

$$f^\varepsilon_0(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}) \le \bar{f} + \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\,B(r,\delta,\varepsilon) - \Delta, \tag{6}$$

$$\|\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}\| \le B(r,\delta,\varepsilon), \tag{7}$$

где $B(r,\delta,\varepsilon) = \left[\|\bar{x}\|^2 + \varepsilon\rho(4\,\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon) + \rho_0(\Delta^+ + \varepsilon)^2\right]^{1/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки $\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}$ следует

$$\|\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})\|^2 + \rho_0(f^\varepsilon_0(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})-\delta)^{+^2} \le \|\bar{x}\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\bar{x})\|^2 + \rho_0(f^\varepsilon_0(\bar{x})-\delta)^{+^2}.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$|f_i^{\varepsilon^+}(\bar{x}) - f_i^+(\bar{x})| \le |f_i^\varepsilon(\bar{x}) - f_i(\bar{x})| < \varepsilon, \qquad i=1,\ldots,m,$$

$$|(f^\varepsilon_0(\bar{x})-\delta)^+ - (f_0(\bar{x})-\delta)^+| \le |f^\varepsilon_0(\bar{x}) - f_0(\bar{x})| < \varepsilon,$$

имеем

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta}\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})\|^2 + \rho_0(f^\varepsilon_0(\bar{x}^\varepsilon_{r,\delta})-\delta)^{+^2} \\ &\le \|\bar{x}\|^2 + \rho\|\bar{\xi}\|^2 + \rho\varepsilon(2\,\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon) + \rho_0(\Delta^+ + \varepsilon)^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Оценим разность $\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^{\varepsilon^+}(\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta})\|^2$. Так как $\bar{x} \in \bar{X}$, то $0 \in \partial g(\bar{x})$, где $\partial g(\bar{x})$ — субдифференциал функции $g(x)$ в точке $\bar{x}$. По правилам субдифференцирования выпуклых функций найдутся субградиенты $\bar{e}_i(\bar{x})$ функции $f_i(x)$ в точке $\bar{x}$, такие что $0 = 2\sum\limits_{i=1}^{m} f_i^+(\bar{x})\bar{e}_i(\bar{x}) = 2\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i\bar{e}_i(\bar{x})$ (здесь $\bar{\xi}_i$ — i-я компонента вектора $\bar{\xi}$ $(i = 1,\ldots,m)$). Из выпуклости функций $f_i(x)$, $i = 1,\ldots,m$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i f_i(\bar{x}) \le \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\xi}_i(\bar{e}_i(\bar{x}), \bar{x} - x),$$

$$\|\bar{\xi}\|^2 = (\bar{\xi}, f(\bar{x})) \le (\bar{\xi}, f(x)) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Далее применим неравенство $(a-b)^{+^2} \le (a^+ - b)^2$, справедливое для любых действительных чисел a и b. С учетом (9) для произвольного $x' \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\|(f^{\varepsilon}(x') - \bar{\xi})^+\|^2 \le \|f^{\varepsilon^+}(x') - \bar{\xi}\|^2 = \|(f^{\varepsilon^+}(x')\|^2 - 2(\bar{\xi}, f^{\varepsilon^+}(x')) + \|\bar{\xi}\|^2$$

$$< \|f^{\varepsilon^+}(x')\|^2 - 2(\bar{\xi}, f^+(x')) + 2\varepsilon\|\bar{\xi}\|_1 + \|\bar{\xi}\|^2 \le \|f^{\varepsilon^+}(x')\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2 + 2\varepsilon\|\bar{\xi}\|_1. \tag{10}$$

Следовательно, при $x' = \bar{x}$ справедливы неравенства

$$\|(f^{\varepsilon}(\bar{x}) - \bar{\xi})^+\|^2 - 2\varepsilon\|\bar{\xi}\|_1 \le \|f^{\varepsilon^+}(\bar{x})\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2, \tag{11}$$

$$\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^{\varepsilon^+}(\bar{x})\|^2 \le 2\varepsilon\|\bar{\xi}\|_1. \tag{12}$$

Используя неравенства (11), (12), из (8) сразу получаем оценки (5) и (7). Из неравенства (8) следует, что $\rho_0(f_0^{\varepsilon}(\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta}) - \delta)^{+^2} \le B(r,\delta,\varepsilon)$. Но $f_0^{\varepsilon}(\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta}) - \bar{f} \le (f_0^{\varepsilon}(\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta}) - \delta)^+ - \Delta$, поэтому справедлива и оценка (6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть в задаче* (4) $\rho \to \infty$, $\rho_0 \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\Delta \to 0$, $\varepsilon\rho \to 0$, $\rho_0(\Delta^+ + \varepsilon)^2 \to 0$. *Тогда* $\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta} \to \bar{\bar{x}}$, *где* $\bar{\bar{x}}$ — *нормальное решение задачи* (3).

Доказательство. В самом деле, пусть $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$. При сформулированных условиях на поведение параметров r, δ, ε имеет место равенство $\lim B(r,\delta,\varepsilon) = \|\bar{\bar{x}}\|$. Поэтому из (7) следует ограниченность последовательности $\{\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta}\}$. Обозначим черех $\tilde{x}$ ее предельную точку. Принимая во внимание оценки (5)–(7), получаем $\tilde{x} \in X_{\bar{\xi}} \cap M_{\bar{f}}$, $\|\tilde{x}\| = \|\bar{\bar{x}}\|$. Поскольку $\bar{\bar{x}}$ — единственное нормальное решение задачи (3), то $\tilde{x} = \bar{\bar{x}}$ и $\lim \bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta} = \bar{\bar{x}}$. □

Следствие 2. *Пусть существует* $[\bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}]$ — *седловая точка функции* $L_{\bar{\xi}}(x,\lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \bar{\xi})$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. *Тогда наряду с* (6) *справедливо неравенство*

$$\bar{f} - f_0^{\varepsilon}(\bar{x}^{\varepsilon}_{r,\delta}) \le \frac{\|\bar{\lambda}\|}{\sqrt{\rho}}\, B(r,\delta,\varepsilon) + \varepsilon(1 + \|\bar{\lambda}\|_1). \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, по определению точки $[\bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}]$ для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место соотношения

$$\bar{f} = f_0(\bar{\bar{x}}) \le f_0(x) + (\bar{\lambda}, f(x) - \bar{\xi}) < f_0^{\varepsilon}(x) + (\bar{\lambda}, (f^{\varepsilon}(x) - \bar{\xi})^+) + \varepsilon(1 + \|\bar{\lambda}\|_1). \tag{14}$$

Отсюда с учетом (5) получаем (13). □

3. Итеративный алгоритм коррекции НЗ ВП на базе квадратичного штрафа

Основная проблема в применении метода невязки состоит в необходимости обеспечения сходимости $\delta \to \bar{f}$. Из оценок (5)–(7) видно, что эта трудность возникает прежде всего тогда, когда $\Delta > 0$, т. е. когда $\delta < \bar{f}$. При этом задача (2) будет несобственной, даже если исходная задача (1) разрешима. В данном случае просматривается связь метода (4) с методом нагруженных функций [2] (методом параметризации целевой функции [16]). В последнем методе задаче (1) ставится в соответствие проблема отыскания

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x, \delta), \tag{15}$$

где $\varphi(x,\delta) = \rho_0(f_0(x) - \delta)^{+^{p_0}} + \rho \sum\limits_{i=1}^{m} f_i^{+^{p_i}}(x)$, $\delta \in \mathbb{R}^1$, $\delta < \bar{f}$ (p_i, ρ_0, ρ — параметры метода, $p_i \geq 1$, $i = 0, 1, \ldots, m$; $\rho_0 > 0$, $\rho > 0$).

Метод нагруженных функций идейно близок к методам штрафных функций для решения задачи (1). Отличие состоит в том, что в методе (15) необязательно стремить параметры ρ_0 и ρ к $+\infty$; достаточно генерировать ограниченную последовательность значений δ, которая бы сходилась к оптимальному значению задачи (1), а соответствующая последовательность $x_\delta = \arg\min\limits_x \varphi(x, \delta)$ сходилась бы к решению (1).

Ниже мы предложим алгоритм управления параметрами задачи (4) (прежде всего, параметром δ), обеспечивающий требуемые сходимости. На данный алгоритм можно смотреть как на итеративную схему метода невязки для НЗ ВП, а можно как на регуляризованный вариант метода нагруженных функций для коррекции НЗ ВП (см. также [17]).

Определим последовательность положительных чисел τ_k так, чтобы $\tau_k \searrow 0$ ($k \to \infty$). Выберем начальное значение δ_0 параметра δ из условия $\delta_0 < \bar{f} - \tau_0$. Положим

$$\delta_{k+1} = \delta_k + (f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

где $\bar{x}_k = \arg\min F_k(x)$, $F_k(x) = \widetilde{F}_{\delta_k}^{\varepsilon_k}(x, r_k, \tau_k) = \|x\|^2 + \rho_k \|f^{\varepsilon_k^+}(x)\|^2 + \rho_k^0(f_0^{\varepsilon_k}(x) - \delta_k - \tau_k)^+$, $r_k = [\rho_k, \rho_k^0] > 0$, $\varepsilon_k \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* $L_{\bar{\xi}}(x, \lambda)$ *имеет седловую точку* $[\bar{\bar{x}}, \bar{\lambda}]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. *Предположим, что параметры* τ_k, ρ_k, ρ_k^0, ε_k *в алгоритме* (16) *выбраны так, чтобы*

$$\begin{gathered} \tau_k \searrow 0, \qquad \rho_k \nearrow +\infty, \qquad \rho_k^0 \nearrow +\infty, \qquad \frac{\rho_k^0}{\rho_k} \searrow 0, \qquad \varepsilon_k \searrow 0, \\ \rho_k \varepsilon_k \searrow 0, \qquad \sigma_k \equiv \rho_k^0(\tau_k - \tau_{k+1} - \varepsilon_k) \nearrow +\infty \qquad (k \to \infty). \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar{f}$ *и любая предельная точка последовательности* $\{\bar{x}_k\}$ *есть решение задачи* (3).

Если к тому же $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\rho_k^{0^2}}{\rho_k} = 0$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{\bar{x}}$, *где* $\bar{\bar{x}}$ *— нормальное решение задачи* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения точки $\bar{x}_k$ имеем неравенство, аналогичное (8):

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}_k\|^2 + \rho_k \|f^{\varepsilon_k^+}(\bar{x}_k)\|^2 + \rho_k^0(f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \\ &\leq \|\bar{\bar{x}}\|^2 + \rho_k(\|\bar{\xi}\|^2 + 2\varepsilon_k\|\bar{\xi}\|_1 + m\varepsilon_k^2) + \rho_k^0(\bar{f} - \delta_k - \tau_k)^+ + \rho_k^0 \varepsilon_k. \end{aligned} \tag{18}$$

Из неравенства (10) при $x' = \bar{x}_k$ получим $\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^{\varepsilon_k^+}(\bar{x}_k)\|^2 \leq 2\varepsilon_k\|\bar{\xi}\|_1$. Поэтому из (18) следует

$$(f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \leq \frac{\|\bar{\bar{x}}\|^2}{\rho_k^0} + (\bar{f} - \delta_k - \tau_k)^+ + \varepsilon_k + \frac{m\varepsilon_k + 4\|\bar{\xi}\|_1}{\rho_k^0}\, \varepsilon_k \rho_k. \tag{19}$$

В силу условий (17) начальные значения параметров $\varepsilon_0, \rho_0, \rho_0^0, \tau_0, \tau_1$ можно выбрать так, чтобы $\varepsilon_0 < 1$, $\rho_0\varepsilon_0 \le (m+4\|\bar\xi\|_1)^{-1}$, $\sigma_0 \ge \|\bar{\bar x}\|^2+1$. Тогда полагая в (19) $k=0$ и учитывая неравенство $\delta_0 < \bar f - \tau_0$, получим

$$\delta_1 = \delta_0 + (f_0^{\varepsilon_0}(\bar x_0) - \delta_0 - \tau_0)^+ \le \frac{\|\bar{\bar x}\|^2}{\rho_0^0} + \bar f - \tau_0 + \varepsilon_0 + \frac{m+4\|\bar\xi\|_1}{\rho_0^0}\varepsilon_0\rho_0$$
$$\le \frac{\|\bar{\bar x}\|^2+1}{\rho_0^0} + \bar f - \tau_0 + \varepsilon_0 \le \bar f - \tau_1.$$

Таким образом, если $\delta_k < \bar f - \tau_k$, то из (19) и монотонного характера сходимости последовательностей из (17) будет следовать $\delta_k \le \delta_{k+1} < \bar f - \tau_{k+1}$. Последнее же влечет наличие предела $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar\delta$, причем $\bar\delta \le \bar f$. Кроме того,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (f_0^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \delta_k - \tau_k)^+ = 0. \tag{20}$$

Далее, из (18) следует

$$\rho_k(\|f^{\varepsilon_k^+}(\bar x_k)\|^2 - \|\bar\xi\|^2) \le \rho_k^0(\bar f - f_0^{\varepsilon_k}(\bar x_k)) + \|\bar{\bar x}\|^2 + \rho_k\varepsilon_k(2\|\bar\xi\|_1 + m\varepsilon_k) + \rho_k^0\varepsilon_k. \tag{21}$$

Так как $[\bar{\bar x}, \bar\lambda]$ — седловая точка функции $L_{\bar\xi}(x,\lambda)$, то по аналогии с (14) имеем

$$\bar f - f_0^{\varepsilon_k}(\bar x_k) \le \|\bar\lambda\|\|(f^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \bar\xi)^+\| + \varepsilon_k(1+\|\bar\lambda\|_1). \tag{22}$$

Применяя это неравенство и оценку (10) при $x' = \bar x_k$, из (21) получим

$$\rho_k\|(f^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \bar\xi)^+\|^2 - \rho_k^0\|\bar\lambda\|\|(f^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \bar\xi)^+\| \le \|\bar{\bar x}\|^2 + \rho_k\varepsilon_k(4\|\bar\xi\|_1 + m\varepsilon_k) + \rho_k^0\varepsilon_k(2+\|\bar\lambda\|_1).$$

Выделяя в левой части данного соотношения полный квадрат, будем иметь

$$\|(f^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \bar\xi)^+\| \le \frac{\rho_k^0}{2\rho_k}\|\bar\lambda\| + \sqrt{B_1(r_k,\varepsilon_k)}, \tag{23}$$

где $B_1(r_k,\varepsilon_k) = \dfrac{{\rho_k^0}^2}{4\rho_k^2}\|\bar\lambda\|^2 + \dfrac{\|\bar{\bar x}\|^2}{\rho_k} + \varepsilon_k(4\|\bar\xi\|_1 + m\varepsilon_k) + \dfrac{\rho_k^0}{\rho_k}\varepsilon_k(2+\|\bar\lambda\|_1)$. Из неравенства (23) следует

$$f_i(\bar x_k) \le \bar\xi_i + \frac{\rho_k^0}{2\rho_k}\|\bar\lambda\| + \sqrt{B_1(r_k,\varepsilon_k)} + \varepsilon_k, \qquad i=1,\ldots,m. \tag{24}$$

Если выполнены условия (17), то $\lim\limits_{k\to\infty} B_1(r_k,\varepsilon_k) = 0$. Поэтому, начиная с некоторого k_0, все точки $\bar x_k$ будут лежать во множестве $X_{\xi'}$, где $\xi' > \bar\xi$, $k \ge k_0$. По предположению множество $X_{\xi'}$ ограничено. Тогда ограниченной будет и последовательность $\{\bar x_k\}$. Обозначим через x^* ее предельную точку. В силу (24) $x^* \in X_{\bar\xi}$ и $f_0(x^*) \ge \bar f$. Но, с другой стороны, из (20) следует $f_0(x^*) \le \bar\delta \le \bar f$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar\delta = \bar f = f_0(x^*)$.

Если дополнительно к условиям (17) потребовать, чтобы $\dfrac{{\rho_k^0}^2}{\rho_k} \to 0$ при $k\to\infty$, то $\{\bar x_k\}$ будет сходиться к нормальному решению задачи (3). В самом деле, из (18) следует

$$\|\bar x_k\|^2 \le \|\bar{\bar x}\|^2 + \rho_k(\|\bar\xi\|^2 - \|f^{\varepsilon_k^+}(\bar x_k)\|^2) + \rho_k^0(\bar f - f_0^{\varepsilon_k}(\bar x_k)) + 2\rho_k\varepsilon_k\|\bar\xi\|_1 + \rho_k\varepsilon_k^2 m + \rho_k^0\varepsilon_k.$$

Применяя к правой части этого неравенства оценки (10) (при $x' = \bar x_k$) и (22), получим

$$\|\bar x_k\|^2 \le \|\bar{\bar x}\|^2 - \rho_k\|(f^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \bar\xi)^+\|^2 + \rho_k^0\|\bar\lambda\|\|(f^{\varepsilon_k}(\bar x_k) - \bar\xi)^+\| + B_2(r_k,\varepsilon_k),$$

где $B_2(r_k,\varepsilon_k)=\rho_k\varepsilon_k(4\|\bar{\xi}\|_1+m\varepsilon_k)+\rho_k^0\varepsilon_k(\|\bar{\lambda}\|_1+2)$. Отсюда $\|\bar{x}_k\|^2\le\|\bar{\bar{x}}\|^2+\dfrac{{\rho_k^0}^2}{4\rho_k}\|\bar{\lambda}\|^2+B_2(r_k,\varepsilon_k)$. Так как согласно (17) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\rho_k^0}{\rho_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k\varepsilon_k=0$, то и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k^0\varepsilon_k=0$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}B_2(r_k,\varepsilon_k)=0$. Из последнего неравенства следует $\|x^*\|=\|\bar{\bar{x}}\|$, что в силу единственности нормального решения задачи (3) влечет $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{x}_k=\bar{\bar{x}}$.

Теорема доказана.

Для алгоритма (16) оценим величины уклонений $|\delta_k-\bar{f}|$ и $|f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\bar{f}|$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2. *Справедливы оценки*

$$|\delta_{k+1}-\bar{f}|\le B_3(r_k,\varepsilon_k)+\tau_k, \tag{25}$$

$$|f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\bar{f}|\le\max\{B_3(r_k,\varepsilon_k),\tau_k-\tau_{k+1}\},\qquad k=0,1,\dots, \tag{26}$$

где $B_3(r_k,\varepsilon_k)=\|\bar{\lambda}\|\left(\dfrac{\rho_k^0}{2\rho_k}\|\bar{\lambda}\|+\sqrt{B_1(r_k,\varepsilon_k)}\right)+\varepsilon_k(1+\|\bar{\lambda}\|_1)$, $B_1(r_k,\varepsilon_k)$ — *из* (23), $B_3(r_k,\varepsilon_k)\to 0$ $(k\to\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (16) имеем

$$\delta_{k+1}-\bar{f}=\delta_k+(f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\delta_k-\tau_k)^+-\bar{f}\ge f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\bar{f}-\tau_k.$$

Отсюда с учетом (22) и (23) получим $\bar{f}-\delta_{k+1}\le\bar{f}-f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)+\tau_k\le B_3(r_k,\varepsilon_k)+\tau_k$. Этим доказана оценка (25), поскольку по построению алгоритма (16) $\delta_{k+1}<\bar{f}$.

Для вывода (26) теперь достаточно оценить разность $f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\bar{f}$. Воспользуемся неравенством (19). Так как $(\|\bar{\bar{x}}\|^2+1)(\rho_k^0)^{-1}\le\tau_k-\tau_{k+1}-\varepsilon_k$, то

$$f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\tau_k\le\delta_k+(f_0^{\varepsilon_k}(\bar{x}_k)-\delta_k-\tau_k)^+\le\frac{\|\bar{\bar{x}}\|^2+1}{\rho_k^0}+\bar{f}-\tau_k+\varepsilon_k\le\bar{f}-\tau_{k+1},\qquad k=0,1,\dots.$$

Отсюда и из (22), (23) вытекает оценка (26).

Теорема доказана.

Приведем пример последовательностей τ_k, ρ_k, ρ_k^0, ε_k, удовлетворяющих условиям (17).

Выберем положительные числа $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, так чтобы $\dfrac{\alpha}{3}<\gamma<\beta<\alpha\le\dfrac{1}{2}$. Положим

$$\tau_k=\alpha^{k+1},\qquad\rho_k=\frac{1}{\gamma^{k+1}},\qquad\rho_k^0=\frac{1}{\beta^{k+1}},\qquad\varepsilon_k=\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{k+1},\qquad k=1,2,\dots.$$

Очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k^0=+\infty$, $\dfrac{\rho_k^0}{\rho_k}=\left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^k\to 0$, $\rho_k\varepsilon_k=\left(\dfrac{\alpha}{3\gamma}\right)^k\to 0$, $\rho_k^0(\tau_k-\tau_{k+1}-\varepsilon_k)=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k\left(1-\alpha-\dfrac{1}{3^k}\right)>\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k\to+\infty$ $(k\to\infty)$. В конкретных числах обсуждаемые параметры могут выглядеть так: $\alpha=1/2$, $\beta=1/3$, $\gamma=1/4$.

Для сходимости последовательности $\{\tilde{x}_k\}$ к $\bar{\bar{x}}$ требуется, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{{\rho_k^0}^2}{\rho_k}=0$. Этого можно достигнуть, если положить $\rho_k=\dfrac{1}{\gamma^{2(k+1)}}$, оставляя прежним ρ_k^0: $\dfrac{{\rho_k^0}^2}{\rho_k}=\left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^{2(k+1)}\to 0$ $(k\to\infty)$. Для выполнения условий (17) в этом случае надо также принять $\varepsilon_k=\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^{2(k+1)}$.

4. Учет ограничений с помощью точного штрафа

Выше метод невязки был сведен к решению задачи (4), где в качестве минимизируемой функции использовалась КШФ $F_\delta(x,r)$. Ограничения задачи (2) можно агрегировать и с помощью других модификаций штрафных функций, среди которых в первую очередь следует выделить точную штрафную функцию (ТШФ) Еремина — Зангвилла. Метод ТШФ характеризуется наличием пороговых значений штрафных коэффициентов $r=\bar r$, начиная с которых исходная задача ВП (1) в случае ее разрешимости и задача минимизации штрафной функции становятся эквивалентными в смысле совпадения множеств оптимальных решений.

ТШФ для задачи (2) имеет следующую конструкцию:

$$\Phi_\delta(x,r)=\|x\|^2+\rho\|f^+(x)\|_1+\rho_0(f_0(x)-\delta)^+,$$

$r=[\rho,\rho_0]>0,\ \delta\in\mathbb{R}^1$. Применим ее для анализа НЗ ВП 1-го рода.

Вид функции $\Phi_\delta(x,r)$ приводит к мысли об изменении формы коррекции задачи (1). Прежде аппроксимационная задача (3) для НЗ ВП определялась вектором $\bar\xi=f^+(\bar x)$, где $\bar x$ — точка минимума функции $g(x)=\|f^+(x)\|^2$. Функция $g(x)$, в свою очередь, являлась составным элементом конструкции $F_\delta(x,r)$. При использовании $\Phi_\delta(x,r)$ ограничениям, задающим множество X, соответствует функция $g_1(x)=\|f^+(x)\|_1$, и поэтому представляется естественным взять в качестве корректирующего вектор $\tilde\xi=f^+(\tilde x)$, где $\tilde x\in\operatorname{Arg\,min} g_1(x)$. Вектор $\tilde\xi$ существует при тех же условиях, что и $\bar\xi$. Однако если $\bar\xi$ определялся единственным образом, то относительно $\tilde\xi$ такое утверждение, вообще говоря, не выполняется. Проиллюстрируем этот факт на простом примере.

П р и м е р 1. Определим зависимость оптимальной коррекции НЗ ВП от выбора нормы корректирующего вектора.

Рассмотрим задачу линейного программирования с противоречивыми ограничениями:

$$\min\{x_1\colon x_1\le 0,\ x_2\le 0,\ x_1\ge 1,\ x_2\ge 2\}.$$

Здесь $X=\{x=[x_1,x_2]\in\mathbb{R}^2\colon f_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,4}\}$, $f_1(x)=x_1$, $f_2(x)=x_2$, $f_3(x)=-x_1+1$, $f_4(x)=-x_2+2$, $X=\varnothing$. Пусть $E=\{\xi\in\mathbb{R}^m_+\colon X_\xi\ne\varnothing\}$, $\bar\xi^{(i)}=\arg\min\{\|\xi\|_i\colon \xi\in E\}$, $i=1,2,\infty$. Найдем вначале корректирующий вектор относительно минимума евклидовой нормы ($i=2$). Для этого минимизируем функцию $g(x)=\|f^+(x)\|^2$. Получим $\min g(x)=2.5$, $\bar X=\operatorname{Arg\,min} g(x)=\{\bar x\}=\{[0.5,1]\}$, $\bar\xi=\bar\xi^{(2)}=f^+(\bar x)=[0.5,1,0.5,1]$, $X_{\bar\xi}=\{x=[x_1,x_2]\colon x_1=0.5,\ x_2=1\}=\bar X=\{\bar x\}$. Для отыскания $\bar\xi^{(1)}$ минимизируем функцию

$$g_1(x)=\|f^+(x)\|_1=\sum_{i=1}^m f_i^+(x).$$

Имеем $\min g_1(x)=3$, $\bar X^1=\operatorname{Arg\,min} g_1(x)=\{x=[x_1,x_2]\colon 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 2\}$ ($\bar X^1$ — прямоугольник на плоскости Ox_1x_2). В качестве $\tilde\xi=\bar\xi^{(1)}$ можно взять любой вектор $f^+(x)$, где $x\in\bar X^1$. Например, при $x=[0,0]$ будет $\tilde\xi=[0,0,1,2]$, $X_{\tilde\xi}=\{[0,0]\}$. Вектор $\tilde\xi$ определяется, таким образом, неоднозначно, но для каждого $\bar\xi^{(1)}$ будет $\|\bar\xi^{(1)}\|_1=\|\tilde\xi\|_1=3$ и $\bar X^1=\bigcup\limits_{\|\xi\|_1=3} X_\xi$.

Иногда предпочтительной может быть коррекция $\bar\xi^{(\infty)}$ (см., например, [18]). В данном примере $\min g_2(x)=1$, где $g_2(x)=\max\limits_i f_i^+(x)=\|f^+(x)\|_\infty$. При этом $\bar X^2=\operatorname{Arg\,min} g_2(x)=\{x=[x_1,x_2]\colon 0\le x_1\le 1,\ x_2=1\}$ (отрезок на Ox_1x_2). Здесь хотя $\bar X^2$ — бесконечное множество точек, тем не менее вектор $\bar\xi^{(\infty)}$ определяется однозначно: $\bar\xi^{(\infty)}=[1,1,1,1]$ и $X_{\bar\xi^{(\infty)}}=\bar X^2$.

Заметим, что неоднозначность в определении вектора $\tilde\xi=\bar\xi^{(1)}$ не является обязательной.

П р и м е р 2. Исходная НЗ ВП задана в виде

$$\min\{x_1^2 + x_2^2 \colon x \in X\},$$
$$X = \{x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2 \colon f_1(x) \le 0,\ f_2(x) \le 0\},$$
$$f_1(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - 1, \quad f_2(x) = x_1 + x_2 - 1. \quad \text{Здесь } X = \varnothing.$$

Для нахождения оптимального корректирующего вектора минимизируем функции: $g(x) = f_1^{+^2}(x) + f_2^{+^2}(x)$, $g_1(x) = f_1^+(x) + f_2^+(x)$, $g_2(x) = \max\{f_1^+(x), f_2^+(x)\}$. Получим: $\min g(x) = 1.823$ (достигается в точке $\bar{x} = [1.09, 1.09]$); $\min g_1(x) = 1.586$ (достигается в точке $\tilde{x} = [1.293, 1.293]$); $\min g_2(x) = 1$ (достигается в точке $x^2 = [1, 1]$).

Соответствующие корректирующие векторы и допустимые множества аппроксимирующих задач имеют вид $\bar{\xi} = [0.656, 1.18]$, $\tilde{\xi} = [0, 1.586]$, $\bar{\xi}^{(\infty)} = [1, 1]$, $X_{\bar{\xi}} = \{\bar{x}\} = \bar{X}$, $X_{\tilde{\xi}} = \{\tilde{x}\} = \bar{X}^1$, $X_{\bar{\xi}^{(\infty)}} = \{x^2\} = \bar{X}^2$, при этом $\|\bar{\xi}\| = 1.35$, $\|\tilde{\xi}\| = \|\tilde{\xi}\|_1 = 1.586$, $\|\bar{\xi}^{(\infty)}\|_\infty = 1$, $\|\bar{\xi}^{(\infty)}\| = 1.41$. В данном примере все векторы оптимальной коррекции определяются единственным образом, все они различные и различны соответствующие допустимые множества аппроксимирующих задач.

Таким образом, при применении в методе невязки ТШФ $\Phi_\delta(x, r)$ в качестве аппроксимации для задачи (1) в случае $X = \varnothing$ примем задачу

$$\min\{f_0(x) \colon x \in \bar{X}^1\}. \tag{27}$$

Выпишем далее аналог задачи (4), который поставим в соответствие методу невязки (2) при условии приближенного задания функций $f_i(x)$:

$$\min_x \Phi_\delta^\varepsilon(x, r), \tag{28}$$

где $\Phi_\delta^\varepsilon(x, r) = \|x\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(x)\|_1 + \rho_0(f_0^\varepsilon(x) - \delta)^+$, $r = [\rho, \rho_0] > 0$, $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \ge 0$.

Вначале покажем разрешимость задачи (28).

Лемма. *Для любых $r > 0$, $\varepsilon \ge 0$ и $\delta \in \mathbb{R}^1$ существует $\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \arg\min\limits_x \Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравнивая функции $\Phi_\delta(x, r)$ и $\Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$, можем записать

$$\Phi_\delta(x, r) = \Phi_\delta^\varepsilon(x, r) + \rho\sum_{i=1}^m (f_i^+(x) - f_i^{\varepsilon^+}(x)) + \rho_0[(f_0(x) - \delta)^+ - (f_0^\varepsilon(x) - \delta)^+].$$

Отсюда $\Phi_\delta(x, r) \le \Phi_\delta^\varepsilon(x, r) + \varepsilon(m\rho + \rho_0)$. Поэтому если $x' \in M_1 = \{x \colon \Phi_\delta^\varepsilon(x, r) \le C_1(r, \delta, \varepsilon)\}$, где $C_1(r, \delta, \varepsilon) = \Phi_\delta^\varepsilon(x^0, r)$, x^0 — фиксированная точка, то

$$\Phi_\delta(x', r) \le C_1(r, \delta, \varepsilon) + \varepsilon(m\rho + \rho_0) = C_2(r, \delta, \varepsilon).$$

Так как $\Phi_\delta(x, r)$ — сильно выпуклая по x функция, то множество $M_2 = \{x \colon \Phi_\delta(x, r) \le C_2(r, \delta, \varepsilon)\}$ ограничено для любых фиксированных r, δ и ε. Но $M_1 \subset M_2$, так что непрерывная функция $\varphi(x) = \Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$ на ограниченном множестве достигает минимума в некоторой точке $\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть задача* (27) *разрешима в точке $\tilde{x}$, $\tilde{\xi} = f^+(\tilde{x})$, $f_0(\tilde{x}) = \tilde{f}$. Для любых $r = [\rho, \rho_0] > 0$, $\delta \in \mathbb{R}^1$, $\varepsilon \ge 0$ справедливы оценки*

$$\|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 - \|\tilde{\xi}\|_1 \le \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\rho} + \varepsilon\Big[m + \frac{\rho_0}{\rho}(\widetilde{\Delta}^+ + \varepsilon)\Big], \tag{29}$$

$$f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \tilde{f} \le \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\rho_0} + \varepsilon\Big(1 + \frac{2\rho}{\rho_0}m\Big) + \widetilde{\Delta}^+ - \widetilde{\Delta}, \tag{30}$$

$$\|\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 \le \|\tilde{x}\|^2 + \varepsilon(2m\rho + \rho_0) + \rho_0\widetilde{\Delta}^+, \tag{31}$$

где $\widetilde{\Delta} = \tilde{f} - \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $|f_i^{\varepsilon^+}(\tilde{x}) - f_i^+(x)| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, m$, $f_0^\varepsilon(\tilde{x}) - \delta < \tilde{f} - \delta + \varepsilon = \widetilde{\Delta} + \varepsilon$, то

$$\|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x})\|_1 = \sum_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(\tilde{x}) < \sum_{i=1}^m f_i^+(\tilde{x}) + m\varepsilon = \|\tilde{\xi}\|_1 + m\varepsilon, \qquad (f_0^\varepsilon(\tilde{x}) - \delta)^+ < \varepsilon + \widetilde{\Delta}^+.$$

Из определения точки $\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon$ следует

$$\|\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 + \rho\|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 + \rho_0(f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ < \|\tilde{x}\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 + m\varepsilon) + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+). \tag{32}$$

Отсюда сразу вытекает оценка (29). Кроме того, из (32) также получаем

$$\rho_0(f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ < \|\tilde{x}\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1) + \rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+).$$

Так как $\|f^+(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 < \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 + m\varepsilon$, то

$$\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 \le \|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^+(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1 + m\varepsilon \le m\varepsilon, \tag{33}$$

и, следовательно, $\rho_0(f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ < \|\tilde{x}\|^2 + 2\rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+)$. Но $f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \tilde{f} \le (f_0^\varepsilon(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon) - \delta)^+ - \widetilde{\Delta}$, поэтому справедлива оценка (30).

Из (32) и (33) также получаем

$$\|\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\|^2 \le \|\tilde{x}\|^2 + \rho(\|\tilde{\xi}\|_1 - \|f^{\varepsilon^+}(\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon)\|_1) + \rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+) \le \|\tilde{x}\|^2 + 2\rho m\varepsilon + \rho_0(\varepsilon + \widetilde{\Delta}^+),$$

т. е. имеет место оценка (31).

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть в задаче* (28) $\rho = \rho_0 = r$, $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $r\varepsilon \to 0$, $\widetilde{\Delta} \to 0$, $r\widetilde{\Delta}^+ \to 0$. *Тогда* $\lim \tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \tilde{\bar{x}}$, *где* $\tilde{\bar{x}}$ — *нормальное решение задачи* (27).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть в теореме 4 $\tilde{x} = \tilde{\bar{x}}$. Из оценки (31) следует ограниченность последовательности $\{\tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon\}$. Обозначим через x' ее предельную точку. Согласно (29), (30) имеем $\|f^+(x')\|_1 = \|\tilde{\xi}\|_1$, $f_0(x') = \tilde{f}$, т. е. x' — решение задачи (27), причем в соответствии с (31) $\|x'\| \le \|\tilde{\bar{x}}\|$. Отсюда в силу единственности нормального решения в задаче (27) следует требуемое заключение. $\square$

Следствие 4. *Пусть в задаче* (28) $\rho = \rho_0 = r$, $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $r\varepsilon \to 0$ *и* $\delta = \bar{\delta} \ge \tilde{f}$. *Тогда* $\lim \tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \bar{x}_{\bar{\delta}} = \arg\min\{\|x\|^2 \colon x \in X_{\tilde{\xi}} \cap M_{\bar{\delta}}\}$, $\tilde{\xi} = f^+(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \bar{X}^1$. *Если к тому же* $\delta \to \tilde{f}$, *то* $\lim \tilde{x}_{r,\delta}^\varepsilon = \tilde{\bar{x}}$.

5. Итеративный алгоритм на базе точного штрафа

Рассмотрим далее аналог алгоритма (16), построенного на основе применения функции $\Phi_\delta^\varepsilon(x, r)$.

Ранее мы предполагали, что множество X_ξ непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0 \in \mathbb{R}_+^m$. Тогда ограниченным будет и множество $\bar{X}^1$. Следовательно, задача (27) разрешима в некоторой точке $\tilde{x}$. Пусть $f_0(\tilde{x}) = \tilde{f}$, $f^+(\tilde{x}) = \tilde{\xi}$ и существует вектор $\tilde{\lambda}$ такой, что $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$ будет седловой точкой функции Лагранжа $L_{\tilde{\xi}}(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \tilde{\xi})$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Определим, как и ранее, последовательность чисел $\tau_k > 0$, $\tau_k \searrow 0$ $(k \to \infty)$. Выберем δ_0 из условия $\delta_0 < \tilde{f} - \tau_0$. Положим

$$\delta_{k+1} = \delta_k + (f_0^{\varepsilon_k}(\tilde{x}_k) - \delta_k - \tau_k)^+, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{34}$$

где $\tilde{x}_k = \arg\min_x \Phi_k(x)$, $\Phi_k(x) = \widetilde{\Phi}_{\delta_k}^{\varepsilon_k}(x, r_k, \tau_k) = \|x\|^2 + \rho_k\|f^{\varepsilon_k{}^+}(x)\|_1 + \rho_k^0(f_0^{\varepsilon_k}(x) - \delta_k - \tau_k)^+$, $r_k = [\rho_k, \rho_k^0] > 0$, $\varepsilon_k \ge 0$.

Теорема 5. *Пусть при сформулированных выше условиях параметры τ_k, ρ_k, ρ_k^0, ε_k в алгоритме* (34) *выбраны в соответствии с* (17). *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \tilde f$ *и любая предельная точка последовательности $\tilde x_k$ решает задачу* (27).

Доказательство. Вначале оценим $(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x) - \delta_k - \tau_k)^+ \le f_0(\tilde x) - \delta_k - \tau_k + \varepsilon_k$, $\|f^{\varepsilon_k +}(\tilde x_k)\|_1 > \|f^+(\tilde x_k)\|_1 - m\varepsilon_k$, $\|f^{\varepsilon_k +}(\tilde x)\|_1 < \|\tilde\xi\|_1 + m\varepsilon_k$. Так как $\Phi_k(\tilde x_k) \le \Phi_k(\tilde x)$, то с учетом верхних оценок имеем

$$\|\tilde x_k\|^2 + \rho_k(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1) + \rho_k^0(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \le \|\tilde x\|^2 + 2m\rho_k\varepsilon_k + \rho_k^0\varepsilon_k + \rho_k^0(\tilde f - \delta_k - \tau_k)^+. \quad (35)$$

Поэтому справедлив следующий аналог неравенства (19):

$$(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x_k) - \delta_k - \tau_k)^+ \le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k^0} + \Big(2m\frac{\rho_k}{\rho_k^0} + 1\Big)\varepsilon_k + (\tilde f - \delta_k - \tau_k)^+. \quad (36)$$

В силу условий (17) начальные значения параметров $\varepsilon_0, \rho_0, \rho_0^0, \tau_0, \tau_1$ можно выбрать так, чтобы $\varepsilon_0 < 1$, $2m\rho_0\varepsilon_0 \le 1$, $\sigma_0 \ge \|\tilde x\|^2 + 1$. Тогда из (36) и (17) будет следовать $\delta_k \le \delta_{k+1} < \tilde f - \tau_{k+1}$ $(\forall k)$. Последовательность δ_k монотонно возрастает и ограничена сверху величиной $\tilde f$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar\delta$ и $\bar\delta \le \tilde f$. Кроме того,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(f_0^{\varepsilon_k}(\tilde x_k) - \delta_k - \tau_k)^+ = 0. \quad (37)$$

Из неравенства (35) вытекает

$$\|\tilde x_k\|^2 + \rho_k(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1) + \rho_k^0(f_0(\tilde x_k) - \tilde f) \le \|\tilde x\|^2 + 2m\rho_k\varepsilon_k + 2\rho_k^0\varepsilon_k.$$

Таким образом,

$$\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 \le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2m\varepsilon_k + 2\,\frac{\rho_k^0}{\rho_k}\varepsilon_k + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}(\tilde f - f_0(\tilde x_k)). \quad (38)$$

По определению седловой точки $[\tilde x, \tilde\lambda]$ функции $L_{\tilde\xi}(x,\lambda)$ имеем

$$\tilde f = f_0(\tilde x) \le f_0(\tilde x_k) + (\tilde\lambda, f^+(\tilde x_k) - \tilde\xi).$$

С учетом этого неравенства из (38) получим

$$\begin{aligned}\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 &\le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty\|f^+(\tilde x_k) - \tilde\xi\|_1 \\ &\le \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 + \|\tilde\xi\|_1) \\ &= \frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty(\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 + 2\|\tilde\xi\|_1) + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|f^+(\tilde x_k)\|_1 - \|\tilde\xi\|_1 \le \Big(1 - \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty\Big)^{-1}\Big[\frac{\|\tilde x\|^2}{\rho_k} + 2\frac{\rho_k^0}{\rho_k}\|\tilde\lambda\|_\infty\|\tilde\xi\|_1 + 2\Big(m + \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\Big)\varepsilon_k\Big].$$

Отсюда при $\rho_k \to \infty$, $\dfrac{\rho_k^0}{\rho_k} \to 0$ следует

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|f^+(\tilde x_k)\|_1 \le \|\tilde\xi\|_1. \quad (39)$$

Из (38) также имеем

$$f_0(\tilde{x}_k) - \tilde{f} \le \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\rho_k} + 2\Big(m\frac{\rho_k}{\rho_k^0} + 1\Big)\varepsilon_k. \tag{40}$$

В силу неравенства (39) и ограниченности множеств X_ξ можно сделать вывод об ограниченности последовательности $\{\tilde{x}_k\}$. Обозначим через x^* ее предельную точку. Из (39) вытекает $x^* \in \bar{X}_1$, а из (40) $f_0(x^*) \le \tilde{f}$, т. е. x^* решает задачу (27) и $f_0(x^*) = \tilde{f}$. В свою очередь, из (37) получаем $f_0(x^*) \le \bar{\delta} \le \tilde{f}$. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \bar{\delta} = \tilde{f} = f_0(x^*)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждения о сходимости алгоритмов (16) и (34) остаются в силе, если точки $\bar{x}_k$ в (16) и $\tilde{x}_k$ в (34) определяются соответственно из условий $F_k^* \le F_k(\bar{x}_k) \le F_k^* + \eta_k$ и $\Phi_k^* \le \Phi_k(\tilde{x}_k) \le \Phi_k^* + \eta_k$, где $\eta_k \ge 0$, $\eta_k \to 0$ $(k \to \infty)$, $F_k^* = \min\limits_x F_k(x)$, $\Phi_k^* = \min\limits_x \Phi_k(x)$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть исходная задача (1) разрешима и существует соответствующий множитель Лагранжа. Рассмотрим следующие алгоритмы, основанные на применении функций $F_k(x)$ и $\Phi_k(x)$, которые можно интерпретировать как модификации алгоритмов (16) и (34):

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \frac{1}{\rho_k^0}\, F_k(\bar{x}_k), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \frac{1}{\rho_k^0}\, \Phi_k(\tilde{x}_k), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где точки $\bar{x}_k$ и $\tilde{x}_k$ определяются, как в (16) и (34) соответственно, параметры τ_k , r_k, ε_k выбираются согласно (17). Сходимость данных алгоритмов проверяется по схеме доказательств теорем 2 и 5 с учетом условия $\bar{\xi} = \tilde{\xi} = 0$.

З а м е ч а н и е 3. В алгоритмах (16) и (34) требуется, чтобы начальное значение параметра $\delta = \delta_0$ было меньше оптимального значения откорректированной исходной задачи. Если известно значение $f^* = \inf\limits_x f_0(x) > -\infty$, то можно брать $\delta_0 < f^*$. Другой вариант — взять вектор $\xi' \in \mathbb{R}_+^m$ так, чтобы заведомо $\xi' > \bar{\xi}$ (или $\xi' > \tilde{\xi}$), и положить $\delta_0 = \inf\limits_x\{f_0(x) \colon x \in X_{\xi'}\}$. В любом случае для определения δ_0 может понадобиться ряд итераций некоторого классического метода безусловной или условной минимизации функции $f_0(x)$.

З а м е ч а н и е 4. Сравнивая подходы к оптимальной коррекции НЗ ВП с помощью квадратичной и точной штрафных функций, следует отметить определенные преимущества метода квадратичного штрафа. Это — единственность вектора $\bar{\xi}$, совпадение множеств $\bar{X} = \operatorname{Arg\,min} \|f^+(x)\|^2$ и $X_{\bar{\xi}}$, большее разнообразие оценок сходимости метода. С другой стороны, метод с точным штрафом выглядит более естественно при построении итерационной реализации (алгоритм (34)). Алгоритм же (16), строго говоря, не вполне основывается на квадратичной штрафной функции $F_\delta(x, r)$. В основе построения (16) лежит функция $F_k(x)$, в которой квадратичными являются стабилизатор $\|x\|^2$ и штраф $\|f^+(x)\|^2$ за нарушение ограничений $f(x) \le 0$. Ограничение же $f_0(x) \le \delta$ учитывается слагаемым вида $(f_0(x) - \delta)^+$, типичным для точного штрафа.

6. Заключение

В работе рассматривались методы оптимальной коррекции НЗ ВП, в основе которых лежало использование идеи метода невязки — одного из классических подходов к регуляризации некорректных задач оптимизации. Исходной несобственной задаче ставилась в соответствие типовая модель метода невязки, анализ которой проводился, в свою очередь, с помощью метода штрафных функций. Последовательно использовались две модификации метода штрафов — метод квадратичной и метод точной штрафных функций. Показано, что каждому методу соответствует свой способ выбора вектора ξ оптимальной коррекции правых частей ограничений исходной задачи. Для метода КШФ предпочтительной оказывалась коррекция по минимуму евклидовой нормы ξ, для метода ТШФ — по минимуму октаэдрической нормы. Для каждого подхода предложены конкретные итеративные схемы управления параметрами алгоритмов, обеспечивающих требуемую сходимость. Предлагаемые итеративные процедуры могут рассматриваться, с одной стороны, как способы регуляризации задачи, аппроксимирующей исходную несобственную постановку, а с другой, — как реализация некоторых вариантов регуляризованного метода нагруженной функции для НЗ ВП, имеющего определенные преимущества по сравнению с методами штрафных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Скарин В. Д.** О применении метода невязки для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 268–276.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. Кн. 1, 2. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
3. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
4. **Ерохин В. И.** Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 587–601.
5. **Попов Л. Д.** Применение барьерных функций для оптимальной коррекции несобственных задач линейного программирования 1-го рода // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 3–11.
6. **Leon T., Liern V.** A fuzzy method to repair infeasibility in linear constrained problems // Fuzzy Set and Systems. 2001. Vol. 122, no. 2. P. 237–243.
7. **Скарин В. Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.
8. **Chinneck J. W., Dravnieks E. W.** Locating minimal infeasible constraint sets in linear programs // ORSA J. on Computing. 1991. Vol. 3, no. 2. P. 157–168.
9. **Ben-Tal A., Nemirovski A.** Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data // Math. Progr. 2000. Vol. 88, no. 3. P. 411–424.
10. **De Groen P.** An introduction to total least squares // Niew Archief voor Wiskunde. 1996. Vol. 14, no. 2. P. 237–254.
11. **Dax A.** The smallest correction of an inconsistent system of linear inequalities // Optimization and Engineering. 2001. Vol. 2. P. 349–359.
12. **Amaral P., Barahona P.** Connections between the total least squares and the correction of an infeasible system of linear inequalities // Linear Algebra Appl. 2005. Vol. 395. P. 191–210.
13. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
14. **Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.** Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
15. **Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.** Iterative regularization methods in nonlinear ill-posed problems. Berlin; N. Y.: W. de Gruyter, 2008. 194 p.
16. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
17. **Попов Л. Д.** Об адаптации метода нагруженного функционала к несобственным задачам математического программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 247–255.
18. **Скарин В. Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 15.02.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.532.2

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ В РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП[1]

Д. В. Скоков

В работе изучаются нижнемодулярные, кодистрибутивные и костандартные элементы решетки всех многообразий эпигрупп. Нижнемодулярные и костандартные элементы описаны полностью, а кодистрибутивные — в обширном частном случае, включающем в себя все коммутативные многообразия эпигрупп. В частности, доказано, что в решетке всех эпигрупповых многообразий костандартность эквивалентна нейтральности, а нижняя модулярность влечет модулярность.

Ключевые слова: эпигруппа, многообразие, решетка, нейтральный элемент, нижнемодулярный элемент, кодистрибутивный элемент, костандартный элемент.

D. V. Skokov. Special elements of certain types in the lattice of epigroup varieties.

Lower-modular, codistributive and costandard elements of the lattice of all epigroup varieties are studied. Lower-modular and costandard elements are completely classified, and codistributive elements are described within a wide class of epigroup varieties that includes all commutative varieties. In particular, we verify that, in the lattice of all epigroup varieties, an element is costandard if and only if it is neutral and an element is modular whenever it is lower-modular.

Keywords: epigroup, variety, lattice, neutral element, lower-modular element, codistributive element, costandard element.

MSC: 20M07, 08B15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-244-250

1. Введение и формулировки основных результатов

Эпигруппой называется полугруппа S, в которой некоторая степень каждого элемента является *групповым элементом*, т. е. принадлежит некоторой подгруппе в S. Обширную информацию об эпигруппах можно найти в работе [5]. Класс эпигрупп весьма широк. Он включает в себя, в частности, все *периодические* полугруппы (их можно определить как полугруппы, в которых некоторая степень каждого элемента лежит в некоторой конечной циклической подгруппе) и все *вполне регулярные* полугруппы (т. е. полугруппы, в которых каждый элемент является групповым).

Эпигруппы естественно рассматривать как *унарные полугруппы*, т. е. полугруппы с дополнительной унарной операцией, которая вводится следующим образом. Пусть S — эпигруппа. Если e — идемпотент из S, то через G_e обозначается максимальная подгруппа в S, для которой e является единицей, а через K_e — множество всех элементов из S, некоторая степень которых принадлежит G_e. По определению эпигруппы для всякого элемента $x \in S$ существует идемпотент x^ω такой, что $x \in K_{x^\omega}$. Хорошо известно, что идемпотент x^ω определен однозначно и $xx^\omega = x^\omega x \in G_{x^\omega}$ (см., например, [5, леммы 1 и 2]). Обозначим через $\overline{x}$ элемент, обратный к xx^ω в группе G_{x^ω}. Отображение $x \longmapsto \overline{x}$ и есть упомянутая выше унарная операция на эпигруппе S. Элемент $\overline{x}$ называется *псевдообратным* к x. Всюду в дальнейшем, говоря об эпигруппах, мы будем рассматривать их как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения. Это позволяет, в частности, говорить о многообразиях эпигрупп как алгебр

[1]Работа выполнена в рамках реализации базовой части госзадания на выполнение НИР (проект № 2248 Министерства образования и науки РФ) и поддержана РФФИ (проект 14-01-00524).

в указанной сигнатуре. Одним из основных направлений изучения многообразий эпигрупп является рассмотрение решетки эпигрупповых многообразий. Данная статья относится именно к этому направлению.

В теории решеток большое внимание уделяется рассмотрению специальных элементов различных типов. Напомним, что элемент x решетки L называется

дистрибутивным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
стандартным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
модулярным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y$;
нижнемодулярным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$x \le y \longrightarrow x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y$;
нейтральным, если	$\forall y, z \in L\colon$	$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$.

Кодистрибутивные, *костандартные* и *верхнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и нижнемодулярным соответственно. Отметим, что между введенными типами специальных элементов существует ряд взаимосвязей: всякий нейтральный элемент стандартен и костандартен, всякий [ко]стандартный элемент модулярен и [ко]дистрибутивен, а всякий [ко]дистрибутивный элемент нижнемодулярен [соответственно, верхнемодулярен]. Почти все из перечисленных утверждений очевидны. Единственным исключением является тот факт, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен. Его доказательство можно найти, например, в [6, теорема 253]. В дальнейшем мы используем перечисленные сейчас утверждения без дополнительных оговорок.

Будем обозначать решетку всех многообразий эпигрупп через **EPI**. Для краткости мы будем применять прилагательные, обозначающие типы специальных элементов решеток, и к многообразиям эпигрупп, являющимся элементами соответствующих типов в решетке **EPI**. В частности, именно в этом смысле мы будем говорить о верхнемодулярных, кодистрибутивных и т. п. многообразиях. В данной работе продолжается изучение специальных элементов в решетке **EPI**, начатое в работах [3; 9]. В них рассматривались многообразия пяти типов — нейтральные, дистрибутивные, стандартные, модулярные и верхнемодулярные. В данной работе рассматриваются нижнемодулярные, кодистрибутивные и костандартные многообразия. Нижнемодулярные и костандартные многообразия описаны полностью, а кодистрибутивные — в строго перестановочном случае (определение строго перестановочных многообразий будет дано ниже). В частности, доказано, что в решетке **EPI** костандартность эквивалентна нейтральности, а нижняя модулярность влечет модулярность.

Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобятся некоторые определения и обозначения. Через $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ будем обозначать тривиальное многообразие, многообразие полурешеток и многообразие полугрупп с нулевым умножением соответственно. Тождество вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi},$$

где π — нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, называется *перестановочным*. Если при этом $1\pi \ne 1$ и $n\pi \ne n$, то тождество называется *строго перестановочным*. Многообразие эпигрупп, удовлетворяющее строго перестановочному тождеству, также называется *строго перестановочным*. Пару тождеств вида $wx = xw = w$, где буква x не входит в запись слова w, принято записывать в виде $w = 0$. Тождества такого вида, а также многообразия, ими задаваемые, называются 0-*приведенными*. Ясно, что полугруппа удовлетворяет тождеству $w = 0$ тогда и только тогда, когда она содержит нуль и любое значение слова w в этой полугруппе равно нулю.

Основными результатами работы являются следующие три утверждения.

Теорема 1. *Для многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*:

а) *$\mathcal{V}$ является костандартным элементом решетки* **EPI**;

б) *$\mathcal{V}$ является нейтральным элементом решетки* **EPI**;

в) *$\mathcal{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

Отметим, что эквивалентность условий б) и в) этой теоремы доказана в [9, теорема 1.1].

Теорема 2. *Строго перестановочное многообразие эпигрупп* $\mathcal{V}$ *является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{X}$, *где* $\mathcal{G}$ — *многообразие абелевых групп, а* $\mathcal{X}$ — *одно из многообразий* $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ *и* $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.

Теорема 3. *Многообразие эпигрупп* $\mathcal{V}$ *является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{M}$ — *одно из многообразий* $\mathcal{T}$ *и* $\mathcal{SL}$, *а* $\mathcal{N}$ — 0-*приведенное многообразие.*

Работа состоит из трех разделов. Раздел 2 посвящен доказательству основных результатов, а в разд. 3 собран ряд следствий и открытых вопросов.

2. Доказательства основных результатов

Пусть Σ — система тождеств, записанных в сигнатуре Ω, состоящей из ассоциативной бинарной операции умножения и унарной операции. Обозначим через K_Σ класс всех эпигрупп, удовлетворяющих Σ (мы предполагаем при этом, что сигнатурная унарная операция интерпретируется как псевдообращение). Класс K_Σ может не быть многообразием, поскольку он не обязан быть замкнут относительно бесконечных прямых произведений (см., например, п. 4° в § 1 работы [5]). Чтобы охарактеризовать системы тождеств Σ, для которых класс K_Σ является многообразием, нам понадобятся некоторые определения. Слово w, записанное в сигнатуре Ω, называется *полугрупповым*, если оно не содержит унарной операции. Тождество $u = v$ сигнатуры Ω, называется *полугрупповым*, если слова u и v являются полугрупповыми, и *смешанным*, если одно из этих слов — полугрупповое, а другое — нет. Полугрупповое тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в обе его части одинаковое число раз.

Лемма 1 [7, предложение 2.15]. *Класс* K_Σ *является многообразием эпигрупп тогда и только тогда, когда* Σ *содержит либо полугрупповое неуравновешенное тождество, либо смешанное тождество.* □

Если класс K_Σ является многообразием, то мы будем обозначать это многообразие через $\mathrm{var}\,\Sigma$. Всюду ниже в тех случаях, когда будет использоваться это обозначение, его корректность вытекает из леммы 1. Явных ссылок на это обстоятельство мы ниже делать не будем.

В доказательствах теорем 1 и 2 нам понадобится следующее утверждение, которое может быть доказано дословным повторением рассуждений из первого абзаца разд. 3 статьи [1].

Лемма 2. *Если многообразие эпигрупп* $\mathcal{V}$ *является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *и не содержит многообразия* $\mathcal{P} = \mathrm{var}\,\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$ *и двойственного к нему многообразия* $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, *то все нильполугруппы в многообразии* $\mathcal{V}$ *суть полугруппы с нулевым умножением.* □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Как уже отмечалось, эквивалентность условий б) и в) этой теоремы доказана в [9, теорема 1.1]. Импликация б) $\longrightarrow$ а) очевидна. Поэтому достаточно показать импликацию а) $\longrightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — костандартное многообразие эпигрупп. Тогда многообразие $\mathcal{V}$ модулярно. В силу [9, теорема 1.2] отсюда вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. В частности, $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Многообразие $\mathcal{V}$ кодистрибутивно. Применяя лемму 2, получаем, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$, т. е. $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. □

Пусть I — решеточное тождество вида $s = t$, где s и t — решеточные термы от упорядоченного набора переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Элемент x решетки L назовем *I-элементом*, если

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in L\colon \quad s(x, x_1, \ldots, x_n) = t(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Заметим, что специальные элементы всех перечисленных выше типов являются I-элементами для подходящего I (для нейтральных, [ко]дистрибутивных и [ко]стандартных элементов это очевидно, а для модулярных, верхнемодулярных и нижнемодулярных вытекает из возможности записать модулярный закон в виде тождества). В [4, следствие 2.1] показано, что если I — тождество, выполненное в 2-элементной решетке, а a — атом и нейтральный элемент некоторой решетки L, то элемент $x \in L$ является I-элементом в L тогда и только тогда, когда этим свойством обладает элемент $x \vee a$. Обозначим через **SEM** решетку всех многообразий полугрупп. Общеизвестно, что многообразия $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ являются атомами решетки **SEM**, а значит, и решетки **EPI**. В [9, теорема 1.1] доказано, что эти многообразия нейтральны. Объединяя сказанное, получаем следующее утверждение, которое пригодится нам в доказательствах теорем 2 и 3.

Лемма 3. *Пусть I — решеточное тождество, выполненное в 2-элементной решетке, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$. Многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ является I-элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда этим свойством обладает многообразие $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$.*$\square$

Хорошо известно, что во всякой периодической эпигруппе операция псевдообращения может быть выражена через умножение (см., например, п. 4° в § 1 работы [5]). Таким образом, периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп. Далее мы будем использовать этот факт без дополнительных оговорок.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — строго перестановочное кодистрибутивное многообразие эпигрупп. Многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно. В [9, лемма 3.6] показано, что всякое строго перестановочное верхнемодулярное многообразие эпигрупп коммутативно. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ коммутативно. В частности, оно не содержит многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Для всякого натурального m положим $\mathcal{C}_m = \mathrm{var}\,\{x^m = x^{m+1},\, xy = yx\}$. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$. Кроме того, положим $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Как показано в [9, следствие 2.8], всякое строго перестановочное многообразие эпигрупп представимо в виде $\mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m \vee \mathcal{N}$ для некоторого многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$, некоторого $m \geq 0$ и некоторого нильмногообразия $\mathcal{N}$. В частности, такой вид имеет многообразие $\mathcal{V}$. В силу леммы 2 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$, и потому $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. Кроме того, очевидно, что многообразие $\mathcal{C}_2$ содержит нильполугруппы, не являющиеся полугруппами с нулевым умножением. Следовательно, $m \leq 1$, и потому $\mathcal{C}_m$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$.

Достаточность. В силу леммы 3 достаточно убедиться в кодистрибутивности произвольного многообразия абелевых групп $\mathcal{G}$. Легко заметить, что всякое многообразие эпигрупп либо является периодическим многообразием, либо содержит многообразие $\mathcal{AG}$ всех абелевых групп. Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия эпигрупп. Предположим сначала, что хотя бы одно из этих многообразий содержит $\mathcal{AG}$. Для определенности будем считать, что $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{AG}$. Значит, $\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{AG} \supseteq \mathcal{G}$, откуда

$$\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{G} = \mathcal{G} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае многообразие $\mathcal{G}$ кодистрибутивно. Поэтому далее можно считать, что многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ являются периодическими, а значит, могут рассматриваться как многообразия полугрупп. Теперь мы можем завершить доказательство достаточности, дословно повторяя ту часть доказательства импликации в) $\longrightarrow$ а) теоремы 1.2 работы [1], в которой рассматривается случай, когда многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ периодичны. $\square$

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся еще три вспомогательных утверждения.

Предложение 1. *Всякое 0-приведенное многообразие эпигрупп является модулярным и нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В части, относящейся к модулярным многообразиям, это утверждение доказано в [3, предложение 5.1]. Докажем его для нижнемодулярных многообразий.

Пусть $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие эпигрупп, F — свободная унарная полугруппа счетного ранга, а ν — вполне инвариантная конгруэнция на F, отвечающая многообразию $\mathcal{V}$. Конгруэнция ν имеет ровно один неодноэлементный класс (состоящий из тех и только тех слов, которые равны 0 в $\mathcal{N}$). Решетка всех многообразий унарных полугрупп антиизоморфна решетке всех вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F, которая, в свою очередь, вкладывается в решетку эквивалентностей на множестве F. Как проверено в [2, предложение 3], если отношение эквивалентности на некотором множестве X имеет ровно один неодноэлементный класс, то оно является верхнемодулярным элементом в решетке эквивалентностей на X. Таким образом, ν — верхнемодулярный элемент в решетке эквивалентностей на множестве F, а значит, и в решетке вполне инвариантных конгруэнций на полугруппе F. Следовательно, многообразие $\mathcal{N}$ является нижнемодулярным элементом в решетке всех многообразий унарных полугрупп, и тем более в ее подрешетке **EPI**. □

Следующее предложение дает положительный ответ на вопрос 5.6 из работы [9].

Предложение 2. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *является периодическим многообразием.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое нижнемодулярное многообразие эпигрупп. Как известно (см., например, [5, наблюдение 10]), существует натуральное число n такое, что во всякой эпигруппе $S \in \mathcal{V}$ n-я степень любого элемента является групповым элементом. Следовательно, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n = \overline{\overline{x^n}}$. Пусть n — минимальное число с таким свойством. Рассмотрим многообразия

$$\mathcal{Y} = \mathrm{var}\,\{x^n y^3 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z} = \mathrm{var}\,\{x^n y^2 x = x^n y^3 x\}.$$

Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ нижнемодулярно и $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Y}$, имеет место равенство

$$(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y} = (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{V}.$$

Заметим, что в многообразии $\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}$ выполнено тождество $x^n y^2 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x$. В самом деле,

$$\begin{aligned}
x^n y^2 x &= x^n y^3 x && \text{в многообразии } \mathcal{Z},\\
&= \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x && \text{в многообразии } \mathcal{Y},\\
&= \overline{\overline{x^n}} \cdot \overline{x^n}\, x^n y^3 x && \text{так как } \overline{x^n}\, x^n \text{ — единица в группе, содержащей } \overline{\overline{x^n}},\\
&= \overline{\overline{x^n}} \cdot \overline{x^n}\, x^n y^2 x && \text{в многообразии } \mathcal{Z},\\
&= \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x && \text{так как } \overline{x^n}\, x^n \text{ — единица в группе, содержащей } \overline{\overline{x^n}}.
\end{aligned}$$

Следовательно, тождество $x^n y^2 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x$ выполнено в $(\mathcal{Z} \wedge \mathcal{Y}) \vee \mathcal{V}$, а значит, и в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}$. Это означает, что существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$. В частности, существует слово w такое, что в одном из многообразий $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$ и $\mathcal{Y}$ выполнено тождество $x^n y^2 x = w$. Предположим сначала, что оно выполнено в $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$. Очевидно, что слова $x^n y^2 x$ и $x^n y^3 x$ не содержат образов друг друга относительно эндоморфизмов абсолютно свободной унарной полугруппы. Следовательно, из тождества $x^n y^2 x = x^n y^3 x$ невозможно вывести никакое тождество вида $x^n y^2 x = w$, где w отлично от слов $x^n y^2 x$ и $x^n y^3 x$. В частности, никакое тождество такого вида не выполнено в $\mathcal{Z}$. Многообразие $\mathcal{V}$ непериодично и потому не удовлетворяет тождеству $x^n y^2 x = x^n y^3 x$. Следовательно, многообразие $\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}$ не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству вида $x^n y^2 x = w$. Противоречие. Очевидно, что тождество $x^n y^3 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^3 x$ выполнено в многообразии $\mathcal{AG}$ и потому многообразие $\mathcal{Y}$ не периодично. Рассуждая так же, как выше, получаем, что если слово w отлично от слов $x^n y^2 x$ и $x^n y^3 x$, то никакое нетривиальное тождество вида $x^n y^2 x = w$ не выполняется в многообразии $\mathcal{Y}$. Следовательно, никакое тождество такого вида не выполнено и в многообразии $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}$.

В частности, в $(\mathcal{Z} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{Y}$ не выполнено тождество $x^n y^2 x = \overline{\overline{x^n}}\, y^2 x$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. □

Обозначим через **Per** решетку всех многообразий периодических полугрупп. Ясно, что **Per** является подрешеткой в **EPI**. Формулировка следующего утверждения почти дословно повторяет формулировку леммы 3.1 работы [8]. Однако, нам необходима некоторая модификация терминов, используемых в [8]. А именно, мы будем называть слова u и v *эквивалентными*, если u совпадает с образом слова v относительно некоторого автоморфизма абсолютно свободной унарной полугруппы.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI**, *а u, v, s и t — попарно неэквивалентные слова одной и той же длины, зависящие от одних и тех же букв. Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам $u = v$ и $s = t$, то оно удовлетворяет также и тождеству $u = s$.*

Доказательство. Согласно предложению 2 многообразие $\mathcal{V}$ периодично. Следовательно, оно является нижнемодулярным элементом решетки **Per**. В то же время, дословно повторяя доказательство леммы 3.1 работы [8], можно показать, что если заключение леммы не выполнено, то $\mathcal{V}$ не нижнемодулярно в **Per**. □

Доказательство теоремы 3. *Достаточность* непосредственно вытекает из леммы 3 и предложения 1.

Необходимость. Пусть $\mathcal{V}$ — нижнемодулярный элемент в решетке **EPI**. Согласно предложению 2 $\mathcal{V}$ периодично. В [8, предложение 3.3] доказано, что если многообразие периодических полугрупп является нижнемодулярным элементом решетки **SEM**, то оно есть объединение одного из многообразий $\mathcal{T}$ или $\mathcal{SL}$ и 0-приведенного многообразия. Дословно повторяя доказательство этого утверждения, но используя предложение 2.6 работы [9] вместо леммы 2.6 статьи [8] и лемму 4 настоящей работы вместо леммы 3.1 статьи [8], мы можем заключить, что многообразие эпигрупп $\mathcal{V}$ обладает тем же свойством. □

3. Следствия и вопросы

Сравнение теоремы 2 с теоремой 1.2 работы [1] показывает, что справедливо

Следствие 1. *Строго перестановочное периодическое многообразие полугрупп является кодистрибутивным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда оно является кодистрибутивным элементом решетки* **SEM**. □

Вопрос о том, можно ли в этом следствии отказаться от требования строгой перестановочности многообразия, остается открытым. Сформулируем его в явном виде.

Вопрос 1. Верно ли, что произвольное периодическое многообразие полугрупп является кодистрибутивным элементом решетки **EPI** тогда и только тогда, когда оно является кодистрибутивным элементом решетки **SEM**?

Из теоремы 1 вытекает следующий эпигрупповой аналог следствия 1.1 работы [1].

Следствие 2. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся костандартным элементом решетки* **EPI**, *является стандартным элементом этой решетки.* □

Сравнение теоремы 1 с теоремой 1.3 работы [1], показывает, что верно

Следствие 3. *Для периодического многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ является костандартным элементом решетки* **EPI**;
б) *$\mathcal{V}$ является нейтральным элементом решетки* **EPI**;
в) *$\mathcal{V}$ является костандартным элементом решетки* **SEM**;
г) *$\mathcal{V}$ является нейтральным элементом решетки* **SEM**. □

Сравнивая теорему 3 с теоремой 1.1 работы [10], мы получаем

Следствие 4. *Периодическое многообразие полугрупп является нижнемодулярным элементом решетки* **EPI** *тогда и только тогда, когда оно является нижнемодулярным элементом решетки* **SEM**. □

Из теоремы 3, предложения 1 и леммы 3 вытекает следующий эпигрупповой аналог следствия 1.2 работы [10].

Следствие 5. *Всякое многообразие эпигрупп, являющееся нижнемодулярным элементом решетки* **EPI***, является модулярным элементом этой решетки.* □

Напомним, что многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом*, если квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ является вполне регулярной полугруппой. В [1, теорема 1.1] показано, что всякое собственное кодистрибутивное в **SEM** многообразие полугрупп является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом. Это делает естественным

В о п р о с 2. Верно ли, что произвольное многообразие эпигрупп, являющееся кодистрибутивным элементом решетки **EPI**, является многообразием эпигрупп с вполне регулярным квадратом?

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю Б.М. Верникову за постоянное внимание, поддержку и помощь, оказанную на всех этапах выполнения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верников Б.М.** Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С. 13–21.
2. **Верников Б.М., Волков М.В.** Решетки нильпотентных многообразий полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия / Урал. гос. ун-т. Свердловск, 1988. С. 53–65.
3. **Скоков Д.В.** Дистрибутивные элементы решетки многообразий эпигрупп // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 723–731.
4. **Шапрынский В.Ю.** Дистрибутивные и нейтральные элементы решетки коммутативных многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 2011. № 7. С. 67–79.
5. **Шеврин Л.Н.** К теории эпигрупп. I, II // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 129–160; № 9. С. 153–176.
6. **Grätzer G.** Lattice Theory: Foundation. Birkhäuser: Springer Basel AG, 2011. 614 p.
7. **Gusev S.V., Vernikov B.M.** Endomorphisms of the lattice of epigroup varieties [e-resource]. URL: http://arxiv.org/abs/1404.0478v3. 22 p.
8. **Shaprynskiĭ V.Yu.** Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties // Semigroup Forum. 2012. Vol. 85, no. 1. P. 97–110.
9. **Shaprynskiĭ V.Yu., Skokov D.V., Vernikov B.M.** Special elements of the lattice of epigroup varieties // Algebra Universalis. 2016. Vol. 76, iss. 1. P. 1–30.
10. **Shaprynskiĭ V.Yu., Vernikov B.M.** Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties. III // Acta Sci. Math. (Szeged). 2010. Vol. 76, no. 3–4. P. 371–382.

Скоков Дмитрий Вячеславович
ассистент
Институт математики и компьютерных наук,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dmitry.skokov@gmail.com

Поступила 24.07.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54, 519.1

О ГРАФАХ КОКСТЕРА ГРУПП С СИМПЛЕКТИЧЕСКИМИ 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ[1]

А. И. Созутов, В. М. Синицин

Работа посвящена поиску и описанию минимальных систем 3-транспозиций, порождающих группы $Sp_{2n}(2)$ и $O^{\pm}_{2n}(2)$, графы Кокстера которых являются деревьями.

Ключевые слова. Группы с симплектическими 3-транспозициями, определяющие соотношения, графы и группы Кокстера.

A. I. Sozutov, V. M. Sinitsin. On Coxeter graphs of groups with symplectic 3-transpositions.

We find and describe minimal systems of 3-transpositions that generate the groups $Sp_{2n}(2)$ and $O^{\pm}_{2n}(2)$ whose Coxeter graphs are trees.

Keywords: groups with symplectic 3-transpositions, defining relations, Coxeter graphs and groups.

MSC: 20F05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-251-258

Группы с 3-транспозициями (Б. Фишер, 1969 г.) [1] играют большую роль в теории конечных групп. Изучению их свойств и различных связей с другими математическими структурами посвящен внушительный цикл работ многих известных зарубежных математиков (Ф. Бюкенхаут, Х. Кейперс, С. Даниельсон, М. Гутерман, Дж. Холл, Д. Хант, Р. Вейс, Д. Пэррот, Ф. Зара и др., см., например, [1–3]). В настоящей статье продолжаются исследования из [4; 5] по описанию систем порождающих и определяющих соотношений групп с 3-транспозициями, аналогичных системам порождающих и определяющих соотношений групп Вейля $W(E_n)$ с графами Кокстера E_n ($n = 6,\ 7,\ 8$) [6]. Рабочая гипотеза: каждую из групп $Sp_{2n}(2)\times V$ ($n \geq 4$), $O^{-}_{2n}(2) \times Z_2$ ($n \geq 4$) и $O^{+}_{2n}(2) \times Z_2$ ($n \geq 5$), где V — четверная группа Клейна, Z_2 — группа порядка 2, можно получить из подходящей бесконечной группы Кокстера

$$G_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\ 1 \leq i \neq j \leq n\rangle$$

наложением точно одного дополнительного соотношения вида $(s_i s)^2 = 1$, где $s \in s_1^G$.

Результаты работы были анонсированы в [7].

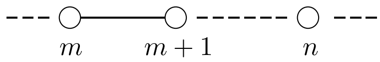
1. Формулировки основных результатов

Множество $D = a^G$ инволюций группы G называется *классом* 3-*транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$ и $G = \langle D\rangle$ [1]. Минимальной системе порождающих $X \subseteq D$ группы $G = G(\Gamma)$ ставится в соответствие граф Γ, вершинами которого являются элементы из X и две вершины a, b которого соединены ребром в Γ в том и только том случае, когда инволюции a и b неперестановочны. Пусть граф Γ_n является деревом с вершинами $1, \ldots, n$, V_n — линейное пространство над полем F_2 с базисом $p_1, \ldots, p_n$ и W_n — подгруппа из $SL(V_n)$, порожденная отражениями (трансвекциями) $w_1, \ldots, w_n$, действующими на элементах базиса следующим образом: $p_j^{w_i} = p_j + p_i$, если $(i, j) \in \Gamma_n$ и $p_j^{w_i} = p_j$ в остальных случаях. Каждому

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 А).

вектору $x \in V_n$ ставим в соответствие окрашенный граф $\Gamma_n(x)$, в котором вершина p_j черная, если в разложении $x = \sum \gamma_i p_i$ коэффициент $\gamma_j = 1$, и белая, если $\gamma_j = 0$. Вектор x называется *нечетносвязным*, если окраска графа $\Gamma_n(x)$ нечетносвязна, и *четносвязным* в противном случае [8]. Ненулевой вектор $x \in V_n$ тогда и только тогда инвариантен относительно группы W_n, когда у каждой вершины графа $\Gamma_n(x)$ число черных соседних вершин четно [5, лемма 1]. Множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq m)$ вложенных друг в друга графов называем *E-серией*, если они являются деревьями, содержат подграф E_6, их подграфы с вершинами $m, m+1, \ldots, n$ являются цепями вида

$$\Gamma_m \subset \Gamma_{m+1} \subset \ldots \subset \Gamma_n \subset \ldots, \qquad (1.1)$$



и для некоторого n в V_n нет ненулевых инвариантных векторов. Пусть t_n — число нечетносвязных векторов в V_n и серии (1.1) соответствует последовательность

$$t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n, \ldots \ . \qquad (1.2)$$

Теорема 1. *Для чисел последовательности* (1.2) *верна точно одна из следующих групп формул*:

(I) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1} 2^{2k+1}$;

(II) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1}$;

(III) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$;

(IV) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$.

Числа t_n из (I)–(IV) вычисляемы по соответствующим формулам (i)–(iv):

$$\text{(i)} \quad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}; \qquad \text{(ii)} \quad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4};$$

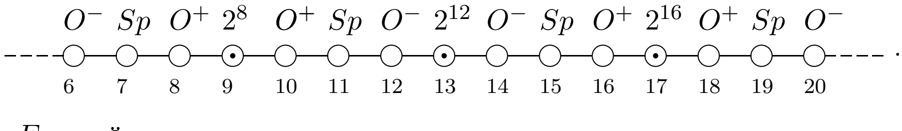
$$\text{(iii)} \quad t_{n+1} = 2^n - 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}; \qquad \text{(iv)} \quad t_{n+1} = 2^n + 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}.$$

Пусть n — четное число, $2^n O_n^{\pm}(2)$ — естественное расширение аддитивной группы пространства V_n с помощью группы $O_n^{\pm}(2)$. По теореме 2 и леммам 14, 16 из [5] для E-серии, состоящей из графов $\{E_n\}$ $(n \geq m = 6)$, группы W_n составляют цепочку

$$O_6^-(2) < Sp_6(2) < O_8^+(2) < 2^8 O_8^+(2) < O_{10}^+(2) < Sp_{10}(2) < O_{12}^-(2) < 2^{12} O_{12}^-(2) < \ldots,$$

полностью восстанавливаемую из следующей *разметки*:

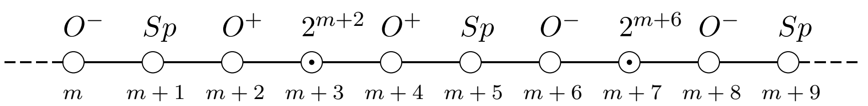
(E_n) $n \geq m = 6$:



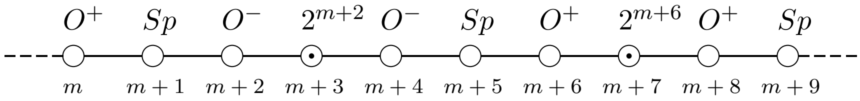
Для произвольных E-серий доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При $m = 4k$ и нечетном k подграфы с вершинами $p_{4k}, p_{4k+1}, \ldots$ графов Γ_n E-серии* (1) *имеют точно одну из следующих разметок*:

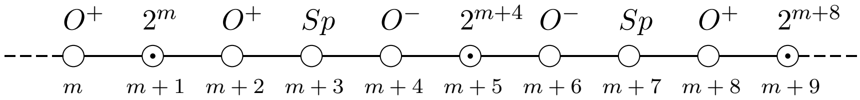
(I) $m = 4k$, $k \neq 2r$:



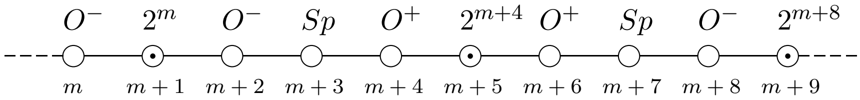
;

(II) $m = 4k,\ k \neq 2r$: 

;

(III) $m = 4k,\ k \neq 2r$: 

;

(IV) $m = 4k,\ k \neq 2r$: 

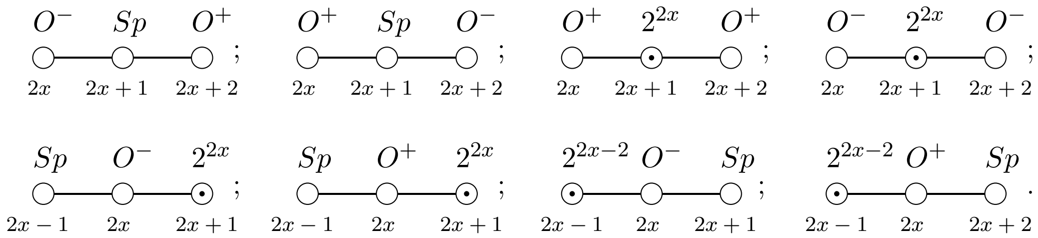
.

В каждой из разметок (I)–(IV) *символы* O^-, O^+, Sp *и* 2^x *расположены периодично с периодом 8. Если метка вершины* n *равна* $O^{\pm}$, *то* n *четно и* Γ_n *является графом группы* $O_n^{\pm}(2)$. *Если над вершиной* n *стоит метка* Sp, *то* n *нечетно и* Γ_n *является графом группы* $Sp_{n-1}(2)$. *Если метка вершины* n *равна* 2^{n-1}, *то* n *нечетно, графу* Γ_n *соответствует группа* $2^{n-1}O_{n-1}^{\pm}(2)$ *и метки вершин* $n-1$ *и* $n+1$ *совпадают с* $O^{\pm}$.

З а м е ч а н и е 1. Каждый граф-дерево Γ с подграфом E_6, пространство $V(\Gamma)$ которого содержит не более одного ненулевого инвариантного вектора, может быть включен в подходящую E-серию.

З а м е ч а н и е 2. Условие $m = 4k$, $k \neq 2r$ в теореме 2 не является абсолютным ограничением, поскольку разметка начиная с вершины m может быть продолжена влево до вершины ветвления.

З а м е ч а н и е 3. Каждая разметка в теореме 2 состоит из следующих типовых (но пересекающихся) тройных фрагментов:



2. Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются условия теоремы 1. Для произвольного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ из V_n в [5] введена квадратичная форма

$$F(x) = \sum_{i \in \Gamma_n} x_i^2 + \sum_{(i,j) \in \Gamma_n} x_i x_j$$

и равенством

$$f(x,y) = f_n(x,y) = F(x+y) + F(x) + F(y)$$

определена симплектическая форма на V_n. Как доказано в [5, леммы 4, 19, 20], справедливо

Предложение 1. $F(x) = 1$ *тогда и только тогда, когда вектор* x *нечетно связен*; $f(x,y) = 0$ *тогда и только тогда, когда среди векторов* x, y, $x+y$ *четное число нечетно-связных. Если в* V_n *нет ненулевых инвариантных векторов, то формы* F *и* f *невырождены на* V_n. *При любом четном* $n \geq m$ *в пространстве* V_n *нет ненулевых инвариантных векторов, а при нечетном* n V_n *содержит точно один ненулевой инвариантный вектор.*

З а м е ч а н и е 4. Хорошо известно, что при нечетном n симплектическая форма на V_n вырождена [9, предложение 2.4.1]. Теперь из условий, наложенных на E-серию, следует, что в V_n есть инвариантный вектор $r = s + p_n$, где $s \in V_{n-2}$. Легко убедиться, что V_{n+1} не содержит инвариантных векторов и форма f_{n+1} невырождена.

В силу лемм 2, 3 из [5] верно следующее предложение.

Предложение 2. *Для каждого неинвариантного нечетносвязного вектора r из V_n трансвекция $w_r: \ x \to x^{w_r} = x + f(x,r)r$ принадлежит группе W_n, все такие трансвекции сопряжены в W_n, порождают W_n и составляют в ней класс 3-транспозиций. В частности, $W_n \le I(F) \le I(f)$, где $I(F), I(f)$ — группы изометрий форм F и f соответственно.*

Пусть $\prod_n$ — множество нечетносвязных неинвариантных векторов пространства V_n. Группа $W_n = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle = \langle w_r \mid r \in \prod_n \rangle$ по определению действует на пространстве V_n, а соответствующая ей подгруппа $\tilde{W}_n$ из W_{n+1} действует на V_{n+1} и $W_n \simeq \tilde{W}_n / K_n$, где K_n — нормальная в $\tilde{W}_n$ подгруппа. Практически дословно повторив доказательство лемм 16, 18 из [5], получаем предложения 3 и 4.

Предложение 3. *Если $K_n \ne 1$, то $K_n = Z(\tilde{W}_n) = \langle w_r \rangle$, где r — нечетносвязный инвариантный вектор в V_n, который неинвариантен в V_{n+1} и принадлежит $\prod_{n+1}$. Если $K_n = 1$, то $W_n \simeq \tilde{W}_n \le W_{n+1}$, а если $K_n \ne 1$, то $\tilde{W}_n = W_n \times \langle w_r \rangle$.*

Предложение 4. *Подгруппа $\tilde{W}_n$ действует транзитивно на множестве $\prod_{n+1} \setminus V_n$.*

Докажем следующее основное предложение.

Предложение 5. *Если $n \ge m+2$ и пространство V_{n+1} содержит нечетносвязный инвариантный вектор r, то число n четно, $W_{n+1} \simeq Sp_n(2)$, $W_n \simeq \tilde{W}_n \le W_{n+1}$ и либо $W_n \simeq O_n^-(2)$, либо $W_n \simeq O_n^+(2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае по предложению 3 $K = 1$, $\tilde{W}_n \simeq W_n$ и можно считать, что $W_n < W_{n+1}$. В силу предложений 1, 2 для любого ненулевого вектора $x \in V_{n+1}$, отличного от r, среди векторов $\{x, r, x+r\}$ точно два нечетносвязных, в частности $t_{n+1} = 2^n$. Понятно, что группы W_n и W_{n+1} централизуют подпространство $R = \{0, r\}$, $V_{n+1} = V_n \oplus R$ и фактор-пространство $\overline{V}_{n+1} = V_{n+1}/R$ канонически изоморфно пространству V_n. Любой вектор $\overline{x} \in \overline{V}_{n+1}$ является образом точно одного вектора $v_x \in V_n$ ($v_x \in \overline{x} = \{x, x+r\}$) и точно одного вектора $r_x = v_x + r \in V_{n+1} \setminus V_n$. Поскольку $f_{n+1}(x, r) = 0$ для каждого $x \in V_{n+1}$, то для любых векторов $x, y \in V_{n+1}$ имеем

$$f_{n+1}(x+r, y+r) = f_{n+1}(x, y+r) = f_{n+1}(x+r, y) = f_{n+1}(x, y) = f_n(v_x, v_y) \tag{2.1}$$

и равенства $\overline{F}_n(\overline{x}) = F_n(v_x)$ и $\overline{f}_n(\overline{x}, \overline{y}) = f_n(v_x, v_y)$ определяют на $\overline{V}_{n+1}$ квадратичную и симплектическую формы $\overline{F}_n$ и $\overline{f}_n$, при этом $\overline{f}_n(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{F}_n(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{F}_n(\overline{x}) + \overline{F}_n(\overline{y})$. Кроме того, из (2.1) следует, что $\overline{f}_n$ совпадает с формой, индуцированной формой f_{n+1} на $\overline{V}_{n+1}$.

Каждая трансвекция (отражение) $w_s \in W_n$ (здесь s — нечетносвязный вектор из V_n) индуцирует на $\overline{V}_{n+1}$ отражение $\overline{w}_s$, действующее согласно предложению 2 по формуле $\overline{x}^{\overline{w}_s} = \overline{x} + \overline{f}_n(\overline{x}, \overline{s})\overline{s}$. Значит, группа $\overline{W}_n$, порожденная всеми такими отражениями $\overline{w}_s$, содержится в группе изометрий $I(\overline{F}_n)$ и ввиду предложения 2 изоморфна группе W_n.

Аналогично для каждого нечетносвязного неинвариантного вектора $s \in V_{n+1}$ отражение $w_s \in W_{n+1}$ индуцирует на $\overline{V}_{n+1}$ отражение $\overline{w}_s$, действующее по формуле $\overline{x}^{\overline{w}_s} = \overline{x} + \overline{f}_n(\overline{x}, \overline{s})\overline{s}$, и группа $\overline{W}_{n+1}$, порожденная всеми такими отражениями $\overline{w}_s$, содержится в группе изометрий $I(\overline{f}_n)$. Очевидно также, что $W_{n+1} \simeq \overline{W}_{n+1}$. Как доказано выше, число t_{n+1} нечетносвязных векторов из V_{n+1}, включая инвариантный вектор r, равно 2^n. Значит, $\overline{W}_{n+1}$ содержит $2^n - 1$ трансвекций, т. е. все трансвекции из $I(\overline{f}_n)$, поэтому $\overline{W}_{n+1} = I(\overline{f}_n)$ и $W_{n+1} \simeq \overline{W}_{n+1} \simeq Sp_n(2)$.

Пусть w_s — произвольная трансвекция из $W_{n+1} \setminus \tilde{W}_n$. По предложению 4 $s^w = p_{n+1}$ для подходящего $w \in \tilde{W}_n$ и, значит, $w_s^w = w_{n+1}$. Это означает, что любая трансвекция $w_s \in W_{n+1} \setminus W_n$ сопряжена с помощью подходящего элемента $w \in \tilde{W}_n$ с трансвекцией w_{n+1} и потому $\langle \tilde{W}_n, w_s \rangle = W_{n+1}$. Отсюда следует, что подгруппа $\tilde{W}_n$ максимальна в W_{n+1}, $\overline{W}_n = I(\overline{F})$ и $\tilde{W}_n$ изоморфна одной из групп $O_n^-(2)$, $O_n^+(2)$. Как было доказано выше, $W_n \simeq \tilde{W}_n$, и предложение доказано.

Пусть выполняются условия и обозначения предложения 5. В силу предложения 1 в пространстве V_{n+3} точно один ненулевой инвариантный четносвязный вектор $r + p_{n+3}$. Согласно [5, лемма 14] верно следующее предложение.

Предложение 6. *Вектор r принадлежит $\prod_{n+3}$, нормальное замыкание T элемента $w_{n+3}w_r$ в W_{n+3} — элементарная абелева группа порядка 2^{n+2} и $W_{n+3} = T\,W_{n+2}$.*

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Последовательность (1.2) удовлетворяет условиям теорем 1, 2 из [8], при этом последовательности чисел (I)–(IV) доказываемой теоремы совпадают с соответствующими последовательностями теоремы 2 из [8]. Согласно второму утверждению теоремы 1 из [8] достаточно доказать, что при некоторых m, n пара чисел t_n, t_{n+1} из (1.2) совпадает с соответствующими числами одной из последовательностей (I)–(IV) доказываемой теоремы. Установим это.

Согласно предложению 1 при нечетном $n \geq m$ пространство V_n содержит точно один ненулевой инвариантный вектор. Пусть $n \geq m+2$ и пространство V_{n+1} содержит нечетносвязный инвариантный вектор. По предложению 5 $W_{n+1} \simeq Sp_n(2)$. Значит, $|\prod_{n+1}| = 2^n - 1$ и ввиду предложения 2 $t_{n+1} = |\prod_{n+1}| + 1 = 2^n$. По предложению 5 W_n изоморфна одной из групп $O_n^-(2)$, $O_n^+(2)$, число $|\prod_n|$ трансвекций в которых согласно предложениям 1, 2 совпадает с t_n и равно соответственно $2^{n-1} + 2^{\frac{n-2}{2}}$ или $2^{n-1} - 2^{\frac{n-2}{2}}$. Непосредственно проверяется, что при $n = 4k$ найденная пара чисел t_n, t_{n+1} содержится в одной из последовательностей (I), (II) теоремы 1, а при $n = 4k+2$ — в одной из последовательностей (III), (IV) теоремы 1. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Покажем, что графы Γ_n произвольной E-серии $\{\Gamma_n\}$ (1.1) при $n \geq m$ имеют однозначно определенную разметку из формулировки теоремы 2.

Согласно предложению 1 либо при $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, либо при $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ пространство V_{n+1} содержит точно один нечетносвязный инвариантный вектор r, зафиксируем n. В силу предложения 5 $W(\Gamma_{n+1}) = W_{n+1} \simeq Sp_n(2)$ и, значит, Sp — метка над вершинами с номерами $n + 4k + 1 \geq m$. Также по предложению 5 либо $W_n \simeq O_n^-(2)$, либо $W_n \simeq O_n^+(2)$, следовательно, над вершинами с номерами $n + 4k$ расположены метки O^-, O^+, при этом знак $\pm$ у метки противоположен знаку второго слагаемого в формуле $t_n = 2^{n-1} \mp 2^{\frac{n-2}{2}}$ теоремы 1.

Далее, в силу предложений 1, 2 W_{n+2} содержится в группе I изометрий невырожденной квадратичной формы F_{n+2}, а I изоморфна одной из групп $O_{n+2}^-(2)$, $O_{n+2}^+(2)$. Докажем, что порядки групп W_{n+2}, I совпадают и потому $W_{n+2} = I$. Известно (см., например, [5, предложение 3]), что $|Sp_{2l}(2)| = 2^{l^2} \prod_{s=1}^{l} (2^{2s} - 1)$ и

$$|O_{2l+2}^-(2)| = 2^{l^2+l+1}(2^{l+1}+1) \prod_{s=1}^{l} (2^{2s}-1) = 2\,|Sp_{2l}(2)|\,2^l(2^{l+1}+1),$$

$$|O_{2l+2}^+(2)| = 2^{l^2+l+1}(2^{l+1}-1) \prod_{s=1}^{l} (2^{2s}-1) = 2\,|Sp_{2l}(2)|\,2^l(2^{l+1}-1).$$

Рассмотрим в группе W_{n+2} подгруппу $C = \langle w_1, \ldots, w_{n+1}, w_r \rangle$. Ввиду доказанного выше и предложения 3 C содержится в стабилизаторе C_r вектора $r \in \prod_{n+2}$, в централизаторе

$C(w_r)$ и $|C| = 2\,|Sp_n(2)|$. В силу предложения 4 порядок группы W_{n+2} делится на число $d = 2\,|Sp_n(2)|\,t_{n+2}$. В случае $n = 2l \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ по пп. (I), (II) теоремы 1 либо $d = |O^-_{2l+2}(2)|$, либо $d = |O^+_{2l+2}(2)|$ и поскольку каждый из этих порядков не является делителем другого, то $W_{n+2} = I(F_{n+2})$ и, дополнительно, $C = C_r = C(w_r)$. Аналогично в случае $n = 2l \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ реализуются пп. (III), (IV) теоремы 1, $t_{4k+4} = 2^l(2^{l+1} \pm 1)$ и равенства $W_{n+2} = I(F_{n+2})$ и $C = C(w_r)$ также верны.

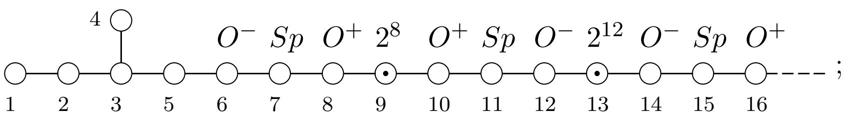
Таким образом, над вершиной с номером $n+4k+2$ стоит одна из меток O^-, O^+, и знак $\pm$ противоположен знаку второго слагаемого числа t_{n+4k+2} из теоремы 1. Поскольку вторые слагаемые в формулах для чисел t_{n+4k} и t_{n+4k+2} из теоремы 1 имеют разные знаки, то и знаки меток $O^\pm$ у вершин с номерами $n+4k$ и $n+4k+2$ противоположны. Итак, метки всех вершин с номерами $n+4k$, $n+4k+1$ и $n+4k+2$ графов рассматриваемой E-серии однозначно определены и соответствуют пп. (I)–(IV) теоремы.

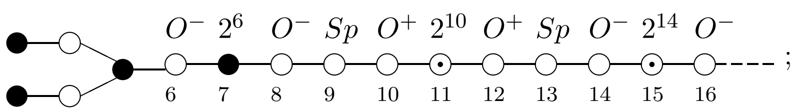
Рассмотрим вершину $n+4k+3$ графа Γ_l, $l = n+4k+3$, $k \geq 0$. В силу предложения 1 пространство V_{n+4k+3} содержит точно один ненулевой инвариантный четносвязный вектор $r + p_{n+4k+3}$. По предложению 6 нормальное замыкание T элемента $w_{n+4k+3}w_r$ в W_{n+4k+3} — элементарная абелева группа порядка 2^{n+4k+2} и $W_{n+4k+3} = T\,W_{n+4k+2}$. Это означает, что над вершиной $n+4k+3$ расположена метка 2^{n+4k+2}. Таким образом, все вершины с номерами $\geq m$ графов Γ_n рассматриваемой E-серии помечены и разметка соответствует теореме 1 и пп. (I)–(IV) теоремы 2.

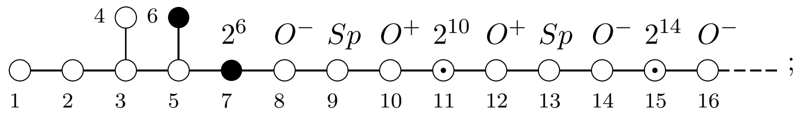
Далее, согласно второму утверждению теоремы 1 числа t_n из пп. (I)–(IV) вычисляемы по формулам (i)–(iv). Поскольку функции $\cos \pi n/4$ и $\sin \pi n/4$ натурального аргумента n имеют период 8, то каждая из разметок теоремы 2 периодична периода 8. Остальные свойства разметок были указаны в доказательстве. Теорема доказана.

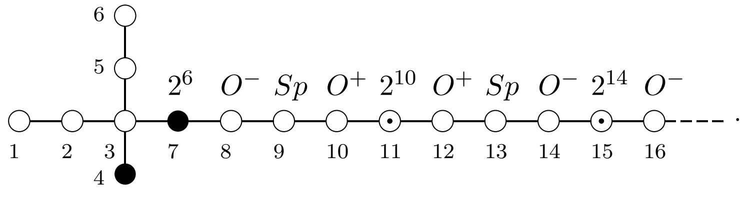
4. Примеры E-серий и разметок

Графу E_6 соответствует группа Вейля $W(E_6)$ [5], изоморфная $O^-_6(2)$ (в наших обозначениях $W(E_6) \simeq W_6 \simeq G_6$). Граф E_6 является начальным для четырех указанных ниже E-серий: $\{E_n\}$, $\{I_n\}$, $\{K_n\}$ и $\{L_n\}$:

серия $\{E_n\}$, $n \geq 6$:


серия $\{I_n\}$, $n \geq 6$:


серия $\{L_n\}$, $n \geq 6$:


серия $\{K_n\}$, $n \geq 6$:


По предложению 5 графу E_7 соответствует группа $W_7 \simeq Sp_6(2)$ (в силу предложения 3 $W_7 \simeq W(E_7)/Z(W(E_7)) \simeq G_7/Z(G_7)$, где $W(E_7)$ — группа Вейля). По теореме 1 серия $\{E_n\}$

имеет тип (IV) и указанную разметку графов (теорема 2). Графы I_7, K_7 и L_7 допускают четносвязную инвариантную окраску, выделенную черным цветом. По предложению 6 соответствующие им группы W_7 являются расширением элементарной абелевой 2-группы порядка 2^6 при помощи группы W_6, $W_6 \simeq O_6^-(2)$. По теореме 1 серии $\{I_n\}$, $\{K_n\}$ и $\{L_n\}$ имеют тип (II), нанесенная разметка соответствует п. (II) теоремы 2.

Для групп W_n серии $\{E_n\}$ проводились вычисления в системе GAP по алгоритму Тодда — Кокстера. Группы Кокстера G_n, заданные порождающими инволюциями и соотношениями с графом Кокстера E_n ($n \geq 9$), бесконечны и содержат группу Вейля $W(E_8) = \langle s_1, \ldots, s_8 \rangle$. Пусть $r = 2p_8 + 3p_7 + 4p_6 + 5p_5 + 6p_3 + 3p_4 + 4p_2 + 2p_1$ — корень системы E_8 [6]. Вычисления показали, что для $9 \leq n \leq 22$ группы

$$\overline{G}_n \simeq \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\ (w_r s_9)^2 = 1,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$$

конечны и их порядки совпадают с порядками соответствующих групп гипотезы. Когда n четно и $10 \leq n \leq 22$, то согласно приведенной выше разметке (теорема 1) имеет место гомоморфизм группы $\overline{G}_n$ на группу $O_n^\delta(2)$, где $\delta = \pm$ определяется из разметки. По результатам расчетов $|\overline{G}_n| = 2\,|O_n^\delta(2)|$ и, значит, ядро Z_2 гомоморфизма имеет порядок 2. Поскольку мультипликатор Шура групп $O_n^\delta(2)$ при $n \geq 10$ тривиален [10, табл. 4.1], то $\overline{G}_n \simeq Z_2 \times O_n^\delta(2)$.

Когда $n = 4k + 3$ ($11 \leq n \leq 22$) имеет место гомоморфизм группы $\overline{G}_n$ на группу $Sp_{n-1}(2)$ с ядром V порядка 4. Поскольку при $l \geq 5$ группа $Sp_{2l}(2)$ проста и ее мультипликатор Шура тривиален [10, табл. 4.1], то $V \leq Z(\overline{G}_n)$ и $\overline{G}_n \simeq V \times Sp_{n-1}(2)$. При этом понятно, что V — элементарная абелева 2-группа ввиду порождаемости $\overline{G}_n$ инволюциями.

Аналогично группы Кокстера G_n, заданные порождающими инволюциями и соотношениями с графом Кокстера I_n, при $n \geq 7$ бесконечны и содержат группу Вейля $W(E_6) = \langle s_1, \ldots, s_6 \rangle$. Пусть $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$ — корень системы E_6. Положим

$$\overline{G}_n = \langle s_1, \ldots, s_n \mid s_i^2 = (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,\ (w_r s_7)^2 = 1,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

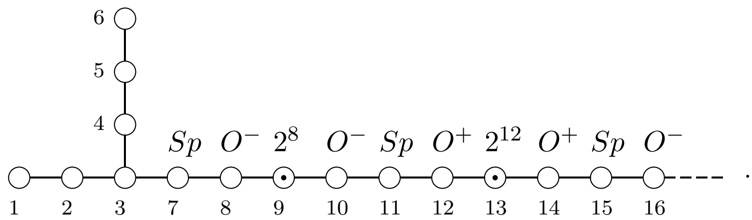
Как и выше, из результатов вычислений следует, что для $7 \leq n \leq 20$ имеют место изоморфизмы

$$\overline{G}_{4k+1} \simeq V \times Sp_{4k}(2) \text{ и } \overline{G}_{2m} \simeq Z_2 \times O_{2k}^\delta(2),$$

где $2 \leq k \leq 5$, $4 \leq m \leq 10$, а знак $\delta = \pm$ определяется по разметке.

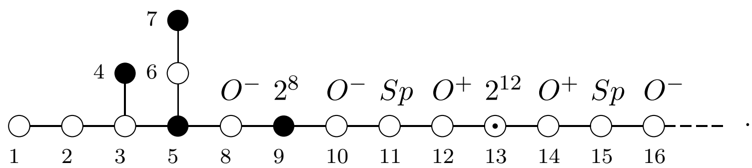
Приведем примеры других E-серий. В $V(E_7)$ есть один 3-связный инвариантный вектор, граф E_7 является начальным только для трех E-серий, поскольку вершина 8 должна соседствовать только с черной вершиной инвариантного вектора. Одна из этих серий есть серия $\{E_n\}$, приведенная выше. Граф Γ_7 второй серии изомофен графу E_7 (мы изменили нумерацию вершин), следовательно, метка вершины 7 совпадает с Sp, а граф Γ_8 изомофен графу I_8, и потому O^- — метка вершины 8. По теоремам 1, 2 серия имеет тип (III) и следующую разметку:

Тип (III), $n \geq 7$:



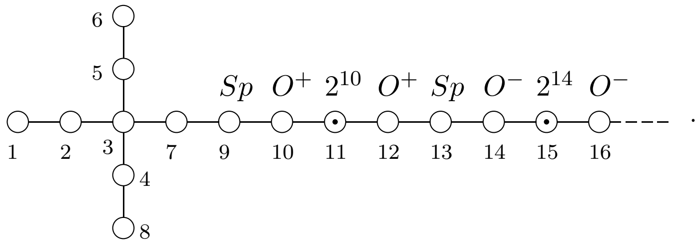
Аналогично граф Γ_8 третьей серии изомофен графу L_8, поэтому метка вершины 8 совпадает с O^-. Граф Γ_9 допускает четносвязную инвариантную окраску и согласно предложению 6 группа $W_9 \simeq 2^8 \cdot O_8^-(2)$. По теоремам 1, 2 серия имеет тип (III) и следующую разметку:

Тип (III), $n \geq 7$:



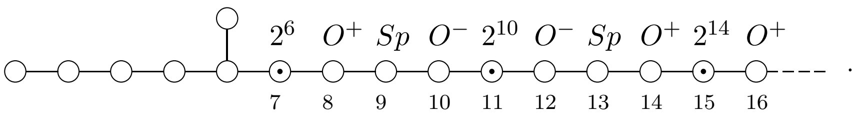
Далее, в пространстве $V(L_7)$ один 2-связный инвариантный вектор, и легко убедиться, что граф L_7 является начальным только в серии $\{L_n\}$. Аналогично граф K_7 является начальным только в серии $\{K_n\}$. По тем же причинам из четырех возможных продолжений графа I_7 три дают серию $\{I_n\}$. В четвертой серии над вершиной 7 начального графа стоит метка 2^6, граф Γ_8 в этой серии изоморфен графу K_8 и следовательно, над вершиной 8 стоит метка O^-. По теоремам 1, 2 серия имеет тип (II) и следующую разметку:

Тип (II), $n \geq 9$:



Граф E_8 является начальным графом в 8 сериях, разметка одной из них, вытекающая из [5, теоремы 1], имеет тип (I):

Тип (I), J_n, $n \geq 9$:



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **M. Aschbacher.** 3-transposition groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 260 p.
2. **Hall J.I.** Symplectic geometry and mapping class groups // Geometrical combinatorics (Milton Keynes, 1984). Pitman; London, 1984. P. 21–33. (Research Notes in Mathematics; vol. 114.)
3. **Hall J.I.** Graphs, geometry, 3-transpositions, and symplectic F_2-transvection groups // Proc. London Math. Soc. (Ser. 3). 1989. Vol. 58, no. 1. P. 89–111.
4. **Созутов А.И.** О группах типа Σ_4, порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Vol. 33, №1. С. 140–149.
5. **Созутов А.И., Кузнецов А.А., Синицин В.М.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 285–301.
6. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Т. VI: Группы, порожденные отражениями. М.: Мир, 1972. 334 с.
7. **Созутов А.И., Синицин В.М.** О графах Кокстера групп с симплектическими 3-транспозициями // Тез. докл. междунар. конф. “Мальцевские чтения”: тез. докл. Новосибирск, 2014. С. 77.
8. **Созутов А.И., Александрова И.О.** О графах с вершинами двух цветов и группах с 3-транспозициями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 257–262.
9. **Kleidman P.B., Liebeck M.W.** The subgroups structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 304 p.
10. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Поступила 10.12.2015

Синицин Владимир Михайлович
аспирант
Сибирский федеральный университет
e-mail: sinkoro@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНОМ РАДИКАЛЕ ГРУППЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОДСТАНОВОК[1]

Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

В статье дано описание локально конечного радикала R группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ ограниченных подстановок множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Найдена связь между вполне рассеянными подмножествами множества $\mathbb{N}$ и элементами из R.

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, вполне рассеянное множество, локально конечный радикал.

N. M. Suchkov, N. G. Suchkova. On the locally finite radical of the group of limited permutations.

We describe the locally finite radical R of the group $G = \mathrm{Lim}(N)$ of limited permutations on the set of natural numbers $\mathbb{N}$. The connection between completely dispersed subsets of $\mathbb{N}$ and elements of R is found.

Keywords: group, limited permutation, completely dispersed set, locally finite radical.

MSC: 20B07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-259-264

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, M — любое из этих множеств. Через $S(M)$ будем обозначать группу всех подстановок множества M.

О п р е д е л е н и е 1. Подстановка $g \in S(M)$ называется ограниченной, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in M} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Из ограниченности подстановок g, h следует, что таковыми являются и подстановки g^{-1} и gh, так как $\omega(g^{-1}) = \omega(g), \omega(gh) \leq \omega(g) + \omega(h)$. Поэтому множество

$$\mathrm{Lim}(M) = \{x \mid x \in S(M),\ \omega(x) < \infty\}$$

образует группу, которая является естественным расширением локально конечной группы $\mathrm{Fin}(M)$ всех финитарных подстановок множества M, т. е. таких подстановок $y \in S(M)$, для которых множество $\{\alpha \mid \alpha \in M, \alpha^y \neq \alpha\}$ конечно.

В работе [1] одного из авторов данной статьи впервые был построен пример смешанной группы $H = AB$, где A, B — периодические (и даже локально конечные) подгруппы. Затем в [2; 3] установлено, что $H = \langle h \mid h \in \mathrm{Lim}(\mathbb{Z}), |h| < \infty \rangle$, любая счетная свободная группа и 2-группа Алешина изоморфно вложимы в H. При этом $\mathrm{Lim}(\mathbb{Z}) = H \leftthreetimes \langle d \rangle$, где d — сдвиг, $\alpha^d = \alpha + 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Факторизация всей смешанной группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ двумя локально конечными подгруппами доказана авторами в статье [4]. Там же установлено, что группа $\mathrm{Lim}(M)$ порождается подстановками $x \in S(M)$, для которых параметр рассеивания $\omega(x) = 1$. Эти порождающие являются либо инволюциями, в разложении которых на независимые транспозиции участвуют только транспозиции вида $(\alpha\ \alpha + 1), \alpha \in M$, либо $M = \mathbb{Z}$ и $x \in \{d, d^{-1}\}$. Связь между

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 А).

группами G и H найдена в [5]. Предполагая, что подстановки группы $S(\mathbb{N})$ действуют тождественно на множестве $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, мы получим естественное вложение $S(\mathbb{N}) < S(\mathbb{Z})$. Обозначим через t инволюцию группы $S(\mathbb{Z})$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$). Доказано, что

$$H = \mathrm{Fin}(\mathbb{Z})(G \times G^t).$$

Из этого равенства и указанной выше связи между группами H и $\mathrm{Lim}(\mathbb{Z})$ следует, что при изучении нормального строения группы $\mathrm{Lim}(\mathbb{Z})$ определяющим является описание нормальных подгрупп группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$.

Первый результат в этом направлении получен в [5]. Чтобы его сформулировать, необходимо привести некоторые введенные в этой работе понятия.

Пусть

$$L = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$$

— подмножество множества $\mathbb{N}$, где $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$; m — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо при $i < j$ ($j < i$) выполняются все неравенства $\mu_{k+1} - \mu_k \leq m$; $i \leq k \leq j-1$ ($j \leq k \leq i-1$). Нетрудно понять, что данное отношение действительно является отношением эквивалентности, а значит, оно индуцирует разбиение множества L на классы эквивалентности. Это разбиение будем называть m-разбиением. Пусть $B_m(L)$ — множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

О п р е д е л е н и е 2. Множество L называется m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны и вполне m-рассеянным при условии, что

$$c_m = \max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.

Из данного определения очевидно следует, что каждое конечное подмножество множества $\mathbb{N}$ является вполне рассеянным.

Примером вполне рассеянного множества служит множество L, для элементов которого выполняются неравенства $\mu_2 - \mu_1 < \mu_3 - \mu_2 < \ldots < \mu_{n+1} - \mu_n < \ldots$.

Приведем теперь результат работы [5]. Пусть для элементов множества L выполняются неравенства $\mu_n + 1 < \mu_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $a = (\mu_1\ \mu_1+1)(\mu_2\ \mu_2+1)\ldots(\mu_n\ \mu_n+1)\ldots$ — разложение инволюции a группы G ($\omega(a) = 1$) на независимые транспозиции. Доказано, что нормальное замыкание инволюции a в группе G тогда и только тогда локально конечно, когда L — вполне рассеянное множество. В этой же работе сформулированы три гипотезы, доказательства которых, по мнению авторов, будет существенным продвижением в изучении нормальных подгрупп группы G.

Основным результатом настоящей работы является доказательство одной из этих гипотез. А именно доказана следующая

Теорема. *Пусть R — локально конечный радикал группы G. Подстановка g группы G тогда и только тогда содержится в R, когда $L_g = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}, \alpha^g \neq \alpha\}$ — вполне рассеянное множество. Если множество L_g не вполне рассеянное, то нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.*

Все обозначения, используемые в данной статье либо оговариваются, либо стандартные [6].

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть*

$$b = (\alpha_1\ \beta_1)(\alpha_2\ \beta_2)\ldots(\alpha_k\ \beta_k)$$

— разложение подстановки b на независимые транспозиции,

$$h = (\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_k\ \beta_k\ \beta_{k-1} \dots \beta_1)$$

— цикл. Тогда подстановка bb^h разлагается в произведение двух независимых циклов длины k, в частности, ее порядок равен k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя [5, предложение 1], получим

$$b^h = (\alpha_2\ \alpha_1)(\alpha_3\ \beta_1)(\alpha_4\ \beta_2) \dots (\alpha_k\ \beta_{k-2})(\beta_k\ \beta_{k-1}).$$

Если k — четное число, то простые вычисления показывают, что

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \dots \alpha_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k-2} \dots \beta_2)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6 \dots \alpha_k\ \beta_{k-1}\ \beta_{k-3} \dots \beta_1).$$

При нечетном k имеем

$$bb^h = (\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_5 \dots \alpha_k\ \beta_{k-1}\ \beta_{k-3} \dots \beta_2)(\alpha_2\ \alpha_4\ \alpha_6 \dots \alpha_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k-2} \dots \beta_1).$$

Итак, в любом случае подстановка bb^h представима в виде произведения двух независимых циклов длины k. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть в разложении подстановки h группы $G = \mathrm{Lim}(\mathbb{N})$ на независимые циклы присутствуют тройные циклы*

$$h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}, \dots, h_{n1}, h_{n2}, \dots, h_{n2n}.$$

Предположим, что найдется такое натуральное число c, что

$$|\mu_{nj} - \mu_{nj+1}| < c$$

для любых элементов μ_{nj} цикла h_{nj} и μ_{nj+1} цикла h_{nj+1}; $n \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 2n-1$. Тогда подгруппа $H = \langle h^g \mid g \in G\rangle$ содержит элемент бесконечного порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $h_{nj} = (\alpha_{nj}\ \beta_{nj}\ \gamma_{nj})$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 2n$. Обозначим

$$u = (\alpha_{11}\ \beta_{11})(\alpha_{21}\ \beta_{21})(\alpha_{23}\ \beta_{23}) \dots (\alpha_{n1}\ \beta_{n1})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3}) \dots (\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1}) \dots .$$

Ясно, что $\omega(u) \le \omega(h)$, а потому $u \in G$. Следовательно, коммутатор

$$h_1 = [h, u] = h^{-1}h^u = (\alpha_{11}\ \beta_{11}\ \gamma_{11})(\alpha_{21}\ \beta_{21}\ \gamma_{21})(\alpha_{23}\ \beta_{23}\ \gamma_{23}) \dots$$

$$(\alpha_{n1}\ \beta_{n1}\ \gamma_{n1})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3}\ \gamma_{n3}) \dots (\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1}\ \gamma_{n\ 2n-1}) \dots$$

содержится в подгруппе H. Далее, если $v = (\beta_{11}\alpha_{12})(\beta_{21}\alpha_{22})(\beta_{23}\alpha_{24}) \dots (\beta_{n1}\alpha_{n2})(\beta_{n3}\alpha_{n4}) \dots (\beta_{n\ 2n-1}\alpha_{n2n}) \dots$, то по условию леммы $\omega(v) < c$ и $v \in G$. После несложных вычислений получим, что H содержит инволюцию

$$h_2 = h_1 h_1^v = (\alpha_{11}\ \beta_{11})(\gamma_{11}\ \alpha_{12})(\alpha_{21}\ \beta_{21})(\gamma_{21}\ \alpha_{22})(\alpha_{23}\ \beta_{23})(\gamma_{23}\ \alpha_{24}) \dots$$

$$(\alpha_{n1}\ \beta_{n1})(\gamma_{n1}\ \alpha_{n2})(\alpha_{n3}\ \beta_{n3})(\gamma_{n3}\ \alpha_{n4}) \dots (\alpha_{n\ 2n-1}\ \beta_{n\ 2n-1})(\gamma_{n\ 2n-1}\ \alpha_{n2n}) \dots .$$

Пусть теперь

$$t = (\alpha_{11}\ \gamma_{11}\ \alpha_{12}\ \beta_{11})(\alpha_{21}\ \gamma_{21}\ \alpha_{23}\ \gamma_{23}\ \alpha_{24}\ \beta_{23}\ \alpha_{22}\ \beta_{21}) \dots (\alpha_{n1}\ \gamma_{n1}\ \alpha_{n3}\ \gamma_{n3} \dots$$

$$\alpha_{n\ 2n-1}\ \gamma_{n\ 2n-1}\ \alpha_{n2n}\ \beta_{n\ 2n-1} \dots \alpha_{n4}\ \beta_{n3}\ \alpha_{n2}\ \beta_{n1}) \dots .$$

Снова в силу условия леммы $t \in G$. Остается заметить, что согласно лемме 1 длины независимых циклов из разложения подстановки $h_2 h_2^t$ подгруппы H неограниченны, а значит, $|h_2 h_2^t| = \infty$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы

Предположим, что множество $L_g = \{\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}, \alpha^g \neq \alpha\}$ вполне рассеянное для некоторой подстановки $g \in G$. Если оно конечно, то g — финитарная подстановка, т. е. g содержится в локально конечной нормальной в G подгруппе $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$. Очевидно, что $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ является подгруппой локально конечного радикала R группы G, а значит, $g \in R$. Пусть теперь множество L_g бесконечно, $\omega(g) = k$. Тогда из построения локально конечной нормальной в G подгруппы $Q = Q(L_g)$ [5, с. 351, 352] следует, что $g \in Q_k < Q < R$.

Допустим теперь, что множество L_g не вполне рассеянное для некоторого элемента $g \in G$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.

В силу определений найдется такое натуральное число m, что

$$\max_{A \in B_m(L_g)} |A| = \infty. \tag{3.1}$$

Заметим, что из включения $A \in B_m(L_g)$ вытекает существование такого класса $D \in B_{m+1}(L_g)$, что $A \subseteq D$. Поэтому мы можем предполагать, что $m > k$.

Так как для элемента g бесконечного порядка доказуемое утверждение очевидно, то считаем, что $|g| < \infty$. В этом случае подстановка g разлагается на конечные независимые циклы, длины которых не превосходят $|g|$. Пусть $l_1 = (\alpha_1 \ldots \alpha_t)$, $l_2 = (\beta_1 \ldots \beta_q)$ — два различных таких цикла. Полагаем

$$l_1 < l_2 \Leftrightarrow \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} < \min\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}.$$

Таким образом, если

$$g = g_1 g_2 \ldots g_n \ldots \tag{3.2}$$

— разложение g на независимые циклы, то мы можем считать, что $g_1 < g_2 < \ldots < g_n < \ldots$. Как обычно, одноэлементные циклы в разложении (3.2) подстановки g опускаются, а потому L_g совпадает с объединением элементов циклов g_n $(n = 1, 2, , \ldots)$.

Предположим сначала, что все классы эквивалентности множества $B_m(L_g)$ конечны. Тогда в силу (3.1) их порядки неограниченны. Если A — один из этих классов, то из неравенства $m > k = \omega(g)$ следует, что $A^g = A$, т. е. A совпадает с объединением элементов нескольких последовательных циклов из разложения (3.2) подстановки g. Отсюда ввиду ограниченности длин циклов разложения (3.2) вытекает существование такой последовательности

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \tag{3.3}$$

различных классов эквивалентности множества $B_m(L_g)$, что при каждом натуральном n класс A_n содержит элементы не менее n последовательных циклов из разложения (3.2) подстановки g.

Пусть теперь $B_m(L_g)$ содержит бесконечный класс C. Если α_0 — наименьший элемент класса C, то в силу определений $C = \{\alpha \mid \alpha \in L_g, \alpha \geq \alpha_0\}$. Среди циклов разложения (3.2) имеется цикл $(\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_q)$; полагаем $A_1 = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$. Допустим, что уже определены конечные множества $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Тогда через A_n обозначим любое множество всех элементов n последовательных циклов разложения (3.2) при условии, что $A_n \subset C$ и $A_n \cap (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) = \varnothing$.

Итак, в любом случае определена последовательность (3.3) конечных подмножеств A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ множества L_g со следующими свойствами: $A_i \cap A_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$; Каждое подмножество A_n есть объединение всех элементов не менее чем n последовательных циклов из разложения (3.2) подстановки g и содержится в одном классе m-разбиения множества L_g.

Покажем, что если g_s, g_{s+1} — два цикла, элементы которых содержатся в одном множестве A_n последовательности (3.3), то для любых элементов α, β цикла g_s и произвольного элемента γ цикла g_{s+1} выполняются неравенства

$$|\alpha - \beta| < k|g|, \quad |\alpha - \gamma| < 3k|g| + m. \tag{3.4}$$

В самом деле, так как $\beta = \alpha^g$ для некоторого целого r $(0 \le r < |g|)$ и $|\epsilon - \epsilon^g| \le k = \omega(g)$, то отсюда легко вытекает первое из неравенств (3.4). Далее, пусть t — такое наименьшее натуральное число, что элементы цикла g_t содержатся в множестве A_n; α_i — минимальное число цикла g_i, $(t \le i \le s+1)$. В силу нашего упорядочения циклов из разложения (3.2) подстановки g выполняются неравенства $\alpha_t < \alpha_{t+1} < \ldots < \alpha_s < \alpha_{s+1}$. При этом все элементы g_i принадлежат отрезку $U_{\alpha_i}^{\alpha_i + k|g|}$. Обозначим через S объединение элементов циклов $g_t, g_{t+1}, \ldots, g_s$.

Из вышеизложенного следует, что наибольшее число λ множества S удовлетворяет неравенствам $\alpha_s < \lambda < \alpha_s + k|g|$, а в силу свойства множества A_n для двух его соседних (при естественном упорядочении) элементов ϵ, σ выполняется неравенство $|\epsilon - \sigma| \le m$. Поэтому $\alpha_s < \alpha_{s+1} < \alpha_s + k|g| + m$ и, значит, $0 < \alpha_{s+1} - \alpha_s < k|g| + m$. Отсюда с учетом доказанного первого из неравенств (3.4) получаем результат

$$|\alpha - \gamma| \le |\alpha - \alpha_s| + |\alpha_s - \alpha_{s+1}| + |\alpha_{s+1} - \gamma| < 3k|g| + m.$$

Неравенства (3.4) доказаны.

Возможны два с л у ч а я.

1. Найдется последовательность $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}, \ldots$ последовательности множеств (3.3) и транспозиции

$$g_{j_1}, g_{j_1+1}, \ldots, g_{j_n}, g_{j_n+1}, \ldots, g_{j_n+n}, \ldots$$

из разложения (3.2) подстановки g такие, что при каждом n элементы транспозиций $g_{j_n}, g_{j_n+1}, \ldots, g_{j_n+n}$ содержатся в множестве A_{in}. Тогда если

$$g_{j_1} = (\alpha_{j_1}\beta_{j_1}), g_{j_1+1} = (\alpha_{j_1+1}\beta_{j_1+1}), \ldots, g_{j_n} = (\alpha_{j_n}\beta_{j_n}), g_{j_n+1} = (\alpha_{j_n+1}\beta_{j_n+1}), \ldots,$$

$$g_{j_n+n} = (\alpha_{j_n+n}\beta_{j_n+n}), \ldots,$$

то полагаем $x = (\alpha_{j_1}\ \alpha_{j_1+1}\ \beta_{j_1+1}\beta_{j_1}) \ldots (\alpha_{j_n}\ \alpha_{j_n+1} \ldots \alpha_{j_n+n}\ \beta_{j_n+n} \ldots \beta_{j_n+1}\ \beta_{j_n}) \ldots$. Согласно неравенствам (3.4) $\omega(x) < 3k|g| + m$, в частности $x \in G$. Таким образом, элемент gg^x принадлежит нормальному замыканию g в группе G; в силу леммы 1 он разлагается на независимые циклы, длины которых неограниченны, а потому $|gg^x| = \infty$.

2. Существует такое натуральное число t_0, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число подряд идущих транспозиций из разложения (3.2) подстановки g, элементы которых содержатся в одном множестве A_n, не превосходит t_0.

В этом случае для каждого натурального n найдутся $2n$ циклов $l_{n1} < l_{n2} < \ldots < l_{n2n}$ длины ≥ 3 из разложения (3.2) подстановки g, все элементы которых содержатся в некотором множестве A_{j_n}; $j_{n_1} \ne j_{n_2}$ при $n_1 \ne n_2$ и если $l_{ni} = g_{\phi(n,i)}$, то

$$0 < \phi(n, i+1) - \phi(n,i) \le t_0 + 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad 1 \le i < 2n.$$

Отсюда ввиду второго из неравенств (3.4) следует, что для любых элементов μ_{ni} цикла l_{ni} и $\mu_{n\ i+1}$ цикла $l_{n\ i+1}$ $(n \in \mathbb{N}, 1 \le i < 2n)$ выполняется неравенство

$$|\mu_{ni} - \mu_{n\ i+1}| < c, \tag{3.5}$$

где $c = (t_0 + 1)(3k|g| + m)$.

Далее, будем считать для определенности, что первым в каждом цикле l_{ni} стоит его наименьший элемент α_{ni}. Если $l_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$, то полагаем $z_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni})$; если же $l_{ni} =$

$(\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni}\ldots)$, то $z_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$. Зададим подстановку z множества $\mathbb{N}$ ее разложением на независимые циклы:

$$z = z_{11}\ z_{12}\ldots z_{n1}\ z_{n2}\ldots z_{n2n}\ldots .$$

В силу первого из неравенств (3.4) мы имеем $\omega(z) < k|g|$, т. е. $z \in G$. Несложные вычисления показывают, что

$$h = [g, z] = h_{11}\ h_{12}\ldots h_{n1}\ h_{n2}\ldots h_{n2n}\ldots ,$$

где $h_{ni} = l_{ni}$, если l_{ni} — цикл длины 3; $h_{ni} = (\alpha_{ni}\ \beta_{ni}\ \gamma_{ni})$, если l_{ni} — цикл длины > 3.

Таким образом, ввиду неравенства (3.5) коммутатор $h = [g, z]$ удовлетворяет условию леммы 2, согласно которой его нормальное замыкание в группе G содержит элемент x бесконечного порядка. Ясно, что x содержится и в нормальном замыкании элемента g. Как отмечалось выше, это доказывает теорему.

В заключение отметим следующий открытый вопрос: верно ли, что подстановка группы G тогда и только тогда содержится в собственной нормальной подгруппе, когда ее носитель есть рассеянное множество натуральных чисел?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сучков Н.М.** Пример смешанной группы, факторизуемой двумя периодическими подгруппами // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 573–577.
2. **Сучков Н.М.** О подгруппах произведения локально конечных групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С. 408–413.
3. **Сучков Н.М.** О группе ограниченных перестановок // Конструкции в алгебре и логике: сб. науч. тр. Тверь: Изд-во ТГУ, 1990. С. 84–89.
4. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О группах ограниченных подстановок // Журн. Сиб. федерал. ун-та. 2010. Т. 3, № 2. С. 262–266.
5. **Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 344–355.
6. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

Поступила 10.12.2015

Сучков Николай Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru

Сучкова Надежда Георгиевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Сибирский федеральный университет
e-mail: ns7654321@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.518.8

ОДНОСТОРОННЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ[1]

А. Ю. Торгашова

В данной статье приведено решение задачи одностороннего приближения в $L(-1,1)$ характеристической функции интервала $(-\sqrt{3/5}\,, 2/5)$ алгебраическими многочленами пятой степени. Построена соответствующая квадратурная формула с положительными весами.

Ключевые слова: алгебраические многочлены, одностороннее приближение, характеристическая функция интервала.

A. Yu. Torgashova. One-sided integral approximation of the characteristic function of an interval by algebraic polynomials.

We give a solution to the problem of one-sided approximation in $L(-1,1)$ of the characteristic function of the interval $(-\sqrt{3/5}\,, 2/5)$ by fifth-degree algebraic polynomials. The corresponding quadrature formula with positive weights is constructed.

Keywords: algebraic polynomials, one-sided approximation, characteristic function of an interval,

MSC: 41A10, 41A29
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-265-272

1. Введение

1.1. Постановка задачи

Пусть $L = L(-1,1)$ есть пространство вещественнозначных суммируемых на $(-1,1)$ функций f, наделенное нормой

$$\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx.$$

При целом неотрицательном m обозначим через $\mathscr{P}_m$ множество алгебраических многочленов

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \tag{1.1}$$

степени не выше m с вещественными коэффициентами. Для многочленов $p \in \mathscr{P}_m$ наряду с представлением (1.1) будем использовать представление

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \pi_k(x) \tag{1.2}$$

в виде линейной комбинации многочленов Лежандра $\{\pi_k\}_{k\geq 0}$, ортогональных на $(-1,1)$ с единичным весом (см. например, [4, гл. IV]).

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

В дальнейшем для пары функций f и g, определенных на отрезке $[-1,1]$, неравенство $f \le g$ означает, что $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [-1,1]$. Функции f, определенной, ограниченной и измеримой на отрезке $[-1,1]$, сопоставим множества

$$\mathscr{P}_m^-(f) = \{p \in \mathscr{P}_m \colon p \le f\}, \quad \mathscr{P}_m^+(f) = \{p \in \mathscr{P}_m \colon p \ge f\}$$

многочленов из $\mathscr{P}_m$, графики которых лежат соответственно под и над графиком функции f. Рассмотрим величины наилучшего приближения снизу и сверху в пространстве L функции f множеством $\mathscr{P}_m$:

$$E_m^-(f) = \inf\{\|f-p\| \colon p \in \mathscr{P}_m^-(f)\}, \quad E_m^+(f) = \inf\{\|f-p\| \colon p \in \mathscr{P}_m^+(f)\}. \tag{1.3}$$

Многочлены, реализующие точные нижние грани в (1.3), называют *многочленами наилучшего* (*интегрального*) *приближения функции* f *снизу* и, соответственно, *сверху* или просто *экстремальными многочленами*.

Задачам (1.3) можно дать следующую интерпретацию. Если $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$, то имеем

$$\|f-p\| = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)-p(x)|\,dx = \int\limits_{-1}^{1} (f(x)-p(x))\,dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx.$$

Поэтому

$$E_m^-(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dx - I_m^-(f), \tag{1.4}$$

где

$$I_m^-(f) = \sup\left\{ \int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx \colon p \in \mathscr{P}_m;\ p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1] \right\}. \tag{1.5}$$

Аналогично $E_m^+(f) = I_m^+(f) - \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, где

$$I_m^+(f) = \inf\left\{ \int\limits_{-1}^{1} p(x)\,dx \colon p \in \mathscr{P}_m;\ p(x) \ge f(x),\ x \in [-1,1] \right\}. \tag{1.6}$$

Задачи (1.5) и (1.6) являются задачами бесконечномерного линейного программирования: в них число неизвестных — коэффициентов многочлена в разложении (1.1) или (1.2) конечное, а число ограничений бесконечное.

Пусть a, b — два вещественных числа, удовлетворяющих условию $-1 < a < b \le 1$. С этого момента в качестве приближаемой функции будем рассматривать характеристическую функцию $\mathbf{1}_J$ интервала $J = (a,b)$, если $b < 1$, и полуинтервала $J = (a,1]$, если $b = 1$; эта функция определена соотношением

$$\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J, \\ 0, & x \in [-1,1] \setminus J. \end{cases} \tag{1.7}$$

Решению задачи (1.3) для функции (1.7) при тех или иных условиях на параметры a, b посвящено большое число статей, см. работы [1; 5; 7] и приведенную в них библиографию.

В [1] дано решение первой задачи (1.3) в предположении, что $b = 1$, $a \in (-1,1)$. В [1] отмечено, что предложенная авторами методика при $b < 1$ уже неприменима. Это было проиллюстрировано для

$$a = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0.774597\ldots\,, \quad b = \frac{2}{5} \tag{1.8}$$

при $m = 5$; отметим, что выбранное значение параметра a является узлом трехточечной квадратурной формулы Гаусса.

В данной статье будет приведено решение первой задачи (1.3) для функции (1.7) в этом конкретном случае, т. е. для значений параметров (1.8) при $m = 5$.

1.2. Применение квадратурных формул с неотрицательными весами

Важным инструментом исследования задач (1.3) или, то же самое, (1.5), (1.6) являются квадратурные формулы с положительными весами, точные на множестве $\mathscr{P}_m$ алгебраических многочленов. А именно, справедливо следующее утверждение [6, доказательство теоремы 2] (см. также [2, теорема 1.7.5]).

Теорема A. *Предположим, что на множестве $\mathscr{P}_m$ имеет место квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \quad p \in \mathscr{P}_m. \tag{1.9}$$

с узлами $-1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_M \le 1$ и положительными весами: $\lambda_k > 0,\ 1 \le k \le M$. Тогда для любой ограниченной и измеримой функции f справедливы оценки

$$I_m^-(f) \le \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k); \quad I_m^+(f) \ge \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k). \tag{1.10}$$

Доказательство. Для многочлена $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$ имеет место формула (1.9). По предположению все ее узлы различны между собой и лежат на отрезке $[-1,1]$, а веса положительные. Поэтому свойство $p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]$, влечет оценку

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k) \le \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k),$$

что дает первое неравенство (1.10). Аналогично обосновывается и второе неравенство. □

Доказательство теоремы приведено здесь для того, чтобы иметь возможность обсудить условия, при которых неравенства (1.10) обратятся в равенства. Достаточно сделать это для первого неравенства. Из доказательства теоремы A видно, что на многочлене $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$ первое неравенство (1.10) обратится в равенство в том и только том случае, если $p(x_k) = f(x_k),\ 1 \le k \le M$. Многочлен p удовлетворяет условию $p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]$. Поэтому, если узел x_k не является концевым, т. е. $x_k \in (-1,1)$, и в точке x_k функция f дифференцируема, то должно выполняться также и свойство $p'(x_k) = f'(x_k)$. Итак, если многочлен $p \in \mathscr{P}_m^-(f)$ обращает первое неравенство (1.10) в равенство, то он обладает свойствами:

1) многочлен интерполирует функцию во всех узлах $x_k,\ 1 \le k \le M$;

2) во всех внутренних узлах $x_k \in (-1,1)$, в которых функция f дифференцируема, интерполяция является эрмитовой, а точнее, наряду с интерполяцией функции осуществляется еще и интерполяция первой производной: $p'(x_k) = f'(x_k)$.

2. Одностороннее приближение снизу характеристической функции интервала $\left(-\sqrt{3/5}\,, 2/5\right)$ многочленами пятой степени

В этом разделе будут изучаться величины $E_m^-(\mathbf{1_J})$ и $I_m^-(\mathbf{1_J})$ для $\mathbf{J} = \left(-\sqrt{3/5}\,, 2/5\right)$ при $m = 5$. Условимся использовать для них обозначения $\mathbf{E}_5^-$ и $\mathbf{I}_5^-$ соответственно. Ниже будут построены квадратурная формула с неотрицательными весами и многочлен $f_5 \in \mathscr{P}_5^-(\mathbf{1_J})$, которые дадут совпадающие между собой двусторонние оценки этих величин, а значит и их значения.

2.1. Численный эксперимент

С целью выработки гипотезы относительно вида экстремального многочлена и соответствующей квадратурной формулы было проведено приближенное решение задачи (1.5) для функции $\mathbf{1_J}$ при $m = 5$. Оказалось удобным использовать разложение (1.2) многочленов $p \in \mathscr{P}_m$. Поскольку $\pi_0 \equiv 1$, то из условия ортогональности многочленов Лежандра следует, что $\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 2c_0$. Поэтому

$$\mathbf{I}_5^- = \sup\Big\{2c_0\colon \sum_{k=0}^{5} c_k\pi_k(x) \le \mathbf{1_J}(x),\ x\in[-1,1]\Big\}. \tag{2.1}$$

Заменим непрерывные ограничения в (2.1) ограничениями на сетке $\{x_j = 0.01j\}_{j=-100}^{100}$; в результате получим конечномерную задачу линейного программирования

$$\sup\Big\{2c_0\colon \sum_{k=0}^{5} c_k\pi_k(x_j) \le \mathbf{1_J}(x_j),\ x_j = 0.01j,\ -100\le j\le 100\Big\}. \tag{2.2}$$

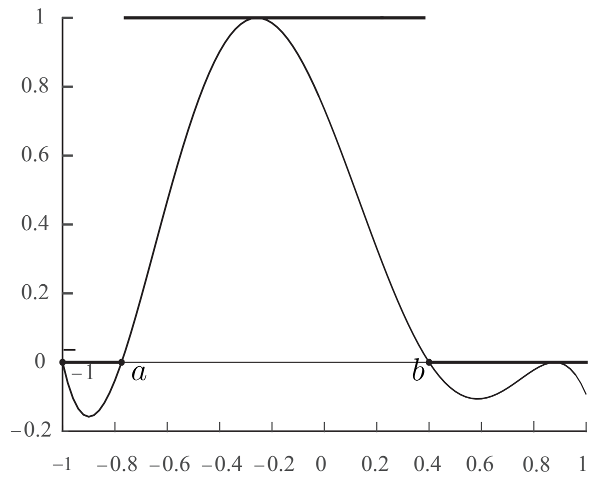
Решение задачи (2.2) с помощью пакета MATLAB дает следующие примерные значения коэффициентов: $c_0 = 0.318986$; $c_1 = 0.238046$; $c_2 = 0.629379$; $c_3 = 0.577987$; $c_4 = 0.272232$; $c_5 = -0.378100$. На рисунке изображены графики характеристической функции $\mathbf{1_J}$ и найденного многочлена.

В результате этого эксперимента сформировалась гипотеза, что для экстремального многочлена задачи (2.1) точки -1, $a = -\sqrt{3/5}$ и $b = 2/5$ являются простыми нулями, этот многочлен имеет двойной ноль в интервале $(2/5, 1)$ и достигает максимального значения на отрезке $[-1,1]$, равного 1, в некоторой точке интервала $\big(-\sqrt{3/5}\,, 0\big)$. Как следствие, соответствующая задаче (2.1) квадратурная формула (1.9) должна иметь вид

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell p(a_\ell) + \sum_{k=1}^{2} B_k p(x_k), \quad p\in\mathscr{P}_5, \tag{2.3}$$

с узлами

$$a_1 = -1,\quad a_2 = a = -\sqrt{\frac{3}{5}},\quad a_3 = b = \frac{2}{5},\quad x_1 \in \Big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\,,0\Big),\quad x_2\in\Big(\frac{2}{5}\,,1\Big). \tag{2.4}$$



Рисунок

2.2. Построение точек x_1, x_2

Осуществим теперь точный выбор узлов x_1, x_2. Исходя из описанных в доказательстве и обсуждении теоремы А свойств экстремального многочлена задачи (2.1) и соответствующей экстремальной квадратурной формулы (2.3), наложим на узлы x_1, x_2 следующие три условия.

(1) Выполнены ограничения (2.4).

(2) Точка x_1 выбирается из условия, что квадратурная формула с фиксированными узлами a_1, a_2, a_3, x_2 и свободным узлом x_1 имела бы максимальный, в данном случае, пятый, алгебраический порядок точности. Это свойство означает, что должно быть выполнено условие ортогональности (см., например, [3, гл. 9, § 1])

$$\int_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 0, \quad \omega(x) = (x-a_1)(x-x_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-x_2). \tag{2.5}$$

(3) Потребуем, чтобы производная многочлена $\overline{p}_5(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-x_2)^2$ в точке x_1 была равна нулю:

$$\overline{p}_5{}'(x_1) = 0. \tag{2.6}$$

При сделанных предположениях многочлен $\overline{p}_5$ после домножения на (отрицательный) нормирующий множитель окажется экстремальным.

Условия (2.5) и (2.6) образуют систему двух полиномиальных уравнений относительно двух неизвестных x_1, x_2:

$$\frac{6}{25} + \frac{2}{75}\sqrt{15} - \frac{2}{15}\,x_1 - \frac{2}{25}\sqrt{15}\,x_1 - \frac{2}{15}\,x_2 - \frac{2}{25}\sqrt{15}\,x_2 + \frac{2}{5}\,x_1\,x_2 - \frac{2}{75}\sqrt{15}\,x_1\,x_2 = 0;$$

$$\begin{aligned} &\bigl(x_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{15}\bigr)\bigl(x_1 - \tfrac{2}{5}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr)^2 + \bigl(x_1 + 1\bigr)\bigl(x_1 - \tfrac{2}{5}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr)^2 \\ &+ \bigl(x_1+1\bigr)\bigl(x_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{15}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr)^2 + \bigl(2x_1 + 2\bigr)\bigl(x_1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{15}\bigr)\bigl(x_1 - \tfrac{2}{5}\bigr)\bigl(x_1 - x_2\bigr) = 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Первое из них можно записать в виде явного выражения x_1 через x_2:

$$x_1 = W(x_2), \quad \text{где} \quad W(z) = -\frac{-9 - \sqrt{15} + 5\,z + 3\sqrt{15}\,z}{5 + 3\sqrt{15} - 15\,z + \sqrt{15}\,z}. \tag{2.8}$$

Подставив это выражение в (2.7), с помощью элементарных преобразований заключаем, что x_2 является корнем многочлена шестой степени

$$\begin{aligned} F(z) = {}& 190\,425 + 49\,113\,\sqrt{15} - 1\,342\,170\,z - 343\,390\,\sqrt{15}\,z + 3\,556\,445\,z^2 + 939\,333\,\sqrt{15}\,z^2 \\ & - 4\,793\,700\,z^3 - 1\,178\,700\,\sqrt{15}\,z^3 + 2\,885\,135\,z^4 + 832\,095\,\sqrt{15}\,z^4 \\ & - 1\,051\,050\,z^5 - 209\,230\,\sqrt{15}\,z^5 + 74\,475\,z^6 + 34\,515\,\sqrt{15}\,z^6. \end{aligned}$$

Многочлен F разлагается на произведение двух многочленов второй и четвертой степени:

$$F(z) = G(z)H(z), \quad G(z) = 9 + \sqrt{15} - 10\,z - 6\,\sqrt{15}\,z + 15\,z^2 - \sqrt{15}\,z^2,$$

$$\begin{aligned} H(z) = {}& 14\,805 + 3\,812\,\sqrt{15} - 66\,860\,z - 16\,620\,\sqrt{15}\,z + 92\,430\,z^2 + 26\,352\,\sqrt{15}\,z^2 \\ & - 60\,980\,z^3 - 13\,020\,\sqrt{15}\,z^3 + 7\,785\,z^4 + 2\,820\,\sqrt{15}\,z^4. \end{aligned}$$

Все шесть корней многочлена F вещественные и простые. В этом можно убедиться разными способами. Многочлены G и H имеют вторую и четвертую степень, поэтому их корни можно выписать точно (в радикалах). Корни многочлена G имеет следующие значения:

$$\frac{4}{7} + \frac{5}{21}\sqrt{15} - \frac{2}{105}\sqrt{1\,275 + 435\,\sqrt{15}} = 0.457309\ldots\,,$$

$$\frac{4}{7} + \frac{5}{21}\sqrt{15} + \frac{2}{105}\sqrt{1\,275 + 435\,\sqrt{15}} = 2.529825\ldots\,.$$

Корни же многочлена H имеют весьма громоздкий вид. Мы локализуем эти корни с достаточной для дальнейшего точностью. Расчеты на ПК дают приближенные значения корней 0.484782, 0.880252, 1.044674, 3.545673. Для нас представляет интерес второй корень многочлена H, этот корень мы локализуем довольно точно. Рассмотрим точки

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0.5, \quad \underline{z_2} = 0.88, \quad \overline{z_2} = 0.89, \quad \underline{z_3} = 1, \quad \overline{z_3} = 2, \quad z_4 = 4.$$

Имеем

$$H(0) = 14\,805 + 3\,812\sqrt{15} > 0, \quad H(0.5) = \frac{-42\,455 + 10\,220\sqrt{15}}{16} < 0,$$
$$H(0.88) = \frac{-729\,807\,983 + 188\,419\,084\sqrt{15}}{78\,125} < 0,$$
$$H(0.89) = \frac{-479\,556\,158 + 124\,212\,701\sqrt{15}}{50\,000} > 0,$$
$$H(1) = -12\,820 + 3\,344\sqrt{15} > 0, \quad H(2) = -112\,475 + 16\,940\sqrt{15} < 0,$$
$$H(4) = -683\,515 + 247\,604\sqrt{15} > 0.$$

Отсюда видно, что многочлен H имеет четыре простых корня $\{\xi_k\}_{k=1}^4$ со свойствами $\xi_1 \in (0, 0.5)$, $\xi_2 \in (0.88, 0.89)$, $\xi_3 \in (1, 2)$, $\xi_4 \in (2, 4)$.

В качестве x_2 возьмем корень ξ_2 многочлена H. Имеем

$$x_2 \in (0.88, 0.89). \tag{2.9}$$

Как следует из приведенных только что рассуждений, x_2 — единственный корень многочлена H, а на самом деле, и многочлена F на отрезке $[0.5, 1]$.

Функция W, определенная в (2.8), убывает на полуоси $z \in (-\infty, Z)$, $Z = \dfrac{5\sqrt{15} + 12}{21} > 1$. Поэтому

$$x_1 = W(x_2) \in \bigl(W(0.89), W(0.88)\bigr), \tag{2.10}$$

при этом

$$W(0.89) = \frac{3\,755\sqrt{15} - 59\,452}{157\,259} = -0.285573\ldots, \quad W(0.88) = \frac{25\sqrt{15} - 328}{901} = -0.256576\ldots.$$

Наконец, отметим, что вычисления на ПК дают следующие значения:

$$x_1 = -0.257296880593181714\ldots, \quad x_2 = 0.880252451887707990\ldots.$$

2.3. Исследование экстремальной квадратуры

Рассмотрим интерполяционную квадратурную формулу (см., например, [3, гл. 6, § 1])

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{3} A_\ell f(a_\ell) + \sum_{k=1}^{2} B_k f(x_k), \tag{2.11}$$

построенную по узлам (2.4) в предположении, что точки x_1, x_2 выбраны на предыдущем этапе рассуждений. В соответствии с выбором точек x_1, x_2, формула (2.11) точна на множестве $\mathscr{P}_5$ многочленов пятой степени. Коэффициенты формулы (2.11) строятся с помощью фундаментальных многочленов интерполяционного процесса Лагранжа по узлам квадратурной формулы; в частности,

$$B_1 = \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{(x - x_1)\omega'(x_1)}\,dx, \quad \omega(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - x_1)(x - x_2).$$

Лемма. *Коэффициенты квадратурной формулы* (2.11) *положительные.*

Доказательство. *Положительность коэффициента* A_1. При обосновании этого факта будет использоваться квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{3} A_{3,k} f(x_{3,k}), \quad f \in \mathscr{P}_5, \tag{2.12}$$

с тремя узлами $\{x_{3,k}\}_{k=1}^{3}$. Узлы этой формулы являются корнями многочлена Лежандра третьей степени [3, гл. 7, § 2] и имеют следующие значения (см., например, [4, гл. IV, § 1]):

$$x_{3,3} = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_{3,2} = 0, \quad x_{3,1} = -x_{3,3} = -\sqrt{\frac{3}{5}} = a_2.$$

Известно, что коэффициенты формулы (2.12) положительные [3, гл. 7, § 1, теорема 3].

Рассмотрим многочлен $g_1(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - a_2)(x - a_3)x$. Для этого многочлена точны формулы (2.11) и (2.12). Применив эти формулы, получим $\int_{-1}^{1} g_1(x)\,dx = A_1\, g_1(a_1) = A_{3,3}\, g_1(x_{3,3})$. Поскольку $a_1 = -1 < a_2 < x_1 < 0 < a_3 < x_2 < 1$, то $g_1(a_1) < 0$. Имеем $a_3 < x_{3,3} < x_2$ и, значит, $g_1(x_{3,3}) < 0$. Поэтому произведение $A_{3,3} g_1(x_{3,3})$, равное значению интеграла, также будет отрицательным. Следовательно, коэффициент A_1 является положительным.

Положительность коэффициентов A_3, B_1, B_2 проверяется аналогичным образом. Для доказательства необходимо воспользоваться соответственно многочленами

$$\begin{aligned} g_2(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - a_1)(x - a_2)x, \\ g_3(x) &= (x - x_2)(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)x, \\ g_4(x) &= (x - x_1)(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)x. \end{aligned}$$

Положительность коэффициента A_2. В данном случае воспользуемся многочленом четвертой степени $g(x) = (x - a_1)(x - x_1)(x - a_3)(x - x_2)$. Применив формулу (2.11), получаем

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = A_2 g(a_2). \tag{2.13}$$

Легко понять, что $a_1 = -1 < a_2 < x_1 < a_3 < x_2 < 1$, поэтому $g(a_2) < 0$. Покажем, что интеграл (2.13) отрицательный. Отсюда и будет следовать, что $A_2 > 0$.

Рассмотрим левую квадратуру Радо с фиксированным узлом -1 и двумя свободными узлами $\{x_{2,k}\}_{k=1}^{2}$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k} f(x_{2,k}) + A_{2,3} f(-1), \quad f \in \mathscr{P}_4. \tag{2.14}$$

Узлы этой формулы находятся из условия соответствующей ортогональности [3, гл. 9, § 1, теорема 1] и равны

$$x_{2,1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{6} = -0.2898979\ldots, \quad x_{2,2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{6} = 0.68989794\ldots. \tag{2.15}$$

Коэффициенты квадратурной формулы (2.14) положительные [3, гл. 7, § 1, теорема 3].

Исходя из (2.15), (2.10) и (2.9), нетрудно убедиться, что

$$a_1 < x_{2,1} < x_1, \quad a_3 < x_{2,2} < x_2. \tag{2.16}$$

Неочевидным является лишь соотношение $x_{2,1} < x_1$. Для его обоснования достаточно проверить неравенство

$$x_{2,1} = \frac{1 - 5\sqrt{6}}{5} < W(0.89) = \frac{3\,755\sqrt{15} - 59\,452}{157\,259},$$

а это можно осуществить с помощью элементарных преобразований.

В силу (2.16) имеем $g(x_{2,1}) < 0$, $g(x_{2,2}) < 0$. Подставив многочлен g в формулу (2.14), получаем, что $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx < 0$. Тем самым доказана положительность коэффициента A_2. □

2.4. Основной результат

Теорема. *Пусть* $m = 5$, $a = -\sqrt{3/5}$, $b = 2/5$. *Тогда*

$$I_m^-(f) = B_1, \quad E_m^-(\mathbf{1}_{(a,\,b)}) = (b - a) - B_1. \tag{2.17}$$

При этом многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен пятой степени

$$p_5^*(x) = \frac{\overline{p}_5(x)}{\overline{p}_5(x_1)}, \quad \text{где} \quad \overline{p}_5(x) = (x+1)\big(x-a\big)\big(x-b\big)(x-x_2)^2,$$

который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,\,b)}$ *в узлах квадратурной формулы* (2.11).

Доказательство. С учетом выбора узлов x_1, x_2 нетрудно понять, что многочлен p_5^* удовлетворяет условию $p_5^* \le \mathbf{1}_{(a,b)}$. Этот многочлен дает оценку снизу для величины $I_m^-(\mathbf{1}_{(a,\,b)})$. Согласно теореме A квадратурная формула (2.11) дает для величины $I_m^-(\mathbf{1}_{(a,\,b)})$ оценку сверху, которая, как легко увидеть, совпадает с оценкой снизу. К тому же многочлен p_5^* является экстремальным. На многочлене p_5^* правая часть формулы (2.11) равна B_1. Следовательно, $I_m^-(f) = B_1$. Для обоснования второго равенства в (2.17) осталось применить (1.4). Теорема доказана. □

Автор признателен своему научному руководителю М. В. Дейкаловой, профессорам В. В. Арестову и А. Г. Бабенко за постановку задачи и полезное обсуждение тематики и результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Дейкалова М.В., Ревес С.Д.** Односторонние интегральные приближения характеристических функций интервалов многочленами на отрезке с весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, вып. 4. С. 46–53.
2. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.
3. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 328 с.
4. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.
5. **Beckermann B., Bustamante J., Martinez-Cruz R., Quesada J.M.** Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa // Calcolo. 2014. Vol. 51, no. 2, P. 319–328.
6. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 2, no. 12. P. 139–164.
7. **Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M.** Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 198. P. 10–23.

Торгашова Анастасия Юрьевна
студент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: anastasiya.torgashova@mail.ru

Поступила 29.04.2016

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 518.9

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНО-ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ ИГРОКОВ

М. Тухтасинов

Для линейной дифференциальной игры преследования предлагаются достаточные условия для завершения преследования, когда один из игроков применяет управление импульсного характера, а другой — управление с интегральным ограничением. Указываются способы нахождения управлений преследующего игрока, обеспечивающие завершение преследования за конечное время. В конце работы приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты. Во втором примере используемый метод решает альтернативу: пространство $\mathbb{R}^m$ разбивается на две части, из точек одной возможно завершение преследования, а из точек другой — нельзя.

Ключевые слова: разрешающая функция, импульсное управление, преследование, преследователь, убегающий, интегральное ограничение, терминальное множество.

M. Tukhtasinov. A linear differential game of pursuit with impulse and integrally constrained controls of the players.

Sufficient conditions of pursuit termination are proposed for a linear differential game of pursuit when one of the players applies an impulse-type control and the other player applies an integrally constrained control. Methods for finding the pursuer's controls that guarantee the termination of pursuit in a finite time are presented. At the end of the paper, we give examples illustrating the results. The method used in the second example provides an alternative: the space $\mathbb{R}^m$ is divided into two parts so that the pursuit can be terminated from any point of the first part and the pursuit cannot be terminated from any point of the second part.

Keywords: resolving function, impulse control, pursuit, pursuer, evader, integral constraint, terminal set.

MSC: 49N75
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-273-282

Введение

При изучении реальных процессов с помощью математических моделей большой интерес представляет рассмотрение дифференциальных игр с разнотипными ограничениями на управления игроков. В работе [1] рассмотрены дифференциальные игры преследования с импульсным управлением и управлением с геометрическими ограничениями. Методом разрешающих функций доказаны теоремы с достаточными условиями для завершения преследования за конечное время. Указаны способы нахождения гарантированного времени и управления преследующего игрока для завершения преследования. Полученные результаты применены к решению конкретных задач преследования.

В работе [2] изучены линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями на управления игроков. Наложенное на параметры игры условие, которое является аналогом условия Л. С. Понтрягина, обеспечивает преимущество преследователя над убегающим. Доказаны важные свойства разрешающих функций, и с их помощью решена задача о завершении преследования. В [3] рассмотрена линейная дифференциальная игра преследования с интегральными ограничениями более общего вида на управления игроков. Формализация задач импульсного оптимального управления для линейных систем и методы их решения предложены в [4].

В книге [5] разработан метод разрешающих функций для выхода из конфликтных ситуаций, описываемых системой дифференциальных уравнений при геометрических ограничениях на управления игроков. В дальнейшем метод разрешающих функций был применен для дифференциальных игр преследования с интегральными ограничениями и импульсными управлениями игроков.

В работах [6; 7] рассмотрена задача преследования, в которой движения игроков описываются однотипными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка — уравнениями Мещерского. Мгновенное отделение конечного количества массы топлива с постоянной по величине скоростью сводится к задаче с импульсным управлением. Указаны соответствующие управления игроков и оптимальное время завершения преследования. В [8] изучена дифференциальная игра преследования многих лиц с простыми нестационарными движениями каждого из игроков. С применением метода разрешающих функций доказывается теорема о поимке хотя бы одним из преследователей на основе импульсных контрстратегий. Доказывается аналогичная теорема при применении убегающим игроком импульсной стратегии.

Метод разрешающих функций для игры преследования основан на "притяжений" телесной части терминального множества, чтобы происходило пересечение с некоторым многозначным отображением, связанным с данной игрой. Очевидно, что если разрешающая функция является скалярной, то "притяжение" происходит в соответствующем конусе. В работе [9] предложено обобщение метода разрешающих функций: вместо скалярной разрешающей функции используется матричная разрешающая функция, тем самым "притяжение" осуществляется по различным направлениям.

В настоящей работе исследуются конфликтно-игровые задачи с точки зрения завершения преследования за конечное время. При этом классами допустимых управлений игроков являются либо все измеримые функции, удовлетворяющие интегральному ограничению, либо все импульсные функции, выражаемые через дельта-функции Дирака. Различаются два случая в зависимости от выбора игроками управлений из разных классов допустимых управлений. С использованием идей работы [1] в обоих случаях приводятся достаточные условия для завершения преследования из заданной начальной точки. Работа непосредственно примыкает к исследованиям [1–3].

1. Постановки задач

Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Az + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^m, \tag{1.1}$$

где z — фазовый вектор, u, v — параметры управления преследующего и убегающего игроков соответственно, A — постоянная матрица порядка $m \times m$. Терминальное множество представляется цилиндром вида $M^* = M^0 + M$, где M^0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$, M — непустой компакт из ортогонального дополнения L к M^0 в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Задача преследования состоит в том, чтобы с помощью допустимого управления u за конечное время привести траекторию системы (1.1) на терминальное множество M^*.

Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без точек сгущения, т. е. любой отрезок вида $[a, b]$ содержит конечное число элементов этой последовательности.

В данной работе рассматриваются две формализации задачи преследования, которые отличаются классами допустимых управлений игроков:

1. Классом допустимых управлений преследователя является множество импульсных функций, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \delta(t - \tau_i), \quad u_i \in U, \quad t \geq 0,$$

где U — непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. А множество всех измеримых функции $v(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty ||v(\vartheta)||^2\, d\vartheta \le \sigma^2,$$

где σ — неотрицательное фиксированное число, определяет класс допустимых управлений убегающего игрока.

2. Множество всех измеримых функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty ||u(\vartheta)||^2\, d\vartheta \le \rho^2,$$

где ρ — неотрицательное фиксированное число, называется *классом допустимых управлений преследующего игрока. А классом допустимых управлений убегающего* — множество импульсных функций, которые выражаются дельта-функцией Дирака

$$v(t) = \sum_{i=0}^\infty v_i \delta(t-\tau_i), \quad v_i \in V, \quad t \ge 0,$$

где V — непустое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$.

В обоих случаях задача заключается в том, чтобы для данной начальной точки $z_0 \notin M^*$ определить условия, при выполнении которых при любом управлении $v(\cdot)$ из класса допустимых управлений убегающего игрока при использовании в момент времени t информации о предыстории управления убегающего игрока $v(s)$, $0 \le s \le t$, можно будет построить управление $u(\cdot)$ из класса допустимых управлений преследователя так, чтобы соответствующая траектория $z(t)$, $t \ge 0$, системы (1.1), исходящая из начального положения z_0, выводилась за конечное время на терминальное множество M^*.

2. Решение задачи 1

После подстановки в правую часть уравнения (1.1) допустимых управлений игроков получим систему с правой частью с аддитивно входящей обобщенной функцией. Согласно теореме 1 [10, § 1, гл. 1] эта система имеет решение при любом начальном условии

$$z(0) = z_0,$$

причем оно единственно и абсолютно непрерывно на интервалах (τ_{i-1}, τ_i), $i \in \mathbb{N}, \tau_0 = 0$, а в моменты времени τ_i может иметь разрывы первого рода.

Через π обозначим оператор ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^m$ на L, а через e^{tA} — фундаментальную матрицу однородной части системы (1.1).

Пусть $v(t)$, $t \ge 0$, — допустимое управление убегающего игрока. Рассмотрим следующие множества:

$$W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} U - \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \vartheta)A} v(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$W_i(n) = \bigcap_{v(\cdot) \in V[\tau_{i-1},\, \tau_i]} W_i(n, v(\cdot)) = \pi e^{(\tau_n - \tau_i)A} U \underline{*} G_i(n,\, \tau_{i-1}, \tau_i),$$

где

$$G_i(n,\, \tau_{i-1}, \tau_i) = \left\{ x \in L\colon x = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \pi e^{(\tau_n - \vartheta)A} v(\vartheta)\, d\vartheta,\ v(\cdot) \in V[\tau_{i-1},\, \tau_i] \right\}.$$

Здесь через $V[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ обозначено множество всех измеримых на $[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ функций $v(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \|v(\vartheta)\|^2\,d\vartheta \le \sigma^2, \tag{2.1}$$

а символ $X\underline{*}Y = \{x\colon x+Y\subset X\} = \bigcap_{y\in Y}(X-y)$ означает геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y. Отметим, что $G_i(\cdot)$ являются выпуклыми компактными множествами в L.

Предположение 2.1 [1, условие 2.2]. *Множества $W_i(n)$ непусты при всех n, i, $n\in\mathbb{N}$, $i=1,\dots,n$.*

В силу этого предположения можно выбрать из каждого множества $W_i(n)$ некоторый элемент $w_i(n)$. Через $w=w(n)=\{w_i(n)\}_{i=1}^n$ обозначим некоторый набор, состоящий из элементов $w_i(n)$, $i=1,\dots,n$.

Далее, для некоторого набора w определим число $N(z,w)$:

$$N(z,w)=\min\Big\{n\in\mathbb{N}: \inf_{v(\cdot)\in V[0,\tau_n]}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(n,z,v(\cdot),w)=1\Big\},$$

где функции $\alpha_i(\cdot)$, $i=0,\dots,n(t)$, определяются по схеме рассуждений п. 2 работы [1]. Отметим, что в определении числа $N(z,w)$, в отличие от работы [1], знак inf в скобке записан перед знаком суммы, потому что убегающий игрок должен свой ограниченный ресурс распределить на весь отрезок $[0,\tau_n]$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено предположение* 2.1*, множества M, U выпуклы и $N(z_0,w)<\infty$ для начального положения $z_0\notin M^*$ и некоторого набора w. Тогда траекторию $z(t)$ системы* (1.1) *можно вывести на терминальное множество M^* в момент времени $t=\tau_{N(z_0,w)}$.*

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2.1 из работы [1], при условии, что допустимое управление $v(\cdot)$ убегающего игрока на каждом из отрезков $[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ будет удовлетворять соответствующему интегральному ограничению.

Замечание 2.1. С учетом того обстоятельства, что убегающий игрок в любом из отрезков $[\tau_{i-1},\,\tau_i]$ может использовать свой максимальный ресурс, в ограничении (2.1) взято σ^2.

3. Решение задачи 2

Пусть $n(t)=\max\{i\in\mathbb{N}\cup\{0\}:\tau_i\le t\}$.

Рассмотрим следующие множества:

$$F_i(\rho_i;\,\tau_i,\tau_{i+1})=\Big\{x\in L\colon x=\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\pi e^{(\tau_n-\vartheta)A}u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(\cdot)\in U[\tau_i,\,\tau_{i+1}]\Big\},\quad i=0,1,\dots,n(t)-1,$$

и

$$F_{n(t)}(\rho_{n(t)};\tau_{n(t)},t)=\Big\{x\in L\colon x=\int\limits_{\tau_{n(t)}}^{t}\pi e^{(t-\vartheta)A}u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(\cdot)\in U[\tau_{n(t)},\,t]\Big\};$$

здесь через $U[\tau_i,\,\tau_{i+1}]$ обозначено множество всех измеримых на $[\tau_i,\,\tau_{i+1}]$ функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\|u(\vartheta)\|^2\,d\vartheta\le\rho_i^2,$$

а через $U[\tau_{n(t)}, t]$ — множество всех измеримых на $[\tau_{n(t)}, t]$ функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих ограничению

$$\int\limits_{\tau_{n(t)}}^{t} \|u(\vartheta)\|^2 \, d\vartheta \le \rho_{n(t)}^2,$$

где $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n(t)}$ — некоторый набор неотрицательных чисел таких, что $\rho_0^2+\rho_1^2+\ldots+\rho_{n(t)}^2 \le \rho^2$. Как в работе [1], используя множества $F_i(\cdot)$, построим множества

$$W_i(t,v) = F_i(\rho_i;\tau_i,\tau_{i+1}) - \pi e^{(t-\tau_i)A}v, \quad i=0,1,\ldots,n(t)-1,$$

$$W_{n(t)}(t,v) = F_{n(t)}(\rho_{n(t)};\tau_{n(t)},t) - \pi e^{(t-\tau_{n(t)})A}v,$$

$$W_i(t) = \bigcap_{v\in V} W_i(t,v) = F_i(\rho_i;\tau_i,\tau_{i+1}) \underline{*} \pi e^{(t-\tau_i)A}V, \quad i=0,1,\ldots,n(t)-1,$$

$$W_{n(t)}(t) = \bigcap_{v\in V} W_{n(t)}(t,v) = F_{n(t)}(\rho_{n(t)};\tau_{n(t)},t) \underline{*} \pi e^{(t-\tau_{n(t)})A}V.$$

Так как в рассматриваемой игре преследующий игрок имеет ограниченный ресурс (на управление наложено интегральное ограничение), то он должен как-то распределить свой ресурс по отрезкам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. В этом смысле следующее предположение отличается от условия 3.1 работы [1].

Предположение 3.1. *Пусть для некоторых неотрицательных чисел $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n(t)}$ таких, что $\rho_0^2+\rho_1^2+\ldots+\rho_{n(t)}^2 \le \rho^2$, множество $\mathfrak{T} = \{t \ge 0\colon W_i(t) \ne \varnothing,\, i=0,1,\ldots,n(t)\} \ne \varnothing$.*

Если выполнено предположение 3.1, то для каждого $t \in \mathfrak{T}$ существуют элементы $w_i(t) \in W_i(t)$, $i=0,\ldots,n(t)$. Через $w = w(t) = \{w_i(t)\}_{i=0}^{n(t)}$ обозначим некоторый набор, состоящий из элементов $w_i(t)$, $i=0,\ldots,n(t)$. Для некоторого фиксированного набора w введем следующее множество

$$T(z,w) = \Big\{ t \in \mathfrak{T} : \sum_{i=0}^{n(t)} \inf_{v\in V} \alpha_i(t,z,v,w) = 1 \Big\},$$

где функции $\alpha_i(\cdot)$, $i=0,\ldots,n(t)$ и остальные построения, с несущественными изменениями, определяются точно так же, как в разд. 3 работы [1]. Если равенство в фигурных скобках не выполняется ни при одном $t \in \mathfrak{T}$, то положим $T(z,w) = \varnothing$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение* 3.1, $\tau_i \notin \mathfrak{T}$ *для всех* $i=0,1,\ldots,n(t)$, *множество M выпукло и множество $T(z_0,w)$ непусто для начального положения $z_0 \notin M^*$ и некоторого набора w. Тогда для любого $T \in T(z_0,w)$ траектория системы* (1.1) *может быть приведена из начального положения z_0 на терминальное множество M^* в момент времени T.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проводится без каких-либо существенных изменений по схеме доказательства теоремы 3.1 работы [1].

4. Примеры

4.1. Рассматривается управляемый объект с движением

$$\dot z = \lambda z + u - v, \tag{4.1}$$

где λ — действительное отрицательное число, z, u, $v \in \mathbb{R}^m$. Терминальным множеством является начало координат: $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = \{0\}$ и $M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m$, π —

тождественный(единичный) оператор. Так как $A = \lambda E$, где E — единичная матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = e^{\lambda t}E$.

В этом примере рассматривается задача 1 при $U = \rho S$, где ρ — неотрицательное число, S — единичный шар с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что точки τ_i расположены равномерно с периодом P, т.е. $\tau_i = iP$. В этом случае множество $G_i(\cdot)$ из разд. 2 имеет вид

$$G_i(n,\, (i-1)P, iP) = e^{\lambda nP}\sqrt{\frac{e^{-2\lambda(i-1)P} - e^{-2\lambda iP}}{2\lambda}}\,\sigma S = \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,e^{\lambda(nP-iP)}\sigma S.$$

Тогда имеем

$$W_i(n) = e^{\lambda(nP-iP)}\rho S \underline{*} \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,e^{\lambda(nP-iP)}\sigma S \text{ для всех } i, n, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, предположение 2.1 выполнено, если справедливо неравенство $\rho \geq \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,\sigma$. В этом случае получим

$$W_i(n) = e^{\lambda(nP-iP)}\Big(\rho - \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\,\sigma\Big)S, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $W_i(n)$ содержат нулевой вектор при всех i, n, положим $w_i(n) = 0$. Далее, также предполагается, что $z \neq 0$. Тогда имеем

$$\xi(n, z, w) = e^{\lambda nP}z.$$

Если ввести обозначение

$$I_i = \int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-\lambda\vartheta}v(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{4.2}$$

где измеримая функция $v(\vartheta)$, $(i-1)P \leq \vartheta \leq iP$, удовлетворяет условию $\int_{(i-1)P}^{iP} \|v(\vartheta)\|^2\,d\vartheta \leq \sigma_i^2$, $\sigma_i \in [0, \sigma]$, то имеем

$$\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \sup\Big\{\alpha \geq 0 : -\alpha e^{\lambda nP}z \in e^{\lambda(nP-iP)}\rho S - e^{\lambda nP}I_i\Big\}.$$

Здесь легко заметить, что $I_i \in r_iS$, где $r_i = \sigma_i\sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}e^{-\lambda iP}$, $\sigma_i \in [0, \sigma]$. Функции $\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w)$ могут быть найдены из следующего уравнения:

$$\|\alpha z - I_i\| = e^{-\lambda iP}\rho.$$

Решая его, получим

$$\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{(z, I_i) + \sqrt{(z, I_i)^2 + \|z\|^2(e^{-2\lambda iP}\rho^2 - \|I_i\|^2)}}{\|z\|^2}.$$

Минимум $\widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w)$ по I_i достигается при $I_i = -\sqrt{\int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-2\lambda\vartheta}\,d\vartheta}\,\sigma_i\frac{z}{\|z\|}$, где $\sigma_i \in [0, \sigma]$. Отсюда легко заметить, что последнее значение I_i получается из (4.2) при $v(\tau) = \psi(\tau)$, $(i+1)P \leq \tau \leq iP$, где

$$\psi(\tau) = -\frac{e^{-\lambda\tau}\sigma_i}{\sqrt{\int\limits_{(i-1)P}^{iP} e^{-2\lambda\vartheta}\,d\vartheta}}\frac{z}{\|z\|},$$

почти для всех τ, $\tau \in [(i-1)P, iP]$. Так как

$$\inf_{\|v(\cdot)\| \le \sigma_i} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{\rho e^{-\lambda iP} - \sigma_i \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}}\, e^{-\lambda iP}}{\|z\|},$$

то

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,nP]} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \inf_{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2 \le \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho e^{-\lambda iP} - \sigma_i \sqrt{\dfrac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}} e^{-\lambda iP}}{\|z\|}$$

$$= \frac{\rho}{\|z\|} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda iP} - \frac{1}{\|z\|} \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}} \sup_{\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2 \le \sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e^{-\lambda iP}.$$

Далее имеем

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,nP]} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{\rho}{\|z\|} \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda iP} - \frac{\sigma}{\|z\|} \sqrt{\frac{e^{2\lambda P}-1}{2\lambda}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} e^{-2\lambda iP}}.$$

Поэтому если ввести обозначение $q = e^{-\lambda P} > 1$, то после элементарных вычислений получим

$$\inf_{v(\cdot)\in V[0,nP]} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha}_i(n, z, v(\cdot), w) = \frac{1}{\|z\|} \left(\rho \frac{q^{n+1}-q}{q-1} - \sigma \sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}} \sqrt{\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}} \right).$$

Покажем, что при любом фиксированном векторе $z \neq 0$ неравенство

$$\frac{1}{\|z\|} \left(\rho \frac{q^{n+1}-q}{q-1} - \sigma \sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}} \sqrt{\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}} \right) \ge 1 \tag{4.3}$$

имеет решение относительно n. Выражение в скобках левой части неравенства (4.3) записываем в следующем виде:

$$\sqrt{\frac{q^{2n}-1}{q^2-1}} \left(\rho \frac{q^{n+1}-q}{q-1} \sqrt{\frac{q^2-1}{q^{2n}-1}} - \sigma \sqrt{\frac{1-q^2}{2\lambda}} \right). \tag{4.4}$$

Учитывая неравенство $\rho \ge \sqrt{\dfrac{1-q^2}{2\lambda}} \dfrac{\sigma}{q}$, получим, что выражение в скобках (4.4) не меньше, чем

$$\rho q \left(\frac{q^n-1}{q-1} \sqrt{\frac{q^2-1}{q^{2n}-1}} - 1 \right).$$

Можно показать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выражение в скобках неотрицательно, возрастает по n и его предельным значением при $n \to \infty$ является

$$\frac{q^n-1}{q-1} \sqrt{\frac{q^2-1}{q^{2n}-1}} - 1 \to \sqrt{\frac{q+1}{q-1}} - 1.$$

Из всех сделанных выкладок следует, что неравенство (4.3) при произвольном фиксированном $z = z_0 \neq 0$ имеет решение относительно натурального числа n. Наименьшее из них обозначим через $N(z_0, w)$.

Таким образом, по теореме 2.1 траектория системы (4.1), выходящая из произвольного начального положения $z = z_0 \neq 0$, может быть приведена в терминальное множество $M = \{0\}$ не позднее момента времени $\tau_{N(z_0,w)} = N(z_0, w)P$.

4.2. Рассмотрим управляемый объект с простым движением

$$\dot{z} = u - v, \tag{4.5}$$

где z, u, $v \in \mathbb{R}^m$. Терминальным множеством является начало координат: $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = \{0\}$ и $M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbb{R}^m$, π — тождественный оператор. Так как $A = \widetilde{0}$, где $\widetilde{0}$ — нулевая матрица порядка $m \times m$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = E$ — единичная матрица.

В этом примере рассматривается задача 2. Управлениями преследователя являются измеримые функции $u(t)$, $t \geq 0$, с интегральным ограничением, а управления убегающего имеют импульсный характер, при $V = \sigma S$, где σ — неотрицательное число, S — единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^m$.

Предположим, что $\tau_i = iP$, где P — некоторый положительный период.

Рассмотрим взаимно исключающиеся два случая: I) $P > \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$ и II) $P \leq \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$.

Рассмотрим случай I. Покажем, что вышеуказанный способ выделяет множество точек пространства $\mathbb{R}^m$, из которых можно завершить преследование, а из точек дополнения этого множества нельзя завершить преследование.

Пусть n^* — такое неотрицательное целое число, которое удовлетворяет следующим условиям: $\sqrt{\dfrac{P}{n^*+1}}\,\rho > \sigma$, $\sqrt{\dfrac{P}{n^*+2}}\,\rho \leq \sigma$. Условие $P > \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$ обеспечивает существование такого числа.

Выберем некоторый k, $k \in \{0, \ldots, n^*\}$. Рассмотрим такие моменты времени $t > 0$, чтобы $n(t) = k$. Понятно, что такими t являются числа из полуинтервала $[kP,\, (k+1)P)$.

Пусть преследующий игрок на отрезках времени $[0, P)$, $[P, 2P), \ldots, [(k-1)P,\, kP)$, $[kP,\, t]$ использует ресурсы $\rho_0^2 = \dfrac{P}{t}\rho^2$, $\rho_1^2 = \dfrac{P}{t}\rho^2, \ldots, \rho_{k-1}^2 = \dfrac{P}{t}\rho^2$, $\rho_k^2 = \dfrac{t-kP}{t}\rho^2$ соответственно. Легко заметить, что $\rho_0^2 + \rho_1^2 + \ldots + \rho_{k-1}^2 + \rho_k^2 = \rho^2$.

При $i = 0, 1, \ldots, k$ для множества $F_i(\cdot)$ из разд. 2 имеем

$$F_i(\rho_i; iP, (i+1)P) = \sqrt{P}\,\rho_i S, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad F_k(\rho_k; kP, t) = \sqrt{t-kP}\,\rho_k S.$$

Значит,

$$W_i(t, v) = F_i(\rho_i,\, iP, (i+1)P) - v, \quad W_i(t) = F_i(\rho_i,\, iP, (i+1)P) \underline{*} \sigma S, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

и

$$W_k(t, v) = F_k(\rho_k,\, kP, t) - v, \quad W_k(t) = F_k(\rho_k,\, kP, t) \underline{*} \sigma S.$$

Так как

$$W_i(t) = \sqrt{P}\,\rho_i S \underline{*} \sigma S, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad W_k(t) = \sqrt{t-kP}\,\rho_k S \underline{*} \sigma S,$$

то, если $\sqrt{P}\,\rho_i \geq \sigma$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $\sqrt{t-kP}\,\rho_k \geq \sigma$ или, что то же самое по выбору чисел ρ_i, если $\dfrac{P}{\sqrt{t}}\,\rho \geq \sigma$, $\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho \geq \sigma$, предположение 3.1 будет выполнено. В силу того что $kP \leq t < (k+1)P$, достаточным условием выполнения предположения 3.1 является условие $\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho \geq \sigma$. Выбор числа k обеспечивает существования такого $t_k \in (kP,\, (k+1)P)$, что имеет место равенство $\dfrac{t_k - kP}{\sqrt{t_k}}\,\rho = \sigma$. В этом случае получим $W_i(t) = \Big(\dfrac{P}{\sqrt{t}}\,\rho - \sigma\Big)S$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $W_k(t) = \Big(\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho - \sigma\Big)S$ при $t_k \leq t < (k+1)P$.

Так как $W_i(t)$, $t_k \leq t < (k+1)P$ содержат нулевой вектор при всех i, $i = 0, 1, \ldots, k$, то для всех i, $i = 0, 1, \ldots, k$, $t_k \leq t < (k+1)P$ положим $w_i(t) = 0$. Тогда получим

$$\xi(t, z, w) = z, \quad t_k \leq t < (k+1)P.$$

Таким образом, имеем

$$\widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \sup\Big\{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in \frac{P}{\sqrt{t}}\,\rho\, S - v\Big\}, \quad i = 0,1,\ldots,k-1,$$

$$\widetilde{\alpha}_k(t,z,v,w) = \sup\Big\{\alpha \geq 0 : -\alpha z \in \frac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho\, S - v\Big\}, \quad t_k \leq t < (k+1)P.$$

Функции $\widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w)$, $i = 0,1,\ldots,k-1$, являются решениями уравнения

$$\|v - \alpha z\| = \frac{P}{\sqrt{t}}\,\rho,$$

которые легко определить:

$$\widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{(z,v) + \sqrt{(z,v)^2 + \|z\|^2\Big(\dfrac{P^2}{t}\,\rho^2 - \|v\|^2\Big)}}{\|z\|^2}, \quad i = 0,1,\ldots,k-1.$$

Отсюда найдем

$$\inf_{\|v\|\leq\sigma} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{\dfrac{P}{\sqrt{t}}\,\rho - \sigma}{\|z\|}, \quad i = 0,1,\ldots,k-1,$$

причем каждый из инфимумов достигается на одном и том же векторе $v = -\sigma\dfrac{z}{\|z\|}$.

Аналогичным образом находим

$$\inf_{\|v\|\leq\sigma} \widetilde{\alpha}_k(t,z,v,w) = \frac{\dfrac{t-kP}{\sqrt{t}}\,\rho - \sigma}{\|z\|}.$$

Значит,

$$\inf_{\|v\|\leq\sigma} \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \sum_{i=0}^{k} \inf_{\|v\|\leq\sigma} \widetilde{\alpha}_i(t,z,v,w) = \frac{\sqrt{t}\,\rho - (k+1)\sigma}{\|z\|}, \quad t_k \leq t < (k+1)P.$$

Следовательно, для данного $z \neq 0$ неравенство $\dfrac{\sqrt{t}\,\rho - (k+1)\sigma}{\|z\|} \geq 1$ можно обеспечить для некоторого t, $t \in [t_k,\, (k+1)P)$, если z удовлетворяет условию $\|z\| < \sqrt{(k+1)P}\,\rho - (k+1)\sigma$.

Таким образом, получим следующий интервал:

$$I(n^*) = \Big(0,\, \max\big(\sqrt{P}\,\rho - \sigma,\, \sqrt{2P}\,\rho - 2\sigma, \ldots, \sqrt{(n^*+1)P}\,\rho - (n^*+1)\sigma\big)\Big).$$

В данном примере $\mathfrak{T} = \bigcup\limits_{i=0}^{n^*}\big[t_i,\, (i+1)P\big)$ и очевидно, что $\mathfrak{T} \neq \varnothing$, $ip \notin \mathfrak{T}$, $i = 0,\ldots,n^*$. При $\|z_0\| \in I(n^*)$ имеем $T(z_0,w) = \Big[\Big(\dfrac{\|z_0\| + (i+1)\sigma}{\rho}\Big)^2,\, (i+1)P\Big) \neq \varnothing$ для соответствующего i, $i \in \{0,\ldots,n^*\}$. Поэтому из теоремы 3.1 следует, что если начальная точка $z_0 \neq 0$ такая, что ее норма принадлежит интервалу $I(n^*)$: $\|z_0\| \in I(n^*)$, то из этой точки можно завершить преследование за время $T \in T(z_0,w)$.

З а м е ч а н и е 4.1. Можно показать, что если норма начальной точки $z_0 \neq 0$ не принадлежит интервалу $I(n^*)$, то из этой точки нельзя завершить преследование. При этом убегающему игроку предлагается управление вида $v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\delta(t-iP)$, с $v_i = -\sigma\frac{z_0}{\|z_0\|}$.

Теперь рассмотрим случай II: $P \le \dfrac{\sigma^2}{\rho^2}$. Утверждается, что из произвольной точки $z \in \mathbb{R}^m$, $z \ne 0$ невозможно завершить преследование. Пусть $z_0 \in \mathbb{R}^m$, $z_0 \ne 0$, и $t > 0$ — произвольный момент времени.

Убегающему игроку предлагается управление вида

$$v(t) = \sum_{i=0}^{n(t)} v_i \delta(t - iP), \text{ где } v_i = -\sigma \frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Если преследователь использовал допустимое управление $u(\vartheta)$, $0 \le \vartheta \le t$, то для соответствующего решения уравнения (4.5) имеем

$$z(t) = z_0 + \int_0^t u(\vartheta) d\vartheta + \sum_{i=0}^{n(t)} \sigma \frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Отсюда, используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|z(t)\| \ge \left\| z_0 + (n(t)+1)\, \sigma \, \frac{z_0}{\|z_0\|} \right\| - \left\| \int_0^t u(\vartheta) d\vartheta \right\| \ge \|z_0\| + (n(t)+1)\sigma - \sqrt{t}\, \rho.$$

Но $\|z_0\| \ne 0$ и $t < (n(t)+1)P$, поэтому из последнего неравенства имеем

$$\|z(t)\| > \sqrt{n(t)+1}\, \rho \Big(\sqrt{n(t)+1}\, \frac{\sigma}{\rho} - \sqrt{P} \Big),$$

так как $\sqrt{P} \le \dfrac{\sigma}{\rho} \le \sqrt{n(t)+1}\, \dfrac{\sigma}{\rho}$. Значит, $\|z(t)\| > 0$. Это неравенство означает, что из точки $z_0 \ne 0$ нельзя завершить преследование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 212–224.
2. **Чикрий А.А., Белоусов А.А.** О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 290–301.
3. **Белоусов А.А.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями и импульсными управлениями // Докл. НАН Украины. 2013. № 11. С. 37–42.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. Думка, 1992. 384 с.
6. **Ухоботов В.И., Троицкий А.А.** Об одной задаче импульсного преследования // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т. 5, № 2. С. 79–87.
7. **Ухоботов В.И.** Выпуклая игровая задача импульсного преследования второго порядка // XII Всероссийское совещание по проблемам управления: сб. тр. Москва, 2014. С. 2089–2095.
8. **Котлячкова Е.В.** К нестационарной задаче простого преследования в классе импульсных стратегий // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 1, № 45. С. 106–113.
9. **Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц.** Матричные разрешающие функции в игровых задачах динамики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 324–333.
10. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Тухтасинов Муминжон
д-р физ.-мат. наук, профессор
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека
e-mail: mumin51@mail.ru

Поступила 19.10.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 519.16 + 519.85

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА[1]

М.Ю. Хачай, Е.Д. Незнахина

Условие обобщенной задачи коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP) задается взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением множества его вершин на k дизъюнктных кластеров $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Требуется построить цикл минимального веса, посещающий в точности одну вершину из каждого кластера. Мы рассматриваем геометрическую постановку задачи (именуемую в работе EGTSP-k-GC), в которой вершины графа являются точками на плоскости, весовая функция задается евклидовыми расстояниями между ними, а разбиение на кластеры определяется неявно с помощью регулярной целочисленной сетки с шагом 1. Произвольным образом разрешая неоднозначность, в рассматриваемой нами постановке назовем кластером подмножество вершин, принадлежащих одной ячейке данной сетки. Даже в этом частном случае обобщенная задача коммивояжера остается труднорешаемой, являясь естественным обобщением классической евклидовой задачи коммивояжера на плоскости. Недавно для данной задачи был построен $(1.5+8\sqrt{2}+\varepsilon)$-приближенный алгоритм с трудоемкостью, зависящей полиномиально как от числа вершин n, так и от количества кластеров k. Мы предлагаем три приближенные схемы для этой задачи. При произвольном фиксированном k все схемы являются полиномиальными (PTAS), причем трудоемкость первых двух линейна по числу вершин. Более того, первые две схемы остаются полиномиальными при $k = O(\log n)$, а последняя схема сохраняет свойство полиномиальности при $k = n - O(\log n)$.

Ключевые слова: обобщенная задача коммивояжера (GTSP), NP-трудная задача, полиномиальная приближенная схема (PTAS).

M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina. Approximation schemes for the generalized TSP.

The generalized traveling salesman problem (GTSP) is defined by a weighted graph $G = (V, E, w)$ and a partition of its vertex set into k disjoint clusters $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. It is required to find a minimum-weight cycle that contains exactly one vertex of each cluster. We consider a geometric setting of the problem (we call it EGTSP-k-GC), in which the vertices of the graph are points in a plane, the weight function corresponds to the euclidian distances between the points, and the partition into clusters is specified implicitly by means of a regular integer grid with step 1. In this setting, a cluster is a subset of vertices lying in the same cell of the grid; the arising ambiguity is resolved arbitrarily. Even in this special setting, the GTSP remains intractable, generalizing in a natural way the classical planar Euclidean TSP. Recently, a $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$-approximation algorithm with complexity depending polynomially both on the number of vertices n and on the number of clusters k has been constructed for this problem. We propose three approximation algorithms for the same problem. For any fixed k, all the schemes are PTAS and the complexity of the first two is linear in the number of nodes. Furthermore, the complexity of the first two schemes remains polynomial for $k = O(\log n)$, whereas the third scheme is polynomial for $k = n - O(\log n)$.

Keywords: generalized traveling salesman problem, NP-hard problem, polynomial-time approximation scheme.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-283-292

Введение

Условие обобщенной задачи коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP), известной в отечественной литературе под названием *задача обхода мегаполисов* (см., например, [1]), задается полным реберно взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ на k попарно непересекающихся кластеров (мегаполисов). По аналогии с классической задачей коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) требуется построить кратчайший циклический маршрут $v_1, e_2, v_2, \ldots, v_k, e_1, v_1$, вес которого совпадает с суммой весов

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант 14-11-00109.

входящих в него ребер и который посещает каждый кластер V_i в единственной произвольно выбранной вершине $v_i \in V_i$.

Насколько нам известно, впервые задача GTSP была введена в конце 60-х гг. в работах [14] и [19], в которых рассматривались модели передачи компьютерных файлов и распределения клиентов по агенствам социального обеспечения.

При произвольной неотрицательной весовой функции w задача GTSP обладает точным алгоритмом[2] с трудоемкостью $\Theta(k!n^3)$, т. е. принадлежит классу FPT. Данный сложностной класс объединяет комбинаторные задачи, точные решения которых могут быть найдены алгоритмами, для каждого из которых верхняя оценка трудоемкости $O(f(k)\cdot poly(n))$ выражается в терминах подходящей вычислимой функции f, определенной на множестве допустимых значений параметра k. Таким образом, при произвольном фиксированном значении k задача GTSP полиномиально разрешима. В случае, когда k является частью входа, задача GTSP NP-трудна в сильном смысле (даже на евклидовой плоскости), будучи обобщением классической задачи коммивояжера.

Известно несколько подходов к построению точных и приближенных решений задачи GTSP, в том числе модификации генетических алгоритмов [5;12], эвристики муравьиной колонии [15], а также подходы, эффективно использующие дополнительные ограничения предшествования (см., например, [6]). С интуитивной точки зрения наиболее простым представляется подход, основанный на полиномиальной сводимости [16], сохраняющей стоимость исходной задачи, к подходящей постановке классической задачи коммивояжера. К сожалению, результирующая постановка TSP, как правило, не наследует полезные структурные свойства исходной задачи. Постановка TSP, соответствующая евклидовой GTSP, не обязательно является евклидовой и даже метрической, и для ее решения не всегда удается применить эффективные приближенные алгоритмы, такие как 3/2-приближенный алгоритм Кристофидеса [7] или полиномиальную приближенную схему Ароры [3].

Как обычно, под полиномиальной приближенной схемой (Polynomial-Time Approximation Scheme, PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации понимаем семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью $(1+\varepsilon)$ за время, ограниченное сверху некоторым полиномом от длины записи ее исходных данных [20]. В случае, если время работы такого алгоритма составляет $O(n^c)$, где c не зависит от ε, то приближенная схема называется *эффективной полиномиальной* (Efficient Polynomial-Time Approximation Scheme, EPTAS).

Наряду с евклидовой GTSP большой интерес исследователей последние десятилетия был прикован к другому обобщению геометрической задачи коммивояжера, в котором требуется найти замкнутый маршрут наименьшего веса, пересекающий заданные подмножества плоскости $N_1, \ldots, N_k \subset \mathbb{R}^2$. Данные подмножества принято называть *окрестностями*, а саму задачу — задачей коммивояжера с окрестностями (Traveling Salesman Problem with Neighborhoods, TSPN). Несмотря на то что задача GTSP может рассматриваться как частный дискретный случай TSPN, при котором $N_i = V_i$, большинство позитивных результатов в области аппроксимируемости получены при условии, что N_i являются телесными подмножествами плоскости (геометрическими фигурами). В работе [2] первые полиномиальные приближенные алгоритмы с фиксированными оценками точности получены для подклассов задачи TSPN, в которых окрестности являются непересекающимися единичными кругами и выпуклыми многоугольниками. Для общей постановки задачи в работе [17] предложен $O(\log k)$-приближенный алгоритм. В известной работе Думитреску и Митчелла [9] построены первый $O(1)$-приближенный алгоритм для случая произвольных связных окрестностей одинакового диаметра и полиномиальная приближенная схема для непересекающихся единичных кругов. Позднее Митчелл распространил этот результат на случай произвольных “тучных” (fat) окрестностей [18], а в работе [10] Думитреску и Тотом построено обобщение результатов [9] на случай произвольного d-мерного евклидова пространства.

[2]О существовании такого алгоритма нам сообщил проф. A.Grigoriev в частной переписке.

Данная статья посвящена исследованию аппроксимируемости геометрической версии задачи GTSP на плоскости (Euclidian Generalized Traveling Salesman Problem in k Grid Clusters, EGTSP-k-GC), в которой кластеры V_i порождаются ячейками единичной прямоугольной сетки. По-видимому, впервые задача EGTSP-k-GC была введена в работе [4], в которой для произвольного $\varepsilon > 0$ для нее был построен $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$-приближенный алгоритм как следствие аппроксимационных результатов, полученных авторами для обобщенной задачи об остовном дереве, в которой кластеры также индуцируются ячейками прямоугольной сетки (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP).

Заметим, что эффективные точные и приближенные алгоритмы разрабатывались для задачи GMSTP и ранее, и каждый из них естественным образом порождает соответствующий приближенный алгоритм для задачи EGTSP-k-GC. В частности, в [11] разработана схема динамического программирования для частного случая задачи GMSTP, в котором объединение непустых ячеек, индуцирующих кластеры, является связным множеством. Показано, что предложенная схема обладает полиномиальной трудоемкостью при условии, что один из геометрических размеров сетки (ширина или высота) является фиксированным. Для случая, когда в дополнение к условию на связность заполненных ячеек число кластеров растет сверх-линейно по отношению к размерам сетки, в той же работе построена PTAS. В приложении к задаче EGTSP-k-GC оба результата порождают 2 и $(2+\varepsilon)$-приближенные полиномиальные алгоритмы в соответствующих частных постановках.

Таким образом, на данный момент сведения об аппроксимируемости задачи EGTSP-k-GC исчерпываются несколькими полиномиальными приближенными алгоритмами с фиксированными оценками точности и отрицательным результатом о невозможности построения PTAS для общей постановки евклидовой задачи GTSP (см., например, [8]). Естественным образом возникает вопрос об уточнении статуса аппроксимируемости EGTSP-k-GC, в частности о возможности построения для нее полиномиальной приближенной схемы, исследованию которого посвящена данная статья.

В статье предлагаются три приближенные схемы для данной задачи. При произвольном фиксированном k все построенные схемы являются эффективными полиномиальными схемами, более того, первые две из них обладают линейной по n трудоемкостью. В то время как трудоемкость первых двух схем остается полиномиальной при условии $k = O(\log n)$, последняя сохраняет свойство полиномиальности при $k = n - O(\log n)$.

1. Постановка задачи

Рассмотрим евклидову постановку обобщенной задачи коммивояжера (Euclidian Generalized Traveling Salesman Problem in k Grid Clusters, EGTSP-k-GC). В этом частном случае задан реберно взвешенный граф $G = (V, E, w)$, в котором множество вершин V соответствует множеству точек на плоской целочисленной решетке. Каждая непустая 1×1 клетка образует кластер. Вес ребра между двумя вершинами соответствует евклидову расстоянию между ними. На рис. 1 представлена постановка задачи EGTSP-k-GC для $k = 6$ и $n = 17$.

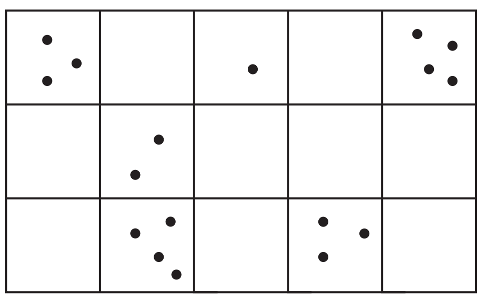


Рис. 1. Постановка задачи EGTSP-k-GC для $k = 6$.

2. Приближенные схемы для случая медленно растущих значений параметра k

Для случая медленно растущих значений параметра k мы предлагаем две полиномиальных приближенных схемы. Первая схема основана на классическом алгоритме динамического программирования Хелда — Карпа, применимом при поиске точных решений для набора вспомогательных постановок евклидовой задачи коммивояжера. Второй алгоритм обобщает PTAS Ароры на случай EGTSP-k-GC.

2.1. Приближенная схема, основанная на методе динамического программирования

Основная идея алгоритма заключается в объединении полного перебора множеств представителей из k вершин для заданного множества кластеров и применении метода динамического программирования для построения на выбранных вершинах гамильтоновых циклов и сравнения их длин.

Введем дополнительный параметр t и разделим все непустые клетки заданной решетки на t^2 равных клеток с длиной стороны $1/t$. Далее для каждой непустой полученной клетки заменим все содержащиеся в ней узлы исходного графа G на центр соответствующей клетки. В результате этой процедуры произойдет замена вершин кластера на не более чем t^2 новых выделенных вершин. Заметим, что имеется не более чем t^{2k} способов выбрать k центров в качестве представителей заданных кластеров. Далее для каждого такого набора вершин построим гамильтонов цикл минимального веса с помощью алгоритма динамического программирования Хелда — Карпа [13] за время $O(k^2 2^k)$. Общая трудоемкость алгоритма составит $O(t^{2k}k^2 2^k) + O(n)$.

А л г о р и т м 1. PTAS, основанная на методе динамического программирования

Input: задана постановка задачи EGTSP-k-GC и необходимое значение точности ε.
Output: $(1+\varepsilon)$-приближенное решение.

1: строим разбиение k непустых узлов решетки на t^2 клеток с длиной стороны $1/t$; значение t будет определено позже;
2: каждой j-й клетке поставим в соответствие множество C_j, содержащее центры непустых дочерних клеток;
3: **for all** $(c_1, \ldots, c_k) \in C_1 \times \ldots \times C_k$ **do**
4:   используя процедуру динамического программирования, построим точное решение $S(c_1, \ldots, c_k)$ соответствующей постановки задачи коммивояжера;
5: **end for**
6: результатом работы алгоритма является кратчайший маршрут $S(c_1, \ldots, c_k)$.

Оценка точности алгоритма 1 основана на том факте, что для любой вершины $v \in V$ расстояние между узлом v и ближайшим центром дочерней клетки не превосходит $\sqrt{2}/(2t)$. Рассмотрим произвольное оптимальное решение изначальной постановки GTSP-k-GC. Накопленная погрешность, индуцированная заменой заданных узлов ближайшими центрами дочерних квадратов, не превосходит $k\sqrt{2}/t$.

Чтобы оценить k в терминах длины оптимального решения GTSP, мы используем недавний результат, связанный с аппроксимируемостью иной задачи комбинаторной оптимизации, заданной на кластерах (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP). В отличие от классической постановки задачи о минимальном остовном дереве (Minimum Spanning Tree Problem, MSTP), которая может быть решена точно за полиномиальное время, ее обобщение на кластерах является NP-трудной задачей даже в случае евклидовой плоскости, где кластеры определяются клетками целочисленной решетки.

Теорема 1 [4, Theorem 2]. *Пусть* OPT_{GMSTP} *— длина кратчайшего остовного дерева, решения евклидовой задачи* GMSTP *на* k *кластерах в целочисленной решетке, тогда* $k \leq 4\,OPT_{\mathrm{GMSTP}} + 4$.

Так как остовное дерево может быть получено из гамильтонова цикла путем удаления произвольного ребра, то верно неравенство $OPT_{\mathrm{GTSP}} \geq OPT_{\mathrm{GMSTP}}$ для любой неотрицательно определенной весовой функции. Отсюда для евклидовой обобщенной задачи коммивояжера верно аналогичное утверждение.

Следствие 1. *Пусть* OPT_{GTSP} *— длина кратчайшего гамильтонова цикла, решения задачи* EGTSP-k-GC, тогда $k \leq 4\,OPT_{\mathrm{GTSP}} + 4$.

Для любого $k > 4$ и $\varepsilon > 0$ выберем значение параметра t так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{k\sqrt{2}}{t} \leq \frac{k-4}{4}\varepsilon \leq \varepsilon\,OPT_{\mathrm{GTSP}},$$

т. е.

$$t \geq \frac{4\sqrt{2}k}{(k-4)\,\varepsilon} = \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon}\Big(1 + \frac{4}{k-4}\Big) \geq \frac{20\sqrt{2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом, мы гарантируем, что при произвольном $k > 4$ накопленная погрешность не превысит $\varepsilon\,OPT_{\mathrm{GTSP}}$. Следовательно, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых значений* $\varepsilon > 0$ *и* $k > 4$ *алгоритм* 1 *находит* $(1+\varepsilon)$*-приближенное решение задачи* EGTSP-k-GC *за время* $O(k^2(O(1/\varepsilon))^{2k}) + O(n)$.

Следствие 2. 1) *При произвольном фиксированном* $k > 4$ *алгоритм* 1 *является линейной приближенной схемой.* 2) *При* $k = O(\log n)$ *алгоритм* 1 *является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью* $O((\log n)^2 n^{O(\log(1/\varepsilon))})$.

2.2. PTAS, обобщающая схему Ароры для задачи коммивояжера на плоскости

В данном подразделе будет описана полиномиальная приближенная схема, обобщающая подход, предложенный Аророй [3] для евклидовой задачи TSP. Предположим, что $k > 4$.

Основная идея предлагаемого алгоритма заключается в рандомизированном рекурсивном разделении объемлющего квадрата на квадраты меньшей площади и последующем поиске замкнутого маршрута минимального веса, удовлетворяющего следующим ограничениям:

a) маршрут посещает в точности одну вершину из каждого кластера V_i;
b) отрезки маршрута, соединяющие соседние вершины, являются непрерывными ломаными и могут пересекать границы построенных квадратов лишь в заданных наперед точках (порталах);
c) число и местоположение порталов, равно как и предельное количество допустимых пересечений сторон каждого квадрата, также задаются заранее и зависят от параметра ε, определяющего точность приближения.

Покажем, что для построения PTAS для EGTSP-k-GC достаточно построить аналогичную схему для некоторого ее подкласса. Назовем постановку евклидовой обобщенной задачи коммивояжера *округленной*, если

(i) существует $L' = O(k)$ такое, что для любого узла $v_i = [x_i, y_i]$ заданного графа G его координаты $x_i, y_i \in \{0, \ldots, L'\}$;
(ii) для любых вершин $u \neq v \in V$, $w(\{u, v\}) \geq 4$.

Обоснуем, что существование PTAS для округленной EGTSP-k-GC влечет за собой существование PTAS для исходной постановки задачи. Рассмотрим произвольную постановку EGTSP-k-GC и соответствующую ей округленную постановку. Обозначим максимальное расстояние между кластерами через D, тогда $OPT = OPT_{\text{GTSP}} \geq 2D \geq 2$ по неравенству треугольника. Отсюда размер L, минимального выровненного по осям объемлющего квадрата для заданной постановки задачи, удовлетворяет неравенству

$$L \leq D + 2 \leq 1.5\, OPT. \tag{1}$$

Далее построим выровненную по осям сетку со стороной квадрата $L\varepsilon/(2k)$ и переместим каждую вершину исходного графа в ближайший узел получившейся сетки. Очевидно, некоторые узлы могут быть отображены в один и тот же узел сетки, следовательно, округленная постановка задачи может иметь меньшую размерность. Кроме того, возможна ситуация, когда два или более различных кластеров делят один узел сетки, тогда мы будем относить данный узел ко всем этим кластерам. В результате преобразований расстояние между любыми двумя вершинами изменится не более, чем на $L\varepsilon/k$, а значит, длина произвольного k-цикла изменится не более, чем на $L\varepsilon$.

Далее изменим расстояние между линиями сетки, умножив все координаты на $8k/(L\varepsilon)$. Получим сетку со стороной клетки 4. Сдвинем начало координат так, чтобы оно совпало с левым нижним углом решетки. После описанных преобразований каждая вершина примет неотрицательные координаты, а минимальное расстояние между ними станет не менее четырех. Размер объемлющего квадрата будет равен $L' = O(k/\varepsilon) = O(k)$ для любого фиксированного значения ε.

Рассмотрим произвольный k-цикл C в заданной постановке задачи и соответствующий ему цикл C' в округленной постановке. Обозначим их веса через W и W' соответственно. Получим

$$8k\,(W - L\varepsilon)\,/(L\varepsilon) \leq W' \leq 8k\,(W + L\varepsilon)\,/(L\varepsilon). \tag{2}$$

Подставим в правую часть неравенства (2) оптимальные значения OPT и OPT' рассмотренных задач, т. е. $OPT' \leq 8k\,(OPT + L\varepsilon)\,/(L\varepsilon)$. Предположим, что $W' \leq (1+\varepsilon)OPT'$ для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда

$$8k\,(W - L\varepsilon)\,/(L\varepsilon) \leq W' \leq (1+\varepsilon)OPT' \leq 8k(1+\varepsilon)\,(OPT + L\varepsilon)\,/(L\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$OPT \leq W \leq (1+\varepsilon)(OPT + L\varepsilon) + L\varepsilon \leq (1+4\varepsilon)OPT$$

согласно (1). Таким образом мы доказали следующую лемму.

Лемма. *Произвольная* PTAS *для округленной* EGTSP-k-GC *индуцирует* PTAS *для общей* EGTSP-k-GC *с аналогичной по порядку величины оценкой трудоемкости.*

Всюду ниже в данном разделе мы рассматриваем именно постановки округленной задачи EGTSP-k-GC. Приведенная выше лемма позволяет распространить аппроксимационные результаты, полученные для этих задач, на общий случай.

Обозначим наименьший содержащий постановку исходной задачи квадрат, стороны которого параллельны осям координат, через $\mathcal{S}$. Без ограничения общности положим длину стороны L' объемлющего квадрата равной наименьшей подходящей степени двойки.

Для дальнейших построений воспользуемся структурой данных, известной как 4-дерево. Корнем дерева назовем объемлющий квадрат $\mathcal{S}$. Каждый квадрат, включая корневой, делим на четыре равных дочерних квадрата. Повторяем данную процедуру рекурсивно до тех пор, пока не получим квадраты, содержащие не более одной вершины исходной задачи. По построению 4-дерево содержит $O(k^2)$ листьев, $O(\log L') = O(\log k)$ уровней и $O(k^2 \log k)$ узлов всего.

Центральная точка 4-дерева — это точка пересечения ребер квадратов с длиной стороны $L'/2$. Мы рассмотрим деревья $T(a,b)$, центральная точка которых имеет координаты $((L'/2+a) \mod L',\ (L'/2+b) \mod L')$, где $a,b \in \mathbb{N}^0_{L'}$. Квадраты дерева $T(a,b)$, как и его центральная точка, подвергаются циклическому сдвигу по горизонтали и вертикали.

Зададимся значениями параметров $m, r \in \mathbb{N}$. Произвольному квадрату S сопоставим регулярное разбиение его границы, включающее все вершины квадрата и состоящее из $4(m+1)$ точек (порталов).

О п р е д е л е н и е. Пусть C — простой цикл в графе G на плоскости. Замкнутая ломаная $l(C)$ называется (m,r)-*аппроксимацией* цикла C, если выполняются следующие условия:

(1) множество вершин $l(C)$ является подмножеством вершин заданного графа и множества порталов;

(2) вершины графа G обходятся ломаной $l(C)$ в порядке, задаваемом маршрутом C;

(3) $l(C)$ пересекает каждую сторону произвольного квадрата, узла дерева $T(a,b)$, не более r раз, причем исключительно в порталах.

Нам потребуется основной результат работы [3], одна из эквивалентных формулировок которого приведена ниже.

Теорема 3 (Structure Theorem). *Пусть постановка округленной задачи* TSP *на плоскости задается полным евклидовым графом G, длина стороны объемлющего квадрата $\mathcal{S}$ которого равна L, и заданы константы $c > 0$ и $\eta \in (0,1)$. Пусть дискретные случайные величины a, b распределены равномерно и независимо на множестве $\mathbb{N}_L$, а значения параметров m и r определяются соотношениями $m = \lceil 2s \log L \rceil$, $r = s + 4$ и $s = \lceil 36c/\eta \rceil$.*

Тогда для произвольного простого цикла C (в графе G) веса $W(C)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, существует (m,r)-аппроксимация $l(C)$, вес которой не превосходит $(1 + 1/c)W(C)$.

Результат теоремы 3 гарантирует нам существование (m,r)-аппроксимации оптимального решения округленной EGTSP-k-GC. Для произвольного 4-дерева $T(a,\ b)$ обозначим $(m,\ r)$-аппроксимацию наименьшего веса $C(a,\ b)$. Следуя подходу, предложенному Аророй, для произвольных фиксированных значений параметров a и b вычислим $C(a,\ b)$ с помощью процедуры динамического программирования. Количество подзадач в сравнении с [3] будет отличаться на некоторый множитель, зависящий от k.

А л г о р и т м 2. Обобщение PTAS Ароры

Input: заданы постановка задачи EGTSP-k-GC и необходимое значение точности ε.
Output: $(1+\varepsilon)$-приближенное решение.

1: определим для заданной постановки задачи соответствующую ей округленную постановку и построим объемлющий квадрат с длиной стороны L';
2: **for all** $a, b \in \mathbb{N}^0_{L'}$ **do**
3: следуя подходу [3], построим 4-дерево $T(a,b)$ и определим значение $C(a,b)$ с помощью процедуры динамического программирования; подзадача в процедуре динамического программирования для произвольного узла $T(a,\ b)$ наряду с параметрами, введенными в [3], обладает дополнительными параметрами, определяющими посещение кластеров $V_{i_1}, \ldots, V_{i_t}$, соответствующих данному узлу. Таким образом, каждая подзадача процедуры динамического программирования Ароры индуцирует $4^t \le 4^k$ подзадач в соответствии со всеми способами назначения кластеров дочерним клеткам данного узла $T(a,\ b)$ (см. рис. 2);
4: **end for**
5: (m,r)-аппроксимация наименьшего веса $C(a,b)$.

Таким образом, верна следующая теорема.

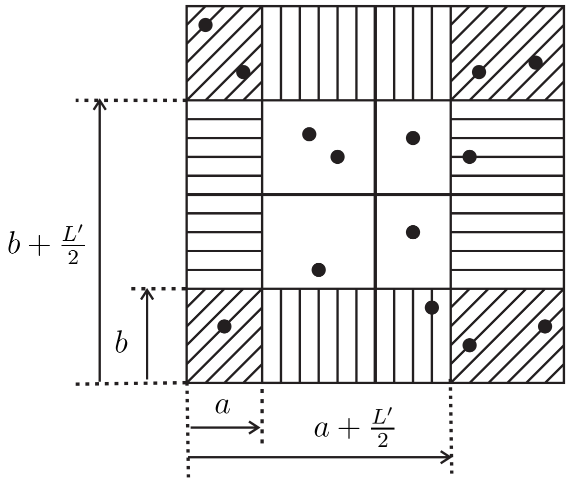


Рис. 2. Пример размещения кластеров в клетке $T(a,\ b)$.

Теорема 4. *Для произвольного фиксированного $\varepsilon \in (0,1)$ и $k > 4$ алгоритм 2 находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение для EGTSP-k-GC за время $2^{O(k)}k^4(\log k)^{O(1/\varepsilon)} + O(n)$.*

Следствие 3. 1) *Для любых фиксированных значений $k > 4$ алгоритм 2 является полиномиальной приближенной схемой для EGTSP-k-GC. 2) Для $k = O(\log n)$ алгоритм 2 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n(\log n)^4(\log\log n)^{O(1/\varepsilon)})$ и эффективной полиномиальной приближенной схемой с оценкой трудоемкости $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}n(\log n)^5)$.*

Последнее утверждение следует из очевидного неравенства $(\ln n)^C \le 2^{C^2}n$.

3. Приближенная схема для случая быстро растущих значений параметра k

Для случая быстро растущих значений параметра k мы предлагаем подход, основанный на непосредственном применении PTAS [3] для евклидовой задачи коммивояжера на плоскости.

А л г о р и т м 3. Схема, основанная на классической PTAS Ароры
Input: задана постановка задачи EGTSP-k-GC и необходимое значение точности ε.
Output: $(1+\varepsilon)$-приближенное решение.

1: рассмотрим разбиение $V_1, \ldots, V_k$ множества вершин V заданного графа, индуцированное целочисленной решеткой;
2: **for all** $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \ldots \times V_k$ **do**
3:    строим $(1+\varepsilon)$-приближенное решение $S(v_1, \ldots, v_k)$ для соответствующей постановки TSP с помощью PTAS Ароры;
4: **end for**
5: ответом является маршрут наименьшего веса $S(c_1, \ldots, c_k)$.

Обозначим через t_i число узлов, принадлежащих i-му кластеру. Количество способов определить постановку задачи TSP, выбирая по одному узлу из каждого кластера, равно $t_1 \times \ldots \times t_k$. Данное произведение достигает максимального значения при условии $\sum_{i=1}^{k} t_i = n$ в точке $t_i = n/k$. Так как для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ временная сложность PTAS Ароры для постановки евклидовой TSP на k узлах составляет $O(k^3(\log k)^{O(\log(1/\varepsilon))})$, то временная сложность алгоритма 3 равна $\left(\frac{n}{k}\right)^k k^3(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$.

Для любого фиксированного k временная сложность зависит от n полиномиально, и алгоритм 3 является полиномиальной приближенной схемой для EGTSP-k-GC. Чтобы получить аналогичный результат для значений параметра k, зависящих от n, выберем $k = k(n)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \le n^D \tag{3}$$

для некоторого постоянного значения $D > 0$. Предположим, что $\dfrac{n-k(n)}{k(n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как в данном случае

$$\left(\frac{n}{k(n)}\right)^{k(n)} = \left(1 + \frac{n-k(n)}{k(n)}\right)^{k(n)} \le e^{n-k(n)},$$

при $k(n) \ge n - D\log n$ выполняется неравенство (3). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Для любых значений k и $\varepsilon > 0$ алгоритм 3 находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение* EGTSP-k-GC *за время $n^k(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$.*

Следствие 4. 1) *Алгоритм 3 является эффективной полиномиальной приближенной схемой для* EGTSP-k-GC *при произвольном фиксированном k.* 2) *Для $k = O(\log n)$ алгоритм 3 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n^{D+3}(\log n)^{O(1/\varepsilon)})$ и эффективной полиномиальной приближенной схемой с оценкой трудоемкости $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}n^{D+4})$.*

Заключение

В работе обосновано несколько полиномиальных приближенных схем для задачи EGTSP-k-GC, так или иначе опирающихся на идею динамического программирования. Показано, что исследуемая задача эффективно аппроксимируема с произвольной заданной точностью при условии, что число кластеров k удовлетворяет одному из двух условий: $k = O(\log n)$ или $k = n - O(\log n)$. Несмотря на очевидное продвижение в области оценки статуса аппроксимируемости задачи EGTSP-k-GC, следует отметить, что вопрос о возможности построения PTAS для ее общей постановки пока остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сесекин А. Н., Ченцов А. А., Ченцов А. Г.** Задачи маршрутизации перемещений. СПб.: Лань, 2011. 256 с.
2. **Arkin E. M., Hassin R.** Approximation algorithms for the geometric covering salesman problem // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 55, no. 3. P. 197–218.
3. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
4. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters / B. Bhattacharya, A. Ćustić, A. Rafiey A, A. Rafiey, V. Sokol. // Combinatorial Optimization and Applications: 9th Internat. Conf. (COCOA 2015): Proc. Cham: Springer International Publ., 2015. *LNCS*. Vol. 9486. P. 110–125.
5. **Bontoux B., Artigues C., Feillet D.** A memetic algorithm with a large neighborhood crossover operator for the generalized traveling salesman problem // Computers & Oper. Res. 2010. Vol. 37, no. 11. P. 1844–1852.
6. **Ченцов А. Г., Хачай М. Ю., Хачай Д. М.** Точный алгоритм с линейной трудоемкостью для одной задачи обхода мегаполисов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 309–317.
7. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Tech. report AD-A025 602 / Carnegie-Mellon University. Pittsburgh, 1976. 11 p.
8. **Dror M., Orlin J.** Combinatorial optimization with explicit delineation of the ground set by a collection of subsets // SIAM J. Discrete Math. 2008. Vol. 21, no. 4. P. 1019–1034.

9. **Dumitrescu A., Mitchell J. S. B.** Approximation algorithms for TSP with neighborhoods in the plane // Proc. of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '01). Philadelphia: SIAM, 2001. P. 38–46.
10. **Dumitrescu A., Tóth C. D.** The traveling salesman problem for lines, balls, and planes // ACM Trans. Algorithms. 2016. Vol. 12, no. 3. P. 43:1–43:29.
11. **Feremans C., Grigoriev A., Sitters R.** The geometric generalized minimum spanning tree problem with grid clustering // 4OR. 2006. Vol. 4, no. 4. P. 319–329.
12. **Gutin G., Karapetyan D.** A memetic algorithm for the generalized traveling salesman problem // Nat. Comput. 2010. Vol. 9, no. 1. P. 47–60.
13. **Held M., Karp R. M.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. Vol. 10. no. 1. P. 196–210.
14. **Henry-Labordere A.** The record balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem // Rev. Franc. Inform. Rech. Opér. 3. 1969. No. B-2. P. 43–49.
15. **Jun-man K., Yi Z.** Application of an improved ant colony optimization on generalized traveling salesman problem // Energy Procedia. 2012. Vol. 17, part A. P. 319–325.
16. **Laporte G., Mercure H., Nobert Y.** Generalized travelling salesman problem through n sets of nodes: the asymmetrical case // Discrete Appl. Math. 1987. Vol. 18, no. 2. P. 185–197.
17. **Mata C. S., Mitchell J. S. B.** Approximation algorithms for geometric tour and network design problems // Proc. of the Eleventh Annual Symposium on Computational Geometry (SCG '95). N.Y.: ACM, 1995. P. 360–369.
18. **Mitchell J. S. B.** A PTAS for TSP with neighborhoods among fat regions in the plane // Proc. of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '07). Philadelphia, 2007. P. 11–18.
19. **Saksena J.** Mathematical model for scheduling clients through welfare agencies // CORS J. 1970. Vol. 8. P. 185–200.
20. **Williamson D., Shmoys D.** The design of approximation algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 500 p.

Хачай Михаил Юрьевич
доктор физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
Омский государственный технический университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поступила 16.05.16

Незнахина Екатерина Дмитриевна
аспирант, математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: eneznakhina@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 517.17

О ЛОКАЛЬНОМ СТРОЕНИИ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ МЭТОНА[1]

Л. Ю. Циовкина

В настоящей работе исследуется строение локальных подграфов в дистанционно регулярных графах Мэтона четной степени. Описаны некоторые бесконечные серии локально Δ-графов данного семейства, где Δ — сильно регулярный граф, являющийся объединением аффинно полярных графов типа “$-$”, псевдогеометрический граф для $pG_l(s,l)$ или граф ранга 3, реализумый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера. Показана характеризуемость некоторых графов Мэтона своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов.

Ключевые слова: реберно симметричный граф, дистанционно регулярный граф, антиподальное накрытие, граф Мэтона, (локально) сильно регулярный граф, автоморфизм.

L. Yu. Tsiovkina. On the local structure of distance-regular Mathon graphs.

We study the structure of local subgraphs of distance-regular Mathon graphs of even valency. We describe some infinite series of locally Δ-graphs of this family, where Δ is a strongly regular graph that is the union of affine polar graphs of type “$-$,” a pseudogeometric graph for $pG_l(s,l)$, or a graph of rank 3 realizable by means of the van Lint–Schrijver scheme. We show that some Mathon graphs are characterizable by their intersection arrays in the class of vertex transitive graphs.

Keywords: arc-transitive graph, distance-regular graph, antipodal cover, Mathon graph, (locally) strongly regular graph, automorphism.

MSC: 05E18, 05E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-293-298

1. Введение

В связи с изучением дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением, не превосходящим 3, возникла задача описания локального строения графов из класса реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных накрытий полных графов с $a_1 = c_2$. Описание и конструкции таких накрытий были получены в [1;10]. В [3] приведены примеры локально сильно регулярных графов степени, не большей 1000, из указанного класса накрытий и показано, что такие графы изоморфны некоторым графам Мэтона. В настоящей работе мы найдем несколько бесконечных серий локально Δ-графов из семейства графов Мэтона четной степени (в том числе, содержащих ряд вышеупомянутых примеров), где Δ — сильно регулярный граф, являющийся объединением графов, изоморфных графу $\mathrm{VO}^-(4,2^{t/2})$, псевдогеометрический граф для сети $pG_t(s,t)$ или граф ранга 3, реализумый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера. Кроме того, мы установим характеризуемость некоторых графов Мэтона в классе вершинно-транзитивных графов.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $q = 2^{2t} > 2$ *и* $r > 1$ *делит* $q-1$. *Пусть* $\mathrm{M}(q,r)$ — *граф Мэтона с массивом пересечений* $\{q,(r-1)(q-1)/r,1;1,(q-1)/r,q\}$ *и* Δ — *локальный подграф графа* $\mathrm{M}(q,r)$. *Тогда* Δ — *реберно симметричный граф и справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* r *делит* 2^t+1, *то либо*

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061).

(i) *$r = 2^t + 1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо*

(ii) *$r < 2^t + 1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, (2^t+1)(2^t-1)/r, ((2^t+1)/r-1)((2^t+1)/r-2)+2^t-2, (2^t+1)/r((2^t+1)/r-1))$.*

(2) *Если t четно и r делит $2^{t/2}+1$, то либо*

(i) *$r = 2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, (2^{t/2}-1)(2^t+1), 2^{t/2}-2, 2^{t/2}(2^{t/2}-1))$, изоморфный аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$, либо*

(ii) *$r < 2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, z(2^{t/2}-1)(2^t+1), z(2^{t/2}-1)(3+z(2^{t/2}-1))-2^t, z(2^{t/2}-1)(1+z(2^{t/2}-1)))$, являющийся объединением $z = (2^{t/2}+1)/r$ графов, изоморфных аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$.*

(3) *Если r — простой делитель числа $q-1$, 2 — это примитивный элемент по модулю r и $(r-1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами $(2^{2t}, (2^{2t}-1)/r, (2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2, (2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2)$, где $\epsilon = (-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера.*

2. Терминология и вспомогательные результаты

Всюду в данной работе, если не оговорено иное, под термином «граф» мы будем понимать неориентированный граф без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим *i-окрестность вершины* a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. *Локальным подграфом* графа Γ будем называть граф $\Gamma_1(x)$ для некоторой вершины x графа Γ. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Если каждый локальный подграф графа Γ принадлежит $\mathcal{F}$, то говорят, что Γ является *локально* $\mathcal{F}$ графом. В частности, если для некоторого графа Δ каждый граф из $\mathcal{F}$ изоморфен Δ, то Γ называется *локально Δ-графом.* Если граф Γ фиксирован, то также будем использовать обозначение $[a] = \Gamma_1(a)$. Через $V(\Gamma)$ мы будем обозначать множество вершин графа Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и для любых двух вершин a и b графа Γ число вершин в $[a] \cap [b]$ равно λ, если вершины a, b смежны, и равно μ, если вершины a и b несмежны.

Если вершины x, y находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(x,y)$ (через $c_i(x,y)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(x)$ $(\Gamma_{i-1}(x))$ с $[y]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(x,y)$ и $c_i = c_i(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$ (полагается, что $b_d = c_0 = 0$).

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве всех упорядоченных пар смежных вершин.

Пусть V — это векторное пространство размерности 2 над конечным полем F порядка q с невырожденной симплектической формой f. Пусть K — подгруппа мультипликативной группы F^* поля F индекса $r > 1$, делящего число $(q-1)/(q-1,2)$, и $b \in F^*$. *Графом Мэтона* называется граф, множеством вершин которого являются K-орбиты на множестве векторов пространства V, и две вершины Ku и Kv которого смежны тогда и только тогда, когда $f(u,v) \in bK$. Граф Мэтона является антиподальным дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{q, (r-1)(q-1)/r, 1; 1, (q-1)/r, q\}$, и не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора элемента b (см. [4, предложение 12.5.3]). Граф Мэтона для заданных параметров q и r будем обозначать через $\mathrm{M}(q,r)$. Нетрудно понять, что $\mathrm{M}(q,r)$ допускает транзитивную на дугах группу автоморфизмов, изоморфную группе $L_2(q)$.

Приведем ниже некоторые известные сведения о реберно симметричных графах и свойствах группы $L_2(q)$ четной характеристики, которые далее нам понадобятся для доказательства теоремы.

Предложение 1 (см., например, [5, лемма 2.7]). *Пусть даны неинвариантная подгруппа H группы G и элемент $g \in G - H$. Через $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$ обозначим граф (возможно, ориентированный) со множеством вершин $V(\Gamma) = \{Hx \mid x \in G\}$, ребрами которого являются пары (Hx, Hy) такие, что $xy^{-1} \in HgH$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если G действует точно на $V(\Gamma)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$, то Γ — связный граф, $G \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и G действует точно и транзитивно и на вершинах, и на дугах графа Γ.*

(2) *Если G действует транзитивно на дугах связного графа X, H — стабилизатор вершины x графа X, $g \in G$ — это некоторый 2-элемент, переставляющий две смежные вершины x и x^g графа X, то $X \simeq \Gamma(G, H, HgH)$, $g^2 \in H$ и $G = \langle H, g\rangle$.*

Предложение 2 (см., например, [9; 6]). *Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^e > 2$, S — силовская 2-подгруппа группы G, $M = N_G(S)$ и g — некоторая инволюция из $G - S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *$G = \langle S, g\rangle$ и $M = S : K$, причем $K = M \cap M^g \simeq Z_{q-1}$ и $K\langle g\rangle \simeq D_{2(q-1)}$.*

(2) *$S \cap M^g = 1$ и $|S| = |Z(S)| = q$.*

(3) *$G = M \cup MgS$ и каждый элемент из $G - M$ представим единственным образом в виде xgy, где $x \in M$ и $y \in S$.*

(4) *G содержит единственный класс инволюций и $C_G(a) = S$ для любой инволюции $a \in S$.*

(5) *Для всех $t \in \{1, 2, \ldots, e\}$ и для всех делителей m числа $2^{(e,t)} - 1$ группа G содержит подгруппу $E_{2^t} : Z_m$.*

3. Доказательство теоремы

Пусть $G = L_2(q)$, где $q = 2^{2t} > 2$, $S \in Syl_2(G)$, $M = N_G(S)$, H – подгруппа из M нечетного индекса $r > 1$ и g — это инволюция из $G - S$. Положим $M \cap M^g = \langle h\rangle$. Тогда $H = S\langle h^r\rangle$. Положим $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$. Ввиду предложений 1 и 2 ясно, что $\Gamma \simeq \mathrm{M}(q, r)$. Пусть далее Δ — локальный подграф графа Γ и x — инволюция из S такая, что $x^g = g^x$. Через $\mathrm{Cay}(S, C)$ будем обозначать граф Кэли группы S по системе образующих $C \subseteq S - \{1\}$, т. е. граф на множестве элементов группы S, в котором две вершины s_1, s_2 смежны, если и только если $s_1 s_2^{-1} \in C$.

Лемма 1. Δ *— реберно симметричный граф степени $(q-1)/r$. В частности, если граф Δ связен, то $\Delta \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle) \simeq \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r\rangle})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — окрестность вершины H в Γ. Тогда $V(\Delta) = \{Hgs \mid s \in S\} = \{Hg\} \cup \{Hgx^{h^j} | j \in \{1, \ldots, q-1\}\}$. Стабилизатор вершины Hg в H совпадает с $\langle h^r\rangle$ и на $V(\Delta) - \{Hg\}$ имеется в точности r $\langle h^r\rangle$-орбит. Кроме того, степень вершины в Δ равна $(q-1)/r = |h^r|$. Отсюда Δ — реберно симметричный граф. В частности, если граф Δ связен, то по предложению 1 имеем $\Delta \simeq \Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle)$, а поскольку вершины $\langle h^r\rangle x^{h^i}$ и $\langle h^r\rangle x^{h^j}$ смежны в графе $\Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle)$ для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, q-1\}$ тогда и только тогда, когда $x^{h^i} x^{h^j} \in x^{\langle h^r\rangle}$, то $\Gamma(H, \langle h^r\rangle, \langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle) \simeq \mathrm{Cay}(S, x^{\langle h^r\rangle})$. □

Напомним, что $(m, k; \lambda)$-*сетью* называется система инцидентности, состоящая из точек и блоков, множество блоков которой можно разбить на k параллельных классов размера m таким образом, что выполнены следующие условия:

$(N1)$ каждая точка инцидентна ровно k блокам, причем в точности одному из каждого параллельного класса,

$(N2)$ любые два блока из разных параллельных классов инцидентны в точности λ общим точкам.

Хорошо известно (см., например, обзор [2]), что $(m, k; 1)$-сеть является α-частичной геометрией порядка (s, t), где $\alpha = l = k - 1$ и $s = m - 1$, а точечный граф (или граф коллинеарности) частичной геометрии $pG_\alpha(s,l)$, т.е. граф, множеством вершин которого являются точки геометрии $pG_\alpha(s,l)$ и две вершины x,y которого смежны тогда и только тогда, когда точки x,y лежат на одной и той же прямой, сильно регулярен с параметрами $((s+1)(1+sl/\alpha), s(l+1), (s-1)+(\alpha-1)l, \alpha(l+1))$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, l называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,l)$.

Лемма 2. *Если r делит 2^t+1, то либо (i) $r=2^t+1$ и Δ — объединение 2^t изолированных 2^t-клик, либо (ii) $r<2^t+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, k(2^t-1), (k-1)(k-2)+2^t-2, k(k-1))$, где $k=(2^t+1)/r$.*

Доказательство. Пусть r делит 2^t+1. Положим $f=h^{2^t+1}$ и $w=h^{(2^t-1)r}$. Тогда $\langle h^r\rangle = \langle w\rangle \times \langle f\rangle$. Ввиду утверждения (5) предложения 2 в S имеется подгруппа X порядка 2^t такая, что $X^f=X$. Кроме того, $X^{hf}=X^h$ и $\langle f\rangle$ имеет ровно 2^t+1 орбит на $S-\{1\}$, поэтому $\langle f\rangle$ нормализует ровно 2^t+1 подгрупп порядка 2^t из S. Заметим, что если $r=2^t+1$, то Δ является объединением 2^t изолированных 2^t-клик. Поэтому далее будем считать, что r строго делит 2^t+1. Тогда $V(\Delta)$ допускает разбиение на 2^t X-орбит, каждая из которых является 2^t-кликой, а ввиду того что $\langle f\rangle$ фиксирует X-орбиту на $V(\Delta)$, содержащую вершину Hg, и переставляет циклически остальные X-орбиты, получим, что Δ — связный граф.

Докажем, что Δ является псевдогеометрическим графом для сети $pG_{k-1}(2^t,k-1)$. Для этого рассмотрим следующую систему инцидентности D на S. Точки системы D — это элементы группы S. Далее определим множество блоков системы D как множество X^{w^i}-орбит на S для всех $i\in\{1,\ldots,(2^t+1)/r\}$. Для $i\in\{1,\ldots,(2^t+1)/r\}$ через $\mathcal{B}_i$ обозначим множество X^{w^i}-орбит на S. Тогда множество $\{\mathcal{B}_i\}_{i=1}^{(2^t+1)/r}$ формирует разбиение множества всех блоков системы D на $(2^t+1)/r$ параллельных классов, $|\mathcal{B}_i|=2^t$ и $S\langle f\rangle$ действует 2-транзитивно на $\mathcal{B}_i$. Покажем, что D является $(2^t,(2^t+1)/r;1)$-сетью.

По построению точка $\{1\}$ инцидентна $(2^t+1)/r$ блокам, причем ровно одному блоку из каждого параллельного класса. Ввиду транзитивности действия H на S получим, что каждая точка из D инцидентна ровно $(2^t+1)/r$ блокам.

Покажем теперь, что любые два блока из разных параллельных классов инцидентны ровно одной общей точке. Предположим, что это не так и найдутся такие элементы $y_1,y_2\in S, y_1\neq y_2$, что $y_1,y_2\in B_i\cap B_j$ для некоторых блоков $B_i\in\mathcal{B}_i, B_j\in\mathcal{B}_j$. Тогда $1, y_2y_1^{-1}\in(B_i\cap B_j)y_1^{-1} = B_iy_1^{-1}\cap B_jy_1^{-1}$ и $y_2y_1^{-1}\in X^{w^i}\cap X^{w^j}$. Но тогда $y_1=y_2$, противоречие. Отсюда D — это $(2^t,(2^t+1)/r;1)$-сеть. Ясно, что граф коллинеарности построенной сети D изоморфен графу $\mathrm{Cay}(S,x^{\langle h^r\rangle})$. Значит ввиду леммы 1 Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(m^2, k(m-1), (k-1)(k-2)+m-2, k(k-1))$, где $m=2^t$ и $k=(2^t+1)/r$. □

Утверждение (1) теоремы доказано.

Пусть V — векторное пространство размерности n над конечным полем порядка q с невырожденной квадратичной формой Q. Напомним, что *аффинно полярный граф* — это граф на множестве векторов пространства V, вершины x и y которого смежны тогда и только тогда, когда $Q(x-y)=0$ и $x\neq y$. Этот граф обозначается через $\mathrm{VO}^+(n,q), \mathrm{VO}^-(n,q)$ или $\mathrm{VO}(n,q)$ в случаях, если форма Q гиперболическая, эллиптическая или параболическая соответственно. Известно, что если число n четно, то граф $\mathrm{VO}^\pm(n,q)$ сильно регулярен с параметрами $(q^n, (q^{n/2-1}\pm1)(q^{n/2}\mp1), q(q^{n/2-2}\pm1)(q^{n/2-1}\mp1)+q-2, q^{n/2-1}(q^{n/2-1}\pm1))$, в противном случае аффинно полярный граф не является сильно регулярным.

Лемма 3. *Если t четно и r делит $2^{t/2}+1$, то либо*

(i) $r=2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(2^{2t}, (2^{t/2}-1)(2^t+1), 2^{t/2}-2, 2^{t/2}(2^{t/2}-1))$, либо

(ii) $r<2^{t/2}+1$ и Δ — сильно регулярный граф с параметрами $\big(2^{2t}, z(2^{t/2}-1)(2^t+1), z(2^{t/2}-1)(3+z(2^{t/2}-1))-2^t, z(2^{t/2}-1)(1+z(2^{t/2}-1))\big)$, где $z=(2^{t/2}+1)/r$.

Доказательство. Пусть t четно и $r=2^{t/2}+1$. Положим $u=h^{2^t-1}$ и $y=h^{(2^t+1)(2^{t/2}+1)}$. Тогда $\langle h^r\rangle=\langle u\rangle\times\langle y\rangle$. Покажем, что граф Δ изоморфен аффинно полярному графу $\mathrm{VO}^-(4, 2^{t/2})$. Для этого введем на S структуру векторного пространства размерности 4 над полем из $2^{t/2}$ элементов. Определим бинарные операции $+$ на S и $\cdot$ на $S-\{1\}$ по правилам: $s_1+s_2=s_1s_2$ для всех $s_1,s_2\in S$, и $s_1\cdot s_2=x^{h_1h_2}$ для всех $s_1,s_2\in S-\{1\}$, где элементы $h_1,h_2\in\langle h\rangle$ такие, что $s_i=x^{h_i}$, $i=1,2$. Тогда $F=(S,+,\cdot)$ образует поле порядка 2^{2t}. Пусть X — подгруппа из S порядка $2^{t/2}$, нормализуемая элементом y. Можно считать, что $x\in X$. Тогда $\tilde X=(X,+,\cdot)$ образует подполе порядка $2^{t/2}$ поля $\tilde S$ и $\tilde S$ можно рассматривать как векторное пространство размерности 4 над $\tilde X$, сопоставляя элементам $\alpha\in\tilde X$ и $v\in\tilde S$ вектор $\alpha v=\alpha\cdot v$.

Положим $w=h^{2^t+1}$ и $z=h^{(2^t+1)(2^{t/2}-1)}$. Тогда $\langle w\rangle$ нормализует ровно 2^t+1 подгрупп порядка 2^t из S. Пусть A_1,A_2 — две такие подгруппы, причем $A_1^u=A_2$ и $x\in A_1$. Тогда $A_i=\{1\}\cup v_i^{\langle w\rangle}$, где $i=1,2$, для $v_1=x$ и некоторого $v_2\in S$, $A_1\cap A_2=1$, $A_1\times A_2=S$, и $v_2\in x^{\langle u\rangle}$. Поэтому $\tilde S=\tilde A_1\oplus\tilde A_2$ — прямая сумма двух подпространств, $\tilde A_1$ и $\tilde A_2$, размерности 2, соответствующих группам A_1,A_2. Пусть u_1,u_2 — два линейно независимых вектора из $\tilde S$, $u_i\in\tilde A_i, u_i\neq v_i$. Пусть $P=\langle v_1,v_2\rangle$ — это пространство, порожденное векторами v_1,v_2, и $W=\langle u_1,u_2\rangle$ — пространство, порожденное векторами u_1,u_2. Тогда $\tilde S=P\oplus W$.

Пусть $b^2+b+\alpha$ — некоторый неприводимый многочлен над $\tilde X$. Зададим на $\tilde S$ невырожденную квадратичную форму Q, полагая $Q(v_i)=0$, $Q(u_1)=1$, $Q(u_2)=\alpha$, $f_Q(v_1,v_2)=f_Q(u_1,u_2)=1$, $f_Q(v_i,u_j)=0$ для всех $i,j\in\{1,2\}$, где f_Q — поляризация квадратичной формы Q. Тогда для произвольного вектора $v=\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\delta_1u_1+\delta_2u_2\in\tilde S$ имеем $Q(v)=\gamma_1\gamma_2+\delta_1^2+\delta_1\delta_2+\alpha\delta_2^2$. Через Φ обозначим аффинно полярный граф на $\tilde S$ относительно квадратичной формы Q. По определению вершины y_1,y_2 графа Φ смежны, если и только если $Q(y_1+y_2)=0$ и $y_1\neq y_2$. Очевидно, что действие ρ группы S на $\tilde S$ трансляциями определяет регулярную на $V(\Phi)$ группу автоморфизмов $\rho(S)$ графа Φ, а действие ϕ группы $\langle y\rangle$ на $\tilde S$ по правилу $\phi(y):s\mapsto s^y$ задает группу автоморфизмов $\phi(\langle y\rangle)$ графа Φ, фиксирующую нулевой вектор и полурегулярную на его окрестности.

Группа $O^-(\tilde S,Q)$ изометрий пространства $(\tilde S,Q)$ действует транзитивно на множестве ненулевых сингулярных векторов и содержит простую подгруппу $(O^-(\tilde S,Q))^{(1)}=\Omega^-(\tilde S,Q)$ индекса 2. Ясно, что любая изометрия пространства $(\tilde S,Q)$ централизует $\phi(\langle y\rangle)$ и нормализует $\rho(S)$.

Ввиду изоморфизма $\Omega_4^-(2^{t/2})\simeq L_2(2^t)$ (см., например, [7, предложение 2.9.1 (v)]) получим, что $\langle u\rangle$ изоморфно вкладывается в группу $\Omega^-(\tilde S,Q)$. Пусть ψ — данное вложение. Тогда группа $\psi(\langle u\rangle)$ действует регулярно на множестве одномерных сингулярных подпространств пространства $(\tilde S,Q)$. Таким образом, $\psi(\langle u\rangle)$ действует транзитивно на 2^t+1 изолированных $(2^{t/2}-1)$-кликах из окрестности нулевого вектора в Φ. Теперь по предложению 1 получим, что $\Phi\simeq\Gamma(H,\langle h^r\rangle,\langle h^r\rangle x\langle h^r\rangle)\simeq\Delta$.

Пусть теперь r — собственный делитель числа $m=2^{t/2}+1$. Применим рассуждения из [8, с. 67], отождествляя, как и выше, группу S с полем порядка 2^{2t}. Для каждого $j\in\{1,2,\dots,m\}$ положим $\Gamma_j=\mathrm{Cay}(S,(x^{h^j})^{\langle h^m\rangle})$. Пусть $J\subset\{1,2,\dots,m\}$ и Γ_J — граф на множестве элементов группы S, в котором вершины s_1 и s_2 смежны тогда и только тогда, когда s_1 и s_2 смежны в графе Γ_j для некоторого $j\in J$. Тогда матрица смежности графа Γ_J имеет три различных собственных значения: $z(q-1)/m$, $z(2^{t/2}-1)$, $z(2^{t/2}-1)-2^t$, где $z=|J|$. Значит, Γ_J — сильно регулярный граф с параметрами из п. (ii) заключения. Заметим, что если J состоит в точности из чисел, кратных r и не превосходящих m, то $\Gamma_J=\mathrm{Cay}(S,x^{\langle h^z\rangle})\simeq\Delta$, где $z=m/r$. □

Утверждение (2) теоремы доказано.

Лемма 4. *Если r — простой делитель числа $q-1$, 2 — это примитивный элемент по модулю r и $(r-1)$ делит $2t$, то Δ — сильно регулярный граф (ранга 3) с параметрами $(2^{2t},(2^{2t}-1)/r,(2^{2t}-3r+1+\epsilon(r-1)(r-2)2^t)/r^2,(2^{2t}-r+1-\epsilon(r-2)2^t)/r^2)$, где $\epsilon=(-1)^{2t/(r-1)+1}$, реализуемый с помощью конструкции Ван-Линта — Шрайвера.*

Доказательство. Эта лемма является следствием теоремы 4 из [8]. □

Теорема доказана.

Покажем теперь, что некоторые графы Мэтона характеризуются своими массивами пересечений в классе вершинно-транзитивных графов.

Предложение 3. *Пусть* Γ — *вершинно-транзитивный дистанционно-регулярный граф с массивом пересечений* $\{n-1,(r-1)c_2,1;1,c_2,n-1\}$ *и* $n = rc_2+2$ — *простое число Ферма. Если число* r — *простое, то* $\Gamma \simeq \mathrm{M}(n-1,r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и ϕ — действие, индуцированное группой G на множестве Σ антиподальных классов графа Γ. Так как $(r,n)=1$, то ввиду [5, теорема 2.5] действие ϕ точное и $\phi(G) \simeq G$. Пусть группа G неразрешима. Тогда по теореме Бернсайда получим, что $\phi(G)$ это 2-транзитивная группа подстановок на Σ. По условию $(r,n-1)=1$, поэтому Γ — реберно симметричный граф. Теперь исходя из [1] $\Gamma \simeq \mathrm{M}(n-1,r)$.

Если же группа G разрешима, то стабилизатор любых двух антиподальных классов в G тривиален, противоречие с тем, что для $F \in \Sigma$ группа $G_{\{F\}}$ содержит элемент порядка r. $\square$

П р и м е р ы. Пусть $\Gamma = \mathrm{M}(n-1,r)$ и число r — простое. При $n=5$ граф Γ изоморфен графу прямых графа Петерсена. При $n=17$ имеем $r=3$ и Γ — локально свернутый 5-куб или $r=5$ и Γ — локально $4\times K_4$-граф. Если $n=257$, то либо $r=3$ и Γ — локально граф Ван-Линта — Шрайвера с параметрами $(256,85,24,30)$, либо $r=5$ и Γ — локально $\mathrm{VO}^-(4,4)$-граф, либо $r=17$ и Γ — локально $16\times K_{16}$-граф. Если $n=65537$, то либо r равно 3 или 5 и Γ — локально граф Ван-Линта — Шрайвера с параметрами $(2^{16},21845,7224,7310)$ или $(2^{16},13107,2498,2652)$ соответственно, либо $r=17$ и Γ — локально $\mathrm{VO}^-(4,16)$-граф, либо $r=257$ и Γ — локально $2^8\times K_{2^8}$-граф.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю.** Реберно симметричные дистанционно регулярные накрытия клик с $\lambda=\mu$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 237–246.
2. **Махнев А.А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5(329). С. 25–76.
3. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** О дистанционно регулярных накрытиях клик с сильно регулярными окрестностями вершин // Совр. пробл. матем. и ее прил.: сб. тр. 46-й Междунар. мол. шк.-конф. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 13–18.
4. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 494 p.
5. **Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E.** Antipodal distance transitive covers of complete graphs // Europ. J. Comb. 1998. Vol. 19, no. 4. P. 455–478.
6. **Dickson L.E.** Linear groups: with an exposition of the Galois field theory. N. Y.: Dover Publications, 1958.
7. **Kleidman P.B., Liebeck W.M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambr. Univ. Press. 1990. 304 p. (London Math. Soc. Lect. Notes Texts; vol. 129.)
8. **Shrijver A., van Lint J.H.** Construction of strongly regular graphs, two-weight codes and partial geometries by finite fields // Combinatorica. 1981. Vol. 1. P. 63–73.
9. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. (2). 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.
10. **Tsiovkina L.Yu.** Two new infinite families of arc-transitive antipodal distance-regular graphs of diameter three with $\lambda=\mu$ related to groups $Sz(q)$ and ${}^2G_2(q)$ // J. Algebr. Comb. 2015. Vol. 41. P. 1079–1087.

Циовкина Людмила Юрьевна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: l.tsiovkina@gmail.com

Поступила 05.08.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ И ГРУППАХ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫХ УНИТАРНЫМИ ГРУППАМИ СТЕПЕНИ ТРИ

А. А. Шлепкин

В данной работе установлены структура силовской 2-подгруппы периодической группы и структура периодической части группы Шункова, насыщенных унитарными группами степени три над конечными полями.

Ключевые слова: группа, насыщенная множеством групп, периодическая группа, группа Шункова, унитарная группа.

A. A. Shlepkin. On periodic groups and Shunkov groups saturated with unitary groups of degree 3.

We find the structure of a Sylow 2-subgroup of a periodic group and of the periodic part of a Shunkov group saturated with unitary groups of degree 3 over finite fields.

Keywords: group saturated with a set of groups, periodic group, Shunkov group, unitary group.

MSC: 20E26
DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-299-307

1. Введение

Группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ (см. [10]).

Пусть группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$ и K — подгруппа из G. Через $\mathfrak{X}(K)$ обозначим множество всех подгрупп из G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. В частности, если 1 — единичная подгруппа G, то $\mathfrak{X}(1)$ — множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$.

Группа G называется *группой Шункова* (*сопряженно-бипримитивно конечной группой*), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть G — группа. Через $T(G)$ будем обозначать подгруппу группы G, порожденную всеми элементами конечных порядков, при условии, что эта подгруппа периодическая. Будем называть $T(G)$ *периодической частью* группы G (см. [4, с. 90, 150]).

В [6] доказано, что периодическая группа, насыщенная группами из множества групп $\{U_3(2^m) \mid m$ — натуральное нефиксированное число$\}$, изоморфна $U_3(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле четной характеристики. В [8] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества групп $\{U_3(p^n) \mid p$ — простое нефиксированное число, n — натуральное нефиксированное число$\}$, изоморфна $U_3(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. В данной работе мы отказываемся от ограничения на характеристику поля (см., например, [6]) и от ограничения на периодичность группы Шункова (см., например, [8]). Пусть $\mathfrak{M} = \{U_3(p^n) \mid p$ — простое нефиксированное число, n — натуральное нефиксированное число$\}$. Под символом e в данной работе будет пониматься единица группы.

В настоящей работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, тогда для силовской 2-подгруппы S группы G выполняется одно из следующих условий*:

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = e,\ a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ *— полудиэдральная группа.*
2. $S = \langle a, w \mid a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e,\ a^w = b,\ ab = ba\rangle$ *— сплетенная группа.*
3. S *изоморфна силовской 2-подгруппе группы* $U_3(2^n)$.
4. S *— бесконечная 2-группа периода 4 ступени нильпотентности 2.*
5. $S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w\rangle$, *где A — бесконечная локально циклическая 2-группа, $w^2 = e$, и* $A^w = B$.
6. $S = AD$, *где D — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8, A — бесконечная локально циклическая 2-группа.*

Теорема 2. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q.*

Приведем необходимые для доказательства сформулированных выше теорем 1, 2 свойства конечных унитарных групп степени три.

Предложение 1. *Пусть $U = U_3(q)$, где $q = p^n$, и p — нечетное простое число. Тогда выполняются следующие свойства*:

1. *U содержит подгруппу $D = D_1 \times D_2$, где $D_1 = \langle d_1\rangle$, $D_2 = \langle d_2\rangle$,*

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

β — элемент порядка $q+1$ из $GF(q^2)$, $|D_1| = q+1$ и $|D_2| = \dfrac{q+1}{(3, q+1)}$.

2. *U содержит подгруппу $V = \langle b,\ w | b^3 = w^2 = e,\ b^w = b^{-1}\rangle$, где*

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *U содержит подгруппы $A = \langle i\rangle \times \langle j\rangle$ и $B = \langle w\rangle \times \langle j\rangle$, где w — инволюция определенная в п. 2,*

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_1\rangle$,

$$j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— инволюция из $\langle d_2\rangle$. A — четверная группа, $N_U(A) = C_U(A) \leftthreetimes V$, квадраты элементов из $N_G(A)$, порядок которых не равен трем, содержатся в $C_U(A)$ и $C_U(A) = D$.

4. $N_U(D) = N_U(A) = D \leftthreetimes V$.
5. *Существует $v \in U$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, где i, j, w определены в пп. 2, 3.*
6. *Если $q+1$ не делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы U изоморфна полудиэдральной группе $SD(m) = \{a,\ b \mid a^{2^{m+1}} = b^2 = e,\ a^b = a^{-1+2^m}\}$, где 2^m делит $q-1$, 2^{m+1} не делит $q-1$.*
7. *Если $q+1$ делится на 4, то силовская 2-подгруппа группы U изоморфна сплетенной группе $W_r(m) = \{a_1,\ a_2,\ b \mid a_1^{2^m} = a_2^{2^m} = b^2 = e,\ a_1a_2 = a_2a_1,\ a_1^b = a_2,\ a_2^b = a_1\}$, где 2^m делит $q+1$, 2^{m+1} не делит $q+1$.*

8. *Все четверные подгруппы из U сопряжены, U содержит элемент порядка* 8, *и любая* 2-*подгруппа из U порядка не менее* 32 *содержит элемент порядка* 8.

9. *Если $q \neq 5$, то $U = \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$. Если $q = 5$, то $\langle N_U(A), N_U(B)\rangle \simeq A_7$. Здесь A, B — группы, определенные в п.* 3.

Доказательство. Свойства 1–4 хорошо известны, их доказательство, например, можно найти в [5, предложение 2]. Свойства 6–8 доказаны в [14, с. 2, 3]. Свойство 5 вытекает из свойств 3, 8. Докажем свойство 9. Если $q \neq 5$, то $N_U(A), N_U(B)$ — различные максимальные подгруппы в U (см. [15, с. 379]). Следовательно, $U = \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$. Если $q = 5$, то $U \simeq U_3(5)$, и непосредственные вычисления показывают, что $A_7 \simeq \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$ — максимальная подгруппа в U (см. [15, с. 379]).

Предложение доказано.

Предложение 2 [6, предложение 1]. *Пусть $G = U_3(2^n)$ и P — силовская* 2-*подгруппа группы G . Тогда P — группа периода* 4 *ступени нильпотентности* 2, *и $P' = Z(P) = \Phi(P) = \Omega_1(P)$.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются условия теоремы 1.

Лемма 1. *Если в G некоторая ее силовская* 2-*подгруппа S конечна, то S — одна из групп, перечисленных в пп.* 1–3 *теоремы* 1.

Доказательство. Действительно, это так, ввиду предложений 1 (см. пп. 6, 7), 2 и [6, предложение 8].

Лемма доказана.

В леммах 2–5 будем предполагать, что S — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма 2. *Если S не содержит полных подгрупп, то S — группа из п.* 4 *теоремы* 1.

Доказательство. По [13, теорема 1] S содержит подгруппу $D = \langle h\rangle \times \langle g\rangle \times \langle f\rangle$, где $h^2 = g^2 = f^2 = e$. В силу [6, предложение 4] D вложена в бесконечную локально конечную подгруппу I группы S. Выберем I максимальной с указанным свойством. Если I содержит элемент b порядка 8, то $\langle D, b\rangle$ — конечная 2-группа, которая по условию насыщенности является подгруппой группы S_1, где S_1 — группа полудиэдра или сплетенная 2-группа (см. предложение 1). Но в обоих этих случаях S_1 не может содержать подгруппу, изоморфную группе D. Итак, I не содержит элементов порядка 8, следовательно, она — 2-группа периода не более 4, и все инволюции из I лежат в центре I.

Если $S = I$, то все доказано. Предположим, что $S \setminus I \neq \varnothing$ и $x \in S \setminus I$.

Рассмотрим случай $|x| = 2$. Покажем, что x можно выбрать так, что в I найдется инволюция z со свойством $xz = zx$. Группа $\langle x, y\rangle$ конечна для любой инволюции y из I. Зафиксируем некоторую инволюцию $y \in I$. Пусть t — инволюция из центра $\langle x, y\rangle$. Если $t \in I$, то возьмем в качестве z инволюцию t. Тогда $xz = zx$. Если $t \notin I$, то возьмем в качестве x инволюцию t, а в качестве z инволюцию y. Тогда $xz = zx$. Подгруппа $K_1 = \langle z\rangle \times \langle x\rangle$, очевидно, не лежит в I, и $K_1 \cap I = \langle z\rangle$. Возьмем в I инволюцию $t \neq z$. Ясно, что $tz = zt$.

Рассмотрим конечную подгруппу $\langle z, x, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I, и

$$\langle z\rangle \times \langle t\rangle \leq \langle z, x, t\rangle \cap I.$$

В силу [6, предложение 4] в $\langle z, x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_S(\langle z\rangle \times \langle t\rangle) \setminus I$, и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, z, t, t_1\rangle$, где t_1 — произвольный элемент из $I \setminus (\langle z\rangle \times \langle t\rangle)$, является конечной 2-группой.

По условию насыщенности K_2 содержится в подгруппе R, где $R \in \mathfrak{M}(K_2)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle z\rangle \times \langle t_1\rangle \times \langle t\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что $R \simeq U_3(2^n)$ и K_2 — 2-группа периода не более 4. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Следовательно, x перестановочен с любым элементом из I. Таким образом, $I\langle x\rangle$ — локально конечная 2-подгруппа в S периода не более 4, что противоречит максимальности I как локально конечной подгруппы в группе S.

Рассмотрим случай $|x| = 4$. Положим $x_1 = x^2$. По доказанному выше $x_1 \in I$. Возьмем в I инволюцию $t \neq x_1$. Ясно, что $tx_1 = x_1t$. Рассмотрим конечную подгруппу $\langle x, t\rangle$. Данная подгруппа, очевидно, не лежит в I, и

$$\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle \leq \langle x, t\rangle \cap I.$$

В силу [6, предложение 4] в $\langle x, t\rangle$ существует элемент v такой, что $v \in N_S(\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle)\setminus I$, и $v^2 \in I$. Тогда группа $K_2 = \langle v, x_1, t, t_1\rangle$, где t_1 — произвольная инволюция из $I \setminus (\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle)$, является конечной 2-группой. По условию насыщенности $K_2 \leq R \in \mathfrak{M}(K_2)$. Так как K_2 содержит подгруппу $\langle x_1\rangle \times \langle t\rangle \times \langle t_1\rangle$, то из структуры $\mathfrak{M}$ вытекает, что $R \simeq U_3(2^n)$, и K_2 — 2-группа периода не более 4. В силу произвольности выбора t_1 из I получим, что x перестановочен с любой инволюцией из I. Следовательно, x перестановочен с любым элементом из I. Таким образом, $I\langle x\rangle$ — локально конечная 2-подгруппа в S периода не более 4, что противоречит максимальности I как локально конечной подгруппы в группе S.

Рассмотрим случай $|x| > 4$. По доказаному выше все элементы из S, имеющие порядок 2 или порядок 4, лежат в I. Следовательно, I — характеристическая подгруппа в S, фактор-группа S/I имеет период 2 и S — локально конечная группа. Противоречие с выбором I.

Лемма доказана.

В леммах 3–5 будем предполагать, что S содержит полные подгруппы, и пусть $\tilde{S}$ — максимальная полная абелева подгруппа из S.

Лемма 3. *Если ранг $\tilde{S}$ не меньше 2, то S — группа из п. 5 теоремы 1.*

Доказательство. Несложно видеть, что в этом случае ранг $\tilde{S}$ равен 2 (см. доказательство леммы 2), $\tilde{S} = A \times B$, где $A,\ B$ — локально циклические группы, и $\tilde{S}$ — характеристическая подгруппа в S (см. [13, теорема 1]). Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности R содержится в подгруппе K, где $K \in \mathfrak{M}(R)$. Следовательно, $K \simeq U_3(p^n)$ и $p \neq 2$. Пусть S_K — силовская 2-подгруппа из K, содержащая R. По п. 6 предложения 1 $S_K = (\langle c\rangle \times \langle d\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle$ — сплетенная 2-группа, т. е. $|c| = |d| > 2$ и $c^w = d$. Ясно, что $R < \langle c\rangle \times \langle d\rangle$ и $R^w = R$. Возьмем в $\tilde{S} \setminus R$ элемент y со свойством $y^2 \in R$. Очевидно, такой элемент в силу структуры $\tilde{S}$ найдется. Ясно, что $y \in C_G(R)$. Следовательно, группа $\langle R, y, w\rangle$ конечна.

По условию насыщенности $\langle R, y, w\rangle$ содержится в подгруппе K_1; здесь $K_1 \in \mathfrak{M}(1)$ и $K_1 \simeq U_3(p_1^{n_1})$, где $p_1 \neq 2$. По предложению 1 (см. пп. 1–4) $C_{K_1}(R)$ — абелева группа. Отсюда вытекает, что $\langle R, y^w, y\rangle$ — конечная абелева 2-группа. Пусть y_1 — элемент из $\tilde{S} \setminus R$ со свойством $y_1^2 \in R$ и $\langle y_1\rangle \neq \langle y\rangle$. Покажем, что $y_1y = yy_1$. Действительно, $\langle R, y, y_1\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle R, y_1, y\rangle$ содержится в подгруппе K_2, где $K_2 \in \mathfrak{M}(1), K_2 \simeq U_3(p_2^{n_2})$ и $p_2 \neq 2$. По п. 6 предложения 1 $C_{K_2}(R)$ — абелева группа. Так как $\langle R, y_1, y\rangle \leq C_{K_2}(R)$, то $y_1y = yy_1$.

Пусть Y — множество элементов из $\tilde{S}\setminus R$ со свойством, что для любого $y \in Y, y^2 \in R$. Ясно, что Y — конечное множество, $\langle Y, R\rangle$ — конечная абелева 2-группа из $C_G(R)$, а $\langle R, Y, Y^w, w\rangle$ — конечная 2-группа из $N_G(R)$. По условию насыщенности $\langle R, Y, Y^w, w\rangle$ содержится в подгруппе K_3, где $K_3 \in \mathfrak{M}(\langle R, Y, Y^w, w\rangle), K_3 \simeq U_3(p_3^{n_3})$ и $p_3 \neq 2$. По предложению 1 (см. пп. 1–4, 6) $N_{K_3}(R) = (\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle) \leftthreetimes \langle V\rangle, C_{K_3}(R) = \langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$, где V, d_1 и d_2 из предложения 1(см. пп. 1–4). Положим $R_1 = \tilde{S} \cap (\langle d_1\rangle \times \langle d_2\rangle)$. По построению $R < R_1 = \langle v_1\rangle \times \langle u_1\rangle < A \times B$, где $v_1^w = u_1$. В силу произвольности выбора R как подгруппы, являющейся прямым произведением двух циклических групп одинакового порядка (большего 2) из $\tilde{S}$, по алгоритму вложения группы R в группу R_1 строим в $\tilde{S}$ цепочку подгрупп

$$R < R_1 < R_2 < \ldots < R_i < \ldots$$

со следующими свойствами: $R_i = \langle u_i \rangle \times \langle v_i \rangle$ и $v_i^w = u_i$. Очевидно, $\cup R_i = \tilde{S}$ и $w \in N(\tilde{S})$.

Осталось показать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. Рассмотрим $\overline{N} = N_G(S)/\tilde{S}$. Очевидно, в $\overline{N}$ силовская 2-подгруппа конечна, значит, все силовские 2-подгруппы из $\overline{N}$ конечны и сопряжены (см. [6, предложение 8]), а силовские 2-подгруппы в N сопряжены. Поэтому с точностью до сопряженности можно считать, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle \leq S$. Докажем обратное включение. Из [4, теорема 9.1.4.] и того факта, что S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, вытекает, что $C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$. По условию насыщенности и предложению 1 (см. пп.1–4, 6) получаем, что для любого $y \in S$ $y^2 \in C_S(\tilde{S}) = \tilde{S}$. Тогда фактор-группа $S/\tilde{S}$ — элементарная абелева подгруппа ранга 1, поскольку в противном случае S содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, что невозможно. Поскольку $w \notin \tilde{S}$, имеем $S/\tilde{S} = \langle w\tilde{S} \rangle$ и $S \leq \tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если $D_n < S$, где $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \leftthreetimes \langle w_n \rangle$, $|a_n| = |b_n| > 2$, $a_n^{w_n} = b_n$ и $w_n^2 = e$, то S — группа из п.* 5 *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если S содержит бесконечную цепочку

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_n < \ldots,$$

то группа $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ насыщена конечными сплетенными 2-группами. По [9, теорема 3] $\tilde{S}$ — ранга 2, и по лемме 3 все доказано. Предположим, что бесконечных цепочек указанного вида в S нет. Тогда $\tilde{S}$ — квазициклическая группа и, очевидно, $\tilde{S}$ — характеристическая подгруппа в S. Пусть D_n — максимальная сплетенная 2-группа из S. Тогда $S = \tilde{S}D_n$. Положим $\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle = R_n$. Пусть s — произвольный элемент из $\tilde{S} \setminus R_n$. Тогда $\langle R_n, s \rangle$ — конечная группа и по условию насыщенности $\langle R_n, s \rangle < K \in \mathfrak{M}(\langle R_n, s \rangle)$, $K \simeq U_3(p^n)$, где $p \neq 2$. По предложению 1 (см. пп. 1–5, 8) $s \in C_K(R_n)$. Следовательно, $s \in C_G(R_n)$, $\tilde{S} \leq C_G(R_n)$ и $\tilde{S}R_n$ — абелева группа. Зафиксируем $s_1 \in \tilde{S} \setminus R_n$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_1, R_n \rangle$ содержится в подгруппе K_1, где $K_1 \simeq U_3(p_1^n)$ для некоторого нечетного простого p_1. Тогда $\langle s_1, R_n \rangle \leq C_{K_1}(R_n)$. По п. 7 предложения 1 найдется $x \in C_{K_1}(\langle s_1, R_n \rangle) \setminus \langle s_1, R_n \rangle$ такой, что $x^2 \in R_n$, $s_1 x = x s_1$, и $\langle s_1, R_n, x \rangle$ — абелева группа. Пусть для $i \geqslant 1$ доказано, что $\langle s_i, R_n, x \rangle$ — абелева группа. Возьмем $s_{i+1} \in \tilde{S}$, и $s_{i+1}^2 = s_i$. Тогда $\langle s_{i+1}, x, R_n \rangle \leq C_G(\langle s_i, R_n \rangle)$. По условию насыщенности конечная группа $\langle s_{i+1}, x, R_n \rangle$ содержится в подгруппе K_2, где $K_2 \simeq U_3(p_2^n)$ для некоторого нечетного простого p_2. Так как $\langle s_{i+1}, x, R_n \rangle \leq C_{K_2}(\langle s_i, R_n \rangle)$, то по предложению 1 (см. пп. 1–5, 7) $s_{i+1} x = x s_{i+1}$, и $\langle s_{i+1}, R_n, x \rangle$ — абелева группа. Следовательно, $\tilde{S}R_n\langle x \rangle$ — абелева 2- подгруппа. Так как $x^2 \in \tilde{S}R_n$ и $w_n \in N_G(\tilde{S}R_n)$, то фактор-группа $\langle x, w_n, \tilde{S}R_n \rangle / \langle \tilde{S}R_n \rangle$ порождается двумя инволюциями, конечна, а ее силовская 2-подгруппа $\overline{S_1}$ имеет порядок больше 2. Из последнего вытекает, что S — собственная подгруппа в S_1, где S_1 — полный прообраз $\overline{S_1}$ в $\langle x, w_n, \tilde{S}R_n \rangle$. Противоречие с тем, что S — силовская 2-подгруппа в G. Таким образом, D_n не может быть максимальной сплетенной 2-группой, цепочка

$$D_1 < D_2 < \ldots < D_n < \ldots$$

бесконечна и утверждение леммы имеет место.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть S не содержит подгруппу $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \leftthreetimes \langle w_n \rangle$ с условием $|a_n| = |b_n| > 2$. Тогда S — группа из п.* 6 *теоремы* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 полная часть $\tilde{S}$ группы S — квазициклическая 2-группа. Положим $\tilde{S} = A$. Тогда S/A — конечная 2-группа, и пусть K — ее минимальный по порядку образ в S. Тогда $S = AK$, и K — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8.

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Если S — конечная группа, то теорема доказана по лемме 1. Если S — бесконечная группа и содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 8, то теорема доказана по лемме 2. Если S не содержит элементарных абелевых подгрупп порядка 8, то по [13, теорема 1] обладает нетривиальной полной частью $\tilde{S}$, и теорема 1 доказана ввиду лемм 3–5.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполняются условия теоремы 2. Предположим противное, в дальнейшем, за исключением леммы 8, G — контрпример к утверждению теоремы 2.

Лемма 6. *G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то по лемме Дицмана (см. [3]) $T(G)$ существует и является конечной группой. По условию насыщенности $T(G) \simeq U(q)$. Противоречие с выбором G. Следовательно, G содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Тогда по [12, лемма 1] G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, тогда выполняется одно из следующих утверждений.*

1. *$S = \langle a^{2^n} = v^2 = e,\ a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — полудиэдральная группа.*
2. *$S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = e,\ a^w = b, ab = ba\rangle$ — сплетенная 2-группа.*
3. *S изоморфна силовской 2-подгруппе группы $U_3(2^n)$.*
4. *S — бесконечная 2-группа периода 4 ступени нильпотентности 2.*
5. *$S = (A \times B) \leftthreetimes \langle w\rangle$, где A — бесконечная локально циклическая 2-группа, $w^2 = e$, и $A^w = B$.*
6. *$S = AD$, где D — конечная подгруппа группы S, не содержащая сплетенных подгрупп порядка больше 8, A — бесконечная локально циклическая 2-группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Используем схему доказательства теоремы 1. Лемма 1 имеет место в силу того факта, что в группе Шункова с конечной силовской 2-подгруппой все силовские 2-подгруппы сопряжены (см. [2, предложение 19]). Лемма 2 переносится дословно на наш случай. В лемме 3 приходиться учитывать тот факт, что при переходе к фактор-группам могут возникать элементы бесконечного порядка (группа Шункова !). Леммы 4, 5 переносятся на наш случай дословно.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Группа Шункова G, в которой все конечные подгруппы абелевы, обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G)$ — абелева группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Действительно, пусть a — произвольный элемент конечного порядка из G. Предположим, что $|a|$ — простое число. Тогда $\langle a, a^g\rangle$ — конечная абелева группа для любого $g \in G$. Следовательно, $N_1 = \langle a^g | g \in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G. В силу произвольного выбора a как элемента простого порядка получим, что все элементы простых порядков из G порождают абелеву нормальную подгруппу N_2 группы G и, более того, любой элемент из N_2 перестановочен с любым элементом $g \in G$, имеющим конечный порядок. Пусть $R(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми элементами конечных порядков группы G. Очевидно, $N_2 \leq Z(R(G))$, значит, группа $\overline{R} = R(G)/N_2$ — группа Шункова. Ясно, что для $\overline{R}$ условие леммы выполняется, и поэтому можно считать, что для $\overline{R}$ лемма верна (индуция по порядку a). Отсюда получаем, что $R(G) = T(G)$ — периодическая часть группы G, и $T(G)$ — абелева группа (см. [4, теорема 23.1.1]).

Лемма доказана.

Лемма 9. *Для* $\mathfrak{M}(1)$ *возможны только следующие взаимоисключающие ситуации*:
1. $\mathfrak{M}(1) \subseteq \{U_3(q) \mid q$ — *четное*$\}$.
2. $\mathfrak{M}(1) \subseteq \{U_3(q) \mid q$ — *нечетное*$\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть подгруппы S и T из G выбраны так, что S — силовская 2-подгруппа в $U < G$, где $U \simeq U_3(2^n)$, а T — силовская 2-подгруппа в $V < G$, $V \simeq U_3(q)$ и q нечетно. Ясно, что U и V — элементы множества $\mathfrak{M}(1)$. Если любая силовская 2-подгруппа из G конечна, то по [2, предложение 19] можно считать, что S и T лежат в некоторой силовской 2-подгруппе W группы G, и W — одного из видов, перечисленных в пп. 1–3 леммы 7. Из пп. 5,6 предложения 1 и предложения 2 следует, что это невозможно. Потому G имеет бесконечную силовскую 2-подгруппу. Возьмем в G силовскую 2-подгруппу S_1, содержащую S. Тогда S_1 — вида 4 из леммы 7. Возьмем в G силовскую 2-подгруппу T_1, содержащую T. Поскольку T_1 содержит элемент порядка 8, то T_1 — вида 5 из леммы 7. По [7, лемма 6] можно считать, что $|S_1 \cap T_1| > m$, где m — произвольное наперед заданное натуральное число. Получаем противоречие с п. 7 предложения 1.

Лемма доказана.

Отметим, что если для $\mathfrak{M}(1)$ выполнена ситуация 1 из леммы 9, то теорема 2 следует из [11, теорема 1.5]. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что для $\mathfrak{M}(1)$ имеет место только ситуация 2 из леммы 9.

Лемма 10. *Пусть* F *— подгруппа* G *такая, что* $F = \langle s_1 \rangle \times \langle s_2 \rangle$, *и* $|s_1| = |s_2| = 2$. *Тогда* $T(N_G(\langle F \rangle)) = T(C_G(F)) \leftthreetimes V^{(0)}$; *здесь* $T(C_G(F)) = C_1 \times C_2$, C_1, C_2 *— бесконечные локально циклические группы и* $V^{(0)}$ *изоморфна группе* V *из п. 2 предложения* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть R — произвольная конечная подгруппа из $C_G(F)$. По условию теоремы 2 имеем $\langle F, R \rangle < W \in \mathfrak{M}(\langle F, R \rangle)$. Значит, $R \in C_W(F)$, и R — абелева группа (предложение 1, пп. 1–4, 8). По леммам 6, 8 периодическая часть $T(C_G(F))$ существует и является бесконечной абелевой группой. Пусть теперь $F < U^{(1)} \in \mathfrak{M}(1)$. По предложению 1 (см. пп. 1–4, 8) $C_{U^{(1)}}(F) = D_1^{(1)} \times D_2^{(1)}$, $N_{U^{(1)}}(F) = C_{U^{(1)}}(F) \leftthreetimes V^{(1)}$, где $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, V^{(1)}$ изоморфны D_1, D_2, V из данного предложения. Поскольку порядок любой конечной подгруппы из $N_G(F)/T(C_G(F))$ не превосходит 6 (см. пп. 1–4, 8 предложения 1), то по лемме Дицмана [3] и [4, теорема 23.1.1] имеем $T(N_G(F)) = T(C_G(F)) \leftthreetimes V^{(1)}$. По [9, теорема 2] периодическая часть $T(C_G(F)) = C_1 \times C_2$, где C_1 и C_2 — бесконечные локально циклические группы. Возьмем в качестве $V^{(0)}$ группу $V^{(1)}$.

Лемма доказана.

До конца доказательства теоремы 2 сохраним обозначения из леммы 10.

Лемма 11. *В* G *существует подгруппа* $U \simeq U_3(Q)$ *для подходящего бесконечного локально конечного поля* Q *нечетной характеристики.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Из условия насыщенности и леммы 10 вытекает существование в G последовательности групп

$$U^{(1)}, U^{(2)}, \dots U^{(n)}, \dots$$

со следующими свойствами:

1. $U^{(n)} \in \mathfrak{M}(1)$ для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{U^{(1)}}(F) < N_{U^{(2)}}(F) < \ldots < N_{U^{(n)}}(F) < \ldots$.
3. $T(N_G(F)) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{U^{(n)}}(F)$.

Пусть w — инволюция из $V^{(0)}$, $F_1 = \langle w \rangle \times \langle z \rangle$, где z — инволюция из центра силовской 2-подгруппы в $T(N_G(F))$. По лемме 10 и по п. 8 предложения 1 $N_{U^{(n)}}(F_1) \subset T(N_G(F_1))$ для любого n. Более того, $N_{U^{(1)}}(F_1) < N_{U^{(2)}}(F_1) < \ldots < N_{U^{(n)}}(F_1) < \ldots$. Так как приведенная выше цепочка бесконечна, то в качестве $U^{(1)}$ можно взять группу со свойством $|U^{(1)}| > |U_3(5)|$. По п. 9 предложения 1 имеем $U^{(n)} = \langle N_{U^{(n)}}(F), N_{U^{(n)}}(F_1) \rangle$. Следовательно,

$$U^{(1)} < U^{(2)} < \ldots < U^{(n)} < \ldots .$$

Тогда $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^{(n)}$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, и по [1, теорема 1.5] $U \simeq U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Покажем, что $T(G) = U$, где U — из леммы 11. Предположим противное, пусть $x \in G \setminus U$ и $x^2 = e$. Возьмем инволюцию $y \in U$. По условию насыщенности конечная группа $\langle x, y \rangle$ содержится в подгруппе U_1, где $U_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $U_1 \not< U$, поскольку U_1 содержит x. Возьмем инволюцию $y_1 \in U_1 \cap U$ такую, что $\langle y_1 \rangle \times \langle y \rangle = F_2$. По лемме 10 и п. 8 предложения 1 имеем $N_{U_1}(F_2) < N_U(F_2)$ и $N_{U_1}(F_2) = (D_1^{(2)} \times D_2^{(2)}) \leftthreetimes V^{(2)}$, где $D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, V^{(2)}$ изоморфны группам D_1, D_2, V из предложения 1.

Пусть $w^{(2)}$ — инволюция из $V^{(2)}$, а $z^{(1)}$ — инволюция из центра силовской 2-подгруппы в $N_{U_1}(F_2)$. Положим $F_3 = \langle w^{(2)} \rangle \times \langle z^{(1)} \rangle$. По лемме 10 и п. 8 предложения 1 $N_{U_1}(F_3) < N_U(F_3)$ и $N_{U_1}(F_3) = (D_1^{(3)} \times D_2^{(3)}) \leftthreetimes V^{(3)}$, где $D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, V^{(3)}$ изоморфны группам D_1, D_2, V из предложения 1. По п. 9 предложения 1 и лемме 10 имеем $U_1 \simeq U_3(5)$ и

$$U_1 \cap U = \langle N_{U_1}(F_2), N_{U_1}(F_3) \rangle \simeq A_7$$

— максимальная подгруппа в U_1. Пусть теперь T — силовская 2-подгруппа из $U_1 \cap U$, содержащая F_2, F_3. Поскольку T является группой порядка 8, а силовская 2 — подгруппа из U_1 является группой порядка 16, то возьмем $x \in N_P(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$.

Поскольку силовская 2-подгруппа из U имеет порядок больше 8, то возьмем $h \in N_U(T) \setminus T$ со свойством $h^2 \in T$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, h, T \rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, h, T \rangle < R \in \mathfrak{M}(\langle x, h, T \rangle)$. Поскольку $x \in R$, но $x \notin U$, то R не лежит в U. Если R не изоморфна $U_3(5)$, то $R = \langle N_R(F_2), N_R(F_3) \rangle < U$, что невозможно. Следовательно, $R \simeq U_3(5)$, $S_1 = \langle N_R(F_2), N_R(F_3) \rangle < U$, и $S_1 \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в R. Как отмечалось выше, силовская 2-подгруппа из S_1 имеет порядок 8, следовательно, $y \notin S_1$, но $T\langle h \rangle < U \cap R$ и $R = \langle h, S_1 \rangle < U$, что невозможно.

Если такого y_1 в $U_1 \cap U$ не найдется, то возьмем инволюции z_1 и z_2 такие, что $z_1 \in (U_1 \setminus U) \cap C_U(y)$, а $z_2 \in (U \setminus U_1) \cap C_U(y)$. По условию насыщенности конечная группа $\langle y, z_1, z_2 \rangle < U_2 \in \mathfrak{M}(1)$. Ясно, что $U_2 \not< U$, поскольку U содержит z_1. Если теперь для U_2 повторить приведенные выше рассуждения для U_1, то мы снова придем к противоречию.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В.** Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп: сб. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1984. С. 39–50.
2. Группы с условием насыщенности / А.А. Кузнецов, Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватулина, К.А. Филиппов / Краснояр. гос. аграр. ун-т. Красноярск, 2010. 254 с.
3. **Дицман А.П.** О центре p-групп // Тр. семинара по теории групп: сб. тр. М.:, 1938. С. 30–34.
4. **Каргаполов П.Л., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

5. **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 394–399.
6. **Лыткина Д.В., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А.** Периодические группы, насыщенные $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. 2008. № 47. С. 288–306.
7. **Лыткина Д.В.** Периодические группы, насыщенные прямыми проиведениями конечных простых групп II // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52., № 5. С. 1096–1112.
8. **Филиппов К.А.** О периодических группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени 3 // Вестн. СибГАУ. 2012. № 1. С. 67–72. (Математика, механика, информатика).
9. **Шлепкин А.А.** Периодические группы , насыщенные сплетенными группами // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. № 10. С. 56–64.
10. **Шлепкин А.К.** Сопряженно-бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск: 1993. С. 363.
11. **Шлепкин А.К.** О периодической части некоторых групп Шункова //Алгебра и логика. 1999. № 38. С. 96–125.
12. **Шлепкин А.К.** О сопряженно-бипримитивно конечных группах //Алгебра и логика. 1983. № 22. С. 226–231.
13. **Шунков В.П.** Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. № 4. С. 484–496. С. 37–57.
14. **Alperin J.L.** Finite groups wish quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups // Trans. AMS. 1970. Vol. 151. P. 1–261.
15. **Bray J.N., Holt D.F.,Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 440 p.

Шлепкин Алексей Анатольевич
канд. физ.-мат. наук
старший преподаватель
Институт космических и информационных технологий СФУ
e-mail: shlyopkin@gmail.com

Поступила 20.04.2015

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22 № 3 2016

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Н. М. Юркова
TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 25.08.16. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 36, 0. Уч.-изд. л. 31,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226