РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 21, № 4 2015

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 21 № 4 2015

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 21, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. 328 с.

ISSN 0134–4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКИ КОЛМОГОРОВСКИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ КЛАССОВ НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА — АМАНОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

В данной статье рассматривается пространство Лоренца с анизотропной нормой периодических функций многих переменных. Установлены оценки колмогоровских поперечников классов Никольского — Бесова — Аманова в пространстве Лоренца с анизотропной нормой.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского — Бесова, колмогоровский поперечник.

G. Akishev. Estimates for Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov–Amanov classes in the Lorentz space.

The Lorentz space with anisotropic norm of periodic functions of several variables is considered. Estimate for the Kolmogorov widths of the Nikol'skii–Besov–Amanov classes in the Lorentz space with anisotropic norm are found.

Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, Kolmogorov width.

Введение

Пусть $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \ldots, m$.

Через $S_0(\mathbb{R}^m)$ обозначается класс всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций f на $\mathbb{R}^m$ таких, что для любого числа $y > 0$ мера Лебега множества $\{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \colon |f(\bar{x})| > y\}$ конечна; мера этого множества называется *функцией распределения* и обозначается $\lambda_f(y)$ (см., например, [1; 2]). Функции $f, g \in S_0(\mathbb{R}^m)$ называются *равноизмеримыми*, если их функций распределения равны.

Невозрастающей перестановкой функции $f \in S_0(\mathbb{R}^m)$ называется невозрастающая на полуоси $(0, +\infty)$ функция f^*, равноизмеримая с $|f|$; она определяется по следующей формуле (см., например, [1; 2]): $f^*(t) = \inf\{y > 0 \colon \lambda_f(y) < t\}$, $t > 0$.

Рассмотрим теперь повторные перестановки функции. Пусть $f \in S_0(\mathbb{R}^m)$. При фиксированных $x_2, \ldots, x_m$, рассматривая $|f(x_1, x_2, \ldots, x_m)|$ как функцию переменной x_1, можно определить ее невозрастающую перестановку $f^{*_1}(t_1, x_2, \ldots, x_m)$ по x_1. Теперь при фиксированных $t_1, x_3, \ldots, x_m$ по функции $f^{*_1}(t_1, x_2, x_3 \ldots, x_m)$ определяется ее невозрастающая перестановка $f^{*_1,*_2}(t_1, t_2, x_3, \ldots, x_m)$ по x_2. Далее, продолжая этот процесс при фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ по функции $f^{*_1,\ldots,*_{m-1}}(t_1, t_2, t_3 \ldots, t_{m-1}, x_m)$ определяется (см. [2; 3]) ее невозрастающая перестановка $f^{*_1,*_2,\ldots,*_{m-1},*_m}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ по x_m.

Через $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ 2π-периодических по каждой переменной, для которых конечна величина (см. [3])

$$\|f\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int\limits_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int\limits_0^{2\pi}\Big(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1, \ldots, t_m)\Big)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1} dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}} dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006) и частично гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

В случае $q_1 = \dots = q_m = \theta_1 = \dots = \theta_m = q$ пространство $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_q(I^m)$ (см. [4, гл. I, п. 1.1]). В дальнейшем $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ означает множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0$ при $j = 1,\dots,m$.

Функции $f \in L_1(I^m) = L(I^m)$ сопоставим ее ряд Фурье $\sum_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, где $\mathbb{Z}^m$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\,e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}, \quad \text{где} \quad \langle\bar{y},\bar{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j, \quad s_j = 1,2,\dots,$$

$$\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1,\dots,m\right\}.$$

Пусть l^m_p при $1 \le p \le \infty$ обозначает пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|\bar{x}\|_{l^m_p} = \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{при} \quad 1 \le p < +\infty, \quad \|\bar{x}\|_{l^m_\infty} = \max_{j=1,\dots,m} |x_j|.$$

Обозначим через U^m_p единичный шар в l^m_p.

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m} \in l_{\overline{p}}$, если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in\mathbb{Z}^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\dots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\dots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1,2,\dots,m$.

Через $C(p,q,r,y)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$.

Пространства функций с доминирующей смешанной производной $S^{\bar{r}}_p H$, $S^{\bar{r}}_{p,\theta} B$ определены соответственно С. М. Никольским [5] и Т. И. Амановым [6] в терминах смешанных модулей гладкости соответствующих смешанных производных (см. также [4; 7]).

П. И. Лизоркин и С. М. Никольский [8, теорема 5.3] исследовали декомпозиционное разложение элементов пространства $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta}B$ и доказали, что величина

$$\left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^\theta_p\right\}^{1/\theta}$$

является нормой пространства $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta}B$, эквивалентной исходной при $1 < p < +\infty$, $1 \le \theta \le +\infty$. Здесь $\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{p,\theta}B = \overset{\circ}{L}_p(I^m) \cap S^{\bar{r}}_{p,\theta}B$.

В анизотропном пространстве Лоренца $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$ рассмотрим аналогичное пространство. Через $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$ обозначим пространство всех функций $f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B} = \left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} < \infty,$$

где $\overline{p} = (p_1,\dots,p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1,\dots,\tau_m)$, $1 < p_j < \infty$, $1 \le \theta_j < \infty$, $1 \le \tau_j \le +\infty$, $r_j > 0$, $j = 1,\dots,m$. В этом пространстве рассмотрим (с сохранением обозначения) класс

$$\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) :\ \|f\|_{\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B} = \left\|\left\{2^{\langle\overline{s},\overline{r}\rangle}\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le 1\right\}.$$

Понятие поперечника как аппроксимативной характеристики подмножеств банахова пространства было введено А. Н. Колмогоровым [9].

Определение. Пусть банахово пространство X и центрально-симметричное подмножество $W \subset X$. M-поперечником по Колмогорову множества W называется величина

$$d_M(W, X) = \inf_P \sup_{f \in W} \|f - Pf\|_X,$$

где inf берется по всем действующим в X отображениям P на линейные подпространства размерности не более M.

В одномерном случае для класса Соболева W_p^r при условии $r > (1/p - 1/q)_+$ известна следующая оценка:

$$d_M(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} M^{-r}, & 1 \le q \le p \le \infty,\ r > 0, \\ M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q < 2,\ r > 1/p - 1/q, \\ M^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q \le \infty,\ r > 1/p, \\ M^{-r}, & 2 \le p \le q < \infty,\ r > \dfrac{1/p - 1/q}{1 - 2/q}. \end{cases}$$

При $p = q = 2$ точные значения $d_M(W_p^r, L_q)$ получены А. Н. Колмогоровым [9]; в случае $q = p = 2, r = 1$ порядок найден В. Рудиным [10], а при $p = 1, q = 2$ и $p = q = \infty$ — С. Б. Стечкиным [11], при $p = q = \infty$ точные значения определены В. М. Тихомировым [12], при $1 \le p = q < \infty$ порядки найдены С. Б. Бабаджановым и В. М. Тихомировым [13], при $p = q = 1$ и нечетном M точное значение установлено Ю. Н. Субботиным [14; 15], при $1 \le p \le q \le 2$ порядки найдены Р. С. Исмагиловым [16; 17], Е. Д. Глускиным [18] (случай $p = 1, 2 < q \le \infty$), Б. С. Кашиным [19] (случай $1 \le p \le q \le \infty,\ q \ge 2$), Ю. И. Маковозом [20] (при $1 \le q \le p$). Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости получены Б. С. Кашиным [21] и Е. Д. Куланиным [22].

Оценки колмогоровских поперечников классов гладких функций многих переменных установили К. И. Бабенко [23], Б. С. Митягин [24], С. А. Теляковский [25], Я. С. Бугров [26], Э. М. Галеев [27–29], В. Н. Темляков [30; 31], Динь Зунг [32], Э. С. Белинский [33; 34], А. С. Романюк [35–37], Ван Хэпин и Сунь Юншен [38], Д. Б. Базарханов [39] и др.

Для класса Бесова $S_{p,\theta}^r B$ А. С. Романюк [35] доказал следующую теорему.

Теорема A. *Пусть* $r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} < \ldots < r_m$, $1 \le \theta \le \infty$.

1. *Если* $2 \le p < q < \infty$ *и* $r_1 > \beta = (1/p - 1/q)/(1 - 2/q)$, *то*

$$d_M(S_{p,\theta}^r B, L_q) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

2. *Если* $1 < p \le 2 < q < \infty$ *и* $r_1 > 1/p$, *то*

$$d_M(S_{p,\theta}^r B, L_q) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Здесь и в дальнейшем $\log M$ — логарифм с основанием 2 от числа $M > 1$.

Для других соотношений между p и q оценки $d_M(S_{p,\theta}^r B, L_q)$ получены Э. М. Галеевым [29].

Цель настоящей статьи — найти оценки колмогоровского поперечника класса $\overset{\circ}{S}{}_{\bar{p},\bar{\theta},\bar{\tau}}^{\bar{r}} B$ в пространстве $L_{\bar{q},\bar{\theta}}^*(I^m)$.

1. Вспомогательные утверждения

Приведем некоторые дополнительные обозначения и вспомогательные утверждения.
Пусть $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m$ и $\Im(\rho(\bar{s}))$ — множество функций вида $f(\bar{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\bar{n}} e^{i\langle \bar{n},\bar{x}\rangle}$.

Лемма 1 [29, лемма Д]. *Пусть* $\bar{s} \in \mathbb{N}^m$, $f \in \Im(\rho(\bar{s}))$, $M_{\bar{s}} \in Z_+$, $M_{\bar{s}} \le 2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} = \prod_{j=1}^m 2^{s_j}$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m), \alpha_j = r_j + 1/q - 1/p$, $j = 1,\ldots,m$, $1 < p,q < +\infty$. *Тогда существуют линейное подпространство* $\mathbb{L}_{M_s} \subset \Im(\rho(\bar{s}))$ *размерности* $M_{\bar{s}}$ *и оператор* $P_{M_{\bar{s}}}\colon \Im(\rho(\bar{s})) \to \mathbb{L}_{M_s}$ *такой, что*

$$\|\delta_{\bar{s}}(f) - P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|_q \asymp d_{M_{\bar{s}}}\Big(U_p^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\Big) 2^{\langle \bar{s},-\bar{\alpha}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f^{(r)})\|_p.$$

Для вектора $\bar{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1,\ldots,m$, положим

$$Y^m(\overline{\gamma}, n) = \big\{\overline{s} = (s_1,\ldots,s_m) \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \bar{x},\bar{\gamma}\rangle \ge n\big\}$$

Лемма 2 (см. [40]). *Пусть даны число* $\alpha \in (0,+\infty)$ *и* $\overline{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = (\gamma_1',\ldots,\gamma_m')$, $\overline{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_m)$, $\theta_j \in [1,+\infty)$, $j = 1,\ldots,m$, $1 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le \cdots \le \gamma_m$, $1 = \gamma_j' = \gamma_j$, $j = 1,\ldots,\nu$, *и* $1 = \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu+1,\ldots,m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\Big\|\big\{2^{-\alpha\langle \overline{s},\overline{\gamma}\rangle}\big\}_{\overline{s}\in Y^m(\overline{\gamma}',n)}\Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

2. Основные результаты

В данном разделе докажем оценки поперечника по Колмогорову в пространстве $L_{\bar{p},\bar{q}}^*(I^m)$ класса Никольского — Бесова — Аманова $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_j < q_j \le 2$, $1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < \infty$, $1 \le \tau_j \le \infty$, $j = 1,\ldots m$, *и* $0 < r_1 + 1/q_1 - 1/p_1 = \cdots = r_\nu + 1/q_\nu - 1/p_\nu < r_{\nu+1} + 1/q_{\nu+1} - 1/p_{\nu+1} \le \cdots \le r_m + 1/q_m - 1/p_m$. *Тогда*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ и $\gamma_j = (r_j + 1/q_j - 1/p_j)/(r_1 + 1/q_1 - 1/p_1)$, $j = 1,\ldots,m$. Тогда из условия теоремы следует, что $1 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \le \cdots \le \gamma_m$. Выберем числа γ_j' такие, что $\gamma_j' = \gamma_j$ при $j = 1,\ldots,\nu$ и $\gamma_j' < \gamma_j$ для $j = \nu+1,\ldots,m$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^{\gamma'}(f,\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s},\bar{\gamma}'\rangle < n} \delta_{\bar{s}}(f,\bar{x})$$

ряда Фурье функции $f \in \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$ по ступенчатому гиперболическому кресту.

В [40] доказано, что

$$\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B} \|f - S_n^{\gamma'}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le C\,2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}, \quad \theta_j^{(2)} < \tau_j, \quad j = 1,\ldots,m,$$

$$\sup_{f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B} \|f - S_n^{\gamma'}(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}} \le C\,2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}, \quad \tau_j \le \theta_j^{(2)}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Выберем натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Тогда

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le \sup_{f\in \overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B} \|f - S^{\gamma'}_n(f)\|^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}$$

$$\le C\,2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)},$$

если $\theta_j^{(2)} < \tau_j,\ j=1,\dots,m$, и

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\,2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)},$$

если $\tau_j \le \theta_j^{(2)},\ j=1,\dots,m$. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $1<\theta_j^{(1)},\ \theta_j^{(2)}<\infty$, $1\le\tau_j\le\infty$, $j=1,\dots m$, *и* $0<r_1+1/q_1-1/p_1=\dots=r_\nu+1/q_\nu-1/p_\nu<r_{\nu+1}+1/q_{\nu+1}-1/p_{\nu+1}\le\dots\le r_m+1/q_m-1/p_m$.

1. *Если* $2\le p_j<q\le\theta_j^{(2)}<\infty,\ j=1,\dots,m,\ r_1>\beta=(1/p_1-1/q)/(1-2/q)$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B,\ \ L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

2. *Если* $1<p_j\le2<q\le\theta_j^{(2)},\ r_j>1/p_j,\ j=1,\dots,m$, *то*

$$d_M\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\big) \le C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}\right)}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $f\in\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B$. Так как $q\le\theta_j^{(2)},\ j=1,\dots,m$, то $L_q(I^m)\subset L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m)$ и $\|f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\le C\|f\|_q$.

Поскольку $2<q<\infty$, то $0<1-2/q<1$. Следовательно, $r_1>\beta=(1/p_1-1/q)(1-2/q)>1/p_1-1/q$. Поэтому из условия $0<r_1+1/q_1-1/p_1=\dots=r_\nu+1/q_\nu-1/p_\nu<r_{\nu+1}+1/q_{\nu+1}-1/p_{\nu+1}\le\dots\le r_m+1/q_m-1/p_m$ следует, что $r_j>1/p_j-1/q_j,\ j=1,\dots,m$. Следовательно, $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B\subset L_q(I^m)$ (см. [40]), т. е. $f\in L_q(I^m)$.

Как в [29, с. 660] рассмотрим оператор $P_M: L_q(I^m)\to\mathbb{L}_M$, действующий на функцию

$$f(\bar{x})=\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}) \quad \text{по формуле} \quad (P_Mf)(\bar{x})=\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f,\bar{x}),$$

где $P_{M_{\bar{s}}}$ и $\mathbb{L}_{M_{\bar{s}}}$ — соответственно операторы и подпространства из леммы 1, $\mathbb{L}_M=\bigcup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\mathbb{L}_{M_{\bar{s}}}$.

Положим $\rho_j=r_j+1/q-1/p_j,\ \gamma_j=\rho_j/\rho_1$. Тогда из условия теоремы нетрудно видеть, что $\gamma_1=\dots=\gamma_\nu<\gamma_{\nu+1}\le\dots\le\gamma_m$.

Известно, что существуют числа ρ_j' такие, что $\rho_j'=\rho_j=\rho_1$ для $j=1,\dots,\nu$ и $\rho_1<\rho_j'$ для $j=\nu+1,\dots,m,\ \ 1<\rho_{\nu+1}/\rho'_{\nu+1}<\dots<\rho_m/\rho'_m$. Положим $\gamma_j'=\rho_j'/\rho_1',\ \ j=1,\dots,m$. Тогда $\gamma_j'=\gamma_j$ для $j=1,\dots,\nu$ и $\gamma_j'<\gamma_j$ для $j=\nu+1,\dots,m$.

Для натурального числа M выберем число $n\in\mathbb{N}$ такое, что $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, и для каждого $\bar{s}\in\mathbb{Z}^m_+$ поставим в соответствие число

$$M_{\bar{s}}=\begin{cases} 2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}, & \text{если } \langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle\le n,\\ 2^{n(1+\varepsilon\rho_1)-\varepsilon\langle\bar{s},\bar{\rho}\rangle}, & \text{если } \langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n,\end{cases}$$

где положительное число ε будет выбрано в дальнейшем и $[a]$ — целая часть числа a. Тогда, пользуясь леммами В и Г из [30], получим $\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} M_{\bar{s}} \leq C\,2^n n^{\nu-1} \leq CM$. Таким образом, размерность подпространства $\mathbb{L}_M$ имеет порядок $2^n n^{\nu-1}$.

Применяя неравенство $\|f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \leq C\|f\|_q$ к функции $f-P_M f \in L_q(I^m)$ и пользуясь теоремой Литтльвуда — Пэли в пространстве Лебега $L_q(I^m)$ (см. [4, с. 54]), будем иметь

$$\|f-P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \leq C\|f-P_M f\|_q$$

$$\leq C\left\|\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}|\delta_{\bar{s}}(f)-P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)|^2\right)^{1/2}\right\|_q \leq C\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\|\delta_{\bar{s}}(f)-P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|_q^2\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Выберем число $p_0 > \max_{j=1,\ldots,m} p_j$. Тогда по лемме 1, учитывая неравенство Бернштейна для тригонометрических полиномов (см. [4, с. 98]), получим

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)-P_{M_{\bar{s}}}\delta_{\bar{s}}(f)\|_q \asymp d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{q}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0}. \tag{2.2}$$

Так как $p_j < p_0,\ j=1,\ldots,m$, то в силу неравенства разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов (см. [41; 42]) имеем

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0} \leq C\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p_0}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}. \tag{2.3}$$

Из неравенств (2.1)–(2.3) следует, что

$$\|f-P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \leq C\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q}\right)}\|\delta_{\bar{s}}(f^{(r)})\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right)^2 d^2_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Если $\tau_j \leq 2,\ j=1,\ldots,m$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [4, с. 125]), из (2.4) получим

$$\|f-P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \leq C\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{\bar{\tau}}. \tag{2.5}$$

Если $2 < \tau_j < +\infty,\ j=1,\ldots,m$, то, применяя неравенство Гельдера (при $\alpha_j = \tau_j/2 > 1$, $j=1,\ldots,m,$) из (2.4), имеем

$$\|f-P_M f\|^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \leq C\left\|\left\{2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{\bar{\tau}}$$

$$\times\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\right\}_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}, \tag{2.6}$$

где $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m),\ \ \varepsilon_j = 2\tau_j/(\tau_j-2),\ j=1,\ldots,m.$

По определению поперечника Колмогорова из (2.5) и (2.6) следует, что

$$d_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\right) \leq C\sup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\right) \tag{2.7}$$

в случае $1 < \tau_j \leq 2,\ j=1,\ldots,m$, и

$$d_M\left(\overset{\circ}{S}{}^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\bar{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\right) \leq C\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)} d_{M_{\bar{s}}}\left(B_{p_0}^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}}\right)\right\}_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}, \tag{2.8}$$

если $2 < \tau_j,\ j = 1,\ldots,m$, где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m),\ \varepsilon_j = 2\tau_j/(\tau_j - 2),\ j = 1,\ldots,m$.

Подставляя в формулы (2.7) и (2.8) значение поперечника $d_{M_{\bar{s}}}\big(B_{p_0}^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}, l_q^{2^{\langle \bar{s},\bar{1}\rangle}}\big) = 0$ для $\langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle \le n$ и оценки конечномерных поперечников [43; 44]

$$d_{n_{\bar{s}}}(B_{p_0}^m, l_q^m) \asymp \min\big\{1, m^{\frac{2\beta}{q}} n^{-\beta}\big\}, \quad m > n,$$

для $\langle \bar{s}, \bar{\gamma}'\rangle > n$ получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C \sup_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_j}\right)} 2^{\frac{2\beta}{q}\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} M_{\bar{s}}^{-\beta} \tag{2.9}$$

в случае $1 \le \tau_j \le 2,\ j = 1,\ldots,m$, и

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_j}\right)} 2^{\frac{2\beta}{q}\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} M_{\bar{s}}^{-\beta}\right\}_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n}\right\|_{\bar{\varepsilon}} \tag{2.10}$$

в случае $2 < \tau_j \le \infty,\ \ j = 1,\ldots,m$.

Пусть $2 < \tau_j \le \infty,\ j = 1,\ldots,m$. Тогда, подставляя значения чисел $M_{\bar{s}}$ из (2.10), получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_j}\right)} 2^{\frac{2\beta}{q}\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} 2^{\varepsilon\beta\langle \bar{s},\bar{\rho}\rangle}\right\}_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n}\right\|_{\bar{\varepsilon}}. \tag{2.11}$$

Так как $\rho_j = r_j + 1/q - 1/p_j$ и $\gamma_j = \rho_j/\rho_1,\ j = 1,\ldots,m$, то, учитывая, что $1 \le \gamma_j$ и $\beta > 0$, будем иметь

$$\prod_{j=1}^m 2^{-s_j\left(r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_j}\right)} 2^{\frac{2\beta}{q}\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} 2^{\varepsilon\beta\langle \bar{s},\bar{\rho}\rangle} = 2^{-\rho_1\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} 2^{\frac{2\beta}{q}\langle \bar{s},\bar{1}\rangle} 2^{\varepsilon\beta\rho_1\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle} \le 2^{-\left(\rho_1 - \frac{2\beta}{q} - \varepsilon\beta\rho_1\right)\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle}. \tag{2.12}$$

Учитывая соотношение (2.12), из (2.11) выводим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\left\|\left\{2^{-\left(\rho_1 - \frac{2\beta}{q} - \varepsilon\beta\rho_1\right)\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\right\}_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n}\right\|_{\bar{\varepsilon}} \tag{2.13}$$

в случае $2 < \tau_j \le \infty,\ j = 1,\ldots,m$.

Так как $\beta = \dfrac{1/p_1 - 1/q}{1 - 2/q}$, нетрудно убедиться, что $\rho_1 - 2\beta/q = r_1 - \beta$. Поэтому неравенство (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \le C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\left\|\left\{2^{-(r_1 - \beta - \varepsilon\beta\rho_1)\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\right\}_{\langle \bar{s},\gamma'\rangle > n}\right\|_{\bar{\varepsilon}} \tag{2.14}$$

в случае $2 < \tau_j \le \infty,\ j = 1,\ldots,m$.

По условию теоремы $r_1 > \beta$ и $2 < q < \infty$. Поэтому $r_1 > 1/p_1 - 1/q$. Следовательно,

$$\frac{r_1 - \beta}{\beta\Big(r_1 + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p_1}\Big)} > 0.$$

Выберем число ε такое, что

$$0 < \varepsilon < \frac{r_1 - \beta}{\beta\Big(r_1 + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p_1}\Big)}.$$

Тогда

$$r_1 - \beta - \varepsilon\beta\Big(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}\Big) = r_1 - \beta - \varepsilon\beta\rho_1 > 0.$$

Поэтому, применяя лемму 2, получим

$$\left\|\left\{2^{-\left(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1\right)\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}\right\}_{\langle\bar{s},\gamma'\rangle>n}\right\|_{\bar{\varepsilon}} \leq C2^{-n(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)}n^{\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\varepsilon_j}}. \tag{2.15}$$

Следовательно, учитывая, что $1/\varepsilon_j = (\tau_j-2)/2\tau_j,\ j=1,\ldots,m$, и $2^n n^{\nu-1} \asymp M$, из неравенств (2.14) и (2.15) выводим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \leq C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}2^{-n(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)}n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)}$$

$$\leq C2^{-nr_1}n^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \leq C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)}$$

в случае $2<\tau_j\leq\infty$, $2\leq p_j<q<\infty$, $j=1,\ldots,m$, $r_1>\beta$.

Пусть $1\leq\tau_j\leq 2,\ j=1,\ldots,m$. Тогда, подставляя значения $M_{\bar{s}}$ в (2.9), имеем

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \leq C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\sup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j\left(r_j+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_j}\right)}2^{\frac{2\beta}{q}\langle\bar{s},\bar{1}\rangle}2^{\varepsilon\beta\langle\bar{s},\bar{\rho}\rangle}$$

$$\leq C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\sup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n}2^{-\left(\rho_1-\frac{2\beta}{q}-\varepsilon\beta\rho_1\right)\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle} = C2^{-n\beta(1+\varepsilon\rho_1)}\sup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}'\rangle>n}2^{-(r_1-\beta-\varepsilon\beta\rho_1)\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle}$$

$$\leq C2^{-nr_1} \leq C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}.$$

Таким образом,

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \leq C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}$$

в случае $1\leq\tau_j\leq 2,\ j=1,\ldots,m$, $2\leq p_j<q<\infty$, $j=1,\ldots,m$.

Докажем второе утверждение теоремы 2. Пусть $1<p_j\leq 2<q<\infty,\ j=1,\ldots m$, $r_1>1/p_1$. Так как $1<p_j\leq 2,\ j=1,\ldots m$, то $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B \subset \overset{\circ}{S}{}^{\overline{\rho}}_{2,\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B$, где $\bar{\rho}=(\rho_1,\ldots,\rho_m),\ \rho_j=r_j+1/2-1/p_j,\ j=1,\ldots,m$. С учетом условия теоремы $r_1>1/p_1$ имеем $\rho_1>\beta=(1/2-1/q)/(1-2/q)$.

Следовательно, в силу доказанного п. 1 при $p_j=2,\ j=1,\ldots,m$, и с заменой r_j на ρ_j имеем

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \leq d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{2,\overline{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, L^*_{q,\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \leq C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}}(\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau_j}\right)}$$

в случае $1\leq\tau_j\leq\infty,\ j=1,\ldots,m$. Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $1<\theta_j^{(1)},\ \theta_j^{(2)}<\infty$, $j=1,\ldots m$, $1\leq\tau\leq\infty$, *и* $0<r_1=\cdots=r_\nu<r_{\nu+1}\leq\cdots\leq r_m$, $r_j>1/p_j,\ j=1,\ldots,m$. *Тогда если* $2\leq q_j<p_j<\infty,\ j=1,\ldots,m$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau}B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \geq C\Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1}(\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем число $p_0>\max_{j=1,\ldots,m}p_j$. Тогда $L_{p_0}(I^m)\subset L^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}(I^m)$.

Пользуясь свойством нормы, неравенством разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов (см. [41;42]) и неравенством Гельдера $(1/\tau+1/\tau'=1)$, нетрудно убедиться, что

$$\|f\|_{p_0} \leq \sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{p_0})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}}$$

$$\leq \Big\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\tau}(\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)}})^{\tau}\Big\}^{1/\tau}\Big\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p_0})\tau'}\Big\}^{1/\tau'}.$$

Так как $r_j > 1/p_j > 1/p_j - 1/p_0,\ j = 1, \ldots, m$, то отсюда следует, что $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B \subset L_{p_0}(I^m)$.

С другой стороны, так как $p_0 > \max_{j=1,\ldots,m} p_j$, то $\|\delta_{\bar{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\bar{\theta}^{(1)}} \le C\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p_0}$. Поэтому $\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B \subset \overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B$. Следовательно, $d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big)$. Так как по условию теоремы $q_j \ge 2,\ j = 1, \ldots, m$, то отсюда получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L_2\Big). \tag{2.16}$$

Э. М. Галеевым [27] доказана оценка

$$d_M\big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{p_0,\tau} B, L_2\big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}. \tag{2.17}$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Пусть* $1 < \theta_j^{(1)},\ \theta_j^{(2)} < \infty,\ j = 1, \ldots m,\ 1 \le \tau \le \infty$, *и* $0 < r_1 = \cdots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \cdots \le r_m,\ r_j > 1/p_j,\ j = 1, \ldots, m$. *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если* $2 \le p_j < q_j < \infty$, $r_j > 1/p_j,\ j = 1, \ldots, m$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

2. *Если* $1 < p_j \le 2 < q_j < \infty$, $r_j > 1/p_j,\ j = 1, \ldots, m$, *и* $p_1 > p_j,\ j = 2, \ldots, m$, *то*

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $2 \le p_j < q_j < \infty,\ j = 1, \ldots m$. Тогда, учитывая, что $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m) \subset L_2(I^m)$, по теореме 3 (при $q_j = \theta_j^{(2)} = 2,\ j = 1, \ldots, m$) получим

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L_2\Big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Докажем второе утверждение. Так как $2 < q_j < \infty,\ j = 1, \ldots m$, то $L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}(I^m) \subset L_2(I^m)$ Поэтому

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L_2\Big). \tag{2.18}$$

Из условия $p_1 > p_j,\ j = 2, \ldots, m$, следует, что $S^{\overline{r}}_{p_1,\tau} B \subset S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B$. Тогда

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L_2\Big) \ge d_M\big(S^{\overline{r}}_{p_1,\tau} B, L_2\big). \tag{2.19}$$

Из неравенств (2.18) и (2.19) следует, что $d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge d_M\big(S^{\overline{r}}_{p_1,\tau} B, L_2\big)$. Поэтому, пользуясь п. d) теоремы [29, с. 659], имеем

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}^{(1)},\tau} B, L^*_{\bar{q},\bar{\theta}^{(2)}}\Big) \ge C\Big(\frac{\log^{\nu-1} M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{\sum_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Теорема 4 доказана. □

З а м е ч а н и е. Из пп. 2 теорем 2, 4 вытекает, что при $\tau_1 = \ldots \tau_m = \tau$ и $q_1 = \cdots = q_m = q \le \theta_j^{(2)},\ j = 1,\ldots,m$, верна следующая оценка при $p_1 > p_j,\ j = 1,\ldots,m,$:

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar\theta^{(1)},\tau}B, L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_1}} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}.$$

Из пп. 1 теорем 2, 4 следует, что

$$d_M\Big(\overset{\circ}{S}{}^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar\theta^{(1)},\tau}B, L^*_{q,\bar\theta^{(2)}}\Big) \asymp \Big(\frac{\log^{\nu-1}M}{M}\Big)^{r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\tau}\right)_+}$$

при $\tau_1 = \ldots = \tau_m = \tau$ и $q_1 = \cdots = q_m = q \le \theta_j^{(2)},\ j = 1,\ldots,m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.
2. **Коляда В.И.** Вложения дробных пространств Соболева и оценки преобразований Фурье // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 7. С. 51–72.
3. **Blozinski A.P.** Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. Vol. 263, no. 1. P. 149–167.
4. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
5. **Никольский С.М.** Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 6. С. 1342–1364.
6. **Аманов Т.И.** Теоремы представления и вложения для функциональных пространств SB// Тр. МИАН. 1965. Т. 77. С. 5–34.
7. **Аманов Т.И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата: Наука, 1976. 224 с.
8. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
9. **Kolmogoroff A.** Uber die beste Annaherung von funktionen einer gegeben Funktionenklasse // Ann. Math. 1936. Vol. 37. P. 107–111.
10. **Rudin W.** L_2-approximation by partial sums of orthogonal developments // Duke Math. J. 1952. Vol. 19. P. 1–4.
11. **Стечкин С.Б.** О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9, № 1. С. 133–134.
12. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
13. **Бабаджанов С.Б., Тихомиров В.М.** О поперечниках одного класса в пространстве L^p // Изв. АН Узб. ССР. Сер. физико-математическая. 1967. № 2. С. 24–30.
14. **Субботин Ю.Н.** Поперечник класса W^rL в $L(0,2\pi)$ и приближение сплайн функциями // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 1. С. 43–52.
15. **Субботин Ю.Н.** Приближение сплайн-функциями и оценки ее поперечников // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 35–60.
16. **Исмагилов Р.С.** Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функцион. анализ и его приложения. 1968. Т. 2, №2. С. 32–39.
17. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–173.
18. **Глускин Е.Д.** Об одной задаче о поперечниках // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, № 3. С. 527–530.
19. **Кашин Б.С.** Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.
20. **Makovoz Y.** On trigonometric n-widths and their generalization // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 41, no. 4. P. 361–366.
21. **Кашин Б.С.** О поперечниках классов Соболева малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1981. № 5. С. 50–54.

22. **Куланин Е.Д.** Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1983. № 2. С. 24–30.
23. **Бабенко К.И.** О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. С. 982–985.
24. **Митягин Б.С.** Приближение функций в пространствах L^p и C на торе // Мат. сб. 1962. Т. 58, № 4. С. 397–414.
25. **Теляковский С.А.** Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. 1964. Т. 63, № 3. С. 426–444.
26. **Бугров Я.С.** Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. сб. 1964. Т. 64, № 3. С. 410-418.
27. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $W_p^{\bar{r}}$ и $H_p^{\bar{r}}$ в пространстве L_q // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1985. Т. 49, № 3. С. 916–934.
28. **Галеев Э.М.** Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, № 2. С. 418–430.
29. **Галеев Э.М.** Поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 656–665.
30. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
31. **Темляков В.Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
32. **Динь Зунг.** Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 251–271.
33. **Белинский Э.С.** Приближение “плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих веществ. переменных. Ярославль, 1988. С. 16–33.
34. **Белинский Э.С.** Оценки для колмогоровских поперечников классов функций с условиями на смешанную разность в равномерной метрике // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 5. С. 147–149.
35. **Романюк А.С.** О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных // Укр. мат. журн. 1993. Т. 45, № 5. С. 663–675.
36. **Романюк А.С.** Колмогоровские поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ в метрике L_∞ // Укр. мат. вестник. 2005. № 2. С. 201–218.
37. **Романюк А.С.** Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 1. С. 71–96.
38. **Heping Wang, Yongsheng Sun.** Kolmogorov widths between the anisotropic space and the space of functions with mixed smoothness // J. Approx. Theory. 2004. Vol. 126, no. 1. P. 52–59.
39. **Базарханов Д.Б.** Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского — Бесова обобщенной смешанной гладкости // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 11–14.
40. **Akishev G.** On approximation of function classes in Lorentz spaces with anisotropic norm // Anal. Theory Appl. 2013. Vol. 29, no. 4. P. 358–372.
41. **Акишев Г.** Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Материалы научн.-практ. конф. “Уалихановские чтения – 9”. Кокшетау, 2004. С. 3–6.
42. **Нурсултанов Е.Д.** Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 1–18.
43. **Кашин Б.С.** О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1980. Т. 15, № 5. С. 379–394.
44. **Глускин Е.Д.** Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. 1983. Т. 120, № 2. С. 180–189.

Акишев Габдолла Поступила 10.08.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ПО ЕЕ ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ[1]

Р. Р. Акопян

Исследуется задача оптимального восстановления аналитической в двусвязной области функции по ее значениям на одной из двух компонент границы области, заданным с погрешностью. Получен метод оптимального восстановления в случае, когда погрешность равна целой степени модуля двусвязной области.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, аналитические функции, двусвязная область.

R. R. Akopyan. Optimal recovery of an analytic function in a doubly connected domain from its approximately given boundary values.

We study the problem of optimal recovery of a function analytic in a doubly connected domain from its approximately given values on one of the two components of the boundary. An optimal recovery method is obtained in the case when the error is an integer power of the modulus of the domain.

Keywords: optimal recovery, analytic functions, doubly connected domain.

1. Задача оптимального восстановления аналитической функции

Пусть G — двусвязная ограниченная область комплексной плоскости с границей Γ, состоящей из двух замкнутых жордановых спрямляемых кривых Γ_1 и Γ_2. Рассмотрим пространство Харди $H(G)$ функций, аналитических и ограниченных на области G с нормой

$$\|f\|_{H(G)} = \sup\{|f(z)|\colon z \in G\}.$$

Известно (см., например, [18, гл. 3, § 1, п. 1.7]), что для произвольной функции f из пространства $H(G)$ почти всюду на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ существуют некасательные предельные граничные значения, составляющие функции, которые также будем обозначать f, из пространств $L^\infty(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$; при этом имеет место равенство

$$\|f\|_{H(G)} = \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

В пространстве $H(G)$ выделим класс Q функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma_2)} \le 1.$$

Обозначим через Υ_z функционал, определенный на подпространстве $L^\infty(\Gamma_1)$ функций, являющихся граничными значениями на Γ_1 функций пространства $H(G)$, и ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции на Γ_1 ее значение в точке z области G, т. е. задаваемый равенством

$$\Upsilon_z f = f(z).$$

На классе функций Q рассмотрим задачу оптимального восстановления значения аналитической функции в конкретной точке z области. Пусть для неизвестной функции f из класса Q

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

задана функция $q \in L^\infty(\Gamma_1)$ такая, что $\|f - q\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью δ на части границы — кривой Γ_1. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q значение $f(z)$. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{O}$ — множество всех возможных, или $\mathcal{L}$ — линейных, функционалов на $L^\infty(\Gamma_1)$. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ определим величину погрешности метода формулой

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{|f(z) - Tq|\colon f \in Q,\ q \in L^\infty(\Gamma_1),\ \|f - q\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le \delta\right\}. \tag{1.1}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.2}$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции в точке z (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала Υ_z) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на Γ_1, заданным с ошибкой δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (1.2) достигается нижняя грань.

Задача (1.2) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности, неточной) информации. Общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [6–9; 15; 19]. Результатам, связанным с задачами оптимального восстановления на классах аналитических функций, посвящена монография [19].

Функцию вещественного переменного $\delta \in [0,\infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon_z, Q) = \sup\left\{|f(z)|\colon f \in Q,\ \|f\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \le \delta\right\}, \tag{1.3}$$

называют модулем непрерывности функционала Υ_z на классе Q. Интерес представляет как значение величины $\omega(\delta)$, так и экстремальная функция, на которой в (1.3) достигается верхняя грань.

Известно (см. [7; 9; 10; 14; 19] и приведенную там библиографию), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе (каковым, в частности, является класс Q) с помощью множества $\mathcal{O}$ всех возможных функционалов существует наилучший линейный функционал и сама величина уклонения равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала. Таким образом справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta).$$

В работе [3] изучались несколько взаимосвязанных экстремальных задач на классе аналитических в кольце функций. Одна из них — задача оптимального восстановления аналитической в кольце функции по заданным с известной погрешностью $\delta > 0$ значениям функции на одной из граничных окружностей. В частности, было получено решение задачи (1.2) в случае кольца для сходящейся к нулю последовательности значений δ. Этот результат будет сформулирован в теореме B ниже. В работе [3] существенно использовались подходы из статьи Л. В. Тайкова [21], а также результаты из [2], где на классе функций, аналитических в полосе, аналогичная задача была решена автором при любом значении погрешности $\delta \ge 0$. Недавно автор получил [4; 5] решение задачи оптимального восстановления аналитической функции в односвязной области по ее значениям на части границы, заданным с погрешностью $\delta \ge 0$.

Настоящая работа посвящена исследованию задачи (1.2). Будет выписано значение величины оптимального восстановления при всех $\delta \ge 0$ и получен оптимальный метод восстановления в случае, когда δ является целой степенью модуля двусвязной области. При исследовании оптимальных методов будут использованы подходы, давшие полное решение задачи в случае односвязных областей.

Для имеющего положительную меру подмножества γ границы Γ метод восстановления функции $f \in H(G)$ по ее (точным) граничным значениям на γ дает формула Карлемана — Голузина — Крылова [12] (см. также [1])

$$\forall z \in G \quad f(z) = \lim_{\sigma \to -\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \Big(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} \Big)^{\sigma} d\zeta,$$

где φ — произвольная функция из $H(G)$, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\zeta)| = 1, \quad \zeta \in \Gamma \setminus \gamma; \quad |\varphi(z)| > 1, \quad z \in G.$$

В случае, когда граничные значения функции на γ заданы с погрешностью, задача восстановления значения в точке z (аналитического продолжения с части границы области) является некорректной. При определенных условиях на множество G, его границу и множество γ эта задача исследовалась М. М. Лаврентьевым [13, гл. 2, § 1, п. 4–5] (см. также [1, гл. 1, § 2]). Предложенные методы регуляризации имеют в качестве ядра введенные и названные им функции Карлемана, являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. Примером такого регуляризующего метода является конструкция, основанная на формуле Карлемана — Голузина — Крылова. Наша цель — построение наилучшего (оптимального) метода.

2. Случай кольца

В случае, когда область G является кольцом, не ограничивая общности, можно считать, что это есть кольцо $K_{r,1} = \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z| < 1\},\ 0 < r < 1$, с центром в начале координат, внутренним радиусом, равным r, и внешним — единице, $\Gamma_1 = \{\zeta \colon |\zeta| = r\}$, Γ_2 есть единичная окружность, и $z > 0$.

Модуль непрерывности (1.3) для кольца $K_{r,1}$ известен. Следствием хорошо известной теоремы Адамара о трех кругах (см., например, [17, отд. 3, гл. 6, § 3]) является неравенство

$$\omega(\delta) \le \delta^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\ln z}{\ln r}.$$

При этом неравенство обращается в равенство только в точках $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, в которых $\omega(\delta_n) = \delta_n^{\alpha} = z^n$. Для произвольного значения $\delta > 0$ величину модуля непрерывности можно получить из результата Робинсона (1943) [20] (см. также [11, гл. 11, § 4]).

Теорема A. *Пусть $G = K_{r,1}$, $\Gamma_1 = \{\zeta \colon |\zeta| = r\}$, точка z принадлежит отрезку $[r,1]$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ экстремальной функцией, на которой в* (1.3) *достигается верхняя грань, является функция*

$$f[r,\delta](z) = z^n \, \frac{\Theta\left(z\, r^n\, \delta^{-1},\, r\right)}{\Theta\left(z\, r^{-n}\, \delta,\, r\right)}, \quad r^n \le \delta < r^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.4}$$

где

$$\Theta(\zeta, r) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + r^{2k-1}\zeta)(1 + r^{2k-1}\zeta^{-1}),$$

отображающая кольцо $K_{r,1}$ на единичный круг с разрезом по дуге окружности с центром в нуле, симметричной относительно вещественной оси и пересекающейся с ней в точке δ. При этом все экстремальные функции имеют вид $\varepsilon f[r,\delta]$, $|\varepsilon| = 1$.

В соответствии с этой теоремой для величины модуля непрерывности (1.3) справедливо равенство

$$\omega(\delta) = f[r,\delta](z).$$

Отметим, что функция ω переменной $\delta \in [0, +\infty)$ непрерывная, выпуклая вверх и во всех точках, кроме точек $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, дифференцируемая.

Именно при $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, в работе [3] получено решение задачи (1.2). Сформулируем этот результат. Рассмотрим функционал $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n[r, \rho]$, $0 < r < \rho < 1$, на $L^\infty(\Gamma_1)$, определяемый равенством

$$\mathcal{T}_n q = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_0^{2\pi} \Lambda(t) e^{-int}\, \psi(t)\, dt, \quad \psi(t) = q(re^{it}), \tag{2.5}$$

в котором функция Λ есть сумма ряда

$$\Lambda(t) = \lambda_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \cos kt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{|k|}\, e^{ikt}, \tag{2.6}$$

со следующими коэффициентами:

$$\lambda_0 = \frac{\ln \rho}{\ln r}, \quad \lambda_k = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \frac{1 - \rho^{2k}}{1 - r^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема B. *Пусть* $G = K_{r,1}$, $\Gamma_1 = \{\zeta \colon |\zeta| = r\}$, *точка* z *принадлежит интервалу* $(r, 1)$. *Для величины* (1.2) *в случае* $\delta = \delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$, *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \delta_n^\alpha = z^n.$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (1.2) *является линейный функционал* $\mathcal{T}_n[r, z]$, *определенный равенствами* (2.5), (2.6).

3. Общий случай двусвязной области

Воспользуемся хорошо известным фактом геометрической теории функций комплексного переменного [11, гл. 5, § 1]. Для двусвязной области G существует и единственно число $r = r(G)$, $0 < r < 1$, называемое модулем двусвязной области, такое, что существует конформное отображение G на кольцо $K_{r,1}$. Для области G и фиксированной точки $z \in G$ обозначим через g однолистную функцию, реализующую отображение области G на кольцо $K_{r,1}$, при этом переводящую компоненту Γ_2 границы G на единичную окружность и точку z в некоторую точку промежутка $(r, 1)$.

Определим функцию $F[G, \delta, z]$ как суперпозицию функций g и (2.4), т. е. определяемую равенством

$$F[G, \delta, z](\zeta) = f[r, \delta]\,(g(\zeta))\,. \tag{3.7}$$

Ясно, что введенная функция $F[G, \delta, z]$ принадлежит классу Q.

Приведенные выше факты и несложные рассуждения приводят к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для произвольного* $\delta \geq 0$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = F[G, \delta, z](z). \tag{3.8}$$

При этом все экстремальные функции имеют вид $\varepsilon F[G, \delta, z]$, $|\varepsilon| = 1$.

Особыми точками функции ω (точками, в которых функция не дифференцируема) являются точки δ_n, равные целым степеням модуля области G, т.е. $\delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае функция (2.4) имеет вид $f[r, r^n](\xi) = \xi^n$, и, следовательно, для экстремальной функции (3.7) справедливо равенство

$$F[G, r^n, z](\zeta) = g^n(\zeta). \tag{3.9}$$

Рассмотрим функционал T_n на $L^\infty(\Gamma_1)$, определяемый равенством

$$T_n q = \int\limits_{\Gamma_1} P_G(\zeta, z)\Big(\frac{g(z)}{g(\zeta)}\Big)^n q(\zeta)\, ds, \tag{3.10}$$

где $P_G(\cdot, z)$ — ядро Пуассона области G для точки z.

Введенный функционал T_n и функционал $\mathcal{T}_n$, определенный равенствами (2.5), (2.6) при $\rho = g(z)$, взаимосвязаны. А именно, имеет место соотношение

$$T_n q = \mathcal{T}_n \psi, \quad \psi(t) = q(\zeta), \quad g(\zeta) = re^{it}.$$

Теорема 2. *Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ и $\delta_n = r^n$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \omega(\delta_n) = g^n(z).$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод T_n, задаваемый равенством (3.10).

Доказательство теоремы 2 можно получить сведением задачи (1.2) для области G к случаю, когда область является кольцом $K_{r,1}$. Приведем здесь прямое доказательство. Используя линейность функционала T_n и применяя формулу Пуассона к аналитической в области G функции $f(\zeta)g^{-n}(\zeta)$, получим соотношения

$$f(z) - T_n q = f(z) - T_n f + T_n(f - q)$$
$$= \int\limits_{\Gamma_2} P_G(\zeta, z)\left(\frac{g(z)}{g(\zeta)}\right)^n f(\zeta)\, ds + \int\limits_{\Gamma_1} P_G(\zeta, z)\left(\frac{g(z)}{g(\zeta)}\right)^n (f(\zeta) - q(\zeta))\, ds.$$

Отсюда с учетом положительности ядра Пуассона и отображения, задаваемого функцией g, следует оценка

$$|f(z) - T_n q| \le g^n(z)\Bigg[\int\limits_{\Gamma_2} P_G(\zeta, z)\, |f(\zeta)|\, ds + r^{-n}\int\limits_{\Gamma_1} P_G(\zeta, z)\, |f(\zeta) - q(\zeta)|\, ds\Bigg].$$

Тогда при $\delta = r^n$ для уклонения (1.1) функционала T_n справедливо неравенство

$$\mathcal{U}(T_n, \delta) \le g^n(z)\int\limits_{\Gamma} P_G(\zeta, z)\, ds = g^n(z). \tag{3.11}$$

Теперь из равенств (3.8), (3.9) и неравенства (3.11) следует утверждение теоремы 2.

Замечание. Обобщением теоремы Адамара (для широкого круга областей) является результат Ф. и Р. Неванлинн [16] (см. также [11, гл. 8, § 4, теорема 1]), из которого, в частности, для модуля непрерывности (1.3) следует оценка сверху

$$\omega(\delta) \le \delta^\alpha, \tag{3.12}$$

где величина α является гармонической мерой Γ_1 относительно множества G и точки z (см., например, [11, гл. 8, § 4]). В рассматриваемом в данной статье случае известны явные представления: для величины $\omega(\delta)$ — равенство (3.8) и для гармонической меры — соотношение $\alpha = \ln g(z)/\ln r$. Неравенство (3.12) обращается в равенство только при $\delta = \delta_n = r^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что к настоящему моменту известен оптимальный метод восстановления аналитической функции по граничным значениям, заданным с погрешностью на части границы, ([2–5] и теорема 2), только в случаях, когда неравенство (3.12) обращается в равенство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзенберг Л.А.** Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. Новосибирск: Наука, 1990. 248 с.
2. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.
3. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 3–13.
4. **Акопян Р.Р.** Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 17-й междунар. Сарат. зимней шк. Саратов: Научная книга, 2014. С. 17–19.
5. **Акопян Р.Р.** Оптимальный метод продолжения аналитической функции с части границы области. Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвященной памяти В. К. Иванова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 22–24.
6. **Арестов В.В.** О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
7. **Арестов В.В.** Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН. М.: Наука, 1989. Vol. 189. С. 3–20.
8. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Сер. математическая. 1995. № 11. С. 42–68.
9. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
10. **Габушин В.Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 5. С. 551–562.
11. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
12. **Голузин Г.М., Крылов В.И.** Обобщенная формула Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
13. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
14. **Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.** Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Vol. 50, № 6. С. 85–93.
15. **Micchelli Ch.A., Rivlin Th.J.** A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory: Proc. Internat. Sympos. (Freudenstadt, 1976). N.Y., etc.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
16. **Nevanlinna F., Nevanlinna R.** Über die Eigenschaften einer analyticchen Funktionen in der Umgeburg einer singularen Stille oder Linie // Acta Soc. Sci. Fenn. 1922. Vol. 50, no. 5. P. 1–46.
17. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 398 с.
18. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 336 с.
19. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ. Inc., 2000. 229 p.
20. **Robinson R.M.** Analytic functions in circular rings // Duke Math. J. 1943. Vol. 10, no. 2. P. 341–354.
21. **Тайков Л.В.** Аналитическое продолжение функций с ошибкой // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 61–64.

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Озерский технологический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

Поступила 15.02.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.626

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОЛОГИИ БЫСТРОГО АВТОМАТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

А. Ф. Албу, В. И. Зубов

В работе рассматривается эффективный метод решения задач оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. Сформулировано и обосновано утверждение о том, что машинное время, требуемое для определения компонент градиента целевой функции с помощью этого метода, не превышает времени, требуемого для вычисления двух значений самой функции.

Ключевые слова: оптимальное управление, градиент, быстрое автоматическое дифференцирование, сопряженная задача, задача Стефана.

A. F. Albu, V. I. Zubov. On the efficiency of solving optimal control problems by means of Fast Automatic Differentiation technique.

A efficient method is introduced for solving the problems of optimal control of thermal processes with phase transitions. The following statement is formulated and proved: the time of computing the components of the gradient of the objective function by means of the proposed method does not exceed the time of computing two values of the function.

Keywords: optimal control, gradient, fast automatic differentiation, adjoint problem, Stefan problem.

Введение

Хорошо известно, что распространение тепла в различных средах оказывает большое влияние на характер протекания многих важных для практики процессов. С математической точки зрения распространение тепла описывается краевыми задачами для уравнения теплопроводности. Найти решение этих краевых задач в явном виде, как правило, не удается. Поэтому был разработан класс численных методов решения краевых задач для уравнения теплопроводности.

Выдвигаемые практикой задачи заключаются не только в описании и изучении процессов распространения тепла, но и в оптимальном управлении такими процессами. Это привело к созданию теории оптимального управления тепловыми процессами. Здесь также достигнуты значительные успехи, несмотря на то что задачи оптимального управления на порядок сложнее “прямых” задач (краевых задач для уравнения теплопроводности) как в теоретическом плане, так и с точки зрения получения численных решений.

Один из важных классов задач, описывающих распространение тепла, связан с наличием такого свойства процессов, что при их протекании исследуемое вещество претерпевает фазовые превращения с выделением или поглощением тепла. Задачи этого класса известны под общим названием *задачи Стефана.* Существенной чертой таких задач является наличие движущейся поверхности раздела между двумя фазами, причем ни вид данной поверхности, ни закон ее движения заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения. Именно на этой поверхности происходит поглощение или выделение тепла, связанное с фазовым переходом. Задачи этого класса заметно сложнее тех, в которых отсутствует переход вещества из одной фазы в другую. Основная причина возникающих сложностей состоит в том,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00782).

что на поверхности раздела фаз коэффициенты уравнения теплопроводности терпят разрыв. Известны два основных подхода к поиску численного решения данной проблемы. Первый связан с явным построением поверхности раздела фаз. Однако даже в простейших случаях это требует построение громоздких процедур и больших затрат машинного времени, а для практически важных задач, где таких поверхностей много и они имеют довольно причудливые формы, использование данного подхода представляется нерациональным. Второй подход основан на использовании так называемых алгоритмов сквозного счета. Здесь явного выделения поверхности раздела фаз не требуется, но приходится работать с уравнениями, коэффициенты которых — сильно меняющиеся или разрывные функции. Получение численного решения краевой задачи здесь также требует использования специальных алгоритмов.

Что касается задач оптимального управления процессами с фазовыми переходами, то под ними понимается выбор тех или иных параметров процесса (управляющих параметров) таким образом, чтобы либо сам процесс протекал по сценарию, наиболее близкому к заданному, либо поведение границы раздела фаз или функция от значений температуры в некоторой области были наиболее близки к требуемым. К трудностям решения прямых задач здесь прибавляются еще специфические трудности решения задач оптимального управления. Вследствие этого решенных задач немного.

В настоящей работе на примере осесимметричной задачи оптимального управления процессом плавления вещества показан эффективный метод решения задач оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. Эффективность рассматриваемого метода состоит в *одновременном* использовании трех основных элементов. Первые два элемента связаны с решением прямой задачи.

Во-первых, осуществляется переход от формулировки краевой задачи в терминах температуры к формулировке в терминах теплосодержания (см. [1]). Делается это потому, что при пересечении поверхности раздела фаз температура меняется непрерывным образом, в то время как теплосодержание меняется скачком. Методы сквозного счета позволяют в этом случае определять распределение температуры более аккуратно. Эта идея была впервые высказана М. Розе, а впоследствии развита Е. Уайтом (см. [2]).

Вторым элементом данного подхода является алгоритм решения нелинейных систем конечно-разностных уравнений, полученных в результате аппроксимации краевой задачи, записанной в терминах теплосодержания. В упомянутой работе [2] для этой цели предложены два алгоритма: модифицированный метод Якоби и модифицированный метод Гаусса — Зейделя. В новом подходе предлагается итерационный алгоритм решения нелинейной системы уравнений (см. [3]), активно использующий метод прогонки и существенно превосходящий по эффективности (не менее чем на порядок) алгоритмы работы [2]. Это превосходство проявляется тем сильнее, чем больше число узлов сетки по пространственной переменной и чем выше требуемая итерационная точность. Особенно заметно преимущество рассматриваемого алгоритма при увеличении величины шага по времени (см., например, [4, табл. 4]). Подробно второй элемент алгоритма описан в [3].

Наконец, третий элемент связан с прямым методом решения задачи оптимального управления. Здесь предлагается решать эту задачу методом первого порядка с использованием градиента целевой функции. Вычислить градиент целевой функции, определяемой численно, — задача непростая. Известные методы вычисления либо дают неточные значения градиента (что приводит к остановке спуска в пространстве управлений), либо требуют неприемлемых затрат машинного времени. В нашем подходе предлагается для определения градиента целевой функции использовать методологию быстрого автоматического дифференцирования (БАД), предложенную Ю. Г. Евтушенко (см. [5; 6]). В основе БАД-методологии лежит сведение задачи оптимального управления к задаче нелинейного программирования. Целевой функционал и связи, наложенные на управления и фазовые переменные, аппроксимируются, в результате чего целевому функционалу ставится в соответствие функция конечного числа переменных, а связям — система алгебраических уравнений. БАД-методология предоставляет канонические формулы, с помощью которых получается точное значение компонент градиента выбранного дискретного варианта задачи оптимального управления. В работах [5; 6] Ю. Г. Евтушенко сформулировал и обосновал утверждение о том, что вычисление градиента функции многих переменных с помощью методологии быстрого автоматического дифференцирования требует времени, не превосходящего утроенного времени решения прямой задачи.

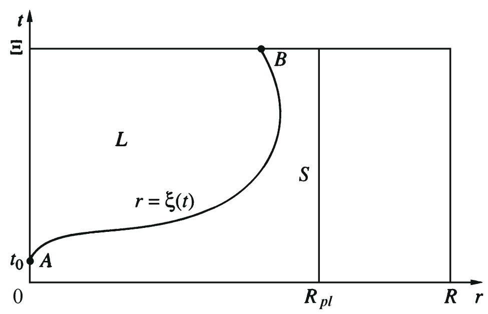
В настоящей работе на примере задачи оптимального управления процессом плавления вещества оценено машинное время, требуемое для вычисления градиента целевой функции с помощью БАД-методологии в задачах оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. Сформулировано и обосновано утверждение о том, что время, требуемое для определения компонент градиента целевой функции с помощью указанного выше метода, не превышает времени, требуемого для вычисления двух значений этой функции.

Применение предложенного метода к решению сложных (трехмерных нестационарных) задач оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами показало его работоспособность и эффективность.

1. Математическая формулировка задачи

Физическая проблема, на примере которой описывается предложенный алгоритм, состоит в следующем: требуется расплавить заданную часть металлического образца, затратив при этом минимальное количество подводимого тепла. Сформулированная задача исследуется в рамках одномерной (с радиальной симметрией) нестационарной постановки (см. [1]). Источник подводимого тепла располагается вдоль оси симметрии, причем рассматривается случай распределенного по пространству источника. В качестве управления выбирается распределение по времени количества выделяемого источником тепла (мощность источника).

В плоскости независимых переменных (r, t) рассмотрим прямоугольную область Q (см. рисунок).



Траектория движения поверхности раздела фаз.

Область $Q = \{(r,t) : 0 < r < R,\ 0 < t \leq \Theta\}$ гладкой линией AB, уравнение которой есть $r = \xi(t)$, разбивается на две подобласти L (область жидкой фазы) и S (область твердой фазы). Линия AB — траектория движения поверхности раздела фаз (будем для краткости называть ее линией плавления). Если $t_0 \geq 0$ — момент времени, при котором зарождается линия плавления AB, то подобласти L и S определяются соотношениями

$$L = \{(r,t)\colon 0 < r < \xi(t),\ t_0 < t \leq \Theta\}, \quad S = \{(r,t)\colon \xi(t) < r < R,\ 0 < t \leq \Theta\}.$$

В области Q поставим следующую двухфазную задачу Стефана:

$$M_L \equiv \rho_L C_L \frac{\partial T_L}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r k_L \frac{\partial T_L}{\partial r}\right) - F(r,t) = 0, \qquad (r,t) \in L, \tag{1.1}$$

$$M_S \equiv \rho_S C_S \frac{\partial T_S}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r k_S \frac{\partial T_S}{\partial r}\right) - F(r,t) = 0, \qquad (r,t) \in S, \tag{1.2}$$

$$T_S(r,0) = T_{in}(r), \qquad 0 < r < R, \tag{1.3}$$

$$T_L\left(\xi(t),t\right) = T_S\left(\xi(t),t\right) = T_{pl}, \qquad t_0 \le t \le \Theta, \tag{1.4}$$

$$\left[k_S \frac{\partial T_S}{\partial r}\right]\Bigg|_{(\xi(t)+0,t)} - \left[k_L \frac{\partial T_L}{\partial r}\right]\Bigg|_{(\xi(t)-0,t)} = \rho_S \lambda \xi'(t), \qquad t_0 \le t \le \Theta, \tag{1.5}$$

$$k_S \frac{\partial T_S}{\partial r}\Bigg|_R = \alpha\left[T_{ex} - T_S(R,t)\right], \qquad 0 < t \le \Theta, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial r}(0,t) = 0, \qquad t_0 < t \le \Theta, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial T_S}{\partial r}(0,t) = 0, \qquad 0 < t < t_0. \tag{1.8}$$

Здесь $T(r,t)$ — температура вещества в точке с координатами (r,t); ρ, C, k — плотность вещества, его теплоемкость и коэффициент теплопроводности соответственно; λ — теплота плавления вещества; нижние индексы L и S указывают на принадлежность величины жидкой или твердой фазе соответственно; T_{pl} — температура плавления вещества; $T_{in}(r)$ — начальная температура вещества, $T_{in}(r) \le T_{pl}$; α — коэффициент теплообмена с окружающей средой; T_{ex} — температура окружающей среды. Источник подводимого тепла $F(r,t)$ представим в виде $F(r,t) = \varphi(r)f(t)$, где $\varphi(r)$ — некоторая заданная функция, описывающая распределение выделяемой энергии по пространству. Задачу (1.1)–(1.8) при заданной функции $f(t)$ будем называть прямой задачей.

Пусть $\xi(t)$ — линия плавления, соответствующая источнику $f(t)$, $t \in [0,\Theta]$ и ξ_f — максимальное значение величины $\xi(t)$ при $t_0 \le t \le \Theta$. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $K(\Theta)$, если она

- определена и кусочно-непрерывна на отрезке $[0,\Theta]$,
- имеет кусочно-непрерывную производную,
- удовлетворяет ограничениям $0 \le f(t) \le f_{\max}$ для всех $[0,\Theta]$,
- соответствующее ей $\xi_f \ge R_{pl}$, где R_{pl} ($R_{pl} < R$) — заданная величина.

Величина $f_{\max}$ может быть бесконечно большой, т. е. ограничение сверху может отсутствовать. Заметим также, что для заданной конечной величины $f_{\max}$ значение величины Θ не должно быть меньше некоторого определенного значения, иначе класс $K(\Theta)$ окажется пустым.

Вариационную задачу можно сформулировать следующим образом: среди функций $f(t)$ из класса $K(\Theta)$ найти такую функцию $f_{opt}(t)$, что функционал

$$J = \int\limits_0^\Theta f(t)dt \tag{1.9}$$

достигает на ней минимального значения.

На примере этой задачи ниже будут оценены трудоемкости решения прямой задачи и процедуры вычисления градиента целевой функции. Пусть T_0 — полное время, требуемое для численного решения прямой задачи (задачи определения температурного поля) и для вычисления значения целевой функции; T_g — время, требуемое для определения градиента этой функции. Нас будет интересовать отношение T_g/T_0.

При определении T_0 и T_g будем учитывать только время выполнения арифметических операций $(+,-,\times,/)$ и операций сравнения (if), которые встречаются в используемых алгоритмах. Договоримся использовать традиционную RAM-модель вычислений (см., например, [7]), в рамках которой трудоемкость доступа к ячейкам памяти и выполнения элементарных операций предполагается независящей от величины аргументов. Кроме того, во внимание не будет приниматься время, затрачиваемое на определение величин, не зависящих от фазовых переменных (значения которых могут быть вычислены до начала итерационного процесса).

2. Алгоритм решения прямой задачи

В работе [1] изложен алгоритм численного решения прямой задачи. Мы приводим данный алгоритм с незначительными сокращениями, достаточными для понимания дальнейших рассуждений. В основе метода лежит переход от формулировки задачи (1.1)–(1.8) в терминах температуры $T(r,t)$ к формулировке в терминах функции теплосодержания $E(r,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Omega(E)\frac{\partial T(E)}{\partial r}\right) + F(r,t), & \qquad (r,t)\in Q,\\ E(r,0) = E(T_{in}(r)), & \qquad 0<r<R,\\ \left.\frac{\partial E}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, & \qquad 0\le t\le\Theta,\\ \left.\Omega(E)\frac{\partial T(E)}{\partial r}\right|_{r=R} = \alpha\left[T_{ex} - T(E(R,t))\right], & \qquad 0\le t\le\Theta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$T(E) = \begin{cases} E\rho_S^{-1}C_S^{-1}, & E<E_- = \rho_S C_S T_{pl},\\ T_{pl}, & E_-\le E\le E_+ = E_- + \rho_S\lambda,\\ \left[E + (\rho_L C_L - \rho_S C_S)T_{pl} - \rho_S\lambda\right]\rho_L^{-1}C_L^{-1}, & E_+ < E, \end{cases}$$

$$\Omega(E) = k(T(E)) = \begin{cases} k_S, & E<E_-,\\ E_1E + E_2, & E_-\le E\le E_+,\\ k_L, & E>E_+, \end{cases}$$

$E_1 = (k_L - k_S)/(E_+ - E_-)$; $E_2 = k_S - E_-\cdot E_1$.

Для численного решения краевой задачи (2.1) в области Q вводится неравномерная сетка $\omega = \{r_i, t^j\}$, где

$$r_0 = t^0 = 0,\quad r_i = r_{i-1} + h_{i-1},\quad t^j = t^{j-1} + \tau^j,\quad i = 1,\dots,K;\quad j = 1,\dots,M.$$

Использование неявной аппроксимации по времени и интегро-интерполяционного метода приводит к следующей системе конечно-разностных уравнений:

$$E_0^j + a_0\hat\Omega(E_0^j)T(E_0^j) - a_0\hat\Omega(E_0^j)T(E_1^j) = E_0^{j-1} + \tau^j F_0^j,$$

$$E_i^j + [a_i\hat\Omega(E_i^j) + b_i\hat\Omega(E_{i-1}^j)]T(E_i^j) - b_i\hat\Omega(E_{i-1}^j)T(E_{i-1}^j) - a_i\hat\Omega(E_i^j)T(E_{i+1}^j) = E_i^{j-1} + \tau^j F_i^j, \tag{2.2}$$

$$1\le i\le K-1,$$

$$E_K^j + [a_K\alpha + b_K\hat\Omega(E_{K-1}^j)]T(E_K^j) - b_K\hat\Omega(E_{K-1}^j)T(E_{K-1}^j) = a_K\alpha T_{ex} + E_K^{j-1} + \tau^j F_K^j,$$

$$j = 1,\dots,M.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$E_i^j = E(r_i,t^j),\quad F_i^j = F(r_i,t^j),\quad \hat\Omega(E_i^j) = \Omega[(E_i^j + E_{i+1}^j)/2],$$

а выражения для коэффициентов a_i и b_i приведены в [1].

Система (2.2) разбивается на M подсистем, которые связывают величины, зависящие от значений функции теплосодержания на временном слое с номером j, с величинами, определяемыми функцией теплосодержания на предыдущем временном слое с номером $(j-1)$, где $j = 1, 2, \dots, M$.

Решение полученной конечно-разностной системы уравнений осуществляется с помощью нового метода, описанного в [3]. Для этого функцию температуры на временном слое j представляем в виде $T(E_i^j) = \mu(E_i^j)E_i^j + \nu(E_i^j)$, где функции μ и ν определяются формулами

$$\mu(E_i^j) = \begin{cases} \rho_S^{-1}C_S^{-1}, & E_i^j < E_-, \\ 0, & E_- \le E_i^j \le E_+, \\ \rho_L^{-1}C_L^{-1}, & E_+ < E_i^j, \end{cases} \qquad \nu(E_i^j) = \begin{cases} 0, & E_i^j < E_-, \\ T_{pl}, & E_- \le E_i^j \le E_+, \\ E_3, & E_+ < E_i^j, \end{cases}$$

$$E_3 = ((\rho_L C_L - \rho_S C_S)T_{pl} - \rho_S \lambda)\, \rho_L^{-1} C_L^{-1}.$$

Итерационный процесс для решения этой системы уравнений строится следующим образом. Если $(K+1)$-мерный вектор $\mathbf{V}^n = \|V_0^n\ V_1^n \dots V_K^n\|^T$ представляет собой приближение к вектору $\mathbf{E}^j$, полученное на n-й итерации (в качестве начальной итерации $\mathbf{V}^0$ берется значение вектора $\mathbf{E}$ с предыдущего временного слоя, т. е. $\mathbf{E}^{j-1}$), то вектор $\mathbf{V}^{n+1}$ на каждом шаге итерации определяется как решение следующей системы уравнений:

$$A_i(\mathbf{V}^n)V_{i-1}^{n+1} - C_i(\mathbf{V}^n)V_i^{n+1} + B_i(\mathbf{V}^n)V_{i+1}^{n+1} + D_i(\mathbf{V}^n) = 0, \tag{2.3}$$

где

$$A_i(\mathbf{V}^n) = b_i\hat{\Omega}(V_{i-1}^n)\mu(V_{i-1}^n), \qquad B_i(\mathbf{V}^n) = a_i\hat{\Omega}(V_i^n)\mu(V_{i+1}^n),$$

$$C_i(\mathbf{V}^n) = 1 + (a_i\hat{\Omega}(V_i^n) + b_i\hat{\Omega}(V_{i-1}^n))\mu(V_i^n),$$

$$D_i(\mathbf{V}^n) = b_i\hat{\Omega}(V_{i-1}^n)\nu(V_{i-1}^n) - (a_i\hat{\Omega}(V_i^n) + b_i\hat{\Omega}(V_{i-1}^n))\nu(V_i^n) + a_i\hat{\Omega}(V_i^n)\nu(V_{i+1}^n) + E_i^{j-1} + \tau^j F_i^j,$$

$$i = 1, \dots, K-1,$$

$$A_0(\mathbf{V}^n) = 0, \quad B_0(\mathbf{V}^n) = a_0\hat{\Omega}(V_0^n)\mu(V_1^n), \quad C_0(\mathbf{V}^n) = 1 + a_0\hat{\Omega}(V_0^n)\mu(V_0^n),$$

$$D_0(\mathbf{V}^n) = -(a_0\hat{\Omega}(V_0^n))\nu(V_0^n) + a_0\hat{\Omega}(V_0^n)\nu(V_1^n) + E_0^{j-1} + \tau^j F_0^j,$$

$$A_K(\mathbf{V}^n) = b_K\hat{\Omega}(V_{K-1}^n)\mu(V_{K-1}^n), \quad B_K(\mathbf{V}^n) = 0, \quad C_K(\mathbf{V}^n) = 1 + (\alpha a_K + b_K\hat{\Omega}(V_{K-1}^n))\mu(V_K^n),$$

$$D_K(\mathbf{V}^n) = b_K\hat{\Omega}(V_{K-1}^n)\nu(V_{K-1}^n) - (\alpha a_K + b_K\hat{\Omega}(V_{K-1}^n))\nu(V_K^n) + \alpha a_K T_{ex} + E_K^{j-1} + \tau^j F_K^j.$$

Операции, используемые при реализации метода прогонки и при вычислении прогоночных коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 0, 1, \dots, K)$, являются арифметическими операциями между двумя переменными или одной переменной и константой. Время, необходимое для выполнения операций сложения, вычитания, умножения и деления, обозначим соответственно $T_+, T_-, T_\times, T_/$. Пусть $N_+, N_-, N_\times, N_/$ — соответственно количество сложений, вычитаний, умножений и делений среди арифметических операций. Кроме того, при определении прогоночных коэффициентов системы уравнений (2.3) необходимы значения функций $\hat{\Omega}(E_i^j)$, $\mu(E_i^j)$ и $\nu(E_i^j)$, для вычисления которых используются операции сравнения if. Обозначим время, необходимое для выполнения одной операции сравнения, через T_{if}, а количество этих операций — через N_{if}. Предполагаем, что $T_+ = T_-$. Поэтому количество сложений и вычитаний будем суммировать вместе и обозначать N_+.

При вычислении прогоночных коэффициентов A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 0, 1, \dots, K)$ и при решении системы уравнений (2.3) с помощью указанного выше алгоритма выполняются $N_+ = 12K + 3$ операций сложения и вычитания, $N_\times = 11K + 3$ операций умножения, $N_/ = 3K + 6$ операций деления и $N_{if} = 6K + 4$ операций сравнения. Если обозначить через N^* количество итераций, выполненных на одном временном слое для достижения требуемой точности, то количество операций, необходимое для определения температурного поля, увеличивается в $N^* \cdot M$ раз.

Заканчивается процесс решения задачи (2.1) выделением линии плавления. Пусть $E_{pl} = (E_- + E_+)/2$. Если для некоторого значения $0 \le z \le K$ при $t = t^j$ выполняются условия $E_z^j \ge E_{pl}$, а $E_{z+1}^j < E_{pl}$, тогда радиус плавления ξ^j вычисляется по формуле

$$\xi^j = \frac{(E_{pl} - E_{z+1}^j)(r_z - r_{z+1})}{E_z^j - E_{z+1}^j} + r_{z+1}. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) позволяет заключить, что при определении радиуса плавления ξ^j во все моменты времени выполняются в среднем $M \cdot K/2$ операций сравнения, $M \cdot K/2$ операций умножения, $M \cdot K/2$ операций деления и $2M \cdot K$ операций сложения и вычитания.

Решение вариационной задачи, сформулированной в первом разделе, проводилось численно с использованием градиентных методов. Для выделения функций сравнения из множества функций, принадлежащих классу $K(\Theta)$, применялся метод внешних штрафных функций. Выбиралась штрафная функция следующего вида $g(r) = A \cdot (r - R_{pl})^2$, где A — константа. При этом задача условной минимизации целевого функционала J из (1.9) сводилась к задаче безусловной минимизации обобщенного функционала $I = J + g(\xi_f)$.

Максимальное значение радиуса плавления ξ_f находится по формуле $\xi_f = \max\limits_{1 \le j \le M} \xi^j$, где ξ^j определено в (2.4). Если этот максимум достигается при $j = m$ $(1 \le m \le M)$, то

$$\xi_f = \xi_f(f) = \frac{(E_{pl} - E^m_{z+1})(r_z - r_{z+1})}{E^m_z - E^m_{z+1}} + r_{z+1}.$$

Используя для аппроксимации целевого функционала из (1.9) метод прямоугольников, получим следующее выражение, аппроксимирующее обобщенный функционал I:

$$I \approx \tilde{I}(f) = \sum_{j=1}^{M} \tau^j f^j + A(\xi_f(f) - R_{pl})^2.$$

При вычислении значения $\tilde{I}$ выполняются $(M+2)$ операций умножения и 2 операции сложения и вычитания.

Таким образом, полное время T_0, требуемое для численного решения прямой задачи и для вычисления значения целевой функции, рассчитывается по формуле

$$T_0 = (N^* \cdot M \cdot (6K + 4) + M \cdot K/2) \cdot T_{if} + (N^* \cdot M \cdot (3K + 6) + M \cdot K/2) \cdot T_/$$

$$+ (N^* \cdot M \cdot (11K + 3) + M \cdot K/2 + M + 2) \cdot T_\times + (N^* \cdot M \cdot (12K + 3) + 2M \cdot K + 2) \cdot T_+.$$

Оценим теперь время T_g, требуемое для вычисления градиента целевой функции.

3. Алгоритм вычисления градиента в задаче оптимального управления процессом плавления вещества

Соотношения, с помощью которых вычисляется градиент функционала I, выводятся на основе методологии быстрого автоматического дифференцирования (см. [5]). Для того чтобы воспользоваться этим методом, дискретный вариант (2.2) краевой задачи (2.1) приводится к так называемому каноническому виду

$$E^j_i = \Psi\left[(i,j), Z_{(i,j)}, U_{(i,j)}\right]. \tag{3.1}$$

Здесь через $Z_{(i,j)}$ обозначено множество всех E^j_i со всеми индексами i и j, элементы которых встречаются во всех слагаемых левой части, кроме первого, и в правой части равенств (2.2), а через $U_{(i,j)}$ — множество всех f^j, элементы которых встречаются в правой части равенств (2.2). Тогда согласно БАД-методологии [5; 1, с. 525] компоненты градиента обобщенной функции $\tilde{I}$ по компонентам вектора f^j вычисляются по формуле

$$\frac{d\tilde{I}}{df^j} = \tilde{I}_{f^j} + \sum_{(q,v) \in \overline{K}_{(q,v)}} \Psi^T_{f^j}\left[(q,v), Z_{(q,v)}, U_{(q,v)}\right] \cdot p^v_q, \quad 1 \le j \le M, \tag{3.2}$$

где p_q^v — сопряженные переменные (импульсы) — определяются как решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$p_i^j = \sum_{(q,v)\in\overline{Q}_{(q,v)}} \Psi^T_{E_i^j}\left[(q,v), Z_{(q,v)}, U_{(q,v)}\right]\cdot p_q^v + \tilde{I}_{E_i^j}, \quad 0 \le i \le K; \quad 1 \le j \le M. \tag{3.3}$$

Индексные множества $\overline{Q}_{(i,j)}$ и $\overline{K}_{(i,j)}$ определяются соотношениями

$$\overline{Q}_{(i,j)} = \big\{(q,v)\colon (i,j) \in Q_{(q,v)}\big\}, \quad Q_{(i,j)} = \big\{(i,j)\colon E_i^j \in Z_{(i,j)}\big\},$$

$$\overline{K}_{(i,j)} = \big\{(q,v)\colon (i,j) \in K_{(q,v)}\big\}, \quad K_{(i,j)} = \big\{(i,j)\colon f^j \in U_{(i,j)}\big\}.$$

Для конкретного вида функции Ψ из (3.1), определяемого аппроксимацией (2.2) краевой задачи (2.1), систему уравнений (3.3) записываем в следующем виде:

$$p_i^{M+1} = 0, \quad i = 0,\dots,K,$$

$$p_0^j = -a_0 Y_1^j p_0^j + b_1 Y_1^j p_1^j + p_0^{j+1} + \tilde{I}_{E_0^j}, \tag{3.4}$$

$$p_i^j = a_{i-1}X_i^j p_{i-1}^j - a_i Y_{i+1}^j p_i^j - b_i X_i^j p_i^j + b_{i+1}Y_{i+1}^j p_{i+1}^j + p_i^{j+1} + \tilde{I}_{E_i^j}, \quad 1 \le i \le K-1,$$

$$p_K^j = a_{K-1}X_K^j p_{K-1}^j - b_K X_K^j p_K^j - a_K \alpha T'_{E_K^j}(E_K^j) p_K^j + p_K^{j+1} + \tilde{I}_{E_K^j},$$

$$j = M, M-1, \dots, 1.$$

Здесь через X_i^j, Y_i^j, $\tilde{I}_{E_i^j}$ обозначены производные

$$X_i^j = \frac{\partial}{\partial E_i^j}\big(\hat{\Omega}(E_{i-1}^j)T(E_i^j)\big) - \frac{\partial}{\partial E_i^j}\big(\hat{\Omega}(E_{i-1}^j)T(E_{i-1}^j)\big), \quad i = 1,2,\dots,K,$$

$$Y_i^j = \frac{\partial}{\partial E_{i-1}^j}\big(\hat{\Omega}(E_{i-1}^j)T(E_{i-1}^j)\big) - \frac{\partial}{\partial E_{i-1}^j}\big(\hat{\Omega}(E_{i-1}^j)T(E_i^j)\big), \quad i = 1,2,\dots,K,$$

$$\tilde{I}_{E_i^j} = \begin{cases} \Lambda(E_{pl} - E_{z+1}^m), & i = z, \qquad\qquad j = m, \\ \Lambda(E_z^m - E_{pl}), & i = z+1, \qquad j = m, \quad i = 0,1,\dots,K, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где

$$\Lambda = 2A\frac{(r_{z+1} - r_z)}{(E_z^m - E_{z+1}^m)^2}\left[\frac{(E_{pl} - E_{z+1}^m)(r_z - r_{z+1})}{E_z^m - E_{z+1}^m} + r_{z+1} - R_{pl}\right],$$

z — индекс, который определяется при расчете радиуса плавления по формуле (2.4), а коэффициенты a_i, b_i $(i = 0,1,\dots,K)$ определены во втором разделе.

Для того чтобы воспользоваться методом прогонки, система уравнений (3.4) приводится к трехдиагональному матричному виду. При вычислении прогоночных коэффициентов этой системы выполняются $N_{if} = 20K + 4$ операций сравнения, $N_{/} = K + 6$ операций деления, $N_{\times} = 16K + 7$ операций умножения и $N_{+} = 16K + 9$ операций сложения и вычитания. При решении системы линейных алгебраических уравнений (3.4) на одном временном слое с помощью метода прогонки выполняются еще $N_{/} = 2K+2$ операций деления, $N_{\times} = 3K+1$ операций умножения и $N_{+} = 3K$ операций сложения и вычитания.

Таким образом, для решения сопряженной задачи требуется выполнение $N_{if} = M\cdot(20K+4)$ операций сравнения, $N_{/} = M\cdot(3K+8)$ операций деления, $N_{\times} = M\cdot(19K+8)$ операций умножения и $N_{+} = M\cdot(19K+9)$ операций сложения и вычитания.

И, наконец, согласно формуле (3.2) компоненты вектора градиента обобщенной функции $\tilde{I}$ могут быть вычислены с помощью формулы

$$\frac{d\tilde{I}}{df^j} = \tau^j + \tau^j \sum_{i=0}^{w} p_i^j \varphi_i, \quad 1 \le j \le M,$$

где w — номер узла, определяемого равенством

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi_w(r) \ne 0, & 0 \le r \le r_w, \\ 0, & r > r_w. \end{cases}$$

Для вычисления всех компонент градиента по этой формуле выполняются не более $N_\times = M(K+2)$ операций умножения и M операций сложения.

Общее время T_g, требуемое для вычисления градиента целевой функции с помощью формул быстрого автоматического дифференцирования, определяется соотношением

$$T_g = M \cdot (20K+4) \cdot T_{if} + M \cdot (3K+8) \cdot T_/ + M \cdot (20K+10) \cdot T_\times + M \cdot (19K+10) \cdot T_+. \quad (3.5)$$

Исследуемая в работе задача является нелинейной. Следовательно, при решении прямой задачи осуществляются как минимум две итерации ($N^* = 2$). Таким образом, время T_0, требуемое для численного решения прямой задачи и для вычисления значения целевой функции, удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} T_0 \ge (2M \cdot (6K+4) + M \cdot K/2) \cdot T_{if} + (2M \cdot (3K+6) + M \cdot K/2) \cdot T_/ \\ + (2M \cdot (11K+3) + M \cdot K/2 + M + 2) \cdot T_\times + (2M \cdot (12K+3) + 2M \cdot K + 2) \cdot T_+ \\ > M \cdot (10K+2) \cdot T_{if} + M \cdot (1.5K+4) \cdot T_/ + M \cdot (10K+5) \cdot T_\times + M \cdot (9.5K+5) \cdot T_+. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее неравенство и выражение, определяющее значение T_g по формуле (3.5), можно сделать вывод о том, что $T_g/T_0 < 2$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что*

1) $\tilde{I}(f)$ — *скалярная неявно заданная дифференцируемая целевая функция векторного аргумента* $f \in R^M$;

2) *арифметические действия и вычисление основных элементарных функций, используемые для определения значений функции* $\tilde{I}(f)$, *производятся точно. Тогда время, требуемое для определения градиента целевой функции* $\tilde{I}(f)$ *с помощью формул быстрого автоматического дифференцирования в задаче оптимального управления* (1.1)–(1.9), *не превышает времени, необходимого для вычисления двух значений самой функции.*

Результат настоящей работы превосходит результат работы [6] за счет следующих условий:

а) в алгоритме вычисления градиента не появляются элементарные функции, производные которых вычисляются за время, вдвое большее времени вычисления самой функции;

б) в рассматриваемых задачах для вычисления целевой функции требуется проведение итераций, в то время как сопряженная задача является линейной (в [6] функция вычисляется безитерационно).

Предложенный алгоритм решения задачи оптимального управления оказался эффективным для определения градиента целевой функции при исследовании тепловых задач с фазовым переходом. Этот метод успешно использовался для решения трехмерных нестационарных вариационных задач (см., например, [8; 9]). Многочисленные расчеты прямых задач показали, что для достижения требуемой итерационной точности (максимальное относительное отклонение между двумя итерациями не превышало 10^{-12}) необходимо выполнение не менее четырех итераций на каждом временном слое (т. е. $N^* \ge 4$). Поэтому в рассмотренных задачах фактически $T_g/T_0 \le 1$, т. е. вычисление градиента требует примерно столько же машинного времени, что и решение прямой задачи.

Следует также отметить, что указанный подход является универсальным и он может быть успешно применен при исследовании других задач оптимального управления сложными системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Албу А.Ф., Горбунов В.И., Зубов В.И.** Оптимальное управление процессом плавления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 4. С. 517–531.
2. **White R.E.** An enthalpy formulation of the Stephan problem // SIAM J. Numer. Analys. 1982. Vol. 19, no. 6. P. 1129–1157.
3. **Албу А.Ф., Зубов В.И.** О модификации одной схемы для расчета процесса плавления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 9. С. 1434–1443.
4. **Албу А.Ф., Зубов В.И.** Усовершенствованный алгоритм расчета процессов с фазовыми переходами // Методы оптимизации и их приложения: Тр. XIII Междунар. шк.-семинара / ИСЭМ СО РАН. Иркутск, 2005. Т. 2. С. 51–56.
5. **Evtushenko Y.G.** Computation of exact gradients in distributed dynamic systems // Optim. Methods Softw. 1998. Vol. 9, no. 1–3. P. 45–75.
6. **Евтушенко Ю.Г.** Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование / ВЦ им. А. А. Дородницына РАН М., 2013. 144 с.
7. **Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.** Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979. 536 с.
8. **Албу А.Ф., Зубов В.И.** Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 5. С. 734–745.
9. **Албу А.Ф., Зубов В.И.** Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке для объекта сложной геометрической формы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1879–1893.

Албу Алла Филипповна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
e-mail: alla.albu@mail.ru

Поступила 01.04.2015

Зубов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, главный науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
e-mail: zubov@ccas.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ЛАКУНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КРАТНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

Пусть последовательность d-мерных векторов $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ с положительными целочисленными координатами удовлетворяет условию $n_k^j = \alpha_j m_k + O(1),\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant d,$ где $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_d > 0$, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. При некоторых условиях на функцию $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ доказано, что если что для любой функции $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g, x)$ сходится почти всюду, то для любого $d \in \mathbb{N}$, для всех $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0, 2\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции f, а также соответствующие последовательности частичных сумм всех его сопряженных рядов сходятся почти всюду.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, сходимость почти всюду.

N. Yu. Antonov. On almost everywhere convergence for lacunary sequences of multiple rectangular Fourier sums.

Let a sequence of d-dimensional vectors $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ with positive integer coordinates satisfy the condition $n_k^j = \alpha_j m_k + O(1),\ k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant d,$ where $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_d > 0$, and $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ is an increasing sequence of positive integers. Under some conditions on a function $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, it is proved that, if the sequence of Fourier sums $S_{m_k}(g, x)$ converges almost everywhere for any function $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$, then, for any $d \in \mathbb{N}$ and $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0, 2\pi)^d)$, the sequence $S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x})$ of rectangular partial sums of the multiple trigonometric Fourier series of the function f and the corresponding sequences of partial sums of all conjugate series converge almost everywhere.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, convergence almost everywhere.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $d \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, φ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(E)$ множество всех определенных на E измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_E \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Пусть $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая по каждой переменной функция такая, что $f \in L([0, 2\pi)^d)$, $\mathbf{k} = (k^1, k^2, \ldots, k^d) \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx} = k^1x^1 + k^2x^2 + \ldots + k^dx^d$,

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.1}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье функции f. Пусть $\mathbf{n} = (n^1, n^2, \ldots, n^d)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы ряда (1.1):

$$S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k^1,\ldots,k^d)\colon\, |k^j| \leqslant n^j,\, 1 \leqslant j \leqslant d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}}$$

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

(далее прямоугольные частичные суммы ряда (1.1) будем для краткости называть также суммами Фурье).

Пусть B — некоторое непустое подмножество множества первых d натуральных чисел: $B = \{r_1, \dots, r_l\} \subset \{1, \dots, d\}$. Ряд

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^{l} (-i \operatorname{sign} k_{r_j}) a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} \tag{1.2}$$

называется сопряженным к ряду (1.1) по переменным, номера которых входят во множество B, или B-сопряженным, а $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма $\tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f,\mathbf{x})$ ряда (1.2) определяется аналогично $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной сумме ряда (1.1). При $d = 1$ ряды (1.1) и (1.2) совпадают соответственно с обычным тригонометрическим рядом Фурье 2π-периодической функции и его сопряженным рядом. В случае, когда множество B пустое, будем считать, что ряд (1.2) совпадает с рядом (1.1), а $\tilde{S}_{\mathbf{n},\varnothing}(f,\mathbf{x})$ — с $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$. Вообще, всюду далее произведение $\prod$, в котором множество сомножителей пусто, будем по определению считать равным единице. Через $\operatorname{mes} E$ будем обозначать лебегову меру множества E, будем также полагать $\ln^+ u = \ln(u+e)$, $u \geqslant 0$.

Рассмотрим одномерный случай ($d = 1$). Л. Карлесон [1] доказал, что если $f \in L^2([0,2\pi))$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду. Р. Хант [2] обобщил это утверждение о сходимости почти всюду рядов Фурье на функции из классов $L^p([0,2\pi))$, $p > 1$, и $L(\ln^+ L)^2([0,2\pi))$, а П. Шёлин [3] — на функции из класса $L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ L)([0,2\pi))$. Автором [4] было установлено, что условие $f \in L(\ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0,2\pi))$ также является достаточным для сходимости почти всюду ряда Фурье функции f. Наилучший на сегодняшний день результат, касающийся расходимости на множестве положительной меры рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0,2\pi))$, принадлежит С. В. Конягину [5]: для любой неубывающей функции $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o\bigl(u\sqrt{\ln u/\ln\ln u}\bigr)$ при $u \to \infty$, найдется функция из класса $\varphi(L)([0,2\pi))$ такая, что ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду на $[0,2\pi)$.

В 2005 г. С. В. Конягиным [6] была доказана следующая теорема о расходимости подпоследовательностей последовательности сумм Фурье: для любой возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и любой неубывающей функции $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u \ln\ln u)$, $u \to \infty$, найдется функция $F \in \varphi(L)([0,2\pi))$ такая, что подпоследовательность $S_{n_k}(F,x)$ неограниченно расходится всюду.

Последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *лакунарной* (по Адамару), если существует число $q > 1$ такое, что $n_{k+1}/n_k \geqslant q$ для любого $k \in \mathbb{N}$. В связи с результатом работы [6] С. В. Конягиным была сформулирована гипотеза о том, что если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ лакунарная, то подпоследовательность $S_{n_k}(f,x)_{k=1}^{\infty}$ последовательности сумм Фурье любой функции f из класса $L(\ln^+ \ln^+ L)([0,2\pi))$ сходится почти всюду. В рамках исследования этой гипотезы сначала В. Ли [7] доказал сходимость почти всюду лакунарной подпоследовательности последовательности сумм Фурье произвольной функции из класса $f \in L(\ln^+ \ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0,2\pi))$, а затем Ф. Ди Плинио [8] усилил результат работы [7], показав, что условие $f \in L(\ln^+ \ln^+ L)(\ln^+ \ln^+ \ln^+ \ln^+ L)([0,2\pi))$ также является достаточным для сходимости почти всюду лакунарной подпоследовательности последовательности сумм Фурье функции f.

Обратимся теперь к случаю кратных рядов Фурье ($d \geqslant 2$). Ряд (1.1) (ряд (1.2)) называется сходящимся по кубам (в случае $d = 2$ — по квадратам) в точке $\mathbf{x} \in [0,2\pi)^d$, если последовательность кубических частичных сумм (т. е. последовательность $S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$ ($\tilde{S}_{\mathbf{n},B}(f,\mathbf{x})$), при $\mathbf{n} = (n,n,\dots,n)$) имеет предел при $n \to \infty$.

Сходимость почти всюду по квадратам рядов Фурье функций $f \in L^2([0,2\pi)^2)$ была установлена Н. Р. Тевзадзе [9]. Ч. Фефферман [10] распространил этот результат на функции $f \in L^p([0,2\pi)^d)$, $p > 1$, $d \geqslant 2$, а затем П. Шёлин [11] доказал, что если функция f принадлежит классу $L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ L)([0,2\pi)^d)$, $d \geqslant 2$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду.

Автором в [12] доказана теорема, позволяющая переносить результаты о сходимости почти всюду одномерных рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)([0,2\pi))$ на кратные ряды Фурье функций из классов $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ в случае сходимости по кубам. В качестве следствия этой теоремы и результата работы [4] там получено утверждение о сходимости почти всюду по кубам рядов Фурье функций из класса $L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$. Наилучший на сегодня результат, касающийся расходимости по кубам на множестве положительной меры кратных рядов Фурье функций из $\varphi(L)([0,2\pi)^d)$, $d\geqslant 2$, принадлежит С. В. Конягину [13]: для любой функции $\varphi(u)=o(u(\ln u)^{d-1}\ln\ln u)$ при $u\to\infty$ существует $f\in\varphi(L)([0,2\pi)^d)$ с расходящимся всюду по кубам рядом Фурье. В работе [14] результаты работы [12] распространены с последовательности кубических сумм Фурье на последовательности сумм Фурье несколько более общего вида.

Ниже, как и в [14], мы будем рассматривать последовательности кратных прямоугольных сумм Фурье $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ такие, что векторы $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ удовлетворяют условию

$$n_k^j=\alpha_j m_k+O(1),\quad k\in\mathbb{N},\quad 1\leqslant j\leqslant d, \tag{1.3}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ — вектор с положительными координатами, а $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Обозначим через $\bar\Phi$ множество всех непрерывных функций $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, представимых в виде $\varphi(u)=u\psi(u)$, где функция $\psi(u)$ дифференцируема при $u\geqslant A\geqslant 0$, $\psi(u)$ и $u\psi'(u)$ не убывают на $[A,+\infty)$, а $\psi(u)u^{-1/2}$ и $\psi'(u)$ не возрастают на $[A,+\infty)$.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in\bar\Phi$, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g\in\varphi(L)([0,2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду. Тогда для каждого $d\in\mathbb{N}$, любого d-мерного вектора $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ с положительными координатами, произвольной последовательности $\mathbf{n}_k$, удовлетворяющей условию* (1.3), *и любой функции $f\in\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ и последовательности $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$ сходятся почти всюду на $[0,2\pi)^d$.*

Следствием теоремы 1 и результата работы [4] является следующее утверждение.

Теорема 2 [14, теорема 2]. *Пусть $d\in\mathbb{N}$, последовательность $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда, если $f\in L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$, то последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ и последовательности $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$ сходятся почти всюду на $[0,2\pi)^d$.*

Из теоремы 1 и результата работы [8] вытекает

Теорема 3. *Пусть $d\in\mathbb{N}$, последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^\infty\in\mathbb{N}^d$ удовлетворяет условию* (1.3), *причем последовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ в этом условии является лакунарной. Тогда для произвольной функции $f\in L(\ln^+ L)^{d-1}(\ln^+\ln^+ L)(\ln^+\ln^+\ln^+\ln^+ L)([0,2\pi)^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ и последовательности $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})$ для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$ сходятся почти всюду на $[0,2\pi)^d$.*

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\varphi\in\bar\Phi$. Можно считать, что в формулировке условий на функцию $\psi(u)$ число A равно нулю; в противном случае можно рассматривать функцию $\psi_1(u)=\psi(u+A)$, которая также удовлетворяет требуемым свойствам; при этом соответствующие классы $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$,

$d \in \mathbb{N}$, не изменятся. Далее, так как $\varphi'(u) = \psi(u) + u\psi'(u)$ не убывает на $[0, +\infty)$, то $\varphi(u)$ выпуклая на $[0, +\infty)$. Так как

$$\left(\varphi\left(\sqrt{u}\right)\right)' = \frac{\psi(\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} + \frac{\psi'(\sqrt{u})}{2}$$

не возрастает на $[0, +\infty)$, то $\varphi(\sqrt{u})$ вогнутая на $[0, +\infty)$. Классы $\varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}([0, 2\pi)^d)$, $d \in \mathbb{N}$, также не изменятся, если функцию φ заменить на отрезке $[0, u_0]$ на функцию $u^{3/2}$, а на интервале $(u_0, +\infty)$ — на функцию $u\psi(u) + b$, где числа $u_0 \in (0, e]$ и $b \in \mathbb{R}$ выбраны так, чтобы функция $\varphi(u)$ осталась выпуклой (в частности, непрерывной) на $[0, +\infty)$, а функция $\varphi(\sqrt{u})$ — вогнутой на $[0, +\infty)$.

Таким образом, с учетом вышеотмеченного, не ограничивая общности, в доказательстве теоремы 1 будем для удобства полагать, что

$$\varphi(u) = \begin{cases} u\psi(u) + b, & u > u_0, \\ u^{3/2}, & 0 \leqslant u \leqslant u_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где функция $\psi(u)$ дифференцируема при $u > u_0$, $\psi(u)$ и $u\psi'(u)$ не убывают на $[u_0, +\infty)$, а $\psi(u)u^{-1/2}$ и $\psi'(u)$ не возрастают на $[u_0, +\infty)$; кроме того, функция $\varphi(u)$ выпуклая на $[0, +\infty)$, а функция $\varphi(\sqrt{u})$ — вогнутая на $[0, +\infty)$. Множество функций $\varphi(u) \in \bar{\Phi}$ с описанными выше дополнительными свойствами будем обозначать через Φ.

Следующее утверждение является тривиальным следствием леммы 2 работы [14].

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $f \in \varphi(L)\ln^+ L\,(\mathbb{R}^d)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$. Тогда функция $h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, определяемая равенством*

$$h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1 + \mu t, x_2 + \nu t, x_3, \ldots, x_d)\frac{1}{t}\,dt, \tag{2.2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, принадлежит классу $\varphi(L)(\mathbb{R}^d)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|h^{\mu,\nu}(x_1, \ldots, x_d)|)\,dx_1 \ldots dx_d \leqslant A_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|f(x_1, \ldots, x_d)|)\ln^+|f(x_1, \ldots, x_d)|\,dx_1 \ldots dx_d,$$

где константа A_1 не зависит от f.

Теперь докажем аналог леммы 1 для класса $L^2(\mathbb{R})$.

Лемма 2. *Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$. Тогда функция $h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, определяемая равенством* (2.2), *принадлежит классу $L^2(\mathbb{R}^d)$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(h^{\mu,\nu}(x_1, \ldots, x_d)\right)^2\,dx_1 \ldots dx_d \leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(x_1, \ldots, x_d)\,dx_1 \ldots dx_d, \tag{2.3}$$

где константа A_2 не зависит от f.

Доказательство. Пусть $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\bar{g}(x)$ — преобразование Гильберта функции g:

$$\bar{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(t + x)}{t}\,dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Известно (см., например, [15, гл. 5, теорема 2]), что преобразование Гильберта является оператором типа $(2, 2)$, т.е. существует абсолютная константа $A_2 > 0$ такая, что для всех $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\bar{g}(t))^2 dt \leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}} g^2(t)dt. \tag{2.4}$$

Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu \neq 0$. Вводя новые переменные $x_1 = x_1',\ x_2 = x_2' + (\nu/\mu)x_1',\ x_3 = x_3', \dots, x_d = x_d'$, получим

$$h^{\mu,\nu}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x_1' + \mu t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}x_1' + \nu t, x_3', \dots, x_d'\Big)\frac{1}{t}\ dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1' + t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}(x_1' + t), x_3', \dots, x_d')\frac{1}{t}\ dt. \tag{2.5}$$

При фиксированных $x_2',\dots,x_d'$ правая часть (2.5) как функция переменной x_1' является преобразованием Гильберта функции $g(x_1') = f(x_1', x_2' + (\nu/\mu)x_1', x_3', \dots, x_d')$, поэтому согласно (2.4) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1' + t, x_2' + \frac{\nu}{\mu}(x_1' + t), x_3', \dots, x_d')\frac{1}{t}dt\Big)^2 dx_1'$$

$$\leqslant A_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(f\big(x_1', x_2' + (\nu/\mu)x_1', x_3', \dots, x_d'\big)\Big)^2\ dx_1'. \tag{2.6}$$

Интегрируя (2.6) по $(x_2', \dots, x_d') \in \mathbb{R}^{d-1}$, пользуясь равенством (2.5) и замечая, что якобиан перехода от $(x_1', x_2', \dots, x_d')$ к $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ равен единице, получаем (2.3). Лемма доказана.

Пусть

$$D_n(t) = \frac{\sin\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}, \quad \tilde{D}_n(t) = \frac{\cos\dfrac{t}{2} - \cos\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R},$$

— ядро Дирихле и сопряженное ядро Дирихле,

$$D_\beta^*(t) = \frac{\sin\beta t}{t}, \quad \tilde{D}_\beta^*(t) = \frac{1 - \cos\beta t}{t}, \quad \beta > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

— модифицированное ядро Дирихле и модифицированное сопряженное ядро Дирихле соответственно. Обозначим для функции f, определенной на $\mathbb{R}$,

$$S_\beta^*(f, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} D_\beta^*(t)f(x + t)dt, \quad \tilde{S}_\beta^*(f, x) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \tilde{D}_\beta^*(t)f(x + t)dt.$$

Для последовательности положительных чисел $\theta = \{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ положим

$$M^*(f, x) = M^*(f, \theta, x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{\beta_k}^*(f, x)|, \quad \tilde{M}^*(f, x) = \tilde{M}^*(f, \theta, x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\tilde{S}_{\beta_k}^*(f, x)|.$$

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g, x)$ сходится почти всюду. Тогда для функции $f \in \varphi(L)(\mathbb{R})$, последовательности $\theta = \{\alpha m_k\}_{k=1}^\infty$ и числа $y > 0$*

$$\mathrm{mes}\{x \in [-\pi, \pi) \colon M^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant A_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)dx, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{mes}\{x \in [-\pi, \pi) : \tilde{M}^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant A_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)dx, \tag{2.8}$$

где константа A_3 не зависит ни от f, ни от y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале справедливость оценки (2.7). Пусть функция g принадлежит классу $\varphi(L)([0,2\pi))$. Поскольку последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду, то мажоранта $M(g,x) = M(g,\{m_k\},x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|S_{m_k}(g,x)|$ почти всюду конечна. Отсюда согласно [16, теорема 3] найдется константа $C_1 > 0$ такая, что для всех $g \in \varphi(L)([0,2\pi))$ и $y > 0$ справедлива оценка

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi,\pi)\colon M(g,x) > y\} \leqslant C_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|g(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.9}$$

Покажем, что из (2.9) для функций $f \in \varphi(L)(\mathbb{R})$ и $y > 0$ вытекает оценка

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t+x)D^*_{m_k}(t)dt\Big| > y\Big\} \leqslant C_2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.10}$$

В самом деле, пусть $f^1(x)$ — 2π-периодическая функция, совпадающая на $[-\pi,\pi)$ с функцией $f(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда с помощью неравенств

$$|D_{m_k}(t) - D^*_{m_k}(t)| \leqslant C_3 \quad \text{при} \quad t \in (-\pi,\pi), \qquad |D^*_{m_k}(t)| \leqslant \frac{2}{\pi} \quad \text{при} \quad |t| \geqslant \frac{\pi}{2}$$

имеем

$$\Big|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f^1(t+x)D^*_{m_k}(t)\,dt\Big| = \Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^1(t+x)D_{m_k}(t)\,dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^1(t+x)(D^*_{m_k}(t) - D_{m_k}(t))\,dt$$

$$-\Big(\int\limits_{-\pi}^{-\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\Big) f^1(t+x)D^*_{m_k}(t)\,dt\Big| \leqslant \pi|S_{m_k}(f^1,x)| + (C_3+2)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^1(t)|\,dt,$$

откуда вытекает, что левая часть (2.10) не превосходит

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon M(f^1,x) > \frac{y}{2\pi}\Big\} + \operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon (C_3+2)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^1(t)|\,dt > \frac{y}{2}\Big\}.$$

Заметим, что из условия $\varphi(0) = 0$ и вогнутости функции $\varphi(\sqrt{u})$ вытекает неравенство

$$\varphi(\beta u) \leqslant \beta^2\varphi(u) \quad \text{для всех} \quad u \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 1. \tag{2.11}$$

Применяя последовательно неравенства Иенсена и Чебышева, а затем (2.11), получаем

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon (C_3+2)\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f^1(t)|\,dt > \frac{y}{2}\Big\}$$

$$= \operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon \varphi\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|f^1(t)|}{y}\,dt\Big) > \varphi\Big(\frac{1}{2(C_3+2)}\Big)\Big\}$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\Big\{x \in \Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big)\colon \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{2\pi|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt > \varphi\Big(\frac{1}{2(C_3+2)}\Big)\Big\}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varphi(1/(2(C_3+2)))}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{2\pi|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt \leqslant \frac{2\pi^2}{\varphi(1/(2(C_3+2)))}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{|f^1(t)|}{y}\Big)\,dt.$$

Отсюда и из оценки (2.9), примененной при $g(x) = f^1(x)$, получаем соотношение (2.10) для функции f^1 вместо f. Замечая, что в (2.10) используются значения функции f лишь на $[-\pi,\pi)$, заключаем, что (2.10) справедливо и для функции f.

Пусть $\alpha > 0$. Тогда для точки $v = \alpha x$ и функции $h(u) = f(u/\alpha)$ имеем

$$\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt = \int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)\frac{\sin\alpha m_k t}{t}\,dt$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{v+u}{\alpha}\right)\frac{\sin m_k u}{u}\,du = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} h(v+u)D^*_{m_k}(u)\,du.$$

Отсюда с помощью оценки (2.10), примененной к функции $h(u)$, получаем

$$\operatorname{mes}\Big\{x\in\Big(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\operatorname{mes}\Big\{v\in\Big(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} h(u+v)D^*_{m_k}(u)\,du\Big| > y\Big\}$$

$$\leqslant \frac{C_2}{\alpha}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi\Big(\frac{|h(v)|}{y}\Big)\,dv = C_2\int\limits_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx \leqslant C_2\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx. \tag{2.12}$$

Далее пусть $j_0 = [\alpha]+1$. Поскольку

$$\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$\subset \bigcup_{j=-j_0}^{j_0}\Big\{x\in\Big(-\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi j}{\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi j}{\alpha}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$= \bigcup_{j=-j_0}^{j_0}\Big\{x\in\Big(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\Big):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f\Big(t+x-\frac{\pi j}{\alpha}\Big)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\},$$

то согласно (2.12)

$$\operatorname{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big| > y\Big\}$$

$$\leqslant \sum_{j=-j_0}^{j_0} C_2\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x-\pi j/\alpha)|}{y}\Big)\,dx \leqslant C_3\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)\,dx, \tag{2.13}$$

где $C_3 = C_2(2\alpha+3)$. Наконец,

$$\operatorname{mes}\{x\in[-\pi,\pi): M^*(f,\theta,x)>y\} = \operatorname{mes}\Big\{x\in(\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big|>y\Big\}$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big|>\frac{y}{2}\Big\}$$

$$+\operatorname{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha})} f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)\,dt\Big|>\frac{y}{2}\Big\} = \mu_1+\mu_2. \qquad (2.14)$$

Согласно (2.13), а также (2.11) имеем $\mu_1 \leqslant 4C_3\int_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)dx$. Получим аналогичную оценку для μ_2, и тем самым неравенство (2.7) будет доказано.

Используя представление функции φ в виде (2.1), для $x\in(-\pi,\pi)$ и $u_0\geqslant 0$ имеем

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\Big|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha})}\frac{f(t+x)D^*_{\alpha m_k}(t)}{y}\,dt\Big| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha})}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt$$

$$\leqslant \int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt + \int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt.$$

Отсюда

$$\mu_2 \leqslant \operatorname{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt>\frac{1}{4}\Big\}$$

$$+\operatorname{mes}\Big\{x\in(-\pi,\pi):\ \Big(\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt\Big)^{3/2}>\frac{1}{4^{3/2}}\Big\} = \mu_2^1+\mu_2^2. \qquad (2.15)$$

Применяя к первому слагаемому в правой части (2.15) неравенство Чебышева, а затем используя представление функции φ в виде (2.1), получаем

$$\mu_2^1 \leqslant 4\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt\,dx \leqslant 16\alpha\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}:\ \frac{|f(t)|}{y}>u_0\big\}}\frac{|f(t)|}{y}\,dt \leqslant C_4\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big)\,dt.$$

Действуя аналогичным образом со слагаемым μ_2^2, используя вдобавок неравенство Гельдера для интегралов, имеем

$$\mu_2^2 \leqslant 4^{3/2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}\setminus(\frac{-\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}):\ \frac{|f(t+x)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\frac{|f(t+x)|}{|t|y}\,dt\Big)^{3/2}dx$$

$$\leqslant 2\cdot 4^{3/2}\pi\int\limits_{\big\{t\in\mathbb{R}:\ \frac{|f(t)|}{y}\leqslant u_0\big\}}\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big)^{3/2}dt\,\Big(\int\limits_{\{t\in\mathbb{R}:|t|\geqslant\frac{\pi}{2\alpha}\}}\frac{dt}{t^3}\Big)^{1/2} \leqslant C_5\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big)dt.$$

Таким образом, $\mu_2 \leqslant \mu_2^1 + \mu_2^2 \leqslant (C_4 + C_5) \int_{\mathbb{R}} \varphi\Big(\frac{|f(t)|}{y}\Big) dt$, и (2.7) доказано.

Обратимся теперь к оценке (2.8). Поскольку для любой функции $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ подпоследовательность $S_{m_k}(g, x)$ сумм Фурье сходится почти всюду на $[0, 2\pi)$, то подпоследовательность $\tilde{S}_{m_k}(g, x)$ сопряженных сумм Фурье любой функции g из $\varphi(L)([0, 2\pi))$ также сходится почти всюду [17, т. 2, гл. 13, замечание 1 к теореме 5.1]. Дальнейшее доказательство справедливости оценки (2.8) аналогично приведенному доказательству справедливости оценки (2.7), поскольку использованные свойства ядра Дирихле и модифицированного ядра Дирихле аналогичны соответствующим свойствам сопряженного ядра Дирихле и модифицированного сопряженного ядра Дирихле. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\alpha > 0$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда для функции $f \in L^2(\mathbb{R})$, последовательности $\theta = \{\alpha m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и числа $y > 0$*

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi, \pi) : M^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant \frac{A_4}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x) dx, \tag{2.16}$$

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi, \pi) : \tilde{M}^*(f, \theta, x) > y\} \leqslant \frac{A_4}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(x) dx, \tag{2.17}$$

где константа A_4 не зависит ни от f, ни от y.

Доказательство. Согласно теореме Карлесона [1] ряд Фурье любой функции $f \in L^2([0, 2\pi))$ сходится почти всюду. Отсюда следует, что для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ мажоранта $M(g, x) = M(g, \{m_k\}, x) = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |S_{m_k}(g, x)|$ почти всюду конечна. Дальнейшее доказательство почти идентично доказательству леммы 3. В самом деле, при получении оценки (2.13) в доказательстве леммы 3 мы пользовались лишь следующими свойствами функции $\varphi \in \Phi : \varphi(0) = 0$, выпуклость $\varphi(u)$ на $[0, +\infty)$ и вогнутость $\varphi(\sqrt{u})$ на $[0, +\infty)$. А этими свойствами функция $\varphi(u) = u^2$ обладает. Следовательно, имеет место следующий аналог (2.13):

$$\operatorname{mes}\Bigg\{x \in (-\pi, \pi) : \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{-\pi/(2\alpha)}^{\pi/(2\alpha)} f(t + x) D^*_{\alpha m_k}(t)\, dt \Bigg| > y\Bigg\} \leqslant C_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{|f(x)|}{y}\Big)^2 dx. \tag{2.18}$$

Теперь воспользуемся неравенством (2.14). Затем к слагаемому μ_1 применим (2.18), а для слагаемого μ_2 справедлива следующая цепочка неравенств

$$\mu_2 \leqslant \operatorname{mes}\Bigg\{x \in (-\pi, \pi) : \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R} \setminus \left(\frac{-\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{|f(t + x)|}{|t| y} dt\Bigg)^2 > \frac{1}{4}\Bigg\}$$

$$\leqslant 8\pi \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\frac{f(t)}{y}\Big)^2 dt \int\limits_{\mathbb{R} \setminus \left(\frac{-\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{1}{t^2} dt = \frac{C_6}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}} f^2(t) dt.$$

Таким образом, (2.16) доказано. Оценка (2.17) доказывается аналогично оценке (2.8). Лемма доказана.

3. Основные леммы и доказательство теоремы 1

Пусть d — натуральное число, $B \subset \{1, 2, \ldots, d\}$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ — d-мерный вектор с положительными координатами. Для функции f, определенной на $\mathbb{R}^d$, и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ положим

$$S^*_{k,B}(f, \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \prod_{j \in B} (-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod_{j \in \{1, \ldots, d\} \setminus B} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \quad M^*_B(f, \mathbf{x}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |S^*_{k,B}(f, \mathbf{x})|.$$

Лемма 5. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g \in \varphi(L)([0, 2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g, x)$ сходится почти всюду. Тогда для каждого $d \in \mathbb{N}$ и d-мерного вектора $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ с положительными координатами найдется константа $K_d > 0$ такая, что для любой функции $f \in \varphi(L)(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, для всех $B \subset \{1, 2, \dots, d\}$ и любых $y > 1$*

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d : M_B^*(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d}{y} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^{d-1}\, d\mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Лемма 6. *Пусть $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $d \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ — d-мерный вектор с положительными координатами. Тогда найдется константа $K_d > 0$ такая, что для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, для всех $B \subset \{1, 2, \dots, d\}$ и любых $y > 0$*

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x} \in [-\pi, \pi)^d : M_B^*(f, \mathbf{x}) > y\Big\} \leqslant \frac{K_d}{y^2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{3.2}$$

Доказательство лемм 5 и 6 будем вести одновременно индукцией по d.

База индукции. При $d = 1$ утверждение леммы 6 вытекает из леммы 4: для $B = \{\varnothing\}$ оценка (3.2) есть оценка (2.16), а для $B = \{1\}$ — оценка (2.17).

Поскольку функция φ выпуклая и $\varphi(0) = 0$, то для любых $u \geqslant 0$ и $y \geqslant 1$ $\varphi\Big(\dfrac{u}{y}\Big) \leqslant \dfrac{\varphi(u)}{y}$. С учетом этого неравенства, при $d = 1$ утверждение леммы 5 следует из леммы 3: для $B = \{\varnothing\}$ оценка (3.1) вытекает из оценки (2.7), а для $B = \{1\}$ — из оценки (2.8).

В случае леммы 5 обозначим для краткости

$$\varphi_d(u) = \varphi(u)(\ln^+ u)^{d-1}, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Шаг индукции. Пусть $d \geqslant 2$. Предположим, что оценка (3.1) верна для размерности $d - 1$, и докажем ее для размерности d. Пусть B — некоторое подмножество множества $N_d = \{1, 2, \dots, d\}$. Обозначим $\bar{B} = N_d \backslash B$. Рассмотрим три случая.

Случай 1: $1 \in \bar{B}$, $2 \in \bar{B}$.
Обозначим

$$\Pi_k = \Pi_k(t_3, \dots, t_d) = \prod_{j \in B \backslash \{1,2\}} (-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(t_j)) \prod_{j \in \bar{B} \backslash \{1,2\}} D^*_{\alpha_j m_k}(t_j).$$

Тогда

$$S^*_{k,B}(f, \mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) \Pi_k(t_3, \dots, t_d) f(\mathbf{x} + \mathbf{t})\, d\mathbf{t}. \tag{3.4}$$

Для произведения ядер Дирихле $D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)$ имеет место равенство (см. [14, соотношение (3.4)])

$$D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1) D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2) = D_k^1 + D_k^2, \tag{3.5}$$

где

$$D_k^1 = \frac{1}{2t_1}\Big[\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big) - \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1\Big)\Big], \tag{3.6}$$

$$D_k^2 = \frac{1}{2t_2}\Big[\tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big) - \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2\Big)\Big]. \tag{3.7}$$

Заметим, что при каждом k функции D_k^1 и D_k^2 ограничены.

Далее будем считать, что $f \in \varphi_d(L)(\mathbb{R}^d)$ (в случае леммы 5) или $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (в случае леммы 6). Пусть $(x_1, \dots, x_d) \in [-\pi, \pi)^d$. Умножим обе части равенства (3.6) на

$$\Pi_k(t_3, \dots, t_d) f(x_1 + t_1, \dots, x_d + t_d)$$

и проинтегрируем по множеству $\{(t_1, t_2, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d : |t_1| > \varepsilon\}$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на разность двух интегралов в соответствии с разностью в (3.6), сделаем в них замену переменных соответственно $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1,\ u_2 = t_2 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} t_1,\ u_3 = t_3, \ldots, u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$. Получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^1 \Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(x_1 + t_1, \ldots, x_d + t_d)\, dt_1 \ldots dt_d$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1, -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d, \tag{3.8}$$

где функции $h^{1, -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ и $h^{1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ определены соотношением (2.2). Проделав с равенством (3.7) то же, что и с (3.6), только производя при этом замены $u_1 = t_1 + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2,\ u_2 = t_2, \ldots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} t_2,\ u_2 = t_2, \ldots, u_d = t_d$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} D_k^2 \Pi_k(t_3, \ldots, t_d) f(x_1 + t_1, \ldots, x_d + t_d)\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d)\, h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d)\ h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d. \tag{3.9}$$

Используя определение $M_B^*(f, \mathbf{x})$, (3.4), (3.5), (3.8) и (3.9), имеем

$$2M_B^*(f, \mathbf{x})$$

$$\leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1, -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+ \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{1, \frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_2 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+ \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d \Bigg|$$

$$+ \sup_{k \in \mathbb{N}} \Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \tilde{D}^*_{\alpha_1 m_k}(u_1) \Pi_k(u_3, \ldots, u_d) h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \ldots, x_d + u_d)\, du_1 du_3 \ldots du_d \Bigg|$$

$$= M_B^1(f, \mathbf{x}) + M_B^2(f, \mathbf{x}) + M_B^3(f, \mathbf{x}) + M_B^4(f, \mathbf{x}). \tag{3.10}$$

Покажем, что $M_B^1(f, \mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству (3.1) (в случае леммы 5) или неравенству (3.2) (в случае леммы 6) с некоторой константой K_d^1. Зафиксируем $x_1 \in [-\pi, \pi)$. Тогда множество $B' = B \cup \{2\} \subset \{2, \ldots, d\}$, последовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, $d - 1$-мерный вектор

$(\alpha_2,\dots,\alpha_d)$ и построенный на их основе применяемый к функции $d-1$ переменного $g(x_2,\dots,x_d)$ оператор

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|S^*_{k,B'}(g,(x_2,\dots,x_d))|,$$

где

$$S^*_{k,B'}(g,(x_2,\dots,x_d))\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\prod_{j\in B'}(-\tilde{D}^*_{\alpha_j m_k}(u_j))\prod_{j\in\{2,\dots,d\}\setminus B'}D^*_{\alpha_j m_k}(u_j)g(x_2+u_2,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d,$$

удовлетворяют предположению индукции. Поэтому согласно предположению индукции для функции $g(x_2,\dots,x_d)=h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)$ (x_1 фиксировано) в случае леммы 5 справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\sup_{k\in\mathbb{N}}\biggl|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)\\
&\qquad\times h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\biggr|>y\biggr\}\\
&=\operatorname{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl|S^*_{k,B'}\Bigl(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},(x_2,\dots,x_d)\Bigr)\Bigr|>y\biggr\}\\
&\leqslant\frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi_{d-1}\Bigl(\bigl|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)\bigr|\Bigr)\,dx_2\dots dx_d,\quad y>1.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

В случае леммы 6 аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\biggl|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\tilde{D}^*_{\alpha_2 m_k}(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)\\
&\qquad\times h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\biggr|>y\biggr\}\\
&\leqslant\frac{K_{d-1}}{y^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\Bigl(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,x_3,\dots,x_d)\Bigr)^2\,dx_2\dots dx_d,\quad y>0.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\Bigl\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d:M^1_B(f,\mathbf{x})>y\Bigr\}\\
&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{mes}\biggl\{(x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^{d-1}:\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl|S^*_{k,B'}\Bigl(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}},(x_2,\dots,x_d)\Bigr)\Bigr|>y\biggr\}\,dx_1,
\end{aligned}$$

а затем применяя (3.11) и теорему Фубини, в случае леммы 5 получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes}\Bigl\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d:\ M^1_B(f,\mathbf{x})>y\Bigr\}\\
&\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi_{d-1}\Bigl(\bigl|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,\dots,x_d)\bigr|\Bigr)\,dx_2\dots dx_d\,dx_1\\
&\leqslant\frac{K_{d-1}}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi_{d-1}\Bigl(\bigl|h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,\dots,x_d)\bigr|\Bigr)\,dx_1dx_2\dots dx_d.
\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 для $y>1$ заключаем

$$\operatorname{mes}\Big\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d\colon M_B^1(f,\mathbf{x})>y\Big\}\leqslant\ \frac{K_d^1}{y}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi_d(|f(x_1,x_2,\dots,x_d)|)\,dx_1dx_2\dots dx_d.$$

Аналогичным образом в случае леммы 6 из (3.12) имеем

$$\operatorname{mes}\Big\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d\colon M_B^1(f,\mathbf{x})>y\Big\}$$

$$\leqslant\frac{K_{d-1}}{y^2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(h^{1,-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}(x_1,x_2,\dots,x_d)\Big)^2\,dx_1dx_2\dots dx_d,$$

откуда с помощью леммы 2 для $y>0$

$$\operatorname{mes}\Big\{(x_1,x_2,\dots,x_d)\in[-\pi,\pi)^d\colon M_B^1(f,\mathbf{x})>y\Big\}\leqslant\ \frac{K_d^1}{y^2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(f(x_1,x_2,\dots,x_d))^2\,dx_1dx_2\dots dx_d.$$

Аналогично можно показать, что мажоранты $M_B^i(f,\mathbf{x})$, $i=2,3,4$, также удовлетворяют (3.1) (или (3.2)) с той же константой K_d^1. Таким образом, для $M_B(f,\mathbf{x})$ неравенство (3.1) (в случае леммы 5) или неравенство (3.2) (в случае леммы 6) выполняется с константой $K_d=4K_d^1$.

С л у ч а й 2: $1\in B$, $2\in\bar B$. (Случай, когда $1\in\bar B$, $2\in B$, рассматривается аналогично). Здесь

$$S_{k,B}^*(f,\mathbf{x})=-\int\limits_{\mathbb{R}^d}\tilde D_{\alpha_1m_k}^*(t_1)D_{\alpha_2m_k}^*(t_2)\Pi_k(t_3,\dots,t_d)f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\,d\mathbf{t}. \tag{3.13}$$

Воспользуемся равенством (см. [14, соотношение (3.12)])

$$\tilde D_{\alpha_1m_k}^*(t_1)D_{\alpha_2m_k}^*(t_2)=D_k^3+D_k^4, \tag{3.14}$$

где

$$D_k^3=\frac{1}{2t_1}\Big[D_{\alpha_2m_k}^*\Big(t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)+D_{\alpha_2m_k}^*\Big(t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)-2D_{\alpha_2m_k}^*(t_2)\Big], \tag{3.15}$$

$$D_k^4=\frac{1}{2t_2}\Big[D_{\alpha_1m_k}^*\Big(t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)-D_{\alpha_1m_k}^*\Big(t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)\Big]. \tag{3.16}$$

Обе части равенства (3.15) умножим на произведение $\Pi_kf(\mathbf{x}+\mathbf{t})$ и проинтегрируем по множеству $\{(t_1,t_2,\dots,t_d)\in\mathbb{R}^d:|t_1|>\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на три интеграла, сделаем в первых двух из них замену переменных соответственно $u_1=t_1,\ u_2=t_2+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1,\ u_3=t_3,\dots,u_d=t_d$ и $u_1=t_1,\ u_2=t_2-\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1,\ u_3=t_3,\dots,u_d=t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon\to0$. Аналогичные действия проделаем с равенством (3.16). Используя получившиеся соотношения, а также (3.14) и (3.13), придем к неравенству

$$2M_B^*(f,\mathbf{x})$$

$$\leqslant\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}D_{\alpha_2m_k}^*(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}D_{\alpha_2m_k}^*(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}D_{\alpha_2m_k}^*(u_2)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{1,0}(x_1,x_2+u_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_2\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_1du_3\dots du_d\Bigg|$$

$$+\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} D^*_{\alpha_1 m_k}(u_1)\Pi_k(u_3,\dots,u_d)h^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1},1}(x_1+u_1,x_2,x_3+u_3,\dots,x_d+u_d)\,du_1du_3\dots du_d\Bigg|. \quad (3.17)$$

Используя те же рассуждения, что и в случае 1, можно показать, что все пять слагаемых в правой части (3.17) удовлетворяют (3.1) (или (3.2)), откуда следуют (3.1) и (3.2) для $M_B(f,\mathbf{x})$.

С л у ч а й 3: $1\in B$, $2\in B$.

Этот случай рассматривается аналогично двум предыдущим. Здесь используется тождество $\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)=D^5_k+D^6_k$, где

$$D^5_k=\frac{1}{2t_1}\Big[\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2+\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)+\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}\Big(t_2-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}t_1\Big)-2\tilde D^*_{\alpha_2 m_k}(t_2)\Big],$$

$$D^6_k=\frac{1}{2t_2}\Big[\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)+\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}\Big(t_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}t_2\Big)-2\tilde D^*_{\alpha_1 m_k}(t_1)\Big].$$

Таким образом, (3.1) и (3.2) справедливы для любого $d\in\mathbb{N}$ и произвольного $B\subset\{1,2,\dots,d\}$. Леммы 5 и 6 доказаны.

Лемма 7. *Пусть $\varphi\in\Phi$, $\tilde\varphi(u)=\max\{u,\varphi(u)\}$ для $u\geqslant 0$, $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Предположим, что для любой функции $g\in\varphi(L)([0,2\pi))$ последовательность сумм Фурье $S_{m_k}(g,x)$ сходится почти всюду. Тогда для каждого $d\in\mathbb{N}$ и d-мерного вектора $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$ с положительными координатами найдется константа $\bar K_d>0$ такая, что для любой функции $f\in\tilde\varphi(L)(\ln^+L)^d(\mathbb{R}^d)$ и для всех $B\subset\{1,2,\dots,d\}$*

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant \bar K_d\bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\tilde\varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+|f(\mathbf{x})|)^d\,d\mathbf{x}+1\bigg). \quad (3.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in\tilde\varphi(L)(\ln^+L)^d(\mathbb{R}^d)$. Положим $\lambda_f(y)=\operatorname{mes}\big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d: M^*_B(f,\mathbf{x})>y\big\}$. Тогда

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^d-\int\limits_2^\infty y\,d\lambda_f(y)\leqslant 2(2\pi)^d+\int\limits_2^\infty \lambda_f(y)dy. \quad (3.19)$$

Для $y>0$, обозначив

$$f^1(\mathbf{x})=f^1_y(\mathbf{x})=\begin{cases} f(\mathbf{x}), & |f(\mathbf{x})|>y,\\ 0, & |f(\mathbf{x})|\leqslant y,\end{cases}\qquad f^2(\mathbf{x})=f^2_y(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-f^1(\mathbf{x}),$$

имеем

$$\lambda_f(y)\leqslant \operatorname{mes}\{x\in[-\pi,\pi)^d: M^*_B(f^1,\mathbf{x})>y/2\}+\operatorname{mes}\big\{x\in[-\pi,\pi)^d: M^*_B(f^2,\mathbf{x})>y/2\big\}$$
$$=\lambda_{f^1}(y/2)+\lambda_{f^2}(y/2). \quad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) получаем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M^*_B(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\leqslant 2(2\pi)^d+\int\limits_2^\infty \lambda_{f^1}(y/2)dy+\int\limits_2^\infty \lambda_{f^2}(y/2)dy.$$

Нетрудно видеть, что $f^1\in\varphi(L)(\ln^+L)^{d-1}(\mathbb{R}^d)$, а $f^2\in L^2(\mathbb{R}^d)$. Поэтому к функции f^1 можно применить лемму 5 и оценить $\lambda_{f^1}(y/2)$ с помощью неравенства (3.1); аналогично к функции f^2

можно применить лемму 6 и оценить $\lambda_{f^2}(y/2)$ с помощью неравенства (3.2). В результате заключаем

$$\int\limits_{[-\pi,\pi)^d} M_B^*(f,\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \;\leqslant\; 2(2\pi)^d + 2K_d\int\limits_2^\infty\biggl(\frac{1}{y}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d:|f(\mathbf{t})|>y\}}\varphi(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\,d\mathbf{t}\biggr)dy$$

$$+\,2K_d\int\limits_2^\infty\biggl(\frac{1}{y^2}\int\limits_{\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d:|f(\mathbf{t})|\leqslant y\}}|f(\mathbf{t})|^2\,d\mathbf{t}\biggr)dy$$

$$=2K_d\int\limits_{\mathbb{R}^d\cap\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}^d:|f(\mathbf{t})|>2\}}\varphi(|f(\mathbf{t})|)(\ln^+|f(\mathbf{t})|)^{d-1}\biggl(\int\limits_2^{|f(\mathbf{t})|}\frac{dy}{y}\biggr)\,d\mathbf{t}+2K_d\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{t})|^2\biggl(\int\limits_{|f(\mathbf{t})|}^\infty\frac{dy}{y^2}\biggr)d\mathbf{t}+2(2\pi)^d,$$

откуда очевидно вытекает (3.18). Лемма 7 доказана.

Теперь для доказательства теоремы 1 достаточно повторить рассуждения разд. 4 работы [14]. При этом вместо лемм 4 и 5 из [14] нужно в соответствующих местах использовать соответственно леммы 5 и 7 настоящей работы. В итоге получим существование константы $C_7>0$ такой, что для любой функции $f\in\varphi(L)(\ln^+L)^{d-1}([0,2\pi)^d)$ и любых $y>1$

$$\operatorname{mes}\Bigl\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\sup_{k\in\mathbb{N}}\Bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\Bigr|>y\Bigr\}\leqslant\frac{C_7}{y}\biggl(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+(|f(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}+1\biggr). \quad (3.21)$$

Из (3.21) и неравенства $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\bigr|\leqslant 2\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\bigr|$ следует

$$\operatorname{mes}\Bigl\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\Bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\Bigr|>y\Bigr\}$$

$$\leqslant\frac{2C_7}{y}\biggl(\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|f(\mathbf{x})|)(\ln^+(|f(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}+1\biggr). \quad (3.22)$$

Пусть $y>0$. Для любого сколь угодно большого $\alpha>0$ найдется кратный тригонометрический полином g такой, что

$$\frac{2C_7}{y}\int\limits_{[-\pi,\pi)^d}\varphi(|\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|)(\ln^+(|\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})|))^{d-1}d\mathbf{x}<1. \quad (3.23)$$

Каждый член последовательности $\{\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})\}_{k=1}^\infty$ является (кратным) тригонометрическим полиномом, степень которого по каждой переменной не превосходит соответствующей степени полинома g. Так как для нашей последовательности векторов $\mathbf{n}_k=(n_k^1,n_k^2,\dots,n_k^d)$ $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant d}n_k^j\to\infty$ при $k\to\infty$, то все полиномы $\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})$, начиная с некоторого номера, совпадают между собой. Следовательно, для всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(g,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(g,\mathbf{x})\bigr|=0$, откуда

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(\alpha f,\mathbf{x})\bigr|$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})\bigr|,\quad \mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d. \quad (3.24)$$

Применяя последовательно (3.24), (3.22) к функции $\alpha f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})$ и (3.23), получаем

$$\operatorname{mes}\Bigl\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d:\lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\bigl|\tilde S_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde S_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\bigr|>y\Bigr\}$$

$$\leqslant \operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\big|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})-\tilde{S}_{\mathbf{n}_l,B}(\alpha f-g,\mathbf{x})\big|>\alpha y\Big\}\leqslant\frac{1}{\alpha}.$$

Устремляя здесь α к $+\infty$, для любого $y>0$ заключаем

$$\operatorname{mes}\Big\{\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d : \lim_{m\to\infty}\sup_{k,l>m}\big|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde{S}_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\big|>y\Big\}=0.$$

Таким образом, для почти всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{k,l>m}\big|\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})-\tilde{S}_{\mathbf{n}_l,B}(f,\mathbf{x})\big|=0$, т. е. для почти всех $\mathbf{x}\in[-\pi,\pi)^d$ последовательность $\{\tilde{S}_{\mathbf{n}_k,B}(f,\mathbf{x})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carleson L.** On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta math.. 1966. Vol. 116, no. 1-2. P. 135–157.
2. **Hunt R.A.** On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues. Carbondale: SIU Press, 1968. P. 235–255.
3. **Sjölin P.** An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series // Arkiv för mat. 1969. Vol. 7. P. 551–570.
4. **Antonov N.Yu.** Convergence of Fourier series // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 187–196.
5. **Конягин С.В.** О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 103–126.
6. **Конягин С. В.** О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т.11, № 2. С. 112–119.
7. **Lie V.** On the pointwise convergence of the sequences of partial Fourier sums along lacunary subsequences // J. Funct. Anal. 2012. Vol. 263. P. 3391–3411.
8. **Di Plinio F.** Lacunary Fourier and Walsh–Fourier series near L^1 // Collect. Math. 2014. Vol. 65, no. 2. P. 219–232.
9. **Тевзадзе Н.Р.** О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.
10. **Fefferman C.** On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, no. 5. P. 744–745.
11. **Sjölin P.** Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv för mat. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 65–90.
12. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, № 2. С. 3–22.
13. **Konyagin S.V.** On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. Vol. 61, no. 1–4. P. 305–329.
14. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, №3. С. 3–18.
15. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.
16. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.
17. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.

Антонов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Поступила 20.10.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОДНОСТОРОННИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРВАЛОВ МНОГОЧЛЕНАМИ НА ОТРЕЗКЕ С ВЕСОМ[1]

А. Г. Бабенко, М. В. Дейкалова, С. Д. Ревес

Рассматривается задача одностороннего взвешенного интегрального приближения алгебраическими многочленами на отрезке $[-1,1]$ характеристических функций полуинтервала $(a,1] \subset (-1,1]$ и интервала $(a,b) \subset (-1,1)$. В случае полуинтервала задача решена полностью. Построен пример, иллюстрирующий трудности, возникающие в случае интервала.

Ключевые слова: одностороннее приближение, характеристическая функция, многочлены.

A. G. Babenko, M. V. Deikalova, Sz. G. Revesz. Weighted one-sided approximation of characteristic functions of intervals by polynomials on a closed interval.

We consider the problem of weighted one-sided approximation on the interval $[-1,1]$ of characteristic functions of intervals $(a,1] \subset (-1,1]$ and $(a,b) \subset (-1,1)$ by algebraic polynomials. In the case of half-intervals, the problem is solved completely. We construct an example to illustrate difficulties arising in the case of an open interval.

Keywords: one-sided approximation, characteristic function, polynomials

1. Введение

Односторонние интегральные приближения ступенчатых функций алгебраическими многочленами во взвешенной интегральной метрике на отрезке $[-1,1]$ фактически изучали в 1880-е годы А. А. Марков [4, ст. 1] и Т. И. Стилтьес [13] (см. [6, п. 3.411], а также леммы 9, 9′ в [5, гл. 1, разд. 1.2]). В частности, ими была предложена конструкция многочлена четной степени $2m-2$, график которого расположен над графиком характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,h]}$ отрезка $[-1,h]$, $h \in (-1,1)$. В случае, когда h совпадает с одним из узлов m-точечной квадратурной формулы Гаусса, указанный многочлен является экстремальным в задаче о наилучшем взвешенном интегральном приближении сверху функции $\mathbf{1}_{[-1,h]}$. Задачи одностороннего взвешенного интегрального приближения характеристической функции интервала алгебраическими или тригонометрическими полиномами возникают в различных разделах математики, они имеют богатую историю. Приведем несколько точных результатов, имеющих непосредственное отношение к данной работе. В [11] исследовалась, в частности, задача одностороннего приближения периодического продолжения характеристической функции интервала (a,b) тригонометрическими полиномами в интегральной метрике на периоде с весом Якоби. Точное решение было найдено в [11, Theorem 3] для некоторых значений a,b, удовлетворяющих специальным уравнениям. В случае единичного веса для произвольного интервала, расположенного на периоде, задача была решена в [1]. В [8] решена задача одностороннего интегрального приближения характеристической функции произвольного полуинтервала $(h,1] \subset (-1,1]$ алгебраическими многочленами на $[-1,1]$ с единичным весом и описан весь класс экстремальных многочленов.

В данной работе изучаются аналогичные задачи на отрезке $[-1,1]$ с весом достаточно общего вида. Точнее, в разд. 3 рассматривается задача одностороннего взвешенного интегрального

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1), а также Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

приближения многочленами характеристической функции полуинтервала $(a, 1] \subset (-1, 1]$. При этом оценки снизу получаются по известной схеме с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности с положительными коэффициентами и с несколькими фиксированными узлами. Таким формулам посвящено большое количество работ (см. [9; 10; 12] и приведенную там библиографию). Эти формулы имеют многочисленные приложения. Наиболее удобными для наших целей являются формулы, полученные в [9; 10]. Оценки сверху найдены с помощью многочленов, способы построения которых восходят к А. А. Маркову и Т. И. Стилтьесу (см. начало данного разд.); в дальнейшем указанные способы были дополнены в [1, лемма 1; 8, Sect. 5]. Здесь также рассматривается задача одностороннего взвешенного интегрального приближения многочленами характеристической функции интервала $(a, b) \subset (-1, 1)$. В разд. 3 построен пример, показывающий существенное отличие этого случая от случая полуинтервала $(a, 1]$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathscr{P}_m$ — множество алгебраических многочленов степени не выше m с вещественными коэффициентами. Число m условимся называть *степенью* пространства $\mathscr{P}_m$. Многочлен с единичным старшим коэффициентом называется *приведенным многочленом*.

Рассмотрим неубывающую функцию $\mu\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ с бесконечным числом точек роста. Распределение $d\mu(x)$ условимся называть *весом*. Символом L обозначим пространство вещественнозначных μ-интегрируемых на $[-1, 1]$ функций $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, наделенное нормой $\|f\| = \displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\, d\mu(x)$.

Ниже неравенство $f \le g$ для функций f, g означает, что $f(x) \le g(x)$ при всех $x \in [-1, 1]$.

Величины наилучшего приближения снизу и сверху ограниченной функции $f \in L$ множеством $\mathscr{P}_m$ в метрике пространства L определяются, соответственно, формулами

$$E^-_m(f) = \inf_{p \le f,\ p \in \mathscr{P}_m} \|f - p\|, \qquad E^+_m(f) = \inf_{f \le p,\ p \in \mathscr{P}_m} \|f - p\|. \tag{2.1}$$

Многочлены, реализующие точные нижние грани в (2.1), называются многочленами наилучшего (взвешенного интегрального) приближения функции f снизу и, соответственно, сверху.

Множество $\mathscr{P}_{m-1}$ алгебраических многочленов степени не выше $m-1$ является линейным подпространством пространства L размерности m. Пространство $\mathscr{P}^*_{m-1}$ всех линейных функционалов на $\mathscr{P}_{m-1}$ также имеет размерность m. Сопоставим числу $\xi \in \mathbb{R}$ линейный функционал Дирака δ_ξ, действующий на многочлены $p \in \mathscr{P}_{m-1}$ по правилу $\delta_\xi p = p(\xi)$. Известно, что если $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, то набор функционалов $\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_m}\}$ является базисом в $\mathscr{P}^*_{m-1}$. Поэтому любой линейный функционал на $\mathscr{P}_{m-1}$ представим в виде линейной комбинации указанных функционалов. В частности, линейный функционал I_μ, действующий на $\mathscr{P}_{m-1}$ по правилу $I_\mu p = \displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\, d\mu(x)$, представим в виде линейной комбинации $I_\mu = \lambda_1 \delta_{x_1} + \lambda_2 \delta_{x_2} + \dots + \lambda_m \delta_{x_m}$. При этом коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ определяются по набору $x_1, x_2, \dots, x_m$ однозначно. Иными словами, на $\mathscr{P}_{m-1}$ справедлива формула

$$\int\limits_{-1}^{1} p(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p(x_k), \tag{2.2}$$

которую называют *m-точечной квадратурной формулой*. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называют *коэффициентами* этой квадратурной формулы, точки $x_1, x_2, \dots, x_m$ — ее *узлами*, а многочлен $w_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)$ — ее *производящим многочленом*.

Сопоставим узлу x_k *фундаментальный многочлен Лагранжа* $\ell_k(x) = \dfrac{w_m(x)}{(x - x_k) w'_m(x_k)}$, который в узле x_k принимает значение 1, а в остальных узлах — 0. Подставив его в (2.2), получим

$$\lambda_k = \int_{-1}^{1} \ell_k(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{w_m'(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{w_m(x)}{x - x_k}\, d\mu(x), \quad k \in \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{2.3}$$

Квадратурная формула (2.2), коэффициенты которой вычисляются по формуле (2.3), называется *интерполяционной*. Таким образом, *для того чтобы m-точечная квадратурная формула* (2.2) *была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она выполнялась на $\mathscr{P}_{m-1}$* (см. [3, гл. 6, § 1, теорема 1]).

В дальнейшем будут рассматриваться только такие квадратурные формулы. При этом в обозначениях коэффициентов указанных квадратурных формул будут использоваться те же индексы, что и у соответствующих узлов. Заметим, что для интерполяционной квадратурной формулы достаточно знать ее узлы (или, что равносильно, — ее производящий многочлен), поскольку в силу (2.3) коэффициенты восстанавливаются по узлам однозначно. Учитывая это обстоятельство иногда будем говорить лишь об узлах такой квадратурной формулы, либо о производящем многочлене.

Известно, что за счет специального выбора узлов можно добиться увеличения степени пространства многочленов, на котором квадратурная формула (2.2) будет оставаться справедливой (при этом коэффициенты этой формулы будут вычисляться по формуле (2.3)). Максимальная степень пространства многочленов, для которого квадратурная формула вида (2.2) справедлива, называется *степенью точности* этой квадратурной формулы.

Известно также, что существуют m-точечные интерполяционные квадратурные формулы вида (2.2) с положительными коэффициентами $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2 \ldots, m$. Такие квадратурные формулы называются *положительными*. Важным примером положительной m-точечной квадратурной формулы является квадратурная формула Гаусса, производящий многочлен которой совпадает с приведенным многочленом $p_m(x) = p_m(x, d\mu)$ степени m, который ортогонален $\mathscr{P}_{m-1}$ с весом $d\mu$, т. е. ортогонален $\mathscr{P}_{m-1}$ относительно скалярного произведения $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, d\mu(x)$. Квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-1}^{1} p(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* p(x_j^*), \quad -1 < x_1^* < \cdots < x_m^* < 1, \quad p \in \mathscr{P}_{2m-1}, \tag{2.4}$$

обладает наивысшей степенью точности, равной $2m - 1$, все ее узлы лежат в открытом интервале $(-1, 1)$. Узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса зависят от m; чтобы подчеркнуть эту зависимость иногда вместо λ_j^*, x_j^* будем использовать обозначения $\lambda_{m,j}^*$, $x_{m,j}^*$.

Ниже нам понадобятся m-точечные квадратурные формулы с несколькими фиксированными узлами, при этом максимально возможной степени точности. Такие формулы для алгебраических многочленов изучались давно, начиная с исследований Р. Лобатто (1852), Э. Б. Кристоффеля (1858), Р. Радо (1880), которые относятся к случаю фиксированных узлов, расположенных в концевых точках отрезка интегрирования либо вне этого отрезка.

Обозначим символом $\mathfrak{u}$ подмножество множества узлов квадратурной формулы, состоящее из фиксированных узлов. Для наших целей достаточно рассмотреть m-точечные квадратурные формулы максимально возможной степени точности с одним, двумя или тремя фиксированными узлами. Точнее, $\mathfrak{u}$ совпадает с одним из множеств

$$\{-1\}, \quad \{1\}, \quad \{-1, 1\}, \quad \{\theta\}, \quad \{-1, \theta\}, \quad \{\theta, 1\}, \quad \{-1, \theta, 1\}, \quad \text{где} \quad \theta \in (-1, 1).$$

Пусть $Q_m^{\mathfrak{u}}$ обозначает m-точечную квадратурную формулу с фиксированным множеством узлов $\mathfrak{u}$ и с максимально возможной степенью точности $\deg Q_m^{\mathfrak{u}} = 2m - 1 - |\mathfrak{u}|$:

$$\int_{-1}^{1} p(x)d\mu(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^{\mathfrak{u}} p\big(x_j^{\mathfrak{u}}\big), \quad x_1^{\mathfrak{u}} < x_2^{\mathfrak{u}} < \cdots < x_m^{\mathfrak{u}}, \quad p \in \mathscr{P}_{2m-1-|\mathfrak{u}|}, \tag{2.5}$$

здесь $|\mathfrak{u}|$ означает количество точек, содержащихся в $\mathfrak{u}$. Узлы и коэффициенты этой формулы зависят от m; чтобы подчеркнуть эту зависимость, иногда вместо $\lambda_j^{\mathfrak{u}}$, $x_j^{\mathfrak{u}}$ будем использовать обозначения $\lambda_{m,j}^{\mathfrak{u}}$, $x_{m,j}^{\mathfrak{u}}$. Поскольку $m \ge |\mathfrak{u}|$, то $\deg Q_m^{\mathfrak{u}} = 2m-1-|\mathfrak{u}| \ge m-1$. Следовательно, формула (2.5) является интерполяционной. В случаях $\mathfrak{u}=\{-1\}$ или $\mathfrak{u}=\{1\}$ формула (2.5) — это левая или правая квадратурная формула Радо соответственно, а в случае $\mathfrak{u}=\{-1,1\}$ — квадратурная формула Лобатто. Такие формулы также называют квадратурными формулами Маркова. Известно, что они являются положительными. Положим

$$\omega^{\{-1\}}(x) = 1+x, \quad \omega^{\{1\}}(x) = 1-x, \quad \omega^{\{-1,1\}}(x) = (1+x)(1-x). \tag{2.6}$$

Рассмотрим многочлены

$$w_m^{\{-1\}}(x) = \omega^{\{-1\}}(x) p_{m-1}\big(x, \omega^{\{-1\}} d\mu\big), \quad w_m^{\{1\}}(x) = -\omega^{\{1\}}(x) p_{m-1}\big(x, \omega^{\{1\}} d\mu\big), \tag{2.7}$$

$$w_m^{\{-1,1\}}(x) = -\omega^{\{-1,1\}}(x) p_{m-2}\big(x, \omega^{\{-1,1\}} d\mu\big), \tag{2.8}$$

где $p_k(x, d\sigma)$ — приведенный ортогональный многочлен степени k с весом $d\sigma$.

Многочлены (2.7) являются производящими многочленами левой и правой квадратурных формул Радо соответственно, а многочлен (2.8) — производящий многочлен квадратурной формулы Лобатто. Нули этих многочленов и производящего многочлена квадратурной формулы Гаусса (2.4) удовлетворяют неравенствам (см. [10, (3)–(6)])

$$x_{m,j}^{\{-1\}} < x_{m,j}^{*} < x_{m,j}^{\{1\}}, \quad j=1,2,\dots,m; \quad x_{m-1,j}^{*} < x_{m,j+1}^{\{-1\}} < x_{m,j+1}^{\{-1,1\}}, \quad j=1,2,\dots,m-1;$$

$$x_{m,j}^{\{-1,1\}} < x_{m,j}^{\{1\}} < x_{m-1,j}^{*}, \quad j=1,2,\dots,m-1; \quad x_{m-1,j}^{\{1\}} < x_{m,j+1}^{\{-1,1\}} < x_{m-1,j+1}^{\{-1\}}, \quad j=1,2,\dots,m-2.$$

Ниже нам понадобится основной результат работы [10], в формулировке которого фактически используются следующие множества:

$$\mathbf{G}_m^{*} = \bigcup_{j=1}^{m} \big(x_{m,j}^{\{-1\}}, x_{m,j}^{\{1\}}\big) \setminus \big\{x_{m,j}^{*}\big\}, \quad m \ge 1;$$

$$\mathbf{G}_m^{\{-1\}} = \bigcup_{j=1}^{m-1} \big(x_{m-1,j}^{*}, x_{m,j+1}^{\{-1,1\}}\big) \setminus \big\{x_{m,j+1}^{\{-1\}}\big\}, \quad \mathbf{G}_m^{\{1\}} = \bigcup_{j=1}^{m-1} \big(x_{m,j}^{\{-1,1\}}, x_{m-1,j}^{*}\big) \setminus \big\{x_{m,j}^{\{1\}}\big\}, \quad m \ge 2;$$

$$\mathbf{G}_m^{\{-1,1\}} = \bigcup_{j=1}^{m-2} \big(x_{m-1,j}^{\{1\}}, x_{m-1,j+1}^{\{-1\}}\big) \setminus \big\{x_{m,j+1}^{\{-1,1\}}\big\}, \quad m \ge 3.$$

Обратим внимание на то (см. [10, Sect. 1]), что

$$\overline{\mathbf{G}_m^{\{1\}} \bigcup \mathbf{G}_{m-1}^{\{-1\}}} = \overline{\mathbf{G}_{m-1}^{*} \bigcup \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}} = [-1,1]. \tag{2.9}$$

Сопоставим множеству $G_m \in \{\mathbf{G}_m^{\{-1\}}, \mathbf{G}_m^{\{1\}}, \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}\}$ многочлен $\omega(x) = \omega(x, G_m)$, совпадающий с соответствующим многочленом из (2.6), а множеству $\mathbf{G}_m^{*}$ — многочлен $\omega(x) = \omega(x, \mathbf{G}_m^{*}) \equiv 1$. Для пары (G_m, θ), где $G_m \in \{\mathbf{G}_m^{*}, \mathbf{G}_m^{\{-1\}}, \mathbf{G}_m^{\{1\}}, \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}\}$, $\theta \in G_m$ определим многочлен

$$W_m^{\{\theta\}}(x, G_m) = \omega(x)\Big(p_\nu(x, \omega\, d\mu) - \frac{p_\nu(\theta, \omega\, d\mu)}{p_{\nu-1}(\theta, \omega\, d\mu)} p_{\nu-1}(x, \omega\, d\mu)\Big), \tag{2.10}$$

где $\omega(x) = \omega(x, G_m)$, $\nu = m - \deg \omega$.

Следуя работе [10, Sect. 1], m-точечную квадратурную формулу с одним фиксированным узлом $\theta \in (-1,1) \setminus \{x_{m,j}^{*}\}_{j=1}^{m}$ наивысшей степени точности (равной $2m-2$) назовем *модифицированной* квадратурной формулой Гаусса. Аналогично определим *модифицированные* левую и правую m-точечные квадратурные формулы Радо наивысшей степени точности (равной $2m-3$), а также *модифицированную* m-точечную квадратурную формулу Лобатто наивысшей степени точности (равной $2m-4$), т. е. к фиксированным узлам соответствующих формул добавляется еще один фиксированный узел $\theta \in (-1,1)$, не совпадающий ни с одним узлом соответствующей классической m-точечной формулы. Сформулируем основной результат упомянутой работы в терминах, введенных выше.

Теорема A [10, Theorem 1.1]. *Положительные модифицированные квадратурные формулы Гаусса, левая и правая формулы Радо и формула Лобатто с фиксированным узлом* $\theta \in (-1,1)$ *существуют тогда и только тогда, когда* θ *принадлежит, соответственно, множеству* $\mathbf{G}_m^*$, $m \ge 1$; $\mathbf{G}_m^{\{-1\}}$, $m \ge 2$; $\mathbf{G}_m^{\{1\}}$, $m \ge 2$; $\mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}$, $m \ge 3$. *Производящий многочлен для этих модифицированных квадратурных формул задается равенством* (2.10), *в котором* G_m *совпадает, соответственно, с* $\mathbf{G}_m^*$, $\mathbf{G}_m^{\{-1\}}$, $\mathbf{G}_m^{\{1\}}, \mathbf{G}_m^{\{-1,1\}}$. *Следовательно, указанные модифицированные квадратурные формулы единственны.*

Положительные квадратурные формулы применяются (см. теорему B ниже) для оценки снизу величин (2.1) наилучшего одностороннего (взвешенного интегрального) приближения ограниченной функции $f \in L$ многочленами. В данной работе в качестве приближаемой функции будет рассматриваться характеристическая функция $\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J, \\ 0, & x \in [-1,1] \setminus J, \end{cases}$ подмножества $J \subset [-1,1]$. В случае $J = (a,1]$ для оценки сверху величин наилучшего одностороннего приближения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ будут использоваться интерполяционные многочлены Эрмита, интерполирующие функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах положительных квадратурных формул.

Приведем условия интерполяции функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленами на $[-1,1]$. Пусть

$$s, r \in \{0,1\}, \quad \ell, k \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}, \quad s + \ell \ge 1.$$

Упорядоченной четверке (s,ℓ,k,r) поставим в соответствие тип $T(s,\ell,k,r)$ условий интерполяции функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленом p минимально возможной степени. Указанный тип характеризует расположение узлов интерполяции и их кратность.

Опишем значение каждого из параметров s,ℓ,k,r. Если $s = 0$, то -1 не является узлом интерполяции; если $s = 1$, то -1 является узлом интерполяции, т. е. $p(-1) = 0$. Число ℓ означает количество узлов интерполяции $x_1 < x_2 < \cdots < x_\ell$, расположенных в интервале $(-1,a)$, причем каждый из них имеет двойную кратность: $p(x_j) = 0,\ p'(x_j) = 0,\ j = 1,2,\ldots,\ell$; точка $x_{\ell+1} = a$ всегда является (простым) узлом интерполяции, т. е. $p(a) = 0$; если $\ell = 0$, то в $(-1,a)$ нет узлов интерполяции. Число k означает количество узлов интерполяции $x_{\ell+2} < x_{\ell+3} < \cdots < x_{\ell+k+1}$, расположенных в интервале $(a,1)$, причем каждый из них имеет двойную кратность: $p(x_j) = 1$, $p'(x_j) = 0,\ j = \ell+2, \ell+3, \ldots, \ell+k+1$; если $k = 0$, то в $(a,1)$ нет узлов интерполяции. Если $r = 0$, то 1 не является узлом интерполяции; если $r = 1$, то 1 — узел интерполяции: $p(1) = 1$.

Многочлен p (минимально возможной степени), реализующий тип $T(s,\ell,k,r)$ условий эрмитовой интерполяции функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$, для краткости будем называть *многочленом типа* $T(s,\ell,k,r)$. Степень этого многочлена равна количеству условий интерполяции минус один, т. е. $\deg p = s + r + 2(\ell + k)$. Известно (см. [2, гл. 2, § 11]), что при более общих условиях интерполяционный многочлен Эрмита (минимально возможной степени) существует и является единственным.

Для нахождения величины наилучшего одностороннего приближения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленами заданной степени и построения соответствующего экстремального многочлена нам понадобится лемма, которая для многочлена p типа $T(0,\ell,k,0)$ представляет собой результат А. А. Маркова и Т. И. Стилтьеса, упомянутый в самом начале разд. 1.

Лемма. *Пусть* $s, r \in \{0,1\}$, $\ell, k \in \mathbb{Z}_+$, $s + \ell \ge 1$, $h \in (-1,1)$, p — *интерполяционный многочлен (минимально возможной степени), реализующий тип* $T(s,\ell,k,r)$ *условий интерполяции функции* $\mathbf{1}_{(a,1]}$. *Тогда* $p(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$ *при всех* $x \in [-1,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из [1, лемма 1] после косинус-замены. □

Теорема B (Р. Боянич, Р. Девор [7]). *Пусть на $\mathscr{P}_n$ выполняется положительная квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k p(x_k), \quad -1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_m \le 1. \tag{2.11}$$

Тогда для любой ограниченной функции $f \in L$ имеют место неравенства

$$E_n^-(f) \ge \int_{-1}^{1} f(x)\,d\mu(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k); \qquad E_n^+(f) \ge \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f(x_k) - \int_{-1}^{1} f(x)\,d\mu(x). \tag{2.12}$$

Подстановка в (2.12) характеристической функции подмножества $J \subset [-1,1]$ приводит к следующему утверждению.

Предложение 1. *Для $f = \mathbf{1}_J$, где $J \subset [-1,1]$, имеем $E_n^-(\mathbf{1}_J) \ge \displaystyle\int_J d\mu(x) - \sum \lambda_k$, $E_n^+(\mathbf{1}_J) \ge \sum \lambda_k - \displaystyle\int_J d\mu(x)$, где суммы берутся по таким индексам k, для которых $x_k \in J$. Если к тому же J не содержит узлов квадратурной формулы* (2.11), *то $E_n^-(\mathbf{1}_J) = \displaystyle\int_J d\mu(x)$, при этом $p \equiv 0$ является многочленом наилучшего приближения снизу. В частности, это утверждение справедливо в случае, когда J есть открытый интервал $(a,b) \subset [-1,1]$, при условии $x_k \le a < b \le x_{k+1}$, где x_k, x_{k+1} — произвольная пара соседних узлов квадратурной формулы* (2.11). *Если правая концевая точка отрезка $[-1,1]$ не является узлом квадратурной формулы* (2.11), *то в качестве множества J можно взять полуинтервал $(a,1]$, где a не меньше максимального узла квадратурной формулы* (2.11).

Несложно понять, что если многочлен $p^- \in \mathscr{P}_n$ реализует точную нижнюю грань в задаче о вычислении величины $E_n^-(\mathbf{1}_J)$, то многочлен $p^+ = 1 - p^-$ реализует точную нижнюю грань в задаче о вычислении $E_n^+(\mathbf{1}_{[-1,1]\setminus J})$. При этом $E_n^+(\mathbf{1}_{[-1,1]\setminus J}) = E_m^-(\mathbf{1}_J)$. Учитывая это обстоятельство, в дальнейшем будем рассматривать только задачу об одностороннем приближении снизу характерестической функции подмножества J отрезка $[-1,1]$.

3. Приближение снизу характеристической функции полуинтервала. Пример в случае открытого интервала

Перейдем к более детальному изучению задачи приближения снизу характеристической функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ полуинтервала $(a,1] \subset [-1,1]$.

Предложение 2. *При любом $m \in \mathbb{N}$ выполняются равенства*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) \quad \text{\textit{при}} \quad \begin{cases} n = 2m-1, & x^*_{m,m} \le a < 1; \\ \\ n = 2m-2, & x^{\{-1\}}_{m,m} \le a < 1, \end{cases}$$

многочлен $p \equiv 0$ является многочленом наилучшего приближения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ снизу.

Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться предложением 1 с учетом положительности m-точечных квадратурных формул Гаусса (2.4) и левой формулы Радо (см. (2.5)).

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, число a совпадает с каким-либо из узлов m-точечной квадратурной формулы Гаусса (2.4), отличным от максимального, то есть $a = x^*_{v,m}$, где $v \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Тогда $E^-_{2m-1}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) - \sum_{j=v+1}^{m} \lambda^*_{m,j}$, при этом многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен p типа $T(0,\ell,k,0)$ степени $2m-2$, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы Гаусса (2.4). Кроме того, $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = E^-_{2m-1}(\mathbf{1}_{(a,1]})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из результата Маркова — Стилтьеса (см. [5, гл. 1, разд. 1.2, лемма 9′]) следует, что $p \leq \mathbf{1}_{(a,1]}$. Этот многочлен влечет оценку сверху для искомой величины $E^-_{2m-1}(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Совпадающая с ней оценка снизу следует из предложения 1. Последнее утверждение теоремы справедливо, поскольку степень экстремального многочлена равна $2m-2$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, число a совпадает с каким-либо узлом m-точечной левой квадратурной формулы Радо (см. (2.5)), отличным от минимального и максимального, то есть $a = x^{\{-1\}}_{v,m}$, где $v \in \{2, 3, \ldots, m-1\}$. Тогда $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) - \sum_{j=v+1}^{m} \lambda^{\{-1\}}_{m,j}$, многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен p типа $T(1,\ell,k,0)$ степени $2(\ell+k)+1 = 2m-3$, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах указанной квадратурной формулы Радо. Кроме того, $E^-_{2m-3}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы указанный в формулировке теоремы многочлен p является допустимым, точнее, $p \leq \mathbf{1}_{(a,1]}$, $p \in \mathscr{P}_{2m-3} \subset \mathscr{P}_{2m-2}$. Поэтому он дает нужную оценку сверху для $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Такая же оценка снизу следует из предложения 1, поскольку m-точечная левая квадратурная формула Радо является положительной и выполняется на $\mathscr{P}_{2m-2}$. Последнее утверждение теоремы справедливо, поскольку степень экстремального многочлена равна $2m-3$. $\square$

Применяя аналогичные рассуждения, базирующиеся на предложении 1, лемме и на положительности правой квадратурной формулы Радо и квадратурной формулы Лобатто, найдем величину наилучшего приближения снизу функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в случае, когда число a совпадает с одним из узлов этих формул, отличным от концевых точек отрезка $[-1,1]$. При этом соответственно многочлены типов $T(0,\ell,k,1)$, $T(1,\ell,k,1)$, интерполирующие функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах соответствующих формул, будут экстремальными, причем их степень на единицу меньше, чем степень точности соответствующей квадратурной формулы.

Для решения задачи наилучшего приближения снизу функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ многочленами в оставшихся случаях расположения точки a, надо провести точно такие же рассуждения, основанные на положительных модифицированных квадратурных формулах из теоремы A, принимая во внимание утверждение (2.9). При этом степень экстремальных многочленов будет совпадать со степенью точности соответствующих модифицированных формул. Так, например, в случае, когда точка θ принадлежит множеству $\mathbf{G}^*_m$, справедлива теорема, аналогичная теореме 1, в которой через $x^{*,\theta}_{j,m}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, обозначены нули производящего многочлена $W^{\{\theta\}}_m(x, \mathbf{G}^*_m)$ (см. (2.10)) модифицированной m-точечной квадратурной формулы Гаусса, а через $\lambda^{*,\theta}_{j,m}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, — коэффициенты этой квадратурной формулы.

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\theta \in \mathbf{G}^*_m$, число a совпадает с каким-либо из нулей производящего многочлена $W^{\{\theta\}}_m(x, \mathbf{G}^*_m)$ модифицированной m-точечной квадратурной формулы Гаусса, при этом число a не является его максимальным нулем, то есть $a = x^{*,\theta}_{v,m}$, где $v \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Тогда $E^-_{2m-2}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int_{(a,1]} d\mu(x) - \sum_{j=v+1}^{m} \lambda^{*,\theta}_{m,j}$. Многочленом наилучшего приближения снизу является многочлен p типа $T(0,\ell,k,0)$ степени $2m-2$, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах указанной модифицированной формулы.*

В заключение приведем пример, показывающий существенное различие задач приближения снизу характеристических функций открытого интервала и полуинтервала.

П р и м е р. Рассмотрим трехточечную квадратурную формулу Гаусса на $[-1,1]$ с весом $d\mu(x)=dx$. Степень точности этой формулы равняется пяти, точки $x_1=-\sqrt{3/5}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{3/5}$ — ее узлы. Обозначим $b=2/5$, $A=-5(5b+\sqrt{15})/(9b^2)$, $c=-\sqrt{15}\,b/(5b+\sqrt{15})$. Несложно проверить, что многочлен $p(x)=A(x+x_1)(x-b)(x-x_1)^2(x-c)$ пятой степени интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(x_1,b)}$ следующим образом: $p(x_1)=p(b)=p(x_3)=0$, $p(x_2)=1$, $p'(x_2)=p'(x_3)=0$. Нетрудно убедиться в том, что на $[-1,x_1)$ этот многочлен положителен, следовательно, его график не лежит под графиком характеристической функции $\mathbf{1}_{(x_1,b)}$ на этом полуинтервале.

Авторы благодарны профессору В. В. Арестову за ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, вып. 1. С. 82–95.
2. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений: учеб. пособ.: в 2 т. 2-е изд., стереотип. М.: Физматгиз, 1962. Т. 1. 464 с; Т. 2. 639 с.
3. **Крылов В.И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматлит, 1959. 327 с.
4. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
5. **Постников А.Г.** Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 с.
6. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М. : Физматгиз, 1962. 500 с.
7. **Bojanic R., DeVore R.** On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. 1966. Vol. 2, no. 12. P. 139–164.
8. **Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J.M.** Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 198. P. 10–23.
9. **Bultheel A., Cruz-Barroso R., Van Barel M.** On Gauss-type quadrature formulas with prescribed nodes anywhere on the real line // Calcolo. 2010 Vol. 47, no. 1. P. 21–48.
10. Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa / B. Beckermann, J. Bustamante, R. Martinez-Cruz, J. M. Quesada // Calcolo. 2014. Vol. 51, no. 2, P. 319–328.
11. **Li X.-J., Vaaler J.D.** Some trigonometric extremal functions and the Erdos–Turan type inequalities // Ind. Univ. Math. J. 1999. Vol. 48, no. 1. P. 183–236.
12. **Peherstorfer F.** Positive quadrature formulas III: asymptotics of weights // Math. Comput. 2008. Vol. 77, no. 264. P. 2241–2259.
13. **Stieltjes T.J.** Quelques recherches sur la theorie des quadratures dites mechaniques // Annales Sc. de l'Ecole Norm. Super. 1884. Vol. 1, no. 3. P. 409–426.

Поступила 07.09.2015

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
Институт математики и механики УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета,
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Marina.Deikalova@urfu.ru

Ревес Силард Дьордь
д-р академии, научный советник
Институт математики имени Альфреда Реньи
Венгерской академии наук
e-mail: revesz.szilard@renyi.mta.hu

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ НОРМ ФУНКЦИЙ, РЯДЫ ФУРЬЕ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ЛАКУНАРНЫМИ[1]

А. Г. Бабенко, $\boxed{\text{В. А. Юдин}}$

Рассматриваются свойства функций f, принадлежащих пространству $L^2(\mathbb{T})$ на периоде $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$, ряды Фурье которых лакунарны, причем размер всех лакун не меньше заданного натурального числа $q-1$. Для указанных функций найдены двусторонние оценки их L^2-норм на $\mathbb{T}$ через аналогичные нормы (а точнее, полунормы) на интервалах I длины $|I|=2h<2\pi$. Оценки получены в терминах наилучших односторонних интегральных приближений характеристической функции интервала $(-h,h)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $q-1$. Тема, рассматриваемая в статье, впервые появилась в исследованиях Н. Винера (1934). Важные результаты в этом направлении получили А. Е. Ингам (1936) и А. Сельберг в 70-е годы прошлого века.

Ключевые слова: лакунарные тригонометрические ряды, среднеквадратичные нормы, одностороннее приближение функций тригонометрическими полиномами.

A. G. Babenko, V. A. Yudin. Estimates for mean-square norms of functions with lacunary Fourier series.

We consider the properties of functions f from the space $L^2(\mathbb{T})$ on the period $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$ with lacunary Fourier series such that the size of each lack is not less than a given positive integer $q-1$. We find two-sided estimates of the L^2 norms of such functions on $\mathbb{T}$ in terms of similar norms (more exactly, seminorms) on intervals I of length $|I|=2h<2\pi$. The estimates are obtained in terms of best one-sided integral approximations of the characteristic function of the interval $(-h,h)$ by trigonometric polynomials of order at most $q-1$. The issue considered in this paper appeared first in N. Wiener's studies (1934). Important results in this area were obtained by A.E. Ingham (1936) and by A. Selberg in the 1970s.

Keywords: lacunary trigonometric series, mean-square norms, one-sided approximation of functions by trigonometric polynomials.

1. Введение

Обозначим через $\mathcal{P}(q)$, $q>0$, множество конечных сумм (тригонометрических полиномов)

$$P(x)=\sum c_k e^{in_k x} \quad \bigl(c_k\in\mathbb{C}, \quad n_k\in\mathbb{Z}, \quad |n_k-n_j|\ge q \ \text{ при } \ k\ne j\bigr) \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами, номера гармоник которых целые и отстоят друг от друга не менее, чем на число q. В монографии [3, гл. 5, § 9, теоремы (9.1), (9.9), примечания к гл. 5, § 9] содержится следующий результат.

Теорема A. *Пусть $q>0$, I — интервал, длина $|I|$ которого больше $2\pi/q$, т. е. $|I|=2\pi(1+\delta)/q$, $\delta>0$, и пусть J — интервал, длина которого равна $2\pi\eta/q$, где $\eta>0$. Тогда для любого $P\in\mathcal{P}(q)$*

$$\frac{B}{|J|}\int\limits_J |P(x)|^2\,dx \le \sum |c_k|^2 \le \frac{A}{|I|}\int\limits_I |P(x)|^2\,dx, \tag{1.2}$$

где положительные величины $A=A_\delta$ и $B=B_\eta$ конечны и зависят соответственно только от δ и η.

Оценку сверху в (1.2) впервые установил Н. Винер [18] при $|I|\ge 16\pi/q$, и он показал, что в этом случае в качестве A можно взять число 8.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

А. Е. Ингам [11] рассмотрел не только периодический случай. В частности, он исследовал аналоги неравенств (1.2) на более широком в сравнении с $\mathcal{P}(q)$ множестве $\mathcal{F}(q)$ конечных экспоненциальных сумм

$$P(x) = \sum c_k e^{i\lambda_k x} \quad \big(c_k \in \mathbb{C}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad |\lambda_k - \lambda_j| \ge q \quad \text{при} \quad k \ne j\big). \tag{1.3}$$

В статье [11] доказано, что для таких функций имеют место следующие утверждения. *При фиксированном $h = (\pi+\varepsilon)/q$, $\varepsilon > 0$, справедлива оценка сверху*

$$\sum |c_k|^2 \le \frac{\mathcal{A}}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |P(x)|^2\,dx, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varepsilon) > 0$ есть конечная величина, зависящая только от ε; в качестве $\mathcal{A}(\varepsilon)$ можно взять

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \min\Big\{\frac{\pi(\pi+\varepsilon)^2}{2\varepsilon(2\pi+\varepsilon)},\ \frac{3(\pi+\varepsilon)}{2\varepsilon}\Big\}. \tag{1.5}$$

В случае $0 < h \le \pi/q$ оценка (1.4) (*с конечной константой* $\mathcal{A}$) *невозможна. Кроме того, при $h = \tau/q > 0$ выполняется оценка снизу*

$$\frac{\min\{\tau,\pi\}}{20h} \int\limits_{-h}^{h} |P(x)|^2\,dx \le \sum |c_k|^2.$$

Для заданных чисел $h > 0$, $q > 0$ положим

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_q(h) &:= \inf\left\{\frac{\sum |c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P \in \mathcal{P}(q),\ P \not\equiv 0,\ |I| = 2h\right\},\\ \widetilde{a}_q(h) &:= \sup\left\{\frac{\sum |c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P \in \mathcal{P}(q),\ P \not\equiv 0,\ |I| = 2h\right\}; \end{aligned} \tag{1.6}$$

здесь для (невырожденного, конечного) промежутка I и функции P принято обозначение

$$M_I(P) := \|P\|^2_{L^2(I)} = \frac{1}{|I|} \int\limits_I |P(x)|^2\,dx.$$

С учетом 2π-периодичности произвольной функции P из множества $\mathcal{P}(q)$ (см. (1.1)) имеем

$$M_{(-\pi,\pi)}(P) = \|P\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |P(x)|^2\,dx = \sum |c_k|^2.$$

Поэтому

$$\widetilde{b}_q(\pi) = \widetilde{a}_q(\pi) = 1 \quad \text{при всех} \quad q > 0. \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы A фактически основано на переходе от изучения величин $\widetilde{a}_q(h)$, $\widetilde{b}_q(h)$ при $q > 0$, $h > 0$ к исследованию величин

$$\begin{aligned} b_q(h) &:= \inf\left\{\frac{\sum |c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P \in \mathcal{F}(q),\ P \not\equiv 0,\ |I| = 2h\right\},\\ a_q(h) &:= \sup\left\{\frac{\sum |c_k|^2}{M_I(P)}:\quad P \in \mathcal{F}(q),\ P \not\equiv 0,\ |I| = 2h\right\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Следующие утверждения по существу содержатся в [11; 3, гл. 5, § 9]. Во-первых, в силу инвариантности относительно сдвига множеств $\mathcal{P}(q)$, $\mathcal{F}(q)$ и модулей коэффициентов c_k величины $\widetilde{b}_q(h)$, $\widetilde{a}_q(h)$, $b_q(h)$, $a_q(h)$ не зависят от расположения интервала I, а зависят лишь от его длины. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $I=(-h,h)$. Кроме того, в силу вложения $\mathcal{P}(q)\subset\mathcal{F}(q)$ имеем

$$b_q(h)\le\widetilde{b}_q(h)\le\widetilde{a}_q(h)\le a_q(h)\quad\text{при}\quad h>0,\quad q>0. \tag{1.9}$$

Во-вторых, при фиксированном $\gamma>0$ величины $b_q(\gamma/q)$, $a_q(\gamma/q)$ не зависят от q, точнее,

$$b_q(\gamma/q)=b_1(\gamma),\quad a_q(\gamma/q)=a_1(\gamma)\quad\text{для всех}\quad q>0. \tag{1.10}$$

В самом деле, положим $h=\gamma/q$. Для любой функции $P\in\mathcal{F}(q)$, имеющей представление (1.3), сделав замену переменного $x=t/q$, получаем

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}\Big|\sum c_k e^{i\lambda_k x}\Big|^2\,dx=\frac{1}{2\gamma}\int\limits_{-\gamma}^{\gamma}\Big|\sum c_k e^{i\frac{\lambda_k}{q}t}\Big|^2\,dt.$$

Функция $P\left(t/q\right)=\sum c_k e^{i\frac{\lambda_k}{q}t}$ принадлежит уже $\mathcal{F}(1)$. Отсюда следуют соотношения (1.10).

Оценка сверху А. Е. Ингама (1.4), (1.5) вместе с (1.9) влечет оценку

$$\widetilde{a}_q(h)\le\mathcal{A}(\varepsilon)=\min\Big\{\frac{\pi(\pi+\varepsilon)^2}{2\varepsilon(2\pi+\varepsilon)},\ \frac{3(\pi+\varepsilon)}{2\varepsilon}\Big\}\quad\text{при}\quad q>0,\quad h=\frac{\pi+\varepsilon}{q},\quad\varepsilon>0. \tag{1.11}$$

Обозначим через $\theta^-(\xi)$ и $\theta^+(\xi)$ величины наилучшего одностороннего приближения в $L(\mathbb{R})$ характеристической функции интервала $(0,\xi)$ соответственно снизу и сверху множеством функций экспоненциального типа 2π, сужения которых на вещественную прямую $\mathbb{R}$ являются вещественными и принадлежат $L(\mathbb{R})$. В 70-е годы прошлого века А. Сельберг [16, art. 45, sec. 20, p. 224, (20.38)] доказал утверждение, которое приведем в следующей эквивалентной форме.

Теорема B. *Пусть $q>0$, I — интервал длины $|I|=2h>0$. Тогда для произвольной конечной суммы $P\not\equiv 0$ вида* (1.3) *имеют место неравенства*

$$\Big(1-\frac{\pi}{qh}\theta^-\Big(\frac{qh}{\pi}\Big)\Big)\sum|c_k|^2<\frac{1}{2h}\int\limits_I|P(x)|^2\,dx<\Big(1+\frac{\pi}{qh}\theta^+\Big(\frac{qh}{\pi}\Big)\Big)\sum|c_k|^2. \tag{1.12}$$

А. Берлинг и А. Сельберг (см. [16, art. 45, sec. 19, 20, 21; 17; 14, ch. 1; 15, sec. 1]) изучали одностороннее приближение в $L(\mathbb{R})$ ступенчатых функций $\operatorname{sign}x$, функции Хевисайда и характеристической функции интервала целыми функциями заданного экспоненциального типа. В [16, art. 45, sec. 20] доказано, что

$$\theta^-(\xi)\le 1,\quad\theta^+(\xi)\le 1\quad\text{при}\quad\xi>0, \tag{1.13}$$

$$\theta^-(\xi)=\xi\quad\text{при}\quad 0<\xi\le 1,\quad\theta^-(k)=\theta^+(k)=\lim_{\xi\to+0}\theta^+(\xi)=1\quad\text{при}\quad k\in\mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Утверждение $\lim\limits_{\xi\to+0}\theta^+(\xi)=1$ следует также из одного результата Р. П. Боаса и М. Каца (1945) [6, Theorem 5, p. 198] для целых функций заданного экспоненциального типа; подробности приведены ниже в разд. 4.

Теорема B и оценки (1.13) влекут неравенства [16, art. 45, sec. 20, p. 225, (20.38′)]

$$\Big(1-\frac{\pi}{qh}\Big)\sum|c_k|^2<\frac{1}{2h}\int\limits_I|P(x)|^2\,dx<\Big(1+\frac{\pi}{qh}\Big)\sum|c_k|^2,$$

которые справедливы для любых интервалов I длины $2h$ и конечных сумм $P \not\equiv 0$ вида (1.3).

Таким образом, неравенства (1.9), (1.13) и теорема B приводят к следующим оценкам:

$$\frac{1}{1+\dfrac{\pi}{qh}} \le \frac{1}{1+\dfrac{\pi}{qh}\theta^{+}\Big(\dfrac{qh}{\pi}\Big)} \le b_q(h) \le \widetilde{b}_q(h) \quad \text{при} \quad q>0, \quad h>0, \tag{1.15}$$

$$\widetilde{a}_q(h) \le a_q(h) \le \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{qh}\theta^{-}\Big(\dfrac{qh}{\pi}\Big)} \le \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{qh}} \quad \text{при} \quad q>0, \quad h>\frac{\pi}{q}. \tag{1.16}$$

Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логан установили результат [7, Lemma 10], из которого следует (см. [13, формула (1.3)]), что

$$\theta^{+}(\xi) = \frac{2\pi\xi}{\pi\xi+\sin\pi\xi} - \xi \quad \text{при} \quad \xi\in(0,1). \tag{1.17}$$

Относительно недавно задачу о вычислении величин $\theta^{-}(\xi)$ и $\theta^{+}(\xi)$ для значений ξ, при которых они оставались неизвестными, решил Ф. Литтманн [13]. Он выразил эти величины в виде специальных конечных сумм в терминах решений уравнений, содержащих трансцендентные и алгебраические выражения. При этом сумма $\theta^{-}(\xi)+\theta^{+}(\xi)$ свернулась в простое выражение [13, формула (1.5)], которое в принятых здесь обозначениях принимает вид

$$\theta^{-}(\xi)+\theta^{+}(\xi) = \frac{2|\pi\xi|}{|\pi\xi|+|\sin\pi\xi|}, \quad \xi>1. \tag{1.18}$$

В данной работе для каждого натурального $q\ge 2$ найдены двусторонние оценки величин $\widetilde{b}_q(h)$ и $\widetilde{a}_q(h)$ при $0<h\le\pi$ и $\pi/q<h\le\pi$ соответственно в терминах величин $\mathcal{E}^{+}_{q-1}(h)$, $\mathcal{E}^{-}_{q-1}(h)$ наилучшего интегрального приближения соответственно сверху и снизу характеристической функции интервала $(-h,h)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $q-1$ (см. определения (3.1), (3.2) в разд. 3 ниже). А именно,

$$\frac{1}{1+\dfrac{\pi}{q}\mathcal{E}^{+}_{q-1}(h)} \le \widetilde{b}_q(h) \quad \text{при} \quad 0<h\le\pi, \quad q\in\{2,3,4,\dots\},$$

$$\widetilde{a}_q(h) \le \frac{1}{1-\dfrac{\pi}{q}\mathcal{E}^{-}_{q-1}(h)} \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{q}<h\le\pi, \quad q\in\{2,3,4,\dots\}. \tag{1.19}$$

Упомянутые выше результаты результаты Д. Л. Донохо и Б. Ф. Логана, а также Ф. Литтманна (в том числе, (1.17), (1.18)), касающиеся величин $\theta^{-}(\xi)$ и $\theta^{+}(\xi)$, не были известны авторам работы [2]; внимание авторов на эти результаты недавно обратил Д. В. Горбачев.

Периодические аналоги $\mathcal{E}^{-}_{q-1}(h)$, $\mathcal{E}^{+}_{q-1}(h)$ величин $\theta^{-}(\xi)$, $\theta^{+}(\xi)$ к настоящему времени изучены полностью [2; 9; 12; 17] (соответствующая история вопроса приведена ниже в разд. 3). В частности, с помощью (1.19) и результатов работы [2] получаем, что для любых $q\in\{2,3,4,\dots\}$, $\pi/q<h<2\pi/q$, и произвольной функции $P\in\mathcal{P}(q)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|P(x)|^2\,dx \le \Upsilon(q,h)\int\limits_{-h}^{h}|P(x)|^2\,dx, \tag{1.20}$$

где

$$\Upsilon(q,h) = \frac{(q+1)\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - (q-1)\sin\dfrac{(q+1)h}{2}}{\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - \sin\dfrac{(q+1)h}{2}}.$$

Заметим, что

$$\Upsilon(q,h) = q + \frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\dfrac{h}{2}} \quad \text{при} \quad h = \frac{\pi+\varepsilon}{q}, \quad 0 < \varepsilon < \pi.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\widetilde{a}_q(h) \le \frac{\pi+\varepsilon}{\pi} + \frac{\pi+\varepsilon}{\pi q \operatorname{tg}\dfrac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\dfrac{h}{2}} \quad \text{при} \quad q = 2,3,4,\dots, \quad h = \frac{\pi+\varepsilon}{q}, \quad 0 < \varepsilon < \pi, \tag{1.21}$$

которое уточняет оценку (1.11) при указанных в (1.21) ограничениях на q, h, поскольку в этом случае выражение, расположенное в правой части неравенства (1.21), меньше $\mathcal{A}(\varepsilon)$.

Кроме того, здесь доказаны следующие соотношения:

$$\lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0} \widetilde{a}_q(h) = \lim_{h\to\frac{2\pi}{q}-0} \widetilde{a}_q(h) = 2, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q \ge 2. \tag{1.22}$$

Сравнивая последние равенства в (1.22), (1.7) при $q = 2$, приходим к выводу, что величина $\widetilde{a}_2(h)$ (как функция переменного h) терпит разрыв в точке π.

2. Постановка задачи и примеры

Напомним некоторые стандартные обозначения, которые здесь будут использоваться. Пусть $\mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ есть период длины 2π, т. е. полуинтервал $[-\pi,\pi)$ с отождествленными концами. Символом $L^p := L^p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$, как обычно, обозначается пространство 2π-периодических измеримых комплекснозначных функций $f:\ \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p};$$

положим $L := L^1$.

Функцию $f \in L^2$ разложим в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x}$, $\quad \widehat{f}_\nu = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\nu x}\,dx$. Множество $\operatorname{sp} f := \{\nu \in \mathbb{Z}:\ \widehat{f}_\nu \ne 0\}$ называют спектром функции f; будем считать его упорядоченным по возрастанию: $\operatorname{sp} f = \{\nu_k:\ \nu_k < \nu_{k+1}\}$. Зафиксируем произвольное натуральное число $q \ge 2$. Обозначим через $\mathcal{D}(q)$ множество функций $f \in L^2$, у которых любые две точки спектра $\operatorname{sp} f$ находятся на расстоянии не меньшем, чем число q. Иными словами, функция $f \in L^2$ принадлежит $\mathcal{D}(q)$ в том и только в том случае, если ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum \widehat{f}_{\nu_k} e^{i\nu_k x}, \quad \nu_k \in \mathbb{Z}, \quad \nu_k < \nu_{k+1} \quad \text{при всех} \quad k, \quad |\nu_k - \nu_j| \ge q \quad \text{при} \quad k \ne j.$$

Ясно, что $\mathcal{D}(q+1) \subset \mathcal{D}(q)$.

Теорема A влечет следующее утверждение: *если* $q \in \mathbb{N}$, $h > \pi/q$, *то для любой функции* $f \in \mathcal{D}(q)$, $f \not\equiv 0$, *и любого* $a \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство* $\displaystyle\int_a^{a+2h} |f(x)|^2 dx > 0.$

Приведем пример, показывающий существенность ограничения $h > \pi/q$ в том смысле, что число π в этом ограничении нельзя заменить на меньшее; напомним, что этот факт был установлен ранее в [11, § 3] другим способом.

П р и м е р 1. При $q \in \mathbb{N}$, $0 < h < \pi/q$ существует функция $f \in \mathcal{D}(q)$ такая, что

$$\|f\|_2 > 0 \quad \textit{и} \quad \int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2 dx = 0. \tag{2.1}$$

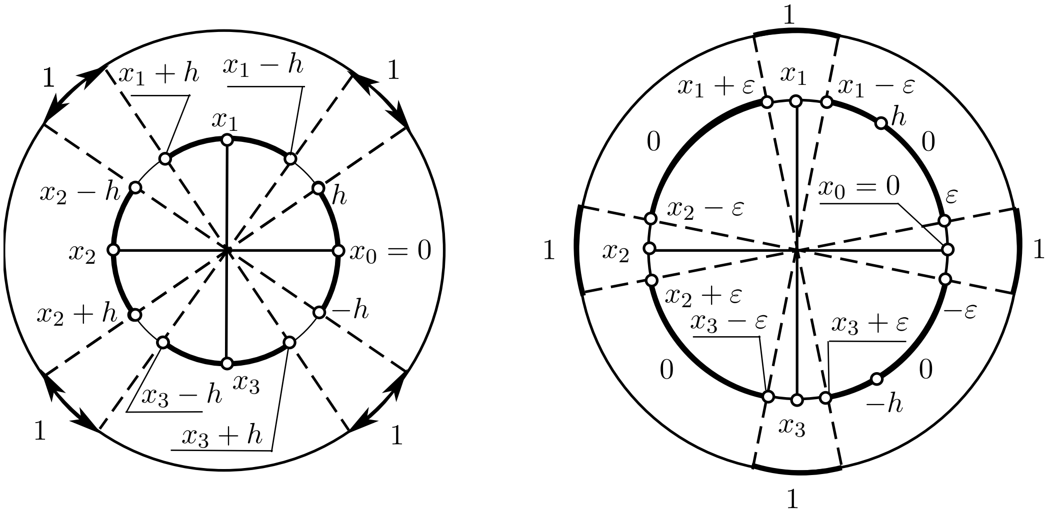


Рис. 1.

Действительно, рассмотрим набор точек $\left\{x_k := \dfrac{2k\pi}{q}\right\}_{k=0}^{q-1}$ и определим функцию f на периоде[2] $\mathbb{T}$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad |x - x_k| \le h, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция f является $2\pi/q$-периодической, следовательно, $\operatorname{sp} f \subseteq \{0, \pm q, \pm 2q, \ldots\}$, поэтому $f \in \mathcal{D}(q)$. Для этой функции выполняются равенства $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2(\pi - hq)$, $\int_{-h}^{h} |f(x)|^2 dx = 0$, которые вместе с ограничением $0 < h < \pi/q$ влекут (2.1). $\square$

В левой части рис. 1 изображен рассмотренный пример функции f в случае $q = 4$.

Рис. 1 состоит из двух частей (левой и правой), каждая из которых соответствует случаю $q = 4$, $x_k = 2k\pi/q = k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. В центре каждой части расположена единичная окружность Γ.

На левой части рисунка малые вертикальные углы, изображенные пунктирными линиями, высекают на Γ дуги, на которых функция $\varphi(e^{ix}) := f(x)$ принимает единичное значение, в остальных точках окружности эта функция равна нулю.

Правая часть рисунка является визуализацией функции f, построенной ниже в примере 2; на этой части рисунка малые вертикальные углы, изображенные пунктирными линиями, высекают на Γ дуги, на которых функция $\varphi(e^{ix}) := f(x)$ принимает единичное значение, в остальных точках окружности эта функция равна нулю.

На обеих частях рисунка числа $\pm h$, $\pm\varepsilon$, $x_k \pm h$, x_k, $x_k \pm \varepsilon$ означают углы (функция e^{ix} переводит их в точки на Γ).

Зафиксируем число $h \in (0, \pi]$ и натуральное число $q \ge 2$. Нас интересует, в каких пределах может изменяться отношение

$$\Psi(f; 2h) := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \Bigg/ \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx,$$

[2] Удобно отождествить период $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ с единичной окружностью $\Gamma := \{z = e^{ix} : x \in \mathbb{T}\}$. В этом случае набору точек $\{x_k\}_{k=0}^{q-1} \subset \mathbb{T}$ будет соответствовать набор точек $\left\{z_k := e^{ix_k}\right\}_{k=0}^{q-1} \subset \Gamma$, а функции f на $\mathbb{T}$ будет соответствовать функция φ на Γ, которая определяется равенством $\varphi(e^{ix}) := f(x)$.

когда f пробегает класс $\mathcal{D}(q)$, т. е. чему равняются величины

$$\beta_q(h) := \inf_{f\in\mathcal{D}(q),\, \|f\|_2>0} \Psi(f;2h), \quad \alpha_q(h) := \sup_{f\in\mathcal{D}(q),\, \|f\|_2>0} \Psi(f;2h). \tag{2.2}$$

Заметим, что величины (2.2) связаны с величинами (1.6) равенствами

$$\frac{h}{\pi}\beta_q(h) = \widetilde{b}_q(h), \quad \frac{h}{\pi}\alpha_q(h) = \widetilde{a}_q(h). \tag{2.3}$$

Это следует из того, что, во-первых, при фиксированном $h \in (0,\pi]$ функционал

$$\rho_h(f) := \left(\int\limits_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

является полунормой в L^2 (в частности, выполняется неравенство треугольника), а во-вторых, для каждой функции $f \in \mathcal{D}(q)$, не эквивалентной нулевой, ее частичная сумма Фурье $S_n(f)$ порядка n принадлежит множеству $\mathcal{P}(q)$, и начиная с некоторого достаточно большого n выполняется свойство $S_n(f) \not\equiv 0$.

Последнее равенство в (2.3) вместе с примером 1 влекут следующее утверждение, полученное ранее в [11, § 3] другим способом: $\widetilde{a}_q(h) = +\infty$ при $0 < h < \pi/q,\ q \in \mathbb{N}$.

Ниже построен пример функции, которая дает оценку

$$q \le \alpha_q(h) \quad \text{при} \quad h \in \left(\frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\right), \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2. \tag{2.4}$$

П р и м е р 2. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \ge 2$. Рассмотрим набор точек $X := \left\{x_k := \dfrac{2k\pi}{q}\right\}_{k=0}^{q-1}$. Зафиксируем произвольное число $h \in (\pi/q, 2\pi/q)$. Возьмем положительное число ε настолько малым, чтобы отрезок $[-h,h]$ содержал в себе ε-окрестность точки $x_0 = 0$ и не пересекался с ε-окрестностями остальных точек из X. Ясно, что среди точек из $X \setminus x_0 = \{x_k\}_{k=1}^{q-1}$ ближайшими к x_0 в смысле метрики на периоде[3] $\mathbb{T}$ являются две точки x_1 и x_{q-1} (каждая из них удалена от x_0 на расстояние $2\pi/q$). В качестве ε можно взять любое число из интервала $(0, 2\pi/q - h)$. Действительно, неравенство $\varepsilon < 2\pi/q - h$ равносильно неравенству $h < 2\pi/q - \varepsilon = x_1 - \varepsilon$, которое, в частности, означает, что ближайшая к точке x_0 концевая точка отрезка $[x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon]$ не лежит в отрезке $[-h,h]$. Кроме того, из неравенств $\pi/q < h < 2\pi/q$, $\varepsilon < 2\pi/q - h$ следует, что $\varepsilon < h$.

Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x - x_k| \le \varepsilon, \quad k = 0,1,\dots,q-1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция f является $2\pi/q$-периодической, следовательно, $\operatorname{sp} f \subseteq \{0, \pm q, \pm 2q, \pm 3q, \dots\}$ и $f \in \mathcal{D}(q)$. Эта функция принимает единичное значение на отрезках $[x_k-\varepsilon, x_k+\varepsilon]$, $k = 0,1,\dots,q-1$; в остальных точках периода она равна нулю. В частности, $f(x) = 0$ при $\varepsilon < |x| < x_1 - \varepsilon$. Следовательно, $f(x) = 0$ при $\varepsilon < |x| \le h$, поскольку $\varepsilon < h < x_1 - \varepsilon$. Поэтому $\displaystyle\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx = 2\varepsilon$. Кроме того, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\varepsilon q$. Откуда вытекает (2.4). □

В правой части рис. 1 изображен рассмотренный пример функции f в случае $q = 4$.

[3] Здесь также, как и в предыдущем примере (см. сноску 2 на с. 59), удобно отождествить период $\mathbb{T}$ с единичной окружностью Γ на комплексной плоскости; расстояние $\rho(x,y)$ на $\mathbb{T}$ между двумя точками x, y определяется так: $\rho(x,y) = \min\{|x - y - 2\pi k| :\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Следующие два известных факта (см., например, [3, гл. 5, § 9]) применяются ниже для исследования величин $\alpha_q(h)$, $\beta_q(h)$. Первый факт заключается в равенстве

$$\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x)|f(x)|^2\,dx, \quad 0 < h \le \pi,$$

где χ_h есть 2π-периодическое продолжение характеристической функции

$$\chi_{(-h,h)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < h, \\ 0, & h \le |x| \end{cases}$$

интервала $(-h,h)$.

Второй факт состоит в том, что для $f \in \mathcal{D}(q)$ функция $F(x) := |f(x)|^2$ ортогональна гармоникам $e_j(x) := e^{ijx}$ при $j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(q-1)$. Это утверждение следует из цепочки равенств

$$|f(x)|^2 = f(x)\overline{f}(x) = \Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_\nu e^{i\nu x}\Big)\Big(\sum_{\mu\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}_\mu} e^{-i\mu x}\Big) = \sum_{(\nu,\mu)\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}_\nu \overline{\widehat{f}_\mu} e^{i(\nu-\mu)x}$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{\nu-\mu=s} \widehat{f}_\nu \overline{\widehat{f}_\mu}\Big) e^{isx} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 + \sum_{s\in\mathbb{Z},\ |s|\ge q} \Big(\sum_{\nu-\mu=s} \widehat{f}_\nu \overline{\widehat{f}_\mu}\Big) e^{isx}. \tag{2.5}$$

3. Применение одностороннего приближения в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами

Пусть $\mathcal{T}_n$ есть подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, принимающих вещественные значения на $\mathbb{T}$; элементами $\mathcal{T}_n$ являются полиномы вида

$$\tau(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} \widehat{\tau}_\nu e^{i\nu x}, \quad \widehat{\tau}_{-\nu} = \overline{\widehat{\tau}}_\nu \in \mathbb{C}.$$

Для вещественнозначной ограниченной функции $g \in L$ определим величины

$$E_n^-(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\, \tau\le g} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \{g(x) - \tau(x)\}\,dx, \quad E_n^+(g) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\, g\le\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \{\tau(x) - g(x)\}\,dx \tag{3.1}$$

наилучшего интегрального приближения снизу и соответственно сверху подпространством $\mathcal{T}_n$; здесь $\tau \le g$ означает, что $\tau(x) \le g(x)$ при всех $x \in \mathbb{T}$.

В дальнейшем в качестве приближаемой функции g будет рассматриваться 2π-периодическое продолжение характеристической функции интервала $(-h,h)$, обозначенное выше символом χ_h. Положим

$$\mathcal{E}_n^-(h) := E_n^-(\chi_h), \quad \mathcal{E}_n^+(h) := E_n^+(\chi_h), \quad 0 < h \le \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.2}$$

Несложно убедиться в том, что

$$\mathcal{E}_n^+(h) = \mathcal{E}_n^-(\pi - h) \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}, \quad h \in (0,\pi). \tag{3.3}$$

Зафиксируем произвольное натуральное число $n \ge 2$. Известно (см. [1]), что из одного результата Л. Фейера (1915) [10; см. также 4, разд. 6, задача 52] следует такое утверждение: *для каждого числа $h \in (\pi/n, \pi]$ найдется тригонометрический полином порядка $n-1$, неположительный на $[-\pi,-h] \cup [h,\pi]$ с положительным свободным коэффициентом; причем в этом утверждении число π/n заменить на меньше положительное число нельзя.*

Поэтому для каждого числа $h \in (\pi/n, \pi]$ существует полином $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ такой, что $\tau \le \chi_h$ и $\widehat{\tau}_0 > 0$; причем, если $0 < h \le \pi/n$, то для любого $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$, удовлетворяющего условию $\tau \le \chi_h$, выполняется неравенство $\widehat{\tau}_0 \le 0$.

Лемма 1. *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $\pi/q < h \leq \pi$, и пусть полином $\tau \in \mathcal{T}_{q-1}$ удовлетворяет условиям $\tau \leq \chi_h$, $\widehat{\tau}_0 > 0$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{D}(q)$ выполняется неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{\widehat{\tau}_0} \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.4}$$

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{D}(q)$, то (см. (2.5)) функция $F(x) := |f(x)|^2$ ортогональна гармоникам e^{ijx} при $j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(q-1)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) |f(x)|^2\, dx = \widehat{\tau}_0 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2.$$

Отсюда с учетом условия $\tau \leq \chi_h$ и представления (2.5) получаем

$$\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_h(x) |f(x)|^2\, dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} \tau(x) |f(x)|^2\, dx = 2\pi \widehat{\tau}_0 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_\nu|^2 = \widehat{\tau}_0 \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx,$$

что в силу положительности $\widehat{\tau}_0$ равносильно (3.4). Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $\pi/q < h \leq \pi$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{D}(q)$ выполняется неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{\dfrac{h}{\pi} - \mathcal{E}^-_{q-1}(h)} \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.5}$$

Доказательство. Имеем

$$\mathcal{E}^-_{q-1}(h) := E^-_{q-1}(\chi_h) = \inf_{\tau \in \mathcal{T}_{q-1},\, \tau \leq \chi_h} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{\chi_h(x) - \tau(x)\}\, dx = \frac{h}{\pi} - \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{q-1},\, \tau \leq \chi_h} \widehat{\tau}_0.$$

Таким образом,

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{q-1},\, \tau \leq \chi_h} \widehat{\tau}_0 = \frac{h}{\pi} - \mathcal{E}^-_{q-1}(h).$$

Отсюда с помощью леммы 1 приходим к неравенству (3.5). □

Очевидно, что для любого $h \in (0, \pi]$ и любого полинома $\tau \in \mathcal{T}_{q-1}$, удовлетворяющего условию $\chi_h \leq \tau$, выполняется неравенство $\widehat{\tau}_0 > 0$. Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве леммы 1, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2. *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $0 < h \leq \pi$, и пусть полином $\tau \in \mathcal{T}_{q-1}$ удовлетворяет условию $\chi_h \leq \tau$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{D}(q)$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\widehat{\tau}_0} \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.6}$$

Следствие 2. *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $0 < h \leq \pi$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{D}(q)$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\dfrac{h}{\pi} + \mathcal{E}^+_{q-1}(h)} \int_{-h}^{h} |f(x)|^2\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\mathcal{E}_{q-1}^{+}(h) := E_{q-1}^{+}(\chi_h) = \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{q-1},\,\chi_h\le\tau} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{\tau(x)-\chi_h(x)\}\,dx = \inf_{\tau\in\mathcal{T}_{q-1},\,\chi_h\le\tau} \widehat{\tau}_0 - \frac{h}{\pi},$$

так что

$$\inf_{\tau\in\mathcal{T}_{q-1},\,\chi_h\le\tau} \widehat{\tau}_0 = \frac{h}{\pi} + \mathcal{E}_{q-1}^{+}(h).$$

Отсюда с помощью леммы 2 приходим к неравенству (3.7). □

Суммируя утверждения следствий 1, 2 и принимая во внимание инвариантность подпространства $\mathcal{T}_{q-1}$ относительно любого сдвига, получаем следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$, $0<\lambda\le\pi$, $\pi/q<h\le\pi$. *Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{D}(q)$ *и любого* $a\in\mathbb{R}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2\lambda+2\pi\mathcal{E}_{q-1}^{+}(\lambda)}\int_a^{a+2\lambda}|f(x)|^2dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \le \frac{1}{2h-2\pi\mathcal{E}_{q-1}^{-}(h)}\int_a^{a+2h}|f(x)|^2dx. \tag{3.8}$$

Из результата Фейера (1913) для неотрицательных тригонометрических полиномов (см. [9; 4, отдел 6, § 7, задача 50) следует (см. [2]) равенство

$$\mathcal{E}_{q-1}^{-}(\pi) = \frac{1}{q} \quad \text{для} \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2.$$

Обращаем внимание читателя на то, что $\mathcal{E}_{q-1}^{-}(\pi)$ — величина наилучшего интегрального приближения *снизу* характеристической функции *открытого* интервала $(-\pi,\pi)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $q-1$, поэтому в качестве приближающего полинома нельзя брать полином, тождественно равный единице, поскольку такой полином положителен в концевых точках $-\pi$, π, в то время как приближающий полином должен быть неположительным в этих точках.

П. Ердеш и П. Туран (1948) (см. [8; 15, Ch. 1, p. 272]) доказали, что $\mathcal{E}_{q-1}^{-}(h) = O(q)$. Позднее этот результат был уточнен ([17; 14, Ch. 1]):

$$\mathcal{E}_{q-1}^{-}(h) \le \frac{1}{q} \quad \text{при любых} \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2, \quad h\in(0,\pi]. \tag{3.9}$$

В работе [12] содержится, в частности, такое утверждение:

$$\mathcal{E}_{q-1}^{-}(h) = \frac{1}{q} \quad \text{для} \quad q\in\mathbb{N}, \quad q\ge 2, \quad h=\frac{j\pi}{q}, \quad j=1,2,\ldots,q. \tag{3.10}$$

С помощью теоремы 1, неравенства (3.9) и утверждений (3.10), (3.3) получаем

Следствие 3. *Пусть* $q\in\mathbb{N}$, $q\ge 2$, $\pi/q<h\le\pi$. *Тогда для любой функции* $f\in\mathcal{D}(q)$ *и любого* $a\in\mathbb{R}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{1}{2h+\dfrac{2\pi}{q}}\int_a^{a+2h}|f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \le \frac{1}{2h-\dfrac{2\pi}{q}}\int_a^{a+2h}|f(x)|^2\,dx. \tag{3.11}$$

В частности, при $h=j\pi/q$, $j=2,\ldots,q$, *выполняются неравенства*

$$\frac{q}{j+1}\int_a^{a+\frac{2j\pi}{q}}|f(x)|^2\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx \le \frac{q}{j-1}\int_a^{a+\frac{2j\pi}{q}}|f(x)|^2\,dx. \tag{3.12}$$

Неравенства (3.12) при $j = 2$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $a = -2\pi/q$ приобретают вид

$$\frac{q}{3} \int_{-\frac{2\pi}{q}}^{\frac{2\pi}{q}} |f(x)|^2 \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \leq q \int_{-\frac{2\pi}{q}}^{\frac{2\pi}{q}} |f(x)|^2 \, dx, \quad f \in \mathcal{D}(q). \tag{3.13}$$

Поэтому с учетом принадлежности постоянных функций классу $\mathcal{D}(q)$ для величин, определенных формулами (2.2), имеют место оценки

$$\frac{q}{3} \leq \beta_q\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) \leq \frac{q}{2} \leq \alpha_q\Big(\frac{2\pi}{q}\Big) \leq q \quad \text{при} \quad q = 2, 3, 4, \ldots. \tag{3.14}$$

В статье [2] найдена величина $\mathcal{E}_n^-(h)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi]$; в частности,

$$\mathcal{E}_{q-1}^-(h) = \frac{h}{\pi} - \Lambda_{q-1}(h) \quad \text{при} \quad h \in \Big(\frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\Big), \tag{3.15}$$

где

$$\Lambda_{q-1}(h) = \frac{\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - \sin\dfrac{(q+1)h}{2}}{(q+1)\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - (q-1)\sin\dfrac{(q+1)h}{2}}. \tag{3.16}$$

Преобразуем знаменатель дроби, стоящей перед последним интегралом в неравенствах (3.8),

$$2h - 2\pi\mathcal{E}_{q-1}^-(h) = 2\pi\Lambda_{q-1}(h), \quad h \in \Big(\frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\Big). \tag{3.17}$$

Легко проверить, что $\Lambda_{q-1}(\pi/q) = 0$, $\Lambda_{q-1}(2\pi/q) = 1/q$ и

$$\Lambda'_{q-1}(h) = \frac{q\sin h - \sin qh}{\Big((q+1)\sin\dfrac{(q-1)h}{2} - (q-1)\sin\dfrac{q+1}{2}h\Big)^2} > 0 \quad \text{при} \quad h \in \Big[\frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\Big].$$

Поэтому $\Lambda_{q-1}(h)$ является положительной возрастающей функцией на $(\pi/q, 2\pi/q]$.

Следствие 4. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, $\pi/q < h < 2\pi/q$, $a \in \mathbb{R}$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{\Lambda_{q-1}(h)} \int_{a}^{a+2h} |f(x)|^2 \, dx, \quad f \in \mathcal{D}(q); \tag{3.18}$$

$$q \leq \alpha_q(h) \leq \frac{1}{\Lambda_{q-1}(h)}; \tag{3.19}$$

$$\lim_{h \to \frac{2\pi}{q} - 0} \alpha_q(h) = q, \qquad \lim_{h \to \frac{2\pi}{q+1} - 0} \alpha_q(h) = q + 1. \tag{3.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (3.18) вытекает из последнего неравенства в (3.8) и равенства (3.17). В свою очередь неравенство (3.18) влечет оценку сверху

$$\alpha_q(h) \leq \frac{1}{\Lambda_{q-1}(h)} \quad \text{при} \quad h \in \Big(\frac{\pi}{q}, \frac{2\pi}{q}\Big).$$

Оценка снизу в (3.19) была установлена выше (см. (2.4)). Из двусторонних оценок (3.19) предельным переходом при $h \to 2\pi/q - 0$ получаем первое равенство в (3.20), поскольку

$$\lim_{h \to \frac{2\pi}{q} - 0} \Lambda_{q-1}(h) = \frac{1}{q}.$$

Точка $h^* := 2\pi/(q+1)$ принадлежит интервалу $(\pi/q, 2\pi/q)$, на котором $\Lambda_{q-1}(h)$ непрерывна и принимает в точке h^* значение, равное $1/q+1$. Заменяя q на $q+1$ в первом равенстве из (3.20) и учитывая вложение $D_{q+1} \subset \mathcal{D}(q)$, получаем

$$q+1 = \lim_{h \to \frac{2\pi}{q+1}-0} \alpha_{q+1}(h) \leq \lim_{h \to \frac{2\pi}{q+1}-0} \alpha_q(h) \leq \frac{1}{\Lambda_{q-1}(h^*)} = q+1,$$

что влечет второе равенство в (3.20). Следствие доказано. $\square$

Отметим, что в силу последнего равенства в (2.3) соотношения (3.20) равносильны (1.22); неравенство (3.18) уточняет оценку, которая следует из последнего неравенства в (1.9) и оценки (1.4), (1.5), найденной в [11, § 2].

4. Приложение

Сформулируем результат Р. П. Боаса и М. Каца [6, Theorem 5, p. 198] для целых функций, который упоминался выше в разд. 1 в связи с последним равенством в (1.14).

Теорема C. *Если функция f представима в виде*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \varphi(t)\, dt,$$

где φ — неотрицательная и интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция, $f(x) = 0$ при $|x| \geq A > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx \leq A f(0), \tag{4.1}$$

причем существует функция f указанного вида, на которой это неравенство обращается в равенство.

В условиях этой теоремы имеем

$$\varphi(t) = \int_{-A}^{A} e^{-ixt} f(x)\, dx \geq 0 \quad \text{при всех} \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in C[-A, A]; \tag{4.2}$$

свойство непрерывности функции f следует из принадлежности φ пространству $L(\mathbb{R})$ (см. [5, гл. 1, § 1, с. 8, теорема 1.1]). Отсюда и из (4.1) получаем неравенства

$$|\varphi(\xi)| \leq \int_{-A}^{A} |f(x)|\, dx \leq A f(0) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Для любой неотрицательной функции $\varphi \in L(\mathbb{R})$ экспоненциального типа $A > 0$ имеет место представление (4.2). Поэтому в случае $A = 2\pi$ в силу (4.3) выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\varphi\|_{L(\mathbb{R})}.$$

В частности, для любой неотрицательной функции $\varphi \in L(\mathbb{R})$ экспоненциального типа 2π, являющейся мажорантой характеристической функции произвольного интервала, имеем

$$1 \leq \|\varphi\|_{L(\mathbb{R})},$$

что влечет оценку снизу $1 \leq \lim_{\xi \to +0} \theta^+(\xi)$. Оценка сверху $\lim_{\xi \to +0} \theta^+(\xi) \leq 1$ легко получается с помощью функции, на которой неравенство (4.1) обращается в равенство в случае $A = 2\pi$.

Авторы признательны В. В. Арестову за ценные замечания и благодарны Д. В. Горбачеву и Ю. В. Крякину за несколько важных литературных источников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г.** Об одной экстремальной задаче для полиномов // Мат. заметки. 1984. Т. 35, вып. 3. С. 349–356.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 82–95.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды / пер. с англ; под ред. Н. К. Бари. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
4. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Ч. 2. 432 с.
5. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 336 с.
6. **Boas R.P., Kac M.** Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 189–206.
7. **Donoho D.L., Logan B.F.** Signal recovery and the large sieve // SIAM J. Appl. Math. 1992. Vol. 52, no. 2. P. 577–591.
8. **Erdös P., Turan P.** On a problem in the theory of uniform distribution // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. I; II. 1948. Vol. 51. P. 1146–1154; P 1262–1269.
9. **Fejer L.** Sur les polynômes harmoniques quelconques, Gesammelte Arbeiten / Hrsg. und Komment. P. Turan. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1970. Bd. 1. P. 770–773.
10. **Fejer L.** Über trigonometrische Polynome, Gesammelte Arbeiten / Hrsg. und Komment. P. Turan. Budapest, Akadémiai Kiadó, 1970. Bd. 1. P. 842–872.
11. **Ingham A.E.** Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series // Math. Z. 1936. Vol. 41, no. 1. P. 367–379.
12. **Li X.-J., Vaaler J. D.** Some trigonometric extremal functions and the Erdos–Turan type inequalities // Indiana Univ. Math. J. 1999. Vol. 48, no. 1. P. 183–236.
13. **Littmann F.** Quadrature and extremal bandlimited functions // SIAM J. Math. Anal. 2013. Vol. 45, no. 2. P. 732–747.
14. **Montgomery H.L.** Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Washington: Amer. Math. Soc. Providence, 1994. 220 p. (CBMS Regional Conference Ser. Math. 84.)
15. **Montgomery H.L.** Harmonic analysis as found in analytic number theory. Twentieth century harmonic analysis-a celebration (Il Ciocco, 2000). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 271–293. (NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. 33.)
16. **Selberg A.** Collected papers. Berlin: Springer-Verlag, 1991. Vol. 2. 253 p.
17. **Vaaler J.D.** Some extremal functions in Fourier analysis // Bull. Amer. Math. Soc. (New Series). 1985. Vol. 12, no. 2. P. 183–216.
18. **Wiener N.** A class of gap theorems // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2). 1934. T. 3, no. 3-4. P. 367–372.

Бабенко Александр Григорьевич
Поступила 6.11.2014
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Юдин Владимир Александрович

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С НОВЫМИ АППРОКСИМАТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

Н. В. Байдакова

Построен конечный элемент с новыми свойствами аппроксимации старших производных. Предлагается способ построения пространства конечных элементов в плоском случае, основанный на более ранних результатах Ю.Н.Субботина и результатах, полученных в данной статье. Результирующая кусочно полиномиальная функция обладает свойством непрерывности и новыми аппроксимационными свойствами.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов, условие наибольшего угла, сплайны на триангуляциях.

N. V. Baidakova. A triangular finite element with new approximation properties.

A finite element with new properties of approximation of higher derivatives is constructed, and a method for the construction of a finite element space in the planar case is proposed. The method is based on Yu.N. Subbotin's earlier results as well as on the results obtained in this paper. The resulting piecewise polynomial function possesses the continuity property and new approximation properties.

Keywords: multidimensional interpolation, finite element method, maximum angle condition, splines on triangulations.

Введение

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ имеет форму многоугольника, а функция f определена на Ω и принадлежит классу $W^{n+1}M$, т. е. f непрерывна на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, и все ее производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M. Пусть имеется триангуляция области Ω и Δ — произвольный треугольник из триангуляции. Мы будем рассматривать задачу интерполяции функции f на Δ многочленом степени не выше n при $n \geq 3$. Обозначим через a_i $(i = 1, 2, 3)$ вершины треугольника Δ; через τ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j)$ — единичные векторы, направленные от вершины a_i к вершине a_j; через n_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j)$ — единичные нормали к сторонам $[a_i, a_j]$; через α, β, θ — углы при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно; через H — диаметр треугольника. Пусть $\alpha \leq \beta \leq \theta$. Тогда $H = \|a_2 - a_1\|$. Через $D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}$ будем обозначать производную порядка s по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$.

Договоримся, что для величин φ_1 и φ_2, каждая из которых, вообще говоря, может зависеть от функции f, введенных выше геометрических характеристик H, α, β, θ треугольника Δ и точки $u \in \Delta$, имеет место отношение

$$\varphi_1 \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} \varphi_2,$$

если существует число $C(n) > 0$, допускающее зависимость только от степени n интерполяционного многочлена, такое, что

$$\varphi_1 \overset{(\geq)}{\leq} C(n)\varphi_2.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — множество многочленов степени не выше n по совокупности переменных (суммы степеней у мономов не превосходят n) таких, что все коэффициенты любого многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ однозначно определяются тем, что он интерполирует значения функции f и, возможно, значения некоторых ее производных в выбранных точках треугольника Δ. Известно, что

[1]Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

для достаточно широкого множества $\mathcal{P}_n$ и любых единичных векторов $\xi_1,\dots,\xi_s$ имеют место оценки (Ф. Сьярле и П. Равьяр, [1])

$$\|D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-P)\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-s}\alpha, \quad 0\le s\le n, \tag{0.1}$$

где $P\in\mathcal{P}_n$, $\|\cdot\|_{C(\Delta)}$ — равномерная норма на Δ.

Введем множество мультииндексов

$$I=\{(i,j,k)|\quad i,j,k\in\mathbb{Z}_+;\ i+j+k=n\}$$

и выделим следующее множество точек треугольника Δ:

$$Q=\{u_{ijk}\}_{(i,j,k)\in I}=\{u_{ijk}|\quad u_{ijk}=(i/n)a_1+(j/n)a_2+(k/n)a_3,\ (i,j,k)\in I\}\,.$$

Рассмотрим многочлен $\widetilde{P}\in\mathcal{P}_n$ такой, что

$$\forall\ u\in Q\quad \widetilde{P}(u)=f(u). \tag{0.2}$$

В [2] и [3] Ю. Н. Субботиным доказано, что для любых единичных векторов $\xi_1,\dots,\xi_s$ имеют место оценки

$$\|D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-\widetilde{P})\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-s}\theta, \quad 0\le s\le n. \tag{0.3}$$

Отметим, что в работах [1] и [3] оценки типа (0.1) и (0.3) получены не только для плоского, но и для многомерных случаев (в частности, когда Δ является m-симплексом), однако мы остановимся на случае треугольника. Преимущество соотношения (0.3) перед (0.1) заключается в том, что использование оценок (0.1) требует наложения на триангуляцию "условия наименьшего угла", т. е. требования ограничения снизу величин наименьших углов треугольников из триангуляции, в то время как наличие оценок (0.3) позволяет ограничиться более слабым условием отделенности от π наибольших углов треугольников. В данной работе предлагается сохранить те условия из (0.2), которые задаются в точках, принадлежащих сторонам треугольника Δ, и заменить оставшиеся на интерполяцию старших производных в точке a_2.

Рассмотрим множество

$$I_0=\{(i,j,k)\in I|\quad i\cdot j\cdot k=0\}$$

и соответствующее подмножество Q_0 множества Q (точки из Q, принадлежащие сторонам треугольника):

$$Q_0=\{u_{ijk}\}_{(i,j,k)\in I_0}=\{u_{ijk}|\quad u_{ijk}=(i/n)a_1+(j/n)a_2+(k/n)a_3,\ (i,j,k)\in I_0\}\,.$$

Пусть многочлен P определяется следующими условиями:

$$P(u)=f(u) \tag{0.4}$$

для всех $u\in Q_0$ и

$$\frac{\partial^{i+j}P(a_2)}{\partial\tau_{12}^i\partial n_{12}^j}=\frac{\partial^{i+j}f(a_2)}{\partial\tau_{12}^i\partial n_{12}^j} \tag{0.5}$$

для всех $j=\overline{3,n}$, $i=\overline{0,n-j}$.

Множество всех многочленов степени не выше n, удовлетворяющих условию (0.4), обозначим через $\mathcal{P}_n[Q_0]$. Ясно, что $P,\widetilde{P}\in\mathcal{P}_n[Q_0]\subset\mathcal{P}_n$.

Поместим треугольник Δ в прямоугольную систему координат Oxy таким образом, что для некоторых положительных a,b,h координаты вершин будут записываться следующим образом: $a_1=(a+b,0)$, $a_2=(0,0)$, $a_3=(a,h)$ (см. рис. 1). Так как $\alpha\le\beta\le\gamma$, то $a\le b$, и имеет место равенство $H=a+b$ (очевидно также, что a,b,h являются некоторыми функциями величин H,α,β,θ, что следует учитывать при использовании отношения "$\lesssim$" или "$\gtrsim$"). В этом случае условия (0.5) принимают вид

$$\frac{\partial^{i+j}P(a_2)}{\partial x^i\partial y^j}=\frac{\partial^{i+j}f(a_2)}{\partial x^i\partial y^j}\ ,$$

где $j=\overline{3,n}$, $i=\overline{0,n-j}$.

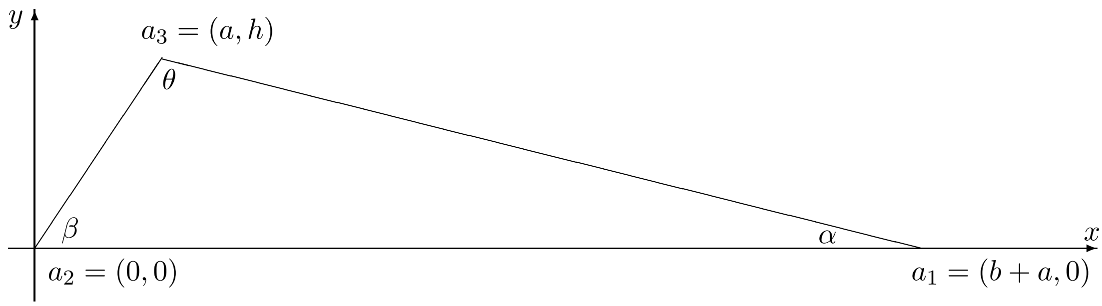


Рис. 1. Расположение треугольника Δ в системе координат Oxy.

Наша цель — доказать четыре теоремы, сформулированные ниже. Кроме того, в последнем разделе приводится описание способа построения пространства конечных элементов с новыми аппроксимационными свойствами. Данное пространство строится на основе результатов Ю. Н. Субботина и результатов, полученных в настоящей работе.

Теорема 1. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.5). *Тогда для любого $\beta_0 < \pi/2$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $\beta \le \beta_0$, и любого неотрицательного целого числа s такого, что $0 \le s \le n$, справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial^{s-j}(f-P)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n,\beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j}\theta, & j = \overline{0, \min\{2, s\}}, \\ C(n,\beta_0) M H^{n+1-s}, & j = 3, \dots, s, \end{cases} \tag{0.6}$$

где $C(n, \beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0.

Теорема 2. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.5). *Тогда для любого $\beta_0 < \pi/2$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $\beta \le \beta_0$, любого $s = 0, \dots, n$ и произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_s$ справедлива оценка*

$$\left\| D^s_{\xi_1 \dots \xi_s}(f-P) \right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n,\beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-s}\theta, & s = 0, 1, 2, \\ C(n,\beta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-2}\theta, & s = 3, \dots, n, \end{cases} \tag{0.7}$$

где $C(n, \beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0.

Вместо условий (0.5) можно использовать аналогичные условия в наибольшем угле

$$\frac{\partial^{i+j} P(a_3)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j} = \frac{\partial^{i+j} f(a_2)}{\partial \tau_{31}^i \partial n_{31}^j} \tag{0.8}$$

для всех $j = \overline{3, n}$, $i = \overline{0, n-j}$. В этом случае будут иметь место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.8). *Тогда для любого θ_0 такого, что $|\cos\theta_0| > 0$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $|\cos\theta| > |\cos\theta_0|$, и любого неотрицательного целого числа s такого, что $0 \le s \le n$, справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial^{s-j}(f-P)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n,\theta_0) M H^{n+1-s} \sin^{-j}\theta, & j = \overline{0, \min\{2, s\}}, \\ C(n,\theta_0) M H^{n+1-s}, & j = 3, \dots, s, \end{cases} \tag{0.9}$$

где $C(n, \theta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и θ_0.

Теорема 4. *Пусть для $f \in W^{n+1}M$ многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ определяется интерполяционными условиями* (0.4) *и* (0.8). *Тогда для любого θ_0 такого, что $|\cos\theta_0| > 0$, любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $|\cos\theta| > |\cos\theta_0|$, любого $s = 0, \dots, n$ и произвольных единичных векторов $\xi_1, \dots, \xi_s$ справедлива оценка*

$$\left\|D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-P)\right\|_{C(\Delta)} \le \begin{cases} C(n,\theta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-s}\theta, & s = 0,1,2,\\ C(n,\theta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-2}\theta, & s = 3,\dots,n, \end{cases} \tag{0.10}$$

где $C(n,\theta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и θ_0.

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 2 и 4 являются тривиальными следствиями теорем 1 и 3 соответственно и приводятся здесь лишь по той причине, что запись оценок в виде (0.7) и (0.10) является более традиционной по сравнению с (0.6) и (0.9).

З а м е ч а н и е 2. Так как $\sin\theta \lesssim \sin\beta \lesssim \sin\theta$, то в оценках (0.3), (0.6), (0.7), (0.9), (0.10) вместо $\sin\theta$ можно писать $\sin\beta$, что не влияет на точность оценок.

З а м е ч а н и е 3. Вопрос оптимальности найденных условий интерполяции и полученных оценок на классе $W^{n+1}M$ остается открытым. В [4] для функции из $W^{n+1}M$ получены оценки снизу для широкого класса конечных элементов, обеспечивающих определенную гладкость или непрерывность результирующего сплайна на триангуляции. В случае непрерывности в оценках снизу в знаменателях присутствует синус наибольшего (или среднего) угла в первой степени. В полученных здесь оценках сверху в знаменателях оценок аппроксимации производных высоких порядков может присутствовать квадрат синуса наибольшего (или среднего) угла, в то время как рассматриваемые условия интерполяции обеспечивают непрерывность сплайна на Ω.

Обзоры, связанные с “условием наибольшего угла” в методе конечных элементов, можно найти, например, в [4; 5].

1. Подробнее об оценках Ю. Н. Субботина

Наряду с оценками (0.3) в [3, лемма 4] для многочлена $\widetilde{P}$ доказан следующий факт. Для одного из условий

$$\xi_k \in \{\tau_{21}, \tau_{23}\} \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1,s} \tag{1.1}$$

или

$$\xi_k \in \{\tau_{31}, \tau_{32}\} \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1,s} \tag{1.2}$$

для любого $s = 0, \dots, n$ имеет место соотношение

$$\left\|D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-\widetilde{P})\right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}. \tag{1.3}$$

Способ выбора условия (1.1) или (1.2) указан в [3], но для нас он не будет иметь значения. Покажем, что это, в частности, означает, что

$$\left\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-i}\partial y^i}\right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-i}\beta \tag{1.4}$$

для $i = 0, \dots, s$; $s = 0, \dots, n$.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда (1.3) выполняется для случая (1.1). Рассмотрим произвольное $s \in \{0, \dots, n\}$. Для $i = 0$ оценка (1.4) совпадает с (1.3) при $\xi_1 = \dots = \xi_s = \tau_{21}$. Пусть теперь $1 \le j \le s$, и неравенство (1.4) имеет место для $i = 0, \dots, j-1$. Тогда в (1.3) возьмем $\xi_1 = \dots = \xi_{s-j+1} = \tau_{21}$, $\xi_{s-j+1} = \dots = \xi_s = \tau_{23}$ и представим s-ю производную по направлениям τ_{21} и τ_{23} через сумму частных производных

$$D^s_{\xi_1\dots\xi_s}(f-\widetilde{P}) = \sum_{k=0}^{j} C_j^k \frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta,$$

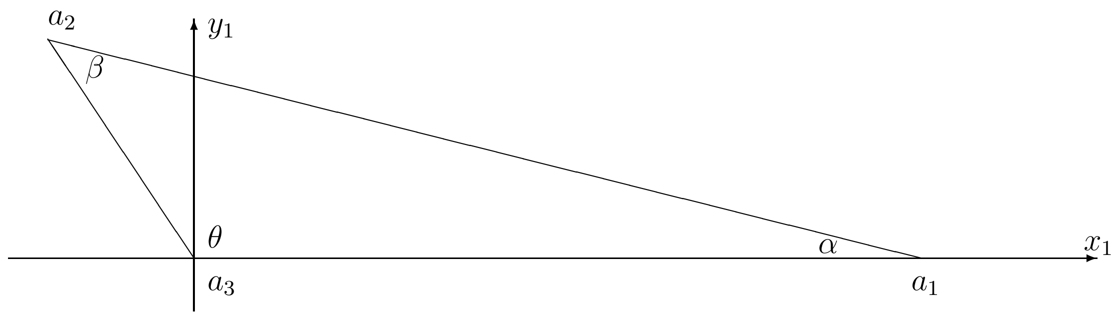


Рис. 2. Расположение треугольника Δ в системе координат Ox_1y_1.

откуда следует оценка

$$\Big\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\sin^j\beta\Big\|_{C(\Delta)} = \Big\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-\widetilde{P}) - \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k \frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta\Big\|_{C(\Delta)}$$

$$\lesssim \big\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-\widetilde{P})\big\|_{C(\Delta)} + \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k \Big\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta\Big\|_{C(\Delta)}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s} + \sum_{k=0}^{j-1} C_j^k MH^{n+1-s}\sin^{-k}\beta\cos^{j-k}\beta\sin^k\beta \lesssim MH^{n+1-s},$$

т. е. (1.4) доказано.

В ситуации, когда (1.3) выполняется при (1.2), введем вспомогательную систему координат Ox_1y_1 таким образом, чтобы точка a_3 совпадала с началом координат, вектор τ_{31} был сонаправлен с осью Ox_1 и треугольник Δ для определенности находился в верхней полуплоскости (см. рис. 2). Тогда аналогично уже рассмотренному случаю получаем оценки

$$\Big\|\frac{\partial^s(f-\widetilde{P})}{\partial x^{s-i}\partial y^i}\Big\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-i}\theta \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-i}\beta$$

для $i=0,\ldots,s$; $s=0,\ldots,n$. Далее, поскольку $\dfrac{\partial}{\partial\tau_{21}} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\cos\alpha - \dfrac{\partial}{\partial y_1}\sin\alpha$, $\dfrac{\partial}{\partial\tau_{23}} = -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\cos\theta - \dfrac{\partial}{\partial y_1}\sin\theta$ и $\sin\beta \lesssim \sin\theta \lesssim \sin\beta$, можем утверждать, что (1.3) имеет место также при (1.1). Таким образом, мы оказываемся в условиях уже рассмотренного случая.

З а м е ч а н и е 4. Приведенные выше рассуждения означают также, что если соотношение (1.3) имеет место при одном из условий (1.1) или (1.2), то оно имеет место и при другом из этих условий (нами показано, что из справедливости (1.3) при (1.2) следует справедливость (1.3) при (1.1); обратное утверждение доказывается аналогично).

2. Доказательство теорем 1 и 2

Рассмотрим многочлен $R \in \mathcal{P}_n$. Введем обозначение

$$e[R](x,y) = f(x,y) - R(x,y).$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши, получим следующее разложение для всех $(x,y) \in \Delta$:

$$\frac{\partial^s e[R](x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j} = \sum_{i=j}^{n-s+j} \frac{1}{(i-j)!} y^{i-j} \sum_{k=0}^{n-s+j-i} \frac{\partial^{s-j+i+k} e[R](0,0)}{\partial x^{s-j+k}\partial y^i}\,\frac{x^k}{k!}$$

$$+\sum_{i=j}^{n-s+j}\frac{1}{(i-j)!}y^{i-j}\int\limits_0^x\frac{(x-v)^{n-s+j-i}}{(n-s+j-i)!}\;\frac{\partial^{n+1}e[R](v,0)}{\partial v^{n+1-i}\partial y^i}\;dv$$

$$+\int\limits_0^y\frac{(y-t)^{n-s}}{(n-s)!}\;\frac{\partial^{n+1}f(x,t)}{\partial x^{s-j}\partial t^{n+1-s+j}}\;dt\;. \tag{2.1}$$

Чтобы доказать (0.6), достаточно для многочлена $R=P$, определяемого условиями (0.4) и (0.5), оценить $\partial^s e[P](0,0)/\left(\partial x^{s-j}\partial y^j\right)$, $0\le s\le n$, $0\le j\le s$.

Лемма. *В условиях теоремы* 1 *найдется неотрицательная величина* $K(n,\beta_0)$, *зависящая только от* n *и* β_0, *такая, что для любого* $s=1,\dots,n$ *имеют место следующие соотношения*:

$$\Big|\frac{\partial^s e[P](0,0)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\Big|\le K(n,\beta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-j}\beta,\quad \textit{если}\quad j=\overline{0,\min\{2,s\}}; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^s e[P](0,0)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}=0,\quad \textit{если}\quad s\ge 3\quad \textit{и}\quad j=3,\dots,s. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства (2.3) следуют из (0.5). Остается доказать (2.2). Пусть s — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1\le s\le n$. Напомним, что $a_2=(0,0)$. Рассматривая $e[P](x,0)$ на отрезке $[a_2,a_1]$ и используя формулы для оценки ошибки интерполяции в одномерном случае (см., например, [6]), получаем

$$\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^s}=C_1(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{21}^s)}{\partial x^{n+1}}H^{n+1-s}, \tag{2.4}$$

где $C_1(s)$ — величина, зависящая только от s и допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n; ζ_{21}^s — точка между a_2 и a_1. Таким образом,

$$\Big|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^s}\Big|\lesssim MH^{n+1-s},$$

т. е. (2.2) доказано для $j=0$ при любом выбранном нами $s=1,\dots,n$. Если $s\ge 2$, то для оценки оставшихся двух производных (при $j=1,2$) составим систему уравнений; при этом воспользуемся методом математической индукции.

Пусть (2.2) доказано для $s=r+1,\dots,n$, где $r\in\{2,\dots,n-1\}$. Тогда, принимая во внимание (2.1), можем утверждать, что формула (0.6) из теоремы 1 имеет место для всех $s=r+1,\dots,n$. Рассмотрим произвольное $s=r\in\{2,\dots,n-1\}$ (что соответствует шагу индукции) или $s=r=n$ (база индукции). Поскольку шаг и база индукции доказываются почти одинаково, мы будем рассматривать эти случаи одновременно, лишь иногда при необходимости отдельно останавливаясь на обсуждении случая $s=r=n$. Возьмем сужение функции $e[P]$ на отрезок $[a_2,a_3]$. С одной стороны, применяя известные результаты для оценок ошибок интерполяции в одномерном случае, получим равенство

$$\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial\tau_{23}^s}=C_2(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{23}^s)}{\partial\tau_{23}^{n+1}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}, \tag{2.5}$$

где $C_2(s)$ — величина, зависящая только от s и допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n; ζ_{23}^s — точка между a_2 и a_3. С другой стороны, производную по направлению τ_{23} можно разложить в сумму частных производных, принимая во внимание равенства (2.3):

$$\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial\tau_{23}^s}=\sum_{k=0}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\beta\sin^k\beta$$

$$=\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^s}\cos^s\beta+s\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\beta\sin\beta+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta. \tag{2.6}$$

Объединяя (2.4)–(2.6), приходим к равенству

$$s\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\beta\sin\beta+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta=m_1(s), \tag{2.7}$$

где

$$|m_1(s)|=\Big|C_2(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{23}^s)}{\partial\tau_{23}^{n+1}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}-C_1(s)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta_{21}^s)}{\partial x^{n+1}}H^{n+1-s}\cos^s\beta\Big|$$

$$\lesssim M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}+MH^{n+1-s}\cos^s\beta.$$

Для получения второго уравнения системы рассмотрим произвольный многочлен $R\in\mathcal{P}_n[Q_0]$, т. е. многочлен, удовлетворяющий условиям (0.4). В частности, это могут быть $\widetilde{P}$ или P. Рассмотрим сужение функции $\partial^s e[R]/\left(\partial\tau_{31}^s\right)$ на отрезок $[a_2,a_3]$ и разложим значение этой функции в точке a_2 по формуле Тейлора в точке a_3. В результате имеем равенство

$$\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial\tau_{31}^s}=\frac{\partial^s e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s}+\sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\partial^{s+k}e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2}$$

$$+\frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\,\frac{\partial^{n+1}f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^{n+1-s}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2} \tag{2.8}$$

(если $s=n$, то в правой части этого равенства присутствуют только первое и последнее слагаемые, т. е. сумму $\sum_{k=1}^0$ считаем равной нулю). С другой стороны, производную по направлению τ_{31} можно разложить в сумму частных производных

$$\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial\tau_{31}^s}=\sum_{k=0}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k. \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) приходим к равенству

$$-s\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha=\mu_1^s[R]+\mu_2^s[R], \tag{2.10}$$

где

$$\mu_1^s[R]=\sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\partial^{s+k}e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2}+\frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\,\frac{\partial^{n+1}f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^{n+1-s}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}$$

$$-\sum_{k=3}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k,$$

$$\mu_2^s[R]=\frac{\partial^s e[R](a_3)}{\partial\tau_{31}^s}-\frac{\partial^s e[R](a_2)}{\partial x^s}\cos^s\alpha.$$

Отметим, что $\mu_2^s[R]$ зависит только от условий интерполяции на сторонах $[a_3,a_1]$ и $[a_2,a_1]$, т. е. от части условий (0.4). Таким образом, $\mu_2^s[R]=\mu_2^s[\widetilde{P}]=\mu_2^s[P]$. Следовательно, для оценки этой величины можем использовать результат Ю. Н. Субботина (1.3), (1.4) и равенство (2.10)

$$\left|\mu_2^s[R]\right|=\left|\mu_2^s[\widetilde{P}]\right|=\Big|-s\frac{\partial^s e[\widetilde{P}](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha+\frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[\widetilde{P}](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha-\mu_1^s[\widetilde{P}]\Big|$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{s}C_s^k\frac{\partial^s e[\widetilde{P}](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k-\sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{\partial^{s+k}e[\widetilde{P}](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2}$$

$$- \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!} \frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s \partial\tau_{23}^{n+1-s}} \left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2} \Big|$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{s} C_s^k M H^{n+1-s} \frac{\cos^{s-k}\alpha \sin^k \alpha}{\sin^k \beta} + \sum_{k=1}^{n-s} M H^{n+1-s-k} \left(a^2+h^2\right)^{k/2} + M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}$$

$$\lesssim M H^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Подставим $R = P$ в (2.10) и с учетом условий (0.5) получим

$$-s\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha + \frac{s(s-1)}{2}\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha = \mu_1^s[P] + \mu_2^s[P], \tag{2.11}$$

где

$$|\mu_2^s[P]| = |\mu_2^s[R]| \lesssim M H^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2};$$

$$\mu_1^s[P] = \sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2} + \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^{n+1-s}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}$$

$$-\sum_{k=3}^{s} C_s^k \frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-k}\partial y^k}\cos^{s-k}\alpha(-\sin\alpha)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-s}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\left(a^2+h^2\right)^{k/2} + \frac{(-1)^{n+1-s}}{(n+1-s)!}\frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^s\right)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^{n+1-s}}\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}. \tag{2.12}$$

Если $s = n$, то правая часть равенства (2.12) состоит из одного слагаемого, и тогда

$$\left|\mu_1^s[P]|_{s=n}\right| = |\mu_1^n[P]| = \Big| - \frac{\partial^{n+1} f\left(\eta_{23}^n\right)}{\partial\tau_{31}^n\partial\tau_{23}}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}\Big| \lesssim M\left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Если $s = r \in \{2,\dots,n-1\}$, то правая часть равенства (2.12) содержит также сумму по k. В силу предположения индукции теорема 1 имеет место при всех $s = r+1,\dots,n$, и тогда этот факт и то, что

$$\Big|\frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\Big| \lesssim \Big|\frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial x^{s_1+k_1}\partial y^{s_2+k_2}}\cos^{s_1}\alpha\cos^{k_1}\beta(-\sin\alpha)^{s_2}\sin^{k_2}\beta\Big|,$$

где $s_1 + s_2 = s$, $k_1 + k_2 = k$, приводит к оценке

$$\left|\frac{\partial^{s+k} e[P](a_3)}{\partial\tau_{31}^s\partial\tau_{23}^k}\right| \lesssim M H^{n+1-s-k}.$$

Таким образом,

$$|\mu_1^s[P]| \lesssim M H^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Объединяя (2.7) и (2.11), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} s\dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\beta\sin\beta + \dfrac{s(s-1)}{2}\dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta = m_1(s), \\ -s\dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha + \dfrac{s(s-1)}{2}\dfrac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha = m_2(s), \end{cases}$$

где

$$|m_1(s)| \lesssim M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2} + M H^{n+1-s}\cos^s\beta,$$

$$|m_2(s)| = |\mu_1^s[P] + \mu_2^s[P]| \lesssim M H^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}.$$

Для решения системы используем формулы Крамера. Обозначим через A основную матрицу системы. Вычислим определитель основной матрицы

$$\det A = \frac{s^2(s-1)}{2}\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha \begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{s^2(s-1)}{2}\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta).$$

Тогда, принимая во внимание то, что $\cos\alpha \gtrsim 1$, $\sin\beta = h/\left(a^2+h^2\right)^{1/2}$, $h/H \lesssim \sin\alpha = h/b \lesssim h/H$, $\sin\beta \lesssim \sin(\alpha+\beta) = \sin\theta \lesssim \sin\beta$, получаем

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\right| \lesssim \frac{|m_1(s)|\cos^{s-2}\alpha\sin^2\alpha + |m_2(s)|\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{|m_1(s)|\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|m_2(s)|\sin\beta}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} \lesssim \frac{|m_1(s)|\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{|m_2(s)|}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha}$$

$$\lesssim \frac{M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}\cos^s\beta\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\frac{\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}}{H^{n+1-s}}\frac{\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}\cos^2\beta\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{MH^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{\sin\alpha}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{n+1-s}\frac{\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta} + \frac{MH^{n+1-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}{h}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\sin\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}$$

$$\lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}\ . \tag{2.13}$$

Так как $\sin\alpha \le \sin(2\beta)$ (это следует из того, что $\sin\alpha - \sin(2\beta) = \sin(\theta+\beta) - \sin(2\beta) = 2\sin\left((\theta-\beta)/2\right)\cos((\theta+\beta)/2+\beta) = 2\sin((\theta-\beta)/2)\cos((\pi-\alpha)/2+\beta) = -2\sin((\theta-\beta)/2)\sin(\beta-\alpha/2) \le 0$) и $\beta \le \beta_0$, то (2.13) приводит к оценке

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-1}\partial y}\right| \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-4}\beta\sin\beta}\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2(2\beta)} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta} \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{n-4}\beta\sin\beta}$$

$$\le \left(\frac{1}{\cos\beta_0}\right)^{n-4}\frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta}\ . \tag{2.14}$$

Аналогично оцениваем оставшуюся производную

$$\left|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\right| \lesssim \frac{|m_1(s)|\cos^{s-1}\alpha\sin\alpha + |m_2(s)|\cos^{s-1}\beta\sin\beta}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{|m_1(s)|\cos\alpha}{\cos^{s-2}\beta\sin\beta\sin(\alpha+\beta)} + \frac{|m_2(s)|\cos\beta}{\cos^{s-2}\alpha\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)} \lesssim \frac{|m_1(s)|}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{|m_2(s)|\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\lesssim \frac{M\left(a^2+h^2\right)^{(n+1-s)/2}}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}\cos^s\beta}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + \frac{MH^{n-s}\left(a^2+h^2\right)^{1/2}\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\lesssim MH^{n+1-s}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{n+1-s}\frac{1}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta} + MH^{n+1-s}\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + MH^{n+1-s}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-2}\beta\sin^2\beta}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta}\ . \tag{2.15}$$

Окончательно с учетом того, что $\sin\alpha \le \sin(2\beta)$ и $\beta \le \beta_0$, неравенство (2.15) дает оценку

$$\Big|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x^{s-2}\partial y^2}\Big| \lesssim \frac{MH^{n+1-s}}{\cos^{s-3}\beta\sin^2\beta}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(2\beta)} + \frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta} \lesssim \Big(\frac{1}{\cos\beta_0}\Big)^{n-3}\frac{MH^{n+1-s}}{\sin^2\beta}\ . \tag{2.16}$$

Для завершения доказательства леммы осталось доказать (2.2) при $s=1$.

В случае $s=1$ нет необходимости составлять систему уравнений. Достаточно рассмотреть сужение функции $e[P]$ на сторону $[a_2,a_3]$ и использовать оценки ошибки аппроксимации производной функции производной интерполяционного многочлена, с одной стороны, и разложение производной по направлению в сумму частных производных — с другой. Таким образом,

$$\frac{\partial e[P](a_2)}{\partial \tau_{23}} = C_2(1)\frac{\partial^{n+1}f(\zeta^1_{23})}{\partial \tau_{23}^{n+1}}\left(a^2+h^2\right)^{n/2} = \frac{\partial e[P](a_2)}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial e[P](a_2)}{\partial y}\sin\beta,$$

где $C_2(1)$ — величина, допускающая оценку сверху величиной, зависящей от n; ζ^1_{23} — точка между a_2 и a_3. Принимая во внимание то, что (2.2) доказано при всех s для $j=0$, получаем

$$\Big|\frac{\partial e[P](a_2)}{\partial y}\Big| \lesssim \frac{MH^n}{\sin\beta}\ .$$

Лемма доказана.

Для окончательного доказательства теоремы 1 применяем разложение (2.1) и лемму. □

Теорема 2 является тривиальным следствием теоремы 1 и вытекает из того, что производная любого порядка функции по любым направлениям может быть разложена в сумму частных производных того же порядка с коэффициентами, модули которых могут быть оценены сверху величинами, зависящими только от n.

Следствие. *Если* $n=3$, *то в формулировках теорем* 1 *и* 2 *можно исключить ограничения на угол* β *и зависимость величины* $C(n,\beta_0)$ *от* β_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2.14), (2.16) и разложения (2.1).

3. Доказательство теорем 3 и 4

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 1. Вводится прямоугольная система координат Ox_1y_1 так, чтобы точка a_3 совпадала с началом координат, точка a_1 принадлежала оси Ox_1, точка a_2 находилась в верхней полуплоскости (см. рис. 2). Почти полностью повторяется доказательство леммы с заменой угла β на θ, переменных x и y — на x_1 и y_1 соответственно. Исключением является то, что не доказываются оценки вида (2.14) и (2.16). Доказательство останавливается на оценках вида (2.13) и (2.15), откуда для любого $s=2,\dots,n$ следуют неравенства

$$\Big|\frac{\partial^s e[P](a_3)}{\partial x_1^{s-1}\partial y_1}\Big| \lesssim \Big(\frac{1}{\cos\beta_0}\Big)^{n-2}\frac{MH}{\sin\beta}\ , \qquad \Big|\frac{\partial^s e[P](a_2)}{\partial x_1^{s-2}\partial y_1^2}\Big| \lesssim \Big(\frac{1}{\cos\beta_0}\Big)^{n-2}\frac{MH}{\sin^2\beta}\ .$$

Прочая часть доказательства леммы остается без изменений. □

Теорема 4 является следствием теоремы 3.

4. Построение пространства конечных элементов

Пусть Δ — произвольный треугольник из триангуляции области Ω, β — средний угол этого треугольника. Очевидно, $0 \le \beta \le \pi/2$. Представим отрезок $[0,\pi/2]$ в виде объединения двух отрезков. Например, $[0,\pi/2] = [0,\pi/3] \cup [\pi/3,\pi/2]$.

Если $\beta < \pi/3$, то при построении конечного элемента выберем многочлен P, задаваемый условиями (0.4), (0.5), для которого имеют место оценки (0.6) и (0.7). В частности, для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ и $0 \le s \le n$ будет

$$\left\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-P)\right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}(\sin\theta)^{-\min\{s,2\}}.$$

Если $\beta \ge \pi/3$, то выберем многочлен $\widetilde{P}$, задаваемый условиями (0.2). В силу (0.3) и существующего ограничения на угол β для любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ и $0 \le s \le n$ имеют место оценки

$$\left\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-\widetilde{P})\right\|_{C(\Delta)} \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-s}\theta \lesssim MH^{n+1-s}\sin^{-s}\beta \lesssim MH^{n+1-s}.$$

Так как в определении многочлена P и многочлена $\widetilde{P}$ участвуют условия (0.4), то результирующий сплайн на Ω будет непрерывной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol. 46, no. 3. P. 177–199.
2. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / под ред. А. Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦН, 1981. С. 148–153.
3. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 117–137.
4. **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97.
5. On angle conditions in the finite element method / J. Brandts, A. Hannukainen, S. Korotov, M. Krizek // SeMA J. 2011. No. 56. P. 81–95.
6. **Березин И.С., Жидков Н.П.** Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1962. 464 с.

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Поступила 18.02.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУРЬЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ[1]

Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов

Получены точные по порядку оценки поперечников Фурье классов Никольского — Бесова $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой Ω смешанного модуля гладкости порядка l в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ для всех соотношений между параметрами p, q, θ при некоторых условиях на Ω. Оценки сверху следуют из точных по порядку оценок приближения классов $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ специальными частными суммами рядов Фурье по кратной системе Ψ_d периодизированных всплесков Мейера.

Ключевые слова: поперечник Фурье, смешанный модуль гладкости, функциональные пространства, система всплесков.

Sh. A. Balgimbaeva, T. I. Smirnov. Bounds for Fourier widths of classes of periodic functions with a mixed modulus of smoothness.

Order-exact bounds are obtained for Fourier widths of the Nikol'skii–Besov classes $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ and Triebel–Lizorkin classes $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ of functions with a given majorant Ω for the mixed modulus of smoothness of order l in the space $L_q(\mathbb{T}^d)$ for all relations between the parameters p, q, and θ under some conditions on Ω. The upper bounds follow from order-exact bounds for approximations of the classes $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ and $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ by special partial sums of Fourier series in the multiple system Ψ_d of periodized Meyer wavelets.

Keywords: Fourier width, mixed modulus of smoothness, function spaces, wavelet system.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство 1-периодических по каждой переменной функций f, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\|f \mid L_p\|$, где

$$\|f \mid L_p\| = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} (1 \le p < \infty); \quad \|f \mid L_\infty\| = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{T}^d\},$$

где $\mathbb{T}^d := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор; $\mathbb{T} \equiv \mathbb{T}^1$. Здесь и далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.

Напомним, что поперечником Фурье (или, что то же, ортопоперечником) порядка M класса функций F в пространстве L_q называется величина

$$\varphi_M(F, L_q) = \inf_{\{h_\imath\}_{\imath=1}^M} \sup_{f \in F} \Big\| f - \sum_{\imath=1}^M \langle f, h_\imath \rangle h_\imath | L_q \Big\|, \tag{1.1}$$

где нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{h_\imath\}_{\imath=1}^M \subset L_\infty$. Поперечники Фурье были введены В. Н. Темляковым в 1982 г. в [1].

[1]Работа выполнена при поддержке грантов 5130/ГФ4, 5129/ГФ4 и 0245/ГФ3 МОиН Республики Казахстан.

В предлагаемой работе устанавливаются точные по порядку оценки поперечников Фурье классов функций типа Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $SF^{\Omega,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$, задаваемых с помощью мажоранты смешанного модуля гладкости, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям (определение и представление пространств см. в разд. 2).

Для различных функциональных классов оценки поперечников Фурье рассматривались многими авторами. В частности, В. Н. Темляков, Динь Зунг, Э. М. Галеев, а также А. В. Андрианов и В. Н. Темляков нашли точные порядковые оценки поперечников Фурье классов функций с ограниченной смешанной производной SW^r_p или разностью SH^r_p (подробнее см. [2; 3]).

Динь Зунг [4] получил точные порядковые оценки поперечников Фурье классов функций типа Никольского — Бесова, задаваемых посредством мажоранты специального вида для смешанного модуля гладкости 1-го и 2-го порядка смешанной (дробной) производной (в смысле Вейля) для некоторых соотношений между параметрами класса и пространства.

Далее отметим работы Н. Н. Пустовойтова [5; 6], в которых изучены поперечники Фурье классов периодических функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности порядка l в L_p, содержащей (помимо степенных) логарифмические множители.

Д. Б. Базарханов [7] получил точные в смысле порядка оценки поперечников Фурье классов типа Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля периодических функций обобщенной смешанной гладкости, используя представление этих классов рядами Фурье по кратной системы всплесков Мейера (там же достаточно подробно освещена история вопроса).

Укажем, что при получении оценок сверху мы придерживаемся схемы работы [8], а при получении оценок снизу используются (адаптированные) примеры и техника работ [5–7; 9] (см. также [2; 10]).

В заключение введем некоторые обозначения, которыми будем пользоваться всюду ниже. Пусть $e_d = \{1, \dots, d\}$, $d \in \mathbb{N}$. Для $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим

$$x < y (x \le y) \Leftrightarrow x_j < y_j (x_j \le y_j), \quad j \in e_d; \quad (x, y) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d;$$

$|s| = \sum_{k=1}^d s_k$ — длина мультииндекса $s \in \mathbb{N}_0^d$; log — это логарифм по основанию 2, $a_+ = \max\{a, 0\}$ для $a \in \mathbb{R}$; $\mathbf{1} = (1, \dots, 1), \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

Обозначим через

$$\delta_s(f) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)}, \quad s \in \mathbb{N}^d, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

“двоичные пачки” ряда Фурье функции $f \in L_1$; здесь $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-2\pi i (k,x)} dx$, $k \in \mathbb{Z}^d$, — коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi i (k,x)} \,|k \in \mathbb{Z}^d\}$;

$$\rho(s) = \big\{k = (k_1, \dots, k_d) \colon [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, \ j \in e_d\big\}, \quad s \in \mathbb{N}_0^d.$$

2. Классы функций

В этом разделе даются определения пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля периодических функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости.

Пусть ℓ_θ $(1 \le \theta \le \infty)$ — пространство числовых последовательностей $\{a_s\}_{s \in \mathbb{N}_0^d}$ с конечной нормой $\|\{a_s\} \,|\, \ell_\theta\|$, где

$$\|\{a_s\} \,|\, \ell_\theta\| = \left\{ \sum_{s \in \mathbb{N}_0^d} |a_s|^\theta \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty; \quad \|\{a_s\} \,|\, \ell_\infty\| = \sup_{s \in \mathbb{N}_0^d} |a_s|;$$

$\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ $(L_p(\ell_\theta) \equiv L_p(\mathbb{T}^d; \ell_\theta))$ — пространство функциональных последовательностей $\{f_s(x)\}_{s \in \mathbb{N}_0^d}, x \in \mathbb{T}^d$, с конечной нормой (с обычной модификацией при $\theta = \infty$)

$$\|\{f_s\} \,|\, \ell_\theta(L_p)\| = \| \{ \, \|f_s \,|\, L_p\| \, \} \,|\, \ell_\theta\|;$$

(соответственно $\|\{f_s\} \mid L_p(\ell_\theta)\| = \| \, \|\{f_s\} \mid \ell_\theta \| \mid L_p\|$).

Для функции $f(x)$, заданной на $\mathbb{T}^d$, пусть

$$\Delta^l_{\tau,j} f(x) = \Delta^{l-1}_{\tau,j}(\Delta^1_{\tau,j} f(x))$$

— ее разность порядка $l \in \mathbb{N}_0$ в точке $x \in \mathbb{T}^d$ с шагом $\tau \in \mathbb{R}$ по переменной x_j, здесь

$$\Delta^1_{\tau,j} f(x) = \Delta_{\tau,j} f(x) = f(\dots, x_{j-1}, x_j + \tau, x_{j+1}, \dots) - f(x), \quad \Delta^0_{\tau,j} f(x) := f(x).$$

Если теперь $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$ и $h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$, то $\Delta^l_h f(x) = \Delta^{l_1}_{h_1,1} \Delta^{l_2}_{h_2,2} \dots \Delta^{l_d}_{h_d,d} f(x)$ — смешанная разность функции f порядка l в точке x с шагом h.

Наконец,

$$\Omega_l(f,t)_p = \sup_{|h_j| \le t_j, j \in \mathrm{e}_d} \|\Delta^l_h f(\cdot) \mid L_p\|$$

— смешанный модуль гладкости порядка l функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$; $t = (t_1, \dots, t_d)$.

Пусть функция $\Omega\colon [0,\infty)^d \to [0,+\infty)$ $(d \in \mathbb{N})$ — (одномерный, если $d = 1$, и смешанный, если $d \ge 2$) модуль гладкости порядка l, т. е. непрерывная на $[0,\infty)^d$ функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

i) $\Omega(t) > 0$, если $t \in \mathbb{R}^d_+$, $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = 0$, если $\prod_{j \in \mathrm{e}_d} t_j = 0$;

ii) $\Omega(t^1) \le \Omega(t^2)$ для любых $t^1, t^2 \in [0,\infty)^d$ таких, что $t^1 \le t^2$;

iii) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le C \left(\prod_{j \in \mathrm{e}_d} m_j^l\right) \Omega(t)$ для любых $t \in [0,\infty)^d$ и $m \in \mathbb{N}^d$.

Теперь определим пространство Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости.

Определение 1. *Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$, Ω — смешанный модуль гладкости порядка l. Тогда пространство Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\,\theta} = SB^{\Omega,l}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма*

$$\| f \mid SB^{\Omega,l}_{p\,\theta} \| = \|f \mid L_p\| + \left\{ \sum_{\varnothing \ne e \subset e_d} \int_{[0,1]^{\#e}} \left(\frac{\Omega_l(f, t^e, 1^{\bar e})}{\Omega(t^e, \mathbf{1}^{\bar e})} \right)^\theta \prod_{j \in e} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2.1}$$

$$\| f \mid SB^{\Omega,l}_{p\,\infty} \| = \|f \mid L_p\| + \sum_{\varnothing \ne e \subset e_d} \sup_{t^e > 0} \frac{\Omega_l(f, t^e, 1^{\bar e})}{\Omega(t^e, \mathbf{1}^{\bar e})}. \tag{2.1$'$}$$

Здесь мы использовали обозначения: для $x \in \mathbb{R}^d$ и $e \subset e_d$, $e = \{j_1, \dots, j_m\}$, $1 \le j_1 < \dots < j_m \le d$ $(m \le d)$, $x^e := (x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$, $\bar e = e_d \setminus e$, а так же $x = (x^e, x^{\bar e})$; $\#e$ — число элементов e.

В случае, когда $\Omega(t) \equiv \Omega_r(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_j}, r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d_+$ и $l > \max_{j \in e_d}\{r_j\}$, $SB^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d) \equiv SB^{\Omega_r}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ есть классические пространства Никольского — Бесова периодических функций с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера (см. [11] и приведенные там библиографию и исторические комментарии). Изучение функциональных пространств $SB^{\Omega}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ для общих Ω начато Динь Зунгом в [4].

Далее, напомним известные условия Бари — Стечкина $(\mathbf{S})$ и $(\mathbf{S}_l)$ в кратном случае ($(\mathcal{S})$ и $(\mathcal{S}_k)$ при $d = 1$) для модуля гладкости Ω порядка l (см. [12, с. 487]):

Ω удовлетворяет условию $(\mathbf{S})$ (в этом случае пишем $\Omega \in \mathbf{S}^\alpha_l$), если существует $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что

$$\frac{\Omega(\tau)}{\prod_{j \in e_d} \tau_j^{\alpha_j}} \le C_1 \frac{\Omega(\tau')}{\prod_{j \in e_d} {\tau'_j}^{\alpha_j}} \quad \forall\, \tau, \tau' \in \mathbb{R}^d_+ \colon \tau \le \tau';$$

Ω удовлетворяет условию $(\mathbf{S}_l)$ (в этом случае пишем $\Omega \in \mathbf{S}_l$), если существует $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$: $0 < \beta_j < l, j \in e_d$, и постоянная $C_2 > 0$ такие, что

$$\frac{\Omega(\tau)}{\prod_{j \in e_d} \tau_j^{\beta_j}} \ge C_2 \frac{\Omega(\tau)}{\prod_{j \in e_d} {\tau'_j}^{\beta_j}} \quad \forall\, \tau, \tau' \in \mathbb{R}^d_+ \colon \tau \le \tau'.$$

Напомним характеризацию пространств Никольского — Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости с соответствующей эквивалентной нормировкой.

Теорема A. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}^\alpha_l \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда* $f \in L_p$ *принадлежит пространству* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$, *если и только если функциональная последовательность* $\{\Omega^{-1}(2^{-s})\delta_s(f)\}$ *принадлежит* $\ell_\theta(L_p)$; *в этом случае выражение* $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})\delta_s(f)\} \,|\, \ell_\theta(L_p)\|$, $1 \le \theta < \infty$; *или* $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\infty}\| = \sup_s \Omega^{-1}(2^{-s})\|\delta_s(f) \,|\, L_p\|$ *есть норма в пространстве* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$, *которая эквивалентна исходной норме* (2.1) *или* (2.1$'$).

При $\theta = \infty$ — это теорема Пустовойтова [13, теорема 1], а при $1 \le \theta < \infty$ эта теорема доказана в [14, теорема 3].

Приведем еще одну характеризацию пространств $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ и $SF^{\Omega,l}_{p\theta}$, которая позволяет охватить случаи $p = 1$ и $p = \infty$.

Обозначим через $V_n(t)$ ядро Валле — Пуссена порядка $2n - 1$:

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1}\Big(1 - \frac{k-n}{n}\Big)\cos kt.$$

Положим

$$A_s(x) = \prod_{j\in e_d}(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d_0;$$

для $f \in L_p$ через $A_s(f, x)$ обозначим (периодическую) свертку

$$A_s(f, x) = f * A_s(x).$$

Теорема B. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}^\alpha_l \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда* $f \in L_p$ *принадлежит пространству* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$, *если и только если функциональная последовательность* $\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f, x)\}$ *принадлежит* $\ell_\theta(L_p)$; *в этом случае выражение* $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f, \cdot)\} \,|\, \ell_\theta(L_p)\|$, $1 \le \theta < \infty$, $\|f \,|\, SB^{\Omega,l}_{p\infty}\| = \sup_s \Omega^{-1}(2^{-s})\|A_s(f, \cdot) \,|\, L_p\|$ *есть норма в пространстве* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$.

Доказательство теоремы B см., например, [15, теорема 1].

Ввиду теорем A и B нам будет удобно определить пространства Лизоркина — Трибеля $SF^{\Omega,l}_{p\theta} = SF^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}^\alpha_l \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда пространство Лизоркина — Трибеля* $SF^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна следующая норма:*

$$\|f \,|\, SF^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})\delta_s(f)\} \,|\, L_p(\ell_\theta)\|, \quad \text{если } 1 < p < \infty, \tag{2.2}$$

$$\|f \,|\, SF^{\Omega,l}_{1\theta}\| = \|\{\Omega^{-1}(2^{-s})A_s(f, \cdot)\} \,|\, L_p(\ell_\theta)\|, \quad \text{если } 1 \le p < \infty. \tag{2.3}$$

Нетрудно показать, что при $1 < p < \infty$ нормы (2.2) и (2.3) эквивалентны.

Будем обозначать единичные шары пространств $SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ и $SF^{\Omega,l}_{p\theta}$ через $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta} = \mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta} = \mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ и называть классами Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля соответственно.

Заметим, что функциональные пространства $SF^r_{p2}(\mathbb{T}^d) \equiv SF^{\Omega_r}_{p2}(\mathbb{T}^d)$ при $1 < p < \infty$ совпадают с пространствами $SW^r_p(\mathbb{T}^d)$ функций с ограниченной смешанной производной.

3. Вспомогательные леммы. Система всплесков

Ниже будем использовать множества, впервые введенные в [16], и некоторые факты относительно них, установленные в этой работе.

Для произвольного натурального числа $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\varkappa(N) := \varkappa(\Omega, N) = \{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N},\ \Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} \geq 1/N\};$$

$$Q(N) := Q(\Omega, N) = \bigcup_{s \in \varkappa(N)} \rho(s),$$

где множества $Q(N)$ порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}$.

Далее

$$\varkappa^{\perp}(N) = \{s = (s_1, \dots, s_d) : s_j \in \mathbb{N},\ \Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} < 1/N\};$$

$$Q^{\perp}(N) = \bigcup_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} \rho(s), \quad \Theta(N) = \varkappa^{\perp}(N) \setminus \varkappa^{\perp}(2^l N).$$

Нетрудно видеть, что $\Theta(N) \subset \varkappa^{\perp}(N)$ и $\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+} \asymp 1/N,\ s \in \Theta(N)$.

В работе [16, с. 108–109] показано, что $\Theta(N) \neq \varnothing$, $|\Theta(N)| \asymp (\log N)^{d-1}$.

Приведем леммы, которые будем использовать при доказательстве основных результатов.

Лемма 1 [16, лемма 1]. *Пусть функция $\Omega(t)$ типа смешанного модуля непрерывности порядка l удовлетворяет условию (S). Тогда для $0 < p < \infty$*

$$\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-s}))^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s}))^p.$$

Лемма 2 [16, лемма 2]. *Пусть функция $\Omega(t)$ удовлетворяет условию (S) при $0 < \alpha < 1$ таком, что $\alpha > \beta > 0$. Тогда при $0 < p < \infty$*

$$\sum_{s \in \varkappa^{\perp}(N)} (\Omega(2^{-s})2^{|s|\beta})^p \ll \sum_{s \in \Theta(N)} (\Omega(2^{-s})2^{|s|\beta})^p.$$

Теперь введем кратную систему (периодизированных) всплесков Мейера.

Пусть $\varphi = \psi^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\psi = \psi^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — масштабирующая функция и всплеск Мейера соответственно [17, гл. 2, § 12, гл. 3 § 2], которые определяются следующим образом. Пусть $\theta(\tau)$ — нечетная бесконечно дифференцируемая функция, монотонная на $(-\pi/3, \pi/3)$. Далее, $\lambda(\tau)$ — четная функция, задаваемая функцией

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} + \theta(\tau - \pi), & \text{если } \tau \in \Big[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\Big]; \\ \dfrac{\pi}{4} - \theta\Big(\dfrac{\tau}{2} - \pi\Big), & \text{если } \tau \in \Big[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\Big]; \\ 0, & \text{если } \tau \in \Big[\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{8\pi}{3}\Big]. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi(t) = \psi^0(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{4\pi/3} \cos(t\tau)\cos(\lambda(\tau))d\tau \ \text{ и } \ \psi = \psi^1(t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{2\pi/3}^{8\pi/3} \cos((t-1/2)\tau)\sin(\lambda(\tau))d\tau \ \ (t \in \mathbb{R}).$$

Пусть $\iota = \{0, 1\}$. Далее, положим $\psi_j^{(\iota)}(x) = \psi^{(\iota)}(2^j x)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и определим функции $\widetilde{\psi}_{jm}^{(\iota)} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$:

$$\widetilde{\psi}_{jm}^{(\iota)}(t) = 2^{j/2}\widetilde{\psi_j^{(\iota)}}(t - 2^{-j}m), \quad m = 0, \dots, 2^j - 1, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

где $\tilde{h} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ — периодизация функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $\tilde{h}(t) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} h(t - \xi)$.

Хорошо известно, что система всплесков Мейера $\Psi_1 = \{\widetilde{\psi}_{00}^{(0)}, \widetilde{\psi}_{jm}^{(1)} \,|\, m = 0, \ldots, 2^j - 1, j \in \mathbb{N}_0\}$ является полной ортонормированной системой функций в $L_2(\mathbb{T})$.

Наконец, положим $\mathrm{E}^{(\mathbf{0})} = \{0, 1\}, \mathrm{E}^{(\mathbf{1})} = \{1\}$ и введем (d–кратную) систему Ψ_d (периодизированных) всплесков Мейера

$$\Psi_d \equiv \Psi_1 \otimes \cdots \otimes \Psi_1 = \Big\{\psi_{sk}^{(\varepsilon_1)}(x) = \psi_{s_1 k_1}^{(\varepsilon_1)}(x_1) \times \cdots \times \psi_{s_d k_d}^{(\varepsilon_d)}(x_d) \,\Big|$$

$$s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d,\ \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d) \in \mathrm{E}(s),\ k = (k_1, \ldots, k_d) \in \kappa(s)\Big\},$$

здесь $\mathrm{E}(s) = \mathrm{E}(s_1) \times \cdots \times \mathrm{E}(s_d)$, где $\mathrm{E}(j) = \mathrm{E}^{(\operatorname{sign} j)}$; $\kappa(s) = \{k \in \mathbb{N}_0^d \,|\, 0 \le k_j \le 2^{s_j} - 1, j \in e_d\}$.

Для $f \in L_1(\mathbb{T}^d)$ запишем представление в виде ряда Фурье по системе Ψ_d

$$f(x) = \sum_{s \in \mathbb{N}_0^d} \Delta_s^{\Psi}(f, x),$$

здесь

$$\Delta_s^{\Psi}(f, x) = \sum_{\varepsilon \in \mathrm{E}(s)} \sum_{k \in \kappa(s)} \langle f, \psi_{sk}^{(\varepsilon)} \rangle \psi_{sk}^{(\varepsilon)}(x), \quad \text{где} \quad \langle f, \psi_{sk}^{(\varepsilon)} \rangle = \int_{\mathbb{T}^d} f(x) \psi_{sk}^{(\varepsilon)}(x) dx,$$

и последовательность $(S_N^{\Psi})_{N \in \mathbb{N}_0}$ операторов “частичных” сумм ряда Фурье по системе Ψ_d

$$S_N^{\Psi}(f, x) = \sum_{s \in \varkappa(N)} \Delta_s^{\Psi}(f, x).$$

Имеет место следующая теорема представления пространств Никольского — Бесова $SB_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ и Лизоркина — Трибеля $SF_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$ по системе Ψ_d.

Теорема C. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$, $\Omega \in \mathbf{S}_l^{\alpha} \cap \mathbf{S}_l$. *Тогда*

1) $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ *принадлежит пространству* $SB_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$, *если и только если конечна величина* $\|\Omega^{-1}(2^{-s}) \Delta_s^{\Psi}(f, \cdot) \,|\, l_\theta(L_p)\|$, *которая является нормой в пространстве* $SB_{p\theta}^{\Omega, l}$, *эквивалентной исходной*;

2) *если, кроме того,* $p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ *принадлежит пространству* $SF_{p\theta}^{\Omega, l}(\mathbb{T}^d)$, *если и только если конечна величина* $\|\Omega^{-1}(2^{-s}) \Delta_s^{\Psi}(f, \cdot) \,|\, L_p(l_\theta)\|$, *которая является нормой в пространстве* $SF_{p\theta}^{\Omega, l}$, *эквивалентной исходной.*

Теорема C для пространств $SB_{p\theta}^{r}$ и $SF_{p\theta}^{r}$ доказана в работе [8, теорема 3.1]. В общем случае ее доказательство следует схеме доказательства теоремы 3.1 из [8] и в целом аналогично ему, поэтому мы его опускаем.

4. Приближение классов функций $\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega, l}$ и $\mathrm{SF}_{p\theta}^{\Omega, l}$ всплесками по системе Ψ_d

Для $F \subset L_q$ рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{F}, L_q) = \sup_{f \in F} \|f - S_N^{\Psi}(f, \cdot) \,|\, L_q\|.$$

Далее будем использовать знаки $\ll$ и $\asymp$ порядкового неравенства и равенства: для функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $f(u) \ll h(u)$ при $u \to \infty$, если найдется такая постоянная $c = c(f, h) > 0$, что верно неравенство $f(u) \le c h(u)$ для $u \ge u_0 > 0$ и $f(u) \asymp h(u)$, если одновременно $f(u) \ll h(u)$ и $h(u) \ll f(u)$; обозначим $p_* = \min\{p, 2\}$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$; $\Omega \in \mathbf{S}_l^\alpha \cap \mathbf{S}_l$, *причем* $\alpha > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$.

I. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p, q) \ne (\infty, \infty)$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+},$$

если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}, L_1) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(1-\frac{1}{\theta})}.$$

II. *Пусть* $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \ll \frac{1}{N}.$$

III. *Пусть* $1 \le p, \theta \le q = \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}},$$

если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^\Psi_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Рассмотрим случай $1 \le q \le p \le \infty$, $q \ne \infty, 1 \le \theta \le \infty$. Сначала докажем оценки для классов $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$.

a) Пусть $p = q = 1$.

$$\|f - S^\Psi_N(f,\cdot)\,|\,L_1\| = \Big\|f - \sum_{s \in \varkappa(N)} \Delta^\Psi_s(f,\cdot)\,|\,L_1\Big\| = \Big\|\sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Delta^\Psi_s(f,\cdot)\,|\,L_1\Big\|$$

$$\le \|(\Delta^\Psi_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_1(L_1)\| = \|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^\Psi_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_1(L_1)\| =: K_1.$$

Если $\theta = 1$, то справедлива оценка

$$K_1 \le \frac{1}{N}\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^\Psi_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_1(L_1)\| \le \frac{1}{N}\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{11}\| \le \frac{1}{N}.$$

Если $1 < \theta < \infty$, применим неравенство Гельдера для рядов $\Big(\|c_j d_j\,|\,\ell_1\| \le \|c_j\,|\,\ell_P\|\cdot\|d_j\,|\,\ell_Q\|$, $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1\Big)$ с $P = \theta, Q = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$ и лемму 1

$$K_1 \le \Bigg(\sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Bigg)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^\Psi_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_\theta(L_1)\|$$

$$\ll \Bigg(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta}{\theta-1}}\Bigg)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{1\theta}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta = \infty$, то, используя лемму 1, получаем

$$K_1 \le \Bigg(\sum_{s \in \varkappa^\perp(N)} \Omega(2^{-s})\Bigg)\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^\Psi_s(f,\cdot))_{s \in \varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_\infty(L_1)\|$$

$$\ll \Bigg(\sum_{s \in \Theta(N)} \Omega(2^{-s})\Bigg)\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{1\infty}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|.$$

b) Пусть $1 < p < \infty,\ 1 \le q \le p$.

$$\|f - S_N^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_q\| = \Big\|\sum_{s\in\varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_p\Big\| \le \big\|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^\Psi(f,\cdot))_{s\in\varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_{p_*}(L_p)\big\| =: K_2.$$

Если $1 \le \theta \le p_*$, то используя неравенство Йенсена для рядов ($\|c_j\,|\,\ell_a\| \le \|c_j\,|\,\ell_b\|,\ 0 < b \le a \le \infty$), получим

$$K_2 \le \big\|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^\Psi(f,\cdot))_{s\in\varkappa^\perp(N)}\,|\,\ell_\theta(L_p)\big\| \le \frac{1}{N}\|f\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N}.$$

Если $p_* < \theta < \infty$, применим неравенство Гельдера для рядов с показателями $P = \dfrac{\theta}{p_*}$, $Q = \dfrac{\theta}{\theta - p_*}$ и лемму 1:

$$K_2 \ll \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta p_*}{\theta - p_*}}\Bigg)^{\frac{\theta - p_*}{\theta p_*}} \|f\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta = \infty$, то, используя лемму 1, получаем

$$K_2 \ll \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{p_*}\Bigg)^{1/p_*} \|f\,|\,\mathrm{SB}_{p\infty}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1/p_*}.$$

c) Пусть $1 \le q < p = \infty$, тогда $p_* = 2$.

Обозначим $q^* = \max\{q, 2\}$. Так как $\|\cdot\,|\,L_q\| \le \|\cdot\,|\,L_{q^*}\| \le \|\cdot\,|\,L_\infty\|$, то верно элементарное вложение $SB_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l} \subset SB_{q^*\,\theta}^{\Omega,\,l},\ 1 \le \theta \le \infty$, и неравенство $\mathcal{E}_{Q(N)}^\Psi(\mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \le \mathcal{E}_{Q(N)}^\Psi(\mathrm{SB}_{q^*\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_{q^*})$, поэтому по уже доказанному в п. b) имеем ($\min\{q^*, q\} = 2$)

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^\Psi(\mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Теперь получим оценку сверху для классов $\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$.

a) Пусть сначала $p = q = 1$.

Если $\theta = 1$, то, поскольку $\mathrm{SF}_{11}^{\Omega,\,l} = \mathrm{SB}_{11}^{\Omega,\,l}$, оценка сверху уже получена.

Рассмотрим случай $1 < \theta \le \infty$. Тогда

$$\|f - S_N^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_1\| = \Big\|\sum_{s\in\varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_1\Big\| = \big\|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^\Psi(f,\cdot))_{s\in\varkappa^\perp(N)}\,|\,L_1(\ell_1)\big\| =: K_3.$$

Если $\theta < \infty$, применим неравенство Гельдера для рядов с $P = \theta,\ Q = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$ и лемму 1:

$$K_3 \ll \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \Omega(2^{-s})^{\frac{\theta}{\theta - 1}}\Bigg)^{\frac{\theta - 1}{\theta}} \|f\,|\,\mathrm{SF}_{1\theta}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(1 - \frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta = \infty$, аналогично с помощью леммы 1 находим

$$K_3 \ll \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)} \Omega(2^{-s})\Bigg)\|f\,|\,\mathrm{SF}_{1\infty}^{\Omega,\,l}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|.$$

b) Пусть теперь $1 < p < \infty$ и $1 \le q \le p$. Тогда

$$\|f - S_N^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_q\| = \Big\|\sum_{s\in\varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_q\Big\| \le \Big\|\sum_{s\in\varkappa^\perp(N)} \Delta_s^\Psi(f,\cdot)\,|\,L_p\Big\|$$

$$\asymp \big\|(\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,L_p(\ell_2)\big\| =: K_4.$$

Если $1\le\theta\le 2$, то применяя неравенство Йенсена для рядов, получаем

$$K_4\le\frac{1}{N}\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,L_p(\ell_\theta)\|\ll\frac{1}{N}\|f\,|\,\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\|\le\frac{1}{N}.$$

Если $2<\theta<\infty$, то применяя неравенство Гельдера для рядов с показателями $P=\dfrac{\theta}{\theta-2}$, $Q=\dfrac{\theta}{2}$ и лемму 1, получим

$$K_4\ll\Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)}\Omega(2^{-s})^{\frac{2\theta}{\theta-2}}\Bigg)^{\frac{\theta-2}{2\theta}}\|f\,|\,\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\|\le\frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Если $\theta=\infty$, находим, используя лемму 1,

$$K_4\ll\Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)}\Omega^2(2^{-s})\Bigg)^{1/2}\|f\,|\,\mathrm{SF}_{p\infty}^{\Omega,\,l}\|\le\frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1/2}.$$

II. Рассмотрим случай $1\le p<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$.

В работе [14, теорема 4] доказано, что справедливо вложение $SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\subset SB_{q\,\theta}^{\Omega_1,\,l+1}$, если $\Omega_1(t)=\Omega(t)\prod_{j=1}^{d}t_j^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$; при $t=2^{-s}$ имеем $\Omega_1(2^{-s})=\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$.

Следовательно, $\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l},L_q)\le\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{q\,\theta}^{\Omega_1,\,l+1},L_q)$ и можно использовать случай I: при $1<q\le 2$ и $1\le\theta\le\infty$

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{q\,\theta}^{\Omega_1,\,l+1},L_q)\ll\frac{1}{N}|\Theta(N)|^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+};$$

либо при $1\le\theta\le 2<q$

$$\mathcal{E}_{Q(N)}^{\Psi}(\mathrm{SB}_{q\,\theta}^{\Omega_1,\,l+1},L_q)\ll\frac{1}{N}.$$

При $q>2$ и $\theta>2$ полученные таким образом оценки грубее, чем требуется. Для более точных оценок нам понадобится предложение 5.1 из работы [8].

Тогда получаем

$$\|f-S_N^{\Psi}(f,\cdot)\,|\,L_q\|=\Big\|\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot)\,|\,L_q\Big\|\ll\big\|(2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_q(L_p)\big\|$$

$$=\big\|(2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_q(L_p)\big\| =: K_5.$$

Если $q<\theta<\infty$, то, используя неравенство Гельдера с показателями $P=\dfrac{\theta}{\theta-q}$, $Q=\dfrac{\theta}{q}$ и лемму 2, получим

$$K_5\le\Bigg(\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\big[2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Omega(2^{-s})\big]^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{\theta-q}{q\theta}}\big\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\theta(L_p)\big\|$$

$$\le\Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)}\big[\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\big]^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{\theta-q}{q\theta}}\|f\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\|\le\frac{1}{N}|\Theta(N)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Если $q<\theta=\infty$, то с помощью леммы 2

$$K_5\le\Bigg(\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\big[2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Omega(2^{-s})\big]^{q}\Bigg)^{1/q}\big\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta_s^{\Psi}(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\infty(L_p)\big\|$$

$$\le \Bigg(\sum_{s\in\Theta(N)}\big[\Omega(2^{-s})2^{|s|(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\big]^q\Bigg)^{1/q}\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\infty}\| \le \frac{1}{N}|\Theta|^{1/q}.$$

Если $2<\theta\le q$, то по неравенству Йенсена для рядов имеем

$$K_5 \le \frac{1}{N}\big\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\theta(L_p)\big\| \le \frac{1}{N}\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\| \le \frac{1}{N}.$$

Теперь рассмотрим классы $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$. Справедливо вложение $SF^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\subset SF^{\Omega,\,l}_{q\,1}$. Следовательно, в соответствии со случаем I

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta},L_q) \ll \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{q\,1},L_q) \ll \frac{1}{N}.$$

III. Рассмотрим случай $1\le p,\theta\le q=\infty$.

Согласно вложению $SB^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\subset SB^{\Omega,\,l}_{q\,\theta}$ достаточно получить оценку сверху для величины $\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{\infty\,\theta},L_\infty)$.

Пусть $f\in\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{\infty\,\theta},L_\infty)$, тогда, как и выше, по неравенству Гельдера для рядов имеем

$$\|f-S^{\Psi}_N(f,\cdot)\,|\,L_\infty\| \le \Bigg\|\sum_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\Omega(2^{-s})\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot)\,|\,L_\infty\Bigg\| \le \|(\Omega(2^{-s}))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_{\theta'}\|$$

$$\times\|(\Omega^{-1}(2^{-s})\Delta^{\Psi}_s(f,\cdot))_{s\in\varkappa^{\perp}(N)}\,|\,\ell_\theta(L_\infty)\| \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}}\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{\infty\,\theta}\| \le \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Рассмотрим класс $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$. В силу вложения $SF^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\subset SB^{\Omega,\,l}_{\infty\,p}$ получаем

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta},L_\infty) \ll \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{\infty\,p},L_\infty) \ll \frac{1}{N}|\Theta(N)|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Таким образом оценки сверху в теореме 1 доказаны полностью.

З а м е ч а н и е 1. Точные по порядку оценки приближения классов функций $\mathrm{SB}^r_{p\theta}$ и $\mathrm{SF}^r_{p\theta}$ по системе Ψ_d получены в работе [8] (там же даны подробные комментарии по приближениям классов функций по различным системам типа всплесков).

S. Yongsheng и W. Heping (см. [14, теорема 5]) изучили приближение суммами Фурье по тригонометрической системе (определяемыми поверхностями уровня Ω) в случае $\Omega(t)=\omega(t_1\times\cdots\times t_d)$ при $1<p=q<\infty$, для классов $\mathrm{SB}^{\Omega}_{p\theta}(\mathbb{T}_d)$.

Далее, в работе [18] получены точные по порядку оценки наилучших приближений классов $\mathrm{B}^{\Omega}_{p\theta}$ периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами, спектры которых порождаются поверхностями уровня функции $\Omega(t)$, для параметров p и q: 1) $1\le q=p<\infty$; 2)$1<q<p\le\infty, p\ge 2$; 3) $1\le q<p\le 2$ при $1\le\theta<\infty$. Наконец, в [19] получены точные по порядку оценки приближений классов $\mathrm{MB}^{\Omega}_{p\theta}$ суммами Фурье в метрике L_q при $1<p<q<\infty$, спектр приближающих полиномов лежит во множествах, порожденных поверхностями уровня функции $\Omega(t)/\prod_{j=1}^{d}t_j^{1/p-1/q}$.

5. Оценки поперечников Фурье

В этом разделе доказываются точные в смысле порядка оценки поперечников Фурье классов $\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$ и $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$ в метрике L_q в случае $\Omega(t)=\omega(t_1\times\cdots\times t_d)$.

Наряду с поперечником Фурье (1.1) рассмотрим следующую величину, также введенную В. Н. Темляковым,

$$\varphi^B_M(F,L_q) = \inf_{G\in\mathcal{L}_M(B)_q}\sup_{f\in F}\|\,f-Gf(x)|L_q\,\|,$$

где $B \ge 1, \mathcal{L}_M(B)_q$ — множество линейных операторов G, в область определения которых входят все тригонометрические полиномы, а множество значений имеет размерность не выше M и содержится в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$, таких, что $\|Ge^{i2\pi(k,x)} \mid L_2\| \le B$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

Из определения величин $\varphi_M(F, L_q)$ и $\varphi_M^B(F, L_q)$ легко видеть, что

$$\varphi_M^B(F, L_q) \le \varphi_M(F, L_q). \tag{5.1}$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$; $\omega \in \mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}_l^\alpha$, *причем* $\alpha > \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$.

I. *Если* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p, q) \ne (\infty, \infty)$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+},$$

если, кроме того, $p < \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

$$\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\theta}, L_1) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(\log M)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

II. *Если* $1 \le p < q < \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\log M)^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+},$$

$$\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

III. *Если* $1 \le p \le q = \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_\infty) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-\frac{1}{p}}(\log M)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})},$$

если, кроме того, $p < \infty$, *тогда*

$$\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_\infty) \asymp \omega(M^{-1}\log^{d-1} M)(M^{-1}\log^{d-1} M)^{-\frac{1}{p}}(\log M)^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим оценки снизу. Согласно неравенству (5.1) достаточно установить оценки снизу для величин $\varphi_M^B(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q)$ и $\varphi_M^B(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q)$. При доказательстве оценок снизу для этих величин во всех случаях для произвольного оператора $G \in \mathcal{L}_M(B)_q$ будет установлено существование тригонометрического полинома специального вида, принадлежащего соответствующему функциональному классу ($\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}$ или $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}$), который плохо приближается с помощью оператора G. При этом считаем, не ограничивая общности, что оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_2$. По достаточно большому $M \in \mathbb{N}$ подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^n n^{d-1} \asymp M$.

Рассмотрим множества $\Theta_n = \{s\colon \|s\|_1 = n, s_j$ – натуральные числа, $j \in e_d\}$, $Q(n) = \bigcup_{s\in\Theta_n} \rho(s)$, где $|\Theta_n| \asymp n^{d-1}$, $|Q(n)| \asymp 2^n n^{d-1}$.

I. $1 \le q \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$.

Так как оценки $\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\theta}, L_q)$ не зависят от q, рассмотрим случай $q = 1$.

1. Пусть $1 \le q \le p \le \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$, тогда $p_* = 2$.

a) Рассмотрим подслучай $1 \le \theta \le 2$.

Имеют место вложения $SB^{\Omega,l}_{\infty 1} \subset SB^{\Omega,l}_{p1}$ при $1 \le p \le \infty$, $SB^{\Omega,l}_{p1} \subset SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ при $1 \le \theta \le \infty$, и $SB^{\Omega,l}_{p\theta} \subset SF^{\Omega,l}_{p\theta}$ при $1 \le \theta \le p < \infty$ (если $p = \infty$, то рассматриваем только классы (и пространства) Никольского — Бесова) и неравенство $\|\cdot \mid L_1\| \le \|\cdot \mid L_q\|, q \ge 1$. Следовательно, нам достаточно доказать оценку снизу для $\varphi_M^B(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty 1}, L_1)$, т. е. доказать неравенство

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{\infty 1}, L_1) \gg \omega(2^{-n}). \tag{5.2}$$

Пусть задано число M, оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда существует вектор $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0) \in Q(n)$ (см. [9, пример 1]): $\|e^{2\pi i(k^0,\cdot)} - Ge^{2\pi i(k^0,\cdot)} \,|\, L_1\| \gg 1$.

Рассмотрим функцию $g_1(x) = e^{2\pi i(k^0,x)}$. Теперь оценим $\|g_1(\cdot+y^*) \,|\, \mathrm{SB}_{\infty\,1}^{\Omega,\,l}\|$, используя теорему B: $\|g_1(x+y^*) \,|\, \mathrm{SB}_{\infty\,1}^{\Omega,\,l}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_1,\cdot) \,|\, \ell_1(L_\infty)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\||e^{2\pi i(k^0,x)}| \,|\, L_p\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})$.

Следовательно, функция $f_1(x) = c_1\omega(2^{-n})g_1(x)$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от n, принадлежит классу $\mathrm{SB}_{\infty\,1}^{\Omega,\,l}$:

$$\|f_1(\cdot) \,|\, \mathrm{SB}_{\infty\,1}^{\Omega,\,l}\| = \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(f_1,\cdot) \,|\, \ell_1(L_\infty)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\omega(2^{-n})\||e^{2\pi i(k^0,x)}| \,|\, L_p\| \ll 1.$$

Тогда $\|f_1(\cdot) - Gf_1(\cdot) \,|\, L_1\| = \omega(2^{-n})\|e^{2\pi i(k^0,\cdot)} - Ge^{2\pi i(k^0,\cdot)} \,|\, L_1\| \gg \omega(2^{-n})$. В силу произвольности оператора G получаем требуемую оценку (5.2).

b) Пусть $2 < \theta \le \infty$. Рассмотрим отдельно два возможных соотношения между p и θ.

b$_1$) Если $2 < \theta \le p \le \infty$, то в силу вложений $SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l} \subset SF_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ при $p < \infty$ и $SB_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l} \subset SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ здесь достаточно получить оценку

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_1) \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.3}$$

Далее возьмем множество $\Theta_n' \subset \Theta_n$. Рассмотрим функцию $g_2(x) = \sum_{s\in\Theta_n'} A_s(g_2,x)$, $A_s(g_2,x) = \sum_{k\in\bar\rho(s)} \hat g_2 e^{2\pi i(k^s,x)}$, где согласно [9, лемма 1.4] $\|A_s(g_2,\cdot) \,|\, L_\infty\| \le |\Theta_n'|^{-\frac{1}{2}}$.

Если возьмем линейный оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$, то несложно показать, что

$$\|g_2(\cdot) - Gg_2(\cdot) \,|\, L_1\| \ge C_2.$$

Теперь оценим $\|g_2(\cdot+y^*) \,|\, \mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}\|$, используя теорему B:

$$\|g_2(\cdot+y^*) \,|\, \mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_2,\cdot) \,|\, \ell_\theta(L_\infty)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n'} \|A_s(g_2,\cdot) \,|\, L_\infty\|^\theta\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-n})\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n'} |\Theta_n'|^{-\frac{\theta}{2}}\Bigg)^{1/\theta} = \omega^{-1}(2^{-n})|\Theta_n'|^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2})}.$$

Тогда функция $f_2(x) = c_2\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}g_2(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}$, где положительная постоянная c_2 не зависит от n,

$$\|f(\cdot) \,|\, \mathrm{SB}_{\infty\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \asymp \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(f_2,\cdot) \,|\, \ell_\theta(L_\infty)\| \asymp n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n'} \||A_s(g_2,\cdot) \,|\, L_\infty\|^\theta\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n'} |\Theta_n'|^{-\frac{\theta}{2}}\Bigg)^{1/\theta} = n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}|\Theta_n'|^{\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}} \asymp n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}n^{(d-1)(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2})} \asymp 1.$$

Тогда $\|f_2(\cdot) - Gf_2(\cdot) \,|\, L_q\| \ge \|f_2(\cdot) - Gf_2(\cdot) \,|\, L_1\| \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.3).

b$_2$) Если $2 \le p < \theta \le \infty$, то в силу вложения $SF_{p\,\theta}^{\Omega,\,l} \subset SB_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ достаточно оценить снизу величину

$$\varphi_M^B(\mathrm{SF}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_1) \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.4}$$

Пусть $G \in L_M(B)_1$ (см. [9, пример 6]). Найдутся $n, \Theta_n^1 \subset \Theta_n$ такие, что $|Q(n)| < c(B,d)M$, $|\Theta_n^1| \ge 1/2|\Theta_n|$, и в каждом $\rho(s), s \in \Theta_n^1$, найдутся векторы $k^s \in \rho(s)$, при которых для функции $g(x) = \sum_{s\in\Theta_n^1} e^{2\pi i(k^s,x)}$ найдется y^* такой, что

$$\|g(\cdot+y^*) - Gg(x+y^*) \,|\, L_1\| \gg (\log M)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{5.5}$$

Возьмем в качестве $g_3(x) = g(x)$ и из условия теоремы $\log M \sim n$.

Теперь оценим $\|g_3(\cdot+y^*) \,|\, \mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\|$, используя представление для пространства Лизоркина — Трибеля:

$$\|g_3(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_3,\cdot) \,|\, L_p(\ell_\theta)\|$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-n})\Big\|\bigg(\sum_{s\in\Theta_n^1} |e^{2\pi i(k^s,x)}|^\theta\bigg)^{1/\theta} \,\Big|\, L_p\Big\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})|\Theta_n^1|^{1/\theta} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{\theta}}.$$

Тогда функция $f_3(x) = c_3\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}g_3(x+y^*)$ с некоторой постоянной $c_3 > 0$, не зависящей от n, принадлежит классу $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$, причем в силу (5.5) имеем $\|f_3(\cdot) - Gf_3(\cdot) \,|\, L_1\| \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.4).

2. Перейдем к случаю $1 \le q \le p \le 2,\ p > 1,\ 1 \le \theta \le \infty$ $(p_* = p)$.

a) Пусть $1 \le \theta \le p$.

В силу вложений $SB^{\Omega,\,l}_{2\,1} \subset SB^{\Omega,\,l}_{p\,1}$ при $1 < p \le 2$, $SB^{\Omega,\,l}_{p\,1} \subset SB^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ при рассмотрении классов $SB^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$ достаточно доказать оценку

$$\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{2\,1}, L_1) \gg \omega(2^{-n}). \tag{5.6}$$

Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_1$. Так как $g_1 \in \mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{\infty\,1}$ из п.1, a) и $\|g_1 \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{2\,1}\| \le \|g_1 \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{\infty\,1}\|$. Следовательно, $f_1(x) \in \mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{2\,1}$. Тогда из произвольности оператора G следует требуемая оценка (5.6).

b) $1 \le \theta \le 2$.

В силу вложений $SB^{\Omega,\,l}_{2\,1} \subset SB^{\Omega,\,l}_{p\,1}$ при $1 < p \le 2$, $SB^{\Omega,\,l}_{p\,1} \subset SF^{\Omega,\,l}_{p\,1}$ и $SF^{\Omega,\,l}_{p\,1} \subset SF^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$ при $\theta \ge 1$ и неравенства $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ при рассмотрении классов $\mathrm{SF}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}$ достаточно оценить снизу величину $\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{2\,1}, L_1)$, что уже сделано выше в п. 2, a).

c) Пусть теперь $p < \theta \le \infty$.

По неравенству $\|\cdot \,|\, L_1\| \le \|\cdot \,|\, L_q\|$ при рассмотрении классов $\mathrm{SB}^{l,\Omega}_{p\,\theta}$ достаточно оценить величину $\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}, L_1)$:

$$\varphi^B_M(\mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}, L_1) \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.7}$$

Пусть $\tilde\Theta_n = \{s \in \Theta_n\colon s_j \ge n/2d, j \in e_d\}$. Ясно, что $|\tilde\Theta_n| \asymp n^{d-1}$. Положим $w = [|\tilde\Theta_n|^{\frac{1}{d}}]$. Разобьем $\mathbb{T}^d$ на w^d кубов со стороной $2\pi/m$. Далее между множеством $\tilde\Theta_n$ и множеством кубов установим взаимно однозначное соответствие. Вектору $s \in \tilde\Theta_n$ поставим в соответствие куб с центром x^s. Пусть $z = 2^{[\frac{d-1}{d}\log n]}$. Рассмотрим оператор $G \in \mathcal{L}_M(B)_1$. Тогда найдутся (см. [9, пример 7]) достаточно большое число n и множество $\Theta_n^2 \subset \tilde\Theta_n$: $|\Theta_n^2| \ge 1/2|\tilde\Theta_n|$, и в каждом $\rho(s), s \in \Theta_n^2$, существуют кубы с центром в k^s и длинами ребер $2z$ такие, что для функции

$$g_4(x) = \sum_{s\in\Theta_n^2} e^{2\pi i(k^s,x)} \prod_{j\in e_d} K_z(x_j - x_j^s)$$

(здесь $K_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (1 - \frac{k}{n+1})\cos kt$ — ядро Фейера порядка n) найдется y^* такой, что

$$\|g_4(\cdot + y^*) - Gg_4(\cdot + y^*) \,|\, L_1\| \gg n^{d-1}.$$

Здесь $k_j^{s_j} = 2^{s_j-1} + 2^{s_j-2}$, если $s_j \ge 2$, и $k_j^{s_j} = 1$, если $s_j = 1, j \in e_d$.

Оценим $\|g_4(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\|$, используя теорему B:

$$\|g_4(\cdot + y^*) \,|\, \mathrm{SB}^{\Omega,\,l}_{p\,\theta}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_4,\cdot) \,|\, \ell_\theta(L_p)\| \asymp \omega^{-1}(2^{-n})\bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2} \|A_s(g_4,\cdot) \,|\, L_p\|^\theta\bigg)^{1/\theta}$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n})\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2}\|\prod_{j\in e_d}K_z(x_j)\,|\,L_p\|^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}=\omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}|\Theta_n^2|^{1/\theta}\asymp\omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}.$$

Тогда функция $f_4(x)=c_4\omega(2^{-n})n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}g_4(x)$, где постоянная $c_4>0$ не зависит от n, принадлежит $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$:

$$\|f\,|\,\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}\|\asymp\|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(f_2,\cdot)\,|\,\ell_\theta(L_p)\|\asymp n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2}\|A_s(g_4,\cdot)\,|\,L_p\|^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}$$

$$\asymp n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n^2}\|\prod_{j\in e_d}K_z(x_j)\,|\,L_p\|^{\theta}\Bigg)^{1/\theta}=n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}|\Theta_n^2|^{1/\theta}\asymp 1.$$

Имеем $\|f_4(\cdot)-Gf_4(\cdot)\,|\,L_1\|\gg\omega(2^{-n})n^{-(d-1)(1+\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p})}\|g_4(\cdot)-Gg_4(\cdot)\,|\,L_1\|\geq\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.7).

d) Пусть теперь $2<\theta\leq\infty$.

В силу вложений $SF^{\Omega,l}_{2\,\theta}\subset SB^{\Omega,l}_{p\theta}$ при $1<p\leq 2$ и неравенства $\|\cdot\,|\,L_1\|\leq\|\cdot\,|\,L_q\|$ при рассмотрении классов $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ достаточно доказать оценку $\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{2\,\theta},L_1)\gg\omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}$.

Но эта оценка есть частный случай установленной выше оценки (5.4).

3. Наконец, рассмотрим случай $p=q=1,\ 1\leq\theta\leq\infty$. Тогда $p_*=1$. В силу вложения $SF^{\Omega,l}_{1\,\theta}\subset SB^{\Omega,l}_{1\,\theta}$ здесь достаточно доказать оценку снизу

$$\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta},L_1)\gg\omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.8}$$

Для доказательства воспользуемся построениями из работы [7, с. 33]. Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_2$. Рассмотрим одномерное периодизированное ядро Бесселя—Макдональда ($\delta>0$)

$$F_\delta(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}\frac{1}{(4\pi)^{\delta/2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{\delta}{2})}\int\limits_0^\infty e^{\frac{-\pi(x+\xi,x+\xi)}{\tau}}e^{-\frac{\tau}{4\pi}}\tau^{-\frac{k+\delta}{2}}\frac{d\tau}{\tau}$$

и d–кратное ядро Бесселя—Макдональда $F^d_\delta(x)=\prod_{k\in e_d}F_{\delta_k}(x_k)$. Рассмотрим функцию

$$g_5(x)=\sum_{s\in\varkappa_n^{\perp}}A_s(F_l,x_j).$$

Тогда можно показать аналогично тому, как это доказано в [7], что $\|g_5(\cdot+y^*)-Gg_5(\cdot+y^*)\,|\,L_1\|\gg 2^{-nl}n^{d-1}$. Ясно, что $\|A_s(F^d_l,x)\,|\,L_1\|\ll 2^{-\|s\|_1 l}$. Оценим $\|g_5(x+y^*)\,|\,\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}\|$:

$$\|g_5(\cdot+y^*)\,|\,\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}\|\ll\|\Bigg(\sum_{s\in\Theta_n}\omega^{-\theta}(2^{-s})|A_s(F^d_l,x)|^{\theta}\Bigg)\,|\,L_1\|\asymp\omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-nl}.$$

Тогда функция $f_5(x)=c_5\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{nl}g_5(x)$, где постоянная $c_5>0$ не зависит от n, принадлежит $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}$. Таким образом,

$$\|f_5(\cdot)-Gf_5(\cdot)\,|\,L_1\|\gg\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{nl}\|g_5(\cdot)-Gg_5(\cdot)\,|\,L_1\|\geq\omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.8).

II. Рассмотрим теперь случай $1\leq p<q<\infty,\ 1\leq\theta\leq\infty$.

Рассмотрим сначала класс $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$.

a) Пусть $q < \theta \le \infty$.

Тогда требуется оценить снизу величину $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q)$ т. е. следует доказать оценку

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_q) \gg \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.9}$$

Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_2$ (см. [9, пример 2]). Рассмотрим тригонометрический полином ($K_s(x)$ — ядро Фейра)

$$g(x) = \sum_{s\in\Theta_n} e^{2\pi i(k^s,x)} \prod_{j\in e_d} K_{2^{s_j-2}}(x_j).$$

Найдется y^* такой, что

$$\|g(\cdot - y^*) - Gg(\cdot - y^*)\,|\,L_q\| \gg \begin{cases} 2^{n(1-\frac{1}{q})}n^{\frac{d-1}{q}}, & 1 < q < \infty, \\ 2^n n^{d-1}, & q = \infty. \end{cases}$$

Положим $g_6(x) = g(x)$. Оценим $\|g_6(\cdot - y^*)\,|\,\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega,l}\|$:

$$\|g_6(\cdot - y^*)\,|\,\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega,l}\| \ll \left(\sum_{s\in\Theta_n} \omega^{-\theta}(2^{-s})\|A_s(g_6,x)\,|\,L_p\|^\theta\right)^{1/\theta} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Тогда функция $f_6(x) = c_6\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}g_6(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}_{p\theta}^{\Omega,l}$ с некоторой постоянной $c_6 > 0$, не зависящей от n. Таким образом,

$$\|f_6(\cdot) - Gf_6(\cdot)\,|\,L_1\| \gg \omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}\|g_6(\cdot) - Gg_6(\cdot)\,|\,L_1\| \ge \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.9).

b) Пусть $1 \le \theta \le q$.

В силу вложения $SB_{p\,1}^{\Omega,\,l} \subset SB_{p\theta}^{\Omega,\,l}$ здесь достаточно оценить снизу величину $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}, L_q)$, т. е. доказать оценку

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}, L_q) \gg \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{5.10}$$

Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_q$ (см. [9, пример 4]). Тогда найдутся y^*, s^*, $s^* \in \Theta_n$ такие, что $\|K_{s^*}(\cdot - y^*) - GK_{s^*}(\cdot - y^*)\,|\,L_q\| \gg 2^{n(1-\frac{1}{q})}$.

Положим $g_7(x) = K_{s^*}(x - y^*)$. Оценим $\|g_7(\cdot)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}\|$: $\|g_7(\cdot)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}\| \ll \omega^{-1}(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{p})}$. Тогда с некоторой постоянной $c_7 > 0$, не зависящей от n, функция $f_7(x) = c_7\omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}g_7(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}$. Таким образом, $\|f_7(\cdot) - Gf_7(\cdot)\,|\,L_q\| \gg \omega(2^{-n})2^{-n(1-\frac{1}{p})}\|g_7(\cdot) - Gg_7(\cdot)\,|\,L_q\| \ge \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$. Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.10).

Рассмотрим класс $SF_{p\theta}^{\Omega,\,l}$. В силу вложения $SB_{p\,1}^{\Omega,\,l} \subset SF_{p\theta}^{\Omega,\,l}$ для всех $1 \le \theta \le \infty$ здесь достаточно оценить величину $\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,1}^{\Omega,\,l}, L_q)$, что уже сделано в п. II b).

III. Рассмотрим случай $1 \le p \le q = \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$.

Сначала получим оценку снизу для классов $SB_{p\theta}^{\Omega,\,l}$:

$$\varphi_M^B(\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}, L_\infty) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{5.11}$$

Возьмем $g_8(x) = g(x - y^*)$ из п. II a). Пусть G — произвольный оператор из $\mathcal{L}_M(B)_2$. В п. II a) доказано, что

$$\|g_8(\cdot)\,|\,\mathrm{SB}_{p\,\theta}^{\Omega,\,l}\| \ll \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Функция $f_8(x) = c_8\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}g_8(x)$ принадлежит $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ с некоторой постоянной $c_8 > 0$, не зависящей от n. Таким образом,

$$\|f_8(\cdot) - Gf_8(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{\theta}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}\|g_8(\cdot) - Gg_8(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}2^{\frac{n}{p}}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.11).

Теперь рассмотрим классы $SF^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ при условии, что $p < \infty$. В силу вложения $SF^{\Omega,l}_{p\,1} \subset SF^{\Omega,l}_{p\,\theta}$ здесь достаточно оценить снизу величину $\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,1}, L_\infty)$, т. е. следует доказать оценку

$$\varphi^B_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,1}, L_\infty) \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}. \tag{5.12}$$

Если $p = 1$, то $SF^{\Omega,l}_{1\,1} \subset SB^{\Omega,l}_{1\,1}$, и требуемая оценка следует из установленной выше оценки (5.11).

Пусть $1 < p < \infty$.

Возьмем $g_8(x)$ из предыдущего случая. Оценим норму $g_8(x)$ в $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,1}$, используя лемму из [7, с. 19]:

$$\|g_8(\cdot)\,|\,\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,1}\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})A_s(g_8,x)\,|\,L_p(\ell_1)\| \ll \|\omega^{-1}(2^{-s})2^{s(1-\frac{1}{p})}A_s(g_8,x)\,|\,\ell_p(L_1)\|$$
$$= \left(\sum_{s\in\Theta_n}\omega^{-1}(2^{-s})2^{s(1-\frac{1}{p})}\|g_8\,|L_1\|^p\right)^{1/p} \asymp \omega^{-1}(2^{-n})n^{(d-1)\frac{1}{p}}2^{n(1-\frac{1}{p})}.$$

Функция $f_9(x) = c_9\omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{p}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}g_8(x)$ принадлежит $\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,1}$. Тогда

$$\|f_9(\cdot) - Gf_9(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})n^{-(d-1)\frac{1}{p}}2^{-n(1-\frac{1}{p})}\|g_8(\cdot) - Gg_8(\cdot)\,|\,L_\infty\| \gg \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Отсюда в силу произвольности оператора G с учетом выбора n по M получим (5.12).

Таким образом, оценки снизу в теореме 2 доказаны полностью. Перейдем к доказательству оценок сверху. Из определения поперечников Фурье и величины $\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{F}, L_q)$ следует, что при $|Q(N)| \le M$ верно неравенство $\varphi_M(\mathrm{F}, L_q) \le \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{F}, L_q)$.

Далее, по M подберем n так, чтобы $2^n n^{d-1} \asymp M, |Q(N)| \le M$. Тогда, поскольку мажоранта имеет вид $\omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$, находим, что $\omega(2^{-n}) \asymp 1/N,\ n \asymp \log N$, и из теоремы 1 вытекают все требуемые оценки сверху для поперечников $\varphi_M(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q)$, $\varphi_M(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q)$. Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что поперечники Фурье классов Лизоркина — Трибеля $\mathrm{SF}^r_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ впервые исследованы Д.Б. Базархановым в работе [7].

В работе [15, теорема 2] найдены точные по порядку оценки поперечников Фурье для классов $SB^{\Omega}_{p,\theta}$ при $1 \le q \le p \le \infty, p \ge 2, (q,p) \ne (\infty,\infty), 1 \le \theta \le \infty$, и $\Omega(t) = \omega(t_1 \times \cdots \times t_d)$.

З а м е ч а н и е 3. Из теорем 1 и 2 следует теорема 1′.

Теорема 1′. *Пусть* $1 \le p, q, \theta \le \infty$; $\omega \in \mathcal{S}_l \cap \mathcal{S}^{\alpha}_l$, *причем* $\alpha > \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\right)_+$.

I. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty,\ (p,q) \ne (\infty,\infty),\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+},$$

если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{1\,\theta}, L_1) \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

II. *Пусть* $1 \le p < q < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}, \quad \mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})};$$

III. *Пусть* $1 \le p,\ \theta \le q = \infty$. *Тогда* $\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}$,
если $p < \infty$,

$$\mathcal{E}^{\Psi}_{Q(N)}(\mathrm{SF}^{\Omega,l}_{p\,\theta}, L_\infty) \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Темляков В.Н.** Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 314–317.
2. **Temlyakov V.N.** Approximation of periodic functions. New York: Nova Science Publishers, 1993. 419 p. (Comput. Math. Analysis Ser.)
3. **Андрианов А.В., Темляков В.Н.** О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 32–43.
4. **Динь Зунг** Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Мат. сб. 1986. Т. 131 (173), № 2 (10). С. 251–271.
5. **Пустовойтов Н.Н.** Ортопоперечники некоторых классов периодических функций двух переменных с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 123–144.
6. **Пустовойтов Н.Н.** Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители // Anal. Math. 2008. Т. 34, № 3. С. 187–224.
7. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II // Anal. Math. 2012. Т. 38, №. 4. С. 249–289.
8. **Базарханов Д.Б.** Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 8–30.
9. **Темляков В.Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 138–168.
10. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 3–113.
11. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН. 1989. Т. 187. С. 143–161.
12. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. математического общества. 1956. Т. 5. С. 483–522.
13. **Пустовойтов Н.Н.** Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. 1994. Т. 20, № 1. С. 35–48.
14. **Yongsheng S., Heping W.** Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness// Proc. Steklov Inst. Math. 1997. Vol. 219. P. 350–371.
15. **Stasyuk S.A., Fedunyk O.V.** Approximation characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables // Ukr. Math. J. 2006. Vol. 58, no. 5. P. 779–793.
16. **Пустовойтов Н.Н.** Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 107–117.
17. **Meyer Y.** Wavelets and operators. New York; Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. 223 p. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; vol. 37.)
18. **Стасюк С.А.** Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p\,\theta}$// Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 108–121.
19. **Стасюк С.А.** Приближение суммами Фурье и колмогоровские поперечники классов $MB^{\Omega}_{p\,\theta}$ периодических функций нескольких переменных// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 247–257.

Балгимбаева Шолпан Албановна
Поступила 20.07.2015
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК
e-mail: balsholpan@yandex.ru; sc_s@mail.ru

Смирнов Тургай Игоревич
канд. физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.62

ДВИЖУЩИЙСЯ ОБЪЕКТ И НАБЛЮДАТЕЛИ В $\mathbb{R}^2$ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМ ЗАТЕНЯЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ[1]

В. И. Бердышев

Рассматривается движение объекта t в $\mathbb{R}^2$, содержащем телесное ограниченное множество G с кусочно-гладкой границей, которое препятствует движению и видимости. В окрестности выпуклых участков границы находятся наблюдатели, способные в случае опасности со стороны t скрыться от него в теневом множестве $s(t) \subset \mathbb{R}^2 \backslash G$. Устанавливаются характеристические свойства траектории $\mathcal{T}$ объекта, максимизирующей величину $\min\{\rho(t, s(t)):\ t \in \mathcal{T}\}$.

Ключевые слова: навигация, задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. A moving object and observers in $\mathbb{R}^2$ with piecewise smooth shading set.

We consider the motion of an object t in the space $\mathbb{R}^2$, where a bodily bounded bounded set G with piecewise smooth boundary hinders the motion and visibility. In a neighborhood of convex parts of the boundary, there are observers, which can hide from t in a shade set $s(t) \subset \mathbb{R}^2 \backslash G$ in the case of danger from t. We find characteristic properties of the trajectory $\mathcal{T}$ of the object that maximizes the value $\min\{\rho(t, s(t)):\ t \in \mathcal{T}\}$.

Keywords: navigation, escort problem, moving object, observer.

1. Постановка задачи

Пусть G — ограниченное, может быть, несвязное множество с кусочно-гладкой границей в $X = \mathbb{R}^2$, являющееся замыканием открытого множества $\overset{\circ}{G}$ и такое, что $X \backslash G$ связно. Множество G препятствует видимости и движению. Точки $x, y \in X$ видимы одна для другой, если $[x, y] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing$. В X движутся объект $t \notin G$ и наблюдатели $f \notin \overset{\circ}{G}$, враждебные по отношению к t. Объект движется из окрестности V_* точки t_* в окрестность V^* точки t^*, $V_* \bigcap V^* = \varnothing$, $(V_* \bigcup V^*) \bigcap G = \varnothing$, внутри заданного "коридора" $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Y} \bigcap G = \varnothing$, являющегося односвязной окрестностью заранее рассчитанной траектории

$$\mathcal{T}_0 = \{t(\tau)\colon 0 \le \tau \le 1,\ t(0) = t_*,\ t(1) = t^*\}, \quad \mathcal{T}_0 \bigcap G = \varnothing.$$

Будем предполагать, что в окрестностях $V_* = V_R(t_*)$, $V^* = V_R(t^*)$ точек t_*, t^* наблюдателей нет. Здесь

$$V_R(t) = \{x:\ \|t - x\| \le R\}, \quad R > 0.$$

Пусть

$$v(t) = \Big\{x \in X\colon [x, t] \bigcap \overset{\circ}{G} = \varnothing\Big\} \text{ — \textit{множество видимых из t точек,}}$$

$$s(t) = X \backslash \Big(v(t) \bigcup G\Big) \text{ — \textit{тень множества G (при освещении из точки t),}}$$

$$\overline{s}(t) \text{ — \textit{ее замыкание.}}$$

[1]Работа выполнена при поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 15-16-1-14), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

Объект имеет возможность поразить наблюдателя посредством мини-объекта, способного двигаться в $X\backslash\overset{\circ}{G}$ прямолинейно с большой скоростью. Таким образом, свобода движения наблюдателя f ограничена: он должен находиться вблизи множества $s(t)$, чтобы в случае опасности укрыться в тени, а именно,

$$\|t-f\| \le k\rho(f,s(t)),$$

где k — отношение максимальной скорости наблюдателя к скорости миниобъекта, ρ — длина кратчайшего пути.

Задача объекта t состоит в выборе траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ из класса $\mathbb{T}$ траекторий

$$\mathcal{T}=\{t(\tau):\ 0\le\tau\le 1,\ t(0)\in V_*,\ t(1)\in V^*\}\subset\widetilde{Y},$$

для которой

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}}\min_{t\in\mathcal{T}}\rho(t,s(t))=\min_{t\in\widehat{\mathcal{T}}}\rho(t,s(t)). \tag{1.1}$$

Задача (1.1) рассматривалась в [1] в частном случае, когда G — многоугольник. Цель данной работы — исследование этой задачи для множеств G с кусочно-гладкой границей и уточнение условий на оптимальную для (1.1) траекторию, приведенных в [1, теорема 3].

2. Теневые точки

Далее будем обозначать

$$\mathcal{P}_M(x)=\{y\in M\colon \|x-y\|=\rho(x,M)\}$$

— *множество ближайших к x точек из множества* $M\subset X$. Точку $x\in G$ из множества

$$v(t)\bigcap\overline{s}(t)$$

назовем *теневой для точки* t, $t\notin G$, если $(t,x)\bigcap G=\varnothing$.

Функция $\rho(t,s(t))$ и отображение, сопоставляющее точке t множество ближайших к t теневых точек, вообще говоря, не являются непрерывными. К тому же, из того, что $x\in\mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t)$, не следует, что $x\in\mathcal{P}_{\overline{s}(t')}(t')$ для $t'\in(t,x)$. Приведем пример (см. рис. 1).

П р и м е р 1. Пусть задана числовая последовательность $\{\alpha_n\}_1^\infty$, $\alpha_n\downarrow 0$, $\alpha_1=1$, $t_0=(0,0)$, $t_n=(\alpha_n+\alpha_{n+1})/2$, множество G есть объединение треугольников с вершинами $(1,\alpha_n)$, $(1,\alpha_{n+1})$, $a_n=(1/2,t_n)$ отрезка $[0,1]$ на оси абсцисс и треугольника с вершинами $(0,1-2\varepsilon)$, $(0,1-\varepsilon)$, $(-\varepsilon,1-\varepsilon)$ $(\varepsilon<1/10)$ (рис. 1). Тогда для t_0 точка $(0,1-\varepsilon)$ — единственная ближайшая точка из $\overline{s}(t_0)$, для t_n точка a_n — также единственная ближайшая точка из $\overline{s}(t_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. При этом $\rho(t_0,s(t_0))=1-\varepsilon$, $\rho(t_n,s(t_n))=1/2$.

Далее предполагается, что граница bdG множества G является кусочно-гладкой: она может включать в себя конечное число прямолинейных отрезков и конечное число участков выпуклости (фактически, конечное число точек перегиба), что важно для построения алгоритмов поиска оптимальной траектории. При этом расстояние $\rho(t,s(t))$ достигается на теневых точках.

Будем рассматривать точки x локальной выпуклости границы. Для каждой из них существуют окрестность $O(x)$ и прямая L, $x\in L$, такие, что множество $G\bigcap O(x)$ лежит по одну сторону относительно L. Точка выпуклости может быть угловой, если величина α угла между односторонними касательными прямыми в этой точке удовлетворяет неравенству $0<\alpha<\pi$. Множество угловых точек границы G обозначим через $\mathbb{A}$.

Связный гладкий участок выпуклости границы множества G (участок, состоящий из гладких точек локальной выпуклости), максимальный по включению, будем обозначать через C. Итак, C — гладкая выпуклая связная кривая без концевых точек. Совокупность таких участков границы обозначим через $\mathbb{C}$.

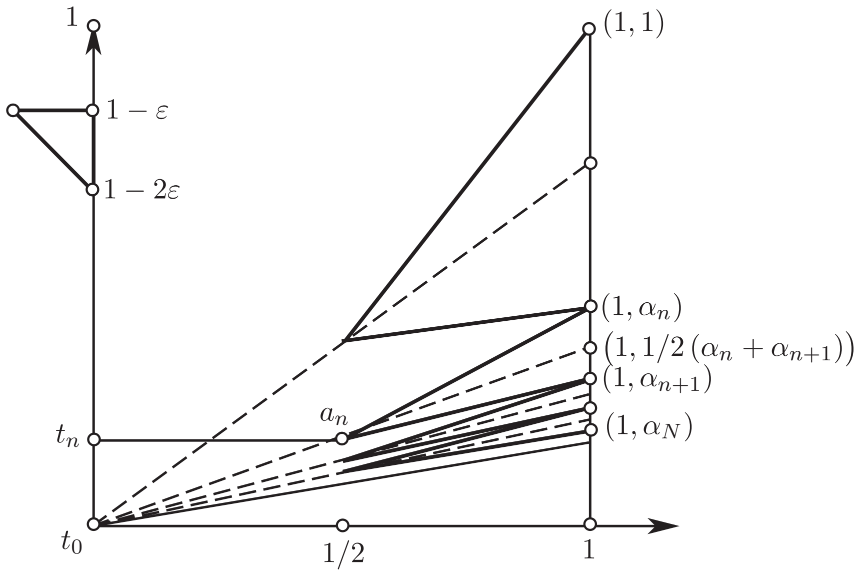


Рис. 1.

Теневыми точками могут быть только угловые точки и точки из $\overline{C}, C \in \mathbb{C}$. Для иных точек $x \in bdG$ любая прямая, содержащая x, содержит точки из $\overset{\circ}{G}$ в любой окрестности $O(x)$. Пусть $x \notin G$. Рассматривая множество точек на границе bdG, видимых (освещенных) из точки x, $x \notin G$, с учетом ограниченности G и связности дополнения $X \backslash G$, можно установить (см. [1, теорема 1 для многогранного G]), что справедлива

Лемма. *Для любой точки $x \notin G$ множество теневых точек непусто.*

Для точки $s \in bdG$ обозначим

$$\widetilde{T}(s) = \big\{t \in v(s)\colon s \in \overline{s}(t)\big\}, \quad T(s) = \overline{\big\{t \in v(s)\colon s \in \mathcal{P}_{\overline{s}(t)}(t)\big\}}$$

— замыкание множества точек $t \notin G$, для которых s является ближайшей из теневых для t точек.

Если $a \in \mathbb{A}$ — угловая точка, и для любого $\varepsilon > 0$ множество $\overset{\circ}{G} \bigcap V_\varepsilon(a)$ связно, то $\widetilde{T}(a)$ является дополнением до $X \backslash (G \bigcup s(a))$ объединения угла при a и вертикального к нему угла. Если $c \in C \in \mathbb{C}$, то множество $\widetilde{T}(c)$ непусто и лежит на касательной прямой к дуге C в точке c.

Для гладкого выпуклого участка $C \in \mathbb{C}$ определим множества

$$\widetilde{T}(C) = \bigcup_{c \in C} \widetilde{T}(c), \quad T(C) = \overline{\bigcup_{c \in C} T(c)}.$$

В [1, теорема 1] установлено, что в случае многоугольного G для $a \in \mathbb{A}$ множество $T(a)$ является многоугольником, $\overset{\circ}{T}(a) \neq \varnothing$ и справедливы соотношения

$$\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(a') = \varnothing \ \text{ для } \ a' \in A,\ a \neq a' \ \text{ и } \ \bigcup_{a \in \mathbb{A}} T(a) = X \backslash \overset{\circ}{G}.$$

Из свойства гладкости дуги $C \in \mathbb{C}$ следует, что $\overset{\circ}{T}(C) \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\Big(\bigcup_{a \in \mathbb{A}} T(s)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{C \in \mathbb{C}} T(C)\Big) = X \backslash \overset{\circ}{G}, \tag{2.1}$$

и для любых $a \in \mathbb{A},\ C \in \mathbb{C}$

$$\overset{\circ}{T}(a) \bigcap \overset{\circ}{T}(C) = \varnothing. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой точки $t \notin G$ по лемме множество $s(t)$ непусто, и ближайшая к t точка s из $\overline{s}(t)$ либо угловая, т. е. $t \in T(s)$, либо принадлежит некоторой дуге $C \in \mathbb{C}$, т. е. $t \in T(C)$. Соотношение (2.1) установлено. Докажем (2.2). Допустим, что для $a \in \mathbb{A}$ и дуги $C \in \mathbb{C}$ нашлась точка t с окрестностью $O(t)$ такая, что

$$O(t) \subset T(a) \bigcap T(C). \tag{2.3}$$

Существует точка $c \in C$, для которой $t \in T(c)$. Имеем $\|a-t\| = \|c-t\|$. Если угол $\angle atc$ не меньше 90°, то для точки $t_\lambda = t + \lambda(c-t) \in O(t),\ \lambda > 0$, выполняются соотношения

$$t_\lambda \in T(c), \quad \rho(t_\lambda, s(t_\lambda)) \le \|t_\lambda - c\| < \|t-c\| = \|t-a\| < \|t_\lambda - a\|,$$

что противоречит предположению (2.3). Пусть угол $\angle atc$ острый. Отметим на отрезке $[t,a]$ точки $x_\lambda^a,\ x_\lambda^t$ такие, что

$$\|t - x_\lambda^t\| = \|t - t_\lambda\|, \quad \|a - x_\lambda^a\| = \|a - t_\lambda\|.$$

Тогда

$$\rho(t_\lambda, s(t_\lambda)) \le \|t_\lambda - c\| = \|t-c\| - \|t-t_\lambda\| = \|t-a\| - \|t-x_\lambda^t\| < \|t-a\| - \|t-x_\lambda^a\| = \|a-x_\lambda^a\| = \|t_\lambda - a\|,$$

что противоречит (2.3). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 1. Пример множества

$$G = \Big\{x = (x_1, x_2) \in V_1(0),\ |x_1| \ge 1/2\Big\},$$

где $C = \{x\colon \|x\| = 1,\ x_1 > 1/2\}$, $C' = \{x\colon \|x\| = 1,\ x_1 < 1/2\}$, показывает, что множества $\mathring{T}(C),\ \mathring{T}(C')$ могут пересекаться для $C,\ C' \in \mathbb{C}$.

Приведем условия, при которых

$$t \notin \mathring{T}(C) \bigcap \mathring{T}(C') \tag{2.4}$$

для $C,\ C' \in \mathbb{C}$. Пусть $t \in \widetilde{T}(C) \bigcap \widetilde{T}(C')$, $c \in C,\ c' \in C',\ t \in T(c) \bigcap T(c')$, т. е. $\|t-c\| = \|t-c'\|$. Обозначим через γ угол ctc' с вершиной t и покажем, что (2.4) выполняется в двух случаях:

величина угла γ равна 180°,

внутренность угла γ в окрестности точек c, c' не пересекается хотя бы с одной из дуг C, C'. Легко видеть, что в первом случае $(c,t) \subset \mathring{T}(C),\ (c',t) \subset \mathring{T}(C')$, поэтому (2.4) справедливо. Пусть во втором случае внутренность угла γ не пересекается с C, тогда при любом малом $\lambda > 0$ точка c' является теневой для $t_\lambda = t + \lambda(c'-t)$ и $\|t_\lambda - c'\| < \|t_\lambda - c\| < \|t_\lambda - c_\lambda\|$, где $c_\lambda \in C$ — теневая точка для t_λ, и, значит, (2.4) выполняется.

3. Характеризация наилучшей траектории

Определим множество $\mathbb{S} = \mathbb{A} \bigcup \mathbb{C}$, его элементы $s \in \mathbb{S}$ для краткости будем называть "вершинами". Множество $\mathbb{S}$ предполагается конечным. Для вершин s и точек $x \in \widetilde{T}(s)$ введем расстояние

$$\overline{\rho}(x,s) = \begin{cases} \|x-s\|, & \text{если } \ s = a \in \mathbb{A},\ x \in \widetilde{T}(a), \\ \|x-c\|, & \text{если } \ s = C \in \mathbb{C},\ c \in C,\ x \in \widetilde{T}(c). \end{cases} \tag{3.1}$$

Принадлежность объекта множеству $\mathring{T}(s)$ означает его близость к вершине s, где может присутствовать наблюдатель. Предпочтительным для него является месторасположение на общей границе $\mathcal{B}(s,s')$ смежных множеств $T(s)$ и $T(s')$. Важно, что по определению этих множеств точки общей границы $T(s)\bigcap T(s')$ равноудалены от s и s' по расстоянию (3.1). При поиске этих границ учитывается линейчатая структура множеств $\widetilde{T}(s)$ (коническая при $s\in\mathbb{A}$, а при $s\in\mathbb{C}$ — совокупность интервалов на касательных прямых к дуге C), и используется решение следующих задач о построении границ между

1) $T(a)$ и $T(a')$ $(a,a'\in\mathbb{A})$,

2) $T(a)$ и $T(C)$ $(a\in\mathbb{A},\ C\in\mathbb{C})$,

3) $T(C)$ и $T(C')$ $(C,C'\in\mathbb{C})$.

1) В случае многоугольного G множество $T(a)$ является (см. [1]) многоугольником, а в области, где $\widetilde{T}(a)\bigcap\widetilde{T}(a')\neq\varnothing$, множества $T(a)$, $T(a')$ разграничивает прямая L, ортогональная отрезку $[a,a']$ и содержащая точку $(a+a')/2$. Так что $\|a-z\|=\|z-a'\|$ $(z\in L)$.

2) Точки z границы между $T(a)$ и $T(C)$, попавшие в область $\widetilde{T}(a)\bigcap\widetilde{T}(C)$, определяются так, что $\|a-z\|=\|z-c\|$, где $c\in C$ — точка касания дуги C с прямой, содержащей точку z (см. пример 2 ниже).

3) Точка z границы между $T(C),T(C')$, попавшая в область $\widetilde{T}(C)\bigcap\widetilde{T}(C')$, есть пересечение прямых, касающихся дуг $C,\ C'$ в точках $c\in C,\ c'\in C'$ таких, что $\|c-z\|=\|z-c'\|$.

З а м е ч а н и е 2. Приведенные выше равенства можно заменить на соотношения

$$\|a-z\|=K\|z-a'\|,\quad \|a-z\|=K\|z-c\|,\quad \|c-z\|=K\|z-c'\|\quad (K>1),$$

если сближение с a',C,C' (в задачах 1),2),3) соответственно) менее опасно, чем с a,a,C.

Граница раздела $\mathcal{B}(s,s')$ указанных множеств может иметь сложную форму даже для множества простого вида.

П р и м е р 2. Множество G есть объединение круга C с центром в нуле радиуса r и треугольника с вершиной $(a,0)$, $a>r$ (см. рис. 2).

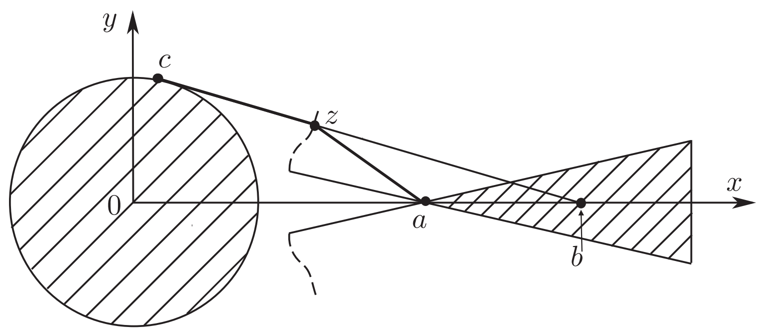


Рис. 2.

Пусть $b\geq a$ и $c=(x,y)$ — точка касания с C прямой, содержащей точку $(b,0)$, и $z=(1-\lambda)c+\lambda(b,0)$ — точка на этой прямой, удовлетворяющая равенству $\|c-z\|=\|z-(a,0)\|$. Тогда

$$\lambda=\frac{2bx-(x^2+a^2)}{2[a(x-b)+xb-r]},\quad y^2=\left(\frac{bx}{r}\right)^2-r^2.$$

Искомая граница изображена пунктирной линией.

Объект t должен проследовать из V_* до V^* внутри коридора $Y=\widetilde{Y}\backslash(V_*\bigcup V^*)$, максимизируя наименьшее расстояние до вершин $s\in\mathbb{S}$, поскольку в них, возможно, присутствуют наблюдатели. Далее будет удобно на границе коридора Y выделить левую границу Y_l и правую Y_r относительно движения от t_* к t^* по кратчайшей траектории, содержащейся в Y. Указанные границы берут свое начало на границе шара V_* и заканчиваются на границе шара V^*. Необходимо указать все точки из Y, которые должны лежать на оптимальной для задачи (1.1) траектории. По теореме 1 коридор заполнен множествами $T(s)$.

Пусть $s\in\mathbb{S}$,

$$\widetilde{T}(s)\bigcap\overset{\circ}{Y}\neq\varnothing,\quad \widetilde{T}(s)\bigcap Y_l\neq\varnothing,\quad \widetilde{T}(s)\bigcap Y_r\neq\varnothing \tag{3.2}$$

и Y_s — более далекая по расстоянию $\overline{\rho}(s,x)$ от s граница Y_l или Y_r. Обозначим через S^1 множество вершин, удовлетворяющих условию (3.2). В связи с вершиной s рассмотрим задачу

$$M(s)=\overline{\rho}(s,Y_s)=\min_{y\in Y_s}\overline{\rho}(s,y), \tag{3.3}$$

и пусть $\mathcal{P}=\mathcal{P}_{Y_s}(s)$ — множество ближайших к s по расстоянию $\overline{\rho}$ точек из Y_s. Любая траектория $\mathcal{T}\in\mathbb{T}$ пересекает любой отрезок, соединяющий s с точками из $\mathcal{P}$. В случае малости величины $\overline{\rho}(s,Y_s)$ траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ должна содержать множество $\mathcal{P}$.

Теперь возьмем пару вершин $s,s'\in\mathbb{S}$ с противоположных сторон коридора Y (расстояния $\rho(s,Y)$, $\rho(s',Y)$ достигаются на разных сторонах Y_l,Y_r границы Y), для которых $Q=\widetilde{T}(s)\bigcap\widetilde{T}(s')\neq\varnothing$ и $Q\bigcap\overset{\circ}{Y}\neq\varnothing$. Множество таких пар вершин обозначим через S^2. Тогда любая траектория $\mathcal{T}\in\mathbb{T}$ пересекает любую двузвенную ломаную, соединяющую точку x из Q с s и s' (с точкой a, если $s=a\in A$, а если $s=C\in\mathbb{C}$, то с точкой $c\in C$, для которой $x\in\widetilde{T}(c)$).

В связи с парой таких вершин возникает задача

$$M(s,s')=\max_{x\in Q}\ \min\bigl\{\overline{\rho}(s,x),\ \overline{\rho}(s',x)\bigr\}. \tag{3.4}$$

Предположим, что общая граница

$$\mathcal{B}(s,s')=\bigl\{z\colon \overline{\rho}(s,z)=\overline{\rho}(s',z)\bigr\}$$

множеств $T(s)$, $T(s')$ не пересекается с Q, и пусть вершина s и Q лежат по одну сторону от $\mathcal{B}(s,s')$. Очевидно, что максимум (3.4) доставляет точка $\mathcal{P}=\mathcal{P}(s,s')\in Q$, для которой

$$\rho(s,\mathcal{P})=\max_{x\in Q}\overline{\rho}(s,x)<\rho(s',\mathcal{P})=\min_{x\in Q}\overline{\rho}(s',x)$$

и $M(s,s')=\rho(s',\mathcal{P})$. При малой величине $M(s,s')$ точка $\mathcal{P}=\mathcal{P}(s,s')$ должна лежать на $\widehat{\mathcal{T}}$. Здесь важно отметить, что $\mathcal{P}\in bd\widetilde{T}(s)$, поэтому вершина s не является теневой для точки $\mathcal{P}$. Оптимальная траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ лишь касается границы $bd\widetilde{T}(s)$ в точке $\mathcal{P}$ и в окрестности $O(\mathcal{P})$ этой точки не пересекается с внутренностью множества $\widetilde{T}(s)$. Но $\widehat{\mathcal{T}}$ пересекается в окрестности $O(\mathcal{P})$ с внутренностью множества $\widetilde{T}(s')$.

Теперь предположим, что множество $Q^*=Q\bigcap\mathcal{B}(s,s')$ непусто. Тогда задача

$$M(s,s')=\max_{x\in Q^*}\ \min\bigl\{\overline{\rho}(s,x),\ \overline{\rho}(s',x)\bigr\}$$

сводится к эквивалентным задачам

$$M(s,s')=\min_{x\in Q^*}\overline{\rho}(s,x),\quad M(s,s')=\min_{x\in Q^*}\overline{\rho}(s',x),$$

и множество точек $\mathcal{P}(s,s')$, доставляющих минимум, в случае малости $M(s,s')$ обязано лежать на траектории $\widehat{\mathcal{T}}$.

Случай бо́льшего числа вершин, лежащих по разные стороны от Y, рассматривать не надо, так как добавление новых вершин сужает множество $\widetilde{T}(s)\bigcap\widetilde{T}(s')$ и общую границу $\mathcal{B}(s,s')$ и, значит, не уменьшает величину $M(s,s')$. Сформулируем полученный результат.

Обозначим

$$M=\min\Bigl\{\min_{s\in S^1}M(s),\ \min_{(s,s')\in S^2}M(s,s')\Bigr\}. \tag{3.5}$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\max_{\mathcal{T}\in\mathbb{T}}\min_{t\in\mathcal{T}}\overline{\rho}(t,s(t))=M. \tag{3.6}$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}}\in\mathbb{T}$ является оптимальной в задаче (1.1) тогда и только тогда, когда

$$\overline{\rho}(t,s(t))\geq M\quad\forall\ t\in\widehat{\mathcal{T}},$$

и множества $\mathcal{P}(s)$, $\mathcal{P}(s,s')$ лежат на $\widehat{\mathcal{T}}$ для всех $s\in S^1$ и $(s,s')\in S^2$, доставляющих минимум в (3.5).

Итак, анализ положения всех вершин $s \in \mathbb{C}$ таких, что $\widetilde{T}(s) \bigcap \overset{\circ}{Y} \neq \varnothing$, позволяет найти величину (3.6) и набор точек $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}(s) \bigcup \mathcal{P}(s, s')$, через которые проходит каждая оптимальная траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ задачи (1.1). В силу теоремы 1 для любой точки $t \in \widehat{\mathcal{T}}$ найдется вершина $s_t \in \mathbb{S}$, для которой $t \in T(s_t)$. Поэтому любая точка траектории $\widehat{\mathcal{T}}$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\rho}(t, s) \geq \overline{\rho}(t, s_t) \geq M \quad \forall\ s \in \mathbb{S}.$$

З а м е ч а н и е 3. Возвращаясь к теореме 3 из [1], отметим, что в ней приведен неполный набор точек, которые должны располагаться на оптимальной траектории для задачи 3.1, сформулированной в [1] для многогранного множества G (см. [2]). Это показывает пример множества G, составленного из двух треугольников с вершинами

$$a_1 = (1, 0), \quad a_2 = (2, -1), \quad a_3 = (2, 1) \ \text{ и } \ a_1' = (-1, 0), \quad a_2' = (-2, -1), \quad a_3' = (-2, 1).$$

Среди траекторий, проходящих между треугольниками, оптимальная должна содержать точки $(0, -1)$, $(0, 1)$, являющиеся ближайшими к a_1 и a_1' из множества $T(a_1) \bigcap T(a_1')$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 46–55.
2. **Бердышев В.И.** Письмо в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 316.

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 01.09.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 514.17; 532.5

ОДИН КЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ТОРЕ С СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ. II[1]

$\boxed{\text{В. П. Верещагин}}$, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Исследуется задача о решениях $(\mathbf{V}, p)$ в торе D уравнения Эйлера с соленоидальным векторным полем $\mathbf{V}$, аналогичная рассмотренной в предыдущей работе авторов 2014 г., только теперь в классе векторных полей $\mathbf{V}$, линии которых совпадают с параллелями вложенных в D торов с той же, что и у D, осевой окружностью. Найдены условия, при которых эта задача разрешима, и определены соответствующие решения.

Ключевые слова: скалярное и векторное поля, уравнение Эйлера, дивергенция, ротор.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A solution class of the Euler equation in a torus with solenoidal velocity field. II.

We study a problem on solutions $(\mathbf{V}, p)$ of the Euler equation with solenoidal velocity field $\mathbf{V}$ in a torus D, which is similar to the problem considered in the authors' previous paper 2014. Now, the problem is considered in the class of vector fields $\mathbf{V}$ whose lines coincide with lines of latitude of tori embedded in D with the same circular axis. Conditions are found under which this problem is solvable, and solutions are found too.

Keywords: scalar and vector fields, Euler equation, divergence, curl.

В данной работе продолжены исследования уравнений движения сплошной среды, допускающие в различных областях некоторые специальные решения, определяемые задаваемыми геометрическими ограничениями на поле скоростей, начатые в работах [1–5].

Рассмотрим математическую проблему существования и построения гладкого решения в торе D системы дифференциальных уравнений

$$\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V} + (\mathbf{V}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p = \mathbf{f},\ (\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{V}) = 0\Big\} \tag{1}$$

при указанных в аннотации геометрических ограничениях на поле $\mathbf{V}$. Здесь и далее D — тор, ограниченный тороидальной поверхностью с осевой окружностью $\mathcal{L}_c$ радиуса r_c и с внутренним радиусом r_0 (радиусом сечений тора плоскостями, перпендикулярными к $\mathcal{L}_c$).

Система (1) состоит из уравнения Эйлера относительно векторного поля $\mathbf{V}$ и скалярного поля p и уравнения соленоидальности векторного поля $\mathbf{V}$. Определяя решение $(\mathbf{V}, p)$ системы (1), будем считать, что пара $(\mathbf{V}, p)$, как и любая пара (σ, Φ), гладкая в $D^4 = D \times \mathbb{R}_+$, если первая компонента пары непрерывно дифференцируема в D^4, а вторая непрерывна в D^4 и имеет там непрерывные пространственные производные. В механике при наличии реального векторного поля сил $\mathbf{f}$, начальных и краевых условий уравнение Эйлера описывает движение идеальной невязкой сплошной среды постоянной плотности ρ в эйлеровой системе отсчета. *Для образности*, как и в некоторых работах [1–5], мы сохраняем принятую в механике терминологию: движение сплошной среды, $\mathbf{V}$ — поле скоростей, $\mathbf{f}$ — поле сил, p — поле давлений, $(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{V})$ — дивергенция поля $\mathbf{V}$, ρ — плотность среды и т. д. Напомним, что в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ с ортами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ гамильтониан $\boldsymbol{\nabla}$ определяется формулой $\boldsymbol{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i\, \partial/\partial x_i$. Удобно точку O поместить в центр симметрии тора, а ось Ox_3 совместить с его осью симметрии. Движения, у которых линии векторного поля скоростей совпадают с окружностями $\mathcal{L}_{R,x_3} = \{\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)\colon x_3 = \text{const},\ R =: \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - r_c = \text{const}\}$, $R^2 + x_3^2 < r_c^2$,

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

лежащими внутри D, проще всего описывать в криволинейных координатах, в качестве координатных линий которых выбираются прямые, параллельные оси Ox_3, лучи с началом на оси Ox_3, параллельные плоскости Ox_1x_2, и параллели $\mathcal{L}_{R,x_3}$ внутри тора D. Каждой точке $X = \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \sum_1^3 x_i\mathbf{e}_i$ тора D ставим (однозначно) в соответствие тройку чисел R, φ, x_3, определяющих проходящие через $\mathbf{X}$ координатные линии (достаточно двух линий, например, параллели $\mathcal{L}_{R,x_3}$ и луча $\mathcal{L}_{x_3,\varphi} = \{\mathbf{X} = \mathbf{e}_3x_3 + (\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi)(r_c + R)\colon x_3 = \mathrm{const},\ \varphi = \mathrm{const},\ r_c + R > 0\}$, а также правую тройку ортов $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис описанной криволинейной системы координат, где

$$\begin{cases} \mathbf{e}_R(\varphi) = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi; \\ \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = \mathbf{e}_1(-\sin\varphi) + \mathbf{e}_2\cos\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_R\cos\varphi + \mathbf{e}_\varphi(-\sin\varphi); \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_R\sin\varphi + \mathbf{e}_\varphi\cos\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

При этом точку $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$ будем обозначать также через $\mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$:

$$\mathbf{X}(R, \varphi, x_3) = r_c\mathbf{e}_R(\varphi) + R\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3, \tag{3}$$

(параметр r_c тора D один и тот же для всех $\mathbf{X} \in D$). Из формулы (3) видно, что тройка чисел $(r_c + R, \varphi, x_3)$ совпадает с координатами точки $\mathbf{X}$ в цилиндрической системе координат с полярной осью Ox_1 в плоскости Ox_1x_2. Однако введенная криволинейная система координат отлична от цилиндрической: здесь в каждой полуплоскости Π_φ $(0 \le \varphi < 2\pi)$, проходящей через ось Ox_3 и луч $\mathcal{L}_{0,\varphi}$, вводится своя декартова система координат с базисом $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$ и с началом в точке $X_c(\varphi) = r_c\mathbf{e}_R(\varphi) = r_c(\mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi)$. Векторные поля в $\mathbb{R}^3\backslash Ox_3$, порожденные базисными векторами $\mathbf{e}_R(\varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, $\mathbf{e}_3$ по формулам $\mathbf{e}_R(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_R(\varphi(\mathbf{X}))$, $\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_\varphi(\varphi(\mathbf{X}))$, $\mathbf{e}_3(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{e}_3$, в цилиндрической и во введенной системах координат, конечно, совпадают, но координата R точки $\mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$ определяется расстоянием $\mathbf{X}$ до прямой $\mathcal{L}_\varphi = \{\mathbf{X}_c(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3\colon x_3 \in \mathbb{R}\}$, а не до оси Ox_3, причем $R < 0$ при $x_1^2 + x_2^2 < r_c^2$. Отсюда и из (2) следует, что в D для $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$ имеем

$$x_1 = (r_c + R)\cos\varphi, \quad x_2 = (r_c + R)\sin\varphi, \quad -r_0 < R < r_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \tag{4}$$

причем $\mathbf{X}$ лежит внутри D, только если $R^2 + x_3^2 < r_0^2$. Дифференцируя эти соотношения по x_1, x_2, получаем

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial R}{\partial x_1}\cos\varphi + (r_c + R)(-\sin\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \\ 0 = \dfrac{\partial R}{\partial x_1}\sin\varphi + (r_c + R)\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial R}{\partial x_2}\cos\varphi + (r_c + R)(-\sin\varphi)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \\ 1 = \dfrac{\partial R}{\partial x_2}\sin\varphi + (r_c + R)\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \end{cases}$$

откуда находим, что

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin\varphi}{r_c + R}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{r_c + R} \quad (r_c + R > r_c - r_0 > 0). \tag{5}$$

Векторные поля вида $\mathbf{a}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3))$ и $\mathbf{b}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3), t)$ будем обозначать также через $\mathbf{a}(R, \varphi, x_3)$ и $\mathbf{b}(R, \varphi, x_3, t)$, аналогичное соглашение распространим и на скалярные поля. Из формул (2) легко выводится, что

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R(\varphi)}{\partial\varphi} = \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi} = -\mathbf{e}_R(\varphi), \quad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial x_3} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial R} = \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial x_3} = 0, \tag{6}$$

а от тождественно постоянных в $\mathbb{R}^3$ векторных полей $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ все производные равны нулю. Отсюда и из формул (3)–(5) следует, что в отличие от базиса $\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ работы [1] свойства непрерывности и гладкости (непрерывной дифференцируемости) в области $D^4 = D \times \mathbb{R}_+$ векторных и скалярных полей $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3, t) =: \mathbf{a}(\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3), t) = \mathbf{a}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3), t) =:$

$\mathbf{a}(R,\varphi,x_3,t)$ и $\sigma(x_1,x_2,x_3,t) =: \sigma(\mathbf{X}(x_1,x_2,x_3),t) = \sigma(\mathbf{X}(R,\varphi,x_3),t) =: \sigma(R,\varphi,x_3,t)$ в декартовых и введенных криволинейных координатах эквивалентны.

Из (3) вытекает, что в этих переменных упрощаются формулы для D и $\mathcal{L}_{R,x_3}$:

$$D = D_{r_c,r_0} = \{\mathbf{X}(R,\varphi,x_3)\colon R^2 + x_3^2 < r_0^2,\ \varphi \in [0,2\pi)\},$$

$$\mathcal{L}_{R,x_3} = \{X(R,\varphi,x_3)\colon R,\ x_3 \text{ фиксированы},\ \varphi \in [0,2\pi)\} \quad (R^2 + x_3^2 < r_0^2). \tag{7}$$

В частности, видно, что с каждой парой чисел $(|R|,|x_3|)$ связаны две пары равных параллелей, а именно, лежащие в двух параллельных плоскостях пары $\{\mathcal{L}_{|R|,|x_3|}; \mathcal{L}_{|R|,-|x_3|}$ и $\{\mathcal{L}_{-|R|,|x_3|}, \mathcal{L}_{-|R|,-|x_3|}\}$.

Также из (7) следует, что множество параллелей $\mathcal{L}_{R,x_3}$ $(R^2 + x_3 < r_0^2)$ является множеством линий векторного поля $\mathbf{e}_\varphi(\varphi(\mathbf{X}))$ в D, и поэтому сформулированное в начале работы геометрическое ограничение на векторные поля $V(\mathbf{X},t)$ на аналитическом языке означает, что

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}(R,\varphi,x_3),t) = \sigma(R,\varphi,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), \tag{8}$$

где $\sigma(\mathbf{X},t)$ — гладкое в D^4 скалярное поле.

Из формул (2) и (5) вытекает, что дифференциальный оператор $\boldsymbol{\nabla}$ Гамильтона в новых координатах имеет вид

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r_c + R}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{9}$$

Подставим $\mathbf{V}$ (8) во второе уравнение системы (1). Используя (9) и (6), получаем

$$0 = \operatorname{div}\mathbf{V} = (\boldsymbol{\nabla},\sigma\mathbf{e}_\varphi) = (\boldsymbol{\nabla}\sigma,\mathbf{e}_\varphi) + \sigma\Big[\Big(\mathbf{e}_R,\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_\varphi\Big) + \frac{1}{r_c+R}\Big(\mathbf{e}_\varphi,\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big) + \Big(\mathbf{e}_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_\varphi\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{r_c+R}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi), \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial\sigma(R,\varphi,x_3,t)}{\partial\varphi} = 0. \tag{10}$$

Таким образом, справедлива следующая

Лемма. *Векторное поле* (8) *соленоидально в торе* D, *если только скалярная величина* σ *скорости* $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ *в каждый момент времени во всех точках каждой параллели* $\mathcal{L}_{R,x_3} \subset D$ *одинакова*:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \sigma(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi). \tag{11}$$

Чтобы перейти к первому уравнению системы (1), вычислим вначале производную $(\mathbf{V},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V}$ вектор-функции (11) по пространственным переменным в направлении $\mathbf{V}$. Применяя формулы (9) и (6), получаем

$$(\mathbf{V},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{V} = \sigma\Big(\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{r_c+R}\mathbf{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\Big)\sigma(R,x_3,t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

$$= \sigma\Big(\mathbf{e}_\varphi(\varphi),\mathbf{e}_R(\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial R} + \frac{\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{r_c+R}\frac{\partial\sigma(R,x_3,t)}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}\Big)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

$$+ \sigma^2\Big((\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_R)\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{\partial R} + \frac{1}{r_c+R}(\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi)\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{\partial\varphi} + (\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_3)\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial x_3}\Big)$$

$$= \frac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\frac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}\mathbf{e}_R(\varphi). \tag{12}$$

Для сравнения вихревых свойств решений рассматриваемой задачи с результатом работы [1] о вихревых свойствах векторного поля с меридианальными линиями в торе вычислим ротор векторного поля (11) на основании тех же формул (9) и (6). Имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = [\boldsymbol{\nabla},\sigma\mathbf{e}_\varphi] = [\boldsymbol{\nabla}\sigma,\mathbf{e}_\varphi] + \sigma[\boldsymbol{\nabla},\mathbf{e}_\varphi] = \frac{\partial\sigma}{\partial R}[\mathbf{e}_R,\mathbf{e}_\varphi] + \frac{1}{r_c+R}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}[\mathbf{e}_\varphi,\mathbf{e}_\varphi]$$

$$+\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_\varphi]+\sigma\Big(\Big[\mathbf{e}_R,\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_\varphi\Big]+\frac{1}{r_c+R}\Big[\mathbf{e}_\varphi,\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\Big]+\Big[\mathbf{e}_3,\frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{e}_\varphi\Big]\Big)$$
$$=\frac{\partial\sigma}{\partial R}\mathbf{e}_3-\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}\mathbf{e}_R+\frac{\sigma}{r_c+R}\mathbf{e}_3,$$

т. е.

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}=\mathbf{e}_R\Big(-\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}\Big)+\mathbf{e}_3(r_c+R)^{-1}\frac{\partial}{\partial R}((r_c+R)\sigma).$$

Отсюда видно, что $\operatorname{rot}\mathbf{V}\perp\mathbf{V}$, т. е., как и в [1], векторное поле $\mathbf{V}$ поперечно вихревое (там было $\mathbf{V}=\sigma(r,\vartheta,\varphi,t)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta,\varphi)$).

Вернемся к уравнению Эйлера. Для векторного поля (11) с помощью (12) оно записывается в виде

$$\frac{\partial\sigma(R,x_3,t)}{\partial t}\mathbf{e}_\varphi(\varphi)-\frac{\sigma^2(R,x_3,t)}{r_c+R}\mathbf{e}_R(\varphi)-\mathbf{f}(R,\varphi,x_3,t)=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t).\tag{13}$$

Пусть пара (σ,p) при некотором $\mathbf{f}$ превращает (13) в тождество по $(R,\varphi,x_3)\in D$ и $t\in\mathbb{R}_+$. Тогда здесь правая часть (а значит, и левая) как градиент гладкого скалярного поля является потенциальным векторным полем. Класс непрерывных потенциальных при каждом $t\in\mathbb{R}$ в D векторных полей совпадает с множеством векторных полей $\boldsymbol{\nabla}\Phi(\mathbf{X},t)$, где $\Phi(\mathbf{X},t)$ — гладкие по $\mathbf{X}$ в D непрерывные по $t\in R$ скалярные поля. Поэтому решение (σ,p) уравнения (13) является решением следующей системы уравнений относительно p и σ:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t)=\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\\ \mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t;\sigma)=-\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\end{cases}\tag{14}$$

где

$$\mathbf{b}=\mathbf{e}_\varphi(\varphi)\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\mathbf{e}_R(\varphi)\frac{\sigma^2}{r_c+R}-\mathbf{f},$$

а Φ — некоторое гладкое по $\mathbf{X}$ непрерывное по t в D^4 скалярное поле.

Легко показать, что множество решений (σ,p) всех разрешимых уравнений (13) совпадает с классом решений систем (14) при всех Φ, для которых они разрешимы.

Действительно, пусть пара $(\sigma(R,x_3,t,\Phi),p(R,\varphi,x_3,t,\Phi))$ — решение системы (14), совместной при соответствующей функции $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$. Тогда подстановка этого решения в (14) превращает эту систему уравнений в справедливые равенства

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)=\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\\ \mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t;\sigma(...,\Phi))=-\boldsymbol{\nabla}\Phi(R,\varphi,x_3,t),\end{cases}$$

где

$$p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)=\rho\Phi(R,\varphi,x_3,t)+\mathcal{P}(t),\tag{15}$$

а $\mathcal{P}(t)$ — любая непрерывная в R функция. А тогда замена функции $\boldsymbol{\nabla}\Phi$ во втором равенстве на тождественную ей (в силу первого равенства) функцию $(1/\rho)\boldsymbol{\nabla}p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)$ превращает его (в силу определения поля $\mathbf{b}$) в равенство, которое получилось бы, если бы подстановка пары $(\sigma(R,\varphi,x_3,t;\Phi))$, $p(R,\varphi,x_3,t;\Phi)$ в уравнение (13) при том же $\mathbf{f}$ превращала его в тождество в D^4.

Учитывая отмеченный выше факт, что всякое решение (σ,p) уравнения (13) удовлетворяет при некоторой функции Φ системе уравнений (14), получаем, что класс совместных уравнений (13) эквивалентен классу совместных относительно σ и p систем (14).

Второе уравнение в (14) означает, что циркуляция векторного поля $\mathbf{b}$ по любому замкнутому контуру в торе D должна равняться нулю. Это для гладких $\mathbf{b}$ эквивалентно тому, что при любом $t\geq 0$ $\operatorname{rot}\mathbf{b}=0$ в D и для любой линии $\mathcal{L}_{R,x_3}$ циркуляция

$$C(\mathbf{b};\mathcal{L}_{R,x_3})=:\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{L}_{R,x_3}}(\mathbf{b}(R,\varphi,x_3,t),d\mathbf{X}(R,\varphi,x_3,t))=0\quad(R^2+x_3^2<r_0^2).$$

Действительно, равенство ротора векторного поля в D нулю эквивалентно равенству нулю циркуляции поля по любому стягиваемому в D в точку спрямляемому замкнутому контуру. И ясно, что соединение любого не стягиваемого в точку спрямляемого контура $\mathcal{L}$ с контуром $\mathcal{L}_{R,x_3}$ внутри D проходимой в двух противоположных направлениях спрямляемой дугой (разрезом), не меняя циркуляцию поля по $\mathcal{L}$, превращает $\mathcal{L}$ в контур, стягиваемый в точку.

На $\mathcal{L}_{R,x_3}$ параметры R и x_3 фиксированы, поэтому там (см. (3), (7) и (6)) $d\mathbf{X} = (d/d\varphi) \times (r_c\mathbf{e}_R(\varphi) + R\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3)d\varphi = (r_c + R)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)d\varphi$. Следовательно, $C(\mathbf{b}; \mathcal{L}_{R,x_3}) = \partial\sigma/\partial t - 1/2\pi \times \int_0^{2\pi} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\varphi)\, d\varphi = 0$, т. е.

$$\frac{\partial\sigma(R, x_3, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_\varphi(R, \varphi, x_3, t)\, d\varphi =: f_\varphi^0(R, x_3, t), \tag{16}$$

где f_φ — проекция $\mathbf{f}(R, \varphi, x, t)$ на $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ и выражается через скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$: $f_\varphi(R, \varphi, x_3, t) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\varphi(\varphi))$. Таким образом, производная $\partial\mathbf{V}/\partial t$ векторного поля скоростей (11) из пары $(\mathbf{V}, p)$ — решения системы уравнений (1) — вполне определяется свободным членом f_φ^0 из разложения второй компоненты $f_\varphi := (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ вектор-функции $\mathbf{f} = f_R\mathbf{e}_R + f_\varphi\mathbf{e}_\varphi + f_3\mathbf{e}_3$ в тригонометрический ряд по переменной φ

$$f_\varphi(R, \varphi, x_3, t) = f_\varphi^0(R, x_3, t) + \sum_{k\neq 0} f_\varphi^{[k]}(R, x_3, t)\mathbf{e}^{ik\varphi} \tag{17}$$

и зависит от φ только через $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$; $\partial\mathbf{V}/\partial t = f_\varphi^0(R, x_3, t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$.

Выпишем второе уравнение из (14) в развернутой форме, используя определенный после (14) явный вид $\mathbf{b}(R, \varphi, x_3, t)$ и разрешив его относительно $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_\varphi f_\varphi + \mathbf{e}_R f_R + \mathbf{e}_3 f_{x_3} = \mathbf{e}_\varphi\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \mathbf{e}_R\frac{\sigma^2}{r_c + R} + \mathbf{e}_\varphi\frac{1}{r_c + R}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_R\frac{\partial\Phi}{\partial R} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \tag{18}$$

где $f_\varphi,\ f_R,\ f_{x_3}$ — компоненты $\mathbf{f}$ относительно базиса $\mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_R,\ \mathbf{e}_3$. Эквивалентную скалярную форму этого соотношения между $\mathbf{f}, \sigma$ и Φ удобно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(R, \varphi, x_3, t)}{\partial\varphi} = \Big(f_\varphi(R, \varphi, x_3, t) - \dfrac{\partial\sigma(R, x_3, t)}{\partial t}\Big)(r_c + R), \\ \dfrac{\partial\Phi(R, \varphi, x_3, t)}{\partial R} = f_R(R, \varphi, x_3, t) + \dfrac{\sigma^2(R, x_3, t)}{r_c + R}, \\ \dfrac{\partial\Phi(R, \varphi, x_3, t)}{\partial x_3} = f_3(R, \varphi, x_3, t). \end{cases} \tag{19}$$

Из проведенного анализа следует, что если для той же функции Φ, что в (15), выполняется при некоторой функции $\sigma(R, x_3, t)$ соотношение (18) (или, что то же самое, соотношения (19)), то вместе с (15) это эквивалентно тому, что второе уравнение системы (14) превращается в справедливое равенство с $\boldsymbol{\nabla}\Phi = 1/\rho\, \boldsymbol{\nabla} p$. Таким образом, справедливость равенств (15), (18), (19) равносильна тому, что соответствующая пара функций $\sigma(R, x_3, t),\ p(R, \varphi, x_3, t)$ удовлетворяет уравнению (13), а пара $\mathbf{V}$ (11) и p (15) удовлетворяет системе (1) и (см. лемму) ограничению (8).

Соотношения (18), (19) связывают между собой функции $\mathbf{f}, \sigma$ и Φ, фактически накладывая в неявной форме ограничения на поле сил $\mathbf{f}$ в D^4, при которых система уравнений (1) в классе векторных полей (8) разрешима. Проще всего удовлетворить этим соотношениям, считая их определением класса векторных полей $\mathbf{f}(R, \varphi, x_3, t)$ через явно задаваемые гладкие функции $\Phi(R, \varphi, x_3, t)$ и $\sigma(R, x_3, t)$. Как итог проведенного анализа сформулируем следующее утверждение.

Теорема. *Система уравнений* (1) *разрешима в* $D^4 = D \times \mathbb{R}_+$ *в классе векторных полей* (8) *тогда и только тогда, когда поле* $\mathbf{f}(R, \varphi, x_3, t)$ *имеет в* D^4 *вид* (18) *с гладкой по* R, φ, x_3, 2π*-периодической по* φ *функцией* $\Phi(R, \varphi, x_3, t)$ *и гладкой по* t*, непрерывной по* R, x_3 *и не зависящей от* φ *функцией* σ*. При этом функции* σ *и* Φ *определяют всякое решение* $(\mathbf{V}, p)$ *по формулам*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}(R, \varphi, x_3), t) = \sigma(R, x_3, t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), \quad p(R, \varphi, x_3, t) = \rho\Phi(R, \varphi, x_3, t) + P(t)$$

с точностью до произвольной непрерывной функции $P(t)$ *параметра* t.

Отметим, что интегрирование первого соотношения (19) по периоду $\varphi \in [0, 2\pi)$ снова порождает (16) и, следовательно, равенство

$$\sigma(R, x_3, t) = \int\limits_0^t f_\varphi^0(R, x_3, \tau)\, d\tau + \sigma(R, x_3) \tag{20}$$

с произвольной непрерывной в D добавкой $\sigma(R, x_3)$. Поэтому функцию $\sigma(R, x_3, t)$ можно заменить в теореме на $\sigma(R, x_3)$ с помощью (20), исключив ее саму из условий, определяющих разрешимость системы дифференциальных уравнений (1) в D^4 в классе векторных полей $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$, линии которых совпадают с окружностями $\mathcal{L}_{R,x_3}$.

Вычитая из $f_\varphi(R, \varphi, x_3, t)$ функцию $f_\varphi^0(R, x_3, t)$ и обозначая разность через $f_\varphi^\perp(R, \varphi, x_3, t)$, которая ортогональна по φ в $L^2(0, 2\pi)$ всем не зависящим от φ функциям (совпадает с рядом в правой части (17) для гладких по φ функций $f_\varphi(R, \varphi, x_3, t)$), можем переписать первое соотношение в (19) как

$$\frac{\partial\Phi(R, \varphi, x_3, t)}{\partial\varphi} = (r_c + R) f_\varphi^\perp(R, \varphi, x_3, t). \tag{21}$$

Таким образом, зависимость Φ от φ также определяется компонентой f_φ:

$$\frac{1}{r_c + R}\Phi(R, \varphi, x_3, t) = F_\varphi^\perp(R, \varphi, x_3, t) + B(R, x_3, t), \tag{22}$$

где B — произвольная гладкая в D^4 функция, а $F_\varphi^\perp$ — периодическая первообразная по φ функции $f_\varphi^\perp$. В силу (17)

$$F_\varphi^\perp(R, \varphi, x_3, t) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} f_\varphi^{[k]}(R, x_3, t)(e^{ik\varphi} - 1),$$

и этот ряд уже сходится всюду в D^4.

Следовательно, компоненты f_φ, f_R, f_{x_3} векторного поля $\mathbf{f}(R, \varphi, x_3, t)$ в теореме можно определять из условий

$$f_\varphi(R, \varphi, x_3, t) = f_\varphi^0(R, x_3, t) + f_\varphi^\perp(R, \varphi, x_3, t), \tag{23}$$

$$\begin{cases} f_R(R, \varphi, x_3, t) = \dfrac{\partial\Phi(R, \varphi, x_3, t)}{\partial R} - \dfrac{1}{r_c + R}\left(\displaystyle\int\limits_0^t f_\varphi^0(R, x_3, \tau)\, d\tau + \sigma(R, x_3)\right)^2, \\ f_3(R, \varphi, x_3, t) = \dfrac{\partial\Phi(R, \varphi, x_3, t)}{\partial x_3}, \end{cases} \tag{24}$$

считая $\sigma(R, x_3)$ произвольной непрерывной в круге $R^2 + x_3^2 < r_0^2$ функцией, а $(f_0(R, x_3, t)$, $\Phi(R, \varphi, x_3, t))$ — гладкими в D^4 функциями.

Из этих рассуждений, формул (21)–(24) и теоремы вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть компонента* $f_\varphi(R, \varphi, x_3, t) = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ *векторного поля* $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ *в* D^4 *представлена в виде* (23), *где* $f_\varphi^0(R, x_3, t) = 1/(2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} f_\varphi(R, \varphi, x_3, t)\, d\varphi$ *и* $f_\varphi^\perp(R, \varphi, x_3, t) =$

$f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)-f_\varphi^0(R,x_3,t)$ *— непрерывные по* t *и гладкие по пространственным переменным в торе* D *функции. Тогда система уравнений* (1) *разрешима в* D^4 *в классе векторных полей* $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$ *с окружностями* $\mathcal{L}_{R,x_3}\subset D$ *в качестве их линий тогда и только тогда, когда компоненты* $f_R=(\mathbf{f},\mathbf{e}_R(\varphi))$ *и* $f_3=(\mathbf{f},\mathbf{e}_3)$ *поля* $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ *связаны с его компонентой* $f_\varphi(R,\varphi,x_3,t)$ *соотношениями* (24), *где функция* $\Phi(R,\varphi,x_3,t)$ *определяется через компоненту* f_φ *с помощью формул* (21), (22), *а* $B(R,x_3,t)$ *и* $\sigma(R,x_3)$, *не зависящие от* φ *— гладкие в* D^4 *функции с*

$$F_\varphi^\perp(R,\varphi,x_3,t)=\int\limits_0^\varphi f_\varphi^\perp(R,\widetilde{\varphi},x_3,t)\,d\widetilde{\varphi}.$$

При выполнении этих условий компоненты решения $(\mathbf{V},p)$ *системы* (1) *выражаются формулами* (*см.* (15))

$$\mathbf{V}(R,\varphi,x_3,t)=\left(\int\limits_0^t f_\varphi^0(R,x_3,\tau)\,d\tau+\sigma(R,x_3)\right)\mathbf{e}_\varphi(\varphi),\quad p(R,\varphi,x_3,t)=\rho\Phi(R,\varphi,x_3,t)+\mathcal{P}(t).$$

Интересно отметить, что скалярная величина $(\mathbf{V}(\mathbf{X},t),\mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ векторного поля $\mathbf{V}$ вполне определяется компонентой f_φ поля $\mathbf{f}$, точнее, ее составляющей f_φ^0, а скалярное поле p — составляющей $f_\varphi^\perp$ компоненты f_φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 60–70.
2. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.
3. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 123–138.
4. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 48–63.
5. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R3 // Изв. Сарат. ун-та. Сер. “Математика. Механика. Информатика”. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 1. С. 11–23.

Поступила 05.12.2014

Верещагин Владимир Пантелеевич

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.452

О РАСХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ В КЛАССАХ $\varphi(L)$, БЛИЗКИХ К L [1]

М. Р. Габдуллин

В работе показана неулучшаемость теоремы о достаточных условиях сходимости тригонометрического ряда Фурье функции в классах $\varphi(L)$ в случае, когда класс $\varphi(L)$ “близок” к L.

Ключевые слова: тригонометрические ряды Фурье, классы $\varphi(L)$.

M. R. Gabdullin. On the divergence of trigonometric Fourier series in classes $\varphi(L)$ contained in L.

We show the unimprovability of a theorem on sufficient convergence conditions for the trigonometric Fourier series of a function in classes $\varphi(L)$ in the case when the class $\varphi(L)$ is “close” to L.

Keywords: trigonometric Fourier series, classes $\varphi(L)$.

Пусть f — 2π-периодическая суммируемая на $[0,2\pi)$ функция. Напомним, что ее коэффициенты Фурье и частные суммы Фурье определяются следующим образом:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt,\quad S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Для неубывающей функции $\varphi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=\infty$, через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех 2π-периодических измеримых на $[0,2\pi)$ функций, для которых $\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(|f(t)|)\,dt<\infty$. Заметим, что в случае $\varphi(t)=t^p,\ p>0$, мы имеем $\varphi(L)=L^p$.

В теории тригонометрических рядов значительный интерес представляет вопрос о сходимости ряда Фурье функции к самой функции в различных функциональных пространствах. Хорошо известны классические результаты, касающиеся сходимости в пространствах L^p. Так, М. Рисс (см., например, [1, гл. VIII, § 20, теорема 2]) показал, что если $p>1$ и $f\in L^p$, то

$$\int\limits_0^{2\pi}|S_n(f,t)-f(t)|^p\,dt\to 0,\quad n\to\infty;$$

А. Н. Колмогоровым [2] было доказано, что данное соотношение имеет место при всех $0<p<1$ для всякой суммируемой функции f. Далее, известно [3, т. 1, гл. VII, теорема 6.9], что если $f\in L\log^+L$, то $\displaystyle\int_0^{2\pi}|S_n(f,t)-f(t)|\,dt\to 0,\ n\to\infty.$

Следующая теорема, вытекающая из [3, т. 2, гл. XII, теорема 4.34] и свойств сопряженной функции, позволяет обобщить перечисленные выше результаты.

Теорема 1. *Пусть функция* $\chi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *удовлетворяет условиям: для некоторого* $s>0$ *функция* $\chi(u)/u^s$ *не убывает;* $\chi(0)=0$; $\chi(u)\to\infty$ *при* $u\to\infty$; $\chi(2u)=O(\chi(u))$, $u\to\infty$; $\varphi(u)=u\displaystyle\int_1^u\chi(t)t^{-2}\,dt$ *при* $u\geq1$; $\varphi(u)=0$ *при* $0\leq u\leq 1$. *Тогда для любой функции* $f\in\varphi(L)$ *справедливо* $\displaystyle\int_0^{2\pi}\chi(|S_n(f,t)-f(t)|)\,dt\to 0$, $n\to\infty$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

В самом деле, при $\chi(u) = u^p,\ p \in (0,1)\bigcup(1,\infty)$ мы получаем вышеупомянутые результаты Рисса и Колмогорова, так как в этом случае $\varphi(u) \sim \chi(u) = u^p$, $u \to \infty$; при $\chi(u) = u$ имеем $\varphi(u) \sim u \log u$, $u \to \infty$, что также согласуется с изложенным выше.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что из неубывания функции $\chi(u)/u^s$ следует неубывание функции $\chi(u)$. Далее, так как $\chi(2u) = O(\chi(u))$, то и $\varphi(2u) \le C\varphi(u)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\chi(2u) \le C\chi(u)$ и $\varphi(2u) \le C\varphi(u)$. Ввиду неубывания функции $\chi(t)/t^s$ при любых $\alpha_n \ge 1$ имеем

$$(\alpha_n)^s \int\limits_0^{2\pi} \chi(|S_n(f,t) - f(t)|)\,dt \le \int\limits_0^{2\pi} \chi(|S_n(\alpha_n f,t) - \alpha_n f(t)|)\,dt.$$

Известно (см., например, [4, следствие 3.2]), что для любой функции $f \in \varphi(L)$ найдется последовательность тригонометрических полиномов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ степени не выше n таких, что $\int_0^{2\pi} \varphi(|f(t) - T_n(t)|)\,dt \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\chi(|S_n(\alpha_n f,t) - \alpha_n f(t)|) = \chi(|S_n(\alpha_n f - \alpha_n T_n, t) - (\alpha_n f(t) - \alpha_n T_n(t))|)$$
$$\le \chi(|S_n(2\alpha_n f - 2\alpha_n T_n, t)|) + \chi(|2\alpha_n f(t) - 2\alpha_n T_n(t)|).$$

Используя теорему [3, гл. XII, теорема 4.34], стандартными методами легко показать, что при всех $g \in \varphi(L)$ справедливо $\int_0^{2\pi} \chi(|S_n(g,t)|)dt \le K \int_0^{2\pi} \varphi(|g(t)|)dt + K$. Кроме того, при $u \ge 2$ имеем

$$\varphi(u) \ge u \int\limits_{u/2}^{u} \frac{\chi(t)}{t^2}\,dt \ge u\chi(u/2) \int\limits_{u/2}^{u} \frac{dt}{t^2} \ge \chi(u/2) \ge C^{-1}\chi(u).$$

Значит,

$$(\alpha_n)^s \int\limits_0^{2\pi} \chi(|S_n(f,t) - f(t)|)\,dt \le (K + C) \int\limits_0^{2\pi} \varphi(2\alpha_n|f(t) - T_n(t)|)\,dt + K + 2\pi\chi(2).$$

Далее, $\varphi(kx) \le \varphi(2^{[\log_2 k]+1}x) \le C^{[\log_2 k]+1}\varphi(x) \le Ck^a\varphi(x)$, где $a = \log_2 C$. Поэтому

$$(\alpha_n)^s \int\limits_0^{2\pi} \chi(|S_n(f,t) - f(t)|)\,dt \le 2^a C(K + C)(\alpha_n)^a \int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f(t) - T_n(t)|)\,dt + O(1).$$

Положим $\alpha_n = \left(\int_0^{2\pi} \varphi(|f(t) - T_n(t)|)\,dt\right)^{-1/a}$. Тогда $\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$, и мы получаем

$$(\alpha_n)^s \int\limits_0^{2\pi} \chi(|S_n(f,t) - f(t)|)\,dt \le O(1).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

В случае, когда функция $\chi(t)$ на бесконечности растет медленнее, чем t^p при всех $p > 1$, удалось показать неулучшаемость теоремы 1 в следующем смысле.

Теорема 2. *Пусть функция* $\tilde{\varphi}\colon\ [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ *не убывает,* $\tilde{\varphi}(u) \to \infty$ *при* $u \to \infty$, $g(u) := \int_1^u \tilde{\varphi}(t)t^{-2}\,dt$, $\varphi_1(u) := ug(u)$. *Пусть при этом* $g(u) \to \infty$, *если* $u \to \infty$, *и* $g(u^2) =$

$O(g(u))$. *Тогда для любой функции* $\varphi : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, *связанной с* $\tilde{\varphi}$ *соотношением* $\tilde{\varphi}(u) = o(\varphi(u))$, $u \to \infty$, *найдется функция* $F \in \varphi_1(L)$ *такая, что*

$$\sup_n \int\limits_0^{2\pi} \varphi(|S_n(F,t)|)\, dt = \infty.$$

Доказательство. Заметим, что для любой функции $\psi_1\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\psi_1(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, существует неубывающая функция $\psi_2\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\psi_2(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, такая, что $\psi_2(u) \leqslant \psi_1(u)$ при всех $u \geqslant 0$. Поэтому достаточно доказать теорему в случае, когда функция $\psi(u) := \varphi(u)/\tilde{\varphi}(u)$ не убывает.

Таким образом, в дальнейшем мы считаем, что функция ψ (а следовательно, и функция φ) не убывает. Аналогично, можно считать, что $\psi(u) = o(\sqrt{u})$, $u \to \infty$.

Мы будем пользоваться тем, что при всех $a, b, c \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\varphi(|a+b+c|) \geqslant \varphi\Big(\frac{|a|}{2}\Big) - \varphi(2|b|) - \varphi(2|c|) \tag{1}$$

и

$$\varphi(|a|) \geqslant \varphi\Big(\frac{|b|}{2}\Big) - \varphi(|a-b|), \tag{2}$$

которые легко следуют из неубывания функции φ и неравенства треугольника для модуля. Действительно, проверим первое неравенство. Имеем

$$\varphi(|u+v|) \leqslant \varphi(2\max\{|u|, |v|\}) = \max\{\varphi(|2u|), \varphi(|2v|)\} \leqslant \varphi(|2u|) + \varphi(|2v|),$$

поэтому

$$\varphi\Big(\frac{|a|}{2}\Big) \leqslant \varphi\Big(\frac{|a+b+c|}{2} + \frac{|b+c|}{2}\Big) \leqslant \varphi(|a+b+c|) + \varphi(|b+c|) \leqslant \varphi(|a+b+c|) + \varphi(|2b|) + \varphi(|2c|).$$

Аналогично проверяется второе неравенство.

Выберем на $[0, 2\pi)$ последовательность попарно не пересекающихся отрезков $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|\Delta_n| = 1/n^2$. Определим 2π-периодические функции $f_n(x)$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2, & x \in \Delta_n; \\ 0, & x \in [0, 2\pi) \setminus \Delta_n. \end{cases}$$

Согласно условиям теоремы существует константа $C > 0$ такая, что при всех $u > 0$ справедливо неравенство $g(u^2) \leqslant Cg(u)$. Заметим, что отсюда при любом $\varepsilon > 0$ вытекает соотношение

$$g(u) = o(u^{\varepsilon}), \quad u \to \infty. \tag{3}$$

В самом деле, при $u \geqslant 1$ имеем

$$g(u) \leqslant g\big(2^{[\log_2 u]+1}\big) \leqslant C^{[\log_2 u]} g(2) \leqslant 2^{\log_2 C \log_2 u} g(2) = u^{\log_2 C} g(2),$$

и при достаточно большом n получим $g(u) \leqslant C^n g(u^{\frac{1}{2^n}}) \leqslant g(2) C^n u^{\frac{\log_2 C}{2^n}} = O(u^{\varepsilon})$.

В свою очередь отсюда следует, что при всех $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение $\tilde{\varphi}(u) = o(u^{1+\varepsilon})$, $u \to \infty$. Действительно,

$$\frac{g(u)}{u^{\varepsilon}} = \frac{\displaystyle\int_1^u \tilde{\varphi}(t) t^{-2}\, dt}{u^{\varepsilon}} \geqslant \frac{\displaystyle\int_{\sqrt{u}}^u \tilde{\varphi}(t) t^{-2}\, dt}{u^{\varepsilon}} \geqslant \frac{\tilde{\varphi}(\sqrt{u})(1 - u^{-1/2})}{u^{1/2+\varepsilon}},$$

и так как левая часть неравенства стремится к нулю при $u \to \infty$, то $\tilde{\varphi}(u^{1/2}) = o(u^{1/2+\varepsilon})$, $u \to \infty$, при всех $\varepsilon > 0$, что эквивалентно приведенному выше соотношению. Таким образом, мы можем считать, что $\varphi(u) = \tilde{\varphi}(u)\psi(u) = o(u^2)$, $u \to \infty$, и существует $u_0 > 0$ такое, что $\varphi(u) \leqslant u^2$ при всех $u \geqslant u_0$.

Выберем бесконечно большие последовательности α_k и β_k так, чтобы $g(\beta_k) = o(g(k))$, $\alpha_k = o(\psi(\beta_k))$ и $\alpha_k \leqslant \sqrt{k}$.

Теперь выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ следующим образом: n_1 такое, что $\alpha_{n_1} \geqslant 2$ и $g(n_1) \geqslant 1/2$, а далее, если $n_1, \dots, n_{k-1}$ уже выбраны, то n_k выбираем настолько большим, чтобы были выполнены неравенства

$$\alpha_{n_k} \geqslant 2^k, \tag{4}$$

$$\alpha_{n_k} g(n_k) \geqslant 2\alpha_{n_{k-1}} g(n_{k-1}), \tag{5}$$

$$\alpha_{n_k} g(n_k) \geqslant n_{k-1}, \tag{6}$$

$$C_3 \frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}} \geqslant 2\Big(\sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|f_{n_j}\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big)^2, \tag{7}$$

где $C_3 > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от функции g.

Определим функцию F. Положим $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{f_{n_k}(x)}{\alpha_{n_k} g(n_k)}$. Прежде всего проверим, что $F \in \varphi_1(L)$. Это следует из (4):

$$\int_0^{2\pi} \varphi_1(F(x))\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_{n_k}} \varphi_1\Big(\frac{n_k^2}{\alpha_{n_k} g(n_k)}\Big)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \varphi_1\Big(\frac{n_k^2}{\alpha_{n_k} g(n_k)}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k^2} \frac{n_k^2}{\alpha_{n_k} g(n_k)} g(n_k^2) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{\alpha_{n_k}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{2^k} < \infty.$$

Теперь покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(|S_{n_k}(F,t)|)\, dt = \infty$.

Так как

$$S_{n_k}(F,x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\alpha_{n_j} g(n_j)} S_{n_k}(f_{n_j}, x) + \frac{1}{\alpha_{n_k} g(n_k)} S_{n_k}(f_{n_k}, x) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n_j} g(n_j)} S_{n_k}(f_{n_j}, x)\,,$$

то в силу неравенства (1) имеем

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|S_{n_k}(F,t)|)\, dt \geqslant I_1 - I_2 - I_3, \tag{8}$$

где

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \varphi\Big(\frac{1}{2\alpha_{n_k} g(n_k)}\, |S_{n_k}(f_{n_k}, t)|\Big)\, dt, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \varphi\Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\, |S_{n_k}(f_{n_j}, t)|\Big)\, dt,$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \varphi\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\, |S_{n_k}(f_{n_j}, t)|\Big)\, dt.$$

Оценим I_2. Ввиду неравенства $I_2 \leqslant 2\pi\varphi(u_0) + 4\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_{n_k}(f_{n_j}, x)}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big|^2 dx$ и неравенства $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$ для неотрицательных a, b имеем

$$\sqrt{I_2} \leqslant \sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\Big\| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{S_{n_k}(f_{n_j})}{\alpha_{n_j} g(n_j)} \Big\|_2$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|S_{n_k}(f_{n_j})\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)} \leqslant \sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|f_{n_j}\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)},$$

откуда в силу (7)

$$I_2 \leqslant \Big(\sqrt{2\pi\varphi(u_0)} + 2\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\|f_{n_j}\|_2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big)^2 \leqslant \frac{C_3}{2} \frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}}. \tag{9}$$

Оценим I_3. Так как $|D_{n_k}(t)| \leqslant n_k + 1/2$, то $|S_{n_k}(f_{n_j}, x)| \leqslant 2n_k + 1$. Учитывая (5) и (6), получаем

$$I_3 \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\Big(\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{n_j} g(n_j)}(2n_k+1)\Big)\,dx \leqslant 2\pi\varphi\Big(6\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{n_k}{\alpha_{n_j} g(n_j)}\Big)$$

$$\leqslant 2\pi\varphi\Big(6\sum_{l=0}^{\infty} \frac{n_k}{2^l \alpha_{n_{k+1}} g(n_{k+1})}\Big) \leqslant 2\pi\varphi(12). \tag{10}$$

Наконец, оценим I_1. Пусть d_n — середина отрезка Δ_n. Заметим, что при $x \in [0, 2\pi)$ справедливо

$$\Big|S_n(f_n, x) - \frac{1}{\pi} D_n(x - d_n)\Big| = \frac{1}{\pi}\Big|\int_0^{2\pi} D_n(x-t) f_n(t)\,dt - D_n(x - d_n)\Big|$$

$$= \frac{n^2}{\pi}\Big|\int_{\Delta_n} (D_n(x-t) - D_n(x-d_n))\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{\pi} \max_{t\in\Delta_n} |D_n(x-t) - D_n(x-d_n)|$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \max_{t\in\Delta_n} |D_n'(t)||t - d_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Отсюда в силу неравенства (2) находим

$$I_1 \geqslant \int_0^{2\pi} \varphi\Big(\frac{1}{4\pi\alpha_{n_k} g(n_k)}\,|D_{n_k}(x)|\Big)\,dx + O(1).$$

Далее, известно, что равномерно по $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant x \leqslant \pi$ справедливо соотношение

$$D_n(x) = \frac{\sin nx}{x} + O(1).$$

Еще раз пользуясь неравенством (2), получим

$$I_1 \geqslant \int_0^{\pi} \varphi\Big(\frac{1}{8\pi\alpha_{n_k} g(n_k)}\,\Big|\frac{\sin n_k x}{x}\Big|\Big)\,dx + O(1).$$

Обозначим $A_k = \{t \in [0, \pi]\colon |\sin n_k t| \geqslant 1/2\}$. Тогда

$$I_1 \geqslant \int_{A_k} \varphi\Big(\frac{1}{8\pi\alpha_{n_k} g(n_k)}\,\Big|\frac{\sin n_k x}{x}\Big|\Big)\,dx + O(1)$$

$$\geqslant \sum_{l=0}^{n_k-1} \int\limits_{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{\pi}{6n_k}}^{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{5\pi}{6n_k}} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx + O(1) \geqslant \frac{2}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{6n_k}}^{\pi} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx + O(1),$$

так как в силу неубывания функции φ справедливо

$$\int\limits_{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{\pi}{6n_k}}^{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{5\pi}{6n_k}} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx \geqslant 2\int\limits_{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{5\pi}{6n_k}}^{\frac{\pi l}{n_k}+\frac{7\pi}{6n_k}} \varphi\Big(\frac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)}\,\frac{1}{x}\Big)\,dx.$$

Делая замену $x = \dfrac{1}{16\pi\alpha_{n_k}g(n_k)u}$, получим

$$I_1 \geqslant \frac{C_1}{\alpha_{n_k}g(n_k)} \int\limits_{1}^{C_2\frac{n_k}{\alpha_{n_k}g(n_k)}} \tilde{\varphi}(u)\psi(u)u^{-2}\,du + O(1).$$

В силу условий $\alpha_{n_k} \leqslant \sqrt{n_k}$ и $g(n_k) = o(n_k^{1/4})$ (соотношение (3) при $\varepsilon = 1/4$), а также определения функции $g(u)$ при достаточно больших k имеем

$$I_1 \geqslant \frac{C_1}{\alpha_{n_k}g(n_k)} \int\limits_{\beta_{n_k}}^{C_2 n_k^{1/4}} \tilde{\varphi}(u)\psi(u)u^{-2}\,du + O(1) \geqslant \frac{C_1\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}g(n_k)}\big(g(C_2n_k^{1/4}) - g(\beta_{n_k})\big) + O(1)$$

$$\geqslant \frac{C_1}{2}\,\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}}\,\frac{g(C_2n_k^{1/4})}{g(n_k)} + O(1) \geqslant C_3\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}} + O(1). \tag{11}$$

Наконец, собирая вместе полученные оценки (8)–(11) при достаточно больших k, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|S_{n_k}(F,t)|)\,dt \geqslant \frac{C_3}{2}\,\frac{\psi(\beta_{n_k})}{\alpha_{n_k}} + O(1).$$

Так как $\alpha_n = o(\psi(\beta_n))$, $n \to \infty$, то отсюда вытекает утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 937 с.
2. **Kolmogoroff A.** Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. Math. 1925. Vol. 7. P. 24–29.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. М.: Мир. 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
4. **Ульянов П.Л.** Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 2. С. 3–52.

Габдуллин Михаил Рашидович
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Gabdullin.Mikhail@ya.ru

Поступила 22.05.2015

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА БОМАНА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАНКЛЯ[1]

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов

Приводится решение экстремальной задачи Бомана для неотрицательных функций с носителем преобразования Данкля в евклидовом шаре или параллелепипеде. При доказательстве используются инвариантность задачи относительно ортогональных преобразований, квадратурные формулы по нулям функций Бесселя.

Система корней, группа отражений, вес Данкля, преобразование Данкля, экстремальная задача Бомана, квадратурная формула Бесселя.

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov. Bohman extremal problem for the Dunkl transform.

We give a solution of the Bohman extremal problem for nonnegative functions with the support of the Dunkl transform in a Euclidean ball or parallelepiped. The proof uses the invariance of the problem under orthogonal transforms and quadrature formulas with zeros of Bessel functions.

Keywords: root system, reflection group, Dunkl weight, Dunkl transform, Bohman extremal problem, Bessel quadrature formula.

Введение

Работа посвящена решению экстремальной задачи Бомана для преобразования Данкля.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$,

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)} \tag{0.1}$$

— обобщенный степенной вес, или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(\alpha)\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R,

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\, dx$$

— интеграл Макдональда — Мета — Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\, dx$, $L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, d\mu_k(x),$$

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_d = (0, \ldots, 0, 1)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$, $\sigma_\alpha \in O(d)$ — отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$,

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)(\alpha, e_j)\, \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{(\alpha, x)}, \quad j = 1, \ldots, d,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00045), Министерства образования и науки РФ (госзадания № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К) и Фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^{d} D_j^2 f(x)$ — лапласиан Данкля, $e_k(x,y) = E_k(x,iy)$ — обобщенная экспонента (ядро Данкля), являющаяся решением системы уравнений

$$D_j f(x) = iy_j f(x), \quad j = 1,\dots,d, \quad f(0) = 1.$$

Для $e_k(x,y)$ многие свойства аналогичны свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$, в частности

$$-\Delta_k e_k(x,y) = |y|^2 e_k(x,y). \tag{0.2}$$

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью преобразования Данкля

$$F_k(f)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

Основные факты из теории Данкля можно найти в [1]. В частности, обратное преобразование Данкля определяется как $F_k^{-1}(f)(x) = F_k(f)(-x)$. В безвесовом случае ($k(\alpha) \equiv 0$) имеем классическое преобразование Фурье с коэффициентом $(2\pi)^{-d/2}$, для которого будем использовать обозначение $F(f)$.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^d$ — выпуклое центрально-симметричное компактное тело с центром в нуле, инвариантное относительно группы отражений $G(R)$,

$$|x|_V = \min\{\lambda > 0\colon x \in \lambda V\}$$

— норма в $\mathbb{R}^d$, порожденная телом V,

$$V^* = \Big\{x \in \mathbb{R}^d\colon \max_{y\in V} |(x,y)| \le 1\Big\}$$

— поляра V, $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f, $\mathcal{E}_k(\tau V)$ — класс неотрицательных непрерывных функций f, $\tau > 0$, для которых

$$|x|^2 f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k), \quad \operatorname{supp} F_k(f) \subset \tau V, \quad F_k(f)(0) = 1.$$

Если $f \in \mathcal{E}_k(\tau V)$, то для всех $z \in \mathbb{C}^d$ справедливо равенство

$$f(z) = \int\limits_{\tau V} F_k(f)(y) e_k(z,y)\,d\mu_k(y),$$

поэтому $f(z)$ — целая функция, для которой справедлива экспоненциальная оценка

$$|f(z)| \le c_f e^{\tau|\operatorname{Im} z|_{V^*}}, \quad c_f > 0, \quad \operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1,\dots,\operatorname{Im} z_d). \tag{0.3}$$

Обратное утверждение, называемое теоремой Пэли — Винера, доказано для случаев, когда V — евклидов шар или параллелепипед [2].

Задача Бомана для преобразования Данкля состоит в вычислении величины

$$\mathrm{B}_k(\tau V) = \inf\Big\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_k(x)\colon f \in \mathcal{E}_k(\tau V)\Big\}. \tag{0.4}$$

В безвесовом случае будем писать $\mathrm{B}(\tau V)$.

Задача Бомана допускает вероятностную интерпретацию. Функцию $f \in \mathcal{E}_k(\tau V)$ можно рассматривать как плотность распределения случайного вектора $X = (X_1,\dots,X_d)$, для которого $\varphi(x) = F_k(f)(x)$ — характеристическая функция, так как $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(x)$ — непрерывная и положительно определенная функция. Действительно, используя интегральное представление обобщенной экспоненты [3]

$$e_k(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,y)}\,d\mu_k^x(\xi),$$

где μ_k^x — вероятностная борелевская мера, носитель которой лежит в выпуклой оболочке $\operatorname{co}\{gx\colon g\in G(R)\}$ орбиты x относительно группы $G(R)$, для произвольных наборов $\{x_m\}_{m=1}^N\subset\mathbb{R}^d$, $\{\alpha_m\}_{m=1}^N\subset\mathbb{C}$ получим

$$\sum_{m,n=1}^N\varphi(x_m-x_n)\alpha_m\overline{\alpha_n}=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\sum_{m,n=1}^N\overline{e_k(x,x_m-x_n)}\alpha_m\overline{\alpha_n}\,d\mu_k(x)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\sum_{m,n=1}^N e^{-i(\xi,x_m-x_n)}\alpha_m\overline{\alpha_n}\,d\mu_k^x(\xi)\,d\mu_k(x)$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\Bigl|\sum_{m=1}^N\alpha_m e^{-i(\xi,x_m)}\Bigr|^2\,d\mu_k^x(\xi)\,d\mu_k(x)\geq 0.$$

Согласно (0.2)

$$E|X|^2=\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,d\mu_k(x)=-\Delta_k\varphi(0)$$

— второй момент распределения. Таким образом, в задаче Бомана необходимо в классе $\mathcal{E}_k(\tau V)$ найти плотность распределения с минимальным вторым моментом.

Заметим, что $\operatorname{supp}F_k(f)\subset\tau V$ тогда и только тогда, когда для $g(x)=f(\tau x)$, $\operatorname{supp}F_k(g)\subset V$. Следовательно, делая замену переменной, используя однородность функций $|x|^2$, $v_k(x)$ и полагая $|k|=\sum_{\alpha\in R_+}k(\alpha)$, получим

$$\mathrm{B}_k(\tau V)=\inf\Biggl\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,d\mu_k(x)\colon\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\,d\mu_k(x)=1\Biggr\}$$

$$=\inf\Biggl\{\frac{1}{\tau^{2+d-1+|k|}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2g(x)\,d\mu_k(x)\colon\frac{1}{\tau^{d-1+|k|}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}g(x)\,d\mu_k(x)=1\Biggr\}$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\inf\Biggl\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2g(x)\,d\mu_k(x)\colon\int\limits_{\mathbb{R}^d}g(x)\,d\mu_k(x)=1\Biggr\}=\frac{1}{\tau^2}\,\mathrm{B}_k(V).$$

Итак, $\mathrm{B}_k(V)=\tau^2\mathrm{B}_k(\tau V)$, поэтому в дальнейшем положим $\tau=1$.

В одномерном случае задачу (0.4) поставил и решил Х. Боман [4]. Он доказал, что

$$\mathrm{B}([-1,1])=-(F(f_1))''(0)=\pi^2,$$

где

$$f_1(x)=(2/\pi)^{5/2}\left(\frac{\cos(x/2)}{1-(x/\pi)^2}\right)^2,\quad F(f_1)(y)=\begin{cases}(1-|y|)\cos\pi y+\pi^{-1}\sin\pi|y|, & |y|\leq 1,\\ 0, & |y|\geq 1.\end{cases}$$

Функция $F(f_1)$ является генератором известного положительного метода приближения Бомана — Коровкина (см. [5]).

Пусть $B^d=\{x\in\mathbb{R}^d\colon|x|\leq 1\}$ — евклидов шар, $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\lambda(t)$ — функция Бесселя порядка $\lambda\geq-1/2$,

$$j_\lambda(t)=2^\lambda\Gamma(\lambda+1)\,\frac{J_\lambda(t)}{t^\lambda}=\prod_{s=-\infty}^{\infty}\Bigl(1-\frac{t}{q_{\lambda,s}}\Bigr)$$

— нормированная функция Бесселя, $0 < q_{\lambda,1} < q_{\lambda,2} < \ldots$ — положительные нули $J_\lambda(t)$, $q_{\lambda,1-s} = -q_{\lambda,s}$ — отрицательные нули, $s \in \mathbb{N}$,

$$q_\lambda = q_{\lambda,1} = \min_{s\in\mathbb{Z}} |q_{\lambda,s}|. \tag{0.5}$$

При $d = 1$ имеем $j_{-1/2}(t) = \cos t$ и $q_{-1/2} = \pi/2$.

В многомерном случае задачу Бомана (0.4) решили В. Эм, Т. Гнейтинг и Д. Ричардс [6]. Они доказали, что

$$\mathrm{B}(B^d) = -\Delta F(f_d)(0) = 4q_{d/2-1}^2,$$

$$f_d(x) = \frac{2^{2-3d/2}}{\Gamma(d/2)q_{d/2-1}^2}\left(\frac{j_{d/2-1}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{d/2-1}))^2}\right)^2.$$

В.А. Юдин [7] еще до работы [6] предложил общий метод построения функций из класса $\mathcal{E}(V)$. Следуя ему, один из авторов данной статьи в [8] выписал функции f_d, $F(f_d)$ и определил многомерный радиальный аналог линейного положительного метода приближения Бомана—Коровкина.

Пусть $b_\lambda^{-1} = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $d\nu_\lambda(t) = b_\lambda t^{2\lambda+1}\,dt$, $t \in \mathbb{R}_+$, $L_1(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}_+$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,\lambda} = \int_0^\infty |f(t)|\,d\nu_\lambda(t),$$

$$H_\lambda f(s) = \int_0^\infty f(t) j_\lambda(st)\,d\nu_\lambda(t)$$

— преобразование Ганкеля (см. [9, гл. 1]),

$$D_\lambda = \frac{1}{t^{2\lambda+1}}\frac{d}{dt}\Big(t^{2\lambda+1}\frac{d}{dt}\Big)$$

— дифференциальный оператор Бесселя, $\mathcal{E}_\lambda(\tau)$ — класс четных неотрицательных непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций f, для которых

$$t^2 f \in L_1(\mathbb{R}_+, d\nu_\lambda), \quad \operatorname{supp} H_\lambda f \subset [0,\tau], \quad H_\lambda f(0) = 1.$$

Если $f \in \mathcal{E}_\lambda(\tau)$, то для всех $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \int_0^\tau H_\lambda f(s) j_\lambda(zs)\,d\nu_\lambda(s),$$

поэтому $f(z)$ — четная целая функция, для которой справедлива экспоненциальная оценка

$$|f(z)| \le c_f e^{\tau|\operatorname{Im} z|}, \quad c_f > 0.$$

Справедливо и обратное утверждение [2], называемое теоремой Пэли—Винера.

Задача Бомана для преобразования Ганкеля состоит в вычислении величины

$$\mathrm{B}_\lambda(\tau) = \inf\Big\{\int_0^\infty t^2 f(t)\,d\nu_\lambda(t)\colon f \in \mathcal{E}_\lambda(\tau)\Big\}.$$

В [10] доказано, что

$$\mathrm{B}_\lambda(\tau) = -D_\lambda H_\lambda f_\lambda(0) = \Big(\frac{2q_\lambda}{\tau}\Big)^2$$

и единственная экстремальная функция имеет вид

$$f_{\lambda,\tau}(t)=\frac{2^{-3\lambda-1}\tau^{2\lambda+2}}{\Gamma(\lambda+1)q_\lambda^2}\left(\frac{j_\lambda(\tau t/2)}{1-(\tau t/(2q_\lambda))^2}\right)^2. \tag{0.6}$$

В работе решается задача Бомана для преобразования Данкля в случаях, когда тело V есть евклидов шар или параллелепипед. Для евклидова шара будем использовать инвариантность задачи относительно группы ортогональных преобразований $O(d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ и решение задачи Бомана для преобразования Ганкеля, для параллелепипеда — многомерную квадратурную формулу по нулям функций Бесселя.

1. Задача Бомана для евклидова шара

Пусть $\lambda_k=d/2-1+\sum_{\alpha\in R_+}k(\alpha)$, $S^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|=1\}$ — единичная евклидова сфера в $\mathbb{R}^d$, $x'\in S^{d-1}$,

$$a_k^{-1}=\int\limits_{S^{d-1}}v_k(x')\,dx',\quad d\omega_k(x')=a_kv_k(x')\,dx',$$

где dx' — лебегова мера на сфере.

Применяя сферические координаты, получим

$$c_k^{-1}=\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx=\int\limits_0^\infty e^{-r^2/2}r^{d-1+2|k|}\,dr\int\limits_{S^{d-1}}v_k(x')\,dx'=b_{\lambda_k}^{-1}a_k^{-1}. \tag{1.1}$$

Известно [11], что

$$\int\limits_{S^{d-1}}\overline{e_k(x,y')}\,d\omega_k(y')=j_{\lambda_k}(|x|),\quad x\in\mathbb{R}^d. \tag{1.2}$$

Если $f\in\mathcal{E}_k(B^d)$ — радиальная функция, $f(x)=f_0(|x|)$, $|x|=t$, $|y|=s$, то согласно (1.1), (1.2) имеем

$$F_k(f)(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x)=\int\limits_0^\infty f_0(t)j_{\lambda_k}(st)\,d\nu_{\lambda_k}(t)=H_{\lambda_k}f_0(s),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,d\mu_k(x)=\int\limits_0^\infty t^2f_0(t)\,d\nu_{\lambda_k}(t),$$

и $f_0\in\mathcal{E}_{\lambda_k}(1)$, поэтому $\mathrm{B}_k(B^d)\le\mathrm{B}_{\lambda_k}(1)$. Докажем противоположное неравенство.

Лемма 1. *Если функция $f\in\mathcal{E}_k(B^d)$, то функция*

$$f_0(t)=\int\limits_{S^{d-1}}f(tx')\,d\omega_k(x')\in\mathcal{E}_{\lambda_k}(1)$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|x|^2f(x)\,d\mu_k(x)=\int\limits_0^\infty t^2f_0(t)\,d\nu_\lambda(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл, определяющий $f_0(t)$, инвариантен относительно ортогональных преобразований, поэтому $f_0(t)$ — неотрицательная четная непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция. Применяя (1.1), получим

$$H_{\lambda_k} f_0(0) = \int_0^\infty f_0(t)\, d\nu_{\lambda_k}(t) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(tx')\, d\omega_k(x')\, d\nu_{\lambda_k}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_k(x) = 1,$$

$$\int_0^\infty t^2 f_0(t)\, d\nu_\lambda(t) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} t^2 f(tx')\, d\omega_k(x')\, d\nu_\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\, d\mu_k(x).$$

Значит, $f_0(t), t^2 f_0(t) \in L_1(\mathbb{R}_+, d\nu_{\lambda_k})$.

Так как $f(z)$ — целая функция на $\mathbb{C}^d$, то для всех $x' \in S^{d-1}$ функция $f(\zeta x')$ — целая по ζ на $\mathbb{C}$. Поэтому по теоремам Коши и Мореры $f_0(\zeta)$ — четная целая функция на $\mathbb{C}$, для которой в силу (0.3) справедлива оценка

$$|f_0(\zeta)| \le \int_{S^{d-1}} |f(\zeta x')|\, d\omega_k(x') \le \int_{S^{d-1}} c_f e^{|\mathrm{Im}\,(\zeta x')|}\, d\omega_k(x') = c_f e^{|\mathrm{Im}\,\zeta|}.$$

По теореме Пэли — Винера [2] носитель преобразования Ганкеля $\operatorname{supp} H_\lambda f_0 \subset [0, 1]$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает, что $\mathrm{B}_k(B^d) \ge \mathrm{B}_{\lambda_k}(1)$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha)$, *то*

$$\mathrm{B}_k(B^d) = -\Delta_k F_k(f_k)(0) = 4q_{\lambda_k}^2$$

и радиальная экстремальная функция имеет вид

$$f_k(x) = \frac{2^{-3\lambda_k - 1}}{\Gamma(\lambda_k + 1) q_{\lambda_k}^2} \left(\frac{j_{\lambda_k}(|x|/2)}{1 - (|x|/(2q_{\lambda_k}))^2} \right)^2.$$

2. Задача Бомана для параллелепипеда

Евклидов шар инвариантен относительно всей группы ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^d$, поэтому задачу Бомана в этом случае удалось решить для произвольного веса (0.1). Опишем вес (0.1), систему корней и порожденную ею группу отражений, относительно которой инвариантен параллелепипед $\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j]^d$, $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $a_j > 0$.

Рассмотрим систему корней $R = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$. Для нее $R_+ = \{e_1, \ldots, e_d\}$, $G(R)$ — группа диагональных матриц порядка d с элементами ± 1 на главной диагонали, изоморфная $\mathbb{Z}_2^d$. Для инвариантной функции $k(\pm e_j) = \lambda_j + 1/2$, $\lambda_j \ge -1/2$ и степенной вес имеет вид

$$v_k(x) = \prod_{j=1}^d |x_j|^{2\lambda_j + 1}. \tag{2.1}$$

Обобщенная экспонента имеет вид

$$e_k(x, y) = \prod_{j=1}^d e_{\lambda_j}(x_j y_j), \quad e_{\lambda_j}(x_j y_j) = j_{\lambda_j}(x_j y_j) - i j'_{\lambda_j}(x_j y_j). \tag{2.2}$$

Нормы в $\mathbb{R}^d$, инвариантные относительно группы отражений $G(R)$, зависят от модулей координат. Таковой является норма, порожденная параллелепипедом Π_a. Норма, порожденная полярой Π_a, запишется так:

$$|x|_{\Pi_a^*} = \sum_{j=1}^{d} a_j|x_j|. \tag{2.3}$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$,

$$D_\lambda f(x) = \sum_{j=1}^{d} D_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{x_j^{2\lambda_j+1}} \frac{\partial}{\partial x_j}\Bigl(x_j^{2\lambda_j+1}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\Bigr)$$

— лапласиан Данкля Δ_k на функциях, четных по каждой переменной,

$$r_\lambda(s,a) = \prod_{j=1}^{d} r_{\lambda_j}(s_j, a_j), \quad r_{\lambda_j}(s_j, a_j) = \frac{2^{2\lambda_j+3}|q_{\lambda_j,s_j}|^{2\lambda_j}}{a_j^{2\lambda_j+2}\bigl(J'_{\lambda_j}(q_{\lambda_j,s_j})\bigr)^2} > 0,$$

$$b_a^s = (b_1^{s_1}, \ldots, b_d^{s_d}) = \Bigl(\frac{2q_{\lambda_1,s_1}}{a_1}, \ldots, \frac{2q_{\lambda_d,s_d}}{a_d}\Bigr),$$

$E^{d,a}$ — класс целых функций f в $\mathbb{C}^d$ экспоненциального типа a_j по j-й переменной,

$$|f(z)| \leq c_f \exp\Bigl(\sum_{j=1}^{d} a_j|z_j|\Bigr), \quad z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d. \tag{2.4}$$

Нам понадобится многомерный вариант квадратурной формулы по нулям функций Бесселя [12], в одномерном случае доказанный в [13; 14].

Лемма 2 [12, с. 49]. *Если вес v_k определен в* (2.1), *$f \in E^{d,a} \cap L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu_k(x) = c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a) f(b_a^s), \tag{2.5}$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно.

Теорема 2. *Если вес v_k определен в* (2.1), *$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$, $\lambda_j \geq -1/2$, $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $a_j > 0$,*

$$b_a = \Bigl(\frac{2q_{\lambda_1}}{a_1}, \ldots, \frac{2q_{\lambda_d}}{a_d}\Bigr),$$

то

$$\mathrm{B}_k(\Pi_a) = -\Delta_k F_k(f_k)(0) = -D_\lambda F_k(f_k)(0) = |b_a|^2 \tag{2.6}$$

и экстремальная функция имеет вид

$$f_k(x) = \prod_{j=1}^{d} f_{\lambda_j,a_j}(x_j), \tag{2.7}$$

где функции $f_{\lambda_j,a_j}(x_j)$ из (0.6).

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{E}_k(\Pi_a)$. Так как в силу (0.3), (2.3), (2.4)

$$\mathcal{E}_k(\Pi_a) \subset E^{d,a} \cap L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k),$$

то

$$f(x), |x|^2 f(x) \in E^{d,a} \cap L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k).$$

Применяя квадратурную формулу (2.5) и учитывая неравенство $|b_a^s|^2 \ge |b_a|^2$ при $s \in \mathbb{Z}^d$, справедливое в силу (0.5), получим

$$1 = F_k(f)(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,d\mu_k(x) = c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a) f(b_a^s),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_k(x) = c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a)|b_a^s|^2 f(b_a^s) \ge |b_a|^2 c_k \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} r_\lambda(s,a) f(b_a^s) = |b_a|^2.$$

Оценка снизу в (2.6) получена.

Функция $f_k(x)$ (2.7) четная по каждой переменной. В силу (2.2)

$$F_k(f_k)(y) = \prod_{j=1}^{d} H_{\lambda_j} f_{\lambda_j,a_j}(y_j).$$

Согласно свойствам функций (0.6) отсюда вытекает, что $f_k \in \mathcal{E}_k(\Pi_a)$ и

$$-D_\lambda F_k(f_k)(0) = \sum_{j=1}^{d} \prod_{i\ne j} H_{\lambda_i} f_{\lambda_i,a_i}(0)\, \frac{1}{y_j^{2\lambda_j+1}} \frac{\partial}{\partial y_j}\Big(y_j^{2\lambda_j+1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big) H_{\lambda_j} f_{\lambda_j,a_j}(0)$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{2q_{\lambda_j}}{a_j}\Big)^2 = |b_a|^2.$$

Оценка сверху в (2.6) и экстремальность f_k получены. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Rösler M.** Dunkl operators: Theory and applications. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135. (Lecture Notes in Math.; vol. 1817.)
2. **Jeu M. de** Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358, no. 10. P. 4225–4250.
3. **Rösler M.** A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, no. 6. P. 2413–2438.
4. **Bohman H.** Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.
5. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 368 с.
6. **Ehm W., Gneiting T., Richards D.** Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356, no. 11. P. 4655–4685.
7. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона // Мат. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 439–444.
8. **Иванов В.И.** О приближении функций в пространствах L_p // Мат. заметки. 1994. Т. 56. № 2. С. 15–40.
9. **Горбачев Д.В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений. Тула: Гриф и К, 2005. 192 с.
10. **Горбачев Д.В.** Экстремальная задача Бомана для преобразования Фурье — Ганкеля // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2014. Вып. 4. С. 5–10.
11. **Xu Y.** Dunkl operators: Funk–Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls // Bull. London Math. Soc. 2000. Vol. 32, no. 4. P. 447–457.
12. **Иванов А.В.** Задача Логана для целых функций многих переменных и константы Джексона в весовых пространствах // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2011. Вып. 2. С. 29–58.

13. **Frappier C., Oliver P.** A quadrature formula involving zeros of Bessel functions // Math. Comp. 1993. Vol. 60, no. 201. C. 303–316.
14. **Grosev G.R., Rahman Q.I.** A quadrature formulae with zeros of Bessel functions as nodes // Math. Comp. 1995. Vol. 64, no. 210. P. 715–725.

Горбачев Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
профессор
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru

Поступила 10.01.2015

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.929

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ю. Ф. Долгий

Прямая задача оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием связана с нахождением решения краевой задачи для нелинейного матричного функционально-дифференциального уравнения. Предлагается при построении точных решений задачи оптимальной стабилизации перейти к обратной задаче нахождения абсолютно непрерывной составляющей меры Стилтьеса. Обратная задача описывается матричным линейным интегральным уравнением второго рода. Получены достаточные условия, при выполнении которых обратная задача сводится к краевой задаче для автономной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При решении последней задачи используется преобразование Лапласа.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с последействием, устойчивость движений, оптимальная стабилизация, дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, уравнение Риккати, функционально-дифференциальные уравнения, краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразование Лапласа.

Yu. F. Dolgii. Exact solutions of an optimal stabilization problem for systems of differential equations with aftereffect.

The direct problem of optimal stabilization for systems of differential equations with aftereffect is related to finding a solution of a boundary value problem for a nonlinear matrix functional differential equation. In the construction of exact solutions of the optimal stabilization problem, it is proposed to pass to the inverse problem of finding an absolutely continuous component of a Stieltjes measure. The inverse problem is described by a matrix linear integral equation of the second kind. Sufficient conditions are obtained under which the inverse problem can be reduced to a boundary value problem for an autonomous linear system of ordinary differential equations. In the solution of this problem, the Laplace transform is used.

Keywords: differential equations with aftereffect, stability of motions, optimal stabilization, differential equations in a Banach space, Riccati equation, functional differential equations, boundary value problem for ordinary differential equations, Laplace transform.

1. Введение

Объект управления описывается линейной системой дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d\eta(s)x(t+s) + Bu, \tag{1.1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x : [-r, +\infty) \to \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; $r > 0$; B — постоянная матрица; матричнозначная функция η имеет ограниченную вариацию на $[-r, 0]$, $\eta(0) = 0$.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1.1) и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$J = \int_{0}^{+\infty} \Big(x^\top(t)C_x x(t) + u^\top(t)C_u u(t)\Big)\, dt, \tag{1.2}$$

где C_x и C_u — положительно определенные матрицы.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00094).

При решении задачи оптимальной стабилизации для линейной автономной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием при квадратичном критерии качества Н. Н. Красовский предложил использовать квадратичные функционалы [1; 2]. Для рассматриваемого подхода были получены достаточные условия существования оптимального стабилизирующего управления [1; 3]. Ю. С. Осипов установил их связь с вполне управляемостью специальной конечномерной системы [4–6]. В функциональном пространстве состояний системе дифференциальных уравнений с последействием можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение в банаховом пространстве [7]. Задача определения коэффициентов аналитического представления квадратичного функционала может быть сведена к проблеме нахождения решения специальной определяющей системы обобщенных уравнений Риккати [1; 8–11]. При построении оптимального управления возникают трудности, связанные с интегрированием определяющей системы обобщенных уравнений Риккати. Точные решения этой системы уравнений получены в рамках специальных постановок задач [10; 12].

Прямая задача оптимальной стабилизации для системы дифференциальных уравнений с последействием связана с нахождением решения краевой залачи для нелинейного матричного функционально-дифференциального уравнения [13]. В настоящей работе предлагается при построении точных решений задачи оптимальной стабилизации перейти к обратной задаче нахождения абсолютно непрерывной составляющей меры Стилтьеса по заданному решению краевой задачи. Получены достаточные условия, при выполнении которых обратная задача сводится к краевой задаче для автономной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

При решении задачи стабилизации удобно, следуя Н. Н. Красовскому [7], от конечномерной постановки задачи перейти к бесконечномерной, вводя с помощью формул $\mathbf{x}_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $t \in \mathbb{R}^+$, функциональные элементы для решений системы (1.1), принадлежащие сепарабельному гильбертовому пространству $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-r, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^\top(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^{0} \mathbf{y}^\top(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$.

В функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ системе (1.1) соответствует уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}u, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где неограниченный оператор $\mathbf{A}$ задается формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{A}\mathbf{x})(0) = \int\limits_{-r}^{0} d\eta(s)\mathbf{x}(s)$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, а ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{H}$ — формулами

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{B}u)(0) = Bu.$$

Показатель качества (1.2) переходных процессов в функциональном пространстве состояний $\mathbb{H}$ описывается формулой

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\langle \mathbf{C}_x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle + u^\top(t) C_u u(t) \Big) dt,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{C}_x : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ определяется формулами

$$(\mathbf{C}_x \mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{C}_x \mathbf{x})(0) = C_x \mathbf{x}(0).$$

Теорема 1 [3]. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда существует оптимальное стабилизирующее управление, определяемое формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top(\mathbf{Ux})(0), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{U}$ *— вполне непрерывный самосопряженный положительный оператор, удовлетворяющий операторному уравнению Риккати*

$$\mathbf{UA} + \mathbf{A}^*\mathbf{U} + \mathbf{C}_x - \mathbf{UDU} = 0. \tag{2.2}$$

В приведенной теореме неограниченный сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ задается формулами [13]

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{y})(\vartheta) = -\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{A}^*\mathbf{y})(0) = \hat{\mathbf{y}}(0),$$

где

$$\hat{\mathbf{y}}(\vartheta) = \mathbf{y}(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta)\mathbf{y}(0), \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(-0),$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}^*) = \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{H} : \hat{\mathbf{y}}(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1([-r, 0], \mathbb{R}^n), \mathbf{y}(-r) = 0\right\}$, а ограниченный самосопряженный оператор $\mathbf{D} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ задается формулами $(\mathbf{Dx})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $(\mathbf{Dx})(0) = D\mathbf{x}(0)$, где $D = BC_u^{-1}B^\top$.

Проблема нахождения решения операторного равнения Риккати рассматривалась в работах [1; 8; 9; 13].

Лемма 1 [13]. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой. Тогда решение уравнения Риккати* (2.2) *единственно и определяет вполне непрерывный оператор Гильберта — Шмидта, допускающий представление*

$$(\mathbf{Ux})(\vartheta) = K(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-r}^{0} K(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

в котором $K(\vartheta, s) = K^\top(s, \vartheta)$, $\vartheta, s \in [-r, 0]$, *и матричнозначная функция* K *удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(s, \vartheta)}{\partial s} + K(\vartheta, 0)DK(0, s) = 0, \quad \vartheta, s \in [-r, 0), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, 0)}{\partial \vartheta} - \hat{K}^\top(-0, \vartheta) + K(\vartheta, 0)DK(0, 0) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \tag{2.4}$$

$$\hat{K}(-0, 0) + \hat{K}^\top(-0, 0) - K(0, 0)DK(0, 0) + C_x = 0, \tag{2.5}$$

$$\hat{K}(-r, s) + \eta^\top(-r)K(0, s) = 0, \quad s \in [-r, 0]. \tag{2.6}$$

Здесь $\hat{K}(\vartheta, s) = K(\vartheta, s) - \eta^\top(\vartheta)K(0, s)$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $s \in [-r, 0]$.

3. Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения

Рассмотрим краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta} = \int_{-r}^{\vartheta} \Big(X(\tau)d\eta(\tau - \vartheta) + d\eta^\top(\tau)X^\top(\tau - \vartheta)\Big) \tag{3.1}$$

$$+ X(-r)\eta(-r - \vartheta) + (X(\vartheta) - \zeta(\vartheta)X(-r))\, D\eta^{\top -1}(-r)X(-r)$$

$$-\int\limits_{-r}^{\vartheta}\left(X(\tau)-\zeta(\tau)X(-r)\right)D\left(X^{\top}(\tau-\vartheta)-X^{\top}(-r)\zeta^{\top}(\tau-\vartheta)\right)d\tau,$$

$$X(0)+X^{\top}(0)-X^{\top}(-r)\eta^{-1}(-r)D\eta^{\top-1}(-r)X(-r)+C_x=0, \tag{3.2}$$

$$X(-r))\eta(-r)=\eta^{\top}(-r)X^{\top}(-r). \tag{3.3}$$

Здесь $\zeta(\vartheta)=\eta^{\top}(\vartheta)\eta^{\top-1}(-r),\ \vartheta\in[-r,0]$, $det\eta(-r)\neq 0$.

Теорема 2. *Пусть система* (1.1) *является стабилизируемой и* $det\eta(-r)\neq 0$. *Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}]=C_u^{-1}B^{\top}\Big(X^{\top}(-r)\eta^{-1}(-r)\mathbf{x}(0)$$

$$-\int\limits_{-r}^{0}\left(X^{\top}(s)-X^{\top}(-r)\eta^{-1}(-r)\eta(s)\right)\mathbf{x}(s)ds\Big),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{H}, \tag{3.4}$$

где X *— решение краевой задачи* (3.1)–(3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $X(\vartheta)=\hat{K}(\vartheta,0)$, $\vartheta\in[-r,0)$, $X(0)=X(-0)$. Из определения функции $\hat{K}$ следует, что $K(\vartheta,0)=X(\vartheta)+\eta^{\top}(\vartheta)K(0,0)$, $\vartheta\in[-r,0)$. Используя формулу (2.6), находим

$$K(0,0)=-\eta^{\top-1}(-r)X(-r),$$

$$K(\vartheta,0)=X(\vartheta)-\eta^{\top}(\vartheta)X^{\top}(-r)\eta^{-1}(-r),\quad \vartheta\in[-r,0). \tag{3.5}$$

Согласно полученным результатам из (2.1) следует (3.4), а из (2.5) и симметричности матрицы $K(0,0)$ вытекает справедливость равенств (3.2), (3.3).

Для окончания доказательства теоремы достаточно показать, что функция X удовлетворяет уравнению (3.1). Введем матричнозначную функцию

$$\Phi(\vartheta,s)=\hat{K}(\vartheta,s)-\hat{K}(\vartheta,0)\eta(s),\quad \vartheta,s\in[-r,0). \tag{3.6}$$

Учитывая определение функции $\hat{K}$, имеем

$$\Phi(\vartheta,s)=K(\vartheta,s)-K(\vartheta,0)\eta(s)-\eta^{\top}(\vartheta)K(0,s)+\eta^{\top}(\vartheta)K(0,0)\eta(s),\quad \vartheta,s\in[-r,0).$$

Из последнего равенства и симметричности матричнозначной функции K следует, что матричнозначная функция Φ удовлетворяет равенству

$$\Phi^{\top}(\vartheta,s)=\Phi(s,\vartheta),\quad \vartheta,s\in[-r,0). \tag{3.7}$$

Используя формулу (3.6), уравнение (2.3) преобразуем к виду

$$\frac{\partial\Phi(\vartheta,s)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial\Phi(\vartheta,s)}{\partial s}+\frac{\partial\hat{K}(\vartheta,0)}{\partial\vartheta}\eta(s)+\eta^{\top}(\vartheta)\frac{\partial\hat{K}^{\top}(s,0)}{\partial s}$$

$$+K(\vartheta,0)DK^{\top}(s,0)=0,\quad \vartheta,s\in[-r,0). \tag{3.8}$$

Это матричное уравнение распадается на независимые скалярные уравнения в частных производных первого порядка, определяющие злементы матричнозначной функции Φ. Учитывая условие (3.7), решение уравнения (3.8) можно искать в области $-r\leq s\leq\vartheta<0$. Используя методы интегрирования скалярных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [14, § 53], находим

$$\Phi(\vartheta,s)=\Psi(\vartheta-s)-\int\limits_{-r}^{s}K(\tau+\vartheta-s,0)DK(0,\tau)d\tau$$

$$-\int_{-r}^{s}\Big(\frac{\partial\hat{K}(\tau+\vartheta-s,0)}{\partial\tau}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau+\vartheta-s)\frac{\partial\hat{K}^{\top}(\tau,0)}{\partial\tau}\Big)d\tau,\quad -r\le s\le\vartheta<0. \tag{3.9}$$

Учитывая предыдущую формулу, определения функций Φ, $\hat{K}$ и условие (2.6), находим

$$\Psi(\vartheta-s)=-\hat{K}(\vartheta-s-r,0)\eta(-r),\quad -r\le s\le\vartheta<0.$$

Тогда из (3.9) следует, что решение уравнения (3.8) определяется формулой

$$\Phi(\vartheta,s)=-X(\vartheta-s-r)\eta(-r)-\int_{-r}^{s}K(\tau+\vartheta-s,0)DK(0,\tau)d\tau$$

$$-\int_{-r}^{s}\left(\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau+\vartheta-s}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau+\vartheta-s)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau,\quad -r\le s\le\vartheta<0. \tag{3.10}$$

Используя определения функций Φ, $\hat{K}$ и условие (2.6), убеждаемся в справедливости формулы

$$K(\vartheta,s)=\Phi(\vartheta,s)+X(\vartheta)\eta(s)+\eta^{\top}(\vartheta)X^{\top}(s)+\eta^{\top}(\vartheta)\eta^{\top-1}(-r)X(-r)\eta(s),\quad -r\le s\le\vartheta<0.$$

Из формул (3.10), (3.6) при $\vartheta\in[-r,0)$ находим

$$\Phi(-0,\vartheta)=\hat{K}(-0,\vartheta)-\hat{K}(-0,0)\eta(\vartheta)=-X(-\vartheta-r)\eta(-r)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}\left(K(\tau-\vartheta,0)DK(0,\tau)+\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau-\vartheta)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau.$$

Из полученного равенства при $\vartheta\in[-r,0)$ следует, что

$$\hat{K}(-0,\vartheta)=-X(-\vartheta-r)\eta(-r)+X(0)\eta(\vartheta)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}\left(K(\tau-\vartheta,0)DK(0,\tau)+\frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}\eta(\tau)+\eta^{\top}(\tau-\vartheta)\frac{dX^{\top}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau.$$

Подставляя найденное выражение в (2.4) и учитывая определение функции X, имеем

$$\frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta}=-\eta^{\top}(-r)X^{\top}(-\vartheta-r)+\eta^{\top}(\vartheta)X^{\top}(0)$$

$$-\int_{-r}^{\vartheta}\left(K(0,\tau)DK(\tau-\vartheta,0)+\eta^{\top}(\tau)\frac{dX^{\top}(z)}{dz}\Big|_{z=\tau-\vartheta}+\frac{dX(\tau)}{d\tau}\eta(\tau-\vartheta)\right)d\tau$$

$$-K(\vartheta,0)DK(0,0),\quad \vartheta\in[-r,0).$$

Используя формулу интегрирования по частям, преобразуем последнее уравнение к виду (3.1). $\square$

4. Обратная задача оптимальной стабилизации

Переход от определяющей системы уравнений (2.3)–(2.6) к краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения (3.1)–(3.3) позволяет упростить процедуру построения оптимального стабилизирующего управления. Применение аналитических методов при нахождении решения краевой задачи (3.1)–(3.3) также наталкивается на серьезные технические трудности. Наложим дополнительные ограничения на ядро Стилтьеса, полагая $\eta = \eta_d + \eta_a$, где $\eta_d(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in (-r_1, 0]$, $\eta_d(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{q} \tilde{A}_k$, $\vartheta \in (-r_{q+1}, -r_q]$, $q = \overline{1, p-1}$, $\eta_d(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{p} \tilde{A}_k$, $\vartheta \in [-r, -r_p]$, $\eta_a(\vartheta) = -\tilde{A}_0 + \int_0^{\vartheta} A(s)ds$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $\eta_a(0) = 0$, $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_p \le r$, $\tilde{A}_k$, $k = \overline{0, p}$, — постоянные матрицы, A — матричнозначная функция с интегрируемыми с квадратом элементами. Система (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{p} \tilde{A}_k x(t - r_k) + \int_{-r}^{0} A(s)x(t+s)ds + Bu, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.1}$$

Теорема 3. *Пусть система* (4.1) *является стабилизируемой и* $\det\eta(-r) \neq 0$. *Тогда краевая задача для функционально-дифференциального уравнения* (3.1)–(3.3) *эквивалентна функционально-дифференциальному уравнению*

$$\begin{gathered}\frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} = \Psi(\vartheta)\tilde{A}_0 - \Big(\Psi(\vartheta) + \eta_d^\top(\vartheta)K_0\Big) DK_0 + A^\top(\vartheta)K_0 \\ - \eta^\top(-r)K_0\eta(-\vartheta - r) + \eta_a^\top(-r)K_0\eta_a(-\vartheta - r) \\ + \int_{-r}^{\vartheta} \Big(A^\top(z)\Psi^\top(z - \vartheta) + \Psi(z)A(z - \vartheta)\Big) dz \\ - \int_{-r}^{\vartheta} \Big(\Psi(z) + \eta_d^\top(z)K_0\Big) D \Big(\Psi^\top(z - \vartheta) + K_0\eta_d(z - \vartheta)\Big) dz \\ + \sum_{r_q < r+\vartheta} \Big(\Psi(\vartheta - r_q) - \eta_a^\top(\vartheta - r_q)K_0\Big) \tilde{A}_q + \sum_{r_q > -\vartheta} \tilde{A}_q^\top \Big(\Psi^\top(-\vartheta - r_q) - K_0\eta_a(-\vartheta - r_q)\Big)\end{gathered} \tag{4.2}$$

с краевым условием $\Psi(-r) = -\eta_d^\top(-r)K_0$ *и алгебраическому уравнению*

$$\tilde{A}_0^\top K_0 + K_0\tilde{A}_0 - K_0DK_0 + \Psi^\top(0) + \Psi(0) + C_x = 0. \tag{4.3}$$

Связь решения X *краевой задачи* (3.1)–(3.3) *с решением* Ψ, K_0 *системы*(4.2)–(4.3) *определяется формулами* $\Psi(\vartheta) = X(\vartheta) + \eta_a^\top(\vartheta)K_0$, $\vartheta \in [-r, 0)$, $\Psi(0) = \Psi(-0)$, $K_0 = -X^\top(-r)\eta^{-1}(-r)$.

Доказательство. Учитывая связь решения X краевой задачи (3.1)–(3.3) с решением Ψ, K_0 системы (4.2), (4.3), получим краевое условие $\Psi(-r) = -\eta_d^\top(-r)K_0$, а из равенства (3.2) алгебраическое уравнение (4.3). Преобразуя интегралы в правой части уравнения (3.1), имеем

$$\begin{gathered}\int_{-r}^{\vartheta} \Big(X(\tau)d\eta_a(\tau - \vartheta) + d\eta_a^\top(\tau)X^\top(\tau - \vartheta)\Big) \\ = \int_{-r}^{\vartheta} \Big(\Psi(\tau)A(\tau - \vartheta) + A^\top(\tau)\Psi^\top(\tau - \vartheta)\Big) d\tau + \Psi(\vartheta)\tilde{A}_0 + \eta_a^\top(-r)K_0\eta_a(-r - \vartheta),\end{gathered}$$

$$\int_{-r}^{\vartheta}\Big(X(\tau)d\eta_d(\tau-\vartheta)+d\eta_d^{\top}(\tau)X^{\top}(\tau-\vartheta)\Big)$$

$$=\sum_{r_q<r+\vartheta}\Big(\Psi(\vartheta-r_q)-\eta_a^{\top}(\vartheta-r_q)K_0\Big)\tilde{A}_q+\sum_{r_q>-\vartheta}\tilde{A}_q^{\top}\Big(\Psi^{\top}(-\vartheta-r_q)-K_0\eta_a(-\vartheta-r_q)\Big).$$

Используя эти равенства, получим (4.2). □

Нелинейное уравнение (4.2), определяющее матричную функцию Ψ, линейно зависит от матричной функции A. Поэтому обратная задача нахождения матричного коэффициента A системы дифференциальных уравнений с последействием (4.1) по заданному решению Ψ уравнения (4.2) линейна.

При решении задачи восстановления задаются матрицы $\tilde{A}_k$, $k=\overline{0,p}$, а матрица K_0 определяется из уравнения (4.3). Матричная функция A является решением интегрального уравнения второго рода

$$\int_{-r}^{\vartheta}A^{\top}(z)\Psi^{\top}(z-\vartheta)dz+\int_{-r-\vartheta}^{0}\Psi(z+\vartheta)A(z)dz+A^{\top}(\vartheta)K_0$$

$$+\eta_d^{\top}(-r)K_0\int_{-r-\vartheta}^{0}A(z)dz+\int_{-r}^{0}A^{\top}(z)dzK_0\eta_d(-r-\vartheta)$$

$$+\sum_{r_q<r+\vartheta}\int_{\vartheta-r_q}^{0}A^{\top}(z)dzK_0\tilde{A}_q+\sum_{r_q>-\vartheta}\tilde{A}_q^{\top}K_0\int_{-r_q-\vartheta}^{0}A(z)dz=G(\vartheta), \tag{4.4}$$

где

$$G(\vartheta)=d\Psi(\vartheta)/d\vartheta-\Psi(\vartheta)\tilde{A}_0+\int_{-r}^{\vartheta}\Big(\Psi(z)+\eta_d^{\top}(z)K_0\Big)D\Big(\Psi^{\top}(z-\vartheta)+K_0\eta_d(z-\vartheta)\Big)dz$$

$$+\eta_d^{\top}(-r)K_0\Big(\eta_d(-r-\vartheta)-\tilde{A}_0\Big)-\tilde{A}_0^{\top}K_0\eta_d(-r-\vartheta)+\left(\Psi(\vartheta)+\eta_d(\vartheta)K_0\right)DK_0$$

$$-\sum_{r_q<r+\vartheta}\Big(\Psi(\vartheta-r_q)+\tilde{A}_0^{\top}K_0\Big)\tilde{A}_q-\sum_{r_q>-\vartheta}\tilde{A}_q^{\top}\Big(\Psi^{\top}(-\vartheta-r_q)+K_0\tilde{A}_0\Big),\quad \vartheta\in[-r,0].$$

Точные решения уравнения (4.4) удалось найти при выполнении следующих дополнительных условий:

1) Функция Ψ задается формулой

$$\Psi(\vartheta)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}(\vartheta+r)^j e^{\lambda_k(\vartheta+r)}\Psi_{kj},\quad \vartheta\in[-r,0], \tag{4.5}$$

и удовлетворяет условию $\Psi(-r)=-\eta_d^{\top}(-r)K_0$. Здесь Ψ_{kj} — матрицы размерности $n\times n$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, $\lambda_0=0$, $\lambda_k\neq 0$, $k=\overline{1,M}$. Если λ_k — вещественное число, то матрица Ψ_{kj} имеет вещественные элементы, а каждому невещественному числу λ_k соответствует сопряженное число $\lambda_{k'}=\overline{\lambda_k}$ и $\Psi_{k'j}=\overline{\Psi_{kj}}$. Последние условия гарантируют вещественность матричнозначной функции Ψ.

2) Сосредоточенные запаздывания соизмеримы, т. е. $r_q=N_q\Delta$, где N_q — натуральные числа, $q=\overline{1,p}$, $r=r_p$.

Покажем, что при выполнении последних условий задачу нахождения решения интегрального уравнения второго рода (4.4) можно заменить задачей нахождения решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем обозначения

$$X_{kj}(\vartheta) = \int\limits_{-r-\vartheta}^{0} (z+r+\vartheta)^j e^{\lambda_k(z+r+\vartheta)} A(z)dz,$$

$$Y_{kj}(\vartheta) = \int\limits_{-r}^{\vartheta} (z+r-\vartheta)^j e^{\lambda_k(z+r-\vartheta)} A^\top(z)dz, \quad j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}.$$

Используя представление (4.5), уравнение (4.4) запишем в следующем виде:

$$A^\top(\vartheta)K_0 + \sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(Y_{kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj}X_{kj}(\vartheta)\Big) + \eta_d^\top(-r)X_{00}(\vartheta) + Y_{00}(0)\eta_d(-r-\vartheta)$$

$$+ \sum_{r_q<r+\vartheta}\left(Y_{00}(0) - Y_{00}(\vartheta - r_q)\right)\tilde{A}_q + \sum_{r_q>-\vartheta}\tilde{A}_q^\top X_{00}(\vartheta - r + r_q) = G(\vartheta), \quad \vartheta\in[-r,0].$$

Функции $X_{kj}, Y_{kj}, j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, являются компонентами решения следующей краевой задачи:

$$\frac{dX_{k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{k0}(\vartheta) + A(-r-\vartheta), \quad \frac{dY_{k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{k0}(\vartheta) + e^{\lambda_k r}A^\top(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{kj}(\vartheta) + jX_{k(j-1)}(\vartheta), \quad \frac{dY_{kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{kj}(\vartheta) - jY_{k(j-1)}(\vartheta) + r^j e^{\lambda_k r}A^\top(\vartheta),$$

$$j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}, \tag{4.6}$$

$$X_{kj}(-r)=0, \quad Y_{kj}(-r)=0, \quad j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}.$$

Вводя обозначения $G_1(\vartheta)=G(\vartheta), G_2(\vartheta)=G^\top(-r-\vartheta), A_1(\vartheta)=A^\top(\vartheta), A_2(\vartheta)=A(-r-\vartheta)$, $X_{1kj}(\vartheta)=X_{kj}(\vartheta), X_{2kj}(\vartheta)=X_{kj}^\top(-r-\vartheta), Y_{1kj}(\vartheta)=Y_{kj}(\vartheta),\ Y_{2kj}(\vartheta)=Y_{kj}^\top(-r-\vartheta),\ j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}, \vartheta\in[-r/2,0]$, преобразуем краевую задачу (4.6) к следующей форме:

$$\frac{dX_{1k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{1k0}(\vartheta) + A_2(\vartheta), \quad \frac{dY_{1k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{1k0}(\vartheta) + e^{\lambda_k r}A_1(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{2k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k X_{2k0}(\vartheta) - A_1(\vartheta), \quad \frac{dY_{2k0}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k Y_{2k0}(\vartheta) - e^{\lambda_k r}A_2(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{1kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k X_{1kj}(\vartheta) + jX_{1k(j-1)}(\vartheta), \quad \frac{dY_{1kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k Y_{1kj}(\vartheta) - jY_{1k(j-1)}(\vartheta) + r^j e^{\lambda_k r}A_1(\vartheta),$$

$$\frac{dX_{2kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = -\lambda_k X_{2kj}(\vartheta) - jX_{2k(j-1)}(\vartheta), \quad \frac{dY_{2kj}(\vartheta)}{d\vartheta} = \lambda_k Y_{2kj}(\vartheta) + jY_{2k(j-1)}(\vartheta) - r^j e^{\lambda_k r}A_2(\vartheta),$$

$$j=\overline{1,M_k}, \quad k=\overline{0,M}, \tag{4.7}$$

$$X_{2kj}(-r)=0, \quad Y_{2kj}(-r)=0, \quad X_{1kj}(-r/2)=X_{2kj}^\top(-r/2), \quad Y_{1kj}(-r/2)=Y_{2kj}^\top(-r/2), \tag{4.8}$$

$$j=\overline{0,M_k}, \quad k=\overline{0,M}.$$

Здесь функции A_1, A_2 определяются формулами

$$A_1(\vartheta)K_0 = G_1(\vartheta) - \sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(Y_{1kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj}X_{1kj}(\vartheta)\Big) - \eta_d^\top(-r)X_{100}(\vartheta) - Y_{100}(0)\eta_d(-r-\vartheta)$$

$$- \sum_{r_q<r+\vartheta} \left(Y_{100}(0) - Y_{00}(\vartheta - r_q)\right) \tilde{A}_q - \sum_{r_q>-\vartheta} \tilde{A}_q^\top X_{00}(\vartheta - r + r_q),$$

$$K_0 A_2(\vartheta) = G_2(\vartheta) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(X_{2kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj} Y_{2kj}(\vartheta) \right) - X_{200}(\vartheta)\eta_d(-r) - \eta_d^\top(\vartheta) Y_{100}^\top(0)$$

$$- \sum_{r_q<-\vartheta} \tilde{A}_q^\top \left(Y_{100}^\top(0) - Y_{00}^\top(-\vartheta - r_q - r) \right) - \sum_{r_q>\vartheta+r} X_{00}^\top(-\vartheta - 2r + r_q)\tilde{A}_q, \quad \vartheta \in [-r/2, 0]. \qquad (4.9)$$

Система (4.7), (4.9) является системой дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами. Отклонения могут быть положительными и отрицательными. Соизмеримость сосредоточенных запаздываний позволяет ввести новые функции $X_{1kjq}(s) = X_{1kj}(s + (qr)/(2N_p))$, $X_{2kjq}(s) = X_{2kj}(s + (qr)/(2N_p))$, $Y_{1kjq}(s) = Y_{1kj}(s + (qr)/(2N_p))$, $Y_{2kjq}(s) = Y_{2kj}(s + (qr)/(2N_p))$, $s \in [-r/(2N_p), 0]$, $q = \overline{0, N_p - 1}$. Для этих функций последняя краевая задача преобразуется в линейную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Задача интегрируется аналитическими методами, но в случае ее большой размерности нахождение решения в аналитической форме затруднено. С помощью преобразования Лапласа полученную краевую задачу можно свести к алгебраической.

5. Использование преобразования Лапласа при решении краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом разделе будем предполагать, что функция Ψ задается формулой (4.5) и $\eta_d = 0$. Тогда формулы (4.9) упрощаются

$$A_1(\vartheta)K_0 = G_1(\vartheta) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(Y_{1kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj} X_{1kj}(\vartheta) \right),$$

$$K_0 A_2(\vartheta) = G_2(\vartheta) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(X_{2kj}(\vartheta)\Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj} Y_{2kj}(\vartheta) \right), \quad \vartheta \in [-r/2, 0]. \qquad (5.1)$$

В этом случае не требуется дополнительных преобразований связанных с разбиением отрезка $[-r/2, 0]$, так как система (4.7), (5.1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

При выполнении условия $\eta_d = 0$ функция G является матричнозначным квазиполиномом и допускает представление

$$G(\vartheta) = \sum_{Re(\lambda_k)\neq 0, k=\overline{1,M}} \sum_{j=0}^{M_k+\tilde{M}} (\vartheta + r)^j e^{\lambda_k(\vartheta+r)} G_{kj}^+ + \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{M_k+\tilde{M}+1} (\vartheta + r)^j e^{-\lambda_k(\vartheta+r)} G_{kj}^-,$$

где $\vartheta \in [-r, 0]$, $\tilde{M} = \max\limits_{0\leq k\leq M} M_k$.

Будем искать решение краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7), (5.1), используя метод преобразования Лапласа. С этой целью, учитывая аналитические представления функций G_1, G_2 в форме квазиполиномов, продолжим рассматриваемые уравнения на полуось $(-\infty, 0]$. Преобразования Лапласа решений системы уравнений (4.7), (5.1)

$$L[X_{1kj}](\lambda) = \int_{-\infty}^{0} X_{1kj}(s)\exp(\lambda s)ds, \; L[X_{2kj}](\lambda) = \int_{-\infty}^{0} X_{2kj}(s)\exp(\lambda s)ds,$$

$$L[Y_{1kj}](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} Y_{1kj}(s)\exp(\lambda s)ds,\ L[Y_{2kj}](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{0} Y_{2kj}(s)\exp(\lambda s)ds,$$

$$j = \overline{0, M_k}, \quad k = \overline{0, M}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

удовлетворяют системе дискретных разностных уравнений

$$L[X_{1k0}](\lambda) = -\frac{1}{\lambda + \lambda_k} L[A_2](\lambda) + \frac{1}{\lambda + \lambda_k} X_{1k0}(0),$$

$$L[Y_{1k0}](\lambda) = -\frac{\exp(\lambda_k r)}{\lambda - \lambda_k} L[A_1](\lambda) + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} Y_{1k0}(0),$$

$$L[X_{2k0}](\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_k} L[A_1](\lambda),\ L[Y_{2k0}](\lambda) = \frac{\exp(\lambda_k r)}{\lambda + \lambda_k} L[A_2](\lambda),$$

$$L[X_{1kj}](\lambda) = -\frac{j}{\lambda + \lambda_k} L[X_{1k(j-1)}](\lambda) + \frac{1}{\lambda + \lambda_k} X_{1kj}(0),$$

$$L[Y_{1kj}](\lambda) = \frac{j}{\lambda - \lambda_k} L[Y_{1k(j-1)}](\lambda) + \frac{1}{\lambda - \lambda_k} Y_{1kj}(0) - \frac{r^j \exp(\lambda_k r)}{\lambda - \lambda_k} L[A_1](\lambda),$$

$$L[X_{2kj}](\lambda) = \frac{j}{\lambda - \lambda_k} L[X_{2k(j-1)}](\lambda),$$

$$L[Y_{2kj}](\lambda) = -\frac{j}{\lambda + \lambda_k} L[Y_{2k(j-1)}](\lambda) + \frac{r^j \exp(\lambda_k r)}{\lambda + \lambda_k} L[A_2](\lambda),$$

$$j = \overline{1, M_k}, \quad k = \overline{0, M}.$$

Решения системы разностных уравнений определяются формулами

$$\begin{gathered}
L[X_{1kj}](\lambda) = \sum_{q=0}^{j} \frac{(-1)^{j-q} j!}{q!(\lambda + \lambda_k)^{j-q+1}} X_{1kq}(0) - \frac{(-1)^j j!}{(\lambda + \lambda_k)^{j+1}} L[A_2](\lambda), \\
L[Y_{1kj}](\lambda) = \sum_{q=0}^{j} \frac{j!}{q!(\lambda - \lambda_k)^{j-q+1}} Y_{1kq}(0) - \exp(\lambda_k r) \sum_{q=0}^{j} \frac{j! r^q}{q!(\lambda - \lambda_k)^{j-q+1}} L[A_1](\lambda), \\
L[X_{2kj}](\lambda) = \frac{j!}{(\lambda - \lambda_k)^{j+1}} L[A_1](\lambda), \\
L[Y_{2kj}](\lambda) = \exp(\lambda_k r) \sum_{q=0}^{j} \frac{(-1)^{j-q} j! r^q}{q!(\lambda + \lambda_k)^{j-q+1}} L[A_2](\lambda), \\
j = \overline{0, M_k}, \quad k = \overline{0, M}.
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Используя (5.1), имеем

$$L[A_1](\lambda) K_0 = L[G_1](\lambda) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(L[Y_{1kj}](\lambda) \Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj} L[X_{1kj}](\lambda) \right),$$

$$K_0 L[A_2](\lambda) = L[G_2](\lambda) - \sum_{k=0}^{M} \sum_{j=0}^{M_k} \left(L[X_{2kj}](\lambda) \Psi_{kj}^\top + \Psi_{kj} L[Y_{2kj}](\lambda) \right).$$

Учитывая (5.2), для $L[A_1](\lambda)$ и $L[A_2](\lambda)$ получим линейную неоднородную систему алгебраических матричных уравнений

$$L[A_1](\lambda)\,(\Phi_{11}(\lambda)-K_0)+\Phi_{12}(\lambda)L[A_2](\lambda)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Big(S_{1kj}(\lambda)X_{1kj}(0)-Y_{1kj}(0)S_{1kj}^{\top}(-\lambda)\Big)-L[G_1](\lambda),$$

$$L[A_1](\lambda)\Phi_{12}^{\top}(-\lambda)+\Big(\Phi_{11}^{\top}(-\lambda)-K_0\Big)\,L[A_2](\lambda)=-L[G_2](\lambda). \tag{5.3}$$

Здесь $\Phi_{11},\Phi_{12},S_{1kj}$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, определяются формулами

$$\Phi_{11}(\lambda)=\sum_{k=0}^{M}e^{\lambda_k r}\sum_{j=0}^{M_k}j!\Psi_{kj}^{\top}\sum_{p=0}^{j}\frac{r^p}{p!(\lambda-\lambda_k)^{j+1-p}},$$

$$\Phi_{12}(\lambda)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{j=0}^{M_k}\Psi_{kj}\frac{(-1)^j j!}{(\lambda+\lambda_k)^{j+1}},$$

$$S_{1kj}(\lambda)=\sum_{p=j}^{M_k}\Psi_{kp}\frac{(-1)^{p-j}p!}{j!(\lambda+\lambda_k)^{p+1-j}},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Коэффициенты системы (5.3) являются рациональными функциями параметра λ. Поэтому рациональными функциями являются также решения этой системы $L[A_1](\lambda)$, $L[A_2](\lambda)$ и преобразования Лапласа $L[X_{1kj}](\lambda), L[Y_{1kj}](\lambda)$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$. Они будут линейно зависеть от неизвестных матриц $X_{1kj}(0)$, $Y_{1kj}(0)$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$. Применяя обратные преобразования Лапласа, находим функции A_1, A_2, X_{1kj},Y_{1kj}, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$, также линейно зависящие от неизвестных матриц $X_{1kj}(0)$, $Y_{1kj}(0)$, $j=\overline{0,M_k}$, $k=\overline{0,M}$. Последние матрицы находятся из краевых условий (4.8).

П р и м е р. Пусть для системы (4.1) и критерия качества (1.2) выполняются условия: $n=m=1$, $r=2$, $\tilde{A}_0=0$, $B=1$, $C_x=6$, $C_u=1$. Функцию Ψ определим формулой $\Psi(\vartheta)=-\frac{1}{2}(\vartheta+2)$, $\vartheta\in[-2,0]$ и найдем решение $K_0=2$ алгебраического уравнения (4.3).

Используя краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7), (5.1), получим систему дифференциальных уравнений

$$2\frac{d^2A_1}{d\vartheta^2}-\frac{dA_1}{d\vartheta}+\frac{1}{2}A_1-\frac{1}{2}A_2=-\frac{1}{4}\vartheta,\ 2\frac{d^2A_2}{d\vartheta^2}+\frac{dA_2}{d\vartheta}+\frac{1}{2}A_2-\frac{1}{2}A_1=\frac{1}{4}(\vartheta+2)$$

с краевыми условиями

$$A_1(-1)=A_2(-1),\quad \frac{dA_1(-1)}{d\vartheta}=-\frac{dA_2(-1)}{d\vartheta},\quad A_2(0)=-\frac{1}{4},\quad \frac{dA_2(0)}{d\vartheta}=\frac{5}{8}.$$

Решение последней краевой задачи определяется формулами

$$A_1(\vartheta)=d_1-\frac{1}{4}(\vartheta+1)+d_3\left(\cos\left(0.5(\vartheta+1)\right)-\sin\left(0.5(\vartheta+1)\right)\right),$$

$$A_2(\vartheta)=d_1+\frac{1}{4}(\vartheta+1)+d_3\left(\cos\left(0.5(\vartheta+1)\right)+\sin\left(0.5(\vartheta+1)\right)\right),\quad \vartheta\in[-1,0],$$

$$d_1=\frac{\sin(0.5)+5\cos(0.5)}{4\left(\sin(0.5)-\cos(0.5)\right)},\quad d_3=\frac{3}{4\left(\cos(0.5)-\sin(0.5)\right)}.$$

Восстанавленная система (4.1) имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-2}^{0} \Big(d_1 - \frac{1}{4}(\vartheta+1) + d_3\left(\cos\left(0.5(\vartheta+1)\right) - \sin\left(0.5(\vartheta+1)\right)\right)\Big)x(t+\vartheta)d\vartheta, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Ее оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$u^0[x(\cdot)] = 2x(0) - \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}(\vartheta+2)x(\vartheta)d\vartheta, \quad x(\cdot) \in \mathbb{H}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. **Красовский Н.Н.** Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
3. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 1. P. 95–139.
4. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
5. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
6. **Габелая А.Г., Иваненко В.И., Одарич О.Н.** Стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1976. № 8. С. 12–16.
7. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88.
9. **Янушевский Р.Т.** Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
10. **Ким А.В., Ложников А.Б.** Линейно-квадратичные задачи управления для систем с последействием. Точные решения // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 15–31.
11. **Долгий Ю.Ф.** К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2007. № 10. С. 92–105.
12. **Колмановский В.Б.** Точные формулы в задаче управления некоторыми системами с последействием // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 228–235.
13. **Долгий Ю.Ф.** Аналитические решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления / ИПУ РАН. М., 2014. С. 1349–1362.
14. **Петровский И.Г.** Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 232 с.

Долгий Юрий Филиппович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Yurii.Dolgii@imm.uran.ru

Поступила 27.04.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.538.2

НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА[1]

Г. А. Дубосарский

Построены гармонические всплески и сделана оценка скорости сходимости их частичных сумм во введенных в статье пространствах гармонических функций. Данные всплески можно использовать для решения задачи Неймана.

Ключевые слова: задача Неймана, гармонические всплески, базис пространств гармонических функций.

G. A. Dubosarskii. Nonorthogonal harmonic wavelets and their application to the solution of the Neumann problem.

We construct harmonic wavelets and give a bound for the convergence rate of their partial sums in the spaces of harmonic functions introduced in the paper. These wavelets can be used for the solution of the Neumann problem.

Keywords: Neumann problem, harmonic wavelets, basis of spaces of harmonic functions.

1. Введение

Данная статья посвящена построению гармонических всплесков, удобных для решения задачи Неймана. Эта задача является классической задачей математической физики и заключается в определении гармонической функции по ее известным производным по нормали к границе области. Данная работа является идейным продолжением статей [1–3].

В [1] были построены гармонические всплески, образующие базис пространств Харди в единичном круге и центральном кольце. Далее в этой работе с помощью конформного отображения базис в центральном кольце был перенесен на случай нецентрального. Эти базисы могут быть использованы для решения другой классической задачи математической физики — задачи Дирихле. Задача Дирихле заключается в определении значений гармонической функции внутри области по известным граничным значениям. В [2;3] на основе всплесков работы [1] были построены ортогональные и неортогональные гармонические всплески для решения задачи Дирихле в области, получающейся путем удаления из единичного круга нескольких меньших непересекающихся кругов. Также в статье [3] описано построение ортогональных гармонических всплесков, удобных для решения задачи Неймана. В [2; 3] построение ортогональных всплесков требует построения вспомогательных систем функций, которые получаются путем ортогонализации Грама — Шмидта системы гармонических рациональных функций относительно специальных скалярных произведений. Неортогональные всплески получаются с помощью аналога ортогонализации Грама — Шмидта для введенного несимметричного произведения той же системы функций.

В данной работе построены неортогональные всплески для решения задачи Неймана и доказана оценка скорости сходимости ряда по этим всплескам. Преимущество неортогональных всплесков по сравнению с ортогональными заключается в том, что коэффициенты разложений гармонических функций в ряды по этим всплескам представляются в более простой форме, чем у ортогональных. Однако само построение неортогональных всплесков требует большего количества вычислительных операций, чем построение ортогональных.

[1]Выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Во втором разделе данной статьи вводятся новые пространства N_p гармонических функций. Далее, в третьем разделе для функций из классов N_p строится ряд, восстанавливающий их по их производным по нормали на границе области, а также формулируется лемма об асимптотическом поведении функций из построенного ряда. Таким образом, данный ряд может быть использован для решения задачи Неймана. В четвертом разделе на основе построенного ряда строится ряд всплесков, который сходится не только внутри области, но и на ее границе. В пятом разделе данной статьи доказываются вспомогательные утверждения необходимые для оценок сходимости.

2. Пространства гармонических функций

Обозначим через $C_r(a)$ окружность с центром в точке a радиуса r. Будем также использовать обозначение $B_r(a) = \{z\colon |z-a| < r\}$ и обозначать $B_1(0)$ через K. Рассмотрим область комплексной плоскости $\widetilde{K} = \widetilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \ldots, z_m, r_m)$, получающуюся путем удаления из единичного круга m попарно не пересекающихся кругов. То есть область $\widetilde{K}$ ограничена окружностями $C_{r_0}(z_0), C_{r_1}(z_1), \ldots, C_{r_m}(z_m)$, где $z_0 = 0, r_0 = 1$, $|z_k| + r_k < 1, k = \overline{1, m}$, и $|z_k - z_l| > r_k + r_l, k \neq l$.

В статье гармонические функции полагаются вещественнозначными. Нам потребуется следующее утверждение о специальном разложении гармонической функции. Доказательство существования этого разложения можно найти в [4], а единственность проверяется так же, как в лемме 2.1 работы [5].

Утверждение. *Пусть функция $u(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|, \tag{2.1}$$

где $u_0(z)$ — гармоническая функция в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u(z) = 0, k = \overline{1, m}$, и $A_k, k = \overline{1, m}$, — некоторые вещественные константы.

Аналогично тому, как это сделано в работе [5], проверяется, что константы $A_k, k = \overline{1, m}$, разложения (2.1) вычисляются по формуле

$$A_k = \frac{r_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx. \tag{2.2}$$

Поскольку в данной статье строится аппарат для решения задачи Неймана, то будем полагать производные по радиусу в (2.2) известными. Таким образом, константы A_k можно также считать найденными. Рассмотрим функцию $v(z) = u(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k \ln|z - z_k|$, где константы A_k определяются по формуле (2.2). Наша задача свелась к нахождению функции $v(z)$, для которой соответствующие константы равны нулю. Пользуясь таким сведением, мы сразу можем считать, что в разложении (2.1) функции $u(z)$ не присутствуют логарифмы. Таким образом, будем полагать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{2.3}$$

Поскольку решение задачи Неймана определяется с точностью до константы, чтобы добиться единственности, будем считать

$$\int_0^{2\pi} u(e^{ix}) dx = 0. \tag{2.4}$$

Классы, в которых интегрирования в (2.3) и (2.4) являются законными, будут введены ниже.

Полагаем, что функция $u(z)$ принадлежит пространству $N_p(\widetilde{K}), 1 < p < \infty$, если

$$\frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} \in L_p[0, 2\pi] \tag{2.5}$$

и выполнены равенства (2.3) и (2.4).

Если $p > 1$, то по аналогии с доказательством теорем 3 и 4 (см. [4, с. 397–400]) можно получить, что функция $u(z)$ будет непрерывна в замыкании $\widetilde{K}$. Более того, ее граничные значения принадлежат классу $Lip_{1-1/p}$. Однако при $p = 1$ выполнение условия (2.5) не гарантирует непрерывности граничных значений. Это показывает пример следующей функции, определенной в круге K:

$$u(re^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k \cos kx}{k \ln(k+2)}.$$

Рассмотрим функции $u_1(z) = \ln|1 - z|$ и $u_2(z) = \ln|1 + z|$ в единичном круге с центром в нуле. Отметим, что $\frac{\partial u_1(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial u_2(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1} = 1/2$. Таким образом, по производной по нормали к границе области гармоническая функция не обязана однозначно восстанавливаться (с точностью до константы).

Поэтому будем считать, что $u(z) \in N_1(\widetilde{K})$, если выполнены условия (2.3), (2.4), а также соотношения

$$\int_0^{2\pi} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix}) - \frac{\partial u}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big| dx \to 0, \quad r \to r_k, \quad k = \overline{0, m}, \tag{2.6}$$

и функция $u(z)$ является непрерывной в замыкании $\widetilde{K}$. Условия (2.6) гарантируют, что функция $u(z)$ однозначно восстанавливается по граничным значениям. Условие (2.6) выполняется для функций из классов $N_p(\widetilde{K}), p > 1$.

Исходя из (2.3) и (2.4), мы получаем, что в области $\widetilde{K}$ для функции $u(z)$ из класса $N_p(\widetilde{K})$ справедливо разложение

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m} u_k(z), \tag{2.7}$$

где $u_0(z)$ — гармоническая функция в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty} u(z) = 0$, $k = \overline{1, m}$.

3. Вспомогательная гармоническая система функций

Рассмотрим систему функций

$$\Big\{h_k^0(z) = Rez^k,\ \widetilde{h}_k^0(z) = Imz^k,$$

$$h_k^l(z) = Re\Big(\frac{r_l}{z - z_l}\Big)^k,\ \widetilde{h}_k^l(z) = -Im\Big(\frac{r_l}{z - z_l}\Big)^k,\ l = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{N}\Big\} \tag{3.1}$$

и введем псевдоскалярное произведение с помощью разложения (2.7) функции $v(z)$:

$$\langle u, v\rangle_N = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} \frac{\partial v_k(z_k + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_k} dx. \tag{3.2}$$

Будем нумеровать натуральными числами функции системы (3.1) в следующем порядке:

$$h_1^0(z), \widetilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \widetilde{h}_1^1(z), \ldots, h_1^m(z), \widetilde{h}_1^m(z),$$

$$h_2^0(z), \widetilde{h}_2^0(z), h_2^1(z), \widetilde{h}_2^1(z), \dots, h_2^m(z), \widetilde{h}_2^m(z), \dots . \tag{3.3}$$

Построим систему функций $\{\sigma_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\sigma_k(z) = \sum_{s=1}^{k} \omega_s^k h_s(z), \tag{3.4}$$

где h_s являются функциями системы (3.1) и выполняется условие

$$|\langle \sigma_k, \sigma_l \rangle_N| = \delta_{k,l}, \quad l \leq k. \tag{3.5}$$

Система $\{\sigma_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ строится аналогично системе $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ статьи [3] по индукции. Положим $\sigma_1(z) = h_1(z)$, тогда $\langle \sigma_1, \sigma_1 \rangle_N = 1$. Пусть функции $\sigma_k(z), k = \overline{1, n-1}$, построены и, выполняется $|\langle \sigma_k, \sigma_l \rangle_N| = \delta_{k,l}, l \leq k < n$. Определим теперь функцию $\sigma_n(z)$. Для этого по аналогии с методом Грама — Шмидта введем функцию $q_n(z)$ вида

$$q_n(z) = h_n(z) + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \sigma_k(z). \tag{3.6}$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ будем последовательно находить путем умножения (3.6) на функции $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ справа, полагая $\langle q_n, \sigma_k \rangle_N = 0, k = \overline{1, n-1}$. Следовательно, выполняется рекуррентное соотношение $\alpha_k = -\{\langle h_n, \sigma_k \rangle_N + \sum_{s=1}^{k-1} \alpha_s \langle \sigma_s, \sigma_k \rangle_N\}$. Проверим, что $\langle q_n, q_n \rangle_N \neq 0$. В силу того, что $\langle q_n, \sigma_k \rangle_N = 0, k = \overline{1, n-1}$, и (3.6) справедливо равенство $\langle q_n, q_n \rangle_N = \langle q_n, h_n \rangle_N$. Если бы $\langle q_n, q_n \rangle_N = 0$, то в силу (3.4) и (3.5) выполнялось бы $\langle q_n, h_k \rangle_N = 0, k = \overline{1, n}$. Невозможность последних равенств вытекает из леммы 4, которую мы докажем далее, не опираясь на возможность построения системы со свойством (3.5). Итак, считаем, что $\langle q_n, q_n \rangle_N \neq 0$. Остается только взять в качестве $\sigma_n(z)$ функцию $q_n(z)/\sqrt{|\langle q_n, q_n \rangle|}$.

Сопоставим функции $u(z)$ из пространства $N_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$, ряд

$$u(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \sigma_k(z). \tag{3.7}$$

Коэффициенты $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ найдем из условий

$$\left\langle u - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \sigma_k, \sigma_n \right\rangle_N = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Подставляя в (3.8) значения $n = 1, 2, \dots$, последовательно находим μ_k по формуле

$$\mu_k = \Big\{ \langle u, \sigma_k \rangle_N - \sum_{s=1}^{k-1} \mu_s \langle \sigma_s, \sigma_k \rangle_N \Big\}.$$

Откуда можно вывести, что $\mu_k = \langle u, d_k \rangle_N$, где d_k — линейная комбинация функций h_s, $s = \overline{1, k}$. Функции $d_k(z)$ определяются единственным образом и не зависят от функции $u(z)$. Из рекуррентных соотношений для коэффициентов μ_k заключаем

$$d_k = \langle \sigma_k, \sigma_k \rangle_N \Big\{ \sigma_k - \sum_{s=1}^{k-1} d_s \langle \sigma_s, \sigma_k \rangle_N \Big\},$$

откуда делаем вывод, что коэффициенты μ_k равны сумме интегралов от произведения производных функции $u(z)$ по радиусам на границе $\widetilde{K}$ и полиномов $\dfrac{\partial}{\partial r}(d_k)_l^*(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l}$, $l = \overline{0, m}$.

Будем нумеровать функции $\sigma_n(z)$ и коэффициенты μ_n ряда (3.7) двумя индексами. Функция $\sigma_n(z)$ является линейной комбинацией функций $h_s(z), s=\overline{1,n}$. Пусть $h_n(z) = \overset{(\sim)}{h}{}^l_k(z)$, тогда будем полагать, что $\sigma_n(z) = \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k(z)$. Коэффициенты μ_n при функциях $\sigma_n = \overset{(\sim)}{\sigma}{}^l_k$ ряда (3.7) будем обозначать через $\overset{(\sim)}{\mu}{}^l_k(z)$.

Через $\tau,\ 0<\tau<1$, обозначим величину

$$\tau = \max\Big\{|z_k| + r_k, \frac{r_k}{1-|z_k|}, \frac{r_k}{|z_k - z_l| - r_l}:\ k,l = \overline{1,m},\quad k\neq l\Big\}. \tag{3.9}$$

Повторяя доказательство теоремы 1 в [3] и используя лемму 7, которую мы докажем далее, можно убедиться в справедливости следующей теоремы об асимптотике функций $\sigma^l_k(z)$.

Теорема 1. *При $\tau<\tau'<1$ справедлива оценка*

$$\sigma^l_k(z) = \begin{array}{ll} h^l_k(z)/k + O(\tau'^k), & k\to\infty,\quad l=0, \\ h^l_k(z)r_l/k + O(\tau'^k), & k\to\infty,\quad l=\overline{1,m}. \end{array}$$

Введем частичные суммы ряда (3.7)

$$s_n(z;u) = \sum_{l=1}^{n} \mu_k\sigma_k(z). \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.5) и (3.8) следует

$$\langle u - s_n(\cdot;u), h_k\rangle_N = 0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{3.11}$$

4. Гармонические всплески

Используя полученную вспомогательную систему $\sigma_k(z)$, построим гармонические всплески. Ряды по этим всплескам будут сходиться равномерно в замыкании $\widetilde{K}$. Для этого рассмотрим неотрицательную четную дважды непрерывно дифференцируемую функцию Мейера $\widehat{\varphi}(\omega)$, которая удовлетворяет требованиям

$$\widehat{\varphi}(\omega)\equiv 1 \text{ при } |\omega|\le\frac{1-\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}(\omega)\equiv 0 \text{ при } |\omega|\ge\frac{1+\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}^2\Big(\omega+\frac12\Big)-\frac12 \text{ нечетна при } |\omega|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

где $0<\varepsilon\le\dfrac13$. Функция $\widehat{\theta}(\omega)$, введенная Д. Оффином и К. И. Осколковым в [6], неотрицательна и определяется соотношением

$$\widehat{\theta}^2(\omega) = \widehat{\varphi}^2\Big(\frac{\omega}{2}\Big) - \widehat{\varphi}^2(\omega).$$

Заметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\theta}(\omega)\subseteq\Big\{\omega\in\mathbb{R}: \dfrac{1-\varepsilon}{2}<|\omega|<1+\varepsilon\Big\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ — дважды дифференцируемая функция.

Перейдем теперь к построению гармонических всплесков в $\widetilde{K}$. Для этого мы будем использовать всплески из статьи [1], являющиеся базисом пространства $C[0,2\pi]$. Выпишем эти всплески в явном виде

$$w_0(x)\equiv\frac{1}{\sqrt2},\quad w_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta^n_\nu\cos\nu x,\quad \widetilde{w}_n(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta^n_\nu\sin\nu x, \tag{4.1}$$

где

$$\theta^n_\nu = 2^{(2-j)/2}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sin\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j},\quad n=2^{j-1}+k,\quad j\in\mathbb{N},\quad k=0,1,\dots,2^{j-1}-1.$$

Так как носитель функции $\widehat{\theta}(\omega)$ компактен, то при достаточно больших ν выполняется $\theta_\nu^n = 0$. Таким образом, суммы в (4.1) фактически являются конечными.

Рассмотрим преобразование, переводящее ряд $\sum\limits_{n=1}\{\lambda_n\gamma_n(z) + \widetilde{\lambda}_n\widetilde{\gamma}_n(z)\}$ в ряд $\sum\limits_{n=1}\{\Lambda_n\Gamma_n(z) + \widetilde{\Lambda}_n\widetilde{\Gamma}_n(z)\}$, в котором

$$\overset{(\sim)}{\Lambda}_n = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta_\nu^n \overset{(\sim)}{\lambda}_\nu, \quad \overset{(\sim)}{\Gamma}_n = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta_\nu^n \overset{(\sim)}{\gamma}_\nu.$$

Применим это преобразование при каждом $l = \overline{0,m}$ к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\mu_n^l\sigma_n^l(z) + \widetilde{\mu}_n^l\widetilde{\sigma}_n^l(z)\}$$

и получим ряд

$$M_0^l G_0^l(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\{M_n^l\Omega_n^l(z) + \widetilde{M}_n^l\widetilde{\Omega}_n^l(z)\},$$

где

$$\overset{(\sim)}{M}{}_n^l = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta_\nu^n \overset{(\sim)}{\mu}{}_\nu^l, \quad \overset{(\sim)}{\Omega}{}_n^l(z) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \theta_\nu^n \overset{(\sim)}{\sigma}{}_\nu^l(z). \tag{4.2}$$

Введем для гармонической функции $u(z) \in N_p(\widetilde{K})$ частичную сумму $S_n^W(z;u),\ n \in \mathbb{N}$, всплесков следующим образом:

$$S_n^W(z;u) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\{M_s^l\Omega_s^l(z) + \widetilde{M}_s^l\widetilde{\Omega}_s^l(z)\}.$$

Введем число δ, удовлетворяющее неравенствам

$$\delta \le 1, \quad \delta \ge |z_k| + r_k, \quad \frac{r_k}{\delta} \le |z_k - z_l| - r_l, \quad k,l = \overline{0,m}, \quad k \ne l, \tag{4.3}$$

и число $\tau_\delta,\ 0 < \tau_\delta < 1$, следующим образом:

$$\tau_\delta = \max\Big\{|z_k| + \frac{r_k}{\delta}, \quad \frac{r_k}{\delta - |z_k|}, \quad \frac{r_k}{|z_k - z_l| - r_l/\delta}, \quad k,l = \overline{1,m}, \quad k \ne l\Big\}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим норму

$$\|u\|_\delta = \|u(\delta e^{ix})\|_C + \sum_{l=1}^{m}\Big\|u\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big)\Big\|_C, \tag{4.5}$$

где $\|f\|_C = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$ и δ удовлетворяет неравенствам (4.3). Обозначим через $E_n f(x)$ наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n по норме пространства $C[0,2\pi]$. Введем следующее скалярное произведение: $(f,g)_{L_2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$.

Рассмотрим частичные суммы $W_n(x;f)$ разложения $f(x) \in C[0,2\pi]$ по всплескам (4.1)

$$W_n(x;f) = \sum_{l=0}^{n-1} w_l(x)(w_l,f)_{L_2} + \sum_{l=1}^{n-1}\widetilde{w}_l(x)(\widetilde{w}_l,f)_{L_2}.$$

В статье [1] доказано, что нормы операторов $W_n : C[0,2\pi] \to C[0,2\pi], 1 \le p \le \infty$, которые мы обозначим через $\|W_n\|$, равномерно ограничены. Отметим, что если $u(z) \in N_p(\widetilde{K}), 1 \le p < \infty$, то функция $u(z)$ непрерывна, поэтому из следующей теоремы вытекает, что система функций (4.2) является базисом пространства $N_p(\widetilde{K}), 1 \le p < \infty$, с равномерной нормой $\|u\|_\infty = \max\{|u(z)|\colon z \in \overline{\widetilde{K}}\}$, и на любом компакте в области $\widetilde{K}$ сходимость частичных сумм $S_n^W(\cdot;u)$ будет происходить со скоростью геометрической прогрессии. Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 4 в [3].

Теорема 2. *Пусть функция* $u(z) \in N_p(\widetilde{K}), 1 \le p < \infty$, $n = 2^{j-1} + k, 0 \le k < 2^{j-1}$, $N = [2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, δ *определяется неравенствами* (4.3). *Тогда для суммы* $S_n^W(\cdot; u)$ *и числа* τ', $\tau_\delta < \tau' < 1$, *выполняется оценка*

$$\|u - S_n^W(\cdot; u)\|_\delta \le \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \delta^{N+1}(\|W_n\| + 1) \sum_{l=0}^{m} E_N u(z_l + r_l e^{ix}) + O({\tau'}^N)\|u\|_\infty, \quad n \to \infty,$$

где числа τ *и* τ_δ *и норма* $\|\cdot\|_\delta$ *введены в* (3.9), (4.4) *и* (4.5).

5. Вспомогательные результаты

Будем использовать нормы

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \quad \|f(x)\|_{L_\infty} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

и следующие нормы в пространстве $N_p(\widetilde{K})$ с учетом представления (2.7):

$$\|u\|_p = \sum_{k=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}, \tag{5.1}$$

$$\|u\|_{p,\widetilde{K}} = \sum_{k=0}^{m} \|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \tag{5.2}$$

В работе [2] доказана лемма 4, которую мы приведем в несколько ослабленном виде.

Лемма 1. *Нормы* $\|\cdot\|_p$ *и* $\|\cdot\|_{p,\widetilde{K}}$, *введенные в* (5.1) *и* (5.2) *при всех* $1 \le p \le \infty$, *эквивалентны в пространстве* $N_1(\widetilde{K})$.

В статье [3] установлена следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $u(z)$ — *гармоническая в области* $\widetilde{K}$ *и непрерывная в ее замыкании функция, тогда функция*

$$\gamma(\delta; u) = \int_0^{2\pi} |u(\delta e^{ix})|^p dx + \sum_{k=1}^{m} \int_0^{2\pi} \left|u\Big(z_k + \frac{r_k}{\delta} e^{ix}\Big)\right|^p dx$$

является возрастающей по переменной δ, *удовлетворяющей неравенствам* (4.3).

Введем еще одно псевдоскалярное произведение с помощью разложения (2.7) функции $v(z)$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(z_k + r_k e^{ix}) v_k(z_k + r_k e^{ix}) dx. \tag{5.3}$$

Следующая лемма является обобщением леммы 2 статьи [3].

Лемма 3. *Пусть* I — *конечное множество различных натуральных чисел, и пусть для функции* $R(z) = \sum_{n \in I} \lambda_n h_n(z)$ *выполняются равенства* $\langle R, h_n \rangle = 0$, $n \in I$. *Тогда* $R(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть функция $R(z)$ такова, что $\langle R, h_n\rangle = 0$, $n \in I$. Обозначим через $I_c^l, l = \overline{0,m}$, множество индексов k таких, что $h_k^l = h_n$ и $n \in I$. Аналогично, обозначим через $I_s^l, l = \overline{0,m}$, множество индексов k таких, что $\widetilde{h}_k^l = h_n$ и $n \in I$. Тогда $\langle R, h_k^l\rangle = 0, k \in I_c^l$ и $\langle R, \widetilde{h}_k^l\rangle = 0, k \in I_s^l$. Откуда по определению (5.3) произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ следует

$$\int_0^{2\pi} R(z_l + r_l e^{ix}) \cos kx dx = 0, \quad k \in I_c^l, \quad \int_0^{2\pi} R(z_l + r_l e^{ix}) \sin kx dx = 0, \quad k \in I_s^l, \tag{5.4}$$

что в свою очередь означает

$$E_l^* R(z_l + r_l e^{ix})_2 = \|R(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_2}, \tag{5.5}$$

где $E_l^* f(x)_2 = \min_{\chi_k, \widetilde{\chi}_k} \|f(x) - \sum_{k\in I_c^l} \chi_k \cos kx - \sum_{k \in I_s^l} \widetilde{\chi}_k \sin kx\|_2$. Пусть выполняется $R = \sum_{s,l} \lambda_s^l h_s^l + \sum_{s,l} \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l$. Поскольку разложение (2.7) единственно, мы получаем, что l-я из компонент функции $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_l$ совпадает с ней самой, а остальные равны нулю, т. е. $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_l = \overset{(\sim)}{h}{}_s^l$, $(\overset{(\sim)}{h}{}_s^l)_\nu = 0$, $\nu \neq l$. Откуда заключаем, что l-я компонента представления (2.7) вычисляется по формуле

$$R_l = \sum_s \lambda_s^l h_s^l + \sum_s \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l.$$

Следовательно, $R_l(z_l + r_l e^{ix})$ является тригонометрическим полиномом по гармоникам $\cos kx$, $k \in I_c^l$ и $\sin kx, k \in I_s^l$. Значит, справедливо равенство $E_l^* R(z_l + r_l e^{ix})_2 = E_l^*(R - R_l)(z_l + r_l e^{ix})_2$. Введем функцию $v_l, l = \overline{1,m}$, по правилу

$$v_l(z) = (R - R_l)\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} z\Big) \tag{5.6}$$

при δ, удовлетворяющему неравенствам (4.3), и $\delta \neq 1$. Легко проверить, что функция $v_l(z)$ является гармонической в круге K. Пусть $v_l(e^{ix}) = \omega_0/\sqrt{2} + \sum_{k=1}^\infty \{\omega_k \cos kx + \widetilde{\omega}_k \sin kx\}$. Из того, что $v_l(z) \in h_\infty(K)$, следует, что $v_l(\delta e^{ix}) = \omega_0/\sqrt{2} + \sum_{k=1}^\infty \delta^k \{\omega_k \cos kx + \widetilde{\omega}_k \sin kx\}$. Отсюда вытекает неравенство

$$E_l^{*2} v_l(\delta e^{ix})_2 = \sum_{k \notin I_c^l} \delta^{2k} \omega_k^2 + \sum_{k \notin I_s^l} \delta^{2k} \widetilde{\omega}_k^2 \leq \sum_{k \notin I_c^l} \omega_k^2 + \sum_{k \notin I_s^l} \widetilde{\omega}_k^2 = E_l^{*2} v_l(e^{ix})_2. \tag{5.7}$$

Откуда заключаем

$$E_l^*(R - R_l)(z_l + r_l e^{ix})_2 = E_l^* v_l(\delta e^{ix})_2 \leq E_l^* v_l(e^{ix})_2 = E_l^*(R - R_l)\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)_2. \tag{5.8}$$

Учитывая (5.5)–(5.8) и то, что $R_l\Big(z_l + \dfrac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big) = \sum\limits_{k \in I_c^l} \delta^k \lambda_k^l \cos kx + \sum\limits_{k \in I_c^l} \delta^k \widetilde{\lambda}_k^l \sin kx$, получаем, что при $l = \overline{1,m}$

$$\begin{aligned} \|R(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_2} &= E_l^* R(z_l + r_l e^{ix})_2 = E_l^*(R - R_l)(z_l + r_l e^{ix})_2 \\ &\leq E_l^*(R - R_l)\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)_2 = E_l^* R\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)_2 \leq \Big\|R\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big)\Big\|_{L_2}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Аналогично получается неравенство

$$\|R(e^{ix})\|_{L_2} \leq \big\|R\big(\delta e^{ix}\big)\big\|_{L_2}. \tag{5.10}$$

Используя неравенства (5.9) и (5.10) и лемму 2 при $p = 2$, получаем $\gamma(\delta; R) \leq \gamma(1; R) \leq \gamma(\delta; R)$. Следовательно, $\gamma(\delta; R) = \gamma(1; R)$, из чего заключаем, что все предыдущие неравенства в этой лемме должны обратиться в равенства. Значит, $E_l^* v_l(\delta e^{ix})_2 = E_l^* v_l(e^{ix})_2$. Из (5.7) видно, что это возможно, только если $\omega_k = 0$ при $k \notin I_c^l$, и $\widetilde{\omega}_k = 0$ при $k \notin I_s^l$. Следовательно, при $l = \overline{1,m}$ выполняется $v_l(e^{ix}) = \omega_0 + \sum_{k\in I_c^l} \omega_k \cos kx + \sum_{k\in I_s^l} \omega_k \sin kx$. Поскольку $v_l(z) \in h_\infty(K)$, то

$$v_l(z) = \omega_0 + \sum_{k\in I_c^l} \omega_k \mathrm{Re} z^k + \sum_{k\in I_s^l} \omega_k \mathrm{Im} z^k.$$

В силу формулы (5.6) при $l = \overline{1,m}$ получаем

$$(R - R_l)(z) = \omega_0 + \sum_{k\in I_c^l} \omega_k \mathrm{Re}\Big(\frac{\delta(z-z_l)}{r_l}\Big)^k + \sum_{k\in I_s^l} \omega_k \mathrm{Im}\Big(\frac{\delta(z-z_l)}{r_l}\Big)^k = \mathrm{Re} P_l(z), \tag{5.11}$$

где $P_l(z)$ — некоторый многочлен. Складывая неравенства (5.11) при $k = \overline{1,m}$ и используя $R(z) = \sum_{l=0}^m R_l(z)$, заключаем, что $R(z) = \Big(\mathrm{Re} \sum_{l=0}^m P_l(z) - R_0(z)\Big)/(m-1)$. Так как правая часть предыдущего равенства представляет собой вещественную часть некоторого многочлена, то $R_k(z) \equiv 0, k = \overline{1,m}$. Следовательно, $R(z) = R_0(z)$. Равенство $R_0(z) \equiv 0$ следует из формул (5.4) при $l = 0$. Таким образом, $R(z) \equiv 0$. □

Лемма 4. *Пусть функция $R(z)$ является линейной комбинацией функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$, и $\langle R, h_k\rangle_N = 0, k = \overline{1,n}$. Тогда $R(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть выполняется $R = \sum\limits_{l=0}^{m}\Big(\sum\limits_{s=1}^{n_l} \lambda_s^l h_s^l + \sum\limits_{s=1}^{\widetilde{n}_l} \widetilde{\lambda}_s^l \widetilde{h}_s^l\Big)$. По определению произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$ и в силу того, что $\frac{\partial}{\partial r} \overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l} = \frac{k}{r_l} \overset{(\sin)}{\cos} kx$ при $k = \overline{1, \overset{(\sim)}{n}_l}$, справедливо равенство

$$0 = \langle R, \overset{(\sim)}{h}{}_k^l\rangle_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial R(z_l + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_l} \frac{k}{r_l} \overset{(\sin)}{\cos} kx dx.$$

Откуда заключаем, что ряд Фурье функции $\frac{\partial R(z_l + re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_l}, l = \overline{0,m}$, не содержит гармоник $\overset{(\sin)}{\cos} kx, k = \overline{1, \overset{(\sim)}{n}_l}$. Рассмотрим функцию $\widetilde{R}(z)$, гармонически сопряженную к $R(z)$. Функция $\widetilde{h}_k^l$ является гармонически сопряженной к функции h_k^l, и функция h_k^l является гармонически сопряженной к функции $-\widetilde{h}_k^l$. Следовательно, $\widetilde{R}(z)$ является линейной комбинацией функций $h_k^l(z),\ k = \overline{1,\widetilde{n}_l}$, и $\widetilde{h}_k^l(z),\ k = \overline{1,n_l}$.

Заметим, что функции $R(z)$ и $\widetilde{R}(z)$ являются однозначными вещественнозначными гармоническими функциями. Следовательно, для функции $\widetilde{R}(z)$ справедливо равенство

$$\widetilde{R}(z) - \widetilde{R}(a) = \int_a^z \frac{\partial \widetilde{R}}{\partial x} dx + \frac{\partial \widetilde{R}}{\partial y} dy,$$

где интегрирование происходит по кривой, соединяющей точки z_0 и z. Из формул Коши — Римана следует

$$\widetilde{R}(z) - \widetilde{R}(a) = \int_a^z -\frac{\partial R}{\partial y} dx + \frac{\partial R}{\partial x} dy. \tag{5.12}$$

Проверим теперь при $l = \overline{0,m}$ формулу

$$\widetilde{R}(z_l + r_l e^{i\varphi}) - \widetilde{R}(z_l + r_l) = r_l \int_0^{\varphi} \frac{\partial R}{\partial r}(z_l + re^{it})\Big|_{r=r_l} dt. \tag{5.13}$$

В силу формулы (5.12) достаточно доказать

$$\int\limits_{z_l+r_l}^{z_l+r_le^{i\varphi}} -\frac{\partial R}{\partial y}dx + \frac{\partial R}{\partial x}dy = r_l\int\limits_0^{\varphi}\frac{\partial R}{\partial r}(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l}dt. \tag{5.14}$$

Так как координаты x и y при движении по окружности $C_r(z_l)$ определяются по формулам $x = \mathrm{Re} z_l + r\cos t$, $y = \mathrm{Im} z_l + r\sin t$, то выполняются равенства

$$\frac{\partial}{\partial r}R(z_l+re^{it}) = \frac{\partial}{\partial x}R(z_l+re^{it})\frac{dx}{dr} + \frac{\partial}{\partial y}R(z_l+re^{it})\frac{dy}{dr}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}R(z_l+re^{it})\cos t + \frac{\partial}{\partial y}R(z_l+re^{it})\sin t. \tag{5.15}$$

Из (5.15) при $x = \mathrm{Re} z_l + r_l\cos t$, $y = \mathrm{Im} z_l + r_l\sin t$ следует

$$r_l\frac{\partial}{\partial r}R(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l} = \frac{\partial}{\partial x}R(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l}dy - \frac{\partial}{\partial y}R(z_l+re^{it})\Big|_{r=r_l}dx.$$

Откуда сразу же получается равенство (5.14), эквивалентное (5.13). Из (5.13) следует, что функция $\widetilde{R}(z_l+r_le^{ix})$ как функция угла x является первообразной функции $r_l\dfrac{\partial R}{\partial r}(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}$.

Как мы уже отмечали, тригонометрический ряд Фурье функции $\dfrac{\partial R(z_l+re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=r_l}$, $l=\overline{0,m}$, не содержит гармоник $\overset{(\sin)}{\cos} kx$, $k=\overline{1,\overset{(\sim)}{n}_l}$. Следовательно, ряд Фурье ее первообразной $\dfrac{1}{r_l}\widetilde{R}(z_l+r_le^{i\varphi})$ не содержит гармоник $\cos kx, k=\overline{1,\widetilde{n}_l}$, и $\sin kx, k=\overline{1,n_l}$. Таким образом, при $l=\overline{0,m}$, $k=\overline{1,\overset{(\sim)}{n}_l}$, с учетом определения произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по формуле (5.3) выполняется $0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\widetilde{R}(z_l+r_le^{ix})\overset{(\sin)}{\cos} kx\,dx = \langle\widetilde{R}, \overset{(\sim)}{h}{}^l_k\rangle$. Таким образом, функция $\widetilde{R}(z)$ является линейной комбинацией функций $h^l_k(z), k=\overline{1,\widetilde{n}_l}$, и $\widetilde{h}^l_k(z), k=\overline{1,n_l}$, и выполняются предыдущие равенства. Отсюда, применяя лемму 3, заключаем, $\widetilde{R}(z)\equiv 0$. Следовательно, $R(z)\equiv \mathrm{const}$, поскольку ее гармонически сопряженная функция $\widetilde{R}(z)\equiv 0$. Остается заметить, что система (3.1) не содержит константы и, значит, $R(z)\equiv 0$. □

Путем непосредственного вычисления с помощью разложения в ряд Тейлора и оценки с использованием бинома Ньютона можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5. *Для функций системы* (3.1)*, произведения* (3.2) *и числа* τ*, введенного в* (3.9)*, равномерно по* k*,* k'*,* l *и* l' *выполняются оценки*

$$\langle \overset{(\sim)}{h}{}^l_k/k, \overset{(\sim)}{h}{}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N = \delta_{k,k'}\delta_{l,l'} + O(\tau^k),\quad k\to\infty,\quad \langle \overset{(\sim)}{h}{}^l_k/k, \overset{(\sim)}{h}{}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N = \delta_{k,k'}\delta_{l,l'} + O(\tau^{k'}),\quad k'\to\infty, \tag{5.16}$$

$$\langle h^l_k/k, \widetilde{h}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N = O(\tau^k),\quad k\to\infty,\quad \langle h^l_k/k, \widetilde{h}^{l'}_{k'}/k'\rangle_N = O(\tau^{k'}),\quad k'\to\infty, \tag{5.17}$$

$$\langle \widetilde{h}^l_k/k, h^{l'}_{k'}/k'\rangle_N = O(\tau^k),\quad k\to\infty,\quad \langle \widetilde{h}^l_k/k, h^{l'}_{k'}/k'\rangle_N = O(\tau^{k'}),\quad k'\to\infty. \tag{5.18}$$

Пусть $u(z)\in N_p(\widetilde{K}), 1\le p<\infty$. Воспользуемся представлением (2.7) и разложим функции $u_l(z_l+r_le^{ix})$, $l=\overline{0,m}$, в ряды Фурье

$$u_l(z_l+r_le^{ix}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma^l_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{\gamma^l_k\cos kx + \widetilde{\gamma}^l_k\sin kx\}, \tag{5.19}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам

$$\gamma_0^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/\sqrt{2})_{L_2}, \quad \overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sin)}{\cos} kx)_{L_2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{5.20}$$

Поскольку выполняются (5.19) и равенства $h_k^l(z_l + r_l e^{ix}) = \cos kx$, $\widetilde{h}_k^0(z_l + r_l e^{ix}) = \sin kx$, в круге K при $l = 0$ и вне $\overline{B_{r_l}(z_l)}$ при $l = \overline{1, m}$, выполняется

$$u_l = \frac{\gamma_0^l}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^0 + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^0\}. \tag{5.21}$$

В силу (2.7) и теоремы о среднем значении справедливо равенство

$$0 = u_l(\infty) = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), 1/2)_{L_2}, \quad l = \overline{1, m}. \tag{5.22}$$

Так как справедливы (2.4) и (5.22), то $\gamma_0^0 = (u_0(e^{ix}), 1/2)_{L_2} = (u(e^{ix}), 1/2)_{L_2} = 0$. Следовательно, справедливы равенства $\gamma_0^l = 0$, $l = \overline{1, m}$. Из разложения (2.7) и равенств (5.21) следует, что в $\widetilde{K}$ выполняется

$$u(z) = \sum_{l=0}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \{\gamma_k^l h_k^l(z) + \widetilde{\gamma}_k^l \widetilde{h}_k^l(z)\}. \tag{5.23}$$

Будем нумеровать коэффициенты $\overset{(\sim)}{\gamma}{}_k^l$ одним индексом в соответствии с тем, как функции $\overset{(\sim)}{h}{}_k^l$ нумеруются в порядке (3.3). Например, если $m = 1$, то функции h_k^l и $\widetilde{h}_k^l$ будут выписаны в порядке (3.3) следующим образом:

$$h_1^0(z), \widetilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \widetilde{h}_1^1(z), h_2^0(z), \widetilde{h}_2^0(z) \dots .$$

Значит, $h_3 = h_1^1$, $\gamma_3 = \gamma_1^1$, $h_4 = \widetilde{h}_2^0$ и $\gamma_4 = \widetilde{\gamma}_2^0$.

Введем частичную сумму $s_n^*(z; u)$ ряда (5.23)

$$s_n^*(z; u) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k h_k(z), \tag{5.24}$$

где коэффициенты вычисляются по формулам (5.20). Из определения коэффициентов γ_k и леммы 1 следует, что существует константа C_1 такая, что выполняется неравенство

$$|\gamma_k| \le C_1 \|u\|_1. \tag{5.25}$$

Здесь и далее все константы C_k предполагаются зависящими только от геометрии области $\widetilde{K}$.

Лемма 6. *Пусть $u(z) \in N_2(\widetilde{K})$, тогда существует константа C_2 такая, что выполняется неравенство*

$$\|u\|_2^2 \le C_2 \sum_{l=0}^{m} \int_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial}{\partial r} u(z_l + r e^{ix}) \Big|_{r=r_l} \Big)^2 dx, \tag{5.26}$$

где норма $\|\cdot\|_2$ введена в (5.1).

Доказательство. Оценим выражение $\|u_0\|_2$, где u_0 — компонента разложения (2.7). Пусть в круге K выполняется

$$u_0(re^{ix}) = \chi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (\chi_k \cos kx + \widetilde{\chi}_k \sin kx).$$

Так как $u(z) \in N_2(\widetilde{K})$, то $\chi_0 = 0$, следовательно,

$$\|u_0(e^{ix})\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty}(\chi_k^2 + \widetilde{\chi}_k^2) \le \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\chi_k^2 + \widetilde{\chi}_k^2) = \Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2}. \tag{5.27}$$

Аналогично устанавливается, что при $k = \overline{1,m}$

$$\|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|^2_{L_2} \le \Big\|\frac{\partial u_k}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big\|^2_{L_2}. \tag{5.28}$$

Из (5.27), (5.28) и леммы 1 получаем, что для доказательства (5.26) достаточно установить при $k = \overline{0,m}$ следующее неравенство:

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial r}(z_k + re^{ix})\Big|_{r=r_k}\Big\|^2_{L_2} \le C_3 \sum_{l=0}^{m} \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{\partial}{\partial r} u(z_l + re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2 dx. \tag{5.29}$$

Докажем (5.29) при $k = 0$. Рассмотрим число $\rho,\ 0 < \rho < 1$, выбранное таким образом, что круги $B_{r_k}(z_k),\ k = \overline{1,m}$, лежат внутри $B_\rho(0)$. Установим неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u_0(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} \le C_4\Big(\Big\|\frac{\partial u(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} + \Big\|\frac{\partial u_0(re^{ix})}{\partial r}\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2}\Big). \tag{5.30}$$

Из разложения (2.7) в кольце, образованном окружностями C_ρ и $C_1(0)$, следует, что существуют функции $u_0^*(z)$ и $u_1^*(z)$ такие, что $u(z) = u_0^*(z) + u_1^*(z)$, где $u_0^*(z)$ — гармоническая в $B_1(0)$ функция, $u_1^*(z)$ — гармоническая вне $B_r(0)$, $u_1^*(\infty) = 0$. С другой стороны, в силу (2.7) и того, что $u(z) \in N_2(\widetilde{K})$, выполняется равенство $u(z) = \sum_{k=0}^m u_k(z)$. Поскольку разложение (2.7) однозначно, мы заключаем, что справедливы соотношения $u_0^*(z) = u_0(z)$, $u_1^*(z) = \sum_{k=1}^m u_k(z)$.

Для функции $u(z)$ выполняются равенства (5.21), то есть

$$u_0^*(z) = \omega_0^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^0 r^k \cos kx + \widetilde{\omega}_k^0 r^k \sin kx, \tag{5.31}$$

$$u_1^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^1 \frac{\rho^k}{r^k} \cos kx + \widetilde{\omega}_k^1 \frac{\rho^k}{r^k} \sin kx. \tag{5.32}$$

В силу (5.31) получаем

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial r}(re^{ix}) = \frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix}) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^0 \frac{\partial r^k \cos kx}{\partial r} + \omega_k^0 \frac{\partial r^k \sin kx}{\partial r} = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^0 k r^{k-1} \cos kx + \omega_k^0 k r^{k-1} \sin kx.$$

Следовательно, в силу $u = u_0$ справедливо равенство

$$\Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\{(\omega_k^0)^2 + (\widetilde{\omega}_k^0)^2\}. \tag{5.33}$$

Аналогично, с учетом (5.31), (5.32) и того, что $A^* = 0$, получаем равенства

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=1}\Big\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\{(\omega_k^0 - \omega_k^1\rho^k)^2 + (\widetilde{\omega}_k^0 - \widetilde{\omega}_k^1\rho^k)^2\}, \tag{5.34}$$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\Big\{\Big(\omega_k^0\rho^{k-1} - \frac{\omega_k^1}{\rho}\Big)^2 + \Big(\widetilde{\omega}_k^0\rho^{k-1} - \frac{\widetilde{\omega}_k^1}{\rho}\Big)^2\Big\}. \tag{5.35}$$

Для доказательства неравенства (5.30) нам нужно оценить (5.33) сверху суммой рядов (5.34) и (5.35). Для этого достаточно установить, что справедлива оценка

$$(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k)^2 \le C_4\Big\{(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k\rho^k)^2 + \Big(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k\rho^{k-1} - \frac{\overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k}{\rho}\Big)^2\Big\}.$$

Для этого воспользуемся неравенством $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \ge (ac-bd)^2$ при $a = \overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k\rho^k$, $b = \overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k\rho^{k-1} - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k/\rho$, $c=1$, $d=\rho^{k+1}$, и получим

$$\Big\{(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k - \overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k\rho^k)^2 + \Big(\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k\rho^{k-1} - \frac{\overset{(\sim)}{\omega}{}^1_k}{\rho}\Big)^2\Big\}\{1+\rho^{2k+2}\} \ge (\overset{(\sim)}{\omega}{}^0_k)^2(1-\rho^{2k})^2.$$

Остается положить $C_4 = \max\limits_k \dfrac{1+\rho^{2k+2}}{(1-\rho^{2k})^2}$. Таким образом, неравенство (5.30) установлено.

Докажем теперь неравенство

$$\Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2} \le C_5\sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}u(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2 dx. \tag{5.36}$$

Функция $u_0(z)$ восстанавливается по значениям $\dfrac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}$, $l=\overline{0,m}$, по формуле

$$u_0(z) = \sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{i\varphi})\Big|_{r=r_l}K_l(\varphi,z)\,d\varphi,$$

где $K_l(\cdot,\cdot)$ — некоторые ядра. Ядра $K_l(\varphi,\rho e^{ix})$ непрерывно дифференцируемы по r, следовательно,

$$\frac{\partial u_0}{\partial r}(re^{ix})\Big|_{r=\rho} = \sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+re^{i\varphi})\Big|_{r=r_l}\frac{\partial K_l}{\partial r}(\varphi,\rho e^{ix})\Big|_{r=\rho}d\varphi.$$

Поскольку функции $\dfrac{\partial K_l}{\partial r}(\varphi,\rho e^{ix})\Big|_{r=\rho}$ непрерывны, то они ограничены некоторой константой C_6. По неравенству Коши получаем

$$\Big\|\frac{\partial u_0}{\partial r}(\rho e^{ix})\Big|_{r=\rho}\Big\|^2_{L_2} \le \frac{2}{\pi}C_6^2\sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(z_l+r_le^{ix})\Big|_{r=r_l}dx = 2\pi C_6^2\sum_{l=0}^{m}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}u(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2dx.$$

Неравенство (5.36) доказано. Учитывая (5.30), выводим, что справедливо (5.29) при $k=0$. Случаи $k=\overline{1,m}$ разбираются аналогично. □

Доказательство следующей леммы производится аналогично доказательству леммы 5 статьи [3].

Лемма 7. *Пусть функция* $u(z) \in N_p(\widetilde{K}), 1 \le p < \infty$. *Тогда при* $\tau < \tau' < 1$ *выполняется оценка*

$$\|s_n(\cdot;u) - s_n^*(\cdot;u)\|_\infty = O((\tau')^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n\to\infty,$$

где сумма $s_n(\cdot;u)$ введена в (3.10), а сумма $s_n^*(\cdot;u)$ — в (5.24).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v^*(z) \in N_p(\widetilde{K})$. Из соотношений (3.11) и леммы 4 следует, что $s_n(\cdot,v^*)$ однозначно определяется из условия

$$\langle v^* - s_n(\cdot,v^*), h_k\rangle_N = 0, \quad k=\overline{1,n}. \tag{5.37}$$

Представим сумму $s_n(z,v^*)$ в следующем виде: $s_n(z,v^*)=\sum_{l=1}^n\alpha_l^*h_l(z)$. Тогда из условия (5.37) следует, что коэффициенты α_l^* удовлетворяют системе уравнений

$$A\alpha^*=V^*, \tag{5.38}$$

где матрица A и векторы α^*, V^* определяются по формулам $A=(\langle h_l,h_k\rangle_N)_{l,k=1}^n$, $\alpha^*=(\alpha_l^*)_{l=1}^n$, $V^*=(\langle v^*,h_k\rangle_N)_{k=1}^n$. Решение системы уравнений (5.38) записывается в виде $\alpha^*=A^{-1}V^*$. Поскольку коэффициенты α_l^* определяются из системы (5.38) однозначно, матрица A обратима.

Оценим норму $\|A^{-1}\|_{l_2(M)}=\max_{\|V\|_{l_2}=1}\|A^{-1}V\|_{l_2}$, где $\|(y_1,y_2,\dots,y_n)\|_{l_2}=\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{1/2}$. Пусть $\|V\|_{l_2}=\|(V_1,V_2,\dots,V_n)\|_{l_2}=1$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $h_k(z), k=\overline{1,n}$, так, чтобы $\langle v,h_k\rangle_N=V_k,\quad k=\overline{1,n}$. Пусть выполняется

$$v(z)=\sum_{l=0}^m\Big\{\sum_{k=1}^{n_l}\alpha_k^l h_k^l+\sum_{k=1}^{\widetilde{n}_l}\widetilde{\alpha}_k^l\widetilde{h}_k^l\Big\}. \tag{5.39}$$

Введем норму $\|v\|_{\widetilde{K}}$ следующим образом:

$$\|v\|_{\widetilde{K}}^2=\sum_{l=0}^m\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big)^2dx.$$

Используя равенство Парсеваля для функции $\dfrac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}$, равенство

$$\frac{\partial}{\partial r}\overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}=k\overset{(sin)}{\cos}kx$$

и определение (5.3) произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_N$, имеем

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big\|_{L_2}^2=\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l},\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)_{L_2}^2$$

$$+\sum_{k=1}^\infty\Big\{\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l},\cos kx\Big)_{L_2}^2+\Big(\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l},\sin kx\Big)_{L_2}^2\Big\}$$

$$=\sum_{k=1}^\infty\{\langle v,h_k^l/k\rangle_N^2+\langle v,\widetilde{h}_k^l/k\rangle_N^2\}\le\sum_{k=1}^\infty\{\langle v,h_k^l\rangle_N^2+\langle v,\widetilde{h}_k^l\rangle_N^2\}. \tag{5.40}$$

Из (5.40) заключаем, что выполняется

$$\|v\|_{\widetilde{K}}^2=\sum_{l=0}^m\Big\|\frac{\partial}{\partial r}v(z_l+re^{ix})\Big|_{r=r_l}\Big\|_{L_2}^2\le\sum_{k=1}^\infty\langle v,h_k\rangle_N^2. \tag{5.41}$$

Из (5.39) следует, что набор $\{h_k\colon k=\overline{1,n}\}$ в представлении функции $v(z)$ состоит из функций $h_s^l, s=\overline{0,n_l}$, и $\widetilde{h}_s^l, s=\overline{1,\widetilde{n}_l}$. Оценим теперь $\langle v,\overset{(\sim)}{h}{}_{s'}^{l'}\rangle_N$ при $s'>\overset{(\sim)}{n}{}_{l'}$. Из (5.16), (5.17) и (5.18) следует, что при $s<s'$ выполняется

$$|\langle\overset{(\sim)}{h}{}_s^l,h_{s'}^{l'}\rangle_N|\le C_7ss'\tau^s,\quad|\langle\overset{(\sim)}{h}{}_s^l,h_{s'}^{l'}\rangle_N|\le C_7ss'\tau^{s'}.$$

Следовательно, $|\langle\overset{(\sim)}{h}{}_s^l,h_{s'}^{l'}\rangle_N|\le C_7ss'\tau^{(s+s')/2}$. Используя $\langle h_s^l,h_{s'}^l\rangle_N=0$ при $s<s'$, и неравенство $|\alpha_k|\le C_1\|v\|_1$ (см. (5.25) при $u(z)=v(z)$) и оценку $k\tau^{k/2}=O(\tau^{k/4})$, получаем при $s'\to\infty$

$$\langle v,h_{s'}^l\rangle_N=\Big\langle\sum_{l'=0}^m\Big\{\sum_{s=0}^{n_l}\alpha_s^lh_s^l+\sum_{s=1}^{\widetilde{n}_l}\widetilde{\alpha}_s^l\widetilde{h}_s^l\Big\},h_{s'}^{l'}\Big\rangle_N\le\|v\|_1\sum_{l'=0}^m\sum_{s=0}^\infty O(ss'\tau^{(s+s')/2})\le\|v\|_2O(\tau^{s'/4}),$$

где норма $\|\cdot\|_p$ введена в (5.1). Аналогично оценивается выражение $\langle v, \widetilde{h}^{l'}_{s'}\rangle_N$ при $s' > \widetilde{n}_{l'}$. Таким образом, при $s > \overset{(\sim)}{n}_l, l = \overline{0,m}$, выполняется

$$\langle v, \overset{(\sim)}{h}{}^l_s\rangle_N = O(\tau^{s/4})\|v\|_2, \quad s \to \infty. \tag{5.42}$$

Заметим, что если $\overset{(\sim)}{h}{}^l_k = h_n$, то для числа n справедливы неравенства $(m+1)(2k-1) < n \le (m+1)(2k+1)$. Из (5.41), (5.42), предыдущего замечания и леммы 6 следует

$$\|v\|^2_{\widetilde{K}} = \sum_{k=1}^{n}\langle v, h_k\rangle_N^2 + \|v\|_2^2 O(\tau^{n/(8m+8)}) = \sum_{k=1}^{n}\langle v, h_k\rangle_N^2 + \|v\|^2_{\widetilde{K}} O(\tau^{n/(8m+8)}), \quad n \to \infty. \tag{5.43}$$

Из оценки (5.43) выводим, что при достаточно больших n выполняется

$$\|v\|^2_{\widetilde{K}} \le C_8 \sum_{k=1}^{n}\langle v, h_k\rangle_N^2. \tag{5.44}$$

Из леммы 4 вытекает, что $\Big(\sum_{k=1}^n \langle v, h_k\rangle_N^2\Big)^{1/2}$ является нормой в пространстве линейных комбинаций функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$. Отсюда в силу эквивалентности норм в конечномерных пространствах неравенство (5.44) будет выполняться для всех n с некоторой константой C_9.

Из сделанного выше предположения о том, что $\|V\|_2^2 = 1$, и равенств $\|V\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \langle v, h_k\rangle_N^2$ следует, что выполняется $\|v\|_{\widetilde{K}} \le C_9$. Заметим, что коэффициенты $\overset{(\sim)}{\alpha}{}^l_k$ в (5.39) являются решением системы уравнений $A\alpha = V$, где $\alpha = (\alpha^l_k)_{k=1}^n$. Из формулы (5.25) при $u(z) = v(z)$ следует, что $|\alpha_s| \le C_1\|v\|_2$. С помощью леммы 6 получаем $|\alpha_s| \le C_{10}$. Откуда заключаем $\|A^{-1}V\|_2 = \|(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\|_2 \le C_{10}\sqrt{n}$. Поэтому справедливо неравенство

$$\|A^{-1}\|_{l_2(M)} \le C_{10}\sqrt{n}. \tag{5.45}$$

Из (3.11) следует, что линейный оператор частичной суммы $s_n\colon u \to s_n(\cdot;u)$ сохраняет линейные комбинации функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$. Отсюда выводим, что выполняется $s_n(\cdot;u) - s_n^*(\cdot;u) = s_n(\cdot;u - s_n^*(\cdot;u))$.

Пусть далее $v^*(z) = u(z) - s_n^*(z;u)$. Здесь частичная сумма $s_n(\cdot;v^*)$ находится из системы (5.38). В силу оценки (5.45) получаем, что справедливо неравенство

$$\|\alpha^*\|_{l_2} \le \|A^{-1}\|_{l_2(M)}\|V^*\|_{l_2} \le C_{10}\sqrt{n}\|V^*\|_{l_2}. \tag{5.46}$$

Оценим теперь величину $\|V^*\|_{l_2}$. Координаты V_k^* вычисляются по формуле $V_k^* = \langle v^*, h_k\rangle_N = \langle u - s_n^*(\cdot,u), h_k\rangle_N$. Из равенств (5.23) и (5.24) следует

$$u(z) - s_n^*(z;u) = \sum_{l=n+1}^{\infty}\gamma_l h_l(z). \tag{5.47}$$

Пусть $h_k = \overset{(\sim)}{h}{}^s_t$, тогда из (2.6) и (3.2) следует

$$\langle u - s_n^*(\cdot;u), h_k\rangle_N = \lim_{R\to r_s}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}(u - s_n^*(\cdot;u))(z_s + re^{ix})\Big|_{r=R}\frac{\partial}{\partial r}h_k(z_s + re^{ix})\Big|_{r=R}dx. \tag{5.48}$$

Поскольку $s_n^*(z;u)$ сходится равномерно к $u(z)$ внутри $\widetilde{K}$, то, подставляя в (5.48) формулу (5.47) и меняя местами суммирование и интегрирование, в пределе получаем

$$\langle u - s_n^*(\cdot;u), h_k\rangle_N = \sum_{l=n+1}^{\infty}\gamma_l\langle h_l, h_k\rangle_N.$$

С помощью (5.25) и леммы 5 выводим

$$\langle u - s_n^*(\cdot;u), h_k\rangle_N = \sum_{l=n+1}^{\infty} \gamma_l \langle h_l, h_k\rangle_N = \sum_{l=n+1}^{\infty} |\gamma_l| O(kl\tau^{l/(2m+2)})$$

$$\le C_1 \|u\|_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} O(kl\tau^{l/(2m+2)}) = \|u\|_1 O(kn\tau^{n/(2m+2)}), \quad n\to\infty.$$

Таким образом,

$$\|V^*\|_{l_2} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \langle u - s_n(\cdot;u), h_k\rangle_N^2\Big)^{1/2}$$

$$= O\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 n^2 \tau^{2n/(2m+2)}\Big)^{1/2}\Big)\|u\|_1 = O(n^{5/2}\tau^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n\to\infty.$$

Подставим это соотношение в (5.46) и получим

$$\|\alpha^*\|_{l_2} = O(n^3\tau^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n\to\infty. \tag{5.49}$$

Из определения коэффициентов α_k^* следует, что выполняются равенства $s_n(z; u - s_n^*(\cdot;u)) = s_n(z;v^*) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* h_k(z)$. Из (5.49) и того, что $|h_k| = O(1), z\in \widetilde{K}$, получаем

$$\|s_n(\cdot;u) - s_n^*(\cdot;u)\|_\infty = \|s_n(u - s_n^*(\cdot;u))\|_\infty = \Big\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^* h_k(z)\Big\|_\infty$$

$$\le \max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| \sum_{k=1}^{n} \|h_k(z)\|_\infty = O(n^4\tau^{n/(2m+2)})\|u\|_1 = O((\tau')^{n/(2m+2)})\|u\|_1, \quad n\to\infty, \quad \tau<\tau'<1.$$

□

Автор благодарит Николая Ивановича Черных за внимание к работе и за замечания, позволившие улучшить текст статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
2. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 99–114.
3. **Дубосарский Г.А.** Гармонические всплески в многосвязной области с круговыми границами и их приложения к задачам математической физики// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 109–124.
4. **Голузин Г. М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
5. **Субботин Ю. Н., Черных Н. И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
6. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. approx. 1993. Vol. 9, № 2. P. 319–325.

Дубосарский Глеб Александрович
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: glebUU@mail.ru

Поступила 10.10.2014

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ОГРАНИЧЕНИИ[1]

Д. О. Зыков

Исследуются наибольшее и наименьшее значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов, не превосходящих функции $\varphi(x) = x$ на отрезках $[0, \pi]$ и $[0, 2\pi]$. Получены двусторонние оценки первого коэффициента и найдено асимптотическое поведение его максимального и минимального значений по порядку полинома. Даны оценки старших коэффициентов.

Ключевые слова: тригонометрический полином, односторонние ограничения.

D. O. Zykov. Coefficients of trigonometric polynomials under a one-sided constraint.

For odd trigonometric polynomials bounded from above by the function $\varphi(x) = x$ on the intervals $[0, \pi]$ and $[0, 2\pi]$, we study the maximum and minimum values of coefficients. We obtain two-sided estimates for the first coefficient and find the asymptotic behavior of its maximum and minimum values with respect to the order of the polynomial. We estimate the leading coefficients.

Keywords: trigonometric polynomial, one-sided constraints.

1. Введение

В данной статье изучаются наибольшее и наименьшее значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx, \tag{1.1}$$

удовлетворяющих одному из двух ограничений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \quad 0 \le x \le \pi; \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{1.3}$$

В частности, доказано, что в предположении (1.3) для первого коэффициента полинома справедливы (в некотором смысле окончательные) оценки

$$-6 \le a_1 \le 2.$$

Экстремальные задачи для тригонометрических полиномов — обширный раздел теории функций (см., например, монографии [1; 2], работы [3; 4] и приведенную в них библиографию). Большое число исследований было посвящено экстремальным задачам для коэффициентов неотрицательных тригонометрических полиномов (см., например, работы [5–7] и приведенную в них библиографию). Важное значение в теории функций имеет результат Л. Фейера (1915)

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

о максимальном значении первого коэффициента неотрицательного тригонометрического полинома с фиксированным средним значением [8] (см. изложение этого результата в [2, т. 2, отд. VI]). Для старших коэффициентов такую задачу решили (1928) Е. Егервари и О. Сасс [9].

Работа разбита на два раздела в соответствии с ограничениями (1.2) и (1.3).

2. Одностороннее ограничение на отрезке $[0, \pi]$

2.1. Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(\pi)$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов (1.1) с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{2.1}$$

При $1 \le k \le n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значение

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}, \quad A_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\} \tag{2.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$. В этом разделе мы найдем конструктивные оценки для коэффициентов тригонометрических полиномов различных степеней. Наиболее полно эти величины были изучены для $k = 1$.

2.2. Случай $k = 1,\ n = 2$

При $n = 2,\ k = 1$ величину (2.2) можно вычислить точно.

Теорема 1. *При* $n = 2,\ k = 1$ *величина* (2.2) *имеет следующее значение*:

$$A_1^+(2) = \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Наибольшее значение первого коэффициента в классе $\mathfrak{F}_2(\pi)$ *имеет полином*

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ ограничение (2.1) принимает вид

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x \le x, \quad 0 < x < \pi.$$

В точке $x = \pi/2$ последнее ограничение принимает вид $a_1 \le \pi/2$, а это влечет оценку $A_1^+(2) \le \pi/2$. Для обоснования такой же оценки снизу величины $A_1^+(2)$ воспользуемся полиномом f_2, определенным в (2.4). Первый коэффициент этого полинома как раз и имеет значение $\pi/2$. Поэтому для обоснования первого равенства в (2.3) осталось показать, что $f_2 \in \mathfrak{F}_2$, т. е. проверить, что разность $\varphi(x) = x - f_2(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ неотрицательная. Производная

$$\varphi'(x) = 1 - f_2'(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\cos x - \cos 2x\right) = 2\cos x\left(\cos x - \frac{\pi}{4}\right)$$

функции φ на $[0, \pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках: $x_1 = \arccos(\pi/4)$ и $x_2 = \pi/2$; более того, производная меняет знак в точке x_1 с “+” на “−” и в точке x_2 с “−” на “+”. Отсюда заключаем, что функция φ на отрезке $[0, x_1]$ возрастает от значения $\varphi(0) = 0$, убывает на $[x_1, x_2]$ до значения $\varphi(x_2) = \varphi(\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на $[x_2, \pi]$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi]$ функция φ действительно неотрицательная. Утверждение (2.3) и экстремальность полинома f_2 доказаны. □

2.3. Поведение величины $A_1^+(n)$ по n

В этом подразделе мы исследуем поведение величины $A_1^+(n)$ по n при $n \to +\infty$.

Теорема 2. *Для величин $A_1^+(n)$ и $A_1^-(n)$ справедливы следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $A_1^+(n) \leq 2$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^+(n) = 2$.*

Доказательство. Начнем с первого утверждения теоремы. Функция $\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$ неотрицательная. Умножим неравенство (2.1) для $x \in [0,\pi]$ на функцию $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0,\pi]$. Учитывая, что $\int_0^\pi \sin x \sin kx\, dx = 0,\ k \neq 1$, получаем неравенство

$$a_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx \leq \int\limits_0^\pi x \sin x\, dx. \tag{2.5}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^\pi x\sin x\, dx = \pi,$$

то неравенство (2.5) дает оценку $a_1 \leq 2$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим конкретную функцию f, которая для $x \in [0,\pi)$ определена равенством $f(x) = x$. Разложение этой функции в ряд Фурье по системе $\{\sin kx\}_{k=1}^\infty$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \sin kx, \quad \text{где} \quad a_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k}, \quad k \geq 1;$$

для дальнейшего важно, что $a_1 = 2$. Сгладим функцию f следующим образом. Используя параметр $\delta \in (0,\pi)$, определим на $[0,\pi]$ функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi-\delta]; \\ \tau_\delta(x), & x \in [\pi-\delta, \pi], \end{cases}$$

где

$$\tau_\delta(x) = -\frac{\pi}{\delta^2}x^2 + \frac{2\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2}{\delta^2}x - \frac{\pi(\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2)}{\delta^2}$$

есть многочлен второй степени. В точке $x = \pi - \delta$ прямая $f(x) = x$ касается параболы τ_δ, к тому же ветви параболы направлены вниз. Поэтому всюду на оси имеет место неравенство $\tau_\delta(x) \leq x,\ x \in \mathbb{R}$. Продолжим функцию f_δ нечетно на $[-\pi, 0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что будет выполняться неравенство

$$f_\delta(x) \leq x, \quad x \geq 0. \tag{2.6}$$

Функция f_δ на отрезке $[0, \pi-\delta]$ совпадает с функцией $f(x) = x$, а затем гладко переходит в параболу, пересекающую ось Ox в точке $x = \pi$. Функция f_δ на отрезке $[0,\pi]$ непрерывно дифференцируема и на концах отрезка имеет нулевые значения: $f_\delta(0) = f_\delta(\pi) = 0$. Поэтому ряд Фурье этой функции

$$f_\delta(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k(\delta)\sin kx, \quad a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\, dx,$$

сходится к ней равномерно на всей оси. Выясним поведение коэффициентов Фурье $a_k(\delta)$ с увеличением k. Воспользовавшись несколько раз формулой интегрировании по частям, получаем

$$\int_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{k}\int_0^\pi f'_\delta(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k^2}\int_0^\pi f'_\delta(x)d\sin kx$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(f'_\delta(x)\sin kx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''_\delta(x)\sin kx dx\right) = -\frac{1}{k^2}\int_0^\pi f''_\delta(x)\sin kx\,dx$$

$$= -\frac{1}{k^2}\int_{\pi-\delta}^{\pi} f''_\delta(x)\sin kx\,dx = -\frac{2\pi}{k^3\delta^2}\left(\cos k\pi - \cos k(\pi-\delta)\right) = (-1)^{k-1}\frac{2\pi}{k^3\delta^2}(1-\cos k\delta).$$

Окончательно имеем

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\,dx = (-1)^{k-1}\frac{4}{k^3\delta^2}(1-\cos k\delta), \quad k \ge 1. \tag{2.7}$$

Видно, что (для фиксированного δ) при $k\to\infty$ для коэффициентов справедливо соотношение $a_k(\delta) = O\left(k^{-3}\right)$; следовательно, существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что

$$|a_k(\delta)| \le \frac{C(\delta)}{k^3}, \quad k \ge 1.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; f_\delta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta)\sin kx$$

ряда Фурье функции f_δ. Для разности

$$f_\delta(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\delta)\sin kx$$

при $x \in [0, 2\pi]$ справедлива оценка

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(\delta)||\sin kx| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{C(\delta)}{k^3}\,xk \le x\,\epsilon_n, \quad \epsilon_n = \epsilon_n(\delta) = C(\delta)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2};$$

отметим, что $\epsilon_n \to 0,\ n\to\infty$. Отсюда и из (2.6) для сумм S_n теперь имеем

$$S_n(x) = f_\delta(x) + S_n(x) - f_\delta(x) \le f_\delta(x) + |f_\delta(x) - S_n(x)| \le x + x\epsilon_n = x(1+\epsilon_n), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Тригонометрический полином

$$s_n(x) = \frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n} \tag{2.8}$$

имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $s_n(x) \le x,\ x \in [0, 2\pi]$, и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Первый коэффициент полинома s_n есть $a_1(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому при любом $n \ge 1$ справедливы оценки

$$\frac{a_1(\delta)}{1+\epsilon_n} \le A_1^+(n) \le 2.$$

Отсюда заключаем, что при любом $0 < \delta < \pi$

$$a_1(\delta) \le \lim_{n\to\infty} A_1^+(n) \le 2. \tag{2.9}$$

В соответствии с формулой (2.7) имеем

$$a_1(\delta) = 4\frac{1-\cos\delta}{\delta^2} \to 2, \quad \delta \to +0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует, что $A_1^+(n) \to 2,\ n \to \infty$. Второе утверждение также доказано. □

З а м е ч а н и е. При $n \geq 2$

$$A_1^-(n) = -\infty. \tag{2.11}$$

В самом деле, при любом $a_1 < 0$ полином $a_1 \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ неположительный, а значит, принадлежит классу $\mathfrak{F}_n(\pi)$. Отсюда следует (2.11).

2.4. Случай $2 \leq k \leq n$

Теперь мы рассмотрим возможные величины старших коэффициентов многочлена.

Теорема 3. *При $2 \leq k \leq n$ справедливы следующие два утверждения:*

$$A_k^+(n) = +\infty, \quad A_k^-(n) = -\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что $|\sin kx| \leq k \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$, при любом $k \geq 2$. Следовательно, при любом $a \geq 0$ многочлен

$$f_k(x) = a(k \sin x \pm \sin kx)$$

неотрицательный на $[0, \pi,]$; тем более он удовлетворяет ограничению (2.1). Отсюда следуют оба утверждения теоремы. □

3. Одностороннее ограничение на отрезке $[0, 2\pi]$

3.1. Постановка задачи

Пусть теперь $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_n(2\pi)$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов вида (1.1), удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leq x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{3.1}$$

При $1 \leq k \leq n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значения

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n) \colon s_n \in \mathfrak{F}_n(2\pi)\}, \quad A_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n) \colon s_n \in \mathfrak{F}_n(2\pi)\} \tag{3.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$.

В неравенстве (3.1) заменим x на $2\pi - x$; в результате получим эквивалентное ограничение

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \leq (2\pi - x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{3.3}$$

Пусть $\mathfrak{G}_n$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами $b_k = b_k(\sigma_n)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \le (2\pi - x), \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{3.4}$$

Рассмотрим наибольшее и наименьшее значения

$$B_k^+(n) = \sup\{b_k(\sigma_n)\colon \sigma_n \in \mathfrak{G}_n\}, \quad B_k^-(n) = \inf\{b_k(\sigma_n)\colon \sigma_n \in \mathfrak{G}_n\} \tag{3.5}$$

коэффициентов $b_k = b_k(\sigma_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{G}_n$. Сравнивая ограничения (3.3) и (3.4), заключаем, что

$$A_k^-(n) = -B_k^+(n), \quad A_k^+(n) = -B_k^-(n), \quad 1 \le k \le n. \tag{3.6}$$

Отметим еще, что при фиксированном k величины $A_k^+(n)$ и $B_k^+(n)$ по n не убывают, а $A_k^-(n)$ и $B_k^-(n)$ не возрастают. Это наблюдение пригодится нам в дальнейшем доказательстве.

В данном разделе будут приведены конструктивные оценки величин (3.2); как и в разд. 2 наиболее полно они будут изучены при $k = 1$.

3.2. Случай $k = 1,\ n = 2$

При $n = 2,\ k = 1$ обе величины (3.2) нетрудно вычислить точно.

Теорема 4. *При $n = 2,\ k = 1$ величины* (3.2) *имеют следующие значения*:

$$A_1^+(2) = \frac{\pi}{2}, \quad A_1^-(2) = -\frac{3\pi}{2}. \tag{3.7}$$

Наибольшее и наименьшее значения первого коэффициента имеют соответственно полиномы

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \quad g_2(x) = -\frac{3\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ ограничение (3.1) принимает вид

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x \le x, \quad 0 \le x \le 2\pi. \tag{3.9}$$

В точке $x = \pi/2$ это ограничение дает оценку $a_1 \le \pi/2$. А это влечет оценку $A_1^+(2) \le \pi/2$. Для обоснования такой же оценки снизу воспользуемся полиномом f_2, определенным в (3.8). Первый коэффициент этого полинома как раз и имеет значение $\pi/2$. Поэтому для обоснования первого равенства в (3.7) осталось показать, что $f_2 \in \mathfrak{F}_2$, т. е. проверить неравенство $f_2(x) \le x,\ 0 \le x \le 2\pi$. На отрезке $[\pi, 2\pi]$ это неравенство очевидно. Выше (в доказательстве теоремы 1) было установлено, что оно выполняется и на отрезке $[0, \pi]$. Тем самым доказаны первое утверждение (3.7) и экстремальность полинома f_2.

Оценим теперь коэффициент a_1 при ограничении (3.9) снизу. Для этого положим $x = 3\pi/2$ в (3.9); в результате получаем оценку $a_1 \ge -3\pi/2$. Именно такое значение имеет первый коэффициент полинома g_2, определенного в (3.8). Поэтому для обоснования второго утверждения теоремы осталось проверить, что полином g_2 удовлетворяет ограничению $g_2(x) \le x$, $0 \le x \le 2\pi$, т. е. разность $\psi(x) = x - g_2(x)$ неотрицательная на отрезке $[0, 2\pi]$. Имеем

$$\psi'(x) = 1 - g_2'(x) = 1 + \frac{3\pi}{2}\cos x + \cos 2x = 2\cos x\Big(\cos x + \frac{3\pi}{4}\Big).$$

Эта функция на $[0, 2\pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках $x_1 = \pi/2$ и $x_2 = 3\pi/2$; причем в первой точке она меняет знак с "+" на "−", а во второй — с "−" на "+". Отсюда заключаем, что функция ψ на отрезке $[0, \pi/2]$ растет от значения $\psi(0) = 0$, на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ убывает до значения $\psi(3\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$. Следовательно, на отрезке $[0, 2\pi]$ функция ψ неотрицательная. Тем самым доказаны второе утверждение (3.7) и экстремальность полинома g_2. □

3.3. Случай $k = 1$, $n > 2$

В этом подразделе мы исследуем поведение величин $A_1^+(n)$ и $A_1^-(n)$ по n.

Теорема 5. *Для величины $A_1^+(n)$ справедливы следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $A_1^+(n) \leq 2$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^+(n) = 2$.*

Доказательство. Первое утверждение данной теоремы является следствием первого утверждения теоремы 2, поскольку $\mathfrak{F}_n(2\pi) \subset \mathfrak{F}_n(\pi)$. Второе утверждение теоремы 5 в свою очередь следует из второго утверждения теоремы 2, поскольку полиномы (2.8), построенные в доказательстве теоремы 2, принадлежат множеству $\mathfrak{F}_n(2\pi)$. Теорема 5 доказана.

Относительно величины $B_1^+(n)$, определенной в (3.5), справедливо такое утверждение.

Теорема 6. *Для величины $B_1^+(n)$ имеют место следующие два утверждения.*
1. *При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $B_1^+(n) \leq 6$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} B_1^+(n) = 6$.*

Доказательство. Умножим левую и правую часть неравенства (3.4) на $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0, \pi]$; это дает оценку

$$b_1 \int_0^\pi \sin^2 x\, dx \leq \int_0^\pi (2\pi - x) \sin x\, dx,$$

которая после вычисления интегралов принимает вид $b_1 \leq 6$. Первое утверждение теоремы 6 доказано.

Второе утверждение доказывается по той же схеме, по которой было обосновано соответствующее утверждение теоремы 2. При $0 < \delta < \pi/2$ рассмотрим на отрезке $[0, \pi]$ вспомогательную функцию

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 2\pi - x, & x \in [\delta, \pi - \delta]; \\ -\dfrac{2\pi}{\delta^2} x^2 + \dfrac{4\pi - \delta}{\delta} x, & x \in [0, \delta]; \\ -\dfrac{\pi}{\delta^2} x^2 + \dfrac{2\pi^2 - 2\pi\delta - \delta^2}{\delta^2} x - \dfrac{\pi(\pi^2 - 2\pi\delta - \delta^2)}{\delta^2}, & x \in [\pi - \delta, \pi]. \end{cases}$$

Эта функция на отрезке $[\delta, \pi - \delta]$ совпадает с функцией $2\pi - x$, а на отрезках $[0, \delta]$ и $[\pi - \delta, \pi]$ гладко переходит в параболы, пересекающие ось Ox в точках $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$. Из соображений выпуклости следует, что $f_\delta(x) \leq 2\pi - x,\ x \in [0, \pi]$. Продолжим функцию g_δ нечетно на $[-\pi, 0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что имеет место оценка

$$g_\delta(x) \leq 2\pi - x, \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{3.10}$$

Ряд Фурье функции g_δ имеет вид

$$g_\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\delta) \sin kx, \quad b_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx;$$

он сходится к g_δ равномерно на всей оси. Исследуем поведение коэффициентов Фурье b_k с ростом k. Воспользовавшись несколько раз теоремой об интегрировании по частям, получаем

$$\int_0^\pi g_\delta(x) \sin kx\, dx = -\frac{1}{k} \int_0^\pi g_\delta(x)\, d\cos kx = -\frac{1}{k} \left(g_\delta(x) \cos kx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi g'_\delta(x) \cos kx\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\int\limits_0^\pi g_\delta'(x)\,d\sin kx\right) = \frac{1}{k^2}\left(g_\delta'(x)\sin kx\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi g_\delta''(x)\sin kx\,dx\right)$$

$$= \frac{2\pi}{k^3\delta^2}\left(2(1-\cos k\delta) + (-1)^{k-1}(1-\cos k\delta)\right).$$

Окончательно имеем

$$b_k(\delta) = \frac{4}{k^3\delta^2}\left(2(1-\cos k\delta) + (-1)^{k-1}(1-\cos k\delta)\right). \tag{3.11}$$

Видно, что $b_k(\delta) = O\left(k^{-3}\right),\ k\to\infty$, а следовательно, существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что

$$|b_k(\delta)| \le C(\delta)k^{-3}, \quad k \ge 1.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(\delta)\sin kx$$

ряда Фурье функции g_δ. Имеем

$$|g_\delta(x) - S_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^\infty |b_k(\delta)||\sin kx| \le \sum_{k=n+1}^\infty |b_k(\delta)||\sin k(2\pi - x)|$$

$$\le |2\pi - x|\sum_{k=n+1}^\infty k|b_k(\delta)| \le |2\pi - x|\,\epsilon_n, \quad \epsilon_n = C(\delta)\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^2}.$$

Отсюда и из (3.10) для сумм S_n получаем оценки

$$S_n(x) = g_\delta(x) + S_n(x) - g_\delta(x) \le g_\delta(x) + |g_\delta(x) - S_n(x)| \le (2\pi - x)(1+\epsilon_n), \quad x\in[0,2\pi].$$

Следовательно, полином

$$\sigma_n(x) = \frac{S_n(x)}{1+\epsilon_n}$$

удовлетворяет ограничению $\sigma_n(x) \le 2\pi - x$, $x\in[0,2\pi]$, т. е. принадлежит множеству $\mathfrak{G}_n$. Его первый коэффициент есть $b_1(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{b_1(\delta)}{1+\epsilon_n} \le B_1(n) \le 6.$$

При $n\to\infty$ получаем отсюда оценки

$$b_1(\delta) \le \varliminf_{n\to\infty} B_1(n) \le 6. \tag{3.12}$$

Согласно (3.11)

$$b_1(\delta) = \frac{12}{\delta^2}(1-\cos\delta).$$

Этот коэффициент обладает свойством $b_1(\delta)\to 6,\ \delta\to +0$. Поэтому из (3.12) следует второе утверждение теоремы. □

В силу соотношений (3.6) теорему 6 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Теорема 7. *Для величины $A_1^-(n)$ имеют место следующие два утверждения.*
1. *При любом $n\ge 1$ выполняется неравенство $A_1^-(n) \ge -6$.*
2. *Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^-(n) = -6$.*

3.4. Оценки старших коэффициентов

Следующая теорема содержит неточные, однако, информативные оценки старших коэффициентов полиномов класса $\mathfrak{F}_n(2\pi)$.

Теорема 8. *При* $1 \le k \le n$ *для величин* (3.2) *имеют место следующие неравенства*:

$$A_k^-(n) \le A_k^+(n),$$
$$A_k^-(n) \ge -2\pi - \frac{2}{k},$$
$$A_k^+(n) \le 2\pi - \frac{2}{k}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Домножим неравенство (1.3) на функцию $1 \pm \sin kx$ и проинтегрируем по отрезку $[0, 2\pi]$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \int_0^{2\pi} \sin \nu x \,(1 \pm \sin kx)\, dx \le \int_0^{2\pi} x \,(1 \pm \sin kx)\, dx.$$

После вычисления интегралов и деления на число π это неравенство принимает вид

$$\pm a_k \le 2\pi \mp \frac{2}{k}.$$

Таким образом, для коэффициента a_k справедливы оценки

$$-2\pi - \frac{2}{k} \le a_k \le 2\pi - \frac{2}{k},$$

которые влекут утверждения теоремы. Теорема 8 доказана. □

Автор признателен В. В. Арестову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Milovanović G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 836 p.
2. **Полиа Г., Сегё Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. 824 с.
3. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials that deviate the least from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852–1878.
4. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
5. **Арестов В.В., Кондратьев В.П.** Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 1. С. 15–28.
6. **Révész Sz.Gy.** A Fejér type extremal problem // Acta Math. Hungar. 1991. Vol. 57, nos. 3–4. P. 279–283.
7. **Révész Sz.** On some extremal problems of Landau // Serdica Math. J. 2007. Vol. 33, no. 1. P. 125–162.
8. **Fejer L.** Uber trigonometrische Polynome // J. Angew. Math. 1915. Vol. 146. P. 53–82.
9. **Egervary E.V, Szasz 0.** Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome // Mathematische Zeitschrift. 1928. Vol. 27. P. 641–652.

Зыков Дмитрий Олегович
студент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: mitya130@mail.ru

Поступила 06.04.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.475

О ПОРЯДКЕ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ЧАСТНЫХ КУБИЧЕСКИХ СУММ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ $H^l_{1,m}[\omega]$

Н. А. Ильясов

Приведено решение задачи о точном порядке уклонения в равномерной метрике частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах функций с заданной мажорантой полного модуля гладкости l-го порядка в $L_1(\mathbb{T}^m)$, где $l\in\mathbb{N}$, $m\ge 1$.

Ключевые слова: кратный тригонометрический ряд Фурье, частные кубические суммы, порядок равномерной сходимости, полный модуль гладкости, точный порядок уклонения в равномерной метрике.

N. A. Il'yasov. On the order of the uniform convergence of partial cubic sums of multiple trigonometric Fourier series on the function classes $H^l_{1,m}[\omega]$.

A solution of the problem on the exact order of deviation in the uniform metric of partial cubic sums of multiple trigonometric Fourier series on classes of functions with a given majorant for the total modulus of smoothness of the lth order in $L_1(\mathbb{T}^m)$ is presented, where $l\in\mathbb{N}$, $m\ge 1$.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, partial cubic sums, order of uniform convergence, total modulus of smoothness, exact order of deviation in the uniform metric.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\dots,x_m)$ с нормой $|x|=\left(x_1^2+\dots+x_m^2\right)^{1/2}$, $m\ge 1$, $\mathbb{T}^m=(-\pi,\pi]^m$; $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1\le p<\infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной $x_i, i=\overline{1,m}$, функций $f(x)=f(x_1,\dots,x_m)$ с конечной $L_p(\mathbb{T}^m)$-нормой $\|f\|_{p,m}=\left(\pi^{-m}\int_{\mathbb{T}^m}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$; $L_\infty(\mathbb{T}^m)\equiv C(\mathbb{T}^m)$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций с равномерной нормой $\|f\|_{\infty,m}=\max\{|f(x)|\colon x\in\mathbb{T}^m\}$; $E_{n,\dots,n}(f)_{p,m}$ — полное наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T}^m)$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $n\in\mathbb{Z}_+$, по каждой переменной x_i, $i=\overline{1,m}$; $\omega_l(f;\delta)_{p,m}$ — полный модуль гладкости l-го порядка функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$, $l\in\mathbb{N}$: $\omega_l(f;\delta)_{p,m}=\sup\left\{\left\|\Delta_h^l f(\cdot)\right\|_{p,m}\colon h\in\mathbb{R}^m, |h|\le\delta\right\}$, где $\Delta_h^l f(x)=\sum_{\nu=0}^l(-1)^{l-\nu}C_l^\nu f(x+\nu h)$, $C_l^\nu=l!/\nu!(l-\nu)!$, $\nu=\overline{0,l}$; $S_{n_1,\dots,n_m}(f;x)=S_{n_1,\dots,n_m}(f;\ x_1,\dots,x_m)$ — частная сумма порядка $n_i\in\mathbb{Z}_+$ по переменной x_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$; $\Omega_l(0,d]$ — класс функций $\omega=\omega(\delta)$, определенных на $(0,d]$, $d=\pi m^{1/2}$, и удовлетворяющих условиям: $0<\omega(\delta)\downarrow 0\,(\delta\downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$; M_0 — класс всех последовательностей $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ таких, что $0<\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$.

Для заданных чисел $l\in\mathbb{N}$, $1\le p<\infty$ и функции $\omega\in\Omega_l(0,d]$ обозначим

$$H^l_{p,m}[\omega]=\left\{f\in L_p(\mathbb{T}^m):\omega_l(f;\delta)_{p,m}\le\omega(\delta),\ \delta\in(0,d]\right\}.$$

Автором в [1, теорема 2] приведено решение задачи о точном порядке уклонения в равномерной метрике частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах $H^l_{p,m}[\omega]$ в случае $1<p<\infty$, $m\ge 1$ и $l>m/p$. В настоящей работе указанный результат дополнен рассмотрением случая $p=1$, потребовавшего (в силу специфики пространства $L_1(\mathbb{T}^m)$) привлечения иных идей и конструкций (см. ниже разд. 1, доказательство теоремы 1 при $p=1$, и разд. 2, доказательство теоремы 2 при $p=1$). Кроме того, в этой работе для случая $m=l=1$ приведен краткий обзор с комментариями некоторых ранее установленных результатов, о которых автору стало известно после публикации [1], а также представлены примеры функций, подтверждающие невозможность ослабления условия на модуль непрерывности функций из $L_p(\mathbb{T})$, $p\geq 1$, гарантирующего равномерную сходимость их рядов Фурье (см. ниже разд. 3).

Напомним некоторые известные определения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Функции f и g называются *эквивалентными* (обозначение: $f\sim g$), если они совпадают почти всюду в смысле m-мерной меры Лебега. Функция f называется *существенно непрерывной на* $\mathbb{T}^m$, если она эквивалентна некоторой функции $g\in C(\mathbb{T}^m)$; в противном случае функция f называется *существенно разрывной на* $\mathbb{T}^m$. Функция f называется *существенно ограниченной на* $\mathbb{T}^m$, если она эквивалентна некоторой ограниченной функции; в противном случае функция f называется *существенно неограниченной на* $\mathbb{T}^m$. Поскольку всякая существенно непрерывная на $\mathbb{T}^m$ функция является существенно ограниченной, то ясно, что всякая существенно неограниченная на $\mathbb{T}^m$ функция является существенно разрывной.

Для полноты и удобства изложения формулировки утверждений и комментарии к ним приводятся для случая $1\leq p<\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $1\leq p<\infty,\ m\geq 1,\ f\in L_p(\mathbb{T}^m),\ l\in\mathbb{N},\ l>m/p$ *и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{p,m}<\infty \tag{1}$$

либо (эквивалентный в смысле сходимости при $l>m/p$*) ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}<\infty; \tag{2}$$

тогда f *эквивалентна некоторой функции* $\psi\in C(\mathbb{T}^m)$ *и справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\psi(\cdot)-S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m}&\leq C_1(p,m)\Big\{n^{m/p}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{p,m}\Big\}\\ &\leq C_2(l,p,m)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{p,m},\quad n\in\mathbb{N}.\end{aligned} \tag{3}$$

Замечание 1. Теорема 1 фактически утверждает, что при выполнении условия (1) либо условия (2) m-кратный ряд Фурье функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$ равномерно сходится по кубам к функции $\psi\in C(\mathbb{T}^m):\ \|S_{n,\dots,n}(f;\cdot)-\psi(\cdot)\|_{\infty,m}=o(1)$ $(n\to\infty)$, причем оценки скорости сходимости даются неравенствами (3).

Замечание 2. Теорема 1 в случае $m=1$ доказана автором в [2, § 1]. Доказательство теоремы 1 в случае $p>1$ и $m\geq 1$ приведено в [1, § 2] и основывается по существу на двух известных результатах: $\|f(\cdot)-S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{p,m}\to 0$ при $n\to\infty$ и $\|f(\cdot)-S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{p,m}\leq C_3(p,m)E_{n,\dots,n}(f)_{p,m}$, $n\in\mathbb{N}$, для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T}^m)$, где $1<p<\infty$. Приведенное ниже в разд. 1 доказательство теоремы 1 в случае $p=1$, $m\geq 1$ отличается от доказательства в [2, § 1] при $p=m=1$ (см. ниже разд. 1, замечание 6).

Замечание 3. В случае $l=m=1$ и $1<p<\infty$ утверждение, согласно которому если $f\in L_p(\mathbb{T})$ и имеет место (1), то $f\sim\psi\in C(\mathbb{T})$ и $\|\psi(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_{\infty,1}=o(1)$ $(n\to\infty)$, было впервые отмечено П. Л. Ульяновым [3, § 4, теорема 5] как следствие неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина [4, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)] и одной теоремы К. Яно [5, с. 73] (см. разд. 3, п. 1)). Справедливость импликации (1) $\Longrightarrow f\sim\psi\in C(\mathbb{T})$ другим методом ранее установлена Я. Л. Геронимусом [6, § 1, теорема 1]. Распространение сформулированного утверждения на многомерный случай приведено в заметке Н. Т. Темиргалиева [7] с помощью m-мерного аналога указанного неравенства А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина (см. [7]) и соответствующего результата Л. В. Жижиашвили [8, теорема 6], а именно: если $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $l = 1 > m/p$ и выполняется (1), то $f \sim \psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и $\|\psi(\cdot) - S_{n_1,\dots,n_m}(f;\cdot)\|_{\infty,m} = o(1)$ $(n_i \to \infty,\ i = \overline{1,m})$.

З а м е ч а н и е 4. 1) Условие $l > m/p$ $(l \in \mathbb{N},\ 1 \le p < \infty,\ m \ge 1)$ в теореме 1 необходимо для сходимости ряда (1) для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \not\equiv 0$, поскольку в противном случае в силу известного свойства $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \ge (2d)^{-l}\omega_l(f;d)_{p,m}\delta^l$, $\delta \in (0,d]$, ряд (1) заведомо расходится. Если же ряд (1) сходится при $l \le m/p$ для некоторой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, то $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = o\left(\delta^{m/p}\right) = o\left(\delta^l\right)$ $(\delta \to 0)$ и, следовательно, $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \equiv 0$, так как в противном случае $\delta^l = O(\omega_l(f;\delta)_{p,m}) = o(\delta^l)(\delta \to 0)$, что, очевидно, не представляется возможным. Далее, при выполнении соотношения $\omega_l(f;\delta)_{p,m} \equiv 0$ имеем $\omega_1(f;\delta)_{p,m} \equiv 0$, откуда следует (см., например, [9, т. 1, гл. 2, п. 3; 10, гл. 5, п. 92], случай $m = 1$), что f эквивалентна постоянной.

2) В случае $l \le m/p$ $(1 \le p < \infty,\ m \ge 1)$ даже наибольший порядок убывания модуля гладкости $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = O\left(\delta^l\right)(\delta \to 0)$ функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ не гарантирует ее эквивалентность некоторой непрерывной функции и, тем более, равномерную сходимость ее ряда Фурье, поскольку среди таких функций имеются как существенно разрывные, так и существенно неограниченные на $\mathbb{T}^m$ (см., например, [3, § 4, замечание 6; 11, § 5; 12, гл. 5, § 6.3 и § 6.9; 13, § 2, замечания после теорем 1 и 1′; 2, замечание 3; 1, § 1, замечание 4]).

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $m \ge 1$, $l \in \mathbb{N}$, $l > m/p$, $\omega \in \Omega_l(0,d]$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) < \infty; \tag{4}$$

тогда

$$\sup\Big\{\|\psi(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} : f \in H^l_{p,m}[\omega]\Big\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m/p-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где ψ *обозначает соответствующую функцию из* $C(\mathbb{T}^m)$, *эквивалентную* $f \in H^l_{p,m}[\omega]$, *существование которой обеспечивается условием* (4) *в силу теоремы* 1.

Отношение $\alpha_n \asymp \beta_n$ означает порядковое равенство величин α_n и β_n, т. е. существуют такие постоянные $0 < C_4 \le C_5$, зависящие лишь от указанных параметров p, m и l, что $C_4\beta_n \le \alpha_n \le C_5\beta_n$.

З а м е ч а н и е 5. 1) *Условие сходимости ряда в* (4) *необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *с* $\omega_l(f;\delta)_{p,m} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,d]$, *обладала следующими равносильными свойствами:*

(а) f *эквивалентна некоторой функции* $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$;

(б) *частные кубические суммы ряда Фурье* f *равномерно сходятся к* ψ *на* $\mathbb{T}^m$.

Достаточность непосредственно следует из утверждения теоремы 1, а необходимость является следствием п. 2) леммы 3 [1, § 3] в случае $p > 1$, п. 2) леммы 4 в разд. 2 настоящей работы в случае $p = 1$ (см. замечание 9 в разд. 2) и основывается, по существу, на следующем суждении, впервые отмеченном П. Л. Ульяновым в [3, § 4, теорема 5, замечание 5] при $m = l = 1$, $p > 1$: если ряд в (4) расходится для некоторой функции $\omega \in \Omega_l(0,d]$, то имеются существенно неограниченные на $\mathbb{T}^m$ функции $F(\cdot;p;m;\omega) \in L_p(\mathbb{T}^m)$ с $\omega_l(F;\delta)_{p,m} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in (0,d]$, и потому их ряды Фурье заведомо не являются равномерно сходящимися на $\mathbb{T}^m$.

2) Утверждение 1) данного замечания в несколько иной формулировке доказано П. Л. Ульяновым [3, § 4, теорема 5] (см. также [11, § 1 и § 2, теорема 1]) при $l = m = 1 < p < \infty$,

Н. Т. Темиргалиевым [7] (см. также [13]) при $l = 1 \le m < p < \infty$. Оно остается в силе и в случае $l = 1 \le p \le m$, однако является малосодержательным: если выполнено условие (4), то в силу (1) имеем (см. п. 1) замечания 4) $\omega_1(f;\delta)_{p,m} = o(\delta)$ $(\delta \to 0)$ и потому $\omega_1\left(f;\delta\right)_{p,m} \equiv 0$, откуда следует, что f эквивалентна постоянной. Для получения содержательных утверждений в случае $1 \le p \le m$ нужно вместо модулей непрерывности функций (случай $l = 1$) привлекать модули гладкости порядка $l > m/p$ (см. п. 1) замечания 4). В связи с последним замечанием следует отметить статью Н. Т. Темиргалиева [14], в которой приведено доказательство утверждения 1) относительно свойства (а) в случае $l = m + 1$ и $1 \le p \le m$ $(\Longrightarrow l > m/p)$.

Отметим также, что в указанных работах [3; 7; 11; 13] в качестве мажоранты модуля непрерывности $\omega_1(f;\delta)_{p,m}$ функции $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ рассматривается функция $\omega(\delta)$, называемая *модулем непрерывности*, т. е. всякая непрерывная неубывающая на отрезке $[0,1]$ функция с $\omega(0) = 0$ и $\omega\left(\delta + \eta\right) \le \omega(\delta) + \omega(\eta)$ при $0 \le \delta \le \delta + \eta \le 1$.

3) Утверждение 1) остается в силе, если вместо модуля гладкости функции рассматривать последовательность ее наилучших приближений, а именно: *пусть* $1 \le p < \infty$, $m \ge 1$, $\varepsilon \in M_0$; *условие* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\varepsilon_n < \infty$ *необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *с* $E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{p,m} = O(\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *обладала равносильными свойствами* (а) *и* (б).

Достаточность следует из утверждения теоремы 1, а необходимость является следствием п. 2 леммы 1 [1, § 3] в случае $p > 1$ и п. 2 леммы 2 в разд. 2 настоящей работы в случае $p = 1$ (см. замечание 7 в разд. 2).

Отметим, что сформулированное в этом пункте утверждение относительно свойства (а) хорошо известно: достаточность следует из соответствующих результатов [4, § 1, теорема 2; 15, теорема 6.4.1] в случае $m = 1$ и [7; 16] в случае $m > 1$, а необходимость установлена в [17, § 3, теорема 4] (см. также [3, § 4, доказательство теоремы 5; 18, п. 2) леммы 5]) при $m = 1$, [16] (см. также [7; 14, § 3; 19, п. 2 леммы 5 и замечание после леммы 5]) при $m > 1$.

1. Доказательство теоремы 1 в случае $p = 1$

Прежде всего отметим, что эквивалентность рядов (1) и (2) при $l > m/p$ непосредственно следует из неравенств $(1 \le p \le \infty,\ m \ge 1,\ n \in \mathbb{N})$

$$C_6^{-1}(l,m)E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{p,m} \le \omega_l\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{p,m} \le C_7(l,m)n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}E_{\nu-1,\ldots,\nu-1}(f)_{p,m}, \tag{6}$$

левое из которых представляет собой $L_p(\mathbb{T}^m)$-аналог неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [15, п. 5.3.1, неравенство (1)], а правое доказывается по известной схеме [20, § 5, теорема 8; 15, п. 6.1.1].

Утверждение об эквивалентности рядов подобного типа хорошо известно, и, в случае $m = 1$, впервые встречается в работе С. Б. Стечкина [21, теорема 1] (см. также [22, § 2, п. 2.6; 4, § 3, теорема 12 при $\gamma = 0$, $\beta = 1$]).

Ниже приводится доказательство теоремы 1 в случае $p = 1$, при этом, по существу, используется утверждение этой теоремы для случая $p > 1$. Автор не исключает возможность доказательства теоремы 1 в случае $p = 1$ другим способом, но акцентирует внимание на приведенном, поскольку оно позволяет получить требуемый результат при $p = 1$ с помощью уже доказанного при $p > 1$.

Нам понадобится также частный случай m-мерного аналога неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина (см. [4, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)], случай $m = 1$; [7], случай $m \ge 1$): пусть $1 < p < \infty$, $m \ge 1$, $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1-1/p)-1}E_{n-1,\ldots,n-1}(f)_{1,m} < \infty; \tag{7}$$

тогда $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ и имеет место неравенство

$$E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}$$
$$\le C_8(p,m)\Big\{n^{m(1-1/p)}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Теперь приступим к доказательству теоремы 1 в случае $p = 1$. Пусть $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} < \infty$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m(1-1/p)-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} < \infty$ при любом $p \in (1,\infty)$, т.е. сходится ряд (7), и, следовательно, $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$. Далее, применяя неравенство (8), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m}$$
$$\le C_8(p,m)\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{m/p-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\Big\}$$
$$= C_8(p,m)\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\sum_{n=1}^{\nu} n^{m/p-1}\Big\}$$
$$\le C_8(p,m)\Big(1 + C_9\Big(\frac{m}{p}\Big)\Big)\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m},$$

где $C_9(m/p) = \{1$ при $m/p \ge 1$; $(m/p)^{-1}$ при $m/p \le 1\}$.

Отсюда в силу утверждения теоремы 1 для случая $p > 1$ следует, что f эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка (применяем неравенство (8))

$$\|\psi(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m}$$
$$\le C_1(p,m)\Big\{n^{m/p}E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{p,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{p,m}\Big\}$$
$$\le C_1(p,m)C_8(p,m)\Big\{n^m E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} + n^{m/p}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}$$
$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1+m(1-1/p)}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{m(1-1/p)-1}E_{\mu-1,\dots,\mu-1}(f)_{1,m}\Big\}$$
$$\le C_1(p,m)C_8(p,m)\Big\{n^m E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m/p+m(1-1/p)-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}$$
$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m} + \sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{m(1-1/p)-1}E_{\mu-1,\dots,\mu-1}(f)_{1,m}\sum_{\nu=n+1}^{\mu}\nu^{m/p-1}\Big\}$$
$$\le C_1(p,m)C_8(p,m)\Big\{n^m E_{n-1,\dots,n-1}(f)_{1,m} + \Big(2 + C_9\Big(\frac{m}{p}\Big)\Big)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(f)_{1,m}\Big\}.$$

Таким образом, левая оценка в (3) для случая $p = 1$ доказана с постоянной $C_1(p,m) \times C_8(p,m)\,(2 + C_9(m/p))$, где p — любое число из промежутка $(1,\infty)$. Отметим, что поскольку число $p \in (1,\infty)$ в приведенных выше рассуждениях использовалось в качестве свободного параметра, то его можно исключить из рассмотрения, предварительно положив, например, $p = 2$.

Правая оценка в (3) в случае $p = 1$ доказывается аналогично случаю $p > 1$ (см. [1, доказательство теоремы 1 в § 2]). В силу левого неравенства в (6) и известных свойств модуля гладкости: $\omega_l(f;\delta_1)_{1,m} \le \omega_l(f;\delta_2)_{1,m}$ и $\delta_2^{-l}\omega_l(f;\delta_2)_{1,m} \le 2^l\delta_1^{-l}\omega_l(f;\delta_1)_{1,m}$ при $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty$ — имеем

$$\|\psi(\cdot) - S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} \le C_{10}(m)C_6(l,m)\Big\{n^m\omega_l\Big(f;\frac{d}{n}\Big)_{1,m} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m}\Big\}$$

$$\le C_{10}(m)C_6(l,m)C_{11}(l,m)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m},$$

где $C_{10}(m) = C_1(1,m)$, $C_{11}(l,m) = 2^l m(2^m-1)^{-1}+1$.

Теорема 1 в случае $p = 1$ доказана. □

З а м е ч а н и е 6. В случае $m = p = 1$ утверждение теоремы 1 получается совсем просто в силу известных неравенств $|a_n(f)|$, $|b_n(f)| \le E_{n-1}(f)_{1,1}$, $n \in \mathbb{N}$, где $a_n(f)$, $b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ (см. [2, доказательство теоремы 1 в § 1]):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)| + |b_n(f)|) \le 2\sum_{n=1}^{\infty}E_{n-1}(f)_{1,1} \le 2C_6(l,1)\sum_{n=1}^{\infty}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_{1,1} < \infty,$$

откуда следует, что ряд Фурье f сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T})$, функция f эквивалентна ψ и справедлива оценка

$$\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_{\infty,1} \le 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}E_{\nu-1}(f)_{1,1} \le 2C_6(l,1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega_l\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_{1,1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

2. Доказательство теоремы 2 в случае $p = 1$

Нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_n\} \in M_0$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$; *последовательность*

$$a_n(m;\varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty}\Big(1 - \frac{n}{\nu+1}\Big)(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu, \quad n = 1,2,\dots,$$

обладает следующими свойствами:

1) $0 < a_n(m;\varepsilon) \downarrow (n\uparrow)$, *при этом* $a_n(1;\varepsilon) \to 0\,(n\to\infty)$ *и* $a_n(m;\varepsilon) \to 0\,(n\to\infty)$ *в случае* $m > 1$ *при условии сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$;

2) $a_n(m;\varepsilon) \le \sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu$, *в частности* $a_n(1;\varepsilon) \le \varepsilon_n$;

3) $\Delta a_n(m;\varepsilon) = a_n(m;\varepsilon) - a_{n+1}(m;\varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-2}\Delta\varepsilon_\nu$, $\Delta a_n(m;\varepsilon) \le (n+1)^{-1}\varepsilon_n$ *при* $m = 1, \Delta a_n(m;\varepsilon) = \varepsilon_n$ *при* $m = 2$ *и* $\Delta a_n(m;\varepsilon) \ge (n+1)^{m-2}\varepsilon_n$ *при* $m > 2$;

4) $\Delta^2 a_n(m;\varepsilon) = \Delta a_n(m;\varepsilon) - \Delta a_{n+1}(m;\varepsilon) = (n+1)^{m-2}\Delta\varepsilon_n$;

5) $a_n(m;\varepsilon) + n\Delta a_n(m;\varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu$, *причем* $a_n(1;\varepsilon) + n\Delta a_n(1;\varepsilon) = \varepsilon_n$ *и* $a_n(m;\varepsilon) + n\Delta a_n(m;\varepsilon) \ge (n+1)^{m-1}\varepsilon_n$ *при* $m > 1$;

6) $\big(m\,2^{m-1}\big)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m;\varepsilon) \le \sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n \le 2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m;\varepsilon)$;

7) $\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu \le 2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon) + na_{n+1}(m;\varepsilon)$;

8) $n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+m-1}\varepsilon_\nu \le (k+2)n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^k a_\nu(m;\varepsilon)$.

Лемма 1 в случае $m = 1$ доказана в [23, лемма 1 при $p = 1$] (формулировка приведена также в [18, лемма 2]), а в случае $m \ge 1$ доказательство приведено в [19, лемма 4]. Отметим, что последовательность $\{a_n(m;\varepsilon)\}$ при $m = 1$ ранее рассматривалась В. Э. Гейтом [24, § 2; 25, § 2, п. 2]; там же отмечены свойства 1)–5) этой последовательности $\{a_n(1;\varepsilon)\}$.

Лемма 2. *Пусть* $m \geq 1$, $\varepsilon \in M_0$; *существует функция* $G(x;m;\varepsilon) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ *такая, что*:
1) $E_{n-1,\dots,n-1}(G)_{1,m} \leq \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$;
2) $G \in C(\mathbb{T}^m) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$, *при этом*
$2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < G((0,\dots,0);m;\varepsilon) = \|G(\cdot;m;\varepsilon)\|_{\infty,m} \leq m\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n$;
3) *если ряд в правой части* 2) *сходится, то*
$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\varepsilon_\nu \leq 2^m \|G(\cdot\ ;\ m;\varepsilon) - S_{n,\dots,n}(G;\ \cdot)\|_{\infty,m} + 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Доказательство. Положим (см., например, [24, § 2, п. 1; 25, § 2, п. 2] при $m = 1$, [19, лемма 5] при $m \geq 1$)

$$G(x;m;\varepsilon) = G((x_1,\dots,x_m);m;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\prod_{i=1}^{m}F_n(x_i), \quad x = (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{T}^m,$$

где $F_n(y) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^{n}(1-\nu/(n+1))\cos\nu y$ — ядро Фейера порядка $(n+1) \in \mathbb{N}$ ($F_0(y) = 1/2$), $y \in \mathbb{T}$. В силу известного равенства (см., например, [26, гл. 1, § 47, формула (47.10)]) $\|F_n(\cdot)\|_{1,1} = 1$ имеем

$$\left\|G(\cdot\ ;m;\varepsilon)\right\|_{1,m} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\Big\|\prod_{i=1}^{m}F_n(x_i)\Big\|_{1,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\prod_{i=1}^{m}\|F_n(x_i)\|_{1,1} = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_1,$$

откуда следует, что $G \in L_1(\mathbb{T}^m)$. Далее, так как $F_{n-1}(y)$ — полином порядка $(n-1) \in \mathbb{Z}_+$, то

$$E_{n-1,\dots,n-1}(G)_{1,m} \leq \Big\|\sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\varepsilon_\nu\prod_{i=1}^{m}F_\nu(x_i)\Big\|_{1,m} \leq \sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\varepsilon_\nu\Big\|\prod_{i=1}^{m}F_\nu(x_i)\Big\|_{1,m} = \sum_{\nu=n}^{\infty}\Delta\varepsilon_\nu = \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. имеет место п. 1).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$, то из оценки $\big(\|F_n(\cdot)\|_{\infty,1} = F_n(0) = (n+1)/2\big)$

$$\left\|G(\cdot;m;\varepsilon)\right\|_{\infty,m} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\Big\|\prod_{i=1}^{m}F_n(x_i)\Big\|_{\infty,m} = 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^m\Delta\varepsilon_n = G(0;m;\varepsilon)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}n^m\Delta\varepsilon_n \leq m\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{m-1} = m\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\sum_{n=\nu}^{\infty}\Delta\varepsilon_n = m\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu$$

в силу известного признака равномерной сходимости Вейерштрасса следует, что $G \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива правая оценка в п. 2). С другой стороны, если $G \in C(\mathbb{T}^m)$, то

$$\infty > \left\|G(\cdot;m;\varepsilon)\right\|_{\infty,m} \geq G((0,\dots,0);m;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\prod_{i=1}^{m}F_n(0) = 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^m\Delta\varepsilon_n$$

$$> 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}n^m\Delta\varepsilon_n \geq 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\varepsilon_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{m-1} = 2^{-m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\sum_{n=\nu}^{\infty}\Delta\varepsilon_n = 2^{-m}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu,$$

откуда следуют сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n < \infty$ и справедливость левой оценки в п. 2).

Перейдем к доказательству п. 3). Если ряд в правой части п. 2) сходится, то $G \in C(\mathbb{T}^m)$. Обозначим $g(y;m;\varepsilon) = G((y,0,\dots,0);m;\varepsilon)$, $y \in \mathbb{T}$. Ясно, что $g \in C(\mathbb{T})$ и является суммой своего ряда Фурье:

$$g(y;m;\varepsilon) = 2^{-(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_nF_n(y)$$

$$= 2^{-(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_n\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{\nu}{n+1}\right)\cos\nu y\right\} = 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_n$$

$$+\,2^{-(m-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\sum_{\nu=n}^{\infty}(\nu+1)^{m-1}\Delta\varepsilon_\nu\Big(1-\frac{n}{\nu+1}\Big)\Big\}\cos ny=\Big(\frac{1}{2}\Big)a_0(g)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(g)\cos ny,$$

где $a_n(g)=2^{-(m-1)}a_n(m;\varepsilon),\ n\in\mathbb{N}$, а последовательность $\{a_n(m;\varepsilon)\}$ определена в лемме 1.

Так как по условию $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n<\infty$, то в силу п. 6) леммы 1 имеем $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(m;\varepsilon)<\infty$; отсюда, учитывая неравенство п. 7) леммы 1 и свойство $a_n(m;\varepsilon)\downarrow(n\uparrow)$, получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu=\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu\le 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)+2na_{2n+1}(m;\varepsilon)$$

$$\le 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)+2\sum_{\nu=n+1}^{2n}a_\nu(m;\varepsilon)=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(m;\varepsilon)$$

$$=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2\cdot 2^{m-1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(g)=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2^m\left\{g(0;m;\varepsilon)-S_n(g;0)\right\}$$

$$=2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2^m\left\{G\left((0,\dots,0);m;\varepsilon\right)-S_{n,\dots,n}(G;(0,\dots,0))\right\}$$

$$\le 2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1}+2^m\big\|G\left(\cdot;m;\varepsilon\right)-S_{n,\dots,n}\left(G;\cdot\right)\big\|_{\infty,m}.$$

Лемма 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 7. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m/p-1}\varepsilon_n=\infty$, где $p\ge 1$, то функция $G\left(x;m;\varepsilon\right)\in L_1(\mathbb{T}^m)$, рассмотренная в лемме 2 (в силу п. 2) этой леммы) и функция $G\left(x;p;m;\varepsilon\right)\in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1<p<\infty$, рассмотренная в лемме 1 [1, § 3] (в силу п. 2) этой леммы), являются существенно неограниченными в окрестности начала координат и, следовательно, на $\mathbb{T}^m$ (обоснование см. в [2, § 2, замечание 4] при $m=1$ и в [19, замечание после леммы 5] при $m\ge 1$).

Лемма 3. *Пусть $m\ge 1$, $l\in\mathbb{N}$ и $l>m$; для каждой функции $\omega\in\Omega_l\left(0,d\right]$ существует последовательность $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$ такая, что*:

1) $0<\varepsilon_n\le\omega(d/n),\ n=1,2,\dots,\ \varepsilon_n\downarrow 0\ \ (n\uparrow\infty)$;

2) $n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\varepsilon_\nu\asymp\omega(d/n)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\omega(d/n)\asymp\sum_{n=1}^{\infty}n^{m-1}\varepsilon_n$;

4) *если ряд в левой части п.* 3) *сходится, то*
$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\omega(d/\nu)\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{m-1}\varepsilon_\nu+n^m\omega(d/n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Лемма 3 установлена в [1, § 3, лемма 2 при $p=1$].

З а м е ч а н и е 8. 1) Схема построения последовательности $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющей соотношениям 1) и 2), впервые предложена С. Б. Стечкиным в [27, § 3, лемма 2] (см. также [26, § 9.4, лемма 3]), где был рассмотрен случай $l=1,\ n\omega\left(\pi/n\right)\uparrow\infty\left(n\uparrow\infty\right)$ и установлена оценка сверху в соотношении 2). Позднее, в [22, § 2, лемма 3] было отмечено, что утверждение леммы 2 [27] остается в силе и при $l\in\mathbb{N}$ (см. также [14, § 2, лемма 5]). В. Э. Гейт [28, лемма 1] дополнил указанные результаты [27, лемма 2; 22, лемма 3], рассмотрев также случай $n^l\omega\left(\pi/n\right)=O(1)\left(n\uparrow\infty\right)$ (в этом случае $\omega\left(\pi/n\right)\asymp n^{-l}$ и $\varepsilon_n=n^{-1}\omega\left(\pi/n\right),\ n\in\mathbb{N}$), и доказал оценку снизу в соотношении 2). Ранее схема С. Б. Стечкина в случае $l=1$ и модулей непрерывности $\omega\left(\delta\right)$ привлекалась также в работах В. А. Андриенко [29, § 3, лемма 1] и П. Л. Ульянова [3; 30, леммы 11 и 12].

2) В работе [31, § 4, формулы (44)–(45)] для заданной функции $\omega\in\Omega_l\left(0,\pi\right]$ определяется класс $q_{l,\theta}(\omega)$ последовательностей $\varepsilon=\{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющих условиям ($l>0,\ 1\le\theta<\infty$)

$$0<\varepsilon_n\le\omega\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad \varepsilon_n\downarrow(n\uparrow),\quad C_{12}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\le n^{-l}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\theta l-1}\varepsilon_\nu^{\theta}\Big)^{1/\theta}\le C_{13}\omega\Big(\frac{1}{n}\Big),\quad n\in\mathbb{N},\qquad(9)$$

при этом в вопросе относительно построения таких последовательностей приводятся заведомо неверные ссылки (см. там же с. 127) на статьи [24; 32]. Вместе с тем в списке литературы [31] имеются указанная выше заметка В. Э. Гейта [28] и заметка автора [33], в которой сформулирована лемма 1, утверждающая существование (для заданной функции $\omega \in \Omega_l\,(0,1]\,,\ l \in \mathbb{N}$) последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, удовлетворяющей условиям (9), и отмечено, что построение $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ ведется по схеме С. Б. Стечкина [27], развитой В. Э. Гейтом в [28]. Отметим также, что определение последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и полное доказательство соотношения в правой части (9) опубликовано В. Э. Гейтом [28, лемма 1] при $\theta = 1,\ l \in \mathbb{N}$ и автором [34, лемма 2] при $\theta \geq 1,\ l \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *Пусть* $m \geq 1,\ l \in \mathbb{N},\ l > m$ *и* $\omega \in \Omega_l\,(0,d]$; *существует функция* $F(x;m;\omega) \in L_1(\mathbb{T}^m)$ *такая, что*:

1) $\omega_l\,(F;\delta)_{1,m} \leq C_{14}(l,m)\omega(\delta),\ \delta \in (0,d]$;

2) $F \in C(\mathbb{T}^m) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n) < \infty,\ \|F\,(\cdot;m;\omega)\|_{\infty,m} \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega(d/n)$;

3) *если ряд в правой части п.* 2) *сходится, то*
$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega(d/\nu) \leq C_{15}(l,m)\left\{\|F\,(\cdot;m;\omega) - S_{n,\dots,n}(F;\cdot)\|_{\infty.m} + n^m\omega(d/n)\right\},\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Полагаем $F\,(x;m;\omega) = G\,(x;m;\varepsilon)$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ — последовательность, соответствующая согласно лемме 3 заданной функции $\omega \in \Omega_l\,(0,d]$, а функция G определена в лемме 2. В силу правого неравенства в (6), п. 1) леммы 2 и п. 2) леммы 3 имеем $\omega_l(F;d/n)_{1,m} \leq C_7(l,m)n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}E_{\nu-1,\dots,\nu-1}(F)_{1,m} \leq C_7 n^{-l}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\varepsilon_\nu \leq C_{16}(l,m)\omega(d/n)$, откуда $\omega_l(F;d/n)_{1,m} \leq C_{16}\omega(d/n), n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_l(F;\delta)_{1,m} \leq 2^l C_{16}(l,m)\omega(\delta),\ \delta \in (0,d]$. Далее, утверждение п. 2) является следствием п. 2) леммы 2 и п. 3) леммы 3:

$$\|F(\cdot;m;\omega)\|_{\infty,m} \equiv \|G(\cdot;m;\varepsilon)\|_{\infty,m} = G\left((0,\dots,0);m;\varepsilon\right) \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\varepsilon_n \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{n}\Big).$$

Докажем п. 3). Если ряд в правой части п. 2) сходится, то в силу п. 4) леммы 3, п. 3) леммы 2 и п. 1) леммы 3 получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{m-1}\varepsilon_\nu + n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \leq 2^m\,\|G(\cdot;m;\varepsilon) - S_{n,\dots,n}(G;\cdot)\|_{\infty,m}$$

$$+2^{m-1}n^m\varepsilon_{n+1} + n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \leq 2^m\,\|F(\cdot;m;\varepsilon) - S_{n,\dots,n}(F;\cdot)\|_{\infty,m} + \left(2^{m-1}+1\right)n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big).$$

Лемма 4 доказана. □

Замечание 9. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(m/p)-1}\omega(d/n) = \infty$, где $p \geq 1$, то функция $F \in L_1(\mathbb{T}^m)$, рассмотренная в лемме 4 (в силу $F(x;m;\omega) = G(x;m;\varepsilon)$, п. 2) этой леммы и п. 3) леммы 3), и функция $F \in L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, рассмотренная в лемме 3 [1, § 3] (в силу $F(x;p;m;\omega) = G(x;p;m;\varepsilon)$, п. 2) этой леммы и п. 3) леммы 2 [1, § 3]), являются существенно неограниченными в окрестности начала координат и, следовательно, на $\mathbb{T}^m$ (см. замечание 7).

Лемма 5. *Пусть* $m \geq 1,\ l \in \mathbb{N},\ \omega \in \Omega_l\,(0,d]$; *существует последовательность функций* $\{\Phi_{2n}(x;m;\omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(\mathbb{T}^m)$ *такая, что*:

1) $\omega_l\,(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \leq C_{17}(l,m)\omega\,(\delta)\,,\ \delta \in (0,d]\,,\ n = 1,2,\dots$;

2) $\|\Phi_{2n}\,(\cdot;m;\omega) - S_{n,\dots,n}\,(\Phi_{2n};\cdot)\|_{\infty,m} \geq C_{18}(m)n^m\omega(d/n),\ n \in \mathbb{N}$,

где $C_{17}(l,m) = 2^l(1+m^l d^l),\ C_{18}(m) = m4^{-m}3^{m-1}$.

Доказательство. Полагаем (при $m = 1$ см. [2, § 2, лемма 5]) $\Phi_{2n}(x;m;\omega) = \omega(d/n)\prod_{i=1}^{m} F_{2n}(x_i)$, где $F_{2n}(y)$ — ядро Фейера порядка $2n+1,\ y \in \mathbb{T}$. Так как

$$\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\|\prod_{i=1}^{m} F_{2n}(x_i)\Big\|_{1,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\prod_{i=1}^{m}\|F_{2n}(x_i)\|_{1,1} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \leq \omega(d),$$

$n \in \mathbb{N}$, то $\sup\left\{\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} : n \in \mathbb{N}\right\} \le \omega(d) < \infty$, откуда $\{\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\} \subset L_1(\mathbb{T}^m)$.

Для доказательства п. 1) отметим, что при любом $\delta \in (0,d]$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$ возможны два случая: $\delta < d/n$ либо $\delta \ge d/n$. При $\delta \ge d/n$ с учетом условия $\omega(\delta) \uparrow (\delta\uparrow)$ имеем $\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \le 2^l\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\|_{1,m} = 2^l\omega(d/n) \le 2^l\omega(\delta)$. При $\delta < d/n$ в силу неравенства (см., например, [1, замечание 6]) $\omega_l(f;\delta)_{1,m} \le m^l\delta^l \max\left\{\left\|\partial^{|\alpha|}f(x)/\partial x^\alpha\right\|_{1,m} : |\alpha| = l\right\}$, где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+ (i = \overline{1,m}), |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m, \partial x^\alpha = \partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}$ (при условии существования производной $\partial^{|\alpha|}f(x)/\partial x^\alpha \in L_1(\mathbb{T}^m), |\alpha| \le l$), m-мерного аналога неравенства С. Н. Бернштейна — М. Рисса — А. Зигмунда (см., например, [15, гл. 4, п. 4.8.62, неравенство (30)]), а также учитывая условие $\delta^{-l}\omega(\delta)\downarrow(\delta\uparrow)$, получаем

$$\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \le m^l\delta^l\max\left\{\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\Phi_{2n}(x;m;\omega)}{\partial x^\alpha}\right\|_{1,m} : \ |\alpha| = l\right\}$$

$$= m^l\delta^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\max\left\{\left\|\frac{\partial^{|\alpha|}\prod_{i=1}^m F_{2n}(x_i)}{\partial x^\alpha}\right\|_{1,m} : |\alpha| = l\right\} \le m^l\delta^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)(2n)^l\left\|\prod_{i=1}^m F_{2n}(x_i)\right\|_{1,m}$$

$$= m^l2^l\delta^l n^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) = m^l2^l d^l\delta^l\Big(\frac{n}{d}\Big)^l\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) \le m^l2^l d^l\delta^l\delta^{-l}\omega(\delta) = (2md)^l\omega(\delta).$$

Таким образом, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\omega_l(\Phi_{2n};\delta)_{1,m} \le \left\{2^l + (2md)^l\right\}\omega(\delta) = 2^l\left\{1 + (md)^l\right\}\omega(\delta),\ \delta \in (0,d]$, т. е. имеет место соотношение 1).

Докажем соотношение 2). Поскольку $S_n(F_{2n};y) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^n(1 - \nu/(2n+1))\cos\nu y$, то имеет место равенство $S_n(F_{2n};0) = 2^{-1}(2n+1)^{-1}(1+3n+3n^2)$, учитывая которое, получаем

$$\left\|\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega) - S_{n,\ldots,n}(\Phi_{2n};\cdot)\right\|_{\infty,m} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\left\|\prod_{i=1}^m F_{2n}(x_i) - \prod_{i=1}^m S_n(F_{2n};x_i)\right\|_{\infty,m}$$

$$\ge \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\{\prod_{i=1}^m F_{2n}(0) - \prod_{i=1}^m S_n(F_{2n};0)\Big\} = \omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\{\Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^m - \Big(\frac{1+3n+3n^2}{2(2n+1)}\Big)^m\Big\}$$

$$= \frac{\omega\Big(\dfrac{d}{n}\Big)}{2^m(2n+1)^m}\left\{(1+4n+4n^2)^m - (1+3n+3n^2)^m\right\} = \frac{m\omega\Big(\dfrac{d}{n}\Big)}{2^m(2n+1)^m}\int\limits_{1+3n+3n^2}^{1+4n+4n^2} t^{m-1}\,dt$$

$$\ge \frac{m}{2^m(2n+1)^m}(1+3n+3n^2)^{m-1}(n+n^2)\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) > \frac{m3^{m-1}}{2^m(2n+2)^m}(n+n^2)^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)$$

$$= m4^{-m}(n+1)^{-m}3^{m-1}n^m(1+n)^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big) = m4^{-m}3^{m-1}n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 5 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 в случае $p = 1$. Оценка сверху в (5) следует из правого неравенства в (3): если сходится ряд в (4), то в силу теоремы 1 каждая функция $f \in H^l_{1,m}[\omega]$ эквивалентна некоторой функции $\psi \in C(\mathbb{T}^m)$ и справедлива оценка ($n \in \mathbb{N}$)

$$\|\psi(\cdot) - S_{n,\ldots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m} \le C_2(l,1,m)\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{m-1}\omega_l\Big(f;\frac{d}{\nu}\Big)_{1,m} \le C_2(l,1,m)\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big).$$

Оценка снизу в (5) реализуется посредством функции $C_{14}^{-1}(l,m)F(\cdot;m;\omega) \in H^l_{1,m}[\omega]$ в силу п. 3) леммы 4 и семейства функций $\left\{C_{17}^{-1}(l,m)\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\right\} \subset H^l_{1,m}[\omega]$ в силу п. 2) леммы 5:

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{m-1}\omega\Big(\frac{d}{\nu}\Big) \le C_{15}(l,m)\Big\{\|F(\cdot) - S_{n,\ldots,n}(F;\cdot)\|_{\infty,m} + n^m\omega\Big(\frac{d}{n}\Big)\Big\}$$

$$\leq C_{15}(l,m)\Big\{\big\|F(\cdot)-S_{n,\dots,n}(F;\cdot)\big\|_{\infty,m}+C_{18}^{-1}(m)\big\|\Phi_{2n}(\cdot)-S_{n,\dots,n}\left(\Phi_{2n};\cdot\right)\big\|_{\infty,m}\Big\}$$

$$\leq C_{19}(l,m)\sup\Big\{\|\psi\left(\cdot\right)-S_{n,\dots,n}(f;\cdot)\|_{\infty,m}:f\in H^{l}_{1,m}\left[\omega\right]\Big\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 10. Привлечение семейства функций $\{\Phi_{2n}(\cdot;m;\omega)\}$ (см. лемму 5) для реализации оценки снизу в (5) в случае $p=1$ (точнее, для оценки величины $n^m\omega(d/n)$) не является типичным при решении подобного рода задач (в отличие от случая $p>1$; см. [1, лемма 4]). В случае $m=p=1$ и четном $l\in\mathbb{N}$ существует функция $f_0(y;\omega)\in L_1(\mathbb{T})$ с $\omega_l\left(f_0;\delta\right)_{1,1}\asymp\omega\left(\delta\right),\delta\in(0,\pi]$, такая, что $f_0\in C(\mathbb{T})\iff\sum_{n=1}^{\infty}\omega\left(\pi/n\right)<\infty$ и $\|f_0\left(\cdot;\omega\right)-S_n\left(f_0;\cdot\right)\|_{\infty,1}\asymp\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega\left(\pi/\nu\right),\ n\in\mathbb{N}$.

Вначале отметим очевидный факт: если функция $\omega\in\Omega_l\left(0,\pi\right]$, то последовательность $w=\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\omega_n=\omega\left(\pi/n\right),\ n\in\mathbb{N}$, удовлетворяет условиям: $0<\omega_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$ (т. е. $w\in M_0$) и $n^l\omega_n\uparrow$ при $n\uparrow$.

Положим (см. доказательство леммы 2) $f_0(y;\omega)=g(y;1;w)=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega_nF_n(y)=\omega_1/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)\cos ny$, где $a_n(f_0)=a_n(1;w)$, а последовательность $\{a_n(1;w)\}$ определена в лемме 1 (полагаем $m=1,\varepsilon=w$). В. Э. Гейтом [24, § 2, свойство e) функции f_1; 25, § 2, п. 2, свойства e') и f) функции f_1] установлено, что $\omega_l(f_0;\pi/n)_{1,1}\asymp\omega_n,n\in\mathbb{N}$, откуда следует порядковое равенство $\omega_l(f_0;\delta)_{1,1}\asymp\omega(\delta),\ \delta\in(0,\pi]$.

Если $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n<\infty$, то в силу п. 6) леммы 1 $\big($на самом деле, в п. 6) при $m=1$ имеет место равенство $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1;w)$, в силу п. 5) этой же леммы при $m=1\big)$ имеем $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)<\infty$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость всюду на $\mathbb{T}$ ряда Фурье функции f_0, и потому $f_0\in C(\mathbb{T})$, при этом $\|f_0\left(\cdot;\omega\right)\|_{\infty,1}=f_0\left(0;\omega\right)=\omega_1/2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)=\omega_1/2+(1/2)\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\leq\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n$. С другой стороны, если $f_0\in C(\mathbb{T})$, то $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)<(1/2)\omega_1+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n(f_0)\leq 2f_0(0;\omega)=2\left\|f_0\left(\cdot;\omega\right)\right\|_{\infty,1}$. Далее, учитывая свойства $n^l\omega_n\uparrow(n\uparrow)$ и $\omega_n\downarrow(n\uparrow)$, а также п. 7) леммы 1 при $m=1$ $\big($на самом деле, в п. 7) при $m=1$ имеет место равенство в силу п. 5) этой же леммы при $m=1\big)$ и п. 1) леммы 1 при $m=1$, имеем

$$n\omega_n\leq 3^ln\omega_{3n}\leq 3^l\sum_{\nu=2n+1}^{3n}\omega_\nu\leq 3^l\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\omega_\nu=3^l\Big\{2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(1;w)+2na_{2n+1}(1;w)\Big\}$$

$$\leq 3^l\Big\{2\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}a_\nu(1;w)+2\sum_{\nu=n+1}^{2n}a_\nu(1;w)\Big\}=2\cdot 3^l\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(1;w),$$

откуда

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega_\nu=\sum_{\nu=n+1}^{2n}\omega_\nu+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\omega_\nu\leq n\omega_{n+1}+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\omega_\nu\leq 2(3^l+1)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu(1;w)$$

$$=2(3^l+1)\left\{f_0(0;\omega)-S_n(f_0;0)\right\}=2(3^l+1)\left\|f_0(\cdot;\omega)-S_n(f_0;\cdot)\right\|_{\infty,1}\leq C_{20}(l)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\omega_\nu.$$

3. Краткий обзор с комментариями некоторых ранее установленных одномерных результатов

Для удобства изложения мы опускаем индекс размерности в обозначениях рассматриваемых характеристик в случае $m=1$.

1) В случае $m=1$ из результатов Г. Харди и Дж. Литтльвуда [35, теоремы 5 и 7] следует утверждение: *пусть* $1\leq p<\infty,\ 0<\alpha\leq 1,\ f\in\mathrm{Lip}(\alpha,p)=\{f\in L_p(\mathbb{T})\colon\omega_1(f;\delta)_p=O(\delta^\alpha),$

$\delta \to 0\}$; *если* $\alpha > 1/p$, *то* f *эквивалентна некоторой функции* $\psi \in C(\mathbb{T})$ *с* $\omega_1(\psi;\delta)_\infty = O(\delta^{\alpha-1/p}), \delta \to 0$ (*т. е.* $\psi \in \mathrm{Lip}(\alpha - 1/p, \infty) \equiv \mathrm{Lip}(\alpha - 1/p)$) *и* $\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$.

Ш. Изуми [36, теорема 2] обобщил первую часть приведенного утверждения, установив при $1/p < \alpha < 1$ равномерную почти всюду оценку $f(x) - S_n(f;x) = O(n^{-(\alpha-1/p)}),\ n \in \mathbb{N}$, из которой следует, что f эквивалентна некоторой функции $\psi \in \mathrm{Lip}(\alpha - 1/p)$ и $\|\psi(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = O(n^{-(\alpha-1/p)}),\ n \in \mathbb{N}$.

К. Яно [5, с. 73], уточняя заключение теоремы 1 [35], показал, что в случае непрерывности функции f вторая часть приведенного утверждения остается в силе и при $\alpha = 1/p$, а именно: *если* $f \in C(\mathbb{T})$ *и* $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p}),\ \delta \to 0$, *для некоторого* $p \in [1,\infty)$, *то* $\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$. Отметим, что при $p = 1$ последний результат сводится к известному признаку Дирихле — Жордана (см., например, [9, т. 1, гл. 2, теорема 8.1; 26, гл. 1, § 39]), поскольку в этом случае условие $\omega_1(f;\delta)_1 = O(\delta)$ равносильно эквивалентности f некоторой функции ограниченной вариации (см., например, [37, п. 6.4, теорема 24; 35, п. 3.4, лемма 9], а также [15, гл. 3, п. 3.6.1; 9, т. 1, гл. 4, различные теоремы и примеры, п. 8]) и, следовательно, в силу $f \in C(\mathbb{T})$ имеем $\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$.

2) В. В. Жук [38; 39, гл. 6, § 2] в терминах различных характеристик функции $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p < \infty$, установил ряд достаточных условий, гарантирующих равномерную сходимость ее ряда Фурье, среди которых необходимо отметить следующий результат (см. [38, теорема 2; 39, § 6.2, следствие 3]: если $f \in C(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$ и $\varlimsup_{n\to\infty} n^{1/p} E_n(f)_p < \infty$, то $\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_\infty = o(1),\ n \to \infty$.

3) В. И. Коляда [11] в случае $m = l = 1$ провел детальное исследование вопроса о связи условия (1) (см. введение, формулировка теоремы 1) с существенной непрерывностью функции $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$ (см. [11, § 1, 2]), а также с равномерной сходимостью ее ряда Фурье (см. [11, § 4]). В частности, им было отмечено следующее: если заранее предположить, что $f \in C(\mathbb{T})$, то равномерная сходимость ряда Фурье обеспечивается условием $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$ (см. сформулированный выше результат К. Яно), более слабым, чем (1) (случай $m = l = 1,\ p > 1$); однако, предполагая лишь, что f ограничена, условие (1) ослабить нельзя, т. е. даже для ограниченных функций никакое условие, кроме (1), равномерной сходимости ряда Фурье не гарантирует (см. [11, § 4, теорема 4]).

4) Отметим,что из условия (1) при $l = m = 1,\ p > 1$ следует соотношение $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p}),\ \delta \to 0$ (и, тем более, $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$); обратное неверно: для функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_1(f;\delta)_p \asymp \omega_0(\delta)$, где модуль непрерывности $\omega_0(\delta) = \delta^{1/p}(\ln(\pi e/\delta))^{-1}, \delta \in (0,\pi]$ и $\omega_0(0) = 0$, имеем $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p}) (\delta \to 0)$, однако ряд (1) расходится со скоростью $\ln(\ln(en))$ при $n \to \infty$.

5) Обозначим через $BV(\mathbb{T})$ класс всех 2π-периодических функций ограниченной вариации. Известно (см., например, [40, гл. 8, § 3; 26, гл. 1, § 39; 9, т. 1, гл. 2, п. 8, теорема 8.1]), что если функция $f \in BV(\mathbb{T})$, то она ограничена, может иметь лишь разрывы непрерывности первого рода (так, что в каждой точке $y \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние пределы $f(y-0)$ и $f(y+0)$) и ее ряд Фурье в каждой точке $y \in \mathbb{R}$ сходится к значению $(1/2)\{f(y-0) + f(y+0)\}$ (в частности, сходится к $f(y)$ в каждой точке непрерывности f). Кроме того, если $f \in BV(\mathbb{T})$, то $f \in L_p(\mathbb{T})$ для всех $1 \le p < \infty$, при этом справедлива оценка ([35, п. 3.4, лемма 9, случай $p = 1$; п. 5, теорема 6, случай $p > 1$]; см. также [41, § 2]) $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p}),\ 1 \le p < \infty,\ \delta \in (0,\pi]$. Если же $f \in BV(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$, то $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$ при любом $1 < p < \infty$ (см., например, [41, § 2], а также [42, доказательство необходимости в утверждении теоремы 2 при $p = 1$]). Заметим, что если $\omega_1(f;\delta)_1 = o(\delta)$ $(\delta \to 0)$ для $f \in BV(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$, то f эквивалентна постоянной (см. выше п. 1) замечания 4), а для $f \in BV(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})$ получаем тождественное совпадение f с постоянной. С другой стороны, если $f \in BV(\mathbb{T})$ и $\min\{f(y-0), f(y+0)\} \le f(y) \le \max\{f(y-0), f(y+0)\}$ в каждой точке $y \in \mathbb{R}$, то выполнение условия $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$ для некоторого $1 < p < \infty$ гарантирует, что $f \in C(\mathbb{T})$ (см., например, [42, теорема 2], а также [41, § 2]).

Теперь, на основании изложенного, мы можем утверждать, что *существуют ограничен-*

ные существенно разрывные 2π*-периодические функции* $\varphi \in BV(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T})$ *такие, что* $\omega_1(\varphi;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$, $\delta \in (0,\pi]$, *и* $\omega_1(\varphi;\delta)_p \neq o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$ *при любом* $1 \le p < \infty$.

Ряды Фурье таких функций φ сходятся в каждой точке $\mathbb{R}$, но сходимость заведомо не является равномерной. Отсюда, в частности, следует, что если отказаться от условия $f \in C(\mathbb{T})$, то сформулированное выше утверждение К. Яно теряет силу, так что выполнение условия $\omega_1(f;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$ при всех $1 \le p < \infty$ не гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$. Кроме того, ясно, что для таких функций $\varphi \in L_p(\mathbb{T})$ ряд (1) (при $l = m = 1,\ 1 \le p < \infty$) всегда расходится, поскольку в противном случае мы имели бы $\omega_1(\varphi;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$ $(\delta \to 0)$.

Типичным представителем указанного выше класса функций φ является $\varphi(y) = \operatorname{sgn}\sin y$, $y \in \mathbb{R}$. Поскольку

$$\varphi(y) = \{-1, y \in ((2k-1)\pi, 2k\pi);\ 0,\ y = k\pi;\ 1,\ y \in (2k\pi, (2k+1)\pi);\ k \in \mathbb{Z}\},$$

то очевидно, что $\varphi \in BV(\mathbb{T})$, $|\varphi(y)| \le 1$ для любого $y \in \mathbb{R}$, точки $y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, являются точками существенного разрыва первого рода, причем в каждой точке $y \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\min\{\varphi(y-0), \varphi(y+0)\} \le \varphi(y) = \left(\frac{1}{2}\right)\{\varphi(y-0) + \varphi(y+0)\} \le \max\{\varphi(y-0), \varphi(y+0)\}.$$

Оценка $\omega_1(\varphi;\delta)_p = O(\delta^{1/p})$, $1 \le p < \infty$, справедливая для любой функции из $BV(\mathbb{T})$, ранее была отмечена также в [41, § 2]. Справедливость соотношения $\omega_1(\varphi;\delta)_p \neq o(\delta^{1/p})(\delta \to 0)$, $1 \le p < \infty$, также очевидна, поскольку в противном случае было бы $\varphi \in C(\mathbb{T})$, что в силу определения φ не представляется возможным. В. И. Коляда [43, § 3, замечание 1] указал также, что $\omega_1(\varphi;\delta)_1 = O(\delta)$ и $\delta^{1/p} = O(\omega_1(\varphi;\delta)_p)$ при любом $p \in (1,\infty)$; отсюда фактически имеем $\omega_1(\varphi;\delta)_p \asymp \delta^{1/p}$, $\delta \in (0,\pi]$, $1 < p < \infty$.

6) В связи с изложенным в п. 5) отметим также следующее: *имеются существенно неограниченные (и потому существенно разрывные) на* $\mathbb{T}$ *функции* f_1 *и* f_2, *принадлежащие* $L_p(\mathbb{T})$ *при любом* $1 < p < \infty$, *и такие, что* $\omega_1(f_1;\delta)_p \asymp \delta^{1/p}$, $\delta \in (0,\pi]$, *и* $\omega_1(f_2;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$, $\delta \to 0$. Таким образом, условие $\omega_1(f;\delta)_p = o(\delta^{1/p})$, $\delta \to 0$, также не гарантирует равномерную сходимость ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < \infty$ (см. пп. 3) и 4)). Функции f_1 и f_2 определяются разложениями в ряды Фурье, которые сходятся при всех $x \neq 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (см., например, [9, т. 1, гл. VII, п. 2; 26, гл. X, § 2, теорема 1]): $f_1(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\cos nx$ и $f_2(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(n\ln(en))^{-1}\cos nx$. Существенная неограниченность на $\mathbb{T}$ (точнее, в любой окрестности нуля) функций f_1 и f_2 следует из расходимости к $+\infty$ их рядов Фурье при $x = 0$ (см., например, [26, гл. VIII, § 13]). Поскольку $a_n(f_1) \downarrow 0, a_n(f_2) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}(\ln(en))^{-p} < \infty,$$

то в силу теоремы Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см., например, [26, гл. X, § 3; 9, т. 2, гл. 12, лемма 6.6]): $f \in L_p(\mathbb{T}) \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f) < \infty$ при $1 < p < \infty$ и $a_n(f) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, имеем $f_1, f_2 \in L_p(\mathbb{T})$ при любом $1 < p < \infty$. Далее, в силу неравенств А. А. Конюшкова (см. [4, § 1, теорема 4; 44, § 2, неравенства (19) и (21)]), выписанных для косинус-ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$:

$$C_{21}(p)n^{1-1/p}a_{2n}(f) \le E_{n-1}(f)_p \le C_{22}(p)\Big\{n^{1-1/p}a_n(f) + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-2}a_\nu^p(f)\Big)^{1/p}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем

$$2^{-1}C_{21}(p) \le n^{1/p}E_{n-1}(f_1)_p \le 2C_{22}(p), \quad 2^{-2}C_{21}(p) \le n^{1/p}\ln(en)E_{n-1}(f_2)_p \le 2C_{22}(p),$$

откуда получаем $E_{n-1}(f_1)_p \asymp n^{-1/p},\ n \in \mathbb{N}$, и $E_{n-1}(f_2)_p = o(n^{-1/p})$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\omega_1(f_1;\pi/n)_p \asymp n^{-1/p},\ n \in \mathbb{N}$, и $\omega_1(f_2;\pi/n)_p = o(n^{-1/p})$ при $n \to \infty$.

7) Положим $f_3(x;p;\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-\alpha-1}\cos nx$, где $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}a_n^p(f_3) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p\alpha+1)} < \infty$, то $f_3 \in L_p(\mathbb{T})$ при всех $\alpha > 0$. Далее, в силу неравенств А. А. Конюшкова (см. п. 6)) при любом $\alpha > 0$ имеем $2^{1/p-\alpha-1}C_{21}(p) \le n^{\alpha}E_{n-1}(f_3)_p \le (1+(p\alpha)^{-1/p})C_{22}(p)$, откуда $E_{n-1}(f_3)_p \asymp n^{-\alpha},\ n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\omega_1(f_3;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha}$ при $\alpha < 1$ и $\omega_1(f_3;\delta)_p \asymp \delta(\ln(\pi e/\delta))^{1/p}$ при $\alpha = 1,\ \delta \in (0,\pi]$.

В случае $\alpha > 1/p$ ряд, с помощью которого определяется f_3, сходится абсолютно и равномерно всюду на $\mathbb{R}$ и является рядом Фурье своей суммы $f_3(\cdot;p;\alpha) \in C(\mathbb{T})$, при этом (см. также п. 1)) $\|f_3(\cdot;p;\alpha) - S_n(f_3;\cdot)\|_{\infty} = O(n^{-(\alpha-1/p)}), n \in \mathbb{N}$. С другой стороны, поскольку $\alpha > 1/p$, имеем $\|f_3(\cdot;p;\alpha) - S_n(f_3;\cdot)\|_{\infty} \ge f_3(0;p;\alpha) - S_n(f_3;0) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-(\alpha-1/p+1)} \ge (\alpha-1/p)^{-1}(n+1)^{-(\alpha-1/p)} \ge (\alpha-1/p)^{-1}2^{1/p-\alpha}n^{-(\alpha-1/p)},\ n \in \mathbb{N}$. Таким образом, при $1 < p < \infty$ и $1/p < \alpha < 1$ существует функция $f_3(\cdot;p,\alpha) \in L_p(\mathbb{T})$ с $\omega_1(f_3;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha},\ \delta \in (0,\pi]$, реализующая порядковое равенство в оценке Ш. Изуми (см. п. 1)), и, следовательно, указанная оценка является точной в смысле порядка на классах $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$.

8) В 1976 г. была опубликована работа А. М. Гарсиа [45], привлекшая внимание автора благодаря случайно обнаруженному (после публикации [1]) в РЖ "Математика" (1992 г., № 5 Б57) реферату статьи [46] с весьма заманчивым названием.

В этой работе, в частности, установлен следующий результат ([45, теорема I.3], см. также [47, теорема 3.2]): *пусть* $1 < p < \infty, f \in L_p(\mathbb{T})$ *и сходится интеграл*

$$\int\limits_0^{\pi} h^{-(1/p+1)}\left\|\Delta_h^1 f(\cdot)\right\|_p dh < \infty; \tag{10}$$

тогда частные суммы $S_n(f;x)$ *ряда Фурье функции* f *сходятся равномерно на* $\mathbb{T}$.

В силу справедливости порядковых равенств ($1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T})$)

$$\int\limits_0^{\pi} t^{-(1/p+1)}\left\|\Delta_t^1 f(\cdot)\right\|_p dt \asymp \int\limits_0^{\pi} t^{-(1/p+1)}\omega_1(f;t)_p\,dt \asymp \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1}\omega_1\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \tag{11}$$

условия (10) и (1) (случай $l = m = 1,\ p > 1$) являются равносильными, так что сформулированный выше результат А.М.Гарсиа — достаточное условие для равномерной сходимости на $\mathbb{T}$ ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 < p < \infty$, — к тому времени был уже известен и установлен П. Л. Ульяновым [3] (см. введение, замечание 3) в 1966 г.

Эквивалентность (в смысле сходимости) интегралов в (11) известна (см., например, [48, замечания, п. (i), с. 72; 46, п. 2, замечание 2.2]) и следует из неравенств $\left\|\Delta_h^1 f(\cdot)\right\|_p \le \omega_1(f;\delta)_p \le 10\delta^{-1}\int_0^{\delta}\left\|\Delta_h^1 f(\cdot)\right\|_p dh,\ 0 \le h \le \delta$, левое из которых очевидно, а правое доказано в [45, п. 2] при $f = T$, где $T(x) = \sum_{|\nu|\le n} c_{\nu}\exp(i\nu x),\ c_0 = 0$. Приведенная в [45] схема доказательства проходит и в случае произвольной функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ также для значений $p = 1$ и $p = \infty$, поскольку при доказательстве, по существу, используется лишь инвариантность L_p-нормы относительно сдвига, т. е. $\|f(\cdot+h)\|_p = \|f(\cdot)\|_p$ для любых $h \in \mathbb{R}$ и $f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 \le p \le \infty$ (см., например, [39, § 1.4]).

9) В [46, теорема 5.1, неравенство (5.2)] приведено доказательство следующего утверждения: пусть $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T})$ и $\int_0^1 t^{-(1/p+1)}\omega_1(f;t)_p\,dt < \infty$; тогда

$$\|f(\cdot) - S_n(f;\cdot)\|_{\infty} \le C_{24}(p)\int\limits_0^{1/n} t^{-(1/p+1)}\omega_2(f;t)_p\,dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Поскольку сходимость указанного интеграла (гарантирующая эквивалентность f некоторой функции из $C(\mathbb{T})$, которая после надлежащего изменения на множестве меры “нуль” снова обозначена через f) равносильна сходимости ряда (1) при $m = 1,\ l = 2,\ 1 < p < \infty$, а величина в правой части (12) (в силу очевидного неравенства $\omega_l(f;\delta)_p \le 2^{l-1}\omega_1(f;\delta)_p$ вместо $\omega_2(f;\delta)_p$ можно положить $\omega_l(f;\delta)_p,\ l \in \mathbb{N}$) по порядку совпадает с соответствующей величиной в правой части (3), то оценка (3) в случае $m = 1,\ 1 < p < \infty$ была уже известна до указанных работ автора [1; 2].

10) В замечании 5.5 [46, п. 5] приводится утверждение о неулучшаемости оценки (12) (с предварительной заменой $\omega_2(f;\delta)_p$ на $\omega_1(f;\delta)_p$) в том смысле, что в ней O большое нельзя заменить на o малое.

Для доказательства этого утверждения рассматривается функция $g_\gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma}\cos nx$, где $1 < \gamma + 1/p < 2$ и $1 < p < \infty$, и с помощью одного результата С. Алянчича и М. Томича [49, теорема 4] устанавливается, что $g_\gamma \in L_p(\mathbb{T})$ и $\omega_1(g_\gamma;\delta)_p = O(\delta^{\gamma-1+1/p}),\ \delta \in (0,1]$. Далее, предположение о допустимости указанной выше замены O большого на o малое, приводит к оценке $\|g_\gamma(\cdot) - S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty = o(n^{-(\gamma-1)})$ $(n \to \infty)$, откуда $E_{n-1}(g_\gamma)_\infty = o(n^{-(\gamma-1)})$ $(n \to \infty)$ и, следовательно (в силу правого неравенства в (6) при $m = l = 1,\ p = \infty$), $\omega_1(g_\gamma;\delta)_\infty = o(\delta^{\gamma-1})$ при $\delta \to 0$. Последнее соотношение противоречит известному асимптотическому равенству (см., например, [9, т. 1, гл. 5, пример 11]) $g_\gamma(h) - g_\gamma(0) \simeq C_{25}(\gamma)h^{\gamma-1}$ $(h \to +0)$, которое имеет место при $1 < \gamma < 2$. Указанное ограничение на γ обусловливает рассмотрение значений $1 < \gamma < 2 - 1/p$ (см. [46, п. 5, с. 317]). Таким образом, в процессе доказательства утверждения в замечании 5.5 [46] фактически установлено, что при $1 < p < \infty$ и $1 < \gamma < 2 - 1/p$ для функции $g_\gamma \in L_p(\mathbb{T})$ справедливы оценки $\omega_1(g_\gamma;\delta)_p = O(\delta^{\gamma-1+1/p}),\ \delta \in (0,1]$, и $\omega_1(g_\gamma;\delta)_\infty \ne o(\delta^{\gamma-1})$ при $\delta \to 0$.

Подробное изложение схемы доказательства утверждения в замечании 5.5 [46] обусловлено наличием ряда необходимых комментариев, поскольку попытка любой ценой добиться желаемого противоречия часто приводит к весьма неожиданным результатам.

10.1) Полагая $\gamma = \alpha + 1 - 1/p$ и учитывая $1 < \gamma < 2 - 1/p \iff 1/p < \alpha < 1$, для функции $g_\gamma \equiv g_{\alpha,p} \in L_p(\mathbb{T})$ имеем $\omega_1(g_{\alpha,p};\delta)_p = O(\delta^\alpha),\ \delta \in (0,1]$, и $\omega_1(g_{\alpha,p};\delta)_\infty \ne o(\delta^{\alpha-1/p})$ $(\delta \to 0)$, откуда следует, что в утверждении Г. Харди и Дж. Литтлвуда (см. п. 1)): $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,p) \implies f \sim g \in \mathrm{Lip}(\alpha - 1/p)$ показатель $\alpha - 1/p$ является точным, т. е. не допускает увеличения.

Последний факт значительно ранее установлен в уже цитированной работе П. Л. Ульянова [3, § 4, теорема 5$'$ и замечание 6] (см. также [29, доказательство теоремы 1]).

10.2) После того как была выписана оценка $\|g_\gamma(\cdot) - S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty = o(n^{-(\gamma-1)})$ $(n \to \infty)$, можно было бы остановиться, поскольку такая оценка для g_γ невозможна как при $\gamma + 1/p > 1$, так и при $\gamma > 1$, а именно: для функции g_γ при $\gamma > 1$ имеет место порядковое равенство $\|g_\gamma(\cdot) - S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty \asymp n^{-(\gamma-1)},\ n \in \mathbb{N}$ (см. выше в п. 7)) функцию $f_3(\cdot;p;\alpha) \equiv g_\gamma(\cdot)$ при $\alpha = \gamma - 1 + 1/p$).

10.3) Условие $\gamma > 1$ (вместо $\gamma + 1/p > 1$) связано не только с поведением величины $g_\gamma(h) - g_\gamma(0)$ при $h \to +0$, но и также с тем, что в противном случае ($\gamma \le 1$) оценка (12) для функции g_γ теряет смысл, поскольку последовательность $\{S_n(g_\gamma;0)\}_{n=1}^{\infty}$ расходится к $+\infty$ со скоростью $n^{1-\gamma}$ при $\gamma < 1$ и $\ln(en)$ при $\gamma = 1$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_\gamma(\cdot) - S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty = +\infty$. Кроме того, из одного результата Г. Лоренца [50, § 4, теорема 8] (см. также [26, гл. 2, § 3 и гл. 10, § 9]) следует, что для функции g_γ при $1 < \gamma < 2$ имеет место порядковое равенство $\omega_1(g_\gamma;\delta)_\infty \asymp \delta^{\gamma-1},\ \delta \in (0,\pi]$.

10.4) Поскольку $g_\gamma(\cdot) \equiv f_3(\cdot;p;\alpha)$ при $\gamma = \alpha + 1 - 1/p$, то учитывая приведенные выше оценки, получаем, что для функции g_γ при $1 < \gamma < 2 - 1/p$ имеют место порядковые равенства $(n \in \mathbb{N})$:

$$\|g_\gamma(\cdot) - S_n(g_\gamma;\cdot)\|_\infty \asymp n^{-(\gamma-1)} \asymp E_{n-1}(g_\gamma)_\infty \asymp \omega_1\Big(g_\gamma;\frac{\pi}{n}\Big)_\infty \asymp \int_0^{1/n} t^{-(1/p+1)}\omega_1(g_\gamma;t)_p\,dt.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Il'yasov N.A.** On the order of magnitude of the uniform convergence of multiple trigonometric Fourier series with respect to cubes on the function classes $H^l_{p,m}[\omega]$ // Anal. Math. 2002. Vol. 28, no. 1. P. 25–42.
2. **Ильясов Н.А.** О порядке равномерной сходимости рядов Фурье периодических функций из классов $H^l_p[\omega]$ // Вестн. Бакинс. ун-та. Сер. физ.-мат.наук. 1998. № 2. С. 158–170.
3. **Ульянов П.Л.** Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72(114), № 2. С. 193–225.
4. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
5. **Yano K.** On Hardy and Littlewood's theorem // Proc. Japan. Acad. 1957. Vol. 33, no. 2. P. 73–74.
6. **Геронимус Я.Л.** О некоторых свойствах функций класса L_p // Изв. вузов. Математика. 1958. № 1. С. 24–32.
7. **Темиргалиев Н.Т.** О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 2. С. 139–148.
8. **Жижиашвили Л.В.** Сопряженные функции двух переменных и двойные ряды Фурье // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 4. С. 765–768.
9. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 615 с.; Т. 2. 537 с.
10. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
11. **Коляда В.И.** О существенной непрерывности суммируемых функций // Мат. сб. 1979. Т. 108(150), № 3. С. 326–349.
12. **Стейн И.М.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 342 с.
13. **Коляда В.И.** О вложении в классы непрерывных функций многих переменных // Мат. сб. 1976. Т. 99(141), № 3. С. 421–432.
14. **Темиргалиев Н.Т.** Об одной теореме вложения // Изв. вузов. Математика. 1973. № 7. С. 103–111.
15. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
16. **Темиргалиев Н.Т.** О вложении некоторых классов функций в $C\left([0,2\pi]^m\right)$ // Изв. вузов. Математика. 1978. № 8(195). С. 88–90.
17. **Коляда В.И.** Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Мат. сб. 1977. Т. 102(144), № 2. С. 195–215.
18. **Ильясов Н.А.** К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 53–61.
19. **Ильясов Н.А.** О порядке убывания равномерных модулей гладкости на классах функций $E_{p,m}[\varepsilon]$ // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 4. С. 519–536.
20. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
21. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. I // Мат. сб. 1951. Т. 29(71), № 1. С. 225–232.
22. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье (второе сообщение) // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1955. Т. 19, № 4. С. 221–246.
23. **Ильясов Н.А.** О приближении периодических функций средними Фейера — Зигмунда в разных метриках // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 48–57.
24. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
25. **Гейт В.Э.** О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в L // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7(122). С. 19–30.
26. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
27. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1953. Т. 17, № 2. С. 87–98.
28. **Гейт В.Э.** Об условиях вложения классов $H^\omega_{k,\mathbb{R}}$ и $\widetilde{H}^\omega_{k,\mathbb{R}}$ // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 169–178.
29. **Андриенко В.А.** Вложение некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.
30. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций H^ω_p // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.

31. **Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.** Теоремы вложения в конструктивной теории приближений // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 9. С. 107–147.
32. **Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю.** О классах Бесова, Бесова — Никольского и об оценках смешанных модулей гладкости дробных производных // Тр. МИРАН. 2003. Т. 243. С. 244–256.
33. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в L_p, $1 \le p \le \infty$ // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 6. С. 1301–1304.
34. **Ильясов Н.А.** Приближение периодических функций средними Зигмунда // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 3. С. 367–382.
35. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** A convergence criterion for Fourier series // Math. Zeitschr. 1928. Bd. 28, № 3. S. 612–634.
36. **Izumi Shin-ichi.** Some trigonometrical series. XV //Proc. Japan. Acad. 1955. Vol. 31, № 7. P. 399–401.
37. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** Some properties of fractional integrals. I. // Mathem. Zeitschr. 1928. Bd. 27, № 4. S. 565–606.
38. **Жук В.В.** О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи частных сумм ее ряда Фурье // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 5. С. 1015–1018.
39. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 366 с.
40. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
41. **Геронимус Я.Л.** О некоторых теоремах вложения // Изв. вузов. Математика. 1965. № 6(49). С. 53–62.
42. **Голубов Б.И.** О непрерывных функциях ограниченной p-вариации // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 305–312.
43. **Коляда В.И.** О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 117–136.
44. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
45. **Garsia A.M.** A remarkable inequality and the uniform convergence of Fourier series // Indiana Univ. Math. J. 1976. Vol. 25, no. 1. P. 85–102.
46. **Oehring Ch.** On Garsia's criterion for uniform convergence of Fourier series // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1991. Vol. 51, no. 2. P. 305–322.
47. **Garsia A.M.** Combinatorial inequalities and smoothness of functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 82, no. 2. P. 157–170.
48. **Neugebauer C.J.** The L^p modulus of continuity and Fourier series of Lipschitz functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 64, no. 1. P. 71–76.
49. **Aljancic S., Tomic M.** Uber den stetigkeitsmodul von Fourier-reihen mit monotonen koeffizienten // Math. Zeitschr. 1965. Bd. 88, № 3. S. 274–284.
50. **Lorentz G.G.** Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen // Math. Zeitschr. 1948. Bd. 51, № 2. S. 135–149.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики Национальной АН Азербайджана
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 09.04.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.6

О ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ, ВКЛЮЧАЮЩИМИ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ СПИСКА ЗАДАНИЙ[1]

М. С. Кошелева, А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов

Рассматривается решение задачи маршрутизации, осложненной ограничениями и возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий. Более того, по постановке допускается, что часть ограничений также может формироваться в зависимости от текущего списка заданий. Возможные приложения могут быть связаны с маршрутизацией перемещений работников в условиях повышенной радиации при демонтаже источников излучения, а также с задачей управления инструментом при листовой резке деталей на станках с числовым программным управлением. Построены модификация широко понимаемого динамического программирования и, на его основе, два варианта алгоритма, реализованных на ПЭВМ.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования.

M. S. Kosheleva, A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. On a routing problem with constraints that include dependence on a task list.

We consider the solution of a routing problem complicated by constraints and by a possible dependence of the cost function on a task list. In addition, the statement admits that some of the constraints may be formed depending on a current list of tasks. Possible applications of this problem include routing the workers' movements under increased radiation in the process of dismantling radiation sources as well as steering a numerically controlled machine tool during the sheet cutting of parts. We propose a modification of widely understood dynamic programming and use it to design two versions of an algorithm, which are implemented as computer programs.

Keywords: dynamic programming, route, precedence constraints.

1. Введение

В работе используются следующие сокращения: АЭС — атомная электростанция, ЗК — задача коммивояжера, ДП — динамическое программирование, ДР — допустимое решение, м/ф — мультифункция, ОЗМ — основная задача маршрутизации, п/м — подмножество, УП — упорядоченная пара, ЧПУ — числовое программное управление.

Статья посвящена построению методов решения задачи маршрутизации перемещений в условиях ограничений различных типов; упомянутые ограничения мотивированы потребностями прикладных задач. В данном случае можно говорить, в частности, о задачах, характерных для атомной энергетики и связанных со снижением дозовой нагрузки работников АЭС при выполнении комплекса заданий в условиях повышенной радиации (очень важной представляется, в частности, инженерная задача о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации), а также о задаче, возникающей в машиностроении и касающейся управления инструментом при листовой резке деталей на станках с ЧПУ. В постановках упомянутого типа с одной стороны, присутствует большой комплекс условий технологического характера, подлежащих соблюдению в процессе перемещений, а с другой — оказывается возможной ситуация, когда стоимость отдельных работ зависит от списка заданий, не выполненных на текущий момент (такая ситуация имеет место, в частности, в упомянутой выше задаче о демонтаже, которая весьма актуальна с точки зрения эксплуатации современных АЭС).

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 14-08-00419, 15-01-07909).

Обсудим один из вариантов маршрутной задачи производственного характера, имея в виду проблему использования станков с ЧПУ; см. в этой связи [1–3]. Полагая выполненной процедуру раскроя, рассмотрим вопрос об организации перемещений инструмента (резака) с целью последовательной резки контуров плоских деталей (деталь, наряду с внешним, может иметь один или несколько внутренних контуров, которые должны вырезаться раньше внешнего). Сама резка контуров осуществляется по эквидистантам этих контуров, т. е. с некоторым "запасом". Для ее осуществления подбирается всякий раз точка врезки из выбранного заранее конечного множества, играющего роль дискредитации вспомогательной эквидистанты, расположенной вблизи основной; завершение резки производится в точке выключения инструмента, находящейся вблизи "своей" точки врезки. Далее инструмент перемещается к точке врезки следующего по порядку контура в режиме холостого хода с выключенным резаком. Стартовая точка инструмента задана; по окончанию резки всех деталей обычно осуществляется возврат инструмента в точку старта в режиме холостого хода.

Из приведенного выше рассуждения видно, что одной из компонент системы ограничений являются так называемые условия предшествования [4]: резка внутренних контуров каждой детали должна предшествовать резке внешнего ее контура (возможны и другие условия такого типа). Имеются также требования, связанные [3, с. 63] с ограничениями на жесткость листа и деталей. Сейчас отметим следующее: при выборе новых точек врезки следует "сторониться" множеств, отвечающих уже вырезанным деталям, т. е. участков, где листа уже нет. В противном случае возникают деформации оставшейся части листа возле вновь вырезаемых деталей.

Итак, новую точку врезки надо выбирать так, чтобы ее окрестность заданного размера не содержала "пустот", образовавшихся за счет резки "предыдущих" деталей. В результате возникает ограничение, зависящее от списка заданий, выполненных на текущий момент времени. Данный список, однако, легко выражается через список еще не выполненных заданий, что оказывается более удобным с точки зрения последующего применения аппарата ДП.

Итак, мы сталкиваемся с ситуацией, когда и стоимости (перемещений и текущих работ), и сами ограничения могут зависеть от списка заданий. Конечно, в принципе можно целый ряд ограничений не рассматривать, изменяя должным образом функции стоимости (вводя соответствующие штрафы). Мы предпочитаем, однако, сохранить обе возможности для обеспечения, в конечном счете, соблюдения ограничений: жесткие запреты и пребразование функций стоимости с целью сделать крайне невыгодным фактическое нарушение ограничений. Такой подход представляется полезным и с точки зрения построения общей теории, уже не обязательно связанной с применением в задаче управления инструментом на машинах с ЧПУ; представляется, в частности, что данный подход может оказаться полезным в задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации.

Рассматриваемая маршрутная задача имеет своим прототипом известную труднорешаемую ЗК (см. [4; 5] и др.); в частности, отметим применение ДП для решения ЗК в [6; 7]. Однако вышеупомянутые особенности, диктуемые интересами решения прикладных задач, выводят, как представляется (по крайней мере для задач "диапазонного" в смысле размерности типа), в качестве важных соображения иного порядка, а именно: как учитывать весьма сложные и разнообразные ограничения, а также зависимость стоимости от списка заданий. Эти особенности затрудняют анализ эвристических алгоритмов и делают актуальной разработку теоретических методов, ориентированных на оптимизацию. В этом качестве естественным представляется исследование возможностей метода ДП, что и составляет цель настоящей статьи.

2. Общие определения и обозначения

Используем кванторы, пропозициональные связки; $\varnothing$ обозначает пустое множество; $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если T — множество, то через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м T, а через $\mathrm{Fin}(T)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(T)$.

Если P и Q — непустые множества, то через $(\mathrm{Bi})[P;Q]$ обозначаем множество всех биекций [8, с. 87] множества P на Q; при $\phi \in (\mathrm{Bi})[P;Q]$ определена биекция $\phi^{-1} \in (\mathrm{Bi})[Q;P]$ (обратная к ϕ), для которой $\big(\phi(\phi^{-1}(q)) = q \quad \forall q \in Q\big) \,\&\, \big(\phi^{-1}(\phi(p)) = p \quad \forall p \in P\big)$. Тогда для всякого непустого множества A в виде $(\mathrm{Bi})[A;A]$ имеем множество всех перестановок A (см. [8, с. 87]).

Если p и q — объекты, то через $\{p;q\}$ обозначаем множество, содержащее p,q и не содержащее никаких других элементов ($\{p;q\}$ — неупорядоченная пара упомянутых объектов). Произвольному объекту x сопоставляем синглетон $\{x\} \triangleq \{x;x\}$ (содержащий x). Поскольку множества являются объектами, сопоставляем, следуя [9, с. 87], произвольным объектам y и z УП $(y,z) \triangleq \{\{y\};\{y;z\}\}$ с первым элементом y и вторым элементом z. Если u — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(u)$ и $\mathrm{pr}_2(u)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы u. Для любых объектов a, b и c имеем триплет $(a,b,c) \triangleq \big((a,b),c\big)$ в виде УП специального вида. Как обычно [10, с. 17], для любых трех непустых множеств A, B и C следуем соглашению $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$; если к тому же $\phi : A \times B \times C \longrightarrow D$, где D — непустое множество, то при $\mu \in A \times B$ и $\nu \in C$ определена точка $\phi(\mu,\nu) \in D$ (используем упомянутое представление множества $A \times B \times C$), для которой при $\mu_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(\mu)$ и $\mu_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(\mu)$ используем также обозначение $\phi(\mu_1,\mu_2,\nu)$, т. е. $\phi(\mu_1,\mu_2,\nu) \triangleq \phi(\mu,\nu)$.

Как обычно, через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$ и $\overline{p,q} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 |\, (p \leqslant i) \,\&\, (i \leqslant q)\} \quad \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall q \in \mathbb{N}_0$ (заметим, кстати, что $\overline{1,0} = \emptyset$). Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$; при этом $(\mathrm{bi})[K] \triangleq (\mathrm{Bi})[\overline{1,|K|};K] \neq \varnothing$. Кроме того, $|\varnothing| \triangleq 0$. При $s \in \mathbb{N}$ непременно $(\mathrm{bi})[\overline{1,s}] = (\mathrm{Bi})[\overline{1,s};\overline{1,s}]$ (множество всех перестановок множества $\overline{1,s}$). Для каждого непустого множества T через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех функций из T в $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leqslant \xi\}$.

3. Содержательная постановка задачи

В настоящем разделе вводятся элементы постановки с тем, чтобы наметить ее точный вариант, который будет приведен далее. Однако, сначала введем ряд специальных обозначений и определений, непосредственно касающихся рассматриваемой ниже задачи. Фиксируем непустое множество X, точку $x^0 \in \mathrm{X}$ (база процесса), число $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$, а также множества

$$\mathrm{M}_1 \in \mathrm{Fin}(\mathrm{X}), \ldots, \mathrm{M}_N \in \mathrm{Fin}(\mathrm{X}), \tag{3.1}$$

именуемые ниже мегаполисами и обладающие свойствами

$$(x^0 \notin \mathrm{M}_j \quad \forall j \in \overline{1,N}) \,\&\, (\mathrm{M}_p \cap \mathrm{M}_q = \varnothing \quad \forall p \in \overline{1,N} \quad \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{3.2}$$

Кроме того, фиксируем следующие отношения:

$$\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(\mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(\mathrm{M}_N \times \mathrm{M}_N) \tag{3.3}$$

(непустые п/м декартовых “квадратов” мегаполисов); УП — элементы $\mathbb{M}_j$, где $j \in \overline{1,N}$, — определяют всякий раз возможные варианты выполнения работ, связанных с обслуживанием мегаполиса M_j. Нашей целью является исследование процессов

$$x^0 \to \big(x_{1,1} \in \mathrm{M}_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathrm{M}_{\alpha(1)}\big) \to \ldots \to \big(x_{N,1} \in \mathrm{M}_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_{N,2} \in \mathrm{M}_{\alpha(N)}\big), \tag{3.4}$$

для которых $(x_{1,1}, x_{1,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}, \ldots, (x_{N,1}, x_{N,2}) \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}$. В (3.4) α — перестановка множества $\overline{1,N}$, выбор которой, наряду с траекторией в (3.4), находится в руках исследователя.

З а м е ч а н и е. В связи с задачей маршрутизации движения инструмента на станках с ЧПУ отметим следующую интерпретацию (3.1)–(3.4): мегаполисы получены дискретизацией некоторых вторичных эквидистант, лежащих вблизи эквидистант, по которым осуществляется резка, УП из отношений (3.3) имеют всякий раз первым элементом гипотетическую точку врезки, а вторым элементом — соответствующую ей точку выключения инструмента. Заметим, что в данном конкретном случае отношения (3.3) являются функциями (отображениями): каждой точке врезки соответствует единственная точка выключения инструмента.

Возвращаясь к (3.3), полагаем при $j \in \overline{1,N}$

$$\Big(\mathfrak{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\}\Big) \,\&\, \Big(\mathbf{M}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\}\Big), \tag{3.5}$$

получая два непустых п/м M_j; в связи с этим отметим, что

$$\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \bigcup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X).$$

Полагаем также $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$, получая множество всех непустых списков заданий. Пусть, кроме того, заданы м/ф $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_N$; точнее, заданы отображения

$$\mathrm{A}_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathrm{M}_1), \ldots, \mathrm{A}_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathrm{M}_N). \tag{3.6}$$

Таким образом, при $j \in \overline{1,N}$, $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$ определено непустое множество $\mathrm{A}_j(x,K)$; мы полагаем, что наши возможности в части перемещения из x в мегаполис M_j исчерпываются упомянутым множеством, где (по смыслу) K есть список заданий, не выполненных на момент перемещения. Итак, мы можем в упомянутой ситуации осуществить только перемещения $x \to y$, где $y \in \mathrm{A}_j(x,K)$. Задавая м/ф (3.6), мы допускаем некоторую переопределенность. Так, например, допускаем в данной ситуации случай $x \in \mathbf{M}_j$, который не будет возникать (в силу (3.2)) в процессах вида (3.4). Однако в формальных определениях мы рассматриваем и такие "ненастоящие" ситуации, полагая при $x \in \mathbf{M}_j$, что $\mathrm{A}_j(x,K) \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{M}_j$. Подобные доопределения различных зависимостей, содержательных в каких-то своих ситуациях, применяем, не оговаривая это специально. Имея в виду обслуживание схемы (3.4), постулируем, что $\forall x \in \mathbf{X}\ \ \forall K \in \mathfrak{N}\ \ \forall j \in K$

$$\mathrm{A}_j(x,K) \cap \mathfrak{M}_j \neq \varnothing. \tag{3.7}$$

Мы полагаем, что система условий в (3.4) дополняется требованиями: $\big(x_{1,1} \in \mathrm{A}_{\alpha(1)}(x^0, \overline{1,N})\big)\&$ $\big(x_{j,1} \in \mathrm{A}_{\alpha(j)}(x_{j-1,2}, \{\alpha(t) : t \in \overline{j,N}\})\ \forall j \in \overline{2,N}\big)$ (здесь α — перестановка $\overline{1,N}$, остальные элементы соответствуют (3.4)). Мы полагаем далее, что и выбор перестановки α стеснен ограничениями в виде условий предшествования.

Полагая также $\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \bigcup \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathrm{M}_i\Big)$, получаем, что $\mathbb{X} \in \mathrm{Fin}(X)$ и $\mathbf{X} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{X})$. Как видно из (3.4), траектория реализуется в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$; начальное состояние x^0 в этой связи уместно заменить УП (x^0, x^0). Решение, доступное выбору исследователя, является УП "маршрут-трасса", где термин "маршрут" используется для перестановок в $\overline{1,N}$. Каждому такому решению сопоставляем значение аддитивного критерия, для которого функции стоимости, его составляющие, могут зависеть от списка заданий. Минимизация данного критерия и будет составлять ОЗМ.

4. Постановка задачи: основные объекты и их свойства

В настоящем разделе содержательные рассуждения, связанные с построением процессов типа (3.4), должным образом формализуются, что требует сначала введения на строгом уровне маршрутов и трасс (траекторий). Полагаем $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$; элементы $\mathbb{P}$ называем (полными) маршрутами. Каждому маршруту сопоставляем пучок траекторий (трасс). Полагая, что $\mathbb{Z}$ есть множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$, введем при $\alpha \in \mathbb{P}$ следующее множество:

$$\mathcal{Z}_\alpha \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z} \big| \big(z_0 = (x^0, x^0)\big) \mathbin{\&} \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1,N}\big)$$

$$\mathbin{\&} \big(\mathrm{pr}_1(z_s) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}) \quad \forall s \in \overline{1,N}\big)\Big\}. \tag{4.1}$$

Ниже мы убедимся в том, что (4.1) — непустое множество. Заметим только, что определение (4.1) можно включить в более общее. При $K \in \mathfrak{N}$ полагаем, что $\mathbb{Z}_K$ есть множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Если $x \in \mathbf{X}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то

$$\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{Z}_K \big| \big(z_0 = (x, x)\big) \mathbin{\&} \big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \quad \forall t \in \overline{1,|K|}\big)$$

$$\mathbin{\&} \big(\mathrm{pr}_1(z_s) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,|K|}\}) \quad \forall s \in \overline{1,|K|}\big)\Big\}. \tag{4.2}$$

С учетом того что $\overline{1,N} \in \mathfrak{N}$ и $x^0 \in \mathbf{X}$, получаем $\mathcal{Z}(x^0, \overline{1,N}, \alpha) = \mathcal{Z}_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}$ (полезно учесть что $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$). Полагаем $\mathfrak{N}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} | s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{1,N}$.

Предложение 1. *Каждое из множеств* (4.2) *непусто.*

Схема д о к а з а т е л ь с т в а. Непосредственно из (3.7) и (4.2) очевидным образом следует, что $\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \neq \varnothing \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_1 \quad \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K]$. Введем в рассмотрение

$$\mathrm{S} \stackrel{\triangle}{=} \{s \in \overline{1,N} | \mathcal{Z}(x, K, \alpha) \neq \varnothing \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_s \quad \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K]\}. \tag{4.3}$$

При этом $1 \in \mathrm{S}$ и, стало быть, $\mathrm{S} \in \mathfrak{N}$. Для доказательства равенства $\mathrm{S} = \overline{1,N}$ допустим противное: $\mathrm{S} \neq \overline{1,N}$, а тогда $\overline{1,N} \setminus \mathrm{S} \neq \varnothing$ и определено

$$r \stackrel{\triangle}{=} \inf(\overline{1,N} \setminus \mathrm{S}) \in \overline{1,N} \setminus \mathrm{S}. \tag{4.4}$$

Легко видеть, что $r \in \overline{2,N}$, при этом $r - 1 \in \mathrm{S}$ и, стало быть, согласно (4.3)

$$\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \neq \varnothing \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N}_{r-1} \quad \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K]. \tag{4.5}$$

Вместе с тем из (4.4) следует, что для некоторых $x_* \in \mathbf{X}$, $K_* \in \mathfrak{N}_r$ и $\alpha_* \in (\mathrm{bi})[K_*]$ имеет место $\mathcal{Z}(x_*, K_*, \alpha_*) = \varnothing$. При этом $r = |K_*|$, а α_* отображает $\overline{1,r}$ на K_*. Согласно (3.7) $\mathrm{A}_{\alpha_*(1)}(x_*, K_*) \cap \mathfrak{M}_{\alpha_*(1)} \neq \varnothing$. С учетом этого выбираем $x^* \in \mathrm{A}_{\alpha_*(1)}(x_*, K_*) \cap \mathfrak{M}_{\alpha_*(1)}$. В силу (3.5) можно указать $\tilde{z}^* \in \mathbb{M}_{\alpha_*(1)}$, для которого $x^* = \mathrm{pr}_1(\tilde{z}^*)$. Тогда $\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*) \in \mathbf{M}_{\alpha_*(1)}$, и в частности $\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*) \in \mathbf{X}$; при этом $\alpha^* \stackrel{\triangle}{=} (\alpha_*(j+1))_{j\in\overline{1,r-1}} \in (\mathrm{bi})[K^*]$, где $K^* \stackrel{\triangle}{=} K_* \setminus \{\alpha_*(1)\}$. В силу (4.5) $\mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*), K^*, \alpha^*) \neq \varnothing$. С учетом этого выбираем $(z_i^*)_{i\in\overline{0,r-1}} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\tilde{z}^*), K^*, \alpha^*)$, после чего введем кортеж $(\hat{z}_i)_{i\in\overline{0,r}} : \overline{0,r} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ по следующему правилу: $(\hat{z}_0 \stackrel{\triangle}{=} (x_*, x_*)) \mathbin{\&} (\hat{z}_1 \stackrel{\triangle}{=} \tilde{z}^*) \mathbin{\&} (\hat{z}_t \stackrel{\triangle}{=} z_{t-1}^* \quad \forall t \in \overline{2,r})$. Легко видеть, что $(\hat{z}_i)_{i\in\overline{0,r}} \in \mathcal{Z}(x_*, K_*, \alpha_*)$, но это невозможно по выбору x_*, K_* и α_*. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathrm{S} = \overline{1,N}$, а тогда из (4.3) имеем требуемое утверждение, поскольку $\mathfrak{N}$ есть объединение всех множеств $\mathfrak{N}_s$, $s \in \overline{1,N}$. $\square$

В силу конечности множеств $\mathbb{X}$ и $\mathbf{X}$ получаем теперь, что

$$\mathcal{Z}(x, K, \alpha) \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}_K) \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K]. \tag{4.6}$$

Из (4.6) получаем свойство $\mathcal{Z}_\alpha \in \mathrm{Fin}(\mathbb{Z}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{P}$.

Условия предшествования. Введем в рассмотрение (возможное) ограничение на выбор маршрута, фиксируя в дальнейшем отношение

$$\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$$

(итак, $\mathbf{K}$ есть п/м $\overline{1,N}\times\overline{1,N}$; случай $\mathbf{K}=\varnothing$ не исключается и отвечает ситуации отсутствия дополнительных ограничений на выбор $\alpha\in\mathbb{P}$, см. (3.4)). Элементы $\mathbf{K}$ называем адресными УП; если $z\in\mathbf{K}$, то $\mathrm{pr}_1(z)\in\overline{1,N}$ и $\mathrm{pr}_2(z)\in\overline{1,N}$ именуем соответственно индексами отправителя и получателя z. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\forall \mathbf{K}_0\in\mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \ \exists z_0\in\mathbf{K}_0:\mathrm{pr}_1(z_0)\neq\mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z\in\mathbf{K_0}. \tag{4.7}$$

Тогда, как установлено в [11, ч. 2], имеем

$$\mathbf{A}\stackrel{\triangle}{=}\big\{\alpha\in\mathbb{P}\,|\,\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z))<\alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z))\ \ \forall z\in\mathbf{K}\big\}$$

$$=\Big\{\alpha\in\mathbb{P}|\forall z\in\mathbf{K}\ \ \forall t_1\in\overline{1,N}\ \ \forall t_2\in\overline{1,N}\big((\mathrm{pr}_1(z)=\alpha(t_1))\wedge(\mathrm{pr}_2(z)=\alpha(t_2))\big)\Rightarrow(t_1<t_2)\Big\}\in\mathcal{P}'(\mathbb{P}); \tag{4.8}$$

итак, $\mathbf{A}$ есть непустое множество всех $\mathbf{K}$-допустимых (допустимых по предшествованию) маршрутов. В этом случае (см. (4.8))

$$\mathbf{D}\stackrel{\triangle}{=}\{(\alpha,\mathbf{z})\in\mathbf{A}\times\mathbb{Z}|\mathbf{z}\in\mathcal{Z}_\alpha\}\in\mathrm{Fin}(\mathbf{A}\times\mathbb{Z}) \tag{4.9}$$

рассматриваем в качестве множества ДР, каждому из которых будет сопоставлено значение (аддитивного) критерия качества; для этого потребуется определить функции стоимости, характеризующие внешние перемещения, внутренние (по отношению к мегаполисам) работы и получающиеся при реализации процессов вида (3.4) терминальные состояния.

Функции стоимости. Фиксируем в дальнейшем кортеж $(\mathbf{c},c_1,\ldots,c_N,f)$, где

$$\mathbf{c}\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],c_1\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],\ldots,c_N\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}],f\in\mathcal{R}_+[\mathbb{X}]. \tag{4.10}$$

Функции в (4.10) мы полагаем “максимально” продолженными. Значения этих функций существенны на самом деле при выборе аргументов из п/м областей определения. Так, значения $\mathbf{c}(x,y,K)$ существенны (см.(3.4)): 1) при $x=x^0$, $y\in\mathfrak{M}_j$, $K\in\mathfrak{N}$, где $j\in K$, и 2) при $x\in\mathbf{M}_i$, $y\in\mathfrak{M}_j$, $K\in\mathfrak{N}$, где $i\notin K$, $j\in K$. В свою очередь, при $s\in\overline{1,N}$ значения $c_s(x,y,K)$ существенны при $(x,y)\in\mathbb{M}_s$, $K\in\mathfrak{N}$ и $s\in K$. Наконец, значения $f(x)$ существенны при $x\in\mathbf{M}_j$, где $j\in\overline{1,N}$. Однако мы продолжаем упомянутые содержательные зависимости на $\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}$ и $\mathbb{X}$ соответственно, поскольку это не приводит к затруднениям (можно, в частности, осуществлять продолжение “нулем”) и позволяет упростить последующие обозначения.

Отметим, что функция $\mathbf{c}$ используется для оценивания внешних перемещений, функции $c_1,\ldots,c_N$ — для оценивания работ, связанных с посещением соответствующих мегаполисов, а f — для оценивания терминального состояния (точка $x_{N,2}$ в (3.4)). Если $\alpha\in\mathbb{P}$, $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$, то при $s\in\overline{1,N}$ $\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\mathrm{pr}_1(z_s),\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\})\in[0,\infty[$ оценивает перемещения из $\mathrm{pr}_2(z_{s-1})\in\mathbf{M}_{\alpha(s-1)}$ в $\mathrm{pr}_1(z_s)\in\mathfrak{M}_{\alpha(s)}$, а $c_{\alpha(s)}(z_s,\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\})$ — работу, связанную с посещением $\mathrm{M}_{\alpha(s)}$ (заметим, что $\mathrm{pr}_1(z_s)\in A_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\})$, см. (4.1)); $f(\mathrm{pr}_2(z_N))$ реализует оценку терминального состояния.

С учетом упомянутых обстоятельств полагаем при $\alpha\in\mathbb{P}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathbb{Z}$

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]\stackrel{\triangle}{=}\sum_{s=1}^{N}\Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}),\mathrm{pr}_1(z_s),\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\}\big)+c_{\alpha(s)}\big(z_s,\{\alpha(t)\colon t\in\overline{s,N}\}\big)\Big]$$
$$+f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{4.11}$$

Нас интересует следующий вариант (4.11): $\alpha\in\mathbf{A}$ и $(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha$. Учитывая (4.9), мы в качестве ОЗМ формулируем следующую:

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}]\to\min,\ \ \alpha\in\mathbf{A},\ \ (z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\alpha; \tag{4.12}$$

этой задаче сопоставляется значение (экстремум)

$$\mathrm{V} \triangleq \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \in [0, \infty[\tag{4.13}$$

и непустое множество оптимальных ДР, т. е. ДР $(\alpha^0, (z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{D}$ со свойством

$$\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i \in \overline{0,N}}] = \mathrm{V}. \tag{4.14}$$

Мы ставим своей целью нахождение V и какого-либо ДР со свойством (4.14).

5. Динамическое программирование, 1

Для последующего решения ОЗМ (4.12) будем применять широко понимаемое ДП, которое использует схему расширения, восходящую к [11, ч.3]. Следуя [11, §2.2], введем оператор $\mathbf{I}$, действующий в $\mathfrak{N}$ по правилу: если $K \in \mathfrak{N}$, то $\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z) \colon z \in \Xi[K]\}$, где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} | \big(\mathrm{pr}_1(z) \in K\big) \,\&\, \big(\mathrm{pr}_2(z) \in K\big)\}$. С учетом этого вводится [11] новый тип допустимости маршрутов — допустимость по вычеркиванию; данный вариант допустимости введем сразу для маршрутов частичных или укороченных: если $K \in \mathfrak{N}$, то

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \triangleq \big\{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] |\, \alpha(l) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(t) \colon t \in \overline{l, |K|}\}\big) \ \ \forall l \in \overline{1, |K|}\big\} \tag{5.1}$$

есть множество всех маршрутов посещения мегаполисов M_k, $k \in K$, обладающих допустимостью по вычеркиванию; при этом [11, предложения 2.2.2, 2.2.3] $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing$. Итак,

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\mathbb{K}] \in \mathcal{P}'((\mathrm{bi})[\mathbb{K}]) \ \ \forall \mathbb{K} \in \mathfrak{N}. \tag{5.2}$$

В частности [11, (2.2.32), теорема 2.2.1], имеем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1, N}] = \big\{\alpha \in \mathbb{P} |\, \alpha(k) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(t) \colon t \in \overline{k, N}\}\big) \ \ \forall k \in \overline{1, N}\big\}$$

$$= \Big\{\alpha \in \mathbb{P} \,|\big(\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})\big) \,\&\, \big(\alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(t) \colon t \in \overline{1, k-1}\}) \ \ \forall k \in \overline{2, N}\big)\Big\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{P}). \tag{5.3}$$

С учетом (4.6) и (5.2) получаем, что

$$\mathbf{D}_K(x) \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K \,|\, \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)\} \in \mathrm{Fin}((\mathrm{bi})[K] \times \mathbb{Z}_K) \ \ \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{5.4}$$

В (5.4) имеем непустые множества частичных ДР (имеется в виду допустимость по вычеркиванию). Если $K \in \mathfrak{N}$, $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_K$, то

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|K) \triangleq \sum_{s=1}^{|K|} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)), \{\alpha(t) \colon t \in \overline{s, |K|}\}\big) + c_{\alpha(s)}\big(\mathbf{z}(s), \{\alpha(t) \colon t \in \overline{s, |K|}\}\big)\Big]$$

$$+ f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(|K|))) \in [0, \infty[; \tag{5.5}$$

для нас (5.5) существенно при $(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbf{D}_K(x)$. В этой связи определяем частичные (укороченные) задачи: если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то в виде

$$\hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|K) \to \min, \quad \alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K], \quad \mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha), \tag{5.6}$$

имеем задачу, ограничения которой совместны (см. (5.4)) и для которой определено значение

$$v(x, K) \triangleq \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]} \min_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha)} \hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|K) \in [0, \infty[, \tag{5.7}$$

а множество оптимальных ДР непусто. Легко видеть. что $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\overline{1,N}}$ и при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$ имеет место $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \hat{\mathfrak{C}}_\alpha(\mathbf{z}|\overline{1,N})$. С учетом этого получаем (см. (5.3),(5.7)) равенство

$$v(x^0, \overline{1,N}) = \mathrm{V}. \tag{5.8}$$

Полагаем, что $v(x, \varnothing) \stackrel{\triangle}{=} f(x) \quad \forall x \in \mathbf{X}$. Итак (см. (5.7),(5.8)), определена функция Беллмана

$$v : \mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}) \to [0, \infty[, \tag{5.9}$$

отвечающая расширению ОЗМ до семейства задач (5.6). Введем операторы $\mathbb{A}_1 : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_1), \ldots, \mathbb{A}_N : \mathbf{X} \times \mathfrak{N} \to \mathcal{P}'(\mathbb{M}_N)$, являющиеся естественными модификациями отображений (3.6) : если $j \in \overline{1,N}, \quad x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем

$$\mathbb{A}_j(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \{z \in \mathbb{M}_j \,|\, \mathrm{pr}_1(z) \in \mathrm{A}_j(x, K)\}. \tag{5.10}$$

Тогда из (3.5), (3.7) и (5.10) получаем, что $\forall x \in \mathbf{X} \quad \forall K \in \mathfrak{N} \quad \forall j \in K$

$$\mathbb{A}_j(x, K) \in \mathcal{P}'(\mathbb{M}_j).$$

При этом, конечно, имеем $\mathbb{A}_j(x, K) \subset \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ при $x \in \mathbf{X}, \quad K \in \mathfrak{N}$ и $j \in K$, а потому определены значения $v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[, \quad z \in \mathbb{A}_j(x, K)$; полезно учесть, что $\mathbf{I}(K) \subset K$.

Теорема 1. *Если $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то*

$$v(x, K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \mathbf{X}$ и $K \in \mathfrak{N}$; тогда определено значение

$$w \stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} \big[\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})\big]. \tag{5.11}$$

Заметим также, что определено число $n \stackrel{\triangle}{=} |K| \in \overline{1,N}$, для которого $(n = 1) \vee (n \in \overline{2,N})$. В случае $n = 1$ равенство $v(x, K) = w$ легко следует из определений; рассмотрение данного простого случая опустим. Пусть $n \in \overline{2,N}$. Тогда $n - 1 \in \overline{1, N-1}$. Выберем, используя (5.7), $\alpha^0 \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ и $(z_i^0)_{i \in \overline{0,n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \alpha^0)$ со свойством

$$v(x, K) = \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha^0}((z_i^0)_{i \in \overline{0,n}}|K), \tag{5.12}$$

где правая часть (5.12) определяется подобно (5.5). Из (5.1) следует, в частности, что $\alpha^0(1) \in \mathbf{I}(K)$, а из (4.2) вытекает включение $\mathrm{pr}_1(z_1^0) \in A_{\alpha^0(1)}(x, K)$. Тогда в силу (5.11)

$$w \leq \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z_1^0), K) + c_{\alpha^0(1)}(z_1^0, K) + v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}), \tag{5.13}$$

где $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\alpha^0(1)\}$ (тогда $|\mathbb{K}| = n - 1$). Заметим также, что $(\mathrm{pr}_2(z_1^0) \in \mathbf{X}) \,\&\, (\mathbb{K} \in \mathfrak{N})$, а потому для определения $v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K})$ можно использовать (5.7). Легко видеть (см. [15]), что

$$\alpha_0 \stackrel{\triangle}{=} (\alpha^0(j+1))_{j \in \overline{1,n-1}} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\mathbb{K}]. \tag{5.14}$$

Заметим, что $(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathrm{pr}_2(z_1^0))$ содержится в $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, и в частности в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Введем кортеж $(z_i^{00})_{i \in \overline{0,n-1}} : \overline{0, n-1} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$ по следующему правилу: $z_0^{00} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathrm{pr}_2(z_1^0))$ и $z_j^{00} \stackrel{\triangle}{=} z_{j+1}^0 \quad \forall j \in \overline{1, n-1}$. Тогда, как легко видеть,

$$(z_i^{00})_{i \in \overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}, \alpha_0). \tag{5.15}$$

Из (5.14) и (5.15) следует сразу (см. (5.7)), что $v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}) \leq \hat{\mathfrak{C}}_{\alpha_0}((z_i^{00})_{i\in\overline{0,n-1}} \,|\, \mathbb{K})$. После несложных преобразований правой части получаем, что

$$v(\mathrm{pr}_2(z_1^0), \mathbb{K}) \leq \sum_{s=2}^{n} \Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}^0), \mathrm{pr}_1(z_s^0), \{\alpha^0(l) : l \in \overline{s,n}\}\big) + c_{\alpha^0(s)}\big(z_s^0, \{\alpha^0(l) : l \in \overline{s,n}\}\big)\Big]$$

$$+ f(\mathrm{pr}_2(z_n^0)),$$

а тогда, используя (5.12) и (5.13), приходим к неравенству $w \leq v(x, K)$.

Установим справедливость противоположного неравенства. С учетом (5.11) выберем $q \in \mathbf{I}(K)$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{A}_q(x, K)$ так, что

$$w = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q), \tag{5.16}$$

где $Q \overset{\triangle}{=} K \setminus \{q\}$ (разумеется, $Q \in \mathfrak{N}_{n-1}$, т. е. $Q \in \mathfrak{N}$ и $|Q| = n-1$). Тогда, в частности, $\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}) \in \mathbf{X}$ и $v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q) \in [0, \infty[$ определяется подобно (5.7). С учетом этого выберем $\bar{\alpha} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[Q]$ и $(\bar{z}_i)_{i\in\overline{0,n-1}} \in \mathcal{Z}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q, \bar{\alpha})$ так, что

$$v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q) = \hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\alpha}}((\bar{z}_i)_{i\in\overline{0,n-1}} \,|\, Q). \tag{5.17}$$

Введем отображение $\bar{\beta} : \overline{1,n} \to K$ по следующему правилу: $\big(\bar{\beta}(1) \overset{\triangle}{=} q\big) \,\&\, \big(\bar{\beta}(j) \overset{\triangle}{=} \bar{\alpha}(j-1) \quad \forall j \in \overline{2,n}\big)$. Легко видеть, что $\bar{\beta} \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$. Далее, кортеж $(\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathbb{Z}_K$ определяем условиями $(\bar{z}_0^* \overset{\triangle}{=} (x, x)) \,\&\, (\bar{z}_1^* \overset{\triangle}{=} \mathbf{y}) \,\&\, (\bar{z}_j^* \overset{\triangle}{=} \bar{z}_{j-1} \ \forall j \in \overline{2,n})$. Тогда с учетом (4.2) устанавливается, что $(\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \in \mathcal{Z}(x, K, \bar{\beta})$. Получили (см. (5.4)) свойство $(\bar{\beta}, (\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}}) \in \mathbf{D}_K(x)$. Как следствие имеем из (5.4) и (5.7), что

$$v(x, K) \leq \hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \,|\, K). \tag{5.18}$$

Однако с учетом (5.17) после простых преобразований получаем равенство $\hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \,|\, K) = \mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(\mathbf{y}), K) + c_q(\mathbf{y}, K) + v(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}), Q)$. С учетом (5.16) имеем теперь равенство

$$\hat{\mathfrak{C}}_{\bar{\beta}}((\bar{z}_i^*)_{i\in\overline{0,n}} \,|\, K) = w,$$

а тогда из (5.18) следует, что $v(x, K) \leq w$. Поскольку ранее было получено противоположное неравенство, имеем $v(x, K) = w$ и в случае $n \in \overline{2, N}$. □

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{V} = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})} \ \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0,\overline{1,N})} \big[\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z), \overline{1,N}) + c_j(z, \overline{1,N}) + v(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})\big].$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (5.8) и теоремы 1.

6. Динамическое программирование, 2

В настоящем разделе рассматривается вариант использования теоремы 1, не предусматривающий построение всего массива значений функции Беллмана (5.9); вариант соответствует конструкции [11, § 4.9] (см. также [12; 13]). Введем семейство

$$\mathcal{G} \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \,|\, \forall z \in \mathbf{K} \ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \Rightarrow (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}, \tag{6.1}$$

элементы которого называем существенными списками. Списки из (6.1) ранжируем по мощности: $\mathcal{G}_s \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathcal{G} |\, s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{1,N}$. Тогда в виде $\{\mathcal{G}_j : j \in \overline{1,N}\}$ имеем разбиение $\mathcal{G}$ (6.1). Ясно, что $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ (синглетон, содержащий $\overline{1,N}$). При $\mathbf{K}_1 \overset{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$

$\mathcal{G}_1 = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$. Наконец, имеем следующее представление [12, (6.2)]: $\mathcal{G}_{s-1} = \big\{K \setminus \{t\}\colon K \in \mathcal{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\big\}\ \ \forall s \in \overline{2,N}$. Таким образом, получаем рекуррентную процедуру $\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1$. На этой основе конструируем подобно [11, § 4.9] слои пространства позиций, обозначаемые ниже через $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_N$. Однако предварительно заметим, что [12, с. 69] $\overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1 \neq \varnothing$, а потому

$$\tilde{\mathfrak{M}} \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathbf{M}_i \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$$

и, как следствие, $\mathrm{D}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{(x, \varnothing)\colon x \in \tilde{\mathfrak{M}}\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}))$. Кроме того, полагаем, что $\mathrm{D}_N \stackrel{\triangle}{=} \{(x^0, \overline{1,N})\}$, получая синглетон, содержащий УП $(x^0, \overline{1,N})$.

Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то [12, с. 69] в терминах множества

$$\mathcal{J}_s(K) \stackrel{\triangle}{=} \big\{j \in \overline{1,N} \setminus K \,|\, \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\big\} \in \mathcal{P}'(\overline{1,N} \setminus K) \tag{6.2}$$

конструируем следующее множество-объединение: $\mathcal{M}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathbf{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$, а также клетку $\mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x, K) :\ x \in \mathcal{M}_s[K]\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s)$. Тогда

$$\mathrm{D}_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s)\ \ \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{6.3}$$

Отметим, кстати, что [14, предложение 5.1] при $s \in \overline{1, N-1}$

$$\mathcal{G}_{s+1} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \{\{j\} \cup K \colon j \in \mathcal{J}_s(K)\}.$$

Итак (см. (6.3)), определены непустые множества-слои $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_N$. При этом [12, (6.9)]

$$(y, K \setminus \{k\}) \in \mathrm{D}_{s-1}\ \ \forall s \in \overline{1,N}\ \ \forall K \in \mathcal{G}_s\ \ \forall k \in \mathbf{I}(K)\ \ \forall y \in \mathbf{M}_k. \tag{6.4}$$

В свою очередь, из (6.4) легко следует

Предложение 2. *Если* $s \in \overline{1,N}$, $(x, K) \in \mathrm{D}_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ *и* $z \in \mathbb{A}_j(x, K)$, *то*

$$(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in \mathrm{D}_{s-1}.$$

Возвращаясь к конструированию множеств-слоев, заметим, что $\mathrm{D}_s \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{P}(\overline{1,N}))\ \ \forall s \in \overline{0,N}$. С учетом этого определяем систему сужений функции Беллмана, полагая при $s \in \overline{0,N}$, что функция $v_s \in \mathcal{R}_+[\mathrm{D}_s]$ определяется условиями

$$v_s(x, K) \stackrel{\triangle}{=} v(x, K)\ \ \forall (x, K) \in \mathrm{D}_s. \tag{6.5}$$

При этом, конечно, функция $v_0 \in \mathcal{R}_+[\mathrm{D}_0]$ такова, что $v_0(x, \varnothing) = f(x)$ при $x \in \tilde{\mathfrak{M}}$. Далее, при $s \in \overline{1,N}$, $(x, K) \in \mathrm{D}_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $z \in \mathbb{A}_j(x, K)$ в силу предложения 2 и (6.5) определено значение $v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\}) \in [0, \infty[$. Теперь из теоремы 1 вытекает

Предложение 3. *Если* $s \in \overline{1,N}$ *и* $(x, K) \in \mathrm{D}_s$, *то*

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in \mathbb{A}_j(x,K)} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z), K) + c_j(z, K) + v_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})].$$

Таким образом, мы получили рекуррентную процедуру построения слоев функции Беллмана:

$$v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N; \tag{6.6}$$

действительно, функция v_0 известна и при $s \in \overline{1,N}$ преобразование v_{s-1} в v_s определяется предложением 3. В силу (5.8) и (6.5) $\mathrm{V} = v_N(x^0, \overline{1,N})$. Итак, процедура (6.6) доставляет в непосредственном виде глобальный экстремум задачи (4.12), т. е. значение ОЗМ.

7. Динамическое программирование, 3 (построение оптимального решения)

В настоящем разделе предполагается, что (посредством (6.6)) все слои функции Беллмана уже построены, т. е. функции $v_0, v_1, \dots v_N$ нам известны. В частности, известно значение V, для которого в силу предложения 3 и следствия имеем равенство

$$\mathrm{V} = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j(x^0,\overline{1,N})}\big[\mathbf{c}(x^0,\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}) + c_j(z,\overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\})\big]. \tag{7.1}$$

Рассмотрим построение оптимального решения в виде пары “маршрут-трасса”. Полагаем $\mathbf{z}^{(0)} \triangleq (x^0, x^0)$, получая элемент $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$. Далее используем (7.1), учитывая предложение 2:

$$(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{j\}) \in \mathrm{D}_{N-1}\quad \forall j\in\mathbf{I}(\overline{1,N})\quad \forall z\in\mathbb{A}_j(x^0,\overline{1,N}). \tag{7.2}$$

Выберем (см. (7.1)) $\mathbf{j}_1\in\mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{z}^{(1)}\in\mathbb{A}_{\mathbf{j}_1}(x^0,\overline{1,N})$ так, что при этом

$$\mathrm{V} = \mathbf{c}(x^0,\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}) + c_{\mathbf{j}_1}(\mathbf{z}^{(1)},\overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}), \tag{7.3}$$

где согласно (7.2) $(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})\in\mathrm{D}_{N-1}$. Тогда с учетом предложения 2

$$(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;j\}) = (\mathrm{pr}_2(z),(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})\setminus\{j\})\in\mathrm{D}_{N-2}$$
$$\forall j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})\quad \forall z\in\mathbb{A}_j(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}). \tag{7.4}$$

В силу предложения 3 имеем следующее равенство:

$$v_{N-1}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}) = \min_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})}\ \min_{z\in\mathbb{A}_j(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})}\Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\mathrm{pr}_1(z),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big)$$
$$+ c_j\big(z,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big) + v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(z),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;j\}\big)\Big]. \tag{7.5}$$

С учетом (7.5) выбираем $\mathbf{j}_2\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})$ и $\mathbf{z}^{(2)}\in\mathbb{A}_{\mathbf{j}_2}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\})$ так, что при этом

$$v_{N-1}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big) = \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(1)}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big) + c_{\mathbf{j}_2}\big(\mathbf{z}^{(2)},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1\}\big)$$
$$+v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;\mathbf{j}_2\}\big), \tag{7.6}$$

где согласно (7.4) $\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_1;\mathbf{j}_2\}\big)\in\mathrm{D}_{N-2}$. Из (7.3) и (7.6) вытекает, что

$$\mathrm{V} = \sum_{s=1}^{2}\Big[\mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(s-1)}),\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}^{(s)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_t : t\in\overline{1,s-1}\}\big) + c_{\mathbf{j}_s}\big(\mathbf{z}^{(s)},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_t : t\in\overline{1,s-1}\}\big)\Big]$$
$$+ v_{N-2}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}^{(2)}),\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{j}_l : l\in\overline{1,2}\}\big) \tag{7.7}$$

(напомним, что $\overline{1,0} = \varnothing$). Дальнейшее построение осуществляется по аналогичной схеме, на каждом этапе которой следует осуществлять выбор индекса и УП подобно (7.3), (7.6). При этом число слагаемых, образующих первую сумму в (7.7), будет увеличиваться, а мощность списка, являющегося вторым элементом УП в виде аргумента последнего слагаемого, — уменьшаться; в конце концов последнее слагаемое в (7.7) совпадет с соответствующим значением функции f (напомним определение v_0). В результате после исполнения N шагов (этапов), реализуемых в духе (7.3), (7.6), будут построены маршрут $\eta = (\mathbf{j}_s)_{s\in\overline{1,N}}\in\mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}}\in\mathcal{Z}_\eta$ (итак, мы получим ДР $(\eta,(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}})$) со свойством $\mathfrak{C}_\eta[(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}}] = \mathrm{V}$. Иными словами, $(\eta,(\mathbf{z}^{(s)})_{s\in\overline{0,N}})\in\mathbf{D}$ (см. (4.9)) обладает оптимальностью в задаче (4.12).

8. Вычислительный эксперимент

В настоящем разделе рассматривается конкретизация задачи (4.12), ориентированная на построение процедур управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ. Для вычислительного эксперимента используем следующую модель упомянутой задачи. Будем отождествлять X с прямоугольником на плоскости, когда $X \triangleq [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ ($a_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in \mathbb{R}$ и $b_2 \in \mathbb{R}$), т. е. с листом, подлежащим раскрою; зафиксируем вещественные числа a_1, a_2, b_1 и b_2, полагая $a_1 < a_2$ и $b_1 < b_2$. Пусть N есть количество всех контуров вырезаемых деталей, а мегаполисы (3.1) получаются посредством дискретизации вспомогательных эквидистант; с ними связаны бинарные отношения вида (3.3), для элементов которых всегда 1-й элемент пары является точкой врезки, а 2-й — точкой выключения резака; обе точки расположены возле основной эквидистанты, по которой движется инструмент при резке соответствующего контура. Начальная точка x^0 пусть соответствует исходному положению резака, которое он должен занимать, если не выполняется раскрой листа; терминальному состоянию процесса резки в нашей модели соответствует возврат в x^0. Условия предшествования задают вполне естественное правило: резка внутренних контуров всегда должна предшествовать резке внешних (по принципу вложенности) контуров; допускается расположение одних деталей внутри контуров других деталей, пересечение эквидистант контуров не допускается. Отображения (3.6) заданы следующим образом: пусть K — множество индексов невырезанных контуров; находясь в точке x, где $(x = x^0) \vee \big(x \in \mathbf{M}_j \ \text{ при } j \notin K\big)$ (см. (3.5)), рассматриваем в качестве следующей точки врезки (точки включения инструмента) y лишь те, у которых для всех контуров с индексами j из множества $\overline{1,N} \setminus K$ выполняется условие $\rho(y, z) > \varepsilon \ \forall j \in \overline{1,N} \setminus K \ \ \forall z \in \mathfrak{M}_j$. Здесь ρ — евклидово расстояние, а вещественное число $\varepsilon > 0$ задает тепловой допуск, определяющий минимальный отступ для начала резки возле эквидистант уже вырезанных контуров. Пусть функция $\mathbf{c}$ в (4.10) задается посредством евклидова расстояния ρ и не зависит от списка заданий, при этом значения функций $c_1, \ldots, c_N$ — это всякий раз сумма вида $3 * \rho(x, y) + \rho(y, z)$, где x — точка включения резака, z — точка на вспомогательной эквидистанте, а y — точка на основной эквидистанте; умножение на коэффициент 3 подчеркивает бóльшие затраты на врезку и движение с включенным режущим инструментом по сравнению с затратами при отводе резака в точку выключения. При этом $(x, z) \in \mathbb{M}_j$ и $y = y_j(x, z)$, где $j \in \overline{1,N}$. Расстояния, проходимые при самой резке по эквидистантам, не учитываются, так как их сумма остается одной и той же при любых вариантах маршрутизации. Функция f оценивает затраты на передвижение в исходное положения, т. е. в точку x^0.

Рассматриваемый в настоящей статье алгоритм применительно к вышеупомянутой упрощенной модели задачи был реализован в виде программы для ПЭВМ, написанной на языке программирования C++ и работающей под управлением 64-разрядной операционной системы семейства Windows (не ранее Windows 7). Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Исходные данные для программы задаются в конфигурационном файле, в котором также в качестве параметра можно задавать вышеупомянутую величину теплового допуска. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения резака, увеличения отдельных участков графика и сохранения его в файл графического формата bmp.

Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i7, объемом ОЗУ 64 гБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная SP1. В качестве модельного примера представим результат проведения вычислительного эксперимента. Пусть начальная точка x^0 совпадает с началом координат, $N = 31$, $|\mathbf{K}| = 20$.

В настоящем варианте предполагается, что в случае, когда на этапе внешнего перемещения (в мегаполис) нет ни одной допустимой в упомянутом выше смысле точки врезки, значение соответствующего оператора A_j отождествляется с $\mathfrak{M}_j$. Этим обеспечивается выполнение условия (3.7). Рассмотрим результаты работы программы при значении теплового допуска $\varepsilon = 5$: величина совокупных затрат $V = 939.05$, время счета составило 3 ч, 21 мин, 5 с; график марш-

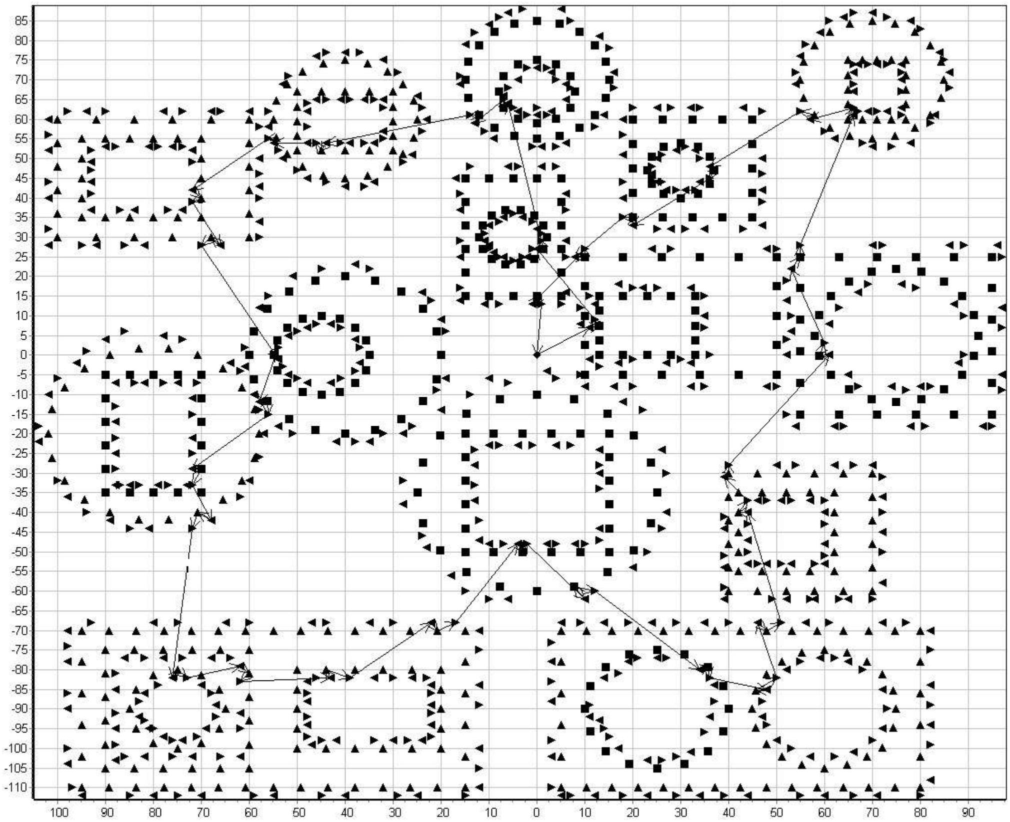


Рис. 1. Маршрут и трасса при значении теплового допуска 5.

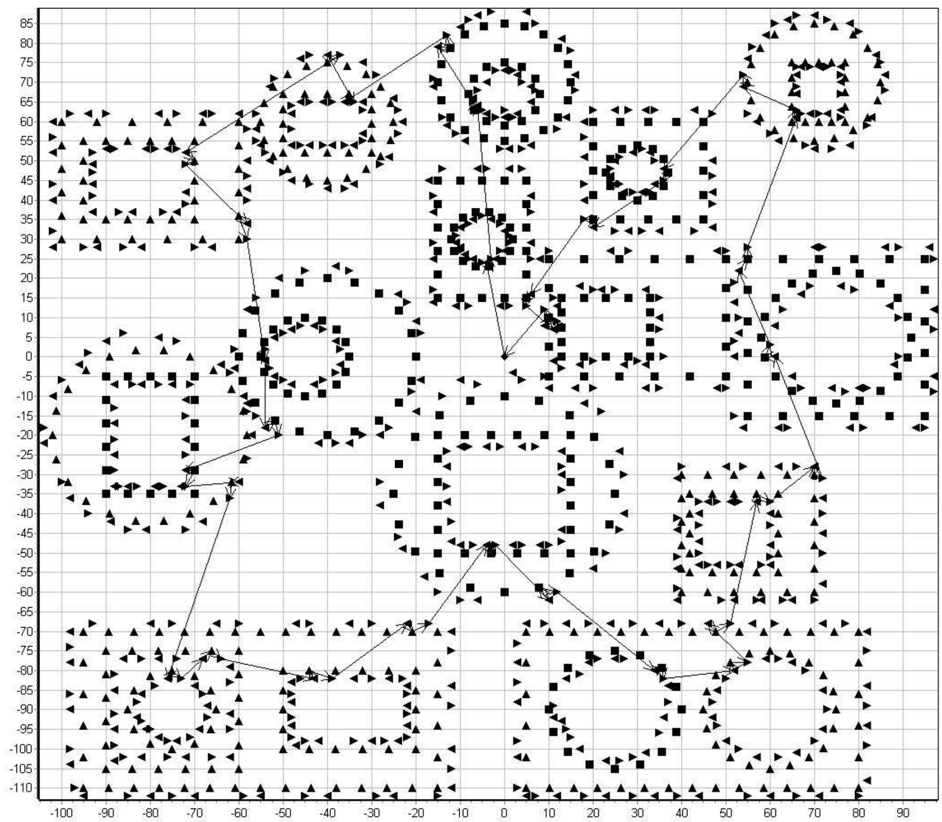


Рис. 2. Маршрут и трасса при значении теплового допуска 10.

рута и трассы приведен на рис. 1 (точки врезки обозначены треугольниками, направленными влево $\triangleleft$, а точки выключения — треугольниками, направленными вправо $\triangleright$; треугольники, ориентированные вертикально, соответствуют точкам на основной эквидистанте, они используются всякий раз в качестве пунктов начала и завершения реза). При значении теплового допуска $\varepsilon = 10$ получаем следующее: величина совокупных затрат $V = 1015.3$, время счета — 3 ч, 0 мин, 7 сек; график траектории резки приведен на рис. 2. Сопоставляя приведенные результаты, мы видим, что с ростом значения теплового допуска увеличивается величина совокупных затрат, но уменьшается время счета. Данный эффект выглядит вполне логично: при меньшем значении допуска для выбора очередной точки врезки всякий раз имеется больше вариантов, что благотворно сказывается на общей величине затрат, но при этом объем перебора также возрастает, что влечет за собой увеличение времени счета. Результаты предыдущих разделов были анонсированы в[16].

9. Добавление: модель задачи оптимизации холостого хода

В настоящем разделе рассматривается упрощенная модель, ориентированная на задачу оптимизации холостого хода инструмента машин термической резки материала с ЧПУ. В последующих построениях мы в отношении X, x^0, N, $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_N$ сохраняем предположения (3.1), (3.2). Что касается отношений (3.3), то полагаем каждое из них диагональным: $\mathbb{M}_j \overset{\triangle}{=} \{(x,x) : x \in \mathrm{M}_j\} \ \ \forall j \in \overline{1,N}$. В такой ситуации схема (3.4) превращается в следующую:

$$x^0 \to \bigl(x^{(1)} \in \mathrm{M}_{\alpha(1)}\bigr) \to \ldots \to \bigl(x^{(N)} \in \mathrm{M}_{\alpha(N)}\bigr); \tag{9.1}$$

при этом посещение каждого из мегаполисов в силу упомянутой диагональной структуры отношений (3.3) сводится к посещению всего одной точки.

В содержательной задаче, связанной с маршрутизацией при листовой резке на машинах с ЧПУ, упомянутое соглашение о диагональности отношений (3.3) может иметь следующий смысл. Именно полагаем, что всякий раз точка врезки, соответствующая ей точка выключения инструмента, а также точка начала реза на эквидистанте контура очень близки, а потому мы рассматриваем их как одну точку. Полагаем, что таких "укрупненных" точек конечное число (подобно тому, как в модели на основе (3.4) предполагалось конечным число пар "точка врезки-точка выключения инструмента"), что связано с желанием обеспечить принципиальную возможность решения с применением переборных алгоритмов. Данная упрощенная модель на основе (9.1) может использоваться для целей оптимизации холостого хода инструмента. При наших предположениях в (3.5) $\mathfrak{M}_j = \mathbf{M}_j = \mathrm{M}_j \ \ \forall j \in \overline{1,N}$. Как следствие

$$\mathbf{X} = \mathbb{X} = \{x^0\} \bigcup \Bigl(\bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{M}_i\Bigr). \tag{9.2}$$

Мы сохраняем м/ф (3.6) и используем интерпретацию этих м/ф, приведенную в разд. 3, имея в виду, что наши "укрупненные" точки — города мегаполисов — соответствуют на самом деле идеализации реальной процедуры, включающей, в частности, врезку, которая, как и в более сложном случае (см. разд. 1), должна осуществляться в удалении от "пустот", возникших после резки предшествующих контуров.

Через $\mathfrak{X}$ обозначим множество всех кортежей $(x_i)_{i\in\overline{0,N}} : \ \overline{0,N} \to \mathbb{X}$. Условие (3.7) в рассматриваемой модели принимает следующий вид: $\mathrm{A}_j(x,K) \cap \mathrm{M}_j \neq \varnothing \ \ \forall x \in \mathbf{X} \ \ \forall K \in \mathfrak{N} \ \ \forall j \in K$. С учетом этого мы приступаем к модификации (4.1), подобной [11, ч.2] и учитывающей то, что первый и второй элементы УП — значений траекторий из (4.1) — совпадают в силу вышеупомянутой диагональности отношений (3.3). В этой связи сопоставляем $\alpha \in \mathbb{P}$ уже следующее множество:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_\alpha \overset{\triangle}{=} \bigl\{(x_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X} \,|\, (x_0 = x^0) \ \&\ (x_t \in \mathrm{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N}) \\ \&\ (x_s \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(x_{s-1}, \{\alpha(l) : l \in \overline{s,N}\}) \ \ \forall s \in \overline{1,N})\bigr\}.\end{aligned} \tag{9.3}$$

Предложение 4. *Если* $\alpha \in \mathbb{P}$, *то*

$$\mathcal{Z}_\alpha = \big\{ \big((x_t, x_t) \big)_{t \in \overline{0,N}} : \, (x_t)_{t \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha \big\}. \tag{9.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Γ множество в правой части (9.4). Покажем, что $\mathcal{Z}_\alpha = \Gamma$. Пусть сначала $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Тогда (см. (9.2)) $\mathbf{z} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. Согласно (4.2) в нашем случае $\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(t)) \in \mathrm{M}_{\alpha(t)}$ при $t \in \overline{1,N}$. Кроме того,

$$\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1)), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}) \ \ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{9.5}$$

При этом $\mathbf{z}(0) = (x^0, x^0)$. Полагаем теперь $\mathbf{x} \triangleq (\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(t)))_{t \in \overline{0,N}}$. Тогда $\mathbf{x}(0) = x^0$. Далее

$$\mathbf{z}(l) = (\mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(l)), \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(l))) = (\mathbf{x}(l), \mathbf{x}(l)) \tag{9.6}$$

при $l \in \overline{0,N}$. Заметим, что $\mathbf{x}(k) \in \mathrm{M}_{\alpha(k)}$ при $k \in \overline{1,N}$. Наконец, из (9.5) имеем по определению $\mathbf{x}$, что при $s \in \overline{1,N}$ $\ \mathbf{x}(s) = \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}\big(\mathbf{x}(s-1), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}\big)$, поскольку $\mathbf{x}(s-1) = \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s-1)) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1))$. Из (9.3) вытекает, что $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha$. Учитывая (9.6), получаем, что $\mathbf{z} = \big((\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t))\big)_{t \in \overline{0,N}} \in \Gamma$, чем завершается проверка вложения $\mathcal{Z}_\alpha \subset \Gamma$.

Пусть теперь $\mathbf{y} \in \Gamma$. Тогда (см. (9.2)) $\mathbf{y} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$. С учетом определения Γ подберем $\mathbf{h} \in \mathcal{X}_\alpha$ так, что при этом

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) \ \ \forall t \in \overline{0,N}. \tag{9.7}$$

Тогда в силу (9.3) $\mathbf{h}(0) = x^0$, а потому $\mathbf{y}(0) = (x^0, x^0)$. Кроме того, при $t \in \overline{1,N}$ имеем, что (см. (9.3)) $\mathbf{y}(t) = (\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}$ при $t \in \overline{1,N}$ (см. соглашение о структуре $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N$, приведенное в начале раздела). Далее, с учетом (9.3) и (9.7) имеем при $s \in \overline{1,N}$

$$\mathrm{pr}_1(\mathbf{y}(s)) = \mathbf{h}(s) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}(\mathbf{h}(s-1), \{\alpha(l) : l \in \overline{s,N}\}),$$

где $\mathbf{h}(s-1) = \mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(s-1))$ согласно (9.7); в итоге $\mathrm{pr}_1(\mathbf{y}(s)) \in \mathrm{A}_{\alpha(s)}\big(\mathrm{pr}_2(\mathbf{y}(s-1)), \{\alpha(t) : t \in \overline{s,N}\}\big)$. С учетом (4.1) получаем, что $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}_\alpha$. Коль скоро выбор $\mathbf{y}$ был произвольным, установлено, что $\Gamma \subset \mathcal{Z}_\alpha$, а, стало быть, $\mathcal{Z}_\alpha = \Gamma$. □

Мы, сохраняя условие (4.7), будем использовать ниже $\mathbf{A}$ (4.8) и $\mathbf{D}$ (4.9) в конкретизации, отвечающей (9.4). Возвращаясь к (4.10), принимаем следующие соглашения: функции $\mathbf{c}$ и f сохраняем (см. (4.10)), функции $c_1, \ldots, c_N$ полагаем тождественно равными нулю. В этом случае при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha$ получаем, что (см. (4.11))

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_{s-1}), \mathrm{pr}_1(z_s), \{\alpha(t) : \, t \in \overline{s,N}\}\big) + f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \tag{9.8}$$

Для случая (9.8) рассматриваем задачу (4.12). Введем теперь, используя (9.3), величины

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}] \triangleq \sum_{s=1}^{N} \mathbf{c}\big(x_{s-1}, x_s, \{\alpha(t) : \, t \in \overline{s,N}\}\big) + f(x_N) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P} \ \ \forall (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha. \tag{9.9}$$

Тогда с учетом (9.4) и (9.8) получаем, в частности, что при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha$ (см. (9.9))

$$\mathfrak{C}_\alpha[((x_i, x_i))_{i \in \overline{0,N}}] = \sum_{s=1}^{N} \mathbf{c}\big(x_{s-1}, x_s, \{\alpha(t) : \, t \in \overline{s,N}\}\big) + f(x_N) = \mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}]. \tag{9.10}$$

Из (4.13), (9.4) и (9.10) вытекает, что в рассматриваемом случае $\mathrm{V} = \min\limits_{\alpha \in \mathbf{A}} \ \min\limits_{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha} \mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}]$. Иными словами, V является значением (экстремумом) задачи

$$\mathfrak{C}^\natural_\alpha[(x_i)_{i \in \overline{0,N}}] \to \min, \ \ \alpha \in \mathbf{A}, \ \ (x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\alpha. \tag{9.11}$$

Разумеется, оптимальные решения задачи (9.11) существуют. Теорема 1 легко преобразуется (в рассматриваемом сейчас случае диагональных отношений $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N$) в следующее предложение.

Предложение 5. *Если* $x \in \mathbf{X}$ *и* $K \in \mathfrak{N}$, *то*

$$v(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in \mathrm{A}_j(x,K)} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \setminus \{j\})].$$

Напомним (5.8) и то, что $v(x, \varnothing) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbf{X}$. Отметим, что в рассматриваемом случае $\tilde{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathrm{M}_i$. При этом имеем также равенство $\mathrm{D}_0 = \{(x, \varnothing) : x \in \tilde{\mathfrak{M}}\}$; D_N соответствует разд. 6. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то $\mathcal{J}_s(K)$ определяется в (6.2), а $\mathcal{M}_s[K]$ имеет вид $\mathcal{M}_s[K] = \bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathrm{M}_j \in \mathcal{P}'(\mathbf{X})$; как следствие $\mathbb{D}_s[K]$ преобразуется к виду

$$\mathbb{D}_s[K] = \Big\{(x, K) \colon x \in \bigcup_{j \in \mathcal{J}_s(K)} \mathrm{M}_j\Big\}.$$

Каждое из множеств-слоев $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_{N-1}$ определяется посредством (6.3). При этом (6.4) преобразуется к виду $(y, K \setminus \{k\}) \in \mathrm{D}_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1,N} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_s \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall y \in \mathrm{M}_k$. В частности, получаем следующее свойство:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in \mathrm{D}_{s-1} \ \ \forall s \in \overline{1,N} \ \ \forall (x, K) \in \mathrm{D}_s \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K) \ \ \forall y \in \mathrm{A}_k(x, K). \tag{9.12}$$

Отметим, что функции-сужения $v_0, v_1, \ldots, v_N$ определены в (6.5); при этом

$$v_0(x, \varnothing) = f(x) \ \ \forall x \in \bigcup_{i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1} \mathrm{M}_i.$$

Наконец, предложение 3 сводится в рассматриваемом случае к следующему положению: если $s \in \overline{1,N}$ и $(x, K) \in \mathrm{D}_s$, то (см. (9.12) и теорему 1)

$$v_s(x, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in \mathrm{A}_j(x,K)} [\mathbf{c}(x, y, K) + v_{s-1}(y, K \setminus \{j\})]. \tag{9.13}$$

Посредством (9.13) определено (при $s \in \overline{1,N}$) преобразование $v_{s-1} \to v_s$. Мы получили вариант процедуры (6.6), реализующей глобальный экстремум V.

Наметим схему построения оптимального ДР (имеется в виду конкретизация (7.1)–(7.7)); подразумевается оптимальность в задаче (9.11). Полагаем $\mathbf{x}_0 = x^0$. Поскольку согласно (9.13)

$$\mathrm{V} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{y \in \mathrm{A}_j(x^0, \overline{1,N})} [\mathbf{c}(x^0, y, \overline{1,N}) + v_{N-1}(y, \overline{1,N} \setminus \{j\})],$$

выбираем $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{x}_1 \in \mathrm{A}_{\mathbf{i}_1}(x^0, \overline{1,N})$ из условия

$$\mathrm{V} = \mathbf{c}(x^0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}). \tag{9.14}$$

Согласно (9.12) имеем (по определению D_N), что $(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in \mathrm{D}_{N-1}$,

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \min_{y \in \mathrm{A}_j(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})} \big[\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, y, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$$
$$+ v_{N-2}(y, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; j\})\big] \in [0, \infty[. \tag{9.15}$$

С учетом (9.15) выбираем $\mathbf{i}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$ и $\mathbf{x}_2 \in \mathrm{A}_{\mathbf{i}_2}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})$ так, что при этом

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}), \tag{9.16}$$

где согласно (9.12) $(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}) \in \mathrm{D}_{N-2}$. Из (9.14) и (9.16) вытекает равенство

$$\mathrm{V} = \mathbf{c}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}). \tag{9.17}$$

Далее процедуру построения ДР следует продолжать подобно (9.14), (9.16). После исполнения N шагов будут определены маршрут $\gamma = (\mathbf{i}_s)_{s \in \overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $(\mathbf{x}_s)_{s \in \overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\gamma$, для которых $\mathfrak{C}^{\natural}_\gamma[(\mathbf{x}_s)_{s \in \overline{0,N}}] = \mathrm{V}$, что означает оптимальность ДР $(\gamma, (\mathbf{x}_s)_{s \in \overline{0,N}})$ (при $N = 2$ данное свойство оптимальности следует из (9.17) непосредственно).

10. Вычислительный эксперимент: оптимизация холостого хода

Для проведения вычислительного эксперимента будем использовать упрощенную модель задачи (4.12), рассматриваемую в разд. 9. Обсуждается конкретизация, ориентированная (как и в разд. 8) на инженерную задачу маршрутизации при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. Пусть число N — количество (замкнутых) контуров, подлежащих резке; мегаполисы (3.1) располагаем возле контура соответствующей детали; в этой модели элемент бинарного отношения вида (3.3) мы рассматриваем как одну точку; точка врезки (она же точка выключения резака) расположена на эквидистанте контура, где и осуществляется резка. Начальная точка x^0 соответствует исходному положению резака, которое он должен занимать, если не выполняется раскрой листа; терминальное условие (возврат в x^0) в нашей модели отсутствует. Условия предшествования задают следующее правило: резка внутренних контуров всегда должна предшествовать резке внешних (по принципу вложенности) контуров; допускается расположение одних деталей внутри контуров других деталей, пересечение эквидистант контуров не допускается. Отображения (3.6) заданы следующим образом: пусть K — множество индексов невырезанных контуров; находясь в точке x, где $(x = x^0) \vee \big(x \in \mathrm{M}_j \ \text{ при } j \notin K\big)$, рассматриваем в качестве возможных точек врезки y лишь те, у которых для всех контуров с индексами j из множества $\overline{1,N}\backslash K$ выполняется условие $\rho(y,z) > \varepsilon \ \forall j \in \overline{1,N}\backslash K \ \ \forall z \in \mathrm{M}_j$. Здесь ρ — евклидово расстояние, а вещественное число $\varepsilon > 0$ задает тепловой допуск, определяющий минимальный отступ для начала резки возле эквидистант уже вырезанных контуров. Пусть функции (4.10) задаются посредством еквлидова расстояния и не зависят от списка заданий, при этом значения функций $c_1, \ldots, c_N$ зануляем; функция f также равна нулю.

Рассматриваемый в настоящей статье алгоритм применительно к вышеупомянутой упрощенной модели задачи был реализован в виде программы для ПЭВМ, разработанной на платформе .Net с использованием языка $C\#$ и работающей под управлением ОС Windows 7 Pro x32. Исходные данные для программы задаются в конфигурационном файле. Вычислительный эксперимент проводился на ПЭВМ с процессором Intel Core i5-2400M с частотой 3.1 GHz, объемом оперативной памяти 8.0 ГБ с установленной операционной системой Windows 7 Professional.

В примере требовалось обойти 22 контура ($N = 22$), некоторые из которых были вложенными один в другой. Количество адресных пар равно 19 (т. е. $|\mathbf{K}| = 19$). Начальная точка x^0

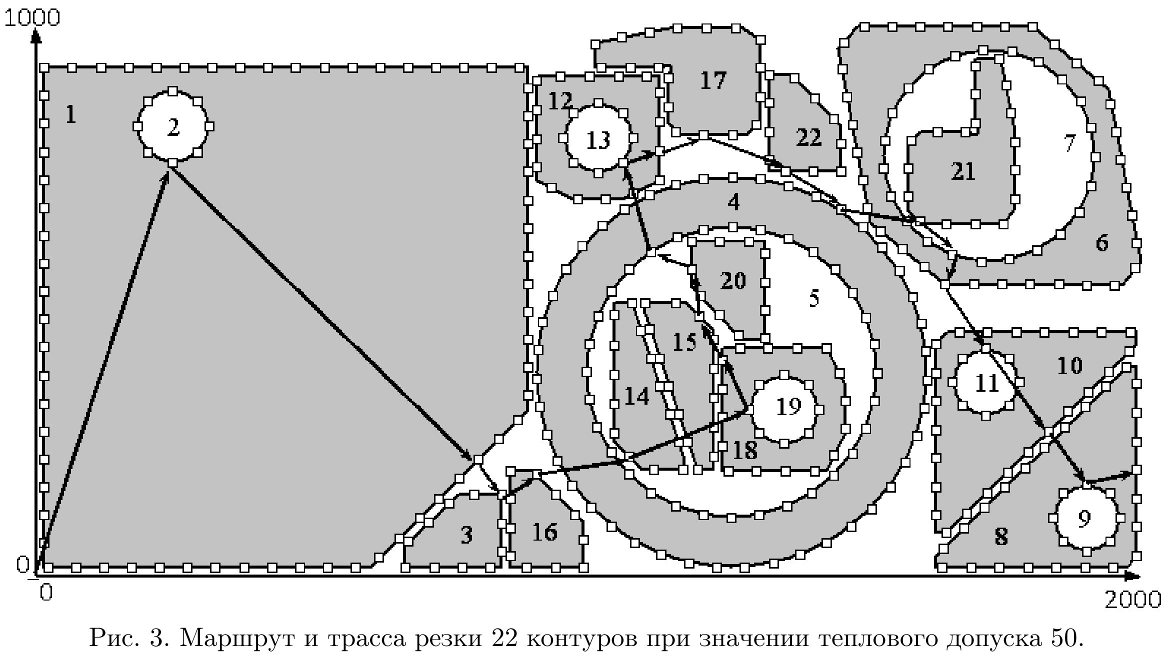


Рис. 3. Маршрут и трасса резки 22 контуров при значении теплового допуска 50.

совпадает с началом координат, величина теплового допуска $\varepsilon = 50$. Результаты работы программы: величина совокупных затрат $V = 3861.54$, время счета составило 22 мин, 6 с; график траектории резки приведен на рис. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петунин А.А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестн. УГАТУ. 2009. Т. 13, №2(35). С. 280–286. (Управление, вычислительная техника и информатика.)
2. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. 2013. № 2(169). С. 103–111. (Информатика. Телекоммуникации. Управление.)
3. **Фроловский В.Д.** Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информационные технологии в проектировании и производстве. М., 2005. № 4. С. 63–66.
4. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. I. Вопросы теории; II. Точные алгоритмы; III. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34; № 10. С. 3–29; № 11. С. 3–26.
5. **Gutin G., Punnen A.P.** The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 830 p. (Comb. Optim., 12.)
6. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
7. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернет. сб. М.:Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
8. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. 960 с.
9. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
10. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
11. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: РХД, 2008. 238 с.
12. **Ченцов А.Г.** К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2013. № 1. С. 59–82.
13. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. №4. С. 170–190.
14. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов // Вестн. Тамбов. ун-та. Естеств. и техн. науки. 2014. Т. 19, вып. 2. С. 454–475.
15. **Ченцов А.Г., Чеблоков И.Б.** Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2012. № 1. С. 96–1197.
16. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Задачи маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Докл. РАН. 2015. Т. 465, № 2. С. 154–158.

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН
главный научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила 13.07.2015

Кошелева Мария Сергеевна
младший научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kosheleva.ms@gmail.com

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.951

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ К ПОСТРОЕНИЮ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Э. М. Мухамадиев, Г. Э. Гришанина, А. А. Гришанин

В работе найдены необходимые и достаточные условия существования классического решения в ограниченной плоской области для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ с непрерывной функцией f. Эти условия в силу известных свойств гладкости обобщенной гармонической функции одновременно являются достаточными для того, чтобы все обобщенные решения уравнения Пуассона в данной области были классическими. Приведены описания частных классов функции f, удовлетворяющих условиям существования классического решения.

Ключевые слова: уравнение Пуассона; классические и обобщенные решения; гармоническая функция; непрерывная, усиленно непрерывная, равномерно усиленно непрерывная функция.

E. M. Mukhamadiev, G. E. Grishanina, A. A. Grishanin. On the application of the regularization method to the construction of a classical solution of Poisson's equation.

Necessary and sufficient conditions are found for the existence of a classical solution of Poisson's equation $\Delta u = f$ with continuous function f in a bounded planar domain. By virtue of the known smoothness properties of a generalized harmonic function, these conditions also ensure that all generalized solutions of Poisson's equation are classical in this domain. Particular classes of functions f satisfying the conditions of existence of a classical solution are described.

Keywords: Poisson's equation, classical and generalized solutions, harmonic function, continuous function, strongly continuous function, uniformly strongly continuous function.

Введение

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область. В области G рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u\,(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u\,(x,y)}{\partial y^2} = f\,(x,y)\,. \tag{0.1}$$

Если $f(x,y)$ — измеримая и ограниченная в области G функция, то интегральный оператор

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi d\eta \tag{0.2}$$

определяет непрерывно дифференцируемое частное обобщенное решение уравнения Пуассона [1, гл. IV]. Ниже мы изучаем вопрос о существовании классического решения, т. е. решения, имеющего непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Известно, что если f имеет непрерывные частные производные первого порядка или непрерывна по Гёльдеру, то уравнение (0.1) имеет классическое решение (см., например, [1, гл. IV; 2, ч. II]). Очевидно, непрерывность функции f в области G необходима для существования классического решения уравнения (0.1). В то же время, как показывают примеры, лишь одно условие непрерывности функции f не достаточно для существования классического решения [3, с. 146]. В связи с этим представляет интерес задача о выделении класса непрерывных функций в области G, для которых уравнение (0.1) имеет классическое решение.

В работе найдены необходимые условия существования классического решения в области G для уравнения Пуассона (0.1), которые являются и достаточными, если дополнительно потребовать ограниченность или суммируемость функции $f(x,y)$ в этой области. Эти условия в силу известных свойств гладкости обобщенной гармонической функции (см., например, [4, с. 379; 5, с. 119]) одновременно являются достаточными для того, чтобы все обобщенные решения уравнения Пуассона в данной области были классическими. Приведены описания частных классов функции f, удовлетворяющих условиям существования классического решения.

Некоторые результаты работы были анонсированы на Международной конференции, посвященной памяти В. К. Иванова [6, с. 51, 52].

1. Признак существования несобственного интеграла

Обозначим через $C^k(G)$ линейное пространство всех функций $u(x,y)$, непрерывных в G вместе со всеми частными производными до порядка k включительно. Положим $C(G) = C^0(G)$. По области G в пространстве $\mathbb{R}^3$ определим ограниченную область

$$\widetilde{G} = \{(x,y,s)\colon M = (x,y) \in G, |s| < \varrho(M, \partial G)\}.$$

Пусть вещественная функция f принадлежит пространству $C(G)$. Тогда функция

$$g(x,y,s,\varphi) = f(x + s\cos\varphi, y + s\sin\varphi) \tag{1.1}$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} \times [0, 2\pi]$ и 2π-периодична по φ. Поэтому комплекснозначная функция

$$F(x,y,r) = \int\limits_0^{2\pi} g(x,y,r,\varphi)\exp(2i\varphi)\,d\varphi \tag{1.2}$$

определена и непрерывна на $\widetilde{G}$, причем $F(x,y,0) \equiv 0$. Функцию $f \in C(G)$ назовем *усиленно непрерывной* в точке $(x,y) \in G$, если существует несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^{r_1} F(x,y,r)\,\frac{dr}{r}, \quad r_1 = \varrho(M, \partial G)/2, \quad M = (x,y), \tag{1.3}$$

усиленно непрерывной в G, если она усиленно непрерывна в каждой точке $(x,y) \in G$, и *равномерно усиленно непрерывной* в G, если она усиленно непрерывна в G и предельное соотношение (1.3) выполняется равномерно относительно (x,y) на каждом компакте $K \subset G$ при некотором $r_1 = r_1(K) > 0$. В последующих разделах покажем, что свойство равномерно усиленной непрерывности функции $f \in C(G)$ тесно связано со свойством существования несобственных интегралов, получаемых в результате дифференцирования функции (0.2). Очевидно, непрерывная по Гёльдеру функция является равномерно усиленно непрерывной в области G.

2. Необходимое условие существования классического решения

Следующая теорема устанавливает связь между свойством равномерной усиленной непрерывности правой части уравнения (0.2) и существованием его классического решения.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит пространству $C(G)$ и уравнение Пуассона имеет классическое решение u в области G. Тогда функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Пусть функция u принадлежит пространству $C^2(G)$ и $f(x,y) = \Delta u(x,y)$. Тогда функция

$$v(x,y,r,\varphi) = u(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi) \tag{2.1}$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r,φ) и 2π-периодична по φ. Поэтому функция

$$U(x,y,r)=\int\limits_0^{2\pi} v(x,y,r,\varphi)\exp(2i\varphi)\,d\varphi \tag{2.2}$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ вместе со всеми частными производными до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r), причем $U(x,y,0)\equiv 0$.

Аналогично по функции $f=\Delta u$, принадлежащей пространству $C(G)$, определим функции g и F равенствами (1.1) и (1.2) соответственно.

Лемма 1. *Пусть функция u принадлежит пространству $C^2(G)$ и $f=\Delta u$. Тогда функции F и U, определенные равенствами* (1.1), (1.2) *и* (2.1), (2.2) *соответственно, удовлетворяют дифференциально-функциональному уравнению*

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}-4U=r^2F(x,y,r),\quad (x,y,r)\in\widetilde{G},\quad r\neq 0 \tag{2.3}$$

и начальным условиям

$$U(x,y,0)\equiv 0,\quad \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,0)\equiv 0,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,0)=\frac{\pi}{2}\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\Big\}-i\pi\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y),\quad (x,y)\in G. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функции v имеем

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=-r\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\Big),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=r^2\Big\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin 2\varphi\Big\}-r\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\Big).$$

Из этих равенств следует, что

$$r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+r\frac{\partial v}{\partial r}=r^2(\Delta u)(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)-\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \tag{2.5}$$

Теперь из равенства (2.5) и определений функций U и F имеем

$$r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}=\int\limits_0^{2\pi}\Big(r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+r\frac{\partial v}{\partial r}\Big)\exp(2i\varphi)d\varphi=r^2F(x,y,r)-\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\exp(2i\varphi)d\varphi.$$

Из тождества $\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\exp(2i\varphi)=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\Big\{\Big(\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}-2iv\Big)\exp(2i\varphi)\Big\}-4v\exp(2i\varphi)$ и 2π-периодичности функции $(v_\varphi-2iv)\exp(2i\varphi)$ по переменной φ следует

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\exp(2i\varphi)d\varphi=-4\int\limits_0^{2\pi}v(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi=-4U(x,y,r).$$

Отсюда и из (2.5) окончательно имеем $r^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\dfrac{\partial U}{\partial r}-4U=r^2F(x,y,r)$, т.е. функция U удовлетворяет дифференциально-функциональному уравнению (2.3).

Первые два начальных условия (2.4) следуют из определения функции U и равенства $\dfrac{\partial U}{\partial r} = \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial v}{\partial r} \exp(2i\varphi) d\varphi$ при $r = 0$. Последнее равенство (2.4) следует из равенства $\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} \exp(2i\varphi) d\varphi$ при $r = 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция u принадлежит пространству $C^2(G)$ и функция U определена равенствами* (2.1), (2.2). *Тогда для любого компакта $K \subset G$ существует такое $r_1 = r_1(K) > 0$, что функции*

$$U(x,y,r), \quad \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,r)$$

равномерно непрерывны на множестве $K \times [0, r_1]$.

Доказательство. Пусть $K \subset G$ — компактное множество. Положим $r_1 = \varrho(K, \partial G)/2 > 0$. Функция $v(x,y,r,\varphi)$, определенная равенством (2.1), на замкнутом множестве $K \times [0,r_1] \times [0, 2\pi]$ имеет непрерывные (следовательно, по теореме Кантора, равномерно непрерывные) частные производные до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r,φ). Поэтому функция U, определенная равенством (2.2), на замкнутом множестве $K \times [0, r_1]$ имеет равномерно непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем переменным (x,y,r). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть функция $f \in C(G)$ и уравнение (0.2) имеет классическое решение $u \in C^2(G)$. Согласно лемме 1 функции F и U, определенные равенствами (1.1), (1.2) и (2.1), (2.2) соответственно, удовлетворяют дифференциально-функциональному уравнению (2.3), которое перепишем в виде

$$r^{-1} F(x,y,r) = \frac{\partial}{\partial r} \Big\{ r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r^2} \Big\}, \quad (x,y,r) \in \widetilde{G}, \quad r \neq 0. \tag{2.6}$$

Пусть $K \subset G$ — компактное множество и $r_1 = \varrho(K, \partial G)/2 > 0$. Интегрируя обе части равенства (2.6) по отрезку $[\delta, r_1]$, имеем

$$\int\limits_{\delta}^{r_1} F(x,y,r) \frac{dr}{r} = \Big\{ r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r^2} \Big\}_{\delta}^{r_1}, \quad (x,y) \in K. \tag{2.7}$$

Так как

$$U(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,0) = 0,$$

то имеют место равенства

$$U(x,y,\delta) = \int\limits_0^{\delta} (\delta - r) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,r) dr = \delta^2 \int\limits_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,\delta s) ds,$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,\delta) = \int\limits_0^{\delta} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,r) dr = \delta \int\limits_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,\delta s) ds.$$

Из этих представлений следует, что функция

$$\Big\{ r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r^2} \Big\}_{\delta}^{r_1} = r_1^{-1} \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r_1) + \frac{2U(x,y,r_1)}{r_1^2} - \delta^{-1} \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,\delta) - \frac{2U(x,y,\delta)}{\delta^2}$$

согласно лемме 2 при $\delta \to 0$ сходится равномерно на компакте K к функции

$$r_1^{-1} \frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r_1) + \frac{2U(x,y,r_1)}{r_1^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,0).$$

В силу равенства (2.7) это означает, что несобственный интеграл (1.3) сходится равномерно по $(x,y) \in K$ и

$$\int_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = r_1^{-1}\frac{\partial U}{\partial r}(x,y,r_1) + \frac{2U(x,y,r_1)}{r_1^2} - 2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(x,y,0),$$

т. е. функция f является равномерно усиленно непрерывной в G.

Теорема доказана.

Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, можно получить более общее условие равномерной усиленной непрерывности правой части уравнения (0.1). А именно справедлива

Теорема 2. *Пусть в любой области* $G_0, \overline{G_0} \subset G$ *уравнение Пуассона* (0.1) *имеет классическое решение. Тогда функция* f *является равномерно усиленно непрерывной в* G.

Из этой теоремы вытекает следующее

Следствие 1. *Если непрерывная функция* f *не является усиленно непрерывной в некоторой точке* (x_0,y_0) *области* G*, то уравнение* (0.1) *не имеет классического решения в любой окрестности этой точки, содержащейся в* G.

3. Достаточное условие существования классического решения

Теорема 3. *Пусть функция* f *усиленно непрерывна в области* G *и принадлежит пространству* $L_1(G)$*. Тогда функция* $u_0(x,y)$ *в* G *непрерывна вместе со всеми частными производными первого и второго порядка и, следовательно, является классическим решением уравнения Пуассона* (0.1).

Доказательство теоремы 3 основано на нескольких вспомогательных утверждениях.

Пусть функция f непрерывна и суммируема в области G. Рассмотрим функцию, определенную на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ интегральным оператором

$$u_\delta(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint_G f(\xi,\eta)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\delta^2}\,d\xi\,d\eta. \tag{3.1}$$

При $\delta > 0$ подынтегральная функция имеет производные по параметрам x и y любого порядка. Обозначим $r_\delta = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\delta^2}$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$. Вычислим производные логарифмической функции по x и y:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \ln r_\delta}{\partial x} = \frac{x-\xi}{r_\delta^2}, \quad \frac{\partial \ln r_\delta}{\partial y} = \frac{y-\eta}{r_\delta^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln r_\delta}{\partial x^2} = \frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4};\\ \frac{\partial^2 \ln r_\delta}{\partial y^2} = \frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4}, \quad \frac{\partial^2 \ln r_\delta}{\partial x \partial y} = -\frac{2\,(x-\xi)\,(y-\eta)}{r_\delta^4}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

В силу теоремы Лебега и принадлежности f к $L_1(G)$ функция $u_\delta, \delta > 0$, бесконечно дифференцируема на всей плоскости и мы можем поменять порядок интегрирования и дифференцирования, занося дифференцирование под знак интеграла. В частности, получим следующие формулы:

$$\frac{\partial^{i+j} u_\delta}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{1}{2\pi}\iint_G f(\xi,\eta)\frac{\partial^{i+j}\ln r_\delta}{\partial x^i \partial y^j}d\xi d\eta, \quad i+j = 0,1,2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.3}$$

При $\delta = 0$ формула (3.1) переходит в формулу Пуассона (0.2) и в условиях непрерывности и суммируемости функции f определяет непрерывную функцию $u_0(x,y)$ в открытом множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \partial G$. Наряду с функцией $u_0(x,y)$ рассмотрим функции

$$u_{0,1}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\frac{\partial \ln r}{\partial x}d\xi d\eta, \quad u_{0,2}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\frac{\partial \ln r}{\partial y}d\xi d\eta,$$

которые определены в открытом множестве $\mathbb{R}^2\setminus\partial G$ в силу непрерывности функции f и слабой сингулярности ядра интегральных операторов.

Заметим, что функции $u_0, u_{0,1}, u_{0,2}$ непрерывны в открытом множестве $\mathbb{R}^2\setminus\bar{G}$ и функция u_0 в этом множестве имеет непрерывные частные производные первого порядка, причем $\partial u_0/\partial x$, $\partial u_0/\partial y$. Эти утверждения также следуют из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть функция f непрерывна в области G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда справедливы равенства*

$$\lim_{\delta\to 0} u_\delta = u_0, \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = u_{0,1}, \quad \lim_{\delta\to 0}\frac{\partial u_\delta}{\partial y} = u_{0,2}$$

равномерно на любом компакте $K \subset G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда функция f ограничена в области $G : |f(x,y)| \leq M$. Обозначим через R диаметр области G, а через $U((x,y),R)$ — круг радиуса R с центром в точке (x,y). Докажем, что равенство $\lim_{\delta\to 0} u_\delta = u_0$ выполняется равномерно на G. Действительно, так как

$$u_\delta - u_0 = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\ln\frac{r_\delta}{r}d\xi d\eta,$$

то имеем

$$|u_\delta - u_0| \leq \frac{1}{4\pi}M\iint\limits_G \ln\Big(\frac{r_\delta^2}{r^2}\Big)d\xi d\eta \leq \frac{1}{4\pi}M\iint\limits_{U((x,y),R)} \ln\Big(\frac{r_\delta^2}{r^2}\Big)d\xi d\eta$$

$$= \frac{M}{4}(R^2+\delta^2)\{\ln[R^2+\delta^2]-1\} - \frac{M}{4}R^2\{\ln R^2 - 1\}.$$

Отсюда следует, что при δ, стремящемся к нулю, функция u_δ равномерно сходится к u_0.

Для доказательства сходимости производных из равенств (3.2) и (3.3) имеем

$$\Big|\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - u_{0,1}\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\iint\limits_G f(\xi,\eta)(x-\xi)(r_\delta^{-2} - r^{-2})d\xi d\eta\Big|$$

$$\leq \frac{M}{2\pi}\iint\limits_{U((x,y),R)} |x-\xi|(r^{-2} - r_\delta^{-2})d\xi d\eta| = \frac{2M}{\pi}\int\limits_0^R \frac{\delta^2}{\rho^2+\delta^2}d\rho = \frac{2M\delta}{\pi}\arctan\Big(\frac{R}{\delta}\Big).$$

Эта оценка доказывает равномерную сходимость производных функции u_δ по переменной x.

Аналогично доказывается сходимость производных по y. Утверждение 1 в случае, когда функция f ограничена, доказано.

Рассмотрим общий случай, когда непрерывная функция f принадлежит пространству $L_1(G)$. Пусть K — компактное подмножество области G. Выберем открытое множество G_1, содержащее компакт K и такое, что $\bar{G}_1 \subset G$. Функцию $u_\delta, \delta \geq 0$ представим как сумму двух функций $u_\delta = u_{1,\delta} + u_{2,\delta}$, где $u_{1,\delta}$ и $u_{2,\delta}$ соответствуют интегрированию по множеству G_1 и по дополнению $G \setminus G_1$. Очевидно, функции $u_{2,\delta}$ и $u_{2,0}$ бесконечно дифференцируемы в G_1, и поэтому $u_{2,\delta}$

равномерно сходятся к $u_{2,0}$ вместе со всеми частными производными на компакте K при $\delta \to 0$. Равномерная сходимость на компакте K функции $u_{1,\delta}$ к $u_{1,0}$ вместе с частными производными первого порядка следует из ограниченности непрерывной функции f на замкнутом множестве $\bar{G}_1$ и приведенного выше доказательства утверждения 1 для ограниченной функции f. Утверждение доказано.

Следствие 2. *В условиях утверждения* 1 *функция* $u_0(x,y)$ *имеет непрерывные производные* $\partial u_0(x,y)/\partial x, \partial u_0(x,y)/\partial y$ *в области* G*, причем справедливы равенства*

$$\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial x} = u_{0,1}(x,y), \quad \frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y} = u_{0,2}(x,y).$$

Утверждение 2. *Если* $f(x,y)$ *непрерывна и суммируема в* G*, то для* $f_\delta \equiv \Delta u_\delta$ *выполняется равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} f_\delta(x,y) = f(x,y)$$

равномерно на каждом компакте $K \subset G$.

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество области G. По $\varepsilon > 0$ выберем такое $\rho,\ 0 < \rho < \rho_1/2$, где $\rho_1 = \varrho(K, \partial G)/2$, что имеет место неравенство

$$|f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad (x,y) \in K, \quad \text{и} \quad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < \rho^2.$$

Пусть теперь $G_1 = U\left((x,y),\rho\right)$ — круг радиуса ρ с центром в точке $(x,y) \in K$, $G_2 = \{M = (\xi,\eta) \in G\colon \varrho(M,\partial G) < \rho_1\}$.

Так как в силу равенств (3.2) и (3.3)

$$f_\delta \equiv \Delta u_\delta = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)\Big[\frac{(y-\eta)^2-(x-\xi)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4} + \frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r_\delta^4} + \frac{\delta^2}{r_\delta^4}\Big]d\xi d\eta$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G\backslash G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta,$$

то

$$f_\delta - f = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1}\left(f(\xi,\eta) - f(x,y)\right)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G\backslash G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\backslash G_1} f(x,y)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta. \tag{3.4}$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta \equiv \pi, \quad \delta > 0. \tag{3.5}$$

В силу ограниченности непрерывной функции f на замкнутом множестве имеем $|f(x,y)| \le N, (x,y) \in \overline{G_2}$. Поэтому справедлива оценка

$$\frac{1}{\pi}\Big|\iint\limits_{G\backslash G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta\Big| \le \frac{1}{\pi}\Big|\iint\limits_{G_2\backslash G_1} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta\Big| + \frac{1}{\pi}\Big|\iint\limits_{G\backslash G_2} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta\Big|$$

$$\le \frac{N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\backslash G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta + \frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_G |f(\xi,\eta)|d\xi d\eta.$$

Из этой оценки, представления (3.4) и тождества (3.5) следует оценка

$$|f_\delta(x,y)-f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{\pi}\iint\limits_{G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta+\frac{N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta+\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta$$

$$+\frac{N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta<\varepsilon+\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta+\frac{2N}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus G_1}\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta$$

$$=\varepsilon+\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta+\frac{2N\delta^2}{\rho^2+\delta^2}.$$

Таким образом, если число $\delta>0$ настолько мало, что имеет место неравенство

$$\frac{\delta^2}{\pi(\rho_1^2+\delta^2)^2}\iint\limits_{G}|f(\xi,\eta)|d\xi d\eta+\frac{2N\delta^2}{\rho^2+\delta^2}<\varepsilon,$$

то для любой точки $(x,y)\in K$ справедливо неравенство $|f_\delta(x,y)-f(x,y)|<2\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к основному этапу доказательства теоремы 3.

Утверждение 3. *Пусть функция f равномерно усиленно непрерывна в области G и принадлежит пространству $L_1(G)$. Тогда функция u_0 имеет непрерывные частные производные второго порядка, причем*

$$\lim_{\delta\to0}\frac{\partial^2u_\delta}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2},\quad \lim_{\delta\to0}\frac{\partial^2u_\delta}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u_0}{\partial x\partial y},\quad \lim_{\delta\to0}\frac{\partial^2u_\delta}{\partial y^2}=\frac{\partial^2u_0}{\partial y^2}\tag{3.6}$$

равномерно на каждом компактном подмножестве области G.

Доказательство. Для доказательства выполнения равенства (3.6) равномерно на каждом компактном подмножестве области G достаточно установить выполнение равенства (3.6) равномерно в некоторой окрестности каждой точки области G. Пусть $M=(x_0,y_0)$ — произвольная точка области G и $0<3d\le\varrho(M,\partial G)$ — расстояние от этой точки до границы ∂G области G. Обозначим через $G_1=U(M,2d)$ круг радиуса $2d$ с центром в точке M.

Рассмотрим комплекснозначную функцию

$$\frac{\partial^2u_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2u_\delta}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G}f(\xi,\eta)\Big(\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x\partial y}\Big)d\xi d\eta.\tag{3.7}$$

Очевидно, что если она сходится к некоторой функции равномерно по (x,y) из некоторого множества, то каждое слагаемое равномерно сходится на этом множестве, так как u_δ — вещественная функция. Так как

$$\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2\ln r_\delta}{\partial x\partial y}=-\frac{\big((x-\xi)+i(y-\eta)\big)^2}{r_\delta^4}+\frac{\delta^2}{r_\delta^4},$$

то имеем равенство

$$\frac{\partial^2u_\delta}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2u_\delta}{\partial x\partial y}=h_\delta(x,y)+g_\delta(x,y)+\frac12f_\delta(x,y),\tag{3.8}$$

где

$$h_\delta(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_1}f(\xi,\eta)\frac{\big((x-\xi)+i(y-\eta)\big)^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta,$$

$$g_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{((x-\xi)+i(y-\eta))^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta, \quad f_\delta(x,y) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G} f(\xi,\eta)\frac{\delta^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta.$$

Функция $g_\delta(x,y)$ при $\delta \to 0$ в круге $U(M,d)$ равномерно сходится к функции

$$g_0(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G\setminus G_1} f(\xi,\eta)\frac{((x-\xi)+i(y-\eta))^2}{r^4}d\xi d\eta,$$

а функция $f_\delta(x,y)$ в силу утверждения 1 — к функции $f(x,y)$.

Следовательно, для существования у функции (3.7) равномерного предела при $\delta \to 0$ достаточно установить существование равномерного предела у функции $h_\delta(x,y)$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$h_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_1} f(\xi,\eta)\frac{((x-\xi)+i(y-\eta))^2}{r_\delta^4}d\xi d\eta = \left\{\begin{matrix}\xi = x+\rho\cos\varphi, \\ \eta = y+\rho\sin\varphi\end{matrix}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho\, d\rho d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho\, d\rho d\varphi.$$

Здесь

$$R(\varphi) = R(x,y,\varphi) = (x_0-x)\cos\varphi + (y_0-y)\sin\varphi + \sqrt{4d^2 - ((x_0-x)\sin\varphi - (y_0-y)\cos\varphi)^2}$$

— гладкая функция аргументов (x,y,φ) и $R(\varphi) \geq d$ при $(x,y) \in U(M,d)$.

Таким образом, для функции h_δ имеем представление

$$h_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{d} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\rho^2\exp(2i\varphi)}{(\rho^2+\delta^2)^2}\rho d\rho d\varphi.$$

Второе слагаемое в правой части этого равенства при $\delta \to 0$ сходится равномерно по $(x,y) \in U(M,d)$ к функции

$$h_{0,2}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\exp(2i\varphi)}{\rho}d\rho d\varphi.$$

Первое слагаемое, изменив порядок интегрирования, запишем в виде

$$h_{\delta,1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\delta^2)^2}\int\limits_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi\right]d\rho.$$

По условию функция

$$I(\rho) = I(x,y,\rho) = \int\limits_0^{\rho} \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x+s\cos\varphi, y+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds$$

определена на множестве $U(M,d)\times[0,d]$ и

$$\frac{\partial I}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi, \quad (x,y)\in U(M,2d), \quad 0<\rho<d.$$

Поэтому, производя интегрирование по частям, для функции $h_{\delta,1}$ имеем

$$h_{\delta,1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \left[\frac{\rho^3}{(\rho^2+\delta^2)^2}\int\limits_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi\right]d\rho$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{\rho^4}{(\rho^2+\delta^2)^2}\frac{\partial I}{\partial\rho}d\rho = -\frac{1}{2\pi}\frac{d^4}{(d^2+\delta^2)^2}I(d) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}I(\rho)d\rho.$$

Отсюда следует, что если интеграл

$$\int\limits_0^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}I(\rho)d\rho \tag{3.9}$$

при $\delta\to 0$ в круге $U(M,d)$ равномерно стремится к нулю, то при $\delta\to 0$ функция $h_{\delta,1}$ равномерно в этом круге стремится к функции

$$-\frac{1}{2\pi}I(x,y,d) = h_{0,1}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x+s\cos\varphi, y+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds.$$

Докажем равномерную сходимость интеграла (3.9) к нулю в круге $U(M,d)$ при $\delta\to 0$. В силу равномерной усиленной непрерывности функции f по $\varepsilon>0$ можно выбрать $\sigma>0$ такое, что

$$|I(x,y,\rho)|<\varepsilon, \quad (x,y)\in U(M,d), \quad 0<\rho<\sigma.$$

В силу неравенств

$$\int\limits_{\sigma}^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}d\rho = \int\limits_{\sigma/\delta}^{d/\delta} \frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds < \int\limits_{\sigma/\delta}^{\infty} \frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds$$

по числу σ выберем $\delta_0>0$ настолько малым, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\sigma}^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}d\rho < \varepsilon, \quad 0<\delta<\delta_0.$$

Из этих оценок имеем $\Big|\int_0^d \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3} I(\rho)d\rho\Big| \le \varepsilon + N\varepsilon,\ (x,y)\in U(M,d),\ 0<\delta<\delta_0$, где $|I(x,y,\rho)|\le N,\ (x,y)\in U(M,d),\ 0<\rho\le d$. Здесь мы использовали неравенство

$$\int\limits_0^\sigma \frac{4\rho^3\delta^2}{(\rho^2+\delta^2)^3}d\rho = \int\limits_0^{\sigma/\delta}\frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds < \int\limits_0^{\infty}\frac{4s^3}{(s^2+1)^3}ds = 1.$$

Равномерная сходимость интеграла (3.9) к нулю в круге $U(M,d)$ при $\delta\to 0$ доказана. Тем самым мы доказали, что функция h_δ равномерно сходится в этом круге к функции

$$h_0(x,y) = h_{0,1}(x,y) + h_{0,2}(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^d \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x+s\cos\varphi, y+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_d^{R(\varphi)} f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)\frac{\exp(2i\varphi)}{\rho}d\rho d\varphi,$$

а функция (3.7) равномерно сходится к функции $h_0(x,y)+g_0(x,y)+1/2\,f(x,y)$. Отсюда и из утверждений 1, 2 следует, что функция u_0 имеет все частные производные второго порядка, и справедливы равенства

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \Re\left[h_0(x,y)+g_0(x,y)\right] + \frac{1}{2}f(x,y), \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = -\Re\left[h_0(x,y)+g_0(x,y)\right] + \frac{1}{2}f(x,y),\\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} = \Im\left[h_0(x,y)+g_0(x,y)\right], \quad (x,y)\in U(M,d).\end{gathered} \tag{3.10}$$

Утверждение 3 доказано.

З а м е ч а н и е. В равенствах (3.10) положим $(x,y)=(x_0,y_0)$. Тогда $R(\varphi)=R(x_0,y_0,\varphi)\equiv 2d$, поэтому функцию h_0 в точке (x_0,y_0) можно переписать в виде

$$h_0(x_0,y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2d}\frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} f(x_0+s\cos\varphi, y_0+s\sin\varphi)\exp(2i\varphi)d\varphi ds.$$

4. Регулярность обобщенных решений уравнения Пуассона

Приведем некоторые понятия, связанные с определением обобщенного решения уравнения Пуассона (см., например, [4, с. 379; 5, с. 119)]. Пусть $D(G)$ — пространство основных в области G функций, а $D'(G)$-пространство всех линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $D(G)$, т. е. пространство обобщенных в области G функций. Каждая локально интегрируемая в области G функция f формулой

$$(f,\psi) = \iint\limits_G f(\xi,\eta)\psi(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad \psi\in D(G)$$

определяет непрерывный в $D(G)$ функционал — регулярную обобщенную функцию из пространства $D'(G)$. В частности, каждая непрерывная функция из пространства $C(G)$ является регулярной обобщенной функцией. Пусть f — произвольная обобщенная функция. Обобщенную функцию $v\in D'(G)$ называют обобщенным решением уравнения Пуассона $\Delta u = f$, если она удовлетворяет равенству $(v,\Delta\psi)=(f,\psi)$ для любой функции $\psi\in D(G)$. В частности, если $f=0$, то уравнение Пуассона называют уравнением Лапласа. Классическое решение уравнения Лапласа в области G называют гармонической функцией, а решение уравнения Лапласа из пространства $D'(G)$ называют обобщенной гармонической функцией. Следующее важное утверждение определяет структуру множества обобщенных гармонических в области G функций (см., например, [4, с. 379; 2, с. 119]).

Утверждение 4. *Всякая обобщенная гармоническая функция в области G является также гармонической функцией в этой области.*

Утверждение 4 вместе с вышеприведенными результатами позволяет установить следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть непрерывная в области G функция f усиленно непрерывна в этой области. Тогда каждое обобщенное решение уравнения Пуассона* (0.1) *в области G является классическим решением в этой области.*

Доказательство. Пусть $v \in D'(G)$ — обобщенное решение уравнения (0.1). Выберем последовательность областей G_k, удовлетворяющих условиям $G_k \subset \overline{G_k} \subset G_{k+1} \subset G,\ k = 1, 2, \dots$ и $G = \bigcup_k G_k$. Согласно теореме 3 функция

$$u_k(x,y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G_k} f(\xi,\eta) \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta$$

является классическим решением уравнения (0.1) в области G_k. Очевидно, $v - u_k$ принадлежит пространству $D'(G_k)$ и является обобщенной гармонической функцией в области G_k. В силу теоремы 4 обобщенная функция $v - u_k$ совпадает с некоторой гармонической в области G_k функцией v_k, т. е. $(v - u_k, \psi) = (v_k, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G_k)$. Отсюда следует, что для дважды непрерывно дифференцируемых в области G_k функций $u_k + v_k,\ u_{k+1} + v_{k+1}$ справедливо равенство $(u_k + v_k, \psi) = (u_{k+1} + v_{k+1}, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G_k)$. В силу леммы Дюбуа-Реймон функции $u_k + v_k,\ u_{k+1} + v_{k+1}$ тождественны на множестве G_k. Поэтому функция $\overline{v}(x,y) = u_k(x,y) + v_k(x,y),\ (x,y) \in G_k$ корректно определена на всей области G, является классическим решением уравнения (0.1) и определяет регулярную обобщенную функцию в области G. Покажем, что обобщенная функция v совпадает с классическим решением $\overline{v}$ уравнения (0.1). Действительно, для любой функции $\psi \in D(G)$ существует такой номер k, что $\psi \in D(G_k)$. Поэтому $(v, \psi) = (u_k + v_k, \psi) = (\overline{v}, \psi)$ для любой функции $\psi \in D(G)$. Итак, обобщенная функция v является регулярной и совпадает с классическим решением $\overline{v}$ уравнения (0.1). Теорема доказана.

5. Примеры и приложения

Теорема 5. *Пусть функция $f(x,y) \equiv f_0(x)$, где $f_0(x)$ — непрерывная на интервале (a,b) функция. Тогда уравнение* (0.1) *имеет классическое решение в любой области $G \subset (a,b) \times \mathbb{R}$.*

Доказательство этой теоремы следует из того, что функция

$$u(x,y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} (x-s) f_0(s) ds, \quad x_0,\ x \in (a,b),$$

является классическим решением уравнения (0.1) при $f(x,y) \equiv f_0(x)$. Отсюда и из теоремы 1 получаем

Следствие 3. *Если функция $f(x,y) \equiv f(x)$, то для функции*

$$F(x,y,r) = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x + r\cos\varphi) \exp(2i\varphi) d\varphi$$

существует несобственный интеграл

$$\int_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r}.$$

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по направлению y, т. е.*

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le K\,|y_1-y_2|^\alpha, \quad 0<\alpha<1, \quad (x,y_1),\ (x,y_2)\in G.$$

Тогда функция $f(x,y)$ является равномерно усиленно непрерывной в области G.

Доказательство. Функцию

$$F(x,y,r) = \int_0^{2\pi} f(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)e^{2i\varphi}d\varphi$$

представим в виде $F(x,y,r) = F_1(x,y,r)+F_2(x,y,r)$, где

$$F_1(x,y,r) = \int_0^{2\pi} f(x+r\cos\varphi, y)e^{2i\varphi}d\varphi, \quad F_2(x,y,r) = F(x,y,r)-F_1(x,y,r).$$

Пусть $K\subset G$ — компактное множество. Положим $r_1 = \rho(K,\partial G)/2>0$. В силу тождества

$$\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{x+r\cos\varphi} f(s,y)e^{i\varphi}\,ds\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} f(x+r\cos\varphi,y)\sin\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi, \quad 0<r\le r_1, \tag{5.1}$$

для функции $F_1(x,y,r)$ справедливо представление

$$\frac{1}{r}F_1(x,y,r) = \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{x+r\cos\varphi} f(s,y)e^{i\varphi}\,ds\,d\varphi\right\}.$$

Интегрируя это равенство по отрезку $[\delta,r_1],\ 0<\delta<r_1$, в силу (5.1) получим

$$\int_\delta^{r_1} F_1(x,y,r)\,\frac{dr}{r} = i\int_0^{2\pi} f(x+r_1\cos\varphi,y)\sin\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi - i\int_0^{2\pi} f(x+\delta\cos\varphi,y)\sin\varphi e^{i\varphi}\,d\varphi. \tag{5.2}$$

Оценим функцию $F_2(x,y,r)$:

$$|F_2(x,y,r)| \le \int_0^{2\pi} |f(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)-f(x+r\cos\varphi,y)|\,d\varphi \le K\int_0^{2\pi}|\sin\varphi|r^\alpha d\varphi = 4Kr^\alpha. \tag{5.3}$$

Из равенства (5.2) и оценки (5.3) следует, что равномерно на компакте K существует

$$\int_0^{r_1} F(x,y,r)\frac{dr}{r} = \lim_{\delta\to+0}\int_\delta^{r_1} F(x,y,r)\,\frac{dr}{r} = \int_0^{r_1} F_1(x,y,r)\frac{dr}{r} + \int_0^{r_1} F_2(x,y,r)\frac{dr}{r}.$$

Теорема доказана.

Будем говорить, что на множестве $M\subset G$ функция удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha>0$ по направлению $\overrightarrow{n} = (\cos\beta,\sin\beta)$, если

$$|f(x+h\cos\beta,y+h\sin\beta)-f(x,y)| \le C|h|^\alpha, \quad (x,y), \quad (x+h\cos\beta,y+h\sin\beta)\in M, \quad C=\text{const}.$$

Доказанную теорему можно обобщить в следующей форме.

Теорема 7. *Пусть непрерывная функция* $f(x,y))$ *в некоторой окрестности каждой точки* (x_0, y_0) *области* G *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha > 0$ *по фиксированному направлению* $\overrightarrow{n} = (\cos\beta, \sin\beta)$, *где* $\alpha > 0, \overrightarrow{n}$ *зависят от точки* (x_0, y_0). *Тогда функция* $f(x,y)$ *является усиленно непрерывной в области* G.

Отсюда и из теоремы 3 следует

Теорема 8. *Если непрерывная функция* $f(x,y)$, *принадлежит пространству Лебега* $L(G)$ *и в некоторой окрестности каждой точки удовлетворяет условию Гёльдера по некоторому направлению, то уравнение Пуассона* (0.1) *в области* G *имеет классическое решение.*

Теорема 9. *Пусть непрерывная в круге* $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \le r_0\}$ *функция* $f(x,y)$ *допускает представление*

$$f(x,y) = \sum_{|k|\le N} f_k(r)\exp(ik\phi), \quad x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi.$$

Тогда уравнение (0.1) *имеет классическое решение в круге* $\{(x,y)\colon x^2+y^2 < r_0\}$ *тогда и только тогда, когда функции* $f_2(r)$ *и* $f_{-2}(r)$ *такие, что существуют несобственные интегралы*

$$\int\limits_0^{r_0} \frac{f_{\pm 2}(r)}{r} dr = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_\delta^{r_0} \frac{f_{\pm 2}(r)}{r} dr.$$

Сначала докажем вспомогательные утверждения.

Легко показать, что для функции

$$v(x,y) = v_k(r)\exp(ik\phi), \quad x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi,$$

где функция $v_k(r)$ имеет непрерывные производные при $r > 0$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial x} = (xrv_k' - ikyv_k)\frac{\exp(ik\phi)}{r^2},\\
&\frac{\partial v}{\partial y} = (yrv_k' + ikxv_k)\frac{\exp(ik\phi)}{r^2},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left[x^2r^2v_k'' + yr(y-2ikx)v_k' - ky(ky-2ix)v_k\right]\frac{\exp(ik\phi)}{r^4},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \left[xyr^2v_k'' + ir(kx^2-ky^2+ixy)v_k' + k(kxy-ix^2+iy^2)v_k\right]\frac{\exp(ik\phi)}{r^4},\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left[y^2r^2v_k'' + xr(x+2iky)v_k' - kx(kx+2iy)v_k\right]\frac{\exp(ik\phi)}{r^4}.
\end{aligned}$$

Из приведенных выше формул вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Функция*

$$v(x,y) = \sum_{|k|\le N} v_k(r)\exp(ik\phi), \quad x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi$$

в круге $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \le r_0^2\}$: a) *непрерывна тогда и только тогда, когда функции* $v_k(r)$, $|k| \le N$ *непрерывны на отрезке* $[0, r_0]$, *причем* $v_k(0) = 0$ *при* $k \ne 0$; b) *имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, если функции* $v_k(r)$ *на отрезке* $[0, r_0]$ *дважды непрерывно дифференцируемы, причем* $v_k(0) = v_k'(0) = v_k''(0) = 0$ *при* $k \ne 0$.

Лемма 4. *Пусть непрерывная в замкнутом круге* $\{(x,y)\colon x^2+y^2\le r_0^2\}$ *функция имеет представление* $f(x,y)=f_k(r)\exp(ik\phi)$, $k\in Z$. *Тогда уравнение Пуассона (0.1) в круге* $\{(x,y)\colon x^2+y^2<r_0^2\}$ *имеет классическое решение при любом* k, $|k|\ne 2$, *а при* $|k|=2$ *необходимым и достаточным условием существования классического решения является сходимость несобственного интеграла*

$$\int\limits_0^{r_0} f_k(r)\frac{dr}{r}=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{r_0} f_k(r)\frac{dr}{r}. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $k\ge 0$. Случай $k<0$ рассматривается аналогично. Будем искать решение уравнения Пуассона в виде $v(r,\phi)=v_k(r)\exp(ik\phi)$. Уравнение Пуассона в полярных координатах имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\phi^2}=f_k(r)\exp(ik\phi).$$

Отсюда для функции $v_k(r)$ имеем

$$r^2v_k''+rv_k'-k^2v_k=r^2f_k(r),\quad r>0. \tag{5.5}$$

Отметим, что в силу непрерывности функции $f(x,y)$ функция $f_k(r)$ непрерывна на отрезке $[o,r_0]$, причем $f_k(0)=0$ при $k\ne 0$ (лемма 4). Нас интересуют решения $v_k(r)$ уравнения (5.5), которые имеют непрерывное продолжение в точке $r=0$ вместе со всеми производными до второго порядка включительно, причем

$$\lim_{r\to 0}v_k(r)=\lim_{r\to 0}v_k'(r)=\lim_{r\to 0}v_k''(r)=0, \tag{5.6}$$

если $k\ne 0$.

Соответствующее однородное уравнение $r^2v_k''+rv_k'-k^2v_k=0$ является уравнением Эйлера. Используя метод вариации постоянных, получим общее решение неоднородного уравнения (5.5):

$$v_0=\ln r\int\limits_0^r\rho f_0(\rho)d\rho-\int\limits_0^r\rho\ln\rho f_0(\rho)d\rho+C_1+C_2\ln r,\quad \text{если}\quad k=0,$$

$$v_k=\frac{r^k}{2k}\int\limits_{r_0}^r\rho^{1-k}f_k(\rho)d\rho+C_1r^k-\frac{r^{-k}}{2k}\int\limits_{r_0}^r\rho^{1+k}f_k(\rho)d\rho+C_2r^{-k},\quad \text{если}\quad k\ne 0.$$

Из этих представлений общего решения уравнения (5.5), правила Лопиталя, непрерывности функции $f_k(r)$ и условия $f_k(0)=0$ при $k\ne 0$ следует, что решения, которые имеют непрерывное продолжение в точке $r=0$ вместе со всеми производными до второго порядка включительно, имеют вид

$$v_0=\ln r\int\limits_0^r\rho f_0(\rho)d\rho-\int\limits_0^r\rho\ln\rho f_0(\rho)d\rho+C_1,\quad \text{если}\quad k=0,$$

$$v_k=\frac{r^k}{2k}\int\limits_0^r\rho^{1-k}f_k(\rho)d\rho-\frac{r^{-k}}{2k}\int\limits_0^r\rho^{1+k}f_k(\rho)d\rho,\quad \text{если}\quad k=1,$$

$$v_k=\frac{r^k}{2k}\int\limits_{r_0}^r\rho^{1-k}f_k(\rho)d\rho+C_1r^k-\frac{r^{-k}}{2k}\int\limits_0^r\rho^{1+k}f_k(\rho)d\rho,\quad \text{если}\quad k>2.$$

Теперь рассмотрим случай $k = 2$. Пусть функция $f_2(r)$ удовлетворяет условию (5.4). Тогда частное решение уравнения (5.5)

$$v_2 = \frac{r^2}{4}\int\limits_0^r \rho^{-1} f_2(\rho)d\rho - \frac{r^{-2}}{4}\int\limits_0^r \rho^3 f_2(\rho)d\rho$$

удовлетворяет начальным условиям (5.6).

Обратно, пусть уравнение (5.5) при $k = 2$ имеет решение $v_2(r)$, удовлетворяющее условиям (5.6). Из тождества

$$\frac{f_2(r)}{r} \equiv \frac{d}{dr}\left\{\frac{v_2'}{r} + \frac{2v_2}{r^2}\right\}, \quad r \in (0, r_0),$$

следует

$$\int\limits_\delta^{r_0} f_2(r)\frac{dr}{r} \equiv \frac{v'(r_0)}{r_0} + \frac{2v(r_0)}{r_0^2} - \frac{v'(\delta)}{\delta} + \frac{2v(\delta)}{\delta^2}, \quad \delta \in (0, r_0),$$

которое в силу

$$\lim_{r\to 0}\frac{v_2(r)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\frac{v_2'(r)}{2r} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} v_2''(r) = 0$$

доказывает существование несобственного интеграла (5.4) при $k = 2$. Лемма 4 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 9 следует из приведенных выше лемм 3 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
2. **Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
3. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983 с.
4. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
5. **Олейник О.А.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ, 2005. 260 с.
6. **Мухамадиев Э.М., Гришанина Г.Э.** О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. конф., посвящен. памяти В. К. Иванова (Екатеринбург, 31 октября – 5 ноября 2011 г.) / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 51–52.

Поступила 12.01.2015

Мухамадиев Эргашбой
д-р физ.-мат. наук, профессор
Вологодский государственный университет
e-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Гришанина Гульнара Эргашевна
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры высшей математики
университет “Дубна”
e-mail: anora66@mail.ru

Гришанин Александр Андреевич
аспирант фак. ВМК МГУ им. М. Ломоносова

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЯМИ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА С МИНИМАЛЬНОЙ L_p-НОРМОЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА [1]

С. И. Новиков

Рассматривается задача интерполяции с минимальным значением L_p-нормы ($1 \le p < \infty$) оператора Лапласа интерполянтов для класса ограниченных в l_p-норме интерполируемых последовательностей. Интерполирование осуществляется в узлах сетки, образованной точками из $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами. В работе доказано, что если $1 \le p < n/2$, то L_p-норма оператора Лапласа интерполянта может быть сколь угодно малой для любой интерполируемой последовательности. Для случая $n = 2$ найдены двусторонние оценки L_2-нормы оператора Лапласа наилучшего интерполянта.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, пространство Соболева, вложение.

S. I. Novikov. Interpolation by functions from a Sobolev space with minimum L_p-norm of the Laplace operator.

We consider an interpolation problem with minimum value of the L_p-norm ($1 \le p < \infty$) of the Laplace operator of interpolants for a class of interpolated sequences that are bounded in the l_p-norm. The data are interpolated at nodes of the grid formed by points from $\mathbb{R}^n$ with integer coordinates. It is proved that, if $1 \le p < n/2$, then the L_p-norm of the Laplace operator of the interpolant can be arbitrarily small for any sequence that is interpolated. Two-sided estimates for the L_2-norm of the Laplace operator of the best interpolant are found for the case $n = 2$.

Keywords: interpolation, Laplace operator, Sobolev space, embedding.

Введение

Настоящая работа посвящена задаче интерполирования класса ограниченных в l_p-норме ($1 \le p < \infty$) последовательностей гладкими функциями с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа.

Сначала введем обозначения и сформулируем постановку задачи.

Пусть $n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ 1 \le p < \infty$. Для последовательности вещественных чисел $z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n}$ полагаем

$$\|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p\Big)^{1/p}.$$

Класс интерполируемых последовательностей определяем следующим образом:

$$\mathfrak{M}_p \;=\; \big\{z\colon z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}^n},\ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)} \le 1\big\}\,.$$

Пусть $C^m(\mathbb{R}^n)$ — множество всех функций, определенных на $\mathbb{R}^n$, у которых существуют и непрерывны на $\mathbb{R}^n$ все производные до порядка m включительно, $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций. Через $L_p(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Лебега функций, интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ с p-й степенью при $1 \le p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$. Оно снабжено нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}, & 1 \le p < \infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00496а), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1) и Программы УрО РАН (проект 15-16-1-4).

Через $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, а через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных (т. е. имеющих компактный носитель) функций.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ — производная порядка α, понимаемая в обобщенном смысле Соболева (слабая производная), т. е. $v = D^\alpha u$ если $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx.$$

Как известно (см., например, [1]), функция f принадлежит пространству Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, если $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), |\alpha| = l$ существует производная $D^\alpha f$ в обобщенном смысле Соболева, и норма

$$\|f\|_{p,l} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_p$$

конечна. Всюду далее

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_2^n}$$

— оператор Лапласа.

Класс функций, интерполирующих фиксированный элемент $z \in \mathfrak{M}_p$ в точках с целочисленными координатами, определяем следующим образом:

$$Y_p(z) \;=\; \left\{ u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W_p^2(\mathbb{R}^n) \colon u(j) = z_j \;\; \forall j \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Целью настоящей работы является исследование величины

$$A_p(\mathbb{R}^n) \;=\; \sup_{z \in \mathfrak{M}_p} \; \inf_{u \in Y_p(z)} \|\Delta u\|_p, \tag{0.1}$$

которую можно интерпретировать как L_p-норму оператора Лапласа, примененного к “наилучшей” функции из класса $Y_p(z)$ при интерполировании “наихудшей” последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$.

Для фиксированной последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$ задача $\|\Delta u\|_p \longrightarrow \inf\limits_{u \in Y_p(z)}$ представляет собой вариант интерполяционной проблемы типа Фавара (см., например, [2–4]). Поэтому задачу нахождения величины (0.1) можно рассматривать как интерполяционную проблему типа Фавара для всего класса $\mathfrak{M}_p$ интерполируемых последовательностей.

Определение величины (0.1) близко постановкам задач экстремальной функциональной интерполяции [5; 6], однако в настоящей работе класс интерполируемых последовательностей определяется несколько иначе, чем в этих и других работах, посвященных задачам экстремальной функциональной интерполяции.

Для $p = \infty$ величина (0.1) ранее изучалась в работе автора [7].

В разд. 1 настоящей работы мы доказываем, что если $1 \le p < n/2$, то $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$. Как известно, согласно классической теореме вложения Соболева ([8, § 8], а также, например, [1, § 4.6]), если $n < lp$, то имеет место вложение класса $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C(\mathbb{R}^n)$, а при $n > lp$ этого вложения нет. Сопоставляя наш результат с этой теоремой, приходим к выводу, что исследуемая величина равна нулю в тех случаях, когда пространство Соболева $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ не вкладывается в пространство непрерывных функций. При $p = 2$ нетривиальными с точки зрения величины $A_p(\mathbb{R}^n)$ являются только три случая: $n = 2, 3, 4$. Оценкам исследуемой величины при $n = 2,\; p = 2$ посвящен разд. 2.

1. Случай $1 \le p < n/2$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Если* $1 \le p < n/2$, *то* $A_p(\mathbb{R}^n) = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольную последовательность $z \in \mathfrak{M}_p$ и произвольное число $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Определяем функции f_j $(j \in \mathbb{Z}^n)$ следующим образом:

$$f_j(x) = \begin{cases} c_j\, e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}, & \text{если } \|x-j\| \le \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|x-j\| > \varepsilon, \end{cases}$$

где c_j — константы, которые находим из условий интерполяции $f_j(j) = z_j$, $j \in \mathbb{Z}^n$. В результате получаем $c_j = e\, z_j$. Известно (см., например, [1]), что $f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что f_j и некоторые аналогичные им функции применяются в качестве усредняющих ядер, в частности при доказательстве плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, и в пространствах Соболева (см., например, [1] и имеющиеся там ссылки).

Далее определяем функцию $F = F(z, x)$, полагая $F = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} f_j$. Поскольку внутренности носителей функций $f_j(x)$ при различных значениях $j \in \mathbb{Z}^n$ не пересекаются, то при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$ бесконечная сумма в определении функции F содержит не более одного ненулевого слагаемого.

Убедимся, что $F \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Действительно, с помощью замены переменных $y = x - j$ и известного тождества (см., например, [9, с. 402–403])

$$\int\limits_{\|y\|\le R} \varphi(\|y\|)\, dy = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int\limits_0^R \rho^{n-1}\varphi(\rho)\, d\rho, \quad R > 0, \tag{1.1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — известная Γ-функция Эйлера, получаем

$$\|F\|_p = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^p\, dx\Bigg)^{1/p} = e\,\Bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p \int\limits_{\|x-j\|\le\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2 p}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}\, dx\Bigg)^{1/p}$$

$$= e\Bigg(\frac{\pi^{n/2}\, \varepsilon^n\, p}{\Gamma(n/2)} \int\limits_p^{+\infty} \frac{(p-t)^{(n-2)/2}\, e^{-t}}{t^{(n+2)/2}}\, dt\Bigg)^{1/p} \Bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |z_j|^p\Bigg)^{1/p} < +\infty,$$

поскольку $z \in \mathfrak{M}_p$. Аналогичными вычислениями убеждаемся в том, что и все производные второго порядка функции F принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R}^n)$. Таким образом $F \in Y_p(z)$.

Для вычисления оператора Лапласа от функции F воспользуемся тем известным фактом, что если функция φ зависит только от $r = \|x\|$, то

$$\Delta\varphi = \varphi''_{rr} + \frac{n-1}{r}\, \varphi'_r \; [2].$$

После выполнения элементарных преобразований имеем

$$\Delta\big(e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}\big) = -2\varepsilon^2 \frac{e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}} \Big(\varepsilon^4 n - 2\varepsilon^2(n-1)\|x-j\|^2 + (n-4)\|x-j\|^4\Big)}{(\varepsilon^2 - \|x-j\|^2)^4}.$$

[2] Для того чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно записать оператор Лапласа в сферических координатах и положить равными нулю все производные функции φ по угловым координатам.

Используя это равенство, получаем

$$\|\Delta F\|_p = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta F(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} = e\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} z_j^p \int\limits_{\|x-j\|\le\varepsilon} \Big|\Delta\Big(e^{\frac{\varepsilon^2}{\|x-j\|^2-\varepsilon^2}}\Big)\Big|^p\,dx\Big)^{1/p}$$

$$\le C_1\varepsilon^2\Big(\int\limits_{\|y\|\le\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon^2 p}{\|y\|^2-\varepsilon^2}}\,\frac{\big|\varepsilon^4 n - 2\varepsilon^2(n-1)\|y\|^2 + (n-4)\|y\|^4\big|^p}{(\varepsilon^2-\|y\|^2)^{4p}}\,dy\Big)^{1/p}\|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)},$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от ε. Теперь применяем (1.1) и в получившемся (однократном) интеграле выполняем замену, полагая $\rho = \varepsilon\tau$. В результате приходим к неравенству

$$\|\Delta F\|_p \ \le C_2\ \varepsilon^{n/p-2}\ I_{p,n}^{1/p}\ \|z\|_{l_p(\mathbb{Z}^n)}, \tag{1.2}$$

в котором константа $C_2 > 0$ не зависит от ε, а

$$I_{p,n} = \int\limits_0^1 \tau^{n-1}e^{-\frac{p}{1-\tau^2}}\ \frac{\big|n-2(n-1)\tau^2+(n-4)\tau^4\big|^p}{(1-\tau^2)^{4p}}\,d\tau.$$

При $1\le p < n/2$ этот не зависящий от ε интеграл сходится, поскольку, выполнив в нем замену переменной $t = p\tau^2/(1-\tau^2)$ и воспользовавшись неравенством условия теоремы, получаем, что $I_{p,n}$ оценивается сверху линейной комбинацией конечного числа Г-функций Эйлера.

Поскольку $n/p - 2 > 0$, правая часть неравенства (1.2) может быть сделана сколь угодно малой для любой последовательности $z \in \mathfrak{M}_p$. В результате для величины $A_p(\mathbb{R}^n)$ получаем

$$A_p(\mathbb{R}^n) \le \sup_{z\in\mathfrak{M}_p}\|\Delta F(z,\cdot)\|_p \le C\varepsilon^{n/p-2}$$

с не зависящей от ε константой $C > 0$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что теорема 1 фактически доказана для интерполянтов из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т. е. с избыточной гладкостью. Можно было бы определить класс интерполянтов $\widetilde{Y}_p(z)$, заменив в определении класса $Y_p(z)$ пространство $C^1(\mathbb{R}^n)$ на $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ [3], и аналогично величине (0.1) ввести в рассмотрение величину $\widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, которая связана с ней очевидным неравенством $A_p(\mathbb{R}^n) \le \widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$. Теорема 1 фактически означает, что при $1 \le p < n/2$ выполняется $\widetilde{A}_p(\mathbb{R}^n) = 0$.

Пусть теперь $p = 2$. Согласно теореме 1 при всех $n > 4$ имеем $A_2(\mathbb{R}^n) = 0$. Следовательно, только для трех размерностей $n = 2, 3, 4$ можно ожидать, что величина (0.1) отлична от нуля.

2. Оценки величины $A_2(\mathbb{R}^2)$

Сначала получим оценку величины $A_2(\mathbb{R}^2)$ снизу. Для того чтобы это сделать, нам потребуются некоторые неравенства, которые будут доказаны ниже с помощью методов гармонического анализа. Поэтому прежде всего определим прямое и обратное преобразования Фурье.

Следуя [10, гл. 2, § 1], определяем преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^2)\bigcap L_2(\mathbb{R}^2)$ следующим образом:

$$\widehat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x,y)}f(y)\,dy,$$

где i — мнимая единица, $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ — скалярное произведение элементов $x, y \in \mathbb{R}^2$. Затем с помощью хорошо известной процедуры непрерывного продолжения определяем преобразование Фурье на всем пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

[3] При этом все производные, естественно, понимались бы в обычном смысле.

Обратное преобразование Фурье есть

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(x,y)} \widehat{f}(y)\, dy.$$

Иногда будем также обозначать $\widehat{f}$ через $\mathcal{F}f$, а обратное преобразование Фурье — через $\mathcal{F}^{-1}f$. Известно, что

$$(D^\alpha f)^\wedge = (-1)^{|\alpha|}(2\pi i x)^{|\alpha|}\widehat{f} \tag{2.1}$$

и $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ (теорема Планшереля).

Лемма 1. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и $\Delta f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Тогда*

$$\|f\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\|f\|_2\|\Delta f\|_2\big)^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала получим некоторый аддитивный аналог доказываемого неравенства с помощью рассуждений, аналогичных [1, p. 185]. Поскольку $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f$, то

$$\|f\|_\infty = \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\Bigg| \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(x,\xi)}(\mathcal{F}f)(\xi)\, d\xi\Bigg| \le \|\mathcal{F}f\|_1$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi}{1+|\xi|^4}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^4)|(\mathcal{F}f)(\xi)|\, d\xi\Bigg)^{1/2}$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi}{1+|\xi|^4}\Bigg)^{1/2}\Bigg[\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\, d\xi\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\xi|^4\ |(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\, d\xi\Bigg)^{1/2}\Bigg].$$

Здесь первый из интегралов легко вычисляется:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi}{1+|\xi|^4} = 4\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\xi_1\, d\xi_2}{1+(\xi_1^2+\xi_2^2)^2} = 2\pi\int\limits_0^{+\infty}\frac{r\, dr}{1+r^4} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Из (2.1) замечаем, что $(\mathcal{F}(\Delta f)) = -4\pi^2\|\xi\|^2\ (\mathcal{F}f)(\xi)$, а затем применяем теорему Планшереля. В результате приходим к неравенству

$$\|f\|_\infty \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big(\|f\|_2 + \frac{1}{4\pi^2}\|\Delta f\|_2\Big). \tag{2.2}$$

Теперь неравенство (2.2) переписываем в мультипликативном виде. Мы будем делать это теми же методами, какими аналогичное преобразование выполнялось при доказательстве неравенств типа Колмогорова в $\mathbb{R}$ (см., например, [11, § 2.4] и имеющиеся там ссылки). Для $h > 0$ полагаем $x_1 = ht_1, x_2 = ht_2$, где t_1, t_2 — новые переменные, и записываем неравенство (2.2) для функции $\varphi(t) = f(ht)$. С помощью замены переменных получаем $\|f\|_\infty = \|\varphi\|_\infty$, $\|f\|_2 = h\|\varphi\|_2$, $\|\Delta f\|_2 = h^{-1}\|\Delta\varphi\|_2$ и в результате приходим к неравенству

$$\|\varphi\|_\infty \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big(h\|\varphi\|_2 + \frac{1}{4h\pi^2}\|\Delta\varphi\|_2\Big), \tag{2.3}$$

в котором правую часть минимизируем по всем $h \in (0, +\infty)$. Простые вычисления показывают, что $h_0 = (1/2\pi)\|\Delta\varphi\|_2^{1/2}\|\varphi\|_2^{-1/2}$ является единственной точкой минимума и подстановка ее в правую часть неравенства (2.3) завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *и* $\Delta f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_2^2 \le 2\|f\|_2\|\Delta f\|_2, \quad j = 1, 2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Воспользовавшись (2.1) и теоремой Планшереля, имеем

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_2 = \Big\|\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)^\wedge\Big\|_2 = \|(-2\pi i x_j)\widehat{f}\|_2 = 2\pi\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x_j|^2\ |\widehat{f}(x_1, x_2)|^2\,dx_1\,dx_2\bigg)^{1/2}$$

$$= 2\pi\bigg(\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2}\frac{|x_j|}{\sqrt{1+(x_1^2+x_2^2)^2}}\bigg)\bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\widehat{f}(x)|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2}\|x\|^4\ |\widehat{f}(x)|^2\,dx\bigg\}^{1/2}$$

$$\le \pi\sqrt{2}\bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^2}|\widehat{f}(x)|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2}\|x\|^4|\widehat{f}(x)|^2\,dx\bigg\}^{1/2}.$$

Применяя неравенство Минковского, учитывая, что $(\Delta f)^\wedge = -4\pi^2\|x\|^2\widehat{f}$ и вновь используя теорему Планшереля, приходим к неравенствам

$$\Big\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\|_2 \le \pi\sqrt{2}\Big(\|f\|_2 + \frac{1}{4\pi^2}\|\Delta f\|_2\Big), \quad j = 1, 2. \tag{2.5}$$

Для того, чтобы завершить доказательство, переписываем эти неравенства в мультипликативной форме тем же методом, какой был использован при доказательстве леммы 1: в неравенствах (2.5) полагаем $f(ht) = \varphi(t)$, $h > 0$, с помощью замены переменных получаем $\|\partial f/\partial t_j\|_2 = \|\partial\varphi/\partial t_j\|_2$, $\|f\|_2 = h\|\varphi\|_2$, $\|\Delta f\|_2 = h^{-1}\|\Delta\varphi\|_2$, подставляем эти выражения в (2.5) и минимизируем правые части получившихся неравенств по всем $h \in (0, +\infty)$. В результате приходим к неравенствам (2.4). Лемма 2 доказана.

Далее нам нужны операторы Рисса, определяемые на классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ следующим образом (см., например, [10, с. 71–72]):

$$(R_j f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{y_j}{\|y\|^3}\ f(x-y)\,dy, \quad j = 1, 2,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. В [10, гл. 3, § 1] доказано, что

$$(R_j f)^\wedge(x) = i\frac{x_j}{\|x\|}\widehat{f}(x), \quad j = 1, 2, \tag{2.6}$$

где i — мнимая единица.

L_p-нормы операторов Рисса на классе $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ найдены Т. Иваничем и Г. Мартином [12], где доказано, что

$$\|R_j\|_{L_p}^{L_p} = \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2p}, & 1 \le p < 2, \\ \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2p}, & 2 \le p < \infty. \end{cases}$$

Для $p = 2$ из этого результата имеем

$$\|R_j\|_{L_2}^{L_2} = 1, \quad j = 1, 2. \tag{2.7}$$

Лемма А. *Для любой функции* $f \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$ *выполняются следующие неравенства*:

$$\Big\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Big\|_2 \le \|\Delta f\|_2, \tag{2.8}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right\|_2 \le \|\Delta f\|_2, \quad j = 1, 2. \tag{2.9}$$

Доказательство этой леммы получается объединением результатов [10, с. 73–74], соотношений (2.6) и факта плотности класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ в пространстве $W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Для удобства мы приводим это доказательство полностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала доказываем неравенства (2.8) и (2.9) для функций, принадлежащих классу $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Применив (2.1) и (2.6), имеем

$$\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\Big)^\wedge = -4\pi^2 x_1 x_2 \widehat{f}(x) = -\frac{ix_1}{\|x\|}\,\frac{ix_2}{\|x\|}(-4\pi^2\|x\|^2\widehat{f}) = -\frac{ix_1}{\|x\|}\,\frac{ix_2}{\|x\|}(\Delta f)^\wedge = -((R_1R_2)\Delta f)^\wedge.$$

Отсюда с помощью теоремы Планшереля и соотношений (2.7) получаем

$$\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\right\|_2 = \|(R_1R_2)\Delta f\|_2 \le \|R_1\|_{L_2}^{L_2}\cdot\|R_2\|_{L_2}^{L_2}\cdot\|\Delta f\|_2 = \|\Delta f\|_2.$$

Доказательства неравенств (2.9) получаются тем же методом с заменой произведения переменных x_1x_2 на их квадраты x_1^2 и x_2^2 соответственно.

Теперь переходим к функциям из пространства Соболева $W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Известно (см., например, [1, p. 41]), что пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ при всех значениях $n \ge 1$, $p \in [1,\infty)$, $l \in \mathbb{N}$. Поэтому для любой функции $f \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$ можно указать такую последовательность функций $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$: $\forall m \ge m_0$ выполняется неравенство

$$\|f_m - f\|_2 + \sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha(f_m - f)\|_2 < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|f_m - f\|_2 < \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_1\partial x_2}\right\|_2 < \ \varepsilon, \quad \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_j^2}\right\|_2 < \varepsilon, \quad j = 1, 2.$$

Тогда $\Delta f_m \to \Delta f$ при $m \to +\infty$ в смысле L_2-нормы, поскольку

$$\|\Delta(f_m - f)\|_2 \le \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_1^2}\right\|_2 + \left\|\frac{\partial^2(f_m - f)}{\partial x_2^2}\right\|_2 < \ 2\varepsilon.$$

Остается записать неравенства (2.8) и (2.9) для элементов последовательности $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ и перейти к пределу при $m \to +\infty$. Лемма A доказана.

Следующее утверждение является частным случаем [13, лемма 1].

Лемма B. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутый квадрат со сторонами длины $h > 0$, $\|f\|_{L_2(Q)} = \Big(\int_Q |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$ и $W_2^2(Q)$ — пространство Соболева на Q с нормой $\|f\|_{2,2,Q} = \|f\|_{L_2(Q)} + \sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha f\|_{L_2(Q)}$. Тогда для любой функции $f \in W_2^2(Q)$ и любой точки x_0 из квадрата Q выполняется неравенство*

$$\|f\|_{L_2(Q)} \le h|f(x_0)| + h\Big(\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_{L_2(Q)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_{L_2(Q)}\Big) + \frac{h^2}{\sqrt{2}}\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha f\|_{L_2(Q)}. \tag{2.10}$$

В связи с неравенством (2.10) отметим следующее. В работе [13] более общее неравенство доказано без указания явного вида констант перед нормами производных в правой части. Однако в тексте этой работы, предваряющем ее результаты, авторы пишут, что если проследить за тем, как возникают константы в процессе доказательства, можно выписать для них некоторые оценки. Именно в результате такого анализа мы получили множители перед нормами производных во втором и третьем слагаемых правой части неравенства (2.10).

Утверждение 1. *Справедливо неравенство*

$$A_2(\mathbb{R}^2) \geq \frac{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выбираем последовательность $\widetilde{z} = \{\widetilde{z}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ такую, что

$$\widetilde{z}_{j,k} = \begin{cases} 1, & (j,k) = (0,0), \\ 0, & (j,k) \neq (0,0). \end{cases}$$

Так как $\|\widetilde{z}\|_{l_2(\mathbb{Z}^2)} = 1$, то $\widetilde{z} \in \mathfrak{M}_2$, и потому

$$A_2(\mathbb{R}^2) \geq \inf_{u\in Y_2(\widetilde{z})} \|\Delta u\|_2. \tag{2.11}$$

Пусть $u \in Y_2(\widetilde{z})$ — произвольный интерполянт для $\widetilde{z}$. Применяя лемму 1, получаем

$$\|\Delta u\|_2 \geq \frac{2\ \|u\|_\infty^2}{\|u\|_2} \geq \frac{2}{\|u\|_2} \sup_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |u(j,k)| = \frac{2}{\|u\|_2}. \tag{2.12}$$

Теперь $\|u\|_2$ оцениваем сверху. Разбиваем $\mathbb{R}^2$ на единичные замкнутые квадраты с целочисленными вершинами

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} Q_{j,k}, \quad Q_{j,k} = [j, j+1] \times [k, k+1].$$

При таком разбиении любые два соседних квадрата пересекаются только по их общей стороне, и в каждом квадрате имеются точки, в которых интерполянт u обращается в нуль.

Фиксируем произвольный квадрат $Q = Q_{j,k}$ и к нему применяем лемму B, выбрав в качестве точки x_0 любую из его вершин, в которой интерполирующая функция u принимает нулевое значение. В результате имеем

$$\|u\|_{L_2(Q)} \leq \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_2(Q)}.$$

После возведения этого неравенства в квадрат получаем

$$\|u\|_{L_2(Q)}^2 \leq (W_1(Q))^2 + \frac{1}{2}(W_2(Q))^2 + \sqrt{2}\ W_1(Q)W_2(Q), \tag{2.13}$$

где

$$W_1(Q) = \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|_{L_2(Q)} + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)}, \quad W_2(Q) = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|_{L_2(Q)}.$$

Применение простого числового неравенства $2ab \leq a^2 + b^2$ дает

$$(W_1(Q))^2 \leq 2\Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)}^2\Big),$$

$$(W_2(Q))^2 \leq 4\ \Big(\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + 2\ \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + \Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big\|_{L_2(Q)}^2\Big),$$

$$W_1(Q)\ W_2(Q) \leq \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + 2\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + 4\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\Big\|_{L_2(Q)}^2 + 2\Big\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\Big\|_{L_2(Q)}^2.$$

Заменяем в неравенстве (2.13) величины $(W_1(Q))^2$, $(W_2(Q))^2$ и $W_1(Q)W_2(Q)$ на правые части полученных неравенств, суммируем по всем квадратам из выбранного разбиения, а затем оцениваем L_2-нормы производных первого порядка с помощью леммы 2, а L_2-нормы производных второго порядка — с помощью леммы A. В результате получаем

$$\|u\|_2^2 - 4\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})\|u\|_2\,\|\Delta u\|_2 - 8(1+\sqrt{2})\|\Delta u\|_2^2 \le 0.$$

Обозначив $\tau = \|u\|_2/\|\Delta u\|_2$, после простых преобразований приходим к квадратному неравенству

$$\tau^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tau - \frac{1}{8(1+\sqrt{2})} \ge 0,$$

которое выполняется только для $\tau \ge \dfrac{\sqrt[4]{2}-1}{2\sqrt{2}}$. Тем самым установлено, что

$$\|u\|_2 \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}-1}\,\|\Delta u\|_2.$$

Возвращаясь к (2.12), получаем, что для любого интерполянта $u \in Y_2(\widetilde{z})$ справедлива оценка

$$\|\Delta u\|_2 \ge \frac{\sqrt{\sqrt[4]{2}-1}}{\sqrt[4]{2}}\,.$$

Обращение к неравенству (2.11) завершает доказательство. Утверждение 1 доказано. □

Теперь получим оценку сверху величины $A_2(\mathbb{R}^2)$.

Утверждение 2. *Справедливо неравенство*

$$A_2(\mathbb{R}^2) \le \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-v}(v+8)^2(v^2+2v-16)^2\,dv\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathfrak{M}_2$ — произвольная последовательность интерполируемых данных, $G(z,\cdot) \in Y_2(z)$ — какая-либо функция, интерполирующая эту последовательность. Тогда

$$A_2(\mathbb{R}^2) \le \sup_{z\in\mathfrak{M}_2} \|\Delta G(z,\cdot)\|_2. \tag{2.14}$$

Будем строить интерполянт $G(z,\cdot)$ тем же методом, который мы применяли в разд. 1. Определяем семейство функций $g_j(x), (j \in \mathbb{Z}^2)$ следующим образом:

$$g_j(x) = \begin{cases} c_j\, e^{\frac{1}{\|x-j\|^2-1/4}}, & \text{если } \|x-j\| \le 1/2,\\ 0, & \text{если } \|x-j\| > 1/2,\end{cases}$$

где константы c_j $(j \in \mathbb{Z}^2)$ находим из условий интерполяции $g_j(j) = z_j$. В результате получаем $c_j = e^4\, z_j$. Затем строим функцию $G(z,\cdot)$ с помощью функций $g_j(x)$, полагая

$$G(z,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} g_j(x).$$

Вычислениями проверяется, что $G(z,\cdot) \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$. Теперь к функции G применяем оператор Лапласа

$$\|\Delta G\|_2 = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\int\limits_{\|x-j\|\le 1/2} |\Delta g_j(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = e^4\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} z_j^2 \int\limits_{\|x-j\|\le\ 1/2}\left|\Delta\left(e^{\frac{1}{\|x-j\|^2-1/4}}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Непосредственными вычислениями проверяется равенство

$$\Delta\big(e^{\frac{1}{\|x-j\|^2-1/4}}\big) = \frac{64\, e^{\frac{4}{4\|x-j\|^2-1}}}{(4\|x-j\|^2-1)^4}\,\big(16\|x-j\|^4+16\|x-j\|^2-1\big).$$

Воспользовавшись этим равенством и выполнив в последнем интеграле замену $y = x - j$, получаем

$$\|\Delta G\|_2 = 64\|z\|_{l_2(\mathbb{Z}^2)}\Bigg\{\int\limits_{\|y\|\le 1/2} e^{\frac{4}{4\|y\|^2-1}}\bigg(\frac{16\|y\|^4+16\|y\|^2-1}{4(\|y\|^2-1)^4}\bigg)^2 dy\Bigg\}^{1/2}.$$

Теперь учитываем, что $\|z\|_{l_2(\mathbb{Z}^2)} \le 1$, переходим в интеграле к полярным координатам (r,φ) и затем полагаем $r^2 = t$. В результате приходим к неравенству

$$\|\Delta G\|_2 \le 64e^4\sqrt{\pi}\Bigg(\int\limits_0^{1/4} e^{\frac{8}{4t-1}}\,\frac{(16t^2+16t-1)^2}{(4t-1)^8}\,dt\Bigg)^{1/2}.$$

Интеграл преобразуем с помощью замены переменной $v = 32t/(1-4t)$ и получаем

$$\|\Delta G(z,\cdot)\|_2 \le \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}\sqrt{I},$$

где

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-v}(v+8)^2(v^2+4v-16)^2\,dv.$$

Обращение к (2.14) завершает доказательство утверждения 2. □

Заметим, что интеграл в правой части утверждения 2 представляет собой конечную сумму Г-функций Эйлера, умноженных на некоторые константы, в чем нетрудно убедиться возведением в квадрат и перемножением выражений, стоящих в круглых скобках под знаком интеграла.

Константы в правых частях утверждений 1 и 2 можно найти численно. В результате получаем границы, в пределах которых находится исследуемая величина $A_2(\mathbb{R}^2)$:

$$0.36576\ldots \le A_2(\mathbb{R}^2) \le 19.34534\ldots\ .$$

Эти численные результаты получены с помощью системы символьных вычислений Maple 17 (см. [14]). Точное значение величины $A_2(\mathbb{R}^2)$ неизвестно.

Заметим, что для получения оценки сверху величины $A_2(\mathbb{R}^2)$ можно было бы использовать вместо функций g_j функции f_j, которые применялись в разд. 1 настоящей работы. Однако вычисления показывают, что, применяя функции f_j, мы получаем худшую оценку сверху по сравнению с найденной в утверждении 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Burenkov V.I.** Sobolev spaces on domains. Stuttgart: B. G. Teubner Verlag GmbH, 1998. 312 p. (Teubner Texts in Math; vol. 137.)
2. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.
3. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
4. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, no. 1. P. 83–96.

5. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
7. **Novikov S.I.** Interpolation in $\mathbb{R}^2$ with minimum value of the uniform norm of the Laplace operator // J. Math. and System Science. 2013. Vol. 3, no. 2. P. 55–61.
8. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1988. 336 с.
9. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.
10. **Стейн И.М.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973. 344 с.
11. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
12. **Iwaniec T., Martin G.** Riesz transforms and related singular integrals // J. Reine Angew. Math. 1996. Vol. 473, no. 1. P. 25–57.
13. **Madych W.R., Potter E.H.** An estimate of multivariate interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 43, no. 2. P. 132–139.
14. Maplesoft [site]: Maple 17.
URL: http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=updates/Maple17 .

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 21.01.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ МУЛЬТИВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева

В работе приведен метод построения биортогональных базисов мультивсплесков по известным базисам мультимасштабирующих функций. Этот способ подобен способу, приведенному в моей совместной с Н. И. Черных статье 2014 г., и основан на том же принципе: в случае построения мультивсплесков на основе k мультимасштабирующих функций используется аналог векторного произведения векторов в $2k$-мерном пространстве.

Ключевые слова: мультивспеск, маска, биортогональный базис, масштабирующая функция, кратномасштабный анализ.

E. A. Pleshcheva. Biorthogonal bases of multiwavelets.

A method for the construction of biorthogonal bases of multiwavelets from known bases of multiscaling functions is given. It is similar to the method presented in my 2014 paper coauthored with N.I. Chernykh and is based on the same principle: in the construction of multiwavelets based on k multiscaling functions, an analog of the vector product of vectors in a $2k$-dimensional space is used.

Keywords: multiwavelet, mask, biorthogonal basis, scaling function, multiresolution analysis.

Введение

В работе строятся биортогональные базисы пространств мультивсплесков. Пусть имеется две двойственные системы вложенных подпространств пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z}), \quad \ldots \subset \widetilde{V}_j \subset \widetilde{V}_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z})$$

такие, что биортогональные базисы пространств $V_j, \widetilde{V}_j$ образованы соответственно сдвигами и сжатиями рисовских систем $\{2^{j/2}\varphi^l(2^jx-n)\colon l=\overline{1,k}, n \in \mathbb{Z}\}, \{2^{j/2}\widetilde{\varphi}^l(2^jx-n)\colon l=\overline{1,k}, n \in \mathbb{Z}\}$ k мультимасштабирующих функций $\{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^k\}$, $\{\widetilde{\varphi}^1, \widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^k\}$ из $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$.

На основе таких систем функций в статье построены функции-мультивсплески $\{\psi^l(x)\colon l = \overline{1,k}\}, \{\widetilde{\psi}^l(x)\colon l=\overline{1,k}\}$ такие, что их сдвиги и сжатия порождают биортогональные базисы систем пространств всплесков $W_j, \widetilde{W}_j$ размерности $k>1$. Здесь, как и в случае $k=1$ (см., например, [2, гл. 3]), пространства всплесков обладают следующими свойствами:

1) $W_j \perp \widetilde{V}_j$, $\widetilde{W}_j \perp V_j$;

2) $V_j \bigoplus W_j = V_{j+1}$, $\widetilde{V}_j \bigoplus \widetilde{W}_j = \widetilde{V}_{j+1}$. Здесь $\bigoplus$ — прямая сумма подпространств.

Как отмечал Кейнерт [3, гл. 10], существуют способы построения мультивсплесков по известным мультимасштабирующим функциям, удовлетворяющим “минимальным условиям регулярности”. При дополнительных ограничениях на масштабирующие функции, например, если маски являются тригонометрическими полиномами, т. е. масштабирующие функции имеют компактный носитель [4], или в случае, когда масштабирующие функции симметричны [5], некоторые методы построения биортогональных базисов мультивсплесков, отличные от наших, были получены ранее.

Приведенный в работе новый метод построения биортогональных систем мультивсплесков по биортогональным системам мультимасштабирующих функций не использует никаких дополнительных ограничений на мультимасштабирующие функции, кроме естественных необходимых, указанных в первом абзаце, и является универсальным. Основным результатом статьи

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

является алгоритм, применяя который к заданным мультимасштабирующим биортогональным системам функций, порождающим базисы подпространств $V_j, \widetilde{V}_j$, получим биортогональные системы базисов пространств мультивсплесков.

Введем следующие обозначения:

$g_{j,n}(x) = 2^{j/2}g(2^j x - n)$; для скалярных и вектор-функций $g(x)$;

$\widehat{g}(\omega) = \mathbf{L}^2\text{-}\lim_{R\to\infty}\displaystyle\int_R^{-R} g(x)e^{-2\pi i x\omega}dx$ — преобразование Фурье в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

$\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)}dx$ — скалярное произведение функций в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$;

$\mathbf{L}^2[0,1]$ — пространство 1-периодических интегрируемых с квадратом на $[0,1]$ функций;

$A^* = (\overline{A})^T$ — транспонированная комплексно сопряженная матрица для матрицы A;

$(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_m v_m$ — скалярное произведение m-мерных векторов в l^2_m;

$\langle A(x), B(x)\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} A(x)B^*(x)dx.$

1. Пространства КМА размерности k

Введем следующее определение.

Определение. Последовательность вложенных друг в друга замкнутых подпространств

$$\ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z}) \tag{1.1}$$

пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ называется его кратномасштабным анализом размерности k (КМА$_k$), если удовлетворяет следующим условиям:

а) $\overline{\bigcup_j V_j} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$; б) $\bigcap_j V_j = \{0\}$; в) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow \forall l \in \mathbb{Z}\ \ f(x - l/2^j) \in V_j$; г) $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{Z}\ \ f(2^j x) \in V_j$; д) найдутся такие функции $\varphi^s(x),\ s = \overline{1,k}$ из $V_0 \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, что множество их целочисленных сдвигов $\varphi^s(x-n),\ s = \overline{1,k},\ n \in \mathbb{Z}$, образует базис Рисса пространства V_0.

Функции $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)$ называются *мультимасштабирующими*, если $\varphi^s(x) = \sum_{r=1}^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n^{s,r}\varphi_{1,n}(x)$.

Двойственный базис к базису из пункта д) состоит из целочисленных сдвигов функций $\widetilde{\varphi}^1(x), \widetilde{\varphi}^2(x), \ldots, \widetilde{\varphi}^k(x)$.

Ему соответствует система вложенных подпространств, также образующих КМА$_k$,

$$\ldots \subset \widetilde{V}_j \subset \widetilde{V}_{j+1} \subset \ldots \ (j \in \mathbb{Z}) \tag{1.2}$$

пространства $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, которая называется *двойственной системой подпространств.*

Системы $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)$ и $\widetilde{\varphi}^1(x), \widetilde{\varphi}^2(x), \ldots, \widetilde{\varphi}^k(x)$ называются *биортогональными*, если для них выполняется

$$\langle \varphi^r_{j,n}(x), \widetilde{\varphi}^s_{j,l}(x)\rangle = \delta_{r,s}\delta_{n,l}, \quad r, s = \overline{1,k}, \quad n, l \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Для выполнения условий вложения пространств (1.1), (1.2) необходимо выполнение масштабирующих соотношений. Выпишем масштабирующие соотношения для функций, образующих базисы пространств КМА$_k$ и двойственных пространств, в векторной форме. Для этого введем масштабирующие вектор-функции

$$\overset{(\sim)}{\Phi}(x) = \Big(\overset{(\sim)}{\varphi}{}^1(x), \overset{(\sim)}{\varphi}{}^2(x), \ldots, \overset{(\sim)}{\varphi}{}^k(x)\Big)^T,$$

где с помощью верхнего символа $^{(\sim)}$ введено для краткости одновременно две формулы: соответственно для $\Phi(x), \varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x)$ и $\widetilde{\Phi}(x), \widetilde{\varphi}^1(x), \widetilde{\varphi}^2(x), \ldots, \widetilde{\varphi}^k(x)$. Этот прием применяется и всюду далее.

Компоненты вектор-функций $\overset{(\sim)}{\Phi}_{j,n}(x) = 2^{j/2}\overset{(\sim)}{\Phi}(2^j x - n)$ образуют базисы Рисса пространств $\overset{(\sim)}{V}_j$. В терминах вектор-функций $\Phi(x), \widetilde{\Phi}(x)$ масштабирующие соотношения выглядят следующим образом:

$$\overset{(\sim)}{\Phi}(x) \overset{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overset{(\sim)}{H}_n \overset{(\sim)}{\Phi}_{1,n}(x) \tag{1.4}$$

с матричными коэффициентами

$$\overset{(\sim)}{H}_n = \begin{pmatrix} \overset{(\sim)}{h}{}^{1,1}_n & \overset{(\sim)}{h}{}^{1,2}_n & \dots & \overset{(\sim)}{h}{}^{1,k}_n \\ \overset{(\sim)}{h}{}^{2,1}_n & \overset{(\sim)}{h}{}^{2,2}_n & \dots & \overset{(\sim)}{h}{}^{2,k}_n \\ \dots \\ \overset{(\sim)}{h}{}^{k,1}_n & \overset{(\sim)}{h}{}^{k,2}_n & \dots & \overset{(\sim)}{h}{}^{k,k}_n \end{pmatrix}$$

и с покомпонентной сходимостью в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ рядов, составляющих (1.4).

После преобразования Фурье равенства (1.4) принимают вид

$$\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}(\omega) = \overset{(\sim)}{M}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{1.5}$$

где

$$\widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}(\omega) = \Big(\widehat{\overset{(\sim)}{\varphi}{}^1}(\omega), \widehat{\overset{(\sim)}{\varphi}{}^2}(\omega), \dots, \widehat{\overset{(\sim)}{\varphi}{}^k}(\omega)\Big)^T,$$

$$\overset{(\sim)}{M}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overset{(\sim)}{H}_n e^{-2\pi i n\omega} = \begin{pmatrix} \overset{(\sim)}{m}{}^{1,1}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,2}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,k}(\omega) \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{2,1}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,2}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,k}(\omega) \\ \dots \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{k,1}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,2}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,k}(\omega) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Функции $\overset{(\sim)}{m}{}^{r,s}(\omega)$ — 1-периодические из пространства $\mathbf{L}^2[0,1]$. Матрицы $M(\omega), \widetilde{M}(\omega)$ называют *масками систем мультимасштабирующих функций.*

Пусть

$$\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}(\omega) = \Big[\overset{(\sim)}{M}(\omega); M\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big]$$

$$= \begin{pmatrix} \overset{(\sim)}{m}{}^{1,1}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,k}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,1}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{1,k}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{2,1}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,k}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,1}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{2,k}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) \\ \dots \\ \overset{(\sim)}{m}{}^{k,1}(\omega) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,k}(\omega) & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,1}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) & \dots & \overset{(\sim)}{m}{}^{k,k}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Хорошо известно, что условия биортогональности (1.3) эквивалентны условию

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Phi}(\omega - l)[\widehat{\widetilde{\Phi}}(\omega - l)]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I, \tag{1.8}$$

где I — единичная матрица размерности k.

Отсюда следует необходимое условие биортогональности (1.3) в терминах функций $M(\omega)$, $\widetilde{M}(\omega)$ (см., например, [5]): $M(\omega)\big(\widetilde{M}(\omega)\big)^* + M\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big(\widetilde{M}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big)^* = 1$ Перепишем теперь это условие в терминах функций $\mathfrak{M}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}(\omega)$ по аналогии с [1]:

$$\mathfrak{M}(\omega)(\widetilde{\mathfrak{M}}(\omega))^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{1.9}$$

2. Базисы пространств мультивсплесков

Построим пространства мультивсплесков $W_j, \widetilde{W}_j$ со свойствами

$$W_j \perp \widetilde{V}_j, \widetilde{W}_j \perp V_j, W_j \bigoplus V_j = V_{j+1}, \widetilde{W}_j \bigoplus \widetilde{V}_j = \widetilde{V}_{j+1}.$$

При этом требуется, чтобы базисы пространств W_j были образованы сдвигами k функций $\psi^1_{j,n}, \ldots, \psi^k_{j,n}$, а базисы пространств $\widetilde{W}_j$ — сдвигами k функций $\widetilde{\psi}^1_{j,n}, \ldots, \widetilde{\psi}^k_{j,n}$, которые между собой биортогональны, т. е. $\langle \psi^r(x), \widetilde{\psi}^s(x-n) \rangle = \delta_{r,s}\delta_{0,n},\ r,s = \overline{1,k},\ n \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\Psi(x)$ вектор-столбец

$$\Psi(x) = \Big(\psi^1(x), \psi^2(x), \ldots, \psi^k(x)\Big)^T, \quad \psi^s(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}), \quad s = \overline{1,k}, \tag{2.1}$$

и через $\widetilde{\Psi}(x)$ двойственную вектор-функцию

$$\widetilde{\Psi}(x) = \Big(\widetilde{\psi}^1(x), \widetilde{\psi}^2(x), \ldots, \widetilde{\psi}^k(x)\Big)^T, \quad \widetilde{\psi}^s(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}), \quad s = \overline{1,k}. \tag{2.2}$$

Для них должно быть справедливо равенство $\langle \Psi(x), \widetilde{\Psi}(x-n) \rangle = I\delta_{0,n}$ или, что эквивалентно, условие, аналогичное условию (1.8):

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(\omega - l)[\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega - l)]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{2.3}$$

Достаточно построить такие базисы пространств $W_0, \widetilde{W}_0$. Для того чтобы функции ψ^s принадлежали пространству W_0, требуется выполнение следующих условий:

1) $\psi^s \in V_1$;
2) $\psi^s \perp \widetilde{\varphi}^r, r, s = \overline{1,k}$.

Аналогично функции $\widetilde{\psi}^s$ из пространства $\widetilde{W}_0$ должны удовлетворять условиям

1) $\widetilde{\psi}^s \in \widetilde{V}_1$;
2) $\widetilde{\psi}^s \perp \varphi^r,\ r,s = \overline{1,k}$.

Условия 1) означают, что $\overset{(\sim)}{\Psi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overset{(\sim)}{H}{}^{\psi}_n \overset{(\sim)}{\Phi}_{1,n}(x)$, где $H^\psi_n, \widetilde{H}^\psi_n$ — матрицы коэффициентов размерности $n \times n$. После преобразования Фурье данные выражения примут вид

$$\widehat{\overset{(\sim)}{\Psi}}(\omega) = \overset{(\sim)}{M}{}^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) \widehat{\overset{(\sim)}{\Phi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \tag{2.4}$$

Здесь матрицы $\overset{(\sim)}{M}_\psi(\omega)$ и $\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}_\psi(\omega)$ имеют ту же структуру, что и матрицы в (1.6) и (1.7):

$$\overset{(\sim)}{\mathfrak{M}}_\psi(\omega) = \Big[\overset{(\sim)}{M}_\psi(\omega), \overset{(\sim)}{M}_\psi\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big]. \tag{2.5}$$

Обратим внимание на отличие формул (2.4) от (1.5): (1.5) отражает свойства вектор-функции Φ $(\widetilde{\Phi})$, а (2.4) отражает связь между Φ $(\widetilde{\Phi})$ и Ψ $(\widetilde{\Psi})$.

Покажем, каким условиям должны удовлетворять матрицы $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$, чтобы выполнялись условия 2) и условия биортогональности для функций $\psi^s, \widetilde{\psi}^r$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* КМА$_k$ *и двойственный порождены биортогональными системами для функций* $\{\varphi^s(x), s = \overline{1,k}\}, \{\widetilde{\varphi}^s(x), s = \overline{1,k}\}$. *Тогда для биортогональности систем* $\{\psi^s(x), s = \overline{1,k}\}$, $\{\widetilde{\psi}^s(x), s = \overline{1,k}\}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\mathfrak{M}^\psi(\omega)(\widetilde{\mathfrak{M}}^\psi(\omega))^* \overset{\textit{п.в.}}{=} I, \tag{2.6}$$

а для ортогональности пространств W_0 *и* $\widetilde{V}_0$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\mathfrak{M}^{\psi}(\omega)(\widetilde{\mathfrak{M}}(\omega))^* \overset{п.в.}{=} \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

для ортогональности пространств $\widetilde{W}_0$ *и* V_0 *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{\psi}(\omega)(\mathfrak{M}(\omega))^* \overset{п.в.}{=} \mathbf{0}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{0}$ *— нулевая матрица размерности* $k \times k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требование (2.3) с учетом (2.4) и $(AB)^* = B^*A^*$ можно переписать в виде

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(\omega-l)\Big[\widehat{\widetilde{\Psi}}(\omega-l)\Big]^* = \sum_{l\in\mathbb{Z}} M^{\psi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big[\widehat{\widetilde{\Phi}}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^*\Big[\widetilde{M}^{\psi}\Big(\frac{\omega-l}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} I. \tag{2.9}$$

Разложение последней суммы по известной схеме на две, по четным и по нечетным l, вместе с (1.8) влечет

$$I \overset{\text{п.в.}}{=} M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[\widetilde{M}^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* + M^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big[\widetilde{M}^{\psi}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Big]^*. \tag{2.10}$$

Эти рассуждения, очевидно, обратимы: (2.10) с учетом равенства (1.8) при ω и $\omega + 1/2$ влечет (2.9), т. е. (2.3).

Легко проверить, что равенство (2.10) после замены $\omega/2$ на ω в терминах матриц $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}^{\psi}(\omega)$ переписывается в эквивалентной форме (2.6). Действительно, например, первый элемент первой строки этой матрицы равен

$$\sum_{s=1}^{k} m_{\psi}^{1,s}(\omega)\overline{\widetilde{m}_{\psi}^{1,s}(\omega)} + \sum_{s=1}^{k} m_{\psi}^{1,s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\overline{\widetilde{m}_{\psi}^{1,s}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)},$$

где первая и вторая суммы являются первыми элементами первой строки матриц $M(\omega)[\widetilde{M}(\omega)]^*$ и $M^{\psi}(\omega+1/2)\big[\widetilde{M}^{\psi}(\omega+1/2)\big]^*$ соответственно. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Аналогично доказываются остальные утверждения. □

3. Конструкция базисов мультивсплесков

Пусть заданы матрицы $\mathfrak{M}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}(\omega)$, определенные в (1.7). Построим по ним матрицы $\mathfrak{M}^{\psi}(\omega), \widetilde{\mathfrak{M}}^{\psi}(\omega)$, удовлетворяющие теореме 1. Начнем со случая $k = 2$, а далее распространим метод на все четные k. Для этого рассмотрим следующий определитель:

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ a^1(\omega) & a^2(\omega) & a^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & a^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\overrightarrow{i_s}$ — орты, $\overrightarrow{i_1} = (1,0,0,0), \ldots, \overrightarrow{i_4} = (0,0,0,1)$, $m^{r,s}(\omega)$ — элементы маски $M(\omega)$; вектор $\overrightarrow{a(\omega)} = \Big(a^1(\omega), a^2(\omega), a^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), a^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)$ линейно независим с векторами

$$\overrightarrow{\overline{m}_1(\omega)} = \Big(\overline{m^{1,1}}(\omega), \overline{m^{1,2}}(\omega), \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$\overrightarrow{\overline{m}_2(\omega)} = \Big(\overline{m^{2,1}}(\omega), \overline{m^{2,2}}(\omega), \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

а в остальном функции $a^1(\omega), a^2(\omega)$ — произвольные 1-периодические из $\mathbf{L}^2[0,1)$. Легко видеть, что получившийся вектор $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$ ортогонален в пространстве l_4^2 векторам $\overrightarrow{m^1(\omega)}$, $\overrightarrow{m^2(\omega)}$.

Если положить $\overrightarrow{\widetilde{m}^1_\psi(\omega)} = \Big(\widetilde{m}^{2,1}_\psi(\omega), \widetilde{m}^{2,2}_\psi(\omega), \widetilde{m}^{2,1}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \widetilde{m}^{2,2}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)$ равным вектору $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$, это обеспечит первую нулевую строку в левой части (2.8).

Аналогично построим вектор $\overrightarrow{b_1(\omega)}$:

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}^1(\omega) & \widetilde{a}^2(\omega) & \widetilde{a}^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

при этом функции $\widetilde{a}^1(\omega), \widetilde{a}^2(\omega)$ таковы, что вектор $\Big(\widetilde{a}^1(\omega), \widetilde{a}^2(\omega), \widetilde{a}^1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \widetilde{a}^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big)$, линейно независим с векторами

$$\overrightarrow{\overline{\widetilde{m}}_1(\omega)} = \Big(\overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big),$$

$$\overrightarrow{\overline{\widetilde{m}}_2(\omega)} = \Big(\overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega), \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big).$$

Нормируем получившийся вектор в соответствии с условием, налагаемым (2.6) на первый элемент матрицы $\mathfrak{M}^\psi[\widetilde{\mathfrak{M}}^\psi]^*$. Положим $\overrightarrow{m^1_\psi(\omega)} := \Big(m^{2,1}_\psi(\omega), m^{2,2}_\psi(\omega), m^{2,1}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big), m^{2,2}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big) = c(\omega)\overrightarrow{b_1(\omega)}$, где $c(\omega) = \dfrac{1}{(\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}, \overrightarrow{b_1(\omega)})}$, т. е.

$$\overrightarrow{m^2_\psi(\omega)} = \frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{(\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}, \overrightarrow{b_1(\omega)})}.$$

Чтобы получить векторы $\overrightarrow{m^2_\psi(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}^2_\psi(\omega)}$, перепишем определители (3.1), (3.2), подставив в них векторы $\overrightarrow{m^1_\psi(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}^1_\psi(\omega)}$.

Тогда получим

$$\overrightarrow{\widetilde{m}^2_\psi(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m}^{1,1}_\psi(\omega) & \overline{m}^{1,2}_\psi(\omega) & \overline{m}^{1,1}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m}^{1,2}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\overrightarrow{m^2_\psi(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega+\frac{1}{2}) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \\ \overline{m}^{1,1}_\psi(\omega) & \overline{m}^{1,2}_\psi(\omega) & \overline{m}^{1,1}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) & \overline{m}^{1,2}_\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Легко проверить, что определенные таким образом векторы $\overrightarrow{m_\psi^s(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^s(\omega)}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, следовательно, по таким $\overrightarrow{m_\psi^s(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^s(\omega)}$ восстанавливаются функции $\psi^s(x), \widetilde{\psi}^s(x)$ по их преобразованию Фурье (2.4).

Построим базисы мультивсплесков для случая $k=3$ и метод их построения распространим на все нечетные k.

Рассмотрим вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,3}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,3}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{3,1}}(\omega) & \overline{m^{3,2}}(\omega) & \overline{m^{3,3}}(\omega) & \overline{m^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_1^1(\omega) & a_1^2(\omega) & a_1^3(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_1^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_1^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_2^1(\omega) & a_2^2(\omega) & a_2^3(\omega) & a_2^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_2^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & a_2^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Построенную 1-периодическую по ω вектор-функцию $\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)} = (\widetilde{b}_1^1(\omega), \widetilde{b}_1^2(\omega), \ldots, \widetilde{b}_1^6(\omega))$ нельзя положить равной $\Big(\widetilde{m}_\psi^{1,1}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{1,2}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{1,3}(\omega), \widetilde{m}_\psi^{1,1}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big), \widetilde{m}_\psi^{1,2}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big), \widetilde{m}_\psi^{1,3}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big)\Big)$, как было при $k=2$, так как в силу нечетности числа перестановок столбцов алгебраических дополнений элементов первой строки матрицы в правой части равенства (3.5) будем иметь равенства $\widetilde{b}_1^s\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) = -\widetilde{b}_1^{3+s}(\omega)$, $s=1,2,3$, а не $\widetilde{b}_1^{3+s}(\omega)$. Преобразуем вектор $\overrightarrow{\widetilde{b}_1}(\omega)$ так, чтобы он удовлетворял нужному условию. Для этого умножим его на функцию $\lambda_1(\omega)$ с условием

$$\lambda_1(\omega) = -\lambda_1\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big). \tag{3.6}$$

Вектор $\lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)}$ в l_6^2 ортогонален всем $\overrightarrow{m^s(\omega)}$, $s=1,2,3$, и определяет вектор

$$\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)} := \lambda_1(\omega)\overrightarrow{\widetilde{b_1}(\omega)} = \big(\lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^1(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^2(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^3(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^4(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^5(\omega), \lambda_1(\omega)\widetilde{b}_1^6(\omega)\big).$$

Построим теперь вектор-функцию $\overrightarrow{b_1(\omega)} = (b_1^1(\omega), b_1^2(\omega), \ldots, b_1^6(\omega))$:

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{3,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}_1^1(\omega) & \widetilde{a}_1^2(\omega) & \widetilde{a}_1^3(\omega) & \widetilde{a}_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_1^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_1^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}_2^1(\omega) & \widetilde{a}_2^2(\omega) & \widetilde{a}_2^3(\omega) & \widetilde{a}_2^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_2^2\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \widetilde{a}_2^3\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Вектор-функцию $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)}$, для которой выполняются условия 1-периодичности компонент и условия биортогональности (2.6), получим из вектор-функции $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)} = \frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{\lambda_1(\omega)(\overrightarrow{\widetilde{b_1}}, \overrightarrow{b_1})}.$$

Подставим теперь функцию-строку $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)}$ в определитель (3.7) вместо строки $\overrightarrow{\widetilde{a}_1(\omega)}$, а функцию-строку $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)}$ в определитель (3.5) вместо строки $\overrightarrow{a_1(\omega)}$. Результаты обозначим соответственно как $\overrightarrow{b_2}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_2}$. По ним построим вектор-функции $\overrightarrow{m_\psi^2(\omega)}$ и $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)}$ по формулам

$$\overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} = \lambda_2(\omega)\overrightarrow{b_2}; \qquad \overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)} = \frac{\overrightarrow{\widetilde{b}_2}}{\lambda_2(\omega)(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{\widetilde{b}_2})}.$$

Функция $\lambda_2(\omega)$, как и $\lambda_1(\omega)$, является 1-периодической и обладает свойством $\lambda_2(\omega) = -\lambda_2(\omega + 1/2)$.

Наконец, построим вектор-функции $\overrightarrow{b_3}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_3}$, используя уже найденные $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)}$, $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)}$ и $\overrightarrow{m_\psi^2(\omega)}$:

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_3(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \overline{m^{1,2}}(\omega) & \overline{m^{1,3}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{2,1}}(\omega) & \overline{m^{2,2}}(\omega) & \overline{m^{2,3}}(\omega) & \overline{m^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m^{3,1}}(\omega) & \overline{m^{3,2}}(\omega) & \overline{m^{3,3}}(\omega) & \overline{m^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m_\psi^{1,1}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,2}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,3}}(\omega) & \overline{m_\psi^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m_\psi^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m_\psi^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{m_\psi^{2,1}}(\omega) & \overline{m_\psi^{2,2}}(\omega) & \overline{m_\psi^{2,3}(\omega)} & \overline{m_\psi^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m_\psi^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{m_\psi^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\overrightarrow{b_3(\omega)} = det \begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \overrightarrow{i_2} & \overrightarrow{i_3} & \overrightarrow{i_4} & \overrightarrow{i_5} & \overrightarrow{i_6} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}^{3,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{3,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}^{3,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}_\psi^{1,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{1,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{1,3}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{1,2}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{1,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \overline{\widetilde{m}_\psi^{2,1}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{2,2}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{2,3}(\omega)} & \overline{\widetilde{m}_\psi^{2,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{2,2}}(\omega+\dfrac{1}{2}) & \overline{\widetilde{m}_\psi^{2,3}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

По векторам $\overrightarrow{b_3}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_3}$ вектор-функции $\overrightarrow{m_\psi^3(\omega)}$ и $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^3(\omega)}$ строятся по формулам

$$\overrightarrow{m_\psi^3(\omega)} = \lambda_3(\omega)\overrightarrow{b_3}; \qquad \overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^3(\omega)} = \frac{\overrightarrow{\widetilde{b}_3}}{\lambda_3(\omega)(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{\widetilde{b}_3})},$$

где $\lambda_3(\omega) = -\lambda_3\Big(\omega + \dfrac{1}{2}\Big)$. Как и в случае $k = 1$ можно взять $\lambda_1(\omega) = \lambda_2(\omega) = \lambda_3(\omega) = e^{2\pi i\omega}$.

В общем случае метод построения биортогональных базисов мультивсплесков описывается следующим алгоритмом.

А л г о р и т м.

1) Построим вектор-функцию

$$\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \dots & \overrightarrow{i_k} & \overrightarrow{i_{k+1}} & \dots & \overrightarrow{i_{2k}} \\ \overline{m^{1,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{1,k}}(\omega) & \overline{m^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{1,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ \overline{m^{k,1}}(\omega) & \dots & \overline{m^{k,k}}(\omega) & \overline{m^{k,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{m^{k,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ a_1^1(\omega) & \dots & a_1^k(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_1^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ a_{k-1}^1(\omega) & \dots & a_{k-1}^k(\omega) & a_{k-1}^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & a_{k-1}^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

где векторы $\overrightarrow{a_s(\omega)}$ линейно независимы с векторами $\overrightarrow{\overline{m^s}(\omega)}$, а функции a_s^r — 1-периодические. Обозначим $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)} := \overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$, если k четно, и $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)} := e^{2\pi i\omega}\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$, если k нечетно.

2) Далее строим двойственную вектор-функцию. Для этого введем

$$\overrightarrow{b_1(\omega)} = det\begin{pmatrix} \overrightarrow{i_1} & \dots & \overrightarrow{i_k} & \overrightarrow{i_{k+1}} & \dots & \overrightarrow{i_{2k}} \\ \overline{\widetilde{m}^{1,1}}(\omega) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{1,k}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{1,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{1,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ \overline{\widetilde{m}^{k,1}}(\omega) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{k,k}}(\omega) & \overline{\widetilde{m}^{k,1}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \overline{\widetilde{m}^{k,k}}\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \widetilde{a}_1^1(\omega) & \dots & a_1^k(\omega) & a_1^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \widetilde{a}_1^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \\ \dots & & & & & \\ \widetilde{a}_{k-1}^1(\omega) & \dots & \widetilde{a}_{k-1}^k(\omega) & \widetilde{a}_{k-1}^1\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) & \dots & \widetilde{a}_{k-1}^k\Big(\omega+\dfrac{1}{2}\Big) \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

где также векторы $\overrightarrow{\widetilde{a}_s(\omega)}$, $s = 1, \dots, k-1$, линейно независимы с векторами $\overrightarrow{\overline{\widetilde{m}^q}(\omega)}$, $q = 1, \dots, k$, функции $\widetilde{a}_s^r$ — 1-периодические. Для согласования с условием биортогональности (2.6) функций $\psi_{j,k}^s(x), \widetilde{\psi}_{j,k}^s(x)$ в терминах масок нужно поделить вектор $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ на скалярное произведение векторов $\overrightarrow{b_1(\omega)}$ и $\overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)}$. Получаем, что нужный нам вектор определяется следующим образом:

$$\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)} := \frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{(\overrightarrow{b_1(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)})} \qquad \text{для четных } \ k;$$

$$\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)} := e^{-2\pi i\omega}\frac{\overrightarrow{b_1(\omega)}}{(\overrightarrow{b_1(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_1(\omega)})} \qquad \text{для нечетных } \ k.$$

3) Заменим в (3.10), (3.11) строки $\overrightarrow{a_1(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{a}_1(\omega)}$ на $\overrightarrow{m_\psi^1(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^1(\omega)}$. Результаты обозначим соответственно $\overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)}$ и $\overrightarrow{b_2(\omega)}$. По этим вектор-функциям получим следующие вектор-функции:

$$\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)} := \overrightarrow{b_2(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} := \frac{\overrightarrow{b_2(\omega)}}{(\overrightarrow{b_2(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)})} \qquad \text{для четных } \ k;$$

$$\overrightarrow{\widetilde{m}_\psi^2(\omega)} := e^{2\pi i\omega}\overrightarrow{b_2(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m_\psi^2(\omega)} := e^{-2\pi i\omega}\frac{\overrightarrow{b_2(\omega)}}{(\overrightarrow{b_2(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_2(\omega)})} \qquad \text{для нечетных } \ k.$$

4) Последовательно заменяя в выражениях для $\overrightarrow{\widetilde{b}_s(\omega)}$ и $\overrightarrow{b_s(\omega)}$, $s = 1, \ldots, k-1$, строки $\overrightarrow{a_s(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{a}_s(\omega)}$ на $\overrightarrow{m^s_\psi(\omega)}$, $\overrightarrow{\widetilde{m}^s_\psi(\omega)}$, получим выражения для $\overrightarrow{\widetilde{b}_{s+1}(\omega)}$ и $\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}$. По ним построим вектор-функции для четных k:

$$\overrightarrow{\widetilde{m}^{s+1}_\psi(\omega)} := \overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m^{s+1}_\psi(\omega)} := \frac{\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}}{(\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_{s+1}(\omega)})},$$

а для нечетных k:

$$\overrightarrow{\widetilde{m}^{s+1}_\psi(\omega)} := e^{2\pi i\omega}\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \qquad \overrightarrow{m^{s+1}_\psi(\omega)} := e^{-2\pi i\omega}\frac{\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}}{(\overrightarrow{b_{s+1}(\omega)}, \overrightarrow{\widetilde{b}_{s+1}(\omega)})}. \qquad \square$$

Используя маски $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$ с построенными строками $\overrightarrow{\overset{(\sim)}{m}{}^s_\psi}$ для биортогональных систем мультивсплесков, как и в классическом случае, получаем выражение для преобразований Фурье мультивсплесков через преобразования Фурье мультимасштабирующих функций по формулам (2.4). После обратного преобразования Фурье будет известна вектор-функция (2.2), а значит, и набор мультивсплесков $\psi^s_{j,l}, \widetilde{\psi}^s_{j,l}$, $s = \overline{1,k}$, $j, l \in \mathbb{Z}$. К тому же результату можно прийти, разложив $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$ в тригонометрический ряд с матричными коэффициентами $H^\psi_n, \widetilde{H}^\psi_n$, а затем, воспользовавшись формулой (2.4) и свойствами преобразований Фурье, получить вектор-функции (2.2).

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Системы функций $\psi^s(x-n), \widetilde{\psi}^s(x-n)$, $s = \overline{1,k}$, $n \in \mathbb{Z}$, восстановленные по своим преобразованиям Фурье* (2.4), *где маски $M^\psi(\omega), \widetilde{M}^\psi(\omega)$ определены выше, образуют базисы пространств $W_0, \widetilde{W}_0$.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in W_0$, т. е. 1) $f(x) \in V_1$; 2) $f(x) \perp \widetilde{V}_0$.

По условию 1) $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^f_n \Phi_{1,n}(x)$, C^f_n — вектор-строка из $l^2_{2k}(\mathbb{Z})$ или, что равносильно,

$$\widehat{f}(\omega) = \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big),$$

где $\overrightarrow{m^f(\omega)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^f_n e^{2\pi in\omega}$ — 1-периодическая вектор-функция размерности k.

По условию 2) $\langle f(x), \widetilde{\varphi}^l(x-n)\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} = 0$, $l = \overline{1,k}, n \in \mathbb{Z}$. В терминах преобразований Фурье с учетом (1.5) и суммируемости компонент вектор-функций $\widehat{f}(\omega)\widehat{\Phi}(\omega)$, это условие перепишется как

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big[e^{-2\pi in\omega}\overrightarrow{\widetilde{m}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\widetilde{\Phi}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big]^* d\omega = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Разобьем интеграл на сумму по отрезкам $[\nu, \nu+1]$, затем перейдем к интегралу по отрезку $[0,1]$. Рассматривая отдельно сумму по четным и по нечетным ν, используя свойства произведения матриц и равенство (1.8), получаем эквивалентное равенство

$$\int\limits_0^1 \Big(\overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\Big[\overrightarrow{\widetilde{m}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\Big]^* + \overrightarrow{m^f\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big[\overrightarrow{\widetilde{m}\Big(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}\Big)}\Big]^*\Big)e^{2\pi in\omega}d\omega = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Это означает, что

$$\overrightarrow{m^f(\omega)}\big[\widetilde{M}(\omega)\big]^* + \overrightarrow{m^f\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)}\Big[\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \overrightarrow{0}. \tag{3.12}$$

Так как вектор-столбцы матрицы M^ψ линейно независимы, то они образуют один из базисов пространства l^2_{2k} при каждом фиксированном ω на интервале $(0,1)$, и следовательно, $m^f(\omega)$ можно записать в виде

$$\overrightarrow{m^f(\omega)} = \overrightarrow{\alpha(\omega)} M^\psi(\omega), \tag{3.13}$$

где $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ — 1-периодический вектор-строка размерности k. Подставляя (3.13) в (3.12) и используя равенство (2.7), определим, каким условиям должно удовлетворять $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$:

$$\overrightarrow{\alpha(\omega)} M^\psi(\omega)\big[\widetilde{M}(\omega)\big]^* + \overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} M^\psi\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big[\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^*$$

$$= \Big(\overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} - \overrightarrow{\alpha(\omega)}\Big) M^\psi(\omega+\frac{1}{2})\Big[\widetilde{M}\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)\Big]^* \overset{\text{п.в.}}{=} \overrightarrow{0},$$

откуда

$$\overrightarrow{\alpha\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)} = \overrightarrow{\alpha(\omega)}. \tag{3.14}$$

Поэтому

$$\widehat{f}(\omega) = \overrightarrow{\alpha(\frac{\omega}{2})} M^\psi\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\Phi}\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = \overrightarrow{\alpha\Big(\frac{\omega}{2}\Big)}\widehat{\Psi}(\omega).$$

Здесь, как видно из (3.14), $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ — 1/2-периодический вектор-строка размерности k, следовательно, $\widehat{f}(\omega)$ — это произведение 1-периодического вектора на $\widehat{\Psi}(\omega)$. После обратного преобразования Фурье получим, что

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n \Psi(x-n),$$

где D_n — коэффициенты из разложения

$$\alpha(\frac{\omega}{2}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} D_n e^{-2\pi i n\omega}.$$

Аналогичные выводы справедливы для $\widetilde{f} \in \widetilde{V}_1$, если в предыдущих рассуждениях заменить $f \in V_1$ на $\widetilde{f} \in \widetilde{V}_1$, $\widetilde{M}(\omega)$ на $M(\omega)$, $M^\psi(\omega)$ на $\widetilde{M}^\psi(\omega)$, $\overrightarrow{\alpha(\omega)}$ на $\overrightarrow{\widetilde{\alpha}(\omega)}$ и вместо (2.7) воспользоваться (2.8). В результате получим, что любую функцию $\widetilde{f} \in \widetilde{W}_0$ можно разложить по базису $\{\widetilde{\psi}^1(x-n), \ldots, \widetilde{\psi}^k(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. □

Автор выражает благодарность Н. И. Черных за помощь и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Плещева Е.А., Черных Н.И.** Построение ортогональных базисов мультивсплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 221–230.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вэйвлетам. М.; Ижевск: Динамика, 2001, 464 с.
3. **Keinert F.** Wavelets and multiwavelets. London; New York: CRC Press, 2003, 275 p.
4. **Scopina M.** On construction of multivariate wavelet frames // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2009. Vol. 27, no. 1. P. 55–72.
5. **Krivoshein A.V.** On construction of multivariate symmetric MRA-based wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2014. Vol. 36, no. 2. P. 215–238.

Плещева Екатерина Александровна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: eplescheva@gmail.com

Поступила 16.06.15

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.65

ДВУХМАСШТАБНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ B-$\mathcal{L}$-СПЛАЙНОВ С РАВНОМЕРНЫМИ УЗЛАМИ[1]

Е. Г. Пыткеев, В. Т. Шевалдин

В статье без применения аппарата гармонического анализа построены аналоги масштабирующих соотношений для базисных экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору произвольного порядка с постоянными коэффициентами, все корни характеристического многочлена которого являются действительными.

Ключевые слова: базисные экспоненциальные сплайны, двухмасштабные соотношения, масштабирующая функция, линейный дифференциальный оператор.

E. G. Pytkeev, V. T. Shevaldin. Two-scale relations for B-$\mathcal{L}$-splines with uniform knots.

Analogs of scaling relations are constructed for basis exponential splines with uniform knots corresponding to a linear differential operator of arbitrary order with constant coefficients and real pairwise distinct roots of the characteristic polynomial; the construction does not employ techniques from harmonic analysis.

Keywords: basis exponential splines, two-scale relations, scaling function, linear differential operator.

Введение

В теории всплесков (см., например, [1–4]) для построения кратномасштабного анализа вложенных друг в друга замкнутых подпространств $\{V_j \subset L^2(\mathbb{R}),\ j \in \mathbb{Z}\}$ основную роль играют двухмасштабные соотношения для специально выбранной функции $\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ (она называется *масштабирующей*) вида

$$\varphi(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \gamma_j \varphi(2x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{0.1}$$

Здесь $h > 0$ — фиксированное число, которое обычно полагают равным 1. При построении всплесков с компактным носителем в качестве функции φ может быть выбран полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) $B_{r,h}(x)$ порядка r (степени $r-1$) с равномерными узлами $0, h, 2h, \dots, rh$ (см., например, монографию [1] К. Чуи). Для этого сплайна существует несколько различных представлений (см., например, [1; 5]). Для функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим через

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} C_r^s f(x + sh), \quad C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}, \tag{0.2}$$

конечную разность r-го порядка с шагом $h > 0$. *Полиномиальным B-сплайном порядка r* (см., например, [5]) называется функция

$$B_{r,h}(x) = m_r(h)\Delta_h^r((x - rh)_+)^{r-1} \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{0.3}$$

где $m_r(h) > 0$ — нормирующий множитель и $t_+ = \max\{0, t\}$. Нормирующий множитель $m_r(h)$ в равенстве (0.3) положим равным 1. В случае $\varphi(x) = B_{r,h}(x)$ коэффициенты γ_j в представлении (0.1) явно вычислены, а именно имеет место следующее равенство [1, гл. 4]:

$$B_{r,h}(x) = C_r^r B_{r,h}(2x) + C_r^{r-1} B_{r,h}(2x - h) + \dots + C_r^0 B_{r,h}(2x - rh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{0.4}$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Здесь C_r^j ($j = \overline{0,r}$) — биномиальные коэффициенты (см. (0.2)). Для B-$\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [6; 7] и определения в следующем разделе) с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$ порядка r с постоянными коэффициентами вида

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^{r}(D - \beta_j) \tag{0.5}$$

(D — оператор дифференцирования, $\beta_j \in \mathbb{C}$), в отличие от полиномиального случая $\mathcal{L}_r(D) = D^r$ (т. е. $\beta_j = 0$; $j = \overline{0,r}$), соотношение (0.1) может не иметь места, поскольку если функция $e^{\beta x}$ принадлежит ядру оператора $\mathcal{L}_r$, т. е. $e^{\beta x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}_r$, то функция $e^{2\beta x}$, вообще говоря, не лежит в этом ядре.

В данной статье мы покажем, как преодолеть эту трудность и получить аналог соотношения (0.4) для B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами в случае, когда все корни характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_r$ являются действительными. Кроме того, для таких операторов $\mathcal{L}_r$ нами будет предложен один из вариантов построения кратномасштабного анализа неортогональных ψ-всплесков (т. е. аналогов пространств V_j и W_j в [1]) с выбором в качестве масштабирующей функции B-$\mathcal{L}$-сплайна $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ с равномерными узлами (см. определение в следующем разделе). Отметим, что данная работа продолжает исследования второго автора [8; 9].

1. Масштабирующие соотношения

Дадим необходимые определения. Пусть $h > 0$, D — оператор дифференцирования, $r \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ — линейный дифференциальный оператор вида (0.5), причем все числа β_j ($j = \overline{1,r}$) в его представлении являются действительными. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{L}_r$ может быть записан в виде

$$p_r(x) = p_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - \beta_j) \quad (\beta_j \in \mathbb{R}).$$

А. Шарма и И. Цимбаларио [10] для функций $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ построили разностный оператор

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T - e^{\beta_j h}E) f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(h) f(x + sh), \tag{1.1}$$

соответствующий линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$, E — тождественный оператор и числа $\mu_s^{(r)}(h)$ ($s = \overline{0,r}$) находятся из следующего равенства:

$$P_r(x) = P_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(h) x^s. \tag{1.2}$$

Многочлен $P_r(x)$ является характеристическим многочленом разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$. Ясно, что

$$\mu_r^{(r)}(h) = 1, \quad \mu_{r-1}^{(r)}(h) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}, \ldots, \mu_0^{(r)}(h) = \prod_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}.$$

Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ выбран таким образом, что для любой функции $f \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}_r$ имеет место тождество $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) \equiv 0$. В частности, если все $\beta_j = 0$ ($j = \overline{1,r}$), т. е. $\mathcal{L}_r = D^r$, то $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} = \Delta_h^r$ — конечная разность (см. (0.2)) порядка r с шагом h и при этом

$$P_r(x) = (x-1)^r, \quad \mu_j^{(r)}(h) = C_r^j \quad (j = \overline{0,r}).$$

Пусть $\varphi_r = \varphi_r(x)$ — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ $(j = \overline{0, r-1})$. Здесь $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. Отметим, что если все числа β_j попарно различны, то эта функция может быть записана в явном виде:

$$\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j x} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} (\beta_j - \beta_k)^{-1}.$$

B-$\mathcal{L}$-сплайн с равномерными узлами $0, h, 2h, \ldots, rh$, соответствующий линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$ вида (0.5), определяется равенством (см. [6; 7])

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = m_{\mathcal{L}_r}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r}\varphi_r((x-rh)_+) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Нормирующий множитель $m_{\mathcal{L}_r}(h)$ положим равным 1. Естественно называть такой сплайн экспоненциальным, поскольку $\beta_j \in \mathbb{R}$ $(j = \overline{1, r})$. Таким образом, с учетом (1.1) имеем

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \mu_r^{(r)}(h)\varphi_r(x_+) - \mu_{r-1}^{(r)}(h)\varphi_r((x-h)_+) + \cdots + (-1)^r\mu_0^{(r)}(h)\varphi_r((x-rh)_+). \tag{1.4}$$

Носителем B-$\mathcal{L}$-сплайна является отрезок $[0; rh]$, и при $r \geq 2$ $B_{\mathcal{L}_{r,h}} \in C^{r-2}(\mathbb{R})$. Наряду с функцией $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ рассмотрим функцию $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ вида

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}\varphi_r((x-2rh)_+) = \mu_r^{(r)}(2h)\varphi_r(x_+)$$

$$- \mu_{r-1}^{(r)}(2h)\varphi_r((x-2h)_+) + \cdots + (-1)^r\mu_0^{(r)}(2h)\varphi_r((x-2rh)_+), \tag{1.5}$$

которая получена из функции $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ формальной заменой параметра h на $2h$. Ясно, что график функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ не является растяжением по горизонтальной оси графика функции $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$. Носителем функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ является отрезок $[0; 2rh]$, а узлами — точки $0, 2h, 4h, \ldots, 2rh$. Характеристический многочлен, соответствующий разностному оператору $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}$, имеет вид

$$P_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x^2 - e^{2\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(2h)x^{2s}, \tag{1.6}$$

поскольку

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T^2 - e^{2\beta_j h}E)f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(2h)f(x+2sh). \tag{1.7}$$

Нас интересуют возможность представления функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ в виде

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma_s B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s)h) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.8}$$

и явный вид коэффициентов γ_s, если последняя формула имеет место. Поскольку носитель $\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_{r,2h}} = [0; 2rh]$, то изучаемое равенство может быть записано в виде

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \sum_{s=0}^{r}\gamma_s B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s)h) = \gamma_r B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) + \gamma_{r-1}B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-h) + \cdots + \gamma_0 B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-rh). \tag{1.9}$$

Всюду в дальнейшем полагаем $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s = \overline{0, r})$. Обычно в теории всплесков (см., например, монографию Ч. Чуи [1]) равенства типа (0.1) (равенство (1.8) похоже по конструкции на (0.1)) устанавливаются с применением аппарата гармонического анализа прямого и обратного преобразований Фурье. Наша цель в данном разделе — изложение двух других способов нахождения коэффициентов $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s = \overline{0, r})$ в равенствах (1.8) и (1.9).

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x) = \mu_r^{(r)}(h)B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) + \mu_{r-1}^{(r)}B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-h) + \cdots + \mu_0^{(r)}(h)B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-rh),$$

в котором коэффициенты $\mu_s^{(r)}(h)$ $(s=\overline{0,r})$ *выводятся из формул* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже будут приведены два различных доказательства теоремы 1. Первое основано на связи разностных операторов с их характеристическими многочленами, и его идея заимствована нами из работы С. Б. Стечкина [11], посвященной доказательству неравенства Джексона об оценке сверху наилучшего приближения в C непрерывной функции тригонометрическими полиномами через ее r-й модуль непрерывности, в котором конечные разности с большим шагом раскладываются в линейную комбинацию конечных разностей с шагом, в целое число раз меньшим исходного. Второй способ доказательства теоремы 1 — индуктивный.

С п о с о б 1. Воспользуемся связью между характеристическими многочленами $P_{\mathcal{L}_{r,h}}$ и $P_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ разностных операторов $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ и $\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r}$. Из равенств (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) следует, что коэффициенты $\gamma_s = \gamma_s(h)$ $(s=\overline{0,r})$ в формулах (1.8) и (1.9) могут быть найдены из равенства

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r} f(x) = \gamma_r \Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x+rh) + \gamma_{r-1}\Delta_h^{\mathcal{L}_r}(x+(r-1)h) + \cdots + \gamma_0 \Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x). \tag{1.10}$$

Поскольку

$$\frac{P_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x)}{P_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)} = \frac{\prod_{j=1}^r (x^2 - e^{2\beta_j h})}{\prod_{j=1}^r (x - e^{\beta_j h})} = \prod_{j=1}^r (x + e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^r \mu_s^{(r)}(h)x^s = \gamma_r x^r + \gamma_{r-1}x^{r-1} + \cdots + \gamma_1 x + \gamma_0,$$

то

$$\gamma_s = \mu_s^{(r)}(h) \quad (s=\overline{0,r}), \tag{1.11}$$

т. е. $\gamma_r = 1$, $\gamma_{r-1} = \sum_{j=1}^r e^{\beta_j h}, \ldots, \gamma_0 = \prod_{j=1}^r e^{\beta_j h}$ — коэффициенты при степенях x в многочлене $\prod_{j=1}^r (x+e^{\beta_j h})$.

С п о с о б 2. Проведем доказательство равенств (1.10) и (1.11) по индукции по r. Тогда из равенств (1.3) – (1.5) будет следовать утверждение теоремы 1. Вначале отметим, что

$$\Delta_h^{D-\beta} f(x) = (T - e^{\beta h}E)f(x) = f(x+h) - e^{\beta h}f(x),$$

$$\Delta_{2h}^{D-\beta} f(x) = (T^2 - e^{2\beta h}E)f(x) = f(x+2h) - e^{2\beta h}f(x).$$

Следовательно,

$$\Delta_{2h}^{D-\beta} f(x) = f(x+2h) - e^{\beta h}f(x+h) + e^{\beta h}f(x+h) - e^{2\beta h}f(x) = \Delta_h^{D-\beta}f(x+h) + e^{\beta h}\Delta_h^{D-\beta}f(x).$$

Это равенство можно считать базой индукции (т. е. равенство (1.10) имеет место при $r=1$). Пусть

$$\mathcal{L}_{r-1} = \mathcal{L}_{r-1}(D) = \prod_{j=1}^{r-1}(D-\beta_j)$$

и

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x) = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r-1-s}\mu_s^{(r-1)}(h) f(x+sh),$$

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x) = \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^{r-1-s}\mu_s^{(r-1)}(2h) f(x+2sh)$$

— разностные операторы с шагами h и $2h$, соответствующие оператору $\mathcal{L}_{r-1}$. По предположению индукции имеет место равенство

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x) = \mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x).$$

Используя это равенство, базу индукции и соотношение

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \Delta_h^{D-\beta_r}(\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)),$$

получаем

$$\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_r} f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)}(2h)f(x+2sh) = \prod_{j=1}^{r}(T^2 - e^{2\beta_j h}E)f(x) = (T^2 - e^{2\beta_r h}E)\Delta_{2h}^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)$$

$$= \Delta_{2h}^{D-\beta_r}\big(\mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)\big)$$

$$= \Delta_h^{D-\beta_r}\big(\mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+rh) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+h)\big)$$

$$+ e^{\beta_r h}\Delta_h^{D-\beta_r}\big(\mu_{r-1}^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r-1)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_{r-1}} f(x)\big)$$

$$= \mu_r^{(r)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x+rh) + \mu_{r-1}^{(r)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x+(r-1)h) + \cdots + \mu_0^{(r)}(h)\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x),$$

поскольку

$$\mu_s^{(r)}(h) = \mu_{s-1}^{(r-1)}(h) + e^{\beta_r h}\mu_{s-1}^{(r-1)}(h) \quad (s = \overline{0,r}).$$

Последнее равенство хорошо известно (см., например, [12]). При этом считается, что $\mu_{-1}^{(r-1)}(h) = \mu_r^{(r-1)}(h) = 0$. Равенство (1.10) установлено, и тем самым теорема 1 доказана еще одним способом. $\square$

Следствие. *Для полиномиальных B-сплайнов $B_{r,h}(x)$ (см. (0.3) при $m_r(h) = 1$), т. е. в случае $\beta_j = 0$ $(j = \overline{1,r})$, имеет место следующий аналог равенства* (0.4) :

$$B_{r,2h}(x) = C_r^r B_{r,h}(x) + C_r^{r-1} B_{r,h}(x-h) + \cdots + C_r^0 B_{r,h}(x-rh).$$

З а м е ч а н и е 1. В теореме 1 установлен аналог двухмасштабного соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами. При этом расстояние между узлами сплайна при переходе от функции $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ к функции $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}$ увеличивается в два раза. Из первого способа доказательства теоремы 1 становится ясно, как найти коэффициенты $\gamma_{s,k} = \gamma_{s,k}(h)$ и в аналогичном k-масштабном соотношении $(k = 3, 4, \ldots)$, т. е. в формуле

$$B_{\mathcal{L}_{r,kh}}(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \gamma_{s,k} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s)h).$$

Для их нахождения нужно разделить соответствующий многочлен

$$P_{\mathcal{L}_{r,kh}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x^k - e^{k\beta_j h})$$

на многочлен $P_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - e^{\beta_j h})$ и вычислить коэффициенты алгебраического многочлена, полученного в результате указанного деления.

2. ψ-всплески

В монографии [1] Ч. Чуи теория ортогональных всплесков строится, как и в других книгах, с помощью комплексного преобразования Фурье. Общепринято обозначать через $\overline{z}$ число, комплексно сопряженное числу $z \in \mathbb{C}$. В [1, гл. 5] изучаются свойства ψ-всплесков, масштабирующая функция φ у которых имеет компактный носитель и является кососимметричной в следующем смысле: существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что

$$\varphi(a+x) = \overline{\varphi(a-x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Для функций φ со значениями только в действительной области $\mathbb{R}$ это равенство принимает вид

$$\varphi(a+x) = \varphi(a-x) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

Хорошо известно (см., например, [6; 7]), что для B-$\mathcal{L}$-сплайна $\varphi(x) = B_{\mathcal{L}_{l,h}}(x)$ это равенство имеет место не всегда. А именно (2.1) справедливо тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ вида (0.5) является формально самосопряженным, т. е. удовлетворяет следующему равенству:

$$\mathcal{L}_r(-D) = (-1)^r \mathcal{L}_r(D).$$

При этом число $a = rh/2$ — середина носителя B-$\mathcal{L}$-сплайна $B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)$. Кроме того, в [1, гл. 5], в частности, установлено, что если масштабирующее соотношение для функции φ имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{s=0}^{r} d_s \varphi(2x-s), \quad d_s \in \mathbb{C}, \quad d_0 \neq 0, \quad d_r \neq 0,$$

то соответствующий ψ-всплеск может быть записан следующим образом:

$$\psi(x) = \sum_{s=-r+1}^{1} (-1)^s \overline{d_{1-s}} \varphi(2x-s)$$

(см. [1, равенство (5.6.14)]). Поскольку ψ-всплески можно определять с точностью до сдвига аргумента, то, исходя из этих формул (в случае, если функция φ имеет компактный носитель), можно добиться того, что функция φ и некоторый сдвиг по действительной оси функции ψ будут иметь один и тот же носитель.

При построении ψ-всплесков (точнее, их аналогов) для B-$\mathcal{L}$-сплайна $\varphi(x) = B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)$ будем действовать в соответствии с этим классическим кратномасштабным анализом. А именно ψ-всплеском назовем функцию вида

$$\psi_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) = (-1)^{r+1} \mu_0^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) + (-1)^r \mu_1^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-h) + \cdots - \mu_r^{(r)}(h) B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-rh), \tag{2.2}$$

где функция $B_{\mathcal{L}_{r,h}}$ и числа $\mu_s^{(r)}(h)$ $(s = \overline{0,r})$ определены равенствами (1.2) и (1.4). Поскольку в дальнейших рассуждениях оператор $\mathcal{L}_r$ и число h у нас фиксированы, то для краткости будем записывать

$$\mu_s = \mu_s^{(r)}(h) \quad (s = \overline{0,r}).$$

В силу определения B-$\mathcal{L}$-сплайна имеем

$$\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_{r,2h}} = \operatorname{supp} \psi_{\mathcal{L}_{r,2h}} = [0; 2rh].$$

Системы функций $\{B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{\psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ линейно независимы на $\mathbb{R}$. Положим

$$V_1 = \operatorname{span} \{B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \quad V_2 = \operatorname{span} \{B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

и

$$W_2 = \operatorname{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Ясно, что

$$V_2 \subset V_1.$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$V_2 + W_2 = V_1. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 2 требуется установить, что существуют такие действительные числа $\{a_j\}$ и $\{b_j\}$, что при $0 \le x \le rh$ имеет место тождество

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_j a_j B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh) + \sum_j b_j \psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh).$$

Поскольку носителем функций $B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x)$ и $\psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x)$ является отрезок $[0;2rh]$, то это тождество принимает вид

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} a_j B_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh) + \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} b_j \psi_{\mathcal{L}_{r,2h}}(x-jh). \tag{2.4}$$

Из (2.4), теоремы 1 и (2.2) имеем

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} \Big[a_j \sum_{s=0}^{r} \mu_s B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s+j)h)$$

$$+ b_j \sum_{s=0}^{r} (-1)^{s+1} \mu_{r-s} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s+j)h)\Big]$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \sum_{j=-(2r-1)}^{r-1} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-(r-s+j)h)\big[a_j\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s} b_j\big].$$

В последнем равенстве положим $k = r-s+j$. Тогда

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{s=0}^{r} \sum_{k=-r-s+1}^{2r-1-s} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)[a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s} b_{k-r+s}]. \tag{2.5}$$

В (2.5) поменяем порядок суммирования. Получаем

$$B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x) \equiv \sum_{k=r}^{2r-1} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh) \sum_{s=0}^{2r-1-k} [a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s} b_{k-r+s}]$$

$$+ \sum_{k=-(r-1)}^{r-1} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh) \sum_{s=0}^{r} [a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s} b_{k-r+s}]$$

$$+ \sum_{k=-(2r-1)}^{-r} B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh) \sum_{s=-r-k+1}^{r} [a_{k-r+s}\mu_s + (-1)^{s+1}\mu_{r-s} b_{k-r+s}]. \tag{2.6}$$

Мы уже отмечали, что система функций $\{B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ линейно независима. Поэтому из тождества (2.6) следует, что коэффициенты при $B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x-kh)$ $(k \ne 0)$ в правой части (2.6) должны равняться нулю, и только коэффициент при $B_{\mathcal{L}_{r,h}}(x)$ будет равен 1. Это замечание означает, что тождество (2.6) равносильно системе $4r-1$ линейных алгебраических уравнений относительно $6r-2$ неизвестных коэффициентов $\{a_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$ и $\{b_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$. Эта система имеет вид

$$A\mathbf{x} = \mathbf{m}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{x} = \{\alpha_{r-1}, \beta_{r-1}, \dots, \alpha_0, \beta_0, \alpha_{-1}, \beta_{-1}, \dots, \alpha_{-(2r-1)}, \beta_{-(2r-1)}\}^T$, $\mathbf{m} = \{\underbrace{0,\dots,0}_{2r-1}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{2r-1}\}^T$ и матрица $A = (\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\dots\mathbf{c}_{6r-3}\mathbf{c}_{6r-2})$ составлена из столбцов

$$\mathbf{c}_1 = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_2 = (-\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_3 = (0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\mathbf{c}_4 = (0, -\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0, 0, \dots, 0)^T,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\mathbf{c}_{6r-3} = (0, \dots, 0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r)^T,$$

$$\mathbf{c}_{6r-2} = (0, \dots, 0, -\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0)^T.$$

Отметим, что в каждом из столбцов $\mathbf{c}_j$ $(j = \overline{1, 6r-2})$ ровно $r+1$ подряд идущих элементов: $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$ в столбцах с нечетными номерами и $-\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, (-1)^{r+1}\mu_0$ в столбцах с четными номерами — отличны от нуля, а остальные элементы равны нулю. Наша задача — показать, что у матрицы A существует минор порядка $4r-1$, который не равен нулю. Тогда система уравнений (2.7) будет совместна. Для построения такого минора из матрицы A удалим 2-й, 4-й, $\dots, 2(2r-1)$-й столбцы (всего $2r-1$ столбцов). Заметим, что на самом деле это действие равносильно тому, что в системе (2.7) (т. е. в равенстве (2.4)) можно положить $b_{r-1} = \dots = b_0 = b_{-1} = \dots = b_{-(r-1)} = 0$. Оставшийся минор M_{4r-1} порядка $4r-1$ имеет вид

$$M_{4r-1} = |\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_{4r-3}, \mathbf{c}_{4r-1}, \mathbf{c}_{4r}, \dots, \mathbf{c}_{6r-2}|.$$

У выписанной матрицы в левом верхнем углу стоит квадратная матрица порядка $2r-1$, которая является диагональной (выше главной диагонали все элементы равны нулю), а на ее главной диагонали расположены одинаковые числа μ_0. Точнее, первые $2r-1$ строк M_{4r-1} имеют следующий вид: первая — $(\mu_0, 0, \dots, 0)$, вторая — $(\mu_1, \mu_0, 0, \dots, 0), \dots, (r+1)$-я — $(\mu_r, \mu_{r-1}, \dots, \mu_0, 0, \dots, 0)$, $(r+2)$-я — $(0, \mu_r, \mu_{r-1}, \dots, \mu_0, 0, \dots, 0), \dots, (2r-1)$-я — $(0, \dots, 0, \mu_r, \mu_{r-1}, \dots, \mu_0)$. В первой строке лишь $\mu_0 \neq 0$.Раскладываем M_{4r-1} по первой строке, получившийся определитель — по второй и т. д. Действуя таким образом $2r-1$ раз, получаем

$$M_{4r-1} = \mu_0^{2r-1}|K|, \tag{2.8}$$

где $|K|$ — определитель матрицы

$$K = \begin{pmatrix} \mu_0 & -\mu_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_{r-1} & \mu_0 & -\mu_r & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_{r-2} & \mu_1 & \mu_{r-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{r-1} & (-1)^r\mu_1 & \mu_{r-2} & (-1)^{r+1}\mu_2 & \cdots & \mu_0 & -\mu_r \\ \mu_r & (-1)^{r+1}\mu_0 & \mu_{r-1} & (-1)^r\mu_1 & \cdots & \mu_1 & \mu_{r-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_r & (-1)^{r+1}\mu_0 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу K (при этом ее определитель не меняется) и у транспонированной матрицы переставим строки в нужном нам порядке. Тогда

$$|K| = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}} \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{r-1} & \mu_r & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_r \\ -\mu_r & \mu_{r-1} & -\mu_{r-2} & \cdots & (-1)^{r+1}\mu_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu_r & \mu_{r-1} & \cdots & (-1)^r\mu_1 & (-1)^{r+1}\mu_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\mu_r & \mu_{r-1} & \cdots & (-1)^{r+1}\mu_0 \end{pmatrix}. \qquad (2.9)$$

Пусть $Q_n(x) = \tau_0 x^n + \tau_1 x^{n-1} + \cdots + \tau_n,\ \tau_0 \neq 0,\ Q_m(x) = \theta_0 x^m + \theta_1 x^{m-1} + \cdots + \theta_m,\ \theta_0 \neq 0,$ — два алгебраических многочлена. Определитель

$$R(Q_n, Q_m) = \begin{vmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \cdots & \tau_n & & & \\ & \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \cdots & \tau_n & & \\ \cdots & & & \cdots & & & & \cdots \\ & & & & \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_n \\ \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \cdots & & \theta_m & & \\ & \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \theta_m & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \theta_0 & \theta_1 & \cdots & \cdots & \theta_m \end{vmatrix}$$

называется *результантом многочленов* Q_n и Q_m (см., например, [13, гл. 1, § 3.1]). В нем первая строка $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$ сдвигается вправо $(m-1)$ раз, а $(m+1)$-я строка $(\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$ — $(n-1)$ раз. Поэтому $R(Q_n, Q_m)$ — определитель $(m+n)$-го порядка. Если оба многочлена разлагаются в произведение линейных сомножителей

$$Q_n(x) = \tau_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), \quad x_i \in \mathbb{R} \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$Q_m(x) = \theta_0(x - y_1)(x - y_2)\cdots(x - y_m), \quad y_j \in \mathbb{R} \quad (j = \overline{1, m}),$$

то

$$R(Q_n, Q_m) = \tau_0^m \theta_0^n \prod_{i,k} (x_i - y_k)$$

(см. [13, гл. 1, § 3.1]).

Рассмотрим два многочлена степени r: $\mu_0 x^r + \mu_1 x^{r-1} + \cdots + \mu_r$ и $-\mu_r x^r + \mu_{r-1} x^{r-1} - \cdots + (-1)^{r+1}\mu_0$, и сравним их коэффициенты со строками в определителе (2.9). В силу (1.2) имеем

$$-\mu_r x^r + \mu_{r-1} x^{r-1} - \cdots + (-1)^{r+1}\mu_0 = -P_r(x) = -\prod_{j=1}^{r} (x - e^{\beta_j h}).$$

С другой стороны,

$$\mu_0 x^r + \mu_1 x^{r-1} + \cdots + \mu_r = x^r P_r\Big(-\frac{1}{x}\Big)(-1)^r = \mu_r \prod_{j=1}^{r} (1 + x e^{\beta_j h}).$$

Таким образом, из свойств результанта следует, что

$$|K| = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}} R\Big((-x^r) P_r\Big(-\frac{1}{x}\Big), -P_r(x)\Big) = (-1)^{\frac{(r-1)r}{2}+1} \mu_0^r \mu_r^r \prod_{i,j=1}^{r} (e^{\beta_i h} + e^{-\beta_j h}).$$

Поскольку $\mu_0 = \prod_{s=1}^{r} e^{\beta_s h}$, $\mu_r = 1$ (см. (1.2)), то из последнего равенства окончательно получаем, что

$$|K| = (-1)^{\frac{(r-1)r+2}{2}} \prod_{s=1}^{r} e^{\beta_s h} \prod_{i,j=1}^{r} (e^{\beta_i h} + e^{-\beta_j h}) \neq 0.$$

Следовательно, в матрице A существует ненулевой минор M_{4r-1} (см. (2.8)) порядка $4r-1$, что позволяет вычислить коэффициенты $\{a_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$ и $\{b_j\}_{j=-(2r-1)}^{r-1}$ в тождестве (2.4). Теорема 2 полностью доказана. $\square$

Замечание 2. Равенство (2.3) является ключевым для дальнейшего построения системы вложенных подпространств $\{V_j,\ j \in \mathbb{N}\}$. А именно положим $V_3 = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{r,4h}}(x - 2kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \ldots, V_{n+1} = \operatorname{span}\{B_{\mathcal{L}_{r,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Тогда $W_3 = \operatorname{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{r,4h}}(x - 2kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \ldots, W_{n+1} = \operatorname{span}\{\psi_{\mathcal{L}_{r,2^n h}}(x - 2^{n-1}kh)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Имеем $V_{n+1} \subset V_n$ и в силу теоремы 2 получаем, что $V_n = V_{n+1} + W_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). При этом нетрудно проверить, что подпространства V_j и W_j между собой неортогональны (при обычном определении скалярного произведения двух действительных функций).

Замечание 3. Все рассуждения в теоремах 1 и 2 справедливы и для оператора $\mathcal{L}_r = D^r$ r-кратного дифференцирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты: пер. с англ. М.: Мир, 2001. 412 с.
2. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.Л.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
3. **Малла С.** Вейвлеты в обработке сплайнов. М.: Мир, 2005. 671 с.
4. **Добеши И.** 10 лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 461 с.
5. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
6. **Morsche H.G. ter** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: Dissertation. Eindhoven: Technische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами / УрО РАН. Екатеринбург, 2014. 198 с.
8. **Шевалдин В.Т.** Двухмасштабные соотношения для аналогов базисных сплайнов малых степеней // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 319–323.
9. **Шевалдин В.Т.** Калибровочные соотношения для B-$\mathcal{L}$-сплайнов // Современные проблемы математики: тез. 42-й Всеросс. мол. шк.-конф. / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. С. 151–153.
10. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
11. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. РАН. Серия математическая. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
12. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.
13. **Прасолов В.В.** Многочлены. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.

Поступила 19.01.2015

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.86

О НЕРАВЕНСТВЕ СЕГЁ — ТАЙКОВА ДЛЯ СОПРЯЖЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. О. Серков

Г. Сегё в 1943 г. нашел наилучшую константу и все экстремальные полиномы в неравенстве между равномерной нормой сопряженного тригонометрического полинома и нормой самого полинома для полиномов с вещественными коэффициентами. В 1990 г. другим методом точная константа была также найдена Л.В. Тайковым. В данной статье выписаны все экстремальные полиномы с комплексными коэффициентами, также обсуждаются некоторые свойства экстремальных полиномов.

Ключевые слова: тригонометрический полином, сопряженный полином, равномерная норма, интерполяционная формула.

A. O. Serkov. On the Szegö–Taikov inequality for conjugate trigonometric polynomials.

In 1943, Szegö found the best constant and all extremal polynomials in the inequality between the uniform norm of a conjugate trigonometric polynomial and the norm of the polynomial with real coefficients. In 1990, Taikov also found the best constant by means of another method. In the present paper, we describe all extremal polynomials with complex coefficients and discuss some properties of the extremal polynomials.

Keywords: trigonometric polynomial, conjugate polynomial, uniform norm, interpolation foumula.

1. Постановка задачи. Формулировка и обсуждение результата

Пусть $\mathscr{T}_n = \mathscr{T}_n(\mathbb{P})$ есть множество тригонометрических полиномов

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

порядка (не выше) $n \ge 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ вещественных чисел или поля $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ комплексных чисел. Для полинома T_n через $\widetilde{T}_n$ обозначим сопряженный полином

$$\widetilde{T}_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx - b_k \cos kx). \tag{1.1}$$

На множестве $\mathscr{T}_n$ введем равномерную норму

$$\|T_n\| = \|T_n\|_{C_{2\pi}} = \max_{x\in[0,2\pi]} |T_n(x)|. \tag{1.2}$$

Обозначим через $C(n) = C(n,\mathbb{P})$ наименьшую константу в неравенстве

$$\|\widetilde{T}_n\| \le C(n)\|T_n\| \tag{1.3}$$

для $T_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{P})$. Нетрудно видеть, что на самом деле $C(n,\mathbb{R}) = C(n,\mathbb{C})$. Действительно, с одной стороны, $C(n,\mathbb{R}) \le C(n,\mathbb{C})$. С другой стороны, если T_n есть экстремальный полином в неравенстве (1.3) на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ и $a \in \mathbb{R}$ — точка, в которой достигается равномерная норма его сопряженного, то полином

$$Q_n(x) = \overline{\widetilde{T}_n(a)}T_n(x) + \widetilde{T}_n(a)\overline{T_n(x)}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

принадлежит $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ и является экстремальным в (1.3) на множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$.

В 1943 г. Г. Сегё [1] доказал, что

$$C(n) = \frac{2}{n+1}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\operatorname{ctg}\Big(\frac{(2\ell+1)\pi}{2(n+1)}\Big).$$

В работе Сегё также выписаны все экстремальные полиномы с действительными коэффициентами. При этом оказалось, что при четном n экстремальный полином неединственный. А точнее, для всех n с точностью до мультипликативной константы и сдвига экстремальными являются полиномы

$$T_n^*(x) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) - K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big), \tag{1.4}$$

а для четных n экстремальными являются также полиномы

$$T_n^{**}(x) = T_n^{**}(x;\gamma) = T_n^*(x) + \gamma K_n(x-\pi), \quad \gamma\in\mathbb{R}, \quad |\gamma|\le 1. \tag{1.5}$$

Здесь и далее K_n обозначает ядро Фейера

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{k}{n+1}\Big)\cos kx = \frac{1}{2(n+1)}\Big(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\Big)^2. \tag{1.6}$$

В 1990 г. Л. В. Тайков [2], видимо, не зная работы Сегё, другим методом нашел величину $C(n)$ и показал, что полиномы T_n^* являются экстремальными. Отметим, что выражение (1.4) взято нами из работы Тайкова, в работе Сегё представление экстремальных полиномов, на наш взгляд, более сложное.

В работах Сегё и Тайкова отмечено, что

$$C(n) = \frac{2}{\pi}\ln n + O(1), \quad n\to\infty.$$

Более обстоятельно асимптотика $C(n)$ исследована в [3; 4].

Неравенство (1.3) относится к тематике точных неравенств Бернштейна и Сегё для тригонометрических полиномов; таким неравенствам в пространствах L_p, $0\le p\le\infty$, к настоящему времени посвящен большой объем исследований (см., в частности, монографию [5], работы [6–8] и приведенную в них библиографию).

В данной статье описано все множество полиномов с комплексными коэффициентами, которые являются экстремальными в неравенстве (1.3), метод доказательства основан на свойстве неотрицательности ядра Фейера и отличен от метода Г. Сегё и Л. В. Тайкова.

При умножении экстремального полинома на мультипликативную константу свойство экстремальности полинома сохраняется. Операция сопряжения (1.1) и норма (1.2) инвариантны относительно произвольного сдвига аргумента. Поэтому свойство экстремальности полинома сохраняется и при любом сдвиге аргумента. Таким образом, если T_n — экстремальный полином неравенства (1.3), то при любых $A, a\in\mathbb{R}$ полином $AT_n(x+a)$ также является экстремальным. Имея в виду этот факт, будем говорить, что экстремальный полином определен с точностью до мультипликативной константы и сдвига аргумента.

Для четного $n = 2k$ рассмотрим полином (1.5) $T_n^{**}(x;\gamma)$ для комплексных γ. Исходя из (1.4), получаем для полинома (1.5) следующее представление:

$$T_n^{**}(x) = \sum_{\ell=0}^{n}\varepsilon_\ell K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big), \tag{1.7}$$

где

$$\varepsilon_\ell = 1, \quad 0\le\ell\le k-1; \quad \varepsilon_k = \gamma; \quad \varepsilon_\ell = -1, \quad k+1\le\ell\le n. \tag{1.8}$$

Теорема 1. *С точностью до мультипликативной константы и сдвига аргумента в неравенстве* (1.3) *при нечетном n полином* (1.4) *является единственным экстремальным*; *для четного же n все экстремальные полиномы имеют вид* (1.5) *с* $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \le 1$.

Во множестве экстремальных полиномов неравенства (1.3) выделим полином Ψ_n в зависимости от четности n следующим образом. Для нечетного $n = 2k+1$ полагаем

$$\Psi_n(x) = T_n^*\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big) = \sum_{\ell=0}^{k}\Big\{K_n\Big(x+\frac{\pi}{2}-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)-K_n\Big(x+\frac{\pi}{2}+\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)\Big\}. \tag{1.9}$$

Для четного $n = 2k$ определим полином Ψ_n формулой

$$\Psi_n(x) = T_n^{**}\Big(x-\frac{n\pi}{2(n+1)};1\Big) = T_n^*\Big(x-\frac{n\pi}{2(n+1)}\Big)+K_n\Big(x-\pi-\frac{n\pi}{2(n+1)}\Big); \tag{1.10}$$

этот полином получен из полинома (1.5) при $\gamma = 1$ с помощью специально выбранного сдвига аргумента. Исходя из (1.4) и (1.7), получаем для полинома (1.10) следующее представление:

$$\Psi_n(x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}-\frac{n\pi}{2(n+1)}\Big)-\sum_{\ell=0}^{k-1}K_n\Big(x+\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}-\frac{n\pi}{2(n+1)}\Big). \tag{1.11}$$

Теорема 2. *В неравенстве* (1.3) *существуют четные экстремальные полиномы. А именно, полином Ψ_n, определенный соотношениями* (1.9), (1.10), *является четным.*

Рассмотрим множества четных и нечетных тригонометрических полиномов

$$\mathscr{C}_n = \Big\{T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx,\ a_k\in\mathbb{C}\Big\},\quad \mathscr{S}_n = \Big\{T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k\sin kx,\ b_k\in\mathbb{C}\Big\}.$$

Полиномы

$$\mathscr{S}^+{}_n = \Big\{T_n\in\mathscr{S}_n,\quad T_n(x)\ge 0,\ x\in[0,\pi]\Big\}.$$

называют *неотрицательными синус-полиномами.* Родственные (1.3) задачи для неотрицательных синус-полиномов рассматриваются в работе [10]. В работе Тайкова получено представление [2, (3)]

$$T_n^*(x) = \frac{\sin x\cos^2\frac{(n+1)x}{2}}{2(n+1)}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\frac{\sin\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}}{\Big(\cos\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}-\cos x\Big)^2},$$

из которого следует, что полином $T_n^*\in\mathscr{S}^+{}_n$. Кроме того, в силу теоремы 2 среди экстремальных полиномов существуют четные. Отсюда вытекают следующие равенства для величины $C(n)$:

$$C(n) = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{T}_n\\ \|T_n\|\le 1}}\|\widetilde{T}_n\| = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{C}_n\\ \|T_n\|\le 1}}\|\widetilde{T}_n\| = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{S}_n\\ \|T_n\|\le 1}}\|\widetilde{T}_n\| = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{S}_n^+\\ \|T_n\|\le 1}}\|\widetilde{T}_n\|;$$

$$C(n) = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{T}_n\\ \|T_n\|\le 1}}\sum_{k=1}^{n} b_k = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{S}_n\\ \|T_n\|\le 1}}\sum_{k=1}^{n} b_k = \max_{\substack{T_n\in\mathscr{S}_n^+\\ \|T_n\|\le 1}}\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

2. Вспомогательные утверждения. Доказательства теорем 1 и 2

В силу соображений инвариантности задачи исследования неравенства (1.3) и неравенства

$$|\widetilde{T}_n(0)| \le C(n)\|T_n\|_C, \quad T_n \in \mathscr{T}_n, \tag{2.1}$$

эквивалентны. А именно, наилучшие константы в этих неравенствах совпадают. Более того, если полином $T_n \in \mathscr{T}_n$ является экстремальным в неравенстве (2.1), то при любом $a \in \mathbb{R}$ полином $T_n(x+a)$ является экстремальным в неравенстве (1.3); обратно, если T_n — экстремальный полином неравенства (1.3) и $a \in \mathbb{R}$ — точка, в которой полином $\widetilde{T}_n$ достигает равномерной нормы, то $T_n(x+a)$ — экстремальный полином неравенства (2.1).

Следующее простое утверждение будет использоваться несколько раз в последующем изложении. Оно фактически содержится в работе Л. В. Тайкова [2] и основано на интерполяционной формуле А. Зигмунда [9, гл. X, § 3, (3.28)] для сопряженного полинома

$$\widetilde{T}_n\Big(\theta\Big) = -\frac{1}{n+1}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\Big\{T_n\Big(\theta+\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)-T_n\Big(\theta-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big)\Big\}\operatorname{ctg}\Big(\frac{(2\ell+1)\pi}{2(n+1)}\Big). \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Полином $T_n \in \mathscr{T}_n$ является экстремальным в неравенстве* (2.1) *в том и только в том случае, если при некотором выборе знака $\epsilon = e^{i\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$, для полинома ϵT_n выполняются соотношения*

$$\epsilon\, T_n\Big(\frac{(2j+1)\pi}{n+1}\Big) = \|T_n\|, \quad 0 \le j \le \Big\lfloor\frac{n-1}{2}\Big\rfloor; \tag{2.3}$$

$$\epsilon\, T_n\Big(-\frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) = -\|T_n\|, \quad 0 \le j \le \Big\lfloor\frac{n-1}{2}\Big\rfloor. \tag{2.4}$$

Доказательство. Действительно, допустим, что полином $T_n \in \mathscr{T}_n$ удовлетворяет условиям (2.3) и (2.4). Для полинома ϵT_n формула (2.2) в точке $\theta = 0$ превращается в равенство $\epsilon\widetilde{T}_n(0) = C(n)\|T_n\|$, так что T_n обращает (2.1) в равенство. Обратно, если при любом выборе знака ϵ нарушается хотя бы одно из условий (2.3) или (2.4), то имеет место строгое неравенство $|\widetilde{T}_n(0)| < C(n)\|T_n\|$, так что полином T_n не является экстремальным в (2.1). Лемма доказана.

Приведем свойства ядра Фейера (1.6), необходимые в дальнейшем. Из представления (1.6) видно, что полином K_n неотрицательный и принимает экстремальные значения в точках $x_\ell = 2\pi\ell/(n+1)$, $\ell \in \mathbb{Z}$. А точнее,

$$K_n\Big(\frac{2\pi\ell}{n+1}\Big) = 0, \quad \ell \ne 2\nu(n+1), \quad \nu \in \mathbb{Z}; \tag{2.5}$$

$$K_n\,(2\nu\pi) = \|K_n\| = \frac{n+1}{2}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \tag{2.6}$$

Кроме того, формула [9, т. 2, гл. X, (6.4)] для $m = n+1$ принимает вид

$$\sum_{\ell=0}^{n} K_n(x_\ell - x) = \sum_{\ell=0}^{n} K_n(x - x_\ell) = \frac{n+1}{2} = \|K_n\|. \tag{2.7}$$

Лемма 2. *Для четных n полином* (1.5) *является экстремальным в неравенстве* (1.3).

Доказательство. В условиях леммы коэффициенты (1.8) представления (1.7) полинома (1.5) обладают свойством $\max\{|\varepsilon_l|\colon 0 \le l \le n\} = 1$. Докажем, что в такой ситуации равномерная норма полинома (1.5) совпадает с нормой полинома Фейера:

$$\|T_n^{**}\| = \|K_n\| = \frac{n+1}{2}.$$

Для полиномов с вещественными коэффициентами этот факт содержится в [9, т. 2, гл. X, теорема (6.3)]. Для полиномов с комплексными коэффициентами доказательство аналогично. Действительно, используя представление (1.7), свойство неотрицательности ядра Фейера и равенство (2.7), получаем

$$|T_n^{**}(x)| \le \sum_{\ell=0}^{n} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1}\Big) = \sum_{\ell=0}^{n} K_n\Big(x - \frac{\pi}{n+1} - x_\ell\Big) = \|K_n\|.$$

В точках $t_j = (2j+1)\pi/(n+1),\ j \in \mathbb{Z}$, имеем

$$T_n^{**}(t_j) = \sum_{\ell=0}^{n} \varepsilon_\ell K_n\Big(\frac{2(j-\ell)\pi}{n+1}\Big). \tag{2.8}$$

Исходя из свойств (2.5) и (2.6) ядра Фейера, заключаем, что в сумме (2.8) отлично от нуля лишь одно слагаемое с $\ell = j$, и как следствие

$$T_n^{**}(t_j) = T_n^{**}\Big(\frac{2j+1}{n+1}\pi\Big) = \varepsilon_j \frac{n+1}{2}, \quad 0 \le j \le n.$$

Исходя из знаков ε_j, теперь нетрудно сделать вывод, что полином (1.5) удовлетворяет условиям леммы 1 со значением $\epsilon = 1$, а следовательно, является экстремальным в неравенстве (2.1). Лемма 2 доказана. □

Доказательство теоремы 1.

Случай 1. Число n нечетное: $n = 2k+1,\ k \ge 0$. Экстремальность полинома (1.4) доказана Г. Сегё и Л. В. Тайковым. Осталось убедиться, что произвольный экстремальный полином отличается от полинома (1.4) лишь постоянным множителем. Согласно лемме 1 экстремальный полином T_n неравенства (2.1) должен обладать свойствами (2.3) и (2.4) в $n+1$ точке

$$\pm t_j, \quad t_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+1}, \quad 0 \le j \le \frac{n-1}{2}. \tag{2.9}$$

В этих же точках производная T_n' полинома равна нулю. Перечисленными свойствами обладает полином T_n^*. Отношение

$$A = \frac{T_n(\pm x_j)}{T_n^*(\pm x_j)}$$

не зависит от $j,\ 0 \le j \le (n-1)/2$. Полином $T_n - AT_n^*$ имеет на периоде $n+1$ двойных нулей в точках (2.9), а потому $T_n - AT_n^* \equiv 0$ или, что то же самое, $T_n = AT_n^*$. В случае нечетного n теорема доказана.

Случай 2. Число $n \ge 2$ четное. В силу леммы 2 полиномы $AT_n^{**}(x;\gamma)$, $A, \gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| \le 1$, являются экстремальными в неравенстве (2.1). Убедимся теперь, что любой экстремальный полином T_n имеет такой вид; можно считать, что $T_n \not\equiv 0$. Согласно лемме 1 экстремальный полином T_n неравенства (2.1) должен обладать свойствами (2.3) и (2.4) в n точках

$$\pm t_j, \quad t_j = \frac{(2j+1)\pi}{n+1}, \quad 0 \le j \le \frac{n-2}{2}. \tag{2.10}$$

В этих же точках производная T_n' полинома T_n равна нулю. В результате имеем $2n$ (необходимых) условий на экстремальный полином. Величина $M^+(T_n) = T_n(t_j)$ не зависит от j для $0 \le j \le (n-2)/2$. Если необходимо, изменив знак полинома, можно считать, что $M^+(T_n) \ge 0$. Значение $T_n(\pi)$ удовлетворяет условию $|T_n(\pi)| \le \|T_n\|$, поэтому $T_n(\pi) = \gamma\|T_n\|$, где параметр $\gamma = \gamma(T_n)$ удовлетворяет условию $|\gamma| \le 1$.

Рассмотрим полином (1.5) со значением $\gamma = \gamma(T_n)$. Положим

$$A = \frac{M^+(T_n)}{\|T_n^{**}\|} = \frac{2\|T_n\|}{n+1}.$$

Полином $T_n - AT_n^{**}$ имеет на периоде $2n+1$ нуль с учетом их кратностей, а именно, двойные нули в n точках (2.10) и еще нуль в точке π (отличной от точек (2.10)). Поэтому $T_n - AT_n^{**} \equiv 0$ или, что то же самое, $T_n = AT_n^{**}$. В случае четного n теорема также доказана.

Доказательство теоремы 2.

Случай 1. Число n нечетное: $n = 2k+1,\ k \geq 0$. Нам предстоит доказать, что полином (1.9) является четным полиномом. Поскольку ядро Фейера (1.6) четное, то имеем

$$\Psi_n(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(-x + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \Big) - K_n\Big(-x + \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \Big) \Big\}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \Big) - K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \Big) \Big\}.$$

Заменив здесь ℓ на $k - \ell = (n-1)/2 - \ell = (n-1-2\ell)/2$, получаем

$$\Psi_n(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} + \frac{(n-2\ell)\pi}{n+1} \Big) - K_n\Big(x - \frac{\pi}{2} - \frac{(n-2\ell)\pi}{n+1} \Big) \Big\}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \Big\{ K_n\Big(x + \frac{\pi}{2} - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \Big) - K_n\Big(x - 2\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} \Big) \Big\}.$$

В силу свойства 2π-периодичности ядра Фейера последнее выражение совпадает с (1.9). Четность полинома (1.9) при нечетном значении номера n проверена.

Случай 2. Число n четное: $n = 2k,\ k \geq 1$. Нам предстоит доказать, что в данном случае полином (1.11) является четным. Положим

$$\Psi_n^+(x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big), \tag{2.11}$$

$$\Psi_n^-(-x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big). \tag{2.12}$$

В этих обозначениях $\Psi_n = \Psi_n^+ - \Psi_n^-$. Убедимся, что каждый из полиномов (2.11) и (2.12) является четным, тем самым утверждение леммы будет доказано и для четного n.

В силу четности ядра Фейера для полинома (2.12) имеем

$$\Psi_n^-(-x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(-x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} + \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big).$$

Заменив в последней сумме ℓ на $k-1-\ell = n/2-1-\ell = (n-2-2\ell)/2$, $0 \leq \ell \leq k-1$, получаем для этого полинома представление

$$\Psi_n^-(-x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big). \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.12) и (2.13), видим, что полином (2.12) является четным.

Аналогично для полинома (2.11) имеем

$$\Psi_n^+(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(-x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x + \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} + \frac{n\pi}{2(n+1)} \Big).$$

В последней сумме заменим ℓ на $k-\ell = n/2-\ell = (n-2\ell)/2$, $0 \le \ell \le k$. В результате получим выражение

$$\Psi_n^+(-x) = \sum_{\ell=0}^{k} K_n\Big(x - \frac{(2\ell+1)\pi}{n+1} - \frac{n\pi}{2(n+1)} + 2\pi\Big). \tag{2.14}$$

Правые части (2.11) и (2.14) совпадают, т. е. полином (2.11) является четным. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Szegö G.** On conjugate trigonometric polynomials // American J. Math. 1943. Vol. 65, no. 4. P. 532–536.
2. **Тайков Л.В.** О сопряженных тригонометрических полиномах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 110–114.
3. **Günttner R.** On the norms of conjugate trigonometric polynomials // Acta Math. Hungar. 1995. Vol. 66, no. 4. P. 269–273.
4. **Jiang T.** Asymptotic expansion of norm associated with conjugate trigonometric polynomial // Per. Math. Hung. 1993. Vol. 27, no. 2. P. 89–93.
5. **Rahman Q.I., Schmeisser G.** Analytic Theory of Polynomials. Oxford: The Clarendon Press; Oxford University Press, 2002. 742 p. (London Mathematical Society Monographs. New Series; vol. 26.)
6. **Арестов В.В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 1–15.
7. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. РАН. 2012. Т. 422, № 6. С. 727–731.
8. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
9. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 537 с.
10. **Andreani R., Dimitrov D.K.** An extremal nonegative sine polynomial // Rocky Mount. J. Math. 2003. Vol. 33, no. 3. P. 759–774.

Поступила 31.04.2015

Серков Андрей Олегович
магистрант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: aos@bmail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГЛАДКОСТНЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПОЛИНОМАМИ ПО ТЕНЗОРНОЙ СИСТЕМЕ ХААРА[1]

С. А. Стасюк

В работе изучаются два вида приближения (линейное и нелинейное) некоторых гладкостных классов (близких классам функций смешанной гладкости типа Никольского — Бесова) периодических функций многих переменных полиномами, построенными по тензорной системе Хаара. Для функций из этих классов получены порядковые оценки сверху приближения ступенчато–гиперболическими суммами Фурье — Хаара, а также точные по порядку оценки наилучшего m-членного приближения по тензорной системе Хаара.

Ключевые слова: приближение функций многих переменных, тензорная система Хаара, наилучшее m-членное приближение.

S. A. Stasyuk. Approximation of certain smoothness classes of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system.

We investigate two kinds of approximation (linear and nonlinear) of certain smoothness classes (close to Nikol'skii–Besov type classes of mixed smoothness) of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system. For the functions of these classes we obtain upper order estimates for the approximation by step-hyperbolic Fourier–Haar sums and exact order estimates for the best m-term approximation with regard to the tensor Haar system.

Keywords: approximation of functions of several variables, tensor Haar system, best m-term approximation.

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с линейным и нелинейным способами приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами, построенными по тензорной системе Хаара.

Изложение материала организовано следующим образом. В первой части работы для функций из классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty$, устанавливаются порядковые оценки сверху их приближения ступенчато-гиперболическими суммами Фурье — Хаара в метрике $L_q([0,1]^d)$, $1 < q < \infty$, а во второй части — точные по порядку оценки наилучшего m-членного приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ по тензорной системе Хаара в пространстве $L_q([0,1]^d)$, $1 < q < \infty$. В завершающей части приводятся замечания и комментарии к полученным результатам.

Предваряют первую и вторую части работы определения упомянутых аппроксимационных характеристик и классов, а также краткое изложение истории их исследования. С этой целью приведем необходимые обозначения и соотношения.

Пусть $L_p([0,1]^d)$, $1 \le p < \infty$, — лебегово пространство 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ с конечной нормой, которая определяется следующим образом:

$$||f||_p := \Bigg(\int\limits_{[0,1]^d} |f(x)|^p \, dx \Bigg)^{1/p}.$$

[1]Работа выполнена при частичной поддержке FP7-People-2011-IRSES (проект № 295164 (EUMLS: EU–Ukrainian Mathematicians for Life Sciences)).

Будем считать, что пространство $L_\infty([0,1]^d)$ состоит из 1-периодических по каждой переменной и непрерывных на $[0,1]^d$ функций и снабжено обычной равномерной нормой.

Всюду ниже для функций $f \in L_p([0,1]^d)$, $1 \le p \le \infty$, будем требовать выполнения условия

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

В дальнейшем некоторые положительные величины μ_1 и μ_2 будем связывать отношением $\mu_1 \ll \mu_2$ ($\mu_1 \gg \mu_2$), если для них выполняется неравенство $\mu_1 \le C_1\mu_2$ ($\mu_1 \ge C_2\mu_2$) при некотором значении величины $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), которая не зависит от одного, обозначенного контекстом, параметра. Если же одновременно выполняются отношения $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_2 \ll \mu_1$, то будем писать $\mu_1 \asymp \mu_2$.

Приведем сначала определение системы Хаара $\mathcal{H}$ в одномерном случае.

Пусть D_s, $s \in \mathbb{Z}_+$, обозначает множество всех двоичных интервалов на отрезке $[0,1]$ вида $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$. Положим

$$H_I(t) := |I|^{-1/2} \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \Big[j2^{-s}, \Big(j + \dfrac{1}{2}\Big)2^{-s}\Big), \\ -1, & \text{если } t \in \Big[(j + \dfrac{1}{2})2^{-s}, (j+1)2^{-s}\Big), \\ 0, & \text{если } t \notin I, \end{cases}$$

где $I \in D_s$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $I = [j2^{-s}, (j+1)2^{-s})$, $j = 0, \dots, 2^s - 1$, а $|I| = 2^{-s}$ — длина двоичного интервала I. Тогда системой Хаара в одномерном случае является следующее множество:

$$\mathcal{H} := \{H_I \colon I \in D_s,\ s \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Перейдем теперь к определению тензорной системы Хаара $\mathcal{H}$, т. е. системы Хаара в d-мерном случае. Заметим, что для обозначения тензорной системы Хаара сохраняем то же обозначение $\mathcal{H}$, что и для одномерной, которое, надеемся, не будет вызывать недоумения, поскольку далее из контекста будет понятно, о какой системе идет речь. Также далее упомянутую систему будем просто называть системой Хаара (вместо использования словосочетания “тензорная система Хаара”), если из контекста будет понятно, о какой системе идет речь.

Для $I = I_1 \times \dots \times I_d$ определим d-мерную функцию Хаара как тензорное произведение соответствующих одномерных функций Хаара, т. е.

$$H_I(x) := \prod_{j=1}^{d} H_{I_j}(x_j).$$

Далее, для функции $f \in L_q([0,1])^d)$ и вектора $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ обозначим

$$\delta_s(f) := \sum_{I \in \mathcal{D}_s} c_I(f) H_I,$$

где

$$c_I(f) := \int\limits_{[0,1]^d} f(x) H_I(x)\,dx,$$

$$\mathcal{D}_s := \{I = I_1 \times \dots \times I_d \colon\ I_j \in D_{s_j},\ j = 1, \dots, d\}.$$

Наконец, полагаем

$$\mathcal{H} := \{H_I \colon I \in \mathcal{D}_s, s \in \mathbb{Z}_+^d\}.$$

Приведем еще некоторые утверждения и соотношения, которыми будем пользоваться.

Теорема Литтлвуда — Пэли (см., например, [1, гл. 3]). *Для любой функции* $f \in L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$, *имеет место сотношение*

$$C_1(p)||f||_p \le \left\| \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} |\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \le C_2(p)||f||_p. \tag{1.1}$$

Из (1.1) вытекает следующее неравенство (см., например, [2]):

$$||f||_p \le C_3(p) \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} ||\delta_s(f)||_p^{p_0} \right)^{1/p_0}, \tag{1.2}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$.

Пусть $1 \le p < q < \infty$, тогда для $f \in L_p([0,1]^d)$ имеет место неравенство [3]

$$||f||_q \le C(p,q,d) \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+^d} \left(||\delta_s(f)||_p \, 2^{||s||_1 (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \right)^q \right)^{1/q}, \tag{1.3}$$

где $||s||_1 = s_1 + \cdots + s_d$.

Заметим, что аналогичные (1.2) и (1.3) неравенства имеют место и для кратной тригонометрической системы (см., например, [4–6]).

Для $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ определим пространства $MB^r_{p,\theta}$, которые являются аналогами пространств Никольского — Бесова функций смешанной гладкости, следующим образом:

$$MB^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d)\colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

где

$$||f||_{MB^r_{p,\theta}} := \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+^d} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \right)^\theta \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.4}$$

$$||f||_{MB^r_{p,\infty}} := \sup_{s\in\mathbb{Z}_+^d} \frac{||\delta_s(f)||_p}{2^{-r||s||_1}}. \tag{1.5}$$

Для пространства $MB^r_{p,\infty}$ будем использовать также обозначение MH^r_p.

Наряду с приведенными пространствами $MB^r_{p,\theta}$ рассмотрим близкие к ним пространства $MH^r_{p,\theta}$, $r > 0$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, определяемые следующим образом:

$$MH^r_{p,\theta} := \{f \in L_p([0,1]^d)\colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} < \infty\},$$

где

$$||f||_{MH^r_{p,\theta}} := \sup_k \left(\sum_{||s||_1 = k} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \right)^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{1.6}$$

Далее через $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ и $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ обозначим единичные шары пространств $MB^r_{p,\theta}$ и $MH^r_{p,\theta}$ соответственно, т. е.

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} := \{f \in MB^r_{p,\theta}\colon ||f||_{MB^r_{p,\theta}} \le 1\}, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{MH}^r_{p,\theta} := \{f \in MH^r_{p,\theta}\colon ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \le 1\}. \tag{1.8}$$

Множества $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ и $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ будем называть классами.

Заметим, что аналогичные $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ классы периодических функций многих переменных, определяемые через L_p-нормы соответствующих двоичных “блоков” $\delta_s(f)$ рядов Фурье функции по кратной тригонометрической системе, рассматривались В. Н. Темляковым [7] с точки зрения их наилучших m-членных приближений по кратной тригонометрической системе. При этом установление оценок сверху сопровождалось конструктивным построением m-членных приближающих агрегатов.

Согласно определениям (1.4)–(1.8) имеют место вложения

$$\mathbf{MB}^r_{p,1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MB}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty,$$

$$\mathbf{MH}^r_{p,1} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta_1} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta_2} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\infty} \equiv \mathbf{MH}^r_p, \quad 1 < \theta_1 < \theta_2 < \infty, \tag{1.9}$$

$$\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty. \tag{1.10}$$

При $d = 1$ букву $\mathbf{M}$ в обозначениях классов будем опускать. В этом случае согласно определениям (1.5), (1.6), (1.8) вместо цепочки вложений (1.9) можем записать

$$\mathbf{H}^r_{p,\theta} \equiv \mathbf{H}^r_p, \quad 1 \le \theta < \infty, \quad d = 1. \tag{1.11}$$

2. Приближения классов $\mathrm{MH}^r_{p,\theta}$ ступенчато-гиперболическими суммами Фурье — Хаара

Рассмотрим множество

$$Q_n := \bigcup_{||s||_1 \le n} \mathcal{D}_s,$$

которое называют ступенчатым гиперболическим крестом. Обозначив через $\#A$ количество элементов конечного множества A, заметим, что имеет место соотношение (см., например, [4])

$$\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}. \tag{2.1}$$

Функции $f \in L_q([0,1]^d)$ сопоставим ряд Фурье — Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{||s||_1 = n} \delta_s(f) \tag{2.2}$$

и обозначим через $S_{Q_n}(f)$ ее ступенчато-гиперболическую сумму Фурье — Хаара или частичную сумму Фурье — Хаара с носителем в множестве Q_n, полагая

$$S_{Q_n}(f) := \sum_{I \in Q_n} c_I(f) H_I = \sum_{||s||_1 \le n} \delta_s(f). \tag{2.3}$$

Для $f \in L_q([0,1]^d)$ определим

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q := ||f - S_{Q_n}(f)||_q \tag{2.4}$$

— величину приближения функции f частной суммой Фурье — Хаара $S_{Q_n}(f)$ в метрике пространства $L_q([0,1]^d)$.

Сформулируем и докажем теорему, в которой установлены порядковые оценки сверху для величины

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q := \sup_{f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}} \mathcal{E}_{Q_n}(f)_q.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1$, *тогда*

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \ll \begin{cases} 2^{-(r - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})n}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le p < q < \infty, \\ 2^{-rn}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, & 1 \le q \le p \le \infty,\ p \ne 1, \end{cases}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$, $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$. При $1 \le p < q \le \theta < \infty$, используя неравенство (1.3), неравенство Гельдера (с показателем θ/q), а также соотношение

$$\sum_{||s||_1=k} 1 \asymp k^{d-1}, \tag{2.5}$$

получим

$$\Big\| \sum_{||s||_1>n} \delta_s(f) \Big\|_q \ll \Big(\sum_{||s||_1>n} \Big(||\delta_s(f)||_p \, 2^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})||s||_1} \Big)^q \Big)^{1/q}$$

$$= \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \Big)^q \, 2^{-q||s||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Big)^{1/q}$$

$$\le \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{r||s||_1\theta} ||\delta_s(f)||_p^\theta \Big)^{q/\theta} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{-||s||_1(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\frac{q\theta}{\theta-q}} \Big)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q}$$

$$\le ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Big(\sum_{||s||_1=k} 1 \Big)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q} \le \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \Big(\sum_{||s||_1=k} 1 \Big)^{\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q}$$

$$\asymp \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-qk(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} k^{(d-1)\frac{\theta-q}{\theta}} \Big)^{1/q} \asymp 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) заключаем, что ряд (2.2) сходится к функции f в пространстве $L_q([0,1]^d)$ и

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})}, \quad 1 \le p < q \le \theta < \infty. \tag{2.7}$$

Если же $1 \le p < q < \infty$, а $1 \le \theta < q$, то из (2.7) с учетом (1.9) получим

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,q})_q \ll 2^{-(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}.$$

Пусть теперь $1 < q = p < \infty$. В случае $\theta \ge p_0 = \min\{p, 2\}$, используя неравенство (1.2), неравенство Гельдера (с показателем θ/p_0) и соотношение (2.5), имеем

$$\Big\| \sum_{||s||_1>n} \delta_s(f) \Big\|_p \ll \Big(\sum_{||s||_1>n} ||\delta_s(f)||_p^{p_0} \Big)^{1/p_0} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \Big)^{p_0} \; 2^{-rp_0||s||_1} \Big)^{1/p_0}$$

$$\le \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{r||s||_1\theta} ||\delta_s(f)||_p^\theta \Big)^{p_0/\theta} \Big(\sum_{||s||_1=k} 2^{-r\frac{\theta p_0}{\theta-p_0}||s||_1} \Big)^{\frac{\theta-p_0}{\theta}} \Big)^{1/p_0}$$

$$\le ||f||_{MH^r_{p,\theta}} \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-p_0kr} \Big(\sum_{||s||_1=k} 1 \Big)^{\frac{\theta-p_0}{\theta}} \Big)^{1/p_0} \ll \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-p_0kr} k^{(d-1)\frac{\theta-p_0}{\theta}} \Big)^{1/p_0}$$

$$\asymp 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) с учетом замечания при получении неравенства (2.7) заключаем, что

$$\mathcal{E}_{Q_n}(f)_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})}, \quad 1 < q = p < \infty, \quad \theta \ge p_0. \tag{2.9}$$

Если же $1 < q = p < \infty$ и $1 \le \theta < p_0$, то из (2.9) с учетом (1.9) получаем

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_p \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,p_0})_p \ll 2^{-rn}. \tag{2.10}$$

Для случая $1 \le q < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ вследствие неравенства $||\cdot||_q \le ||\cdot||_p$ и доказанных выше неравенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_p \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Наконец, при $1 \le q < \infty$, $p = \infty$, $1 \le \theta < \infty$ в силу вложения $\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{q+1,\theta}$, а также неравенств (2.9) и (2.10) получим

$$\mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{\infty,\theta})_{q+1} \le \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}^r_{q+1,\theta})_{q+1} \ll 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Наилучшее m-членное приближение классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ по тензорной системе Хаара

Пусть задана функция $f \in L_q([0,1]^d)$, $1 \le q \le \infty$, и множество $\mathcal{B} = \{g_j \in L_q([0,1]^d) : j = 1,2,\dots\}$, $\overline{\operatorname{span}\mathcal{B}} = L_q([0,1]^d)$. Наилучшим m-членным приближением функции f по системе $\mathcal{B}$ в пространстве $L_q([0,1]^d)$ называется величина

$$\sigma_m(f,\mathcal{B})_q := \inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{N}\\ \#\Lambda=m}} \inf_{a_j} \Big\| f - \sum_{j\in\Lambda} a_j g_j \Big\|_q, \quad m = 1,2,\dots. \tag{3.1}$$

Для $F \subset L_q([0,1]^d)$ полагаем

$$\sigma_m(F,\mathcal{B})_q := \sup_{f\in F} \sigma_m(f,\mathcal{B})_q. \tag{3.2}$$

Величина $\sigma_m(f,\mathcal{B})_2$ была введена С. Б. Стечкиным [8] при формулировке критерия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Фурье для f по ортонормированной системе $\mathcal{B}$. Далее, исследования как величин (3.1), так и величин (3.2) для тех или иных функциональных классов проводились в многочисленных работах (см., например, [4; 6; 9–15; 7], где можно ознакомиться с более подробной информацией по данному вопросу, в частности, касательно приближения по кратной тригонометрической системе). Относительно исследования величин (3.1) и (3.2) для систем Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$ отметим работы [16–23].

Рассмотрим в (3.2) в качестве $\mathcal{B}$ тензорную систему Хаара $\mathcal{H} = \{H_I\}_I$, а в качестве F — классы $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, а затем — классы $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$.

Итак, для классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ имеет место следующий результат.

Теорема A [22; 23]. *Пусть $1 < p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $1/p < r < 1$. Тогда для любого $m \ge 2$*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta},\mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.3}$$

Заметим, что при $p = \infty$ теорема A доказана в [22], а при $1 < p < \infty$ — в [23].

Для более широких, чем $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ имеет место такой же, как и в теореме A, результат. Сформулируем его.

Теорема 2. *Пусть $1 < p \le \infty$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $1/p < r < 1$. Тогда для любого $m \ge 2$*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta},\mathcal{H})_q \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала оценку сверху для величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta},\mathcal{H})_q$. При этом будет использоваться схема рассуждений, аналогичная той, которая применялась А. В. Андриановым [18] при получении оценки сверху для величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_p,\mathcal{H})_q$.

По заданному m выберем $n \in \mathbb{N}$, которое удовлетворяет соотношению

$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{3.5}$$

и представим функцию $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ в виде

$$f = S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \delta_s(f) = S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I\in\Delta Q_k} c_I(f)H_I$$

$$= S_{Q_n}(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{||s||_1=k} \sum_{I\in\mathcal{D}_s} c_I(f)H_I, \tag{3.6}$$

где $\Delta Q_k := Q_k \backslash Q_{k-1}$.

Введем следующие обозначения

$$N_k := \#\{s \in \mathbb{N}^d\colon ||s||_1 = k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$M_k := [\#\{\Delta Q_n\} 2^{-\eta(k-n)}], \quad k > n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, а $\eta > 0$ — число, значение которого при $1 < p < \infty$ будет уточнено позже.

Заметим, что

$$N_k \asymp k^{d-1}, \tag{3.7}$$

$$M_k \asymp 2^n n^{d-1} 2^{-\eta(k-n)} \tag{3.8}$$

вследствие (2.5) и (2.1) соответственно.

Дальше, отталкиваясь от представления (3.6), опишем процедуру построения полинома P_m, которым будем приближать функцию f.

Для каждого $k = n+1, n+2, \ldots$ и $s\colon ||s||_1 = k$ найдем $\big[M_k/N_k\big]$ наибольших по модулю коэффициентов $c_I(f)$, $I \in \mathcal{D}_s$, в сумме

$$\sum_{I\in\mathcal{D}_s} c_I(f)H_I, \tag{3.9}$$

содержащейся в представлении (3.6).

Поскольку для функций Хаара (одной переменной) H_{I_j} с $|I_j| = 2^{-k_j}$, $k_j = 0, 1, \ldots$, при любом $p \in [1;\infty)$ и произвольных действительных a_{I_j} имеет место равенство [24]

$$\Big\| \sum_{|I_j|=2^{-k_j}} a_{I_j} H_{I_j} \Big\|_p = 2^{k_j(\frac12-\frac1p)} \bigg(\sum_{|I_j|=2^{-k_j}} |a_{I_j}|^p \bigg)^{1/p},$$

то для функций H_I таких, что $I \in \mathcal{D}_s$, $||s||_1 = k$, имеем

$$||\delta_s(f)||_p = 2^{||s||_1(\frac12-\frac1p)} \bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p \bigg)^{1/p} = \bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p \bigg)^{1/p} 2^{-k(\frac1p-\frac12)}. \tag{3.10}$$

Соответствующие (3.10) равенства для $p = \infty$ будут иметь следующий вид:

$$||\delta_s(f)||_\infty = 2^{||s||_1/2} \max_{I\in\mathcal{D}_s} |c_I(f)| = 2^{k/2} \max_{I\in\mathcal{D}_s} |c_I(f)|. \tag{3.11}$$

Далее, вследствие (1.8) (1.6) и (3.10), для $1 < p < \infty$ можем записать

$$1 \geq \bigg(\sum_{||s||_1=k} \Big(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_p \Big)^\theta \bigg)^{1/\theta} = 2^{k(r-\frac1p+\frac12)} \bigg(\sum_{||s||_1=k} \bigg(\sum_{I\in\mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p \bigg)^{\theta/p} \bigg)^{1/\theta}. \tag{3.12}$$

Если же $p = \infty$, то вследствие (1.8), (1.6) и (3.11) имеем

$$1 \geq \left(\sum_{||s||_1 = k} \left(2^{r||s||_1} ||\delta_s(f)||_\infty \right)^\theta \right)^{1/\theta} = 2^{k(r+\frac{1}{2})} \left(\sum_{||s||_1 = k} \max_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)|^\theta \right)^{1/\theta}. \tag{3.13}$$

Итак, для каждого $k = n+1, n+2, \ldots$ и s: $||s||_1 = k$ выделим $\left[M_k/N_k\right]$ таких слагаемых $c_I(f)H_I$ из (3.9) (и одновременно из (3.6)), которым соответствуют наибольшие значения $|c_I(f)|$. По такому же принципу выделяем $\left[M_k/N_k\right]$ слагаемых $|c_I(f)|^p$ из суммы $\sum_{I \in \mathcal{D}_s} |c_I(f)|^p$ в (3.12) при $1 < p < \infty$. Отметим, что в результате проделанной процедуры каждое из оставшихся в (3.12) слагаемых $|c_I(f)|^p$, $1 < p < \infty$, а также каждый из коэффициентов, оставшихся в (3.6) и (3.9) слагаемых $c_I(f)H_I$, в силу (3.12) и (3.13) будет удовлетворять соотношению

$$|c_I(f)| \ll 2^{-k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \left(\frac{N_k}{M_k} \right)^{1/p} k^{-\frac{d-1}{\theta}}, \quad 1 < p \leq \infty. \tag{3.14}$$

Искомый полином P_m будет состоять из заданной формулой (2.3) суммы $S_{Q_n}(f)$ и всех тех слагаемых $c_I(f)H_I$ из (3.6), которые выделены в результате описанной выше процедуры. Убедимся, что количество слагаемых $c_I(f)H_I$ построенного полинома P_m равно по порядку m. Действительно, принимая во внимание (2.1), (3.7), (3.8) и (3.5), имеем

$$\#Q_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\frac{M_k}{N_k} \right] k^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\eta(k-n)} \asymp 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Покажем, что построенный полином P_m реализует оценку сверху в (3.4). В силу теоремы Литтлвуда — Пэли, а также соотношений (3.6), (3.14), (3.7), (3.8), (2.5) получаем

$$||f - P_m||_q \asymp \left\| \left(\sum_I |c_I(f - P_m)|^2 \, |H_I|^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$\ll \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{I \in \Delta Q_k} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \left(\frac{N_k}{M_k} \right)^{2/p} H_I^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$= \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \left(\frac{N_k}{M_k} \right)^{2/p} 2^k \sum_{I \in \Delta Q_k} \chi_I \right)^{1/2} \right\|_q$$

$$\ll \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})} k^{-\frac{2(d-1)}{\theta}} \left(\frac{k^{d-1}}{M_k} \right)^{2/p} \chi_{[0,1]^d} \sum_{||s||_1 = k} 1 \right)^{1/2}$$

$$\asymp \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})} \left(\frac{k^{d-1}}{M_k} \right)^{2/p} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \right)^{1/2}$$

$$\asymp \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p})} 2^{k\eta\frac{2}{p} - (\eta+1)\frac{2n}{p}} n^{-\frac{2}{p}(d-1)} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \right)^{1/2}$$

$$= 2^{-(\eta+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-2k(r-\frac{1}{p}-\frac{\eta}{p})} k^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \right)^{1/2}, \tag{3.15}$$

где через χ_A обозначен индикатор множества $A \subset \mathbb{R}^d$.

Поскольку $1/p < r < 1$, то очевидным является существование такого $\eta > 0$, для которого будет верным неравенство $r - 1/p - \eta/p > 0$. Поэтому при таком η из (3.15), учитывая (3.5), имеем

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta}, \mathcal{H})_q \ll 2^{-(\eta+1)\frac{n}{p}} n^{-\frac{d-1}{p}} \left(2^{-2n(r-\frac{1}{p}-\frac{\eta}{p})} n^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta}+\frac{2}{p})} \right)^{1/2}$$

$$= 2^{-rn} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp m^{-r} \left(\log_2^{d-1} m\right)^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Оценка сверху установлена.

Оценка снизу в (3.4) следует из (3.3) вследствие вложения (1.10).

Теорема 2 доказана.

4. Замечания и комментарии к полученным результатам

Замечание 1. Для классов $\mathbf{MH}_p^r$ утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, ранее доказаны А. В. Андриановым [18].

Замечание 2. При $d = 1$ результаты, содержащиеся в теоремах 1 и 2, известны (см. [18]). Констатация этого факта основана на (1.11).

Замечание 3. Оценка снизу в теореме 2, как видно из доказательства, справедлива при $0 < r < 1$. Это с учетом неравенства $\sigma_m(f, \mathcal{H})_q \leq \mathcal{E}_{Q_n}(f)_q$ при $m = \#Q_n$ позволяет записать

Следствие. *Пусть* $2 \leq p \leq \infty$, $1 < q < \infty$, $q \leq p$, $2 \leq \theta < \infty$, $0 < r < 1$, $m = \#Q_n$, *тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}_{p,\theta}^r, \mathcal{H})_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(\mathbf{MH}_{p,\theta}^r)_q \asymp 2^{-rn}\, n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Замечание 4. В. С. Романюком [25] установлено (как следствие одного результата для произвольного натурального d), что при $d = 1, 1 \leq p < \infty$, $1 < q \leq \infty$, $(1/p - 1/q)_+ < r < 1/p$ имеет место оценка

$$\sigma_m(\mathbf{H}_p^r, \mathcal{H})_q \asymp m^{-r},$$

которая при допустимых следствием ограничениях на параметры p, q с учетом условия $m = \#Q_n$ содержится в этом следствии.

В заключение выражаем искреннюю благодарность рецензенту за ценные советы и замечания, которые способствовали улучшению изложения материала работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. 2-е изд., доп. М.: АФЦ, 1999. 550 с.
2. **Temlyakov V.N.** The best m-term approximation and greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 1998. Vol. 8, no. 3. P. 249–265.
3. **Temlyakov V.N.** Some inequalities for multivariate Haar polynomials // East J. Appr. 1995. Vol. 1, no. 1. P. 61–72.
4. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
5. **Temlyakov V.N.** Approximation of periodic functions. Commack, New York: Nova Science Publishers, Inc., 1993. 419 p. (Comput. Math. and Anal. Ser.)
6. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / Ін-т математики НАН України. Київ, 2012. Т. 93 (Праці Інституту математики НАН України). 352 с.
7. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160.
8. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 2. С. 37–40.
9. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–178.
10. **Кашин Б.С.** Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 172. С. 187–191.
11. **Белинский Э.С.** Приближение “плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций // Мат. сб. 1987. Т. 132, № 1. С. 20–27.
12. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 5. С. 57–86.

13. **Temlyakov V.N.** Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. Vol. 3, no. 1. P. 33–107.
14. **Романюк А.С.** Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. математическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.
15. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // arXiv: 1503.00282v1 [math.NA] 1 Mar 2015. P. 1–30. URL: http://arxiv.org/pdf/1503.00282v1.pdf.
16. **Temlyakov V.N.** Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system // East J. Appr. 1998. Vol. 4, no. 1. P. 87–106.
17. **Andrianov A.V., Temlyakov V.N.** Best m-term approximation of functions from classes $MW^r_{q,\alpha}$ // Approx. Theory IX. 1998. Vol. 1. P. 7–14.
18. **Андрианов А.В.** Приближение функций из классов MH^r_p полиномами Хаара // Мат. заметки. 1999. Т. 66, № 3. С. 323–335.
19. **Andrianov A.V.** Nonlinear Haar approximation of functions with bounded mixed derivative // Wavelet analysis and multiresolution methods (Urbana-Champaign, IL, 1999). New York, 2000. P. 27–47. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math.; vol. 212.)
20. **Освальд П.** Об N-членных приближениях по системе Хаара в H^s-нормах // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа / под ред. С. М. Никольского. М.: АФЦ, 1999. С. 137–163.
21. **Стасюк С.А.** Приближение функций многих переменных классов H^Ω_p полиномами по системе Хаара // Anal. Math. 2009. Vol. 35, no. 4. P. 257–271.
22. **Стасюк С.А.** Наилучшее m-членное приближение классов $B^r_{\infty,\theta}$ функций многих переменных полиномами по системе Хаара // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 4. С. 549–555.
23. **Стасюк С.А.** Приближения классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных полиномами по системе Хаара // Укр. мат. вiсн. 2015. Т. 12, № 1. С. 97–109.
24. **Голубов Б.И.** Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша // Мат. сб. 1972. Т. 87(129), № 2. С. 254–274.
25. **Романюк В.С.** Конструктивная характеристика классов Гельдера и m-членные приближения по кратному базису Хаара // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 3. С. 349–360.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 15.10.2014
Исправленный вариант 12.10.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.65

О РАВНОМЕРНЫХ КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_r$ произвольного порядка r с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен которого имеет только действительные и попарно различные корни, изучаются константы Лебега (нормы линейных операторов из C в C) локальных экспоненциальных сплайнов с равномерным расположением узлов, соответствующих этому оператору, построенных авторами в предыдущих работах. В частности, для оператора $\mathcal{L}_3 = D(D^2-\beta^2)$ $(\beta>0)$ третьего порядка вычислены точно константы Лебега для двух видов локальных сплайнов, и произведено их сравнение с константами Лебега интерполяционных экспоненциальных сплайнов.

Ключевые слова: константы Лебега, экспоненциальные сплайны, линейный дифференциальный оператор.

E. V. Strelkova, V. T Shevaldin. On uniform Lebesgue constants of local exponential splines with equidistant knots.

For a linear differential operator $\mathcal{L}_r$ of arbitrary order r with constant coefficients and real pairwise different roots of the characteristic polynomial, we study Lebesgue constants (the norms of linear operators from C to C) of local exponential splines corresponding to this operator with a uniform arrangement of knots; such splines were constructed by the authors in earlier papers. In particular, for the third-order operator $\mathcal{L}_3 = D(D^2-\beta^2)$ $(\beta>0)$, we find the exact values of Lebesgue constants for two types of local splines and compare these values with Lebesgue constants of exponential interpolation splines.

Keywords: Lebesgue constants, exponential splines, linear differential operator.

Введение

Вначале кратко изложим известные результаты (см. [1]), касающиеся существования и единственности интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов на всей числовой оси.

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ ($r \in \mathbb{N}$, D — символ дифференцирования) — произвольный линейный дифференциальный оператор r-го порядка с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1). Он может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{s=1}^{k}(D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2)\prod_{j=1}^{r-2k}(D-\beta_j), \tag{0.1}$$

где α_s, β_j и γ_s — некоторые действительные числа (при $k=0$ первое произведение в этом равенстве отсутствует), причем можно считать, что $\alpha_s > 0$ $(s=\overline{1,k})$. Нам понадобится также оператор

$$\mathcal{L}_{r+1}(D) = D\mathcal{L}_r(D).$$

Пусть

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{r+1}} f(x) = (T-E)\prod_{s=1}^{k}(T^2 - 2Te^{\gamma_s h}\cos\alpha_s h + e^{2\gamma_s h}E)\prod_{j=1}^{r-2k}(T - e^{\beta_j h}E)f(x)$$

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

— обобщенная конечная разность с шагом $h > 0$, соответствующая оператору $\mathcal{L}_{r+1}$, определенная на множестве функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор. Ее можно привести к виду

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_{r+1}} f(x) = \sum_{s=0}^{r+1} (-1)^{r+1-s} \mu_s^{(r+1)} f(x+sh),$$

где $\mu_s^{(r+1)}$ $(s = \overline{0, r+1})$ — коэффициенты при степенях x в многочлене

$$p_{r+1}(x) = (x-1) \prod_{s=1}^{k} (x^2 - 2xe^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h}) \prod_{j=1}^{r-2k} (x - e^{\beta_j h}).$$

Пусть φ_{r+1} — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_{r+1}(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_{r+1}^{(j)}(0) = \delta_{j,r}$ $(j = \overline{0, r})$, где $\delta_{j,r}$ — символ Кронекера. Введем функцию

$$R_{r+1}(t) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \sum_{s=j}^{r+1} (-1)^{r+1-s} \mu_s^{(r+1)} \varphi_{r+1}((s-1+j-t)h) \quad (0 \le t \le 1).$$

Из [1] следует, что эта функция удовлетворяет равенству $R_{r+1}(1) = -R_{r+1}(0)$. Кроме того, в [1] доказано, что при $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \le s \le k} \alpha_s$ эта функция на полуинтервале $[0; 1)$ имеет только одну точку экстремума (обозначим ее через θ_1) и ровно один нуль (обозначим его через θ_2), причем этот нуль простой. Пусть $S(\mathcal{L}_{r+1}, \alpha)$ — множество $\mathcal{L}$-сплайнов $S \in C^{(r-1)}(\mathbb{R})$ порядка $r+1$ (минимального дефекта), соответствующих оператору $\mathcal{L}_{r+1}$, с равномерными узлами $(l+\alpha)h$ $(l \in \mathbb{Z})$, где α — фиксированное число, $0 \le \alpha < 1$. То есть любая функция $S \in S(\mathcal{L}_{r+1}, \alpha)$ такова, что функция $S^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и для любого $l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}_r(D) S((l-1)h + t) = Z_l, \quad \alpha h \le t < (\alpha+1)h,$$

где Z_l — некоторые константы. Сетка узлов $\{(l+\alpha)h\}_{l \in \mathbb{Z}}$ называется сеткой узлов сплайна S. Пусть $M > 0$ и

$$Y = \{y = \{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}} \colon \sup_l |\Delta_h^{\mathcal{L}_r} y_l| \le M\},$$

где

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} y_l = \prod_{s=1}^{k} (T^2 - 2Te^{\gamma_s h} \cos \alpha_s h + e^{2\gamma_s h} E) \prod_{j=1}^{r-2k} (T - e^{\beta_j h} E) y_l$$

— обобщенная конечная разность с шагом $h > 0$, соответствующая оператору $\mathcal{L}_r$, определенная на пространстве последовательностей $\{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ (при этом $Ty_l = y_{l+1}$).

Теорема A [1; 2]. *Пусть $0 < h < h_0 = \pi / \max_{1 \le s \le k} \alpha_s$. Для любой последовательности $y \in Y$ существует только один $\mathcal{L}$-сплайн $S \in S(\mathcal{L}_{r+1}, \alpha)$, удовлетворяющий условиям*

$$S(lh) = y_l \quad (l \in \mathbb{Z}), \tag{0.2}$$

тогда и только тогда, когда $\alpha \ne \theta_2$.

Для оператора $\mathcal{L}_r = D^r$ (приводящего к интерполяционным полиномиальным сплайнам на всей оси $\mathbb{R}$) теорема A установлена Дж. Албергом, Э. Нильсоном и Дж. Уолшем [3] и Ю. Н. Субботиным [4]. В случае оператора $\mathcal{L}_r = \prod_{j=1}^{r} (D - \beta_j)$ (т. е. при $k = 0$) теорема A доказана Ч. Мичелли [5] (другое доказательство предложил И. Шенберг [6]). Отметим, что в [2] получены и более общие результаты в задачах существования и единственности обобщенных интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов, указано их применение в ряде экстремальных задач теории приближения функций и приведена более полная библиография по данной тематике.

Поскольку из [1] следует, что при $0 < h < h_0 = \pi/\max_{1\le s\le k}\alpha_s$ числа θ_1 и θ_2 не совпадают, то согласно теореме A на полуинтервале $[0;1)$ существует ровно одна “плохая” точка $\alpha = \theta_2$, в которой задача интерполяции (0.2) неразрешима. Возникает естественный вопрос: а какая из остальных точек полуинтервала $[0;1)$ предпочтительнее остальных? Последующие исследования, в частности, второго автора [7] и С. И. Новикова [8] показали, что такой точкой является $\alpha = \theta_1$. Следует отметить, что если оператор $\mathcal{L}_r$ является формально самосопряженным (т. е. удовлетворяет равенству $\mathcal{L}_r(-D) = (-1)^r\mathcal{L}_r(D)$), то при четном $r:\ \theta_1 = 1/2,\ \theta_2 = 0$, а при нечетном $r:\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = 1/2$.

Для функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положим $y_l = f(lh)$ $(l\in\mathbb{Z})$. Интерполяционный $\mathcal{L}$-сплайн $S(x) = S(f,x) \in S(\mathcal{L}_{r+1},\alpha)$ задает линейный метод аппроксимации функции f на оси $\mathbb{R}$. Одной из характеристик устойчивости метода S является поведение равномерной нормы оператора S (как оператора, действующего из пространства C непрерывных на всей оси $\mathbb{R}$ функций в C), а именно, величины

$$L_1 = L_1(\mathcal{L}_{r+1},\alpha) = \|S\|_C^C = \sup_{\|f\|_C\le 1}\|S(f,\cdot)\|_C.$$

Число L_1 называется константой Лебега метода S. Важной задачей является ее вычисление при любом $\alpha\ne\theta_2$. Чем меньше такая константа, тем больше устойчивость сплайна к изменению аппроксимативных условий.

Для интерполяционных полиномиальных сплайнов (т. е. в случае оператора $\mathcal{L}_{r+1} = D^{r+1}$) с выбором $\alpha = 0$, если r нечетно, и $\alpha = 1/2$, если r четно, различными вопросами, связанными с вычислением или оценкой сверху констант Лебега $L_1(D^{r+1},\alpha)$ (как в случае периодических функций, так и в непериодическом случае) занимались многие математики: Ф. Шурер и Е. В. Чини [9], А. А. Женсыкбаев [10], Ф. Ричардс [11], Ю. Н. Субботин и С. А. Теляковский [12; 13] и др. Для интерполяционных полиномиальных сплайнов на оси $\mathbb{R}$ выделим утверждение, полученное Ф. Ричардсом в 1975 году.

Теорема B [11]. *Пусть $\alpha = 0$, если r нечетно, и $\alpha = 1/2$, если r четно. Тогда имеет место асимптотическое равенство*

$$L_1(D^{r+1},\alpha) = \frac{2}{\pi}\ln r + \frac{4}{\pi}\Big(\ln\frac{4}{\pi} + \frac{\gamma}{2}\Big) + o(1)\quad (r\to\infty),$$

где γ — постоянная Эйлера. Кроме того, $L_1(D^3,1/2) = \sqrt{2}$.

Для $\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами задачи нахождения или оценки констант Лебега рассматривались для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, характеристические многочлены которых имели только действительные корни, и обязательно при $\alpha = \theta_1$ (см. [14–19]). Для линейного формально самосопряженного дифференциального оператора вида

$$\mathcal{L}_{2m+1} = \mathcal{L}_{2m+1}(D) = D\prod_{j=1}^{m}(D^2-\beta_j^2),\quad \beta_j\in\mathbb{R},$$

Х. Г. Морше [15] и В. А. Ким [18] нашли два явных выражения для величины $L_1(D^{2m+1},1/2)$, отличающиеся по форме записи. При этом Х. Г. Морше был получен аналог теоремы B.

Теорема C [15]. *Пусть*

$$\tau_m = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\beta_j^2+\pi^2}.$$

Тогда в случае, если $\tau_m\to\infty$ (при $m\to\infty$), имеет место асимптотическое равенство

$$L_1\Big(\mathcal{L}_{2m+1},\frac{1}{2}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\ln\tau_m + \ln\frac{8}{\pi} + \gamma\Big) + O(\tau_m^{-2})\quad (m\to\infty).$$

Если же последовательность $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}$ *сходится, то последовательность констант Лебега* $L_1(\mathcal{L}_{2m+1}, 1/2)$ *тоже сходится.*

В настоящей работе мы начинаем исследование констант Лебега неинтерполяционных локальных $\mathcal{L}$-сплайнов с равномерными узлами, построенных авторами в предыдущих работах (см., например, [20; 21] и определения в следующих разделах) в случае, когда характеристический многочлен соответствующего линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ имеет только действительные и попарно различные корни. Такие $\mathcal{L}$-сплайны называются экспоненциальными. Для них нам не удалось получить аналоги теорем B и C. В разд. 1 (см. далее теорему 1) доказано, что константы Лебега локальных экспоненциальных сплайнов (см. определения ниже) ограничены при $h \to 0$. Кроме того, в разд. 2 и 3 в случае оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ такие константы Лебега вычислены только для двух видов локальных экспоненциальных сплайнов. В данной работе развиты результаты авторов для параболических локальных сплайнов, полученные в [22].

1. Локальные экспоненциальные сплайны произвольного порядка

Вначале кратко изложим общую схему построения локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами (см. [20; 21]).

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ — линейный дифференциальный оператор r-го порядка вида (0.1), у которого все корни характеристического многочлена являются действительными (в определении (0.1) полагаем $k = 0$) и попарно различными ($\beta_j \neq \beta_s$, если $s \neq j$). Такой оператор записывается в виде

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^{r}(D - \beta_j). \tag{1.1}$$

Обобщенная конечная разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x)$, определенная на множестве функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, соответствующая оператору $\mathcal{L}_r$ (она обращается в нуль на функциях из ядра этого оператора), представляется в виде

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T - e^{\beta_j h}E) f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)} f(x + sh),$$

где $\mu_r^{(r)} = 1,\ \mu_{r-1}^{(r)} = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}, \ldots, \mu_0^{(r)} = \prod_{j=1}^{r} e^{\beta_j h}$. Пусть φ_r — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ $(j = \overline{0, r-1})$. B-$\mathcal{L}$-сплайн $B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x)$ (базисный сплайн для оператора $\mathcal{L}_r$) с носителем $\operatorname{supp} B_{\mathcal{L}_r} = [0; rh]$ и узлами $0, h, 2h, \ldots, rh$ определяется формулой

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_r} \varphi_r((x - rh)_+), \tag{1.2}$$

где $t_+ = \max\{0, t\}$. Для произвольного числа $\alpha : 0 \le \alpha < 1$ и любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j + \alpha)h) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

и рассмотрим систему функционалов

$$I_j = I_j(\alpha) = c_1 y_{j+\alpha} + c_2 y_{j+\alpha+1} + \cdots + c_r y_{j+\alpha+r-1} \quad (j \in \mathbb{Z},\ c_s \in \mathbb{R}\ (s = \overline{1, r})).$$

Локальный экспоненциальный сплайн, задающий линейный метод приближения функции f, определяется формулой

$$S_{\mathcal{L}_r}(x) = S_{\mathcal{L}_r}(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Таким образом, сетка узлов $\{(j+\alpha)h\}_{j\in\mathbb{Z}}$ функции f, для которой строится аппроксимирующий ее сплайн, сдвинута на величину αh относительно сетки узлов $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$ самого сплайна $S_{\mathcal{L}_r}$. Неизвестные числа c_s $(s=\overline{1,r})$ выбираются таким образом, чтобы имели место следующие равенства:

$$S_{\mathcal{L}_r}(e^{\beta_j \cdot}, x) = e^{\beta_j x}, \quad j=\overline{1,r} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

В [20] установлено, что если все действительные числа β_j $(j=\overline{1,r})$ попарно различны, то для любого числа $\alpha : 0\le\alpha<1$ такой выбор может быть осуществлен единственным образом, причем для определения чисел c_s $(s=\overline{1,r})$ указана невырожденная система r линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta_j (s-1)h} = e^{\beta_j(r-1-\alpha)h} \prod_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{r} \frac{\beta_j-\beta_k}{e^{\beta_j h}-e^{\beta_k h}} \quad (j=\overline{1,r}). \tag{1.4}$$

Построенные локальные экспоненциальные сплайны обладают хорошими аппроксимативными, формосохраняющими и сглаживающими свойствами [20], несмотря на то что они не являются интерполяционными (т. е. $S_{\mathcal{L}_r}((j+\alpha)h)\ne f((j+\alpha)h)$ $(j\in\mathbb{Z})$). Рассматривая $S_{\mathcal{L}_r}$ как оператор, действующий из пространства C непрерывных на всей оси функций в пространство C, определим его равномерную норму при помощи равенства

$$L_2 = L_2(\mathcal{L}_r,\alpha) = \|S_{\mathcal{L}_r}\|_C^C = \sup_{\|f\|_C\le 1} \|S_{\mathcal{L}_r}(f,\cdot)\|_C.$$

Величину $L_2(\mathcal{L}_r,\alpha)$ будем называть константой Лебега локального экспоненциального сплайна $S_{\mathcal{L}_r}(f,x)$ и поставим вопрос о ее точном вычислении или оценке сверху.

Теорема 1. *Пусть числа β_j $(j=\overline{1,r})$ действительны и попарно различны. Тогда для любого $\alpha : 0\le\alpha<1$ имеет место равенство*

$$L_2(\mathcal{L}_r,\alpha) = O(1) \quad (h\to 0).$$

Доказательство. В [21, теорема 1.6] было доказано следующее равенство:

$$\max_{x\in[0;rh]} |B_{\mathcal{L}_r}(x)| = O(h^{r-1}) \quad (h\to 0).$$

Е. Г. Пыткеев [23, теорема 1] доказал, что

$$c_s = c_s(h) = O(h^{-(r-1)}) \quad (h\to 0).$$

Поэтому из определения (1.3) сплайна $S_{\mathcal{L}_3}(f,x)$ выводим равенство

$$\|S_{\mathcal{L}_r}\|_C^C = O(1) \quad (h\to 0).$$

Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. Интересно выяснить поведение величин $L_2(\mathcal{L}_r,\alpha)$ при $r\to\infty$ и сравнить полученные результаты с утверждениями теорем B и C.

2. Локальные экспоненциальные сплайны оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ $(\beta>0)$, сохраняющие его ядро

В данном разделе сохраним обозначения разд. 1 и в равенстве (1.1) положим $r=3$, $\beta_1=0$, $\beta_2=\beta$, $\beta_3=-\beta$ $(\beta>0)$, и пусть $\alpha=1/2$.

Теорема 2. *Для оператора* $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ $(\beta > 0)$ *имеет место равенство*

$$L_2\Big(\mathcal{L}_3, \frac{1}{2}\Big) = \frac{e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1}{(e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)^2(1 + e^{\beta h})}.$$

Доказательство. Для оператора $\mathcal{L}_3(D)$ функции из разд. 1 имеют следующий вид:

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta x - 1),$$

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_3} f(x) = f(x+3h) - (1 + e^{\beta h} + e^{-\beta h})f(x+2h) + (1 + e^{\beta h} + e^{-\beta h})f(x+h) - f(x),$$

$$B_{\mathcal{L}_3}(x) = \frac{1}{\beta^2}\begin{cases} \operatorname{ch}\beta x - 1, & x \in [0;h], \\ 2\operatorname{ch}\beta h - \dfrac{e^{\beta(x-h)}(1 + e^{-\beta h}) + e^{-\beta(x-h)}(1 + e^{\beta h})}{2}, & x \in [h;2h], \\ \operatorname{ch}\beta(x - 3h) - 1, & x \in [2h;3h], \end{cases} \tag{2.1}$$

причем

$$\max_{x\in[0;3h]} B_{\mathcal{L}_3}(x) = B_{\mathcal{L}_3}\Big(\frac{3h}{2}\Big) = \frac{(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2(1 + e^{\frac{\beta h}{2}} + e^{\beta h})}{\beta^2 e^{\beta h}}.$$

Решая систему (1.4) линейных алгебраических уравнений при $\alpha = 1/2$, выводим следующие равенства (см. [24]):

$$c_1 = c_3 = -\frac{\beta^2 e^{2\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})},$$

$$c_2 = \frac{\beta^2 e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2(e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}.$$

Положим $x = t + 3h/2$ и $\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t) = B_{\mathcal{L}_3}(x - 3h/2)$. Тогда носитель $\operatorname{supp}\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3} = [-3h/2; 3h/2]$, и при $t \in [(l - 1/2)h; (l + 1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ формула (1.3) может быть записана в виде

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t) = S_{\mathcal{L}_3}\Big(f, t + \frac{3h}{2}\Big) = \widetilde{I}_{l-1}\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t - (l-1)h) + \widetilde{I}_l\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t - lh) + \widetilde{I}_{l+1}\widetilde{B}_{\mathcal{L}_3}(t - (l+1)h), \tag{2.2}$$

где $\widetilde{I}_l = c_1\widetilde{y}_{l-1} + c_2\widetilde{y}_l + c_3\widetilde{y}_{l+1}$, $\widetilde{y}_l = f(lh)$ $(l \in \mathbb{Z})$. Следовательно, с учетом (2.1) при $t \in [(l - 1/2)h; (l + 1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ имеем

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t) = \frac{1}{\beta^2}\Big\{(c_1\widetilde{y}_{l-2} + c_2\widetilde{y}_{l-1} + c_3\widetilde{y}_l)\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - (l-1)h - \frac{3h}{2}\Big) - 1\Big)$$

$$+ (c_1\widetilde{y}_{l-1} + c_2\widetilde{y}_l + c_3\widetilde{y}_{l+1})\Big(2\operatorname{ch}\beta h - \frac{(1 + e^{-\beta h})e^{\beta(t - lh + \frac{h}{2})}}{2} - \frac{(1 + e^{\beta h})e^{-\beta(t - lh + \frac{h}{2})}}{2}\Big)$$

$$+ (c_1\widetilde{y}_l + c_2\widetilde{y}_{l+1} + c_3\widetilde{y}_{l+2})\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - (l+1)h + \frac{3h}{2}\Big) - 1\Big)\Big\}.$$

Для доказательства теоремы 2 можно, не ограничивая общности, положить $l = 0$ и считать, что $|y_j| \le 1$ $(j \in \mathbb{Z})$. Тогда при $t \in [-h/2; h/2]$ функция $\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t)$ может быть представлена в виде

$$\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t) = \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}\big\{\widetilde{y}_{-2}q_1(t) + \widetilde{y}_{-1}q_2(t) + \widetilde{y}_0 q_3(t) + \widetilde{y}_1 q_4(t) + \widetilde{y}_2 q_5(t)\big\}, \tag{2.3}$$

где

$$q_1(t) = -e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t - \frac{h}{2}\Big) - 1\Big),$$

$$q_2(t)=(e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1)\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t-\frac{h}{2}\Big)-1\Big)$$
$$-e^{\beta h}\Big(2\operatorname{ch}\beta h-\frac{e^{\beta(t+\frac{h}{2})}+e^{\beta(t-\frac{h}{2})}+e^{-\beta(t+\frac{h}{2})}+e^{-\beta(t-\frac{h}{2})}}{2}\Big),$$
$$q_3(t)=(e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1)\Big(2\operatorname{ch}\beta h-\frac{e^{\beta(t+\frac{h}{2})}+e^{\beta(t-\frac{h}{2})}+e^{-\beta(t+\frac{h}{2})}+e^{-\beta(t-\frac{h}{2})}}{2}\Big)$$
$$-e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t-\frac{h}{2}\Big)-1\Big)-e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t+\frac{h}{2}\Big)-1\Big),$$
$$q_4(t)=(e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1)\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t+\frac{h}{2}\Big)-1\Big)$$
$$-e^{\beta h}\Big(2\operatorname{ch}\beta h-\frac{e^{\beta(t+\frac{h}{2})}+e^{\beta(t-\frac{h}{2})}+e^{-\beta(t+\frac{h}{2})}+e^{-\beta(t-\frac{h}{2})}}{2}\Big),$$
$$q_5(t)=-e^{\beta h}\Big(\operatorname{ch}\beta\Big(t+\frac{h}{2}\Big)-1\Big).$$

Для любой непрерывной на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функции f такой, что $\|f\|_C\le 1$, из (2.3) выводим оценку

$$|\widetilde{S}_{\mathcal{L}_3}(t)|\le\frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}}-1)^2}{(e^{\beta h}-1)^4(1+e^{\beta h})}\big\{|q_1|+|q_2|+|q_3|+|q_4|+|q_5|\big\},\quad t\in\Big[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\Big].\tag{2.4}$$

Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к изучению знаков функций $q_s(t)$ $(s=\overline{1,5})$ на отрезке $[-h/2;h/2]$. Ясно, что

$$q_1(t)\le 0,\quad q_5(t)\le 0\quad (t\in\mathbb{R}).$$

Исследуем функцию $q_2(t)$ при $-h/2\le t\le h/2$. Представим эту функцию в виде

$$q_2(t)=A_1e^{\beta t}+C_1e^{-\beta t}+B_1=e^{-\beta t}(A_1\tau^2+B_1\tau+C_1),$$

где $\tau=e^{\beta t}$ и

$$A_1=e^{-\frac{\beta h}{2}}\big(2e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+5e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1\big)>0,$$
$$C_1=e^{\frac{\beta h}{2}}\big(e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+5e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+2\big)>0,$$
$$B_1=-\big(2e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+2\big)<0.$$

Легко проверяется, что $q_2(-h/2)>0$, $q_2(0)>0$, $q_2(h/2)<0$. Следовательно, уравнение $q_2(t)=0$ имеет на отрезке $[-h/2;h/2]$ единственный корень $t_1>0$, причем

$$e^{\beta t_1}=\frac{-B_1-\sqrt{D_1}}{2A_1},$$

где $D_1=2e^{4\beta h}+2e^{\frac{7}{2}\beta h}+e^{3\beta h}-2e^{\frac{5}{2}\beta h}-6e^{2\beta h}-2e^{\frac{3}{2}\beta h}+e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+2>0$.

Аналогично исследуется функция $q_4(t)$ на отрезке $[-h/2;h/2]$. Имеем $q_4(-h/2)<0$, $q_4(0)>0$, $q_4(h/2)>0$ и

$$q_4(t)=A_2e^{\beta t}+C_2e^{-\beta t}+B_2=e^{-\beta t}(A_2\tau^2+B_2\tau+C_2),$$

где $\tau=e^{\beta t}$ и

$$A_2=e^{\frac{\beta h}{2}}\big(e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+5e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+2\big)>0,$$
$$C_2=e^{-\frac{\beta h}{2}}\big(2e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+5e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1\big)>0,$$

$$B_2 = -\big(2e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2\big) < 0.$$

Поэтому уравнение $q_4(t) = 0$ имеет на отрезке $[-h/2; h/2]$ единственный корень $t_2 < 0$, причем

$$e^{\beta t_2} = \frac{-B_2 + \sqrt{D_2}}{2A_2},$$

где $D_2 = D_1$. Таким образом, получаем неравенство

$$-\frac{h}{2} < t_2 < 0 < t_1 < \frac{h}{2}.$$

Кроме того, из проведенного исследования легко понять, что функция $q_2(t)$ меняет знак в точке t_1 с плюса на минус, а функция $q_4(t)$ — в точке t_2 с минуса на плюс.

Осталось исследовать функцию $q_3(t)$. Заметим, что эта функция четная (относительно $t = 0$) и $q_3(0) > 0,\ q_3(h/2) > 0$. Кроме того, имеет место равенство

$$q_3(t) = A_3 e^{\beta t} + C_3 e^{-\beta t} + B_3 = e^{-\beta t}(A_3\tau^2 + B_3\tau + C_3),$$

где $\tau = e^{\beta t}$ и

$$A_3 = -\frac{e^{\frac{\beta h}{2}}}{2} - \frac{e^{\frac{3}{2}\beta h}}{2} - (e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 4e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 1)\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} < 0.$$

Значит, функция $q_3(t)$ выпукла вверх на отрезке $[-h/2; h/2]$ и $q_3(t) > 0$ при $t \in [-h/2; h/2]$. Обозначим выражение в правой части неравенства (2.4) через $Q(t)$. С учетом проведенного анализа знаков функций $q_s(t)$ $(s = \overline{1,5})$ получаем, что

$$Q(t) = \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}\begin{cases} Q_1(t), & -\dfrac{h}{2} \le t \le t_2, \\ Q_2(t), & t_2 \le t \le t_1, \\ Q_3(t), & t_1 \le t \le \dfrac{h}{2}, \end{cases}$$

где

$$Q_1(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) - q_4(t) - q_5(t),$$
$$Q_2(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t),$$
$$Q_3(t) = -q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t).$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$Q_1(t) = (-e^{\frac{5}{2}\beta h} - 2e^{2\beta h} - 4e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - e^{\frac{\beta h}{2}})e^{\beta t} + (-e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - 4e^{\frac{\beta h}{2}} - 2 - e^{-\frac{\beta h}{2}})e^{-\beta t}$$
$$+ e^{3\beta h} + 2e^{\frac{5}{2}\beta h} + 4e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 2e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 4 + 2e^{-\frac{\beta h}{2}} + e^{-\beta h},$$

$$Q_2(t) = \Big(\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\beta h} + \frac{3}{2}e^{\frac{\beta h}{2}}\Big)e^{\beta t} + \Big(\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}\beta h} + \frac{3}{2}e^{\frac{\beta h}{2}}\Big)e^{-\beta t} + e^{3\beta h} + 2e^{\frac{5}{2}\beta h} - 2e^{\frac{3}{2}\beta h} - 6e^{\beta h} - 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 2e^{-\frac{\beta h}{2}} + e^{-\beta h},$$

$$Q_3(t) = (-e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - 4e^{\frac{\beta h}{2}} - 2 - e^{-\frac{\beta h}{2}})e^{\beta t} + (-e^{\frac{5}{2}\beta h} - 2e^{2\beta h} - 4e^{\frac{3}{2}\beta h} - 2e^{\beta h} - e^{\frac{\beta h}{2}})e^{-\beta t}$$
$$+ e^{3\beta h} + 2e^{\frac{5}{2}\beta h} + 4e^{2\beta h} + 2e^{\frac{3}{2}\beta h} + 2e^{\beta h} + 2e^{\frac{\beta h}{2}} + 4 + 2e^{-\frac{\beta h}{2}} + e^{-\beta h}.$$

Легко понять, что функция $Q_2(t)$ четна относительно $t = 0,\ Q_1(-t) = Q_3(t),\ Q_1'(t) < 0$ при $-h/2 < t \le 0,\ Q_3'(t) > 0$ при $0 \le t < h/2,\ Q_2'(t) > 0$ при $0 \le t \le h/2$. Таким образом,

$$\max_{t \in [-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}]} Q(t) = Q\Big(\frac{h}{2}\Big) = Q\Big(-\frac{h}{2}\Big) = \frac{e^{\beta h}(e^{\frac{\beta h}{2}} - 1)^2}{(e^{\beta h} - 1)^4(1 + e^{\beta h})}$$

$$\times\,(e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1)(e^{\beta h}+e^{-\beta h}-2)=\frac{e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})}. \qquad (2.5)$$

Напомним, что через $Q(t)$ было обозначено выражение в правой части неравенства (2.4). Из (2.2), (2.4) и (2.5) получим неравенство

$$\Big|S_{\mathcal{L}_3}\Big(f,t+\frac{h}{2}\Big)\Big|\le\frac{e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})},\quad t\in\Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h;\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big]\quad (l\in\mathbb{Z}). \qquad (2.6)$$

Из приведенного доказательства следует, что на классе непрерывных на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функций f таких, что $\|f\|_C\le 1$, неравенство (2.6) является точным в том смысле, что знак равенства в нем при $t=(l-1/2)h$ реализуется, если

$$\widetilde{y}_{l-2}=-1,\quad \widetilde{y}_{l-1}=1,\quad \widetilde{y}_l=1,\quad \widetilde{y}_{l+1}=-1,\quad \widetilde{y}_{l+2}=-1,$$

а при $t=(l+1/2)h$, если

$$\widetilde{y}_{l-2}=-1,\quad \widetilde{y}_{l-1}=-1,\quad \widetilde{y}_l=1,\quad \widetilde{y}_{l+1}=1,\quad \widetilde{y}_{l+2}=-1.$$

Напомним, что $\widetilde{y}_l=f(lh)$ $(l\in\mathbb{Z})$. Следовательно, из (2.6) выводим равенство

$$\sup_{\|f\|_C\le1}\|S_{\mathcal{L}_3}(f,\cdot)\|_C=\frac{e^{2\beta h}+2e^{\frac{3}{2}\beta h}+4e^{\beta h}+2e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})}.$$

Теорема 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 2. При $\beta\to0$ предельным случаем экспоненциальных сплайнов $S_{\mathcal{L}_3}(f,x)$ являются локальные параболические сплайны, точные на алгебраических многочленах второй степени. Такие сплайны изучал Н. П. Корнейчук [25]. Точнее, им были указаны коэффициенты $c_1=c_3=-1/8h^2$, $c_2=5/4h^2$ (сравните с коэффициентами функционала I_j в теореме 2) и исследованы аппроксимативные свойства таких сплайнов на соболевских классах дифференцируемых функций. Константа Лебега локальных параболических сплайнов $L_2(D^3,1/2)$ была вычислена в [22] и оказалась равной 1.25. Заметим, что из теоремы 2 также следует, что при $\beta\to0$ величина $L_2(\mathcal{L}_3,1/2)\to1.25$.

З а м е ч а н и е 3. Для константы Лебега $L_2(\mathcal{L}_3,1/2)$ в теореме 2 при любых $\beta>0$ и $h>0$ справедлива оценка сверху

$$L_2\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)=1+\frac{2e^{\beta h}}{(e^{\frac{\beta h}{2}}+1)^2(1+e^{\beta h})}\le1.25.$$

Возвращаясь к интерполяционным сплайнам третьего порядка (см. обозначения во введении), отметим, что для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ $(\beta>0)$ В. А. Ким [16] доказал, что

$$L_1\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)=\frac{(1+e^{-\frac{\beta h}{2}})(1+e^{\frac{\beta h}{2}})}{\sqrt{(1+e^{\frac{\beta h}{2}})^2+(1+e^{-\frac{\beta h}{2}})^2}}=\frac{e^{\frac{\beta h}{2}}+1}{\sqrt{1+e^{\beta h}}}.$$

Из этой формулы следует, что при $\beta\to0$ величина $L_1(\mathcal{L}_3,1/2)$ стремится к $\sqrt{2}$ (см. также теорему B из введения). Нетрудно проверить, что при любых $\beta>0$ и $h>0$ имеет место неравенство

$$L_2\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big)<L_1\Big(\mathcal{L}_3,\frac{1}{2}\Big).$$

Таким образом, для оператора $\mathcal{L}_3(D)=D(D^2-\beta^2)$ локальные экспоненциальные сплайны более устойчивы к возмущению аппроксимационных условий, чем соответствующие интерполяционные.

3. Простейшая схема локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации

В данном разделе рассмотрим оператор третьего порядка более общего вида, чем в предыдущем разделе. Пусть
$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta), \tag{3.1}$$
где β, γ и δ — попарно различные действительные числа. Изложим простейшую схему локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации (см. [19;21]) при $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$. Базисный экспоненциальный сплайн для оператора (3.1) на отрезке $[-3h/2;3h/2]$ с узлами $-3h/2$, $-h/2$, $h/2$, $3h/2$ может быть записан в виде

$$\overline{B}_{\mathcal{L}_3}(x) = m\begin{cases} (\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})} + (\beta-\gamma)e^{\delta(x+\frac{3h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{3h}{2};-\dfrac{h}{2}\Big], \\ -(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - & \\ -(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{h}{2};\dfrac{h}{2}\Big], \\ (\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{(\delta+\beta)h}e^{\gamma(x-\frac{h}{2})} + & \\ +(\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta(x-\frac{h}{2})}, & x \in \Big[\dfrac{h}{2};\dfrac{3h}{2}\Big]. \end{cases}$$

Здесь $m = m(\mathcal{L}_3, h)$ — нормирующий множитель (необязательно положительный),
$$m = \Big(\frac{e^{\delta h}-e^{\gamma h}}{\delta-\gamma}\,\frac{\beta-\delta}{e^{\beta h}-e^{\delta h}}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}} \frac{1}{(e^{\beta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(\delta-\beta)}.$$

Функция $\overline{B}_{\mathcal{L}_3}(x) > 0$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией $B_{\mathcal{L}_3}(x - 3h/2)$ из формулы (1.2) при $\beta_1 = \beta$, $\beta_2 = \gamma$, $\beta_3 = \delta$. Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассмотрим локальный экспоненциальный сплайн, соответствующий оператору (3.1), вида
$$\overline{S}(x) = \overline{S}_{\mathcal{L}_3}(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_{j+\alpha}\overline{B}_{\mathcal{L}_3}(x-jh) \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{3.2}$$
где $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ $(j \in \mathbb{Z})$. Сплайн $\overline{S}(x)$ в равенстве (3.2) реализует простейшую схему локальной сплайн-аппроксимации (см. [19; 21]). Ключевым моментом в этой схеме является выбор параметров m и α. Положим
$$\alpha = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)h}\ln\frac{(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(\delta-\beta)}{(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}.$$

В [19] доказано, что при указанном выборе параметров m и $\alpha = \varepsilon$ имеют место равенства
$$\overline{S}_{\mathcal{L}_3}(e^{\beta\,\cdot},x) = e^{\beta x}, \quad \overline{S}_{\mathcal{L}_3}(e^{\gamma\,\cdot},x) = e^{\gamma x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, простейшая схема (3.2) локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации сохраняет не все ядро $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_3$ оператора (3.1), а только подпространство, натянутое на две функции $e^{\beta x}$ и $e^{\gamma x}$. Величину
$$L_3(\mathcal{L}_3,\varepsilon) = \sup_{\|f\|_C\le 1} \|\overline{S}_{\mathcal{L}_3}(f,\cdot)\|_C$$
назовем константой Лебега метода (3.2). Имеет место следующий результат.

Теорема D [19]. *Для локального сплайна* (3.2) *справедливо равенство*
$$L_3(\mathcal{L}_3,\varepsilon) = \max_{t\in[0;h]}\Big\{m[(\gamma-\delta)e^{\beta t}(e^{\gamma h}-1)(e^{\delta h}-1) + (\delta-\beta)e^{\gamma t}(e^{\beta h}-1)(e^{\delta h}-1)$$

$$+ (\beta - \gamma)e^{\delta t}(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)]\Big\}.$$

З а м е ч а н и е 4. В случае $\gamma = -\beta,\ \delta = 0$, т. е. для оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ $(\beta > 0)$, из теоремы D имеем

$$\varepsilon = 0, \quad m = -\frac{e^{\frac{3}{2}\beta h}}{\beta(e^{\beta h} - 1)^2(1 + e^{\beta h})}$$

и

$$L_3(\mathcal{L}_3, 0) = \frac{2e^{\frac{\beta h}{2}}}{e^{\beta h} + 1} \le 1.$$

Из замечаний 3 и 4 выводим следующее утверждение.

Теорема 3. *Для оператора* $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ $(\beta > 0)$ *имеет место неравенство*

$$L_3(\mathcal{L}_3, 0) < L_2\Big(\mathcal{L}_3, \frac{1}{2}\Big) < L_1\Big(\mathcal{L}_3, \frac{1}{2}\Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
2. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.
3. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
4. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.
5. **Micchelli C.A.** Cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in Splines and Approximation Theory. New-York, etc.: Acad. Press, 1976. P. 203–250.
6. **Schoenberg I.J.** On Micchelli's theory of cardinal $\mathcal{L}$-splines // Studies in Splines and Approximation Theory. New-York, etc.: Acad. Press, 1976. P. 251–276.
7. **Шевалдин В.Т.** $\mathcal{L}$-сплайны и поперечники // Мат. заметки. 1982. Т. 33, № 5. С. 735–744.
8. **Новиков С.И.** Приближение одного класса дифференцируемых функций $\mathcal{L}$-сплайнами // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 3. С. 393–408.
9. **Schurer F., Cheney E.W.** On interpolation cubic splines with equally-spaced nodes // Proc. Nederlande Acad. van Wetenschappen. 1968. Bd. 71, h 5. P. 517–524.
10. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
11. **Richards F.** The Lebesque constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, № 2. P. 83–92.
12. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
13. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Нормы в L-периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 108–117.
14. **Tzimbalario J.** Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
15. **Morsche H.G. ter** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. C. 232–246.
16. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
17. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
18. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.

19. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные $\mathcal{L}$-сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины. 2008. Т. 366, № 2. С. 151–164.
20. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
21. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
22. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О константах Лебега локальных параболических сплайнов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 213–219.
23. **Волков Ю.С., Пыткеев Е.Г., Шевалдин В.Т.** Порядки аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 135–144.
24. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.
25. **Корнейчук Н.П.** О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 5. С. 617–621.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Поступила 15.05.2015

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВИЗНЫ ГЛАДКИХ КЛАССОВ ПЛОСКИХ КРИВЫХ[1]

Ю. Н. Субботин

Рассматриваются проблемы аппроксимации кривизны плоских кривых из гладких классов в равномерной норме кривизной элементов гладких конечномерных функциональных пространств (тригонометрические полиномы, сплайны с равномерными узлами).

Ключевые слова: кривизна, равномерная аппроксимация, гладкие классы функций, тригонометрические полиномы, сплайны с равномерными узлами, оценки аппроксимации.

Yu. N. Subbotin. Uniform approximation of curvature for smooth classes of plane curves.

We consider problems of approximation of the curvature for certain smooth classes of plane curves by the curvature of elements of smooth finite-dimensional function spaces (trigonometric polynomials, splines with equidistant knots) in the uniform norm.

Keywords: curvature, uniform approximation, classes of smooth functions, trigonometric polynomials, splines with equidistant knots, estimates of approximation error.

1. Введение

В работе рассматриваются плоские явно заданные 2π-периодические кривые (функции) $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$ и предполагается, что $(r-1)$-я производная функции $f(x)$ абсолютно непрерывна, а r-я производная удовлетворяет неравенству

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0\le x\le 2\pi} |f^{(r)}(x)| \le 1 \quad (r \ge 3).$$

Класс таких функций обозначим W^r, $r \in \mathbb{N}$. Устанавливаются оценки погрешности аппроксимации нелинейного оператора кривизны с использованием периодических сплайнов четной и нечетной степени и равномерными узлами.

Хорошо известны результаты А. Н. Колмогорова [1] по оценкам норм промежуточных производных через норму функции и норму старшей производной. В. Н. Габушин, иногда с соавторами [2; 3] обобщал результаты А. Н. Колмогорова и некоторых других авторов на нелинейные операторы, например, на оператор кривизны.

По-видимому, проблема аппроксимации кривизны кривой

$$K(y,x) = \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{3/2}}, \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}, \quad y''(x) = \frac{d^2y(x)}{dx^2}$$

впервые рассматривалась в работе Ю. Н. Субботина [4]. В ней речь шла об аппроксимации в среднеквадратической метрике кривизны 2π-периодических кривых посредством соответствующей кривизны тригонометрических полиномов или 2π-периодических сплайнов с равномерными узлами и сплайнов, удовлетворяющих краевым условиям 1-го или 2-го типа.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00496), гранта Президента РФ (проект НШ-4538.2014.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006).

2. Основные результаты

Так как при аппроксимации кривизны кривой сама исходная функция и аппроксимирующая функция не участвуют, то для получения более точных оценок мы будем использовать для аппроксимации $y'(x)$ интерполяционный периодический сплайн $S_{r-1}(y', x, \pi/n)$ степени $(r-1)$ дефекта 1 с узлами интерполяции $k\pi/n$ $(k \in \mathbb{Z})$ и с узлами склейки в тех же точках, если $r-1$ нечетно, и в точках $\pi(2k+1)/2n$ $(k \in \mathbb{Z})$, если $r-1$ четно.

Тогда в силу результата из работы В. М. Тихомирова [5] получаем

$$\left\| y'(x) - S_{r-1}\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big) \right\|_{C[0,2\pi]} \le \frac{\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}}, \quad r \ge 3, \tag{1}$$

где $\mathcal{K}_r$ — известные константы Фавара (см., например, [6–8]). Для констант Фавара справедливы неравенства

$$\frac{\pi^2}{8} = \mathcal{K}_2 < \mathcal{K}_4 < \mathcal{K}_6 < \dots < \mathcal{K}_3 < \mathcal{K}_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)k}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Аналогично, используя для аппроксимации $y''(x)$ сплайн $S_{r-2}(y'', x, \pi/n)$ и тот же результат из [5], имеем

$$\left\| y''(x) - S_{r-2}\Big(y'', x, \frac{\pi}{n}\Big) \right\|_{C[0,2\pi]} \le \frac{\mathcal{K}_{r-2}}{n^{r-2}}, \quad r \ge 3. \tag{2}$$

В качестве аппроксимирующей кривизны для $K(y,x)$ возьмем функцию

$$\widetilde{K}(s,x) := \frac{S_{r-2}(y'', x, \frac{\pi}{n})}{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}}. \tag{3}$$

Тогда, учитывая (3), имеем неравенство

$$|K(y,x) - \widetilde{K}(s,x)| \le \left| \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} - \frac{y''}{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}} \right| + \left| \frac{y'' - S_{r-2}(y'', x, \frac{\pi}{n})}{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}} \right|$$

$$\le \left\| y'' - S_{r-2}\Big(y'', x, \frac{\pi}{n}\Big) \right\| + |y''| \left| \frac{\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2} - [1+(y')^2]^{3/2}}{[1+(y')^2]^{3/2}\Big[1 + S_{r-1}^2\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big)\Big]^{3/2}} \right|. \tag{4}$$

Далее положим $|y'(x)| = u \ge 0$, $|S_{r-1}(y', x, \pi/n)| = v \ge 0$, тогда после домножения числителя и знаменателя второго слагаемого в правой части неравенства (4) на $[1+S_{r-1}^2(y', x, \pi/n)]^{3/2} + [1+(y')^2]^{3/2}$ из (4), (1) и (2) вытекает неравенство

$$|K(y,x) - \widetilde{K}(s,x)| \le \left| y''(x) - S_{r-2}\Big(y'', x, \frac{\pi}{n}\Big) \right| + |y''(x)| \left| y'(x) - S_{r-1}\Big(y', x, \frac{\pi}{n}\Big) \right| J(u,v), \tag{5}$$

где

$$J(u,v) = \frac{(u+v)[(1+u^2)^2 + (1+u^2)(1+v^2) + (1+v^2)^2]}{(1+u^2)^{3/2}(1+v^2)^{3/2}\{(1+u^2)^{3/2} + (1+v^2)^{3/2}\}}. \tag{6}$$

Из неравенства Бора [7] при $n=1$ для 2π-периодической функции $y''(x)$, со средним значением, равным нулю и удовлетворяющей условию $|y^{(r)}(x)| \le 1$, имеем (см. также [8])

$$\|y''\|_{C[0,2\pi]} \le \mathcal{K}_{r-2} \quad (r \ge 3). \tag{7}$$

Из (5)–(7), (1) и (2) следует, что

$$|K(y,x)-\widetilde{K}(s,x)| \le \frac{\mathcal{K}_{r-2}}{n^{r-2}} + \mathcal{K}_{r-2}\; J(u,v)\frac{\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}}. \tag{8}$$

Оценим $J(u,v)$ при $0 \le u, v < \infty$, преобразовав (6) к виду

$$J(u,v) = \frac{u+v}{(1+u^2)(1+v^2)} \cdot \frac{(1+u^2)^2 + (1+u^2)(1+v^2) + (1+v^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2}.$$

Имеем

$$\frac{(1+u^2)^2 + (1+u^2)(1+v^2) + (1+v^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2}$$

$$= \frac{(1+u^2)^2 + (1+v^2)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2} + \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{(1+u^2)^2(1+v^2)^{1/2} + (1+u^2)^{1/2}(1+v^2)^2}$$

$$\le 1 + \frac{(1+u^2)(1+v^2)}{(1+u^2)^2 + (1+v^2)^2} \le 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, $J(u,v) \le (3/2)\cdot(u+v)/((1+u^2)(1+v^2))$ $(0 \le v \le u < \infty)$. В силу симметрии $J(u,v) = J(v,u)$ аналогичное неравенство имеет место при $0 \le u \le v < \infty$.

Найдем точки, подозрительные на экстремум функции $\varphi(u,v) = (u+v)/((1+u^2)(1+v^2))$ в области $0 < u, v < \infty$. Имеем

$$\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial u} = \frac{1-u^2-2uv}{(1+v^2)(1+u^2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi(u,v)}{\partial v} = \frac{1-v^2-2uv}{(1+v^2)^2(1+u^2)} = 0.$$

Отсюда $1-u^2-2uv=0,\ 1-v^2-2uv=0$, и единственной точкой, подозрительной на экстремум в области $0 < u, v < \infty$, является точка $u = v = \sqrt{3}/3$. В этой точке $\varphi(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) = (2\sqrt{3}\cdot 3^2)/(3\cdot 16) = 3\sqrt{3}/8$, и, следовательно,

$$J\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \le \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

Исследуем поведение функции $\varphi(u,v)$ на границе $v=0$. Имеем $\varphi(u,0) = u/(1+u^2) \le 1/2$ и $J(u,0) \le (3/2)\varphi(u,0) \le 3/4,\ 0 \le u < \infty$. В силу отмеченной симметрии функций $J(u,v),\ \varphi(u,v)$, аналогичные неравенства имеет место и для $J(0,v),\ \varphi(0,v),\ 0 \le v < \infty$, а $J(u,v) \to 0$ при $u^2+v^2 \to \infty$.

Так как функция $\varphi(u,v)$ неотрицательна и во внутренней области $0 < u, v < \infty$ имеется единственная точка, подозрительная на экстремум, а значения $\varphi(u,v)$ на границе области: $u=0,\ 0 \le v < \infty$; $v=0,\ 0 \le u < \infty$ меньше, чем значение во внутренней точке, подозрительной на экстремум, и $\varphi(u,v) \to 0$ при $u^2+v^2 \to \infty$, то $J(u,v) \le (3/2)\varphi(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3) = 9\sqrt{3}/16$.

Лемма. $J(u,v) \le 9\sqrt{3}/16,\ 0 \le u, v \le \infty$. *В частности,* $J(u,v) < 1,\ 0 \le u, v \le \infty$.

Из (1), (2), (8) и леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Справедлива оценка*

$$|K(y,x)-\widetilde{K}(s,x)| \le \frac{\mathcal{K}_{r-2}}{n^{r-2}} + \frac{\mathcal{K}_{r-2}\mathcal{K}_{r-1}}{n^{r-1}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. зап. МГУ. 1939. Т. 30. С. 3–16.
2. **Габушин В.Н., Жильцова О.Ю.** Оценка кривизны различных классов кривых // Проблемы физико-математического образования в педагогических вузах на современном этапе: тез. докл. Магнитогорск, 1996. С. 90.
3. **Габушин В.Н.** Оценки некоторых нелинейных функционалов // Изв. ТулГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 67–73.
4. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
5. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 3 (93). С. 81–120.
6. Exposition of the lectures by S. B. Stechkin on approximation theory / V. V. Arestov, V. I. Berdyshev, N. I. Chernykh, T. V. Demina, N. N. Kholschevnikova, S. V. Konyagin, Yu. N. Subbotin, S. A. Telyakovskii, I. G. Tsar'kov, V. A. Yudin // Eurasian Math. 2011. Vol. 2, no. 4. P. 5–155.
7. **Bohr H.** Un theoreme generale sur l'integration d'un polinóme trigonometric // C.R. Acad. Sci. Paris. 1935. Vol. 200. P. 1276–1277.
8. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука. 1965. 407 с.

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 30.06.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.518.45

ДОБАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ В. П. ЗАСТАВНОГО “ОЦЕНКИ СУММ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ”[1]

С. А. Теляковский

Результаты об интегрируемости и интегрируемости со степенным весом сумм модулей блоков членов ряда $\sum 1/k \sin kx$ распространены на класс рядов $\sum b_k \sin kx$ с коэффициентами b_k более общего вида.

Ключевые слова: суммы модулей блоков, степенной вес.

S. A. Telyakovskii. An addition to V. P. Zastavnyi's paper “Estimates for sums of moduli of blocks in trigonometric Fourier series.”

Results on the integrability and integrability with power weight for sums of moduli of blocks from the series $\sum 1/k \sin kx$ are extended to the class of series $\sum b_k \sin kx$ with coefficients b_k of a more general form.

Keywords: sums of moduli of blocks, power weight.

Пусть $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$ — последовательности строго возрастающих натуральных чисел, причем $n_j < v_{j+1}$ при всех j, и A_j — множество натуральных k, удовлетворяющих условию $n_j \le k < v_{j+1}$.

В работе рассматриваются вопросы об интегрируемости функций

$$U_A(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x), \qquad u_j(x) = \Big| \sum_{k\in A_j} b_k \sin kx \Big|, \tag{1}$$

где числа b_k при $k \to \infty$ стремятся к нулю и для них при всех m и некоторой постоянной B выполняется оценка

$$\sum_{k=m}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \leqslant \frac{B}{m}. \tag{2}$$

Изучение функций вида (1), когда b_k являются коэффициентами Фурье функций ограниченной вариации, было начато в [1]. Задачу об ограниченности функций $U_A(x)$ при условии (2) исследовал Л. Лейндлер [2]. В этих работах при всех j выполнялось равенство $v_j = n_j$.

В [3, с. 253] приведены примеры, показывающие, что классы рядов Фурье функций ограниченной вариации и рядов, для коэффициентов которых справедливо условие (2), несравнимы.

Обзор результатов о свойствах сумм модулей блоков членов тригонометрических рядов дан в [4].

Известно, что если при $p > 1$ сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} m_j^{1-1/p}, \tag{3}$$

где $m_j = \min(n_j, v_{j+1} - n_j + 1)$ и b_k являются коэффициентами Фурье функции ограниченной вариации, то $U_A(x) \in L_p$. При $p = 2$ это доказано в [5, теорема 2], для всех $p > 1$ — в работе В. П. Заставного [6, теорема 5].

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

В настоящей работе этот результат распространен на случай, когда для чисел b_k имеет место оценка (2). О подобном распространении говорилось в [4, с. 214]. Рассмотрена также интегрируемость со степенным весом функций $U_A(x)$.

Будет использоваться следующее утверждение.

Лемма. *Если числа b_k стремятся к нулю при $k \to \infty$ и для них выполняется оценка* (2), *то при всех натуральных r и s, $r \leqslant s$, справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| \leqslant \frac{5B}{r} \min\left(\frac{1}{x}, s-r+1\right), \qquad x \in (0,\pi]. \tag{4}$$

Оценка (4) устанавливается с помощью рассуждений, подобных проводившимся при доказательстве теоремы в [3].

В силу стремления чисел b_k к нулю из (2) следует оценка

$$|b_m| \leqslant \frac{B}{m}. \tag{5}$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| \leqslant \sum_{k=r}^{s} |b_k| \leqslant \frac{B}{r}(s-r+1).$$

Далее, согласно (2) и (5) имеем

$$\left|2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| = \left|\sum_{k=r}^{s} b_k \cos\Bigl(k-\frac{1}{2}\Bigr)x - \sum_{k=r}^{s} b_k \cos\Bigl(k+\frac{1}{2}\Bigr)x\right|$$

$$= \left|b_r \cos\Bigl(r-\frac{1}{2}\Bigr)x - \sum_{k=r}^{s-1}(b_k - b_{k+1})\cos\Bigl(k+\frac{1}{2}\Bigr)x - b_s\cos\Bigl(s+\frac{1}{2}\Bigr)x\right|$$

$$\leqslant |b_r| + \sum_{k=r}^{s-1}|b_k - b_{k+1}| + |b_s| \leqslant \frac{3B}{r}.$$

Значит,

$$\left|\sum_{k=r}^{s} b_k \sin kx\right| \leqslant \frac{3B}{2r\sin(x/2)} \leqslant \frac{3\pi}{2}\,\frac{B}{rx}.$$

Лемма доказана. □

С помощью оценки (4) результаты об интегрируемости функций (1), относящиеся к рядам Фурье функций ограниченной вариации, доказательство которых основывалось на оценке (4) при $b_k = 1/k$, переносятся на случай, когда для b_k выполнено условие (2).

Так получаем приводимые ниже теоремы, первая из которых относится к упоминавшимся достаточным условиям принадлежности функций вида $U_A(x)$ к L_p при $p > 1$.

Теорема 1. *Если для стремящихся к нулю чисел b_k справедлива оценка* (2), *$p > 1$ и сходится ряд* (3), *то $U_A(x) \in L_p$.*

При $p = 1$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы для всех стремящихся к нулю чисел b_k, при которых справедлива оценка* (2), *функции $U_A(x)$ принадлежали L, необходима и достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} \log m_j. \tag{6}$$

Достаточность следует из того, что для функций ограниченной вариации доказательство соответствующего утверждения в [7] основывалось на оценке (4) при $b_k = 1/k$. *Необходимость* в теореме 2 вытекает из установленного Р. М. Тригубом [8] необходимого условия в случае, когда $b_k = 1/k$, которое, как показала О. И. Кузнецова [8, с. 5, 6], эквивалентно сходимости ряда (6). В [7] и [8] предполагалось, что $v_j = n_j$, но легко видеть, что здесь это несущественно.

Рассмотрим теперь задачу об интегрируемости со степенным весом функций $U_A(x)$.

В [9] были получены достаточные условия сходимости интеграла

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A^p(x)\,dx \tag{7}$$

в случае, когда $b_k = 1/k$ и $\gamma \in (1-p, 1)$ для целых $p = 1, 2, 3, \dots$ [9, теоремы 2 и 3] и $\gamma = 1-p$ при целых $p = 2, 3, \dots$ [9, теорема 4].

Распространим эти результаты на все $p > 1$ и числа b_k, удовлетворяющие условию (2). При этом для $\gamma = 1-p$ достаточное условие из [9] будет заменено на менее ограничительное условие.

Заметим, что условие $\gamma \geqslant 1-p$ является естественным, так как если сходится ряд $\sum n_j^{-1}$, то с помощью оценки (4) легко показать, что при $\gamma < 1-p$ интеграл (7) заведомо сходится.

Теорема 3. *Пусть $p \geqslant 1$ и для стремящихся к нулю чисел b_k справедлива оценка (2). Тогда при $\gamma \in (1-p, 1)$ интеграл (7) сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} m_j^{1-(1-\gamma)/p}.$$

При $\gamma = 1-p$ интеграл (7) сходится, если сходится ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} \log^{1/p} m_j.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь неравенством Минковского, получаем

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A^p(x)\,dx\right)^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^\infty \left(\int_0^\pi \left(\frac{1}{x^{\gamma/p}} u_j(x)\right)^p dx\right)^{1/p}.$$

В силу (4) имеем

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_j^p(x)\,dx \leqslant \left(\frac{5B}{n_j}\right)^p \left(\int_0^{1/m_j} \frac{1}{x^\gamma} m_j^p\,dx + \int_{1/m_j}^\pi \frac{1}{x^{\gamma+p}}\,dx\right). \tag{8}$$

Поэтому при $\gamma \in (1-p, 1)$

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_j^p(x)\,dx < \left(\frac{5B}{n_j}\right)^p \left(m_j^p \frac{1}{1-\gamma} m_j^{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma+p-1} m_j^{\gamma+p-1}\right) = C(p,\gamma,B) \frac{1}{n_j^p} m_j^{\gamma+p-1}, \tag{9}$$

где множитель $C(p,\gamma,B)$ зависит только от p, γ и B.

Таким образом,

$$\left(\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A(x)\,dx\right)^{1/p} < \sum_{j=1}^\infty \left(C(p,\gamma,B) \frac{1}{n_j^p} m_j^{p+\gamma-1}\right)^{1/p} = C^{1/p}(p,\gamma,B) \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} m_j^{1-(1-\gamma)/p}.$$

Для $\gamma = 1 - p$ из (8) следует оценка

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_j^p(x)\, dx \leqslant \Big(\frac{5B}{n_j}\Big)^p \Big[m_j^p \frac{x^p}{p}\Big|_0^{1/m_j} + \log \pi m_j \Big] = \Big(\frac{5B}{n_j}\Big)^p \Big(\frac{1}{p} + \log\pi + \log m_j\Big), \tag{10}$$

и, значит,

$$\bigg(\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A(x)\, dx\bigg)^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^\infty \frac{5B}{n_j}\Big(\frac{1}{p} + \log\pi + \log m_j\Big)^{1/p}.$$

Теорема доказана. □

В [9] сходимость интеграла (7) для $\gamma = 1 - p$ (при $b_k = 1/k$ и $v_j = n_j$) была установлена при условии сходимости ряда

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j} \log m_j.$$

Найдем теперь условия сходимости интеграла (7) при $p \in (0, 1)$.

Теорема 4. *Пусть $p \in (0, 1)$ и для стремящихся к нулю чисел b_k справедлива оценка* (2). *Тогда при $\gamma \in (1 - p, 1)$ интеграл* (7) *сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j^p} m_j^{p-1+\gamma}. \tag{11}$$

При $\gamma = 1 - p$ интеграл (7) *сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j^p} \log m_j. \tag{12}$$

При $p \in (0, 1)$ имеет место оценка

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} U_A^p(x)\, dx \leqslant \sum_{j=1}^\infty \int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} u_j^p\, dx.$$

Поэтому утверждение теоремы 4 следует из оценок (9) и (10).

Поскольку доказательство теоремы 4 основывалось на оценке (4), подобный результат справедлив и для рядов Фурье функций ограниченной вариации.

Теорема 5. *Пусть $p \in (0, 1)$ и*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фурье функции ограниченной вариации. Тогда при $\gamma \in (1 - p, 1)$ интеграл

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^\gamma} \sum_{j=1}^\infty \bigg| \sum_{k=n_j}^{v_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \bigg|^p dx \tag{13}$$

сходится, если сходится ряд (11). *При $\gamma = 1 - p$ интеграл* (13) *сходится, если сходится ряд* (12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.
2. **Leindler L.** On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. 2001. Vol. 27, no. 4. P. 279–285.
3. **Теляковский С.А.** Об ограниченности ряда из модулей блоков членов рядов по синусам // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 252–256.
4. **Теляковский С.А.** Ряды из модулей блоков членов тригонометрического ряда (обзор) // Фундаментал. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 5. С. 209–216.
5. **Теляковский С.А.** Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.
6. **Заставный В.П.** Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 168–179.
7. **Telyakovskii S.A.** Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 215–218.
8. **Trigub R.M.** A note on the paper of Telyakovskii “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation” // East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 1. P. 1–6.
9. **Теляковский С.А.** О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k}\sin kx$ // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, № 5. С. 713–718.

Теляковский Сергей Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyAltel@yandex.ru

Поступила 20.04.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 512.552.4

ПОЧТИ ЛИЕВО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ НЕПЕРВИЧНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР[1]

О. Б. Финогенова

Многообразие ассоциативных алгебр называется *лиево нильпотентным*, если оно при некотором n удовлетворяет тождеству $[\cdots[[x_1,x_2],\ldots],x_n]=0$, где $[x,y]=xy-yx$. В работе изучаются почти лиево нильпотентные многообразия, т. е. минимальные элементы в множестве не лиево нильпотентных многообразий. Полностью описаны почти лиево нильпотентные многообразия алгебр над полем положительной характеристики, как конечным, так и бесконечным, в тех случаях, когда идеалы тождеств этих многообразий являются непервичными идеалами в классе всех T-идеалов.

Ключевые слова: многообразие ассоциативных алгебр, тождества ассоциированной алгебры Ли, лиева нильпотентность, энгелевость.

O. B. Finogenova. Almost Lie nilpotent non-prime varieties of associative algebras.

A variety of associative algebras is called *Lie nilpotent* if it satisfies the identity $[\cdots[[x_1,x_2],\ldots,x_n]=0$ for some positive integer n, where $[x,y]=xy-yx$. We study almost Lie nilpotent varieties, i.e., minimal elements in the set of all varieties that are not Lie nilpotent. We describe all almost Lie nilpotent varieties of algebras over a field of positive characteristic, both finite and infinite, in the cases when the ideals of identities of these varieties are nonprime in the class of all T-ideals.

Keywords: variety of associative algebras, identities of the associated Lie algebra, Lie nilpotency, Engel property.

Введение

Всюду далее мы считаем, если не сказано иное, что F — произвольное ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, и слово "алгебра" означает "F-алгебра".

На каждой ассоциативной алгебре $\langle A,+,\cdot\rangle$ можно определить операцию $[x,y]=xy-yx$. Множество A относительно операций $+$ и $[,]$, как легко видеть, становится алгеброй Ли. Она называется ассоциированной алгеброй Ли и является одним из наиболее изучаемых производных объектов исходной алгебры. Тождества ассоциированной алгебры Ли формируют специфический подкласс полиномиальных тождеств. К наиболее известным из них относятся тождества лиевой нильпотентности, энгелевости, разрешимости. Напомним, что алгебры или многообразия называются *лиево нильпотентными*, если при некотором натуральном числе n удовлетворяют тождеству $[\cdots[[[x_1,x_2],x_3],\ldots],x_n]=0$, и *энгелевыми*, если удовлетворяют тождеству $[\cdots[[[x,y],y],\ldots],y]=0$. (В дальнейшем мы будем опускать внутренние скобки при *левонормированной* их расстановке, т. е. запись $[\cdots[[[x_1,x_2],x_3]\ldots],x_n]$ будет упрощена до $[x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n]$ и т. п.) Интерес к тождествам указанных типов во многом был инспирирован задачами бернсайдовского типа (см., например, [5]). Одна из наиболее известных проблем данной тематики — задача о локальной нильпотентности энгелевых многообразий. Она была положительно решена Е. И. Зельмановым: каждая конечнопорожденная энгелева алгебра Ли над полем положительной характеристики является нильпотентной [2; 3]. Над полем нулевой характеристики любая, а не только конечнопорожденная, энгелева алгебра Ли нильпотентна [1]. Для алгебр Ли, ассоциированных с ассоциативными алгебрами, последний результат

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00524) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5161.2014.1).

был получен ранее А. Р. Кемером [4]. В случае поля положительной характеристики достаточные условия для глобальной нильпотентности были найдены П. Хиггинсом [11]: если алгебра Ли над полем характеристики p является $(p-1)$-энгелевой, т. е. удовлетворяет тождеству $[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{p-1}] = 0$, и разрешимой, то она нильпотентна.

Проверка, будет ли данное многообразие лиево нильпотентным, энгелевым или разрешимым, сопряжена, как правило, с техническими трудностями. Более того, если многообразие задается системой тождеств, то даже существование алгоритма такой проверки находится под вопросом, поскольку исследователю требуется вывести из данного набора одно из тождеств бесконечной серии или доказать, что ни одно тождество этой серии следствием данного набора не является. В этой ситуации несомненную пользу может принести более "алгоритмичная", нежели эквациональная, характеризация изучаемого свойства θ. К таким характеризациям относится, например, описание почти θ-многообразий, т. е. минимальных элементов в множестве многообразий, не удовлетворяющих свойству θ. Согласно лемме Цорна каждое многообразие, не обладающее свойством θ, будет содержать в качестве подмногообразия некоторое почти θ-многообразие. Если алгебры, порождающие почти θ-многообразия, не слишком сложно устроены, то полный список почти θ-многообразий обеспечивает нас алгоритмом проверки: многообразие, задаваемое системой тождеств, удовлетворяет θ тогда и только тогда, когда ни одна из указанных алгебр не удовлетворяет данной системе. Такой подход был реализован для всех трех свойств (лиева нильпотентность, энгелевость, разрешимость) в случае алгебр над полем нулевой характеристики [4; 7]. Почти энгелевы многообразия алгебр над полем положительной характеристики (как конечным, так и бесконечным) и почти энгелевы многообразия колец полностью описаны автором [9]. Почти разрешимые многообразия алгебр над ассоциативно-коммутативным нетеровым кольцом изучались в [10].

Цель настоящей работы — исследование свойств почти лиево нильпотентных многообразий ассоциативных алгебр и нахождение таких многообразий в одном из двух возможных естественных случаев. Напомним, что T*-идеалом* называется идеал свободной ассоциативной счетнопорожденной алгебры, замкнутый относительно всех ее эндоморфизмов. Идеал I называется T*-первичным*, если для любых T-идеалов I_1 и I_2 из включения $I_1 \cdot I_2 \subseteq I$ следует одно из включений: $I_1 \subseteq I$ или $I_2 \subseteq I$. Это понятие играет важную роль в структурной теории многообразий. Многообразие будем называть *первичным*, если его идеал тождеств T-первичен. В данной работе мы полностью описываем почти лиево нильпотентные непервичные многообразия алгебр над полями положительной характеристики, конечными и бесконечными.

Нам понадобятся обозначения для нескольких алгебр.

$$K_{F,n} = F\langle k_1, k_2, \ldots \mid k_i k_j = k_j k_i,\ k_i^n = 0,\ i, j = 1, 2 \ldots \rangle \quad \text{при} \ \ n > 0.$$

Если U — произвольная алгебра, то $A(U) = \begin{pmatrix} U & U \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если F, G — конечные поля, $F \subseteq G$, и σ — такой автоморфизм поля G, что поле инвариантов G^σ — единственное максимальное подполе в поле G, содержащее F, то

$$B(F, G, \sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & \sigma(b) \end{pmatrix};\ b, c \in G \right\}.$$

Через $\overleftarrow{\mathcal{V}}$ обозначим многообразие, двойственное к $\mathcal{V}$, т. е. класс, состоящий из алгебр, антиизоморфных алгебрам из $\mathcal{V}$; в случае алгебр $\overleftarrow{A}$ — алгебра, антиизоморфная A.

Теорема 1. *Пусть F — бесконечное поле положительной характеристики p, а $\mathcal{V}$ — непервичное многообразие F-алгебр. Многообразие $\mathcal{V}$ почти лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда оно порождено либо алгеброй $A(K_{F,p})$, либо алгеброй $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.*

Теорема 2. *Пусть F — конечное поле характеристики p, а $\mathcal{V}$ — непервичное многообразие F-алгебр. Многообразие $\mathcal{V}$ почти лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда оно порождено одной из алгебр $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$, $A(K_{F,p})$, $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$, $B(F,G,\sigma)$.*

Через $\bar{k}$ будем обозначать набор символов $k_1, k_2, \ldots$, будь то переменные или индексы. Из контекста при этом будет ясно, считается этот набор упорядоченным или нет.

Обозначим через $W_n(\bar{x})$ левонормированный лиев коммутатор длины n, т. е.

$$W_n(\bar{x}) = [x_1, \ldots, x_n].$$

Следующее утверждение с очевидностью следует из теорем 1 и 2.

Следствие 1. *Предположим, что многообразие F-алгебр $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $W_{n_1}(\bar{x}_1)W_{n_2}(\bar{x}_2)\cdots W_{n_k}(\bar{x}_k) = 0$ при некоторых натуральных $n_1, \ldots, n_k$ и попарно не пересекающихся наборах переменных $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$.*

1) Если F — бесконечное поле характеристики p, то $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит алгебр $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

2) Если F — конечное поле характеристики p, то многообразие $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ не содержит алгебр $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$, $B(F,G,\sigma)$, $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

Перечислим некоторые термины и обозначения, используемые в работе.

Всюду ниже рассматриваются только ассоциативные алгебры, поэтому прилагательное "ассоциативная" будет опускаться.

Через $\mathsf{var}\,\Sigma$ мы обозначаем многообразие, задаваемое системой Σ многочленов с некоммутирующими переменными, т. е. класс алгебр, удовлетворяющих всем тождествам вида $f = 0$ для $f \in \Sigma$; через $T(\mathcal{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathcal{V}$; через $T(\Sigma)$ — T-идеал свободной счетнопорожденной F-алгебры, порожденный множеством многочленов Σ. При этом для упрощения вместо $T(\{f\})$ будем писать $T(f)$.

Напомним, что многочлен называется *существенным по x*, если буква x присутствует в каждом его одночлене. Многочлен называется *существенным*, если он существен по всем своим переменным.

1. Алгебры над произвольным коммутативным кольцом операторов

До конца этого раздела мы считаем, если не сказано иное, что F — произвольное коммутативное кольцо с 1, и рассматриваем многообразия F-алгебр.

Лемма 1. *Пусть для целого $n \geq 3$ многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $W_n(\bar{x}) = 0$, тогда для любого $k \leq n-3$ многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству*

$$W_{n-k}(\bar{y}_1)W_{n-k}(\bar{y}_2)\cdots W_{n-k}(\bar{y}_{2^k}) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем в W_n подстановку $x_{n-1} \mapsto zx_{n-1}$. Получим

$$\begin{aligned} 0 &= [W_{n-2}, zx_{n-1}, x_n] \\ &= z[W_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + [z, x_n][W_{n-2}, x_{n-1}] + [W_{n-2}, z][x_{n-1}, x_n] + [W_{n-2}, z, x_n]x_{n-1}. \end{aligned}$$

Первое и четвертое слагаемые принадлежат $T(W_n)$. Положим $z = W_{n-2}(\bar{u})$ и тем самым благодаря тождеству Якоби превратим первый коммутатор третьего слагаемого в следствие W_n. Значит, по модулю $T(W_n)$

$$[W_{n-2}(\bar{u}), x_n][W_{n-2}, x_{n-1}] = 0,$$

т. е. $W_{n-1}(\bar{y}_1)W_{n-1}(\bar{y}_2) = 0$ есть тождество многообразия $\mathcal{M}$. Поскольку $W_s u W_m \subseteq T(W_s W_m)$ для любых s, m, можно повторить проделанные действия для каждого W_{n-1}, чтобы получить произведение четырех многочленов W_{n-2} и так далее. $\square$

Всюду в этом разделе через $\mathcal{V}$ мы обозначаем произвольное почти лиево нильпотентное многообразие алгебр.

Лемма 2. *Для любого многочлена $g(\bar{x})$ либо $g \in T(\mathcal{V})$, либо $W_n(x_1, \ldots, x_n) \in T(g) + T(\mathcal{V})$ для некоторого натурального числа n.*

Доказательство. Если $g \notin T(\mathcal{V})$, то идеал $T(g)+T(\mathcal{V})$ задает собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{V}$. Каждое собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{V}$ лиево нильпотентно. Следовательно, для некоторого n имеем $W_n(x_1, \ldots, x_n) \in T(g) + T(\mathcal{V})$. $\square$

Лемма 3. *Если $T(f)T(g) + T(g)T(f) \subseteq T(\mathcal{V})$, то либо $f \in T(\mathcal{V})$, либо $g(\bar{x})g(\bar{y}) \in T(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Предположим, что $f \notin T(\mathcal{V})$ и $g(\bar{x})g(\bar{y}) \notin T(\mathcal{V})$. По лемме 2 в многообразии $\mathcal{V}$ есть тождество $W_n(\bar{x}) = h(\bar{x})$ для некоторого $h \in T(f)$. Кроме того, у нас есть тождество $W_s(\bar{y}) = t(\bar{y})$, где $t(\bar{y})$ есть сумма многочленов вида $ug(a_1, a_2, \ldots)g(b_1, b_2, \ldots)v$, где u, v — одночлены, а a_i, b_i — многочлены, зависящие от $y_1, y_2 \ldots$. Очевидно, многочлен $t(\bar{y})$ можно считать существенным по всем его переменным. По модулю $T(\mathcal{V})$ выполняется цепочка равенств

$$W_{n+s-1} = W_s(W_n(\bar{x}), y_2, \ldots) = W_s(h(\bar{x}), y_2, \ldots) = t(h(\bar{x}), y_2, \ldots).$$

Нам остается доказать, что $t(h(\bar{x}), y_2, \ldots) \in T(f)T(g) + T(g)T(f)$. Действительно, подстановка $y_1 \mapsto h(\bar{x})$ обращает в нуль по модулю $T(f)T(g) + T(g)T(f)$ все слагаемые из $t(\bar{y})$, в которых u или v содержат y_1. Рассмотрим остальные слагаемые. Легко заметить, что

$$g(a_1, a_2, \ldots) = g(c_1, c_2, \ldots) + d(\bar{y}),$$

где многочлены $c_1, c_2, \ldots$ не зависят от y_1, а каждый одночлен из $d(\bar{y})$ содержит y_1. Следовательно, подстановка $y_1 \mapsto h(\bar{x})$ обращает в нуль по модулю $T(f)T(g)$ все слагаемые вида $ud(\bar{y})g(b_1, \ldots)v$. В оставшихся слагаемых $ug(c_1, c_2, \ldots)g(b_1, b_2, \ldots)v$ переменная y_1 обязана входить в каждый одночлен из $g(b_1, b_2, \ldots)$. Следовательно, наша подстановка $y_1 \mapsto h(\bar{x})$ обращает в нуль по модулю $T(g)T(f)$ и эти последние слагаемые. Таким образом, верно включение $t(h(\bar{x}), y_2, \ldots) \in T(f)T(g) + T(g)T(f)$. Следовательно, $W_{n+s-1} \in T(\mathcal{V})$. Противоречие. $\square$

Лемма 4. *Если многообразие $\mathcal{V}$ не является первичным, то многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[x, y][z, t] = 0$.*

Доказательство. Согласно определению найдутся два таких многочлена $f_1 \notin T(\mathcal{V})$ и $f_2 \notin T(\mathcal{V})$, что $T(f_1) \cdot T(f_2) \subseteq T(\mathcal{V})$. По лемме 2 у нас есть два включения: $W_n \in T(f_1) + T(\mathcal{V})$ и $W_s \in T(f_2) + T(\mathcal{V})$. По лемме 1 для некоторого r выполняется включение

$$\underbrace{W_3 \cdots W_3}_{r} \in (T(f_1) + T(\mathcal{V}))(T(f_2) + T(\mathcal{V})) \subseteq T(\mathcal{V}).$$

Предположим, что r — минимальное число с таким свойством. Положим $f = \underbrace{W_3 \cdots W_3}_{r-1}$ и $g = W_3$. Тогда $f \notin T(\mathcal{V})$ и $T(f)T(g) + T(g)T(f) \subseteq T(\mathcal{V})$. По лемме 3 выполняется включение $g(\bar{x})g(\bar{y}) \in T(\mathcal{V})$, т. е. $W_3 W_3 = 0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$.

Предположим, что $[x, y][z, t] \notin T(\mathcal{V})$. Тогда по лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет при некотором m тождеству

$$W_m(\bar{x}) = g(\bar{x}), \tag{1}$$

где g — сумма многочленов вида $u[x_i, x_j]v[x_l, x_k]w$ и u, v, w — одночлены, возможно пустые, зависящие от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Легко видеть, что подстановка $x_i \mapsto [x_i, y_i]$ $(i = 1, \ldots, m)$ превратит правую часть (1) в следствие многочлена $W_3W_3 \in T(\mathcal{V})$. Следовательно, и левая часть $W_m([x_1, y_1], \ldots, [x_m, y_m])$ будет принадлежать $T(\mathcal{V})$. Пусть теперь m — минимальное число, при котором

$$W_m([x_1, y_1], \ldots, [x_m, y_m]) \in T(\mathcal{V}).$$

Мы хотим доказать, что $m = 2$. Предположим, что $m \geq 3$. По лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет при некотором t тождеству

$$W_t(\bar{x}) = h(\bar{x}), \tag{2}$$

где h — сумма многочленов вида $uW_{m-1}([a_1, b_1], \ldots, [a_{m-1}, b_{m-1}])v$ и u, v, a_i, b_i — одночлены от переменных $x_1, \ldots, x_m$. Нетрудно убедиться, что

$$[h(\bar{x}), [y, z]] \in T(W_m([x_1, y_1], \ldots, [x_m, y_m])) + T(W_3(\bar{x})W_3(\bar{y})) \subseteq T(\mathcal{V}).$$

Следовательно, $[W_t(\bar{x}), [y, z]] = 0$ — тождество $\mathcal{V}$. Поскольку $m \geq 3$, то и $t \geq 3$. Теперь заметим, что $h(W_t(\bar{y}), x_2, \ldots)$ — сумма многочленов типа $\tilde{u}[[c_1, c_2], c_3W_t(\bar{y})c_4]\tilde{v}$ для некоторых многочленов $\tilde{u}$, c_1, c_2, c_3, c_4, $\tilde{v}$. Ясно, что

$$\tilde{u}[[c_1, c_2], c_3W_t(\bar{y})c_4]\tilde{v} \in T(W_3(\bar{x})W_3(\bar{y})) + T([W_t(\bar{x}), [y, z]]).$$

Следовательно, $h(W_t(\bar{y}), x_2, \ldots) \in T(\mathcal{V})$. Поэтому, заменяя в (2) x_1 на $W_t(\bar{y})$, получаем справа многочлен из $T(\mathcal{V})$, а слева $W_{2t-1} = W_t(W_t(\bar{y}), x_2, \ldots, x_t)$. Противоречие показывает, что $m = 2$, т. е. $[[x_1, y_1], [x_2, y_2]] = 0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$.

Подставляя в тождество $[[x_1, y_1], [x_2, y_2]] = 0$ произведение y_2z вместо y_2, получаем следствие $[x_1, y_1, y_2][x_2, z] + [x_2, y_2][x_1, y_1, z] = 0$. Сделаем в нем замену $y_2 \mapsto y_2t$ и, вспомнив, что $W_3W_3 = 0$, получим тождество $[x_2, y_2][x_1, y_1, z, t] = 0$. Двойственным образом можно получить тождество $[x_1, y_1, z, t][x_2, y_2] = 0$. По лемме 3 имеем $[x_2, y_2][x_3, y_3] \in T(\mathcal{V})$. □

Следующее абстрактное свойство часто встречается у экстремальных многообразий.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что многообразие $\mathcal{M}$ обладает *свойством* $\mathcal{Z}$, если для любых многочленов f и g из включений $f(v(\bar{t}), \bar{x}) \in T(\mathcal{M})$, выполняющихся при всех $v \in T(g)$, следует либо $g \in T(\mathcal{M})$, либо $f([y, z], \bar{x}) \in T(\mathcal{M})$.

Легко заметить, что свойство $\mathcal{Z}$ достаточно проверять только для многочленов $f(t, \bar{x})$, существенных по переменной t.

Лемма 5. *Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[x, y][z, t] = 0$, то $\mathcal{V}$ обладает свойством $\mathcal{Z}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f и g — многочлены из условия свойства $\mathcal{Z}$. Предположим, что ни g, ни $f([y, z], \bar{x})$ не лежат в $T(\mathcal{V})$. По лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет двум тождествам:

$$W_r(\bar{t}) = h(\bar{t}), \tag{3}$$

где $h(\bar{t})$ — следствие g, и

$$W_s(\bar{u}) = c(\bar{u}), \tag{4}$$

где $c(\bar{u})$ — следствие $f([y, z], \bar{x})$. Ясно, что $c(\bar{u})$ — сумма слагаемых двух типов:

A. $vf(\sum_i [a_i, b_i], \ldots)w$, и u_1 входит в каждый одночлен из a_i;

B. $a[v, w]b$, и u_1 входит либо в a, либо в b.

Подстановка $u_1 \mapsto W_r(\bar{t})$ в (4) обращает в нуль по модулю $T([x, y][z, t])$ все слагаемые типа B. Из (3) следует, что эта подстановка обращает в нуль по модулю идеала $T(f(T(g), \ldots))$ все слагаемые типа A. Поэтому в результате этой подстановки мы получим тождество $W_{r+s-1} = W_s(W_r(\bar{t}), u_2, \ldots) = 0$. Противоречие показывает, что либо g, либо $f([y, z], \bar{x})$ лежит в $T(\mathcal{V})$. □

Для того, чтобы сформулировать результат, касающийся многообразий со свойством $\mathcal{Z}$, нам понадобится ввести несколько обозначений. Пусть H — свободная счетнопорожденная F-алгебра многообразия $\mathsf{var}\{[x,y][z,t]\}$. Обозначим через Λ множество свободных порождающих алгебры H. Для удобства элементы H будем называть многочленами.

Для произвольного одночлена $f(x_1,x_2,\dots)$ положим $S_{x_i}(f)=\{m\}$, где m — число вхождений буквы x_i в f (другими словами, степень f по x_i). Отметим, что поскольку идеал тождеств H порожден однородным многочленом $[x,y][z,t]$, степень f по x_i для любого одночлена $f\in H$ определяется однозначно. Если теперь $f(\bar{x},\bar{t})=f_1(\bar{x},\bar{t})+\dots+f_n(\bar{x},\bar{t})$ — сумма одночленов f_i, положим

$$S_{\bar{x}}(f)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{u\in\bar{x}}S_u(f_i).$$

Похожим образом для каждого многочлена f из $[H,H]$ определим $D(f)$ — множество *двусторонних степеней.* Будем для удобства называть *коммутаторными одночленами* многочлены вида $\alpha u(x,y,\bar{t})[x,y]v(x,y,\bar{t})$, где x,y, $\bar{t}$ — переменные, $u(x,y,\bar{t})$, $v(x,y,\bar{t})$ — слова мультипликативной полугруппы алгебры H. Пусть $f(x,\bar{t})$ — коммутаторный одночлен вида $a(x,\bar{t})[t_i,t_j]b(x,\bar{t})$, причем $S_x(a)=\{k\}$ и $S_x(b)=\{l\}$. Тогда положим $D_x(f)=\{(k,l)\}$. Если же $f(x,\bar{t})=a(x,\bar{t})[x,t_i]b(x,\bar{t})$ и a,b такие же, как и раньше, то положим $D_x(f)=\{(k+1,s),(k,s+1)\}$. Наконец, если

$$f(\bar{x},\bar{t})=f_1(\bar{x},\bar{t})+\dots+f_n(\bar{x},\bar{t})$$

— сумма коммутаторных одночленов f_i, то определим $D_{\bar{x}}(f)$ — *множество двусторонних степеней многочлена f по переменным $x_1,x_2,\dots$* — следующим образом:

$$D_{\bar{x}}(f)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{u\in\bar{x}}D_u(f_i).$$

Пусть, например, $f(x,y,z)=x[x,y]x^2+y^5[y,z]$, тогда $S_{\{x,y\}}(f)=\{4,1,0,6\}$, а $D_{\{x,y\}}(f)=\{(2,2),(1,3),(1,0),(0,1),(0,0),(6,0),(5,1)\}$.

З а м е ч а н и е. Вообще говоря, множества $S_{\bar{x}}(f)$ и $D_{\bar{x}}(f)$ определяются для f неоднозначно и зависят от конкретного его представления в виде суммы одночленов или коммутаторных одночленов. Но в дальнейшем запись вида $S_{\bar{x}}(f)=M$ (или $D_{\bar{x}}(f)=M$) будет означать для нас, что f обладает таким представлением, при котором $S_{\bar{x}}(f)$ (соответственно $D_{\bar{x}}(f)$) совпадает с множеством M. Поэтому мы сочли возможным не усложнять обозначения и не ссылаться на представление, по которому строились $S_{\bar{x}}(f)$ или $D_{\bar{x}}(f)$. При этом, правда, мы полагаем, что $D_{\bar{x}}(f)$ и $S_{\bar{x}}(f)$ для многочлена $f\in[H,H]$ выписываются по одному и тому же представлению, т.е. если $D_{\bar{x}}(f)=\{(i_1,j_1),\dots,(i_m,j_m)\}$, то $S_{\bar{x}}(f)=\{i_1+j_1,\dots,i_m+j_m\}$. Кроме того договоримся, что в любом многочлене вида $f(\bar{x},[y,z])$ множество двойных степеней $D_{\bar{x}}(f)$ строится по представлению, в котором все коммутаторные одночлены имеют вид $u(\bar{x})[y,z]v(\bar{x})$.

Следующее утверждение позволяет упрощать тождества в многообразиях, удовлетворяющих свойству $\mathcal{Z}$.

Предложение 1 [9, предложение 1]. *Предположим, что $\mathcal{M}$ — многообразие F-алгебр, обладающее свойством $\mathcal{Z}$ и удовлетворяющее тождеству $[x,y][z,t]=0$.*

Пусть существенный по всем x_i многочлен $f(\bar{x},\bar{t})\in H$ имеет вид

$$f(\bar{x},\bar{t})=w(\bar{x},\bar{t})+\sum_i g_i(\bar{x},\bar{t})+\sum_i h_i(\bar{x},\bar{t}),$$

где $h_i(\bar{x},\bar{t})$ — одночлены, $g_i(\bar{x},\bar{t})$ — коммутаторные одночлены, а $w(\bar{x},\bar{t})\in[H,H]$. Предположим, что при этом существуют такие конечные множества

$$A\subseteq(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\ \text{и}\ B\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\},$$

что выполняются 2 условия:

1) $A \cap D_{\bar{x}}(w(\bar{x},\bar{t})) = \varnothing$ *и* $B \cap S_{\bar{x}}(w(\bar{x},\bar{t})) = \varnothing$;

2) *для любого i существуют такие j и k, что* $D_{x_j}(g_i) \subseteq A$ *и* $S_{x_k}(h_i) \subseteq B$.

Тогда, если $f \in T(\mathcal{M})$ и $w(\bar{x},\bar{t}) \notin T(\mathcal{M})$, в $\mathcal{M}$ выполняется тождество вида

$$x^l[y,z]x^m = x^r[y,z]x^s,$$

где $(l,m) \in D_{\bar{x}}(w(\bar{x},\bar{t}))$, а $(r,s) \in A$ или $r+s \in B$. □

Отметим, что в предложении 1 не исключаются случаи, когда одно из множеств A или B пустое. В этих случаях предполагается, что все многочлены g_i или соответственно h_i нулевые.

Напомним, что $\mathcal{V}$ — произвольное почти лиево нильпотентное многообразие алгебр.

Лемма 6. *Если многообразие $\mathcal{V}$ порождено нильпотентными алгебрами и удовлетворяет тождеству $[x,y][z,t] = 0$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо тождеству $[y,z]x = 0$, либо тождеству $x[y,z] = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $x[y,z] \notin T(\mathcal{V})$. Тогда по лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет для некоторого n тождеству $W_n(\bar{x}) = h(\bar{x})$, где h — сумма многочленов вида $ux_i[x_j,x_k]v$, а u, v — одночлены, возможно, пустые. Подстановка $x_1 \mapsto [y,z]$ обращает в нуль по модулю $[x,y][z,t] = 0$ все слагаемые, в которых x_1 не попадает в коммутатор. Таким образом, после подстановки мы получим тождество

$$[y,z]x_2x_3\cdots x_n + g(y,z,\bar{x}) = 0,$$

где $g = \sum_{i>1,j} a_{ij}x_i[y,z]b_{ij}$. По лемме 5 многообразие $\mathcal{V}$ обладает свойством $\mathcal{Z}$ и удовлетворяет условию предложения 1. Положим $w = [y,z]x_2x_3\cdots x_n$, $A = \{(n,k) \mid n \geq 1\} \cap D_{\{x_2,x_3,\dots,x_n\}}(g)$, $B = \varnothing$. Ясно, что $D_{\{x_2,\dots,x_n\}}(w) = \{(0,1)\}$ и $D_{\{x_2,\dots,x_n\}}(w) \cap A = \varnothing$. Согласно предложению 1 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет либо тождеству $w = 0$, либо тождеству $[y,z]x = x^r[y,z]x^s$, причем r,s — целые числа и $r \geq 1$.

Предположим сначала, что $w = 0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$. Пусть n — минимальное число с таким свойством, т.е. $[y,z]x_2x_3\cdots x_{n-1} \notin T(\mathcal{V})$. Положим $g = [y,z]x_2x_3\cdots x_{n-1}$ и $f(t,x) = tx$. Ясно, что $f(v,x) \in T(\mathcal{V})$ для любого $v \in T(g)$. Благодаря свойству $\mathcal{Z}$ имеем $f([y,z],x) \in T(\mathcal{V})$, т. е. $[y,z]x \in T(\mathcal{V})$. В этом случае лемма доказана.

Теперь предположим, что $[y,z]x = x^r[y,z]x^s$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$. Можно считать, что $s = 0$, так как в противном случае в любой нильпотентной алгебре, а значит, и в самом многообразии $\mathcal{V}$, будет выполняться тождество $[y,z]x = 0$. Кроме того, $r \neq 1$, так как $[[y,z],x] \notin T(\mathcal{V})$. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $[y,z]x = x^r[y,z]$ при $r > 1$. Далее, предполагая дополнительно, что $[y,z]x \notin T(\mathcal{V})$, и используя двойственные рассуждения, получим тождество $x[y,z] = [y,z]x^k$ при $k > 1$. Выполнение обоих этих тождеств в любой нильпотентной алгебре гарантирует выполнение двух тождеств $x[y,z] = 0$ и $[y,z]x = 0$, а значит, и включение $[[y,z],x] \in T(\mathcal{V})$. Противоречие. □

2. Алгебры над полем положительной характеристики

В этой части мы доказываем теоремы 1 и 2. До конца этого раздела мы считаем, что F — конечное или бесконечное поле характеристики $p > 0$, а $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентное многообразие F-алгебр.

Лемма 7. *Если многообразие $\mathcal{V}$ порождено нильпотентными алгебрами, то из включения $[y,z]x \in T(\mathcal{V})$ следует включение $y^px \in T(\mathcal{V})$, а из включения $x[y,z] \in T(\mathcal{V})$ — включение $xy^p \in T(\mathcal{V})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По модулю идеала $T([y,z]x)$ верны равенства

$$W_n(\bar{x}) = (-1)^n x_3 \cdots x_n [x_1, x_2] \quad \text{и} \quad (u+v)^p x = u^p x + v^p x.$$

Предположим, что $y^p x \notin T(\mathcal{V})$. Тогда по лемме 2 многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_3 \cdots x_n [x_1, x_2] = h(\bar{x})$, где $h(\bar{x})$ — сумма одночленов вида $ab^p c$, причем a могут быть пустыми. Подставим $[y, x_2]$ вместо x_2 в это тождество и, воспользовавшись тождеством $[y,z]x = 0$, получим $x_3 \cdots x_n x_1 [y, x_2] = \sum_i u_i [y, x_2]$, где длина каждого слова u_i больше $n-1$. Отсюда, поскольку многообразие $\mathcal{V}$ порождается нильпотентными алгебрами, оно удовлетворяет тождеству $x_3 \cdots x_n x_1 [y, x_2] = 0$ и, значит, тождеству $W_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) = 0$. Противоречие. Двойственное утверждение доказывается аналогично. $\square$

Обозначим $\mathcal{A}_p = \mathsf{var}\{[y,z]x,\ y^p x\}$.

Доказательство следующей леммы несложно, и мы его опускаем.

Лемма 8. *Алгебры $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ не являются лиево нильпотентными. Алгебра $A(K_{F,p})$ лежит в многообразии $\mathcal{A}_p$, и алгебра $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ лежит в многообразии $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$.*

Лемма 9. *Каждое собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{A}_p$ или в многообразии $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$ лиево нильпотентно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{M}$ — собственное подмногообразие в многообразии $\mathcal{A}_p$. Возьмем многочлен f из $T(\mathcal{M}) \setminus T(\mathcal{A}_p)$. Нам достаточно найти следствие многочлена f вида

$$u_1^{s_1} \cdots u_m^{s_m} [y,z], \quad s_1 < p, \dots, s_m < p, \tag{5}$$

поскольку полная линеаризация этого многочлена и многочлен $[y,z]x$ имеют в качестве следствия многочлен $W_n(\bar{x})$ при $n = (p-1)m + 2$.

Учитывая тождество Якоби и то, что $[y,z]x = 0$, имеем $x_1[u,v] = -v[x_1,u] - u[v,x_1]$. Кроме того, в многообразии $\mathcal{A}$ выполняется тождество $x_1^{p-1}[u, x_1] = u x_1^p$. Поэтому многочлен f может быть записан в виде

$$f(\bar{x}) = \sum_{\substack{\bar{k}: k_j < p, \\ j=1,\dots,n}} \alpha_{\bar{k}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} + \sum_{\substack{i,\ \bar{s}:\, s_1 < p-1, \\ s_j < p, j=2,\dots,n}} \beta_{i,\bar{s}} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} [x_i, x_1] + \sum_{\substack{\bar{t}:\, t_j < p, \\ j=2,\dots,n}} \gamma_{\bar{t}} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} x_1^p.$$

Если для некоторого $\bar{k}$ имеем $\alpha_{\bar{k}} \neq 0$, то умножим f на $[y,z]$ справа и получим

$$\sum_{\bar{k}:\, k_1 < p, \dots, k_n < p} \alpha_{\bar{k}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} [y,z] \in T(\mathcal{M}).$$

Все степени переменных меньше p, поэтому каждая полиоднородная компонента данного многочлена принадлежит $T(\mathcal{M})$. Осталось заметить, что она вида (5).

Если $\alpha_{\bar{k}} = 0$ для всех $\bar{k}$ и $\beta_{i,\bar{s}} \neq 0$ для некоторой пары $\bar{s}$, i, то сделаем в многочлен f подстановку $x_i \mapsto x_i + [y,z]$ и соберем все слагаемые с $[y,z]$. Получим

$$\sum_{\substack{i,\ \bar{s}:\, s_1 < p-1, \\ s_j < p, j=2,\dots,n}} \beta_{i,\bar{s}} x_1^{s_1+1} x_2^{s_2} \cdots x_n^{s_n} [y,z] \in T(\mathcal{M}).$$

Как и абзацем выше, находим многочлен вида (5).

Наконец, если все α и β равны нулю, сделаем в многочлен f подстановку $x_1 \mapsto x_1 + [y,z]$, соберем слагаемые с $[y,z]$ и получим $\sum_{\bar{t}, t_2 < p, \dots, t_n < p} \gamma_{\bar{t}} x_2^{t_2} \cdots x_n^{t_n} x_1^{p-1} [y,z] \in T(\mathcal{M})$. Как и раньше, мы найдем в $T(\mathcal{M})$ многочлен вида (5).

Следовательно, все собственные подмногообразия в многообразии $\mathcal{A}_p$ лиево нильпотентны. Аналогично доказывается этот факт для многообразия $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — непервичное почти лиево нильпотентное многообразие. Хорошо известно, что каждое многообразие алгебр над бесконечным полем порождается нильпотентными алгебрами. Следовательно, по леммам 4, 6, 7 многообразие $\mathcal{V}$ содержится в $\mathcal{A}_p$ или в $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$. По леммам 8 и 9 многообразия $\mathcal{A}_p$ и $\overleftarrow{\mathcal{A}}_p$ являются почти лиево нильпотентными. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ совпадает с одним из них. Остается заметить, что любое почти лиево нильпотентное многообразие порождается любой своей алгеброй, не являющейся лиево нильпотентной. По лемме 8 в качестве таких алгебр можно взять $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

Достаточность. По лемме 8 алгебра $A(K_{F,p})$ лежит в многообразии $\mathcal{A}_p$ и не является лиево нильпотентной. Следовательно, эта алгебра согласно лемме 9 не может порождать в многообразии $\mathcal{A}_p$ собственное подмногообразие. Аналогично доказывается, что алгебра $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ порождает почти лиево нильпотентное многообразие. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость.* Пусть $\mathcal{V}$ — почти лиево нильпотентное многообразие алгебр над конечным полем F. Предположим сначала, что $\mathcal{V}$ неэнгелево. Тогда по лемме Цорна многообразие $\mathcal{V}$ содержит некоторое почти энгелево многообразие в качестве подмногообразия. Поскольку любое такое многообразие неэнгелево, а тем более не лиево нильпотентное, оно не может быть собственным подмногообразием многообразия $\mathcal{V}$, поэтому $\mathcal{V}$ является почти энгелевым многообразием алгебр. Из описания таких многообразий [9, теорема 2] следует, что $\mathcal{V}$ порождается одной из алгебр $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$ или $B(F,G,\sigma)$.

Предположим теперь, что многообразие $\mathcal{V}$ непервично и энгелево. Остается показать, что в этом случае $\mathcal{V}$ порождается своими нильпотентными алгебрами. Тогда, дословно повторив рассуждение из доказательства теоремы 1, можно убедиться, что многообразие $\mathcal{V}$ порождается либо алгеброй $A(K_{F,p})$, либо алгеброй $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

Итак, будучи энгелевым, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $W_{n+1}(x,y,\dots,y)=0$. Без ограничения общности можно считать, что $n=p^t$, где p — характеристика поля F. Нетрудно проверить, что $W_{n+1}(x,y,\dots,y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^k y x^{n-k}$. Поэтому, если $n=p^t$, то $W_{n+1}(x,y,y,\dots,y)=[x,y^n]$.

Наличие тождества $[x,y^{p^t}]=0$ позволяет сделать несколько простых замечаний. Во-первых, в центре любой алгебры A из многообразия $\mathcal{V}$ содержатся все подалгебры алгебры A, являющиеся конечными полями. Во-вторых, многообразие $\mathcal{V}$ локально финитно аппроксимируемо (см., например, [6]). Следовательно, оно порождается всеми своими конечномерными алгебрами. Рассмотрим произвольную такую алгебру A. Многообразие $\mathcal{V}$ не содержит полных матричных алгебр второго порядка, поэтому $A=B+J(A)$, где B — конечная сумма конечных полей, $J(A)$ — нильпотентный радикал. Согласно первому наблюдению B содержится в центре A. Поэтому для любого k выполняется включение $W_k(A,A,\dots,A)\subseteq W_k(J(A),J(A),\dots,J(A))$.

Предположим теперь, что все нильпотентные алгебры из многообразия $\mathcal{V}$ порождают собственное, а значит, лиево нильпотентное, многообразие. Пусть оно удовлетворяет тождеству $W_k(\bar{x})=0$. Следовательно, ему удовлетворяют радикалы $J(A)$ во всех конечномерных алгебрах из многообразия $\mathcal{V}$, и, значит, этому тождеству удовлетворяют и все конечномерные алгебры A. Другими словами, $W_k(\bar{x})=0$ — тождество многообразия $\mathcal{V}$. Противоречие показывает, что многообразие $\mathcal{V}$ порождено нильпотентными алгебрами.

Достаточность. Алгебры $A(F)$, $\overleftarrow{A}(F)$ и $B(F,G,\sigma)$ являются неэнгелевыми и порождают почти коммутативные многообразия (см. [9; 12]). Это доказывает, что они порождают почти лиево нильпотентные многообразия. Как уже было замечено при доказательстве достаточности теоремы 1, каждая из алгебр $A(K_{F,p})$ и $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$ порождает почти лиево нильпотентное многообразие. □

Выделим простое следствие лемм 8 и 9 в качестве самостоятельного утверждения.

Следствие 2. *Пусть F — конечное или бесконечное поле характеристики $p>0$. Много-*

образие $\mathsf{var}\{[y,z]x,\ y^p x\}$ *порождено алгеброй* $A(K_{F,p})$. *Многообразие* $\mathsf{var}\{x[y,z],\ xy^p\}$ *порождено алгеброй* $\overleftarrow{A}(K_{F,p})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зельманов Е.И.** Об энгелевых алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 112–117.
2. **Зельманов Е.И.** Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1990. Т. 54, № 1. С. 42–59.
3. **Зельманов Е.И.** Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 568–592.
4. **Кемер А.Р.** О нематричных многообразиях // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 3. С. 255–283.
5. **Кострикин А.И.** Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986. 232 с.
6. **Кублановский С.И.** О многообразиях ассоциативных алгебр с локальными условиями конечности // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 119–174.
7. **Мальцев Ю.Н.** О многообразиях ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 5. С. 579–584.
8. **Мальцев Ю. Н.** Почти энгелевы локально конечные многообразия ассоциативных колец // Изв. вузов. Математика. 1982. № 11. С. 41–42.
9. **Финогенова О.Б.** Многообразия ассоциативных алгебр, удовлетворяющие тождествам Энгеля // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 4. С. 482–505.
10. **Финогенова О.Б.** Почти лиево разрешимые многообразия ассоциативных алгебр конечного базисного ранга // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 1–6.
11. **Higgins P.J.** Lie rings satisfying the Engel condition // Proc. Cambr. Philos. Soc. 1954. Vol. 50, no. 1. P. 8–15.
12. **Mal'cev Yu. N.** Just non commutative varieties of operator algebras and rings with some conditions on nilpotent elements // Tamkang J. Math. 1996. Vol. 27, no. 1. P. 59–65.

Финогенова Ольга Борисовна
канд. физ.-мат. наук, доцент,
доцент
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ob.finogenova@urfu.ru

Поступила 01.08.2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

НЕРАВЕНСТВА ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА С ОБОБЩЕННЫМИ МОДУЛЯМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев

В гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ получены неравенства типа Джексона – Стечкина между величиной $E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ наилучшего приближения функции f алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ и обобщенным модулем непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}\mathcal{f};t)$, где $\mathcal{D}$ — некоторый дифференциальный оператор второго порядка. Для классов функций $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$ $(m,r\in\mathbb{N},\, 1/(2r)<p\le 2)$, определяемых указанным модулем непрерывности и заданной мажорантой $\Psi(t)$ $(t\ge 0)$, удовлетворяющей определенным ограничениям, вычислены значения различных n-поперечников в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Ключевые слова: наилучшие приближения, полиномы Чебышёва, обобщенный модуль непрерывности m-го порядка, коэффициенты Фурье — Чебышёва, n-поперечники.

M. Sh. Shabozov, K. Tukhliev. Jackson–Stechkin type inequalities with generalized moduli of continuity and widths of some classes of functions.

In the Hilbert space $L_{2,\mu}[-1,1]$ with Chebyshev weight $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, we obtain Jackson–Stechkin type inequalities between the value $E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ of the best approximation of a function $f(x)$ by algebraic polynomials of degree at most $n-1$ and the mth-order generalized modulus of continuity $\Omega_m(\mathcal{D}\mathcal{f};t)$, where $\mathcal{D}$ is some second-order differential operator. For classes of functions $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$ $(m,r\in\mathbb{N},\, 1/(2r)<p\le 2)$ defined by the mentioned modulus of continuity and a given majorant $\Psi(t)$ $(t\ge 0)$, which satisfies certain constraints, we calculate the values of various n-widths in the space $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Keywords: best approximation, Chebyshev polynomials, generalized modulus of continuity of mth order, Chebyshev–Fourier coefficients, n-widths.

Введение

К настоящему времени известен целый ряд содержательных результатов, связанных с отысканием точных констант в неравенстве типа Джексона — Стечкина и вычислением точных значений различных n-поперечников функциональных классов, принадлежащих пространству измеримых 2π-периодических функций $L_2 := L_2[0,2\pi]$ с нормой (см., например, [1–14])

$$\|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В последнее время появился ряд работ, в которых аналогичные задачи рассматриваются на конечном отрезке. Так, например, А. Г. Бабенко [15] получил точное неравенство типа Джексона — Стечкина в случае приближения на отрезке $[0,\pi]$ действительных измеримых 2π-периодических функций вида $f(x)=\varphi(\cos x)$ подпространством косинус-полиномов

$$\mathcal{F}_{n-1} := \Big\{\mathcal{F}\colon \mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx,\ a_k\in\mathbb{R}\Big\}$$

в пространстве $L^2_{\alpha,\beta}[0,\pi]$ $(\alpha>-1,\, \beta>-1)$ с нормой

$$\|f\|_{L^2_{\alpha,\beta}} = \left\{\int_0^{\pi} f^2(x)\Big(\sin\frac{x}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^{2\beta+1} dx\right\}^{1/2} < \infty.$$

Дальнейшее исследование этой задачи в общем случае при $\alpha = \beta \geq -1/2$ приведено в работе Д. В. Чертовой [16], а при любых $\alpha > \beta \geq -1/2$ выполнено Во Тхи Куком [17]. Для функций многих переменных в пространстве $L_p(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом указанная задача решена в работах [18; 19]. С. Б. Вакарчук [20] доказал точное неравенство типа Джексона — Стечкина для приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ — алгебраических многочленов степени $\leq n-1$ в пространстве $L_2[-1,1]$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L_2[-1,1]} = \Bigg(\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx\Bigg)^{1/2} < \infty.$$

В данной работе мы продолжим исследования в этом направлении и докажем точные неравенства типа Джексона — Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1,1]\big)$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \Bigg(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x)dx\Bigg)^{1/2}.$$

1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

Введем обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$ — множество всех положительных чисел, $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$. Следуя работе А. В. Абилова и Ф. В. Абиловой [21], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \frac{1}{2}\Big[f\big(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\big) + f\big(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\big)\Big], \tag{1.1}$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига,* и введем конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^m(f;x) = \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Delta}_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - E)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x),\ F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1}f(x)),\ k = 1,2,\ldots,m,\ m \in \mathbb{N}$, и E — единичный оператор в пространстве L_2. Определим обобщенный модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^m(f;\cdot)\big\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} \colon |h| \leq t\Big\}. \tag{1.2}$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos x), \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.3}$$

— ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно [22],

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \tag{1.4}$$

есть ряд Фурье — Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x)\, T_k(x) dx \tag{1.5}$$

— коэффициенты Фурье — Чебышёва. Равенство в (1.4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r = 2, 3, \ldots$. Известно [22, с. 47], что многочлены (1.3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)T_k''(x) - xT_k'(x) + k^2 T_k(x) = 0, \tag{1.6}$$

а потому из (1.6) следуют равенства

$$\mathcal{D}T_k(x) = -k^2 T_k(x), \ldots, \mathcal{D}^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \tag{1.7}$$

В [21] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщенные производные в смысле Леви [23, с. 172], коэффициенты Фурье — Чебышёва (1.5) ряда (1.4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r\, k^{-2r}\, c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.8}$$

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.9}$$

где функция $F_h f$ определена равенством (1.1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ ($r \in \mathbb{Z}_+, L_{2,\mu}^{(0)}[-1,1] = L_{2,\mu}[-1,1]$) множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$. Всюду далее вместо $L_{2,\mu}[-1,1], L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$ ради сокращения записи будем писать $L_{2,\mu}, L_{2,\mu}^{(2r)}$, $\|f\|_{2,\mu}$ соответственно.

Пользуясь соотношениями (1.7)–(1.9) и равенством Парсеваля, из (1.4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ легко получить равенство [21]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \tag{1.10}$$

Учитывая соотношение (1.10), модуль непрерывности (1.2) запишем в виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} = \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m} \colon |h| \le t \Big\}. \tag{1.11}$$

Пусть

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf\big\{ \|f - p_{n-1}\|_{2.\mu} \colon p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \big\} \tag{1.12}$$

— наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. В [22, с. 26] доказано, что среди всех элементов $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ частичная сумма $S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ ряда (1.4) доставляет минимум величине (1.12). При этом

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \Big)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Из (1.13), учитывая равенство (1.8), для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}. \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) обращается в равенство для функции $f_0(x) = T_n(x)$, принадлежащей множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, поскольку $\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1,\ \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu} = n^{2r}$.

В [24] при любых $m, r \in \mathbb{N}$, $r \geq m/2$ доказано, что

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2r-m}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin nt dt\right)^m} = \frac{1}{2^m}, \tag{1.15}$$

а в [25] при $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq h \leq \pi/n$ получено равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{1}{h}\int\limits_0^{h} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt\right)^m} = \left\{\frac{nh}{nh - \sin nh}\right\}^m. \tag{1.16}$$

2. Основные теоремы

В работе [1] Н. И. Черных заметил, что для произвольной суммируемой неотрицательной не эквивалентной нулю весовой функции φ на отрезке $[0, h]$ $(0 < h \leq \pi)$ функционал

$$J_n(f; h) = \left\{\int\limits_0^h \omega_m^2(f; t)_2 \varphi(t) dt\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_0^h \varphi(t) dt\right\}^{-1/2}$$

меньше джексоновского функционала $\omega_m(f; h)_2$ и более естественен для характеристики наилучших приближений $E_{n-1}(f)$ периодических функций в $L_2[0, 2\pi]$. Для рассматриваемой нами характеристики гладкости Ω_m наблюдается аналогичная ситуация. Очевидно, что без потери общности можно полагать, что при некотором $h \in (0, \pi/n]$ выполняется условие $\displaystyle\int_0^h \varphi(t) dt \leq 1$, и тогда имеет место неравенство

$$\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right\}^{1/p} \leq \Omega_m(f; h)_{2,\mu}.$$

В связи с этим обстоятельством, а также с целью обобщения равенств (1.15) и (1.16), введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi; h) = \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}, \tag{2.1}$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi$, $\varphi(t) \geq 0$ — суммируемая на отрезке $[0, h]$ не эквивалентная нулю функция.

Теорема 2.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi$, $\varphi(t) \geq 0$ — суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi; h)\right\}^{-1} \leq \mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{\inf_{n\leq k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi; h)\right\}^{-1}, \tag{2.2}$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi; h) = \left(k^{2rp}\int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp} \varphi(t) dt\right)^{1/p}. \tag{2.3}$$

При этом если

$$\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h), \tag{2.4}$$

то имеет место равенство

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\left(n^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись упрощенным вариантом неравенства Минсковского [26, с.142]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^pdt\right)^{2/p}\right)^{1/2},\quad 0<p\le 2,$$

с учетом (1.10)–(1.13) и (2.3) получаем

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\ge\left(\int\limits_0^h\|\Delta_t^m(\mathcal{D}^rf)\|_{2,\mu}^p\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$\ge\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)k^{4r}(1-\cos kt)^{2m}\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

$$=\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)k^{4r}(1-\cos kt)^{2m}\Big[\varphi(t)\Big]^{2/p}\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}$$

$$\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\left(k^{2pr}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{pm}\varphi(t)\right)^{2/p}dt\right)^{1/2}$$

$$=\left(\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\,\alpha_{k,m,r,p}^2(\varphi;h)\right)^{1/2}\ge\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\left\{\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\right\}^{1/2}$$

$$=\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}.$$

Отсюда, учитывая определение величины (2.1), получаем оценку сверху

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)\le\frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)}. \tag{2.6}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x)\overset{def}{=}T_n(x)=\sqrt{2/\pi}\cos(n\arccos x)$, которая принадлежит классу $L_{2,\mu}^{(2r)}$ и для которой

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}=1,\quad \Omega_m(\mathcal{D}^rf_0;t)_{2,\mu}=n^{2r}(1-\cos nh)^m,\quad 0<nh\le\pi. \tag{2.7}$$

Имеем

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)\ge\frac{\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf_0;t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{1}{\left(n^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)}. \tag{2.8}$$

Сравнивая оценку сверху (2.6) и оценку снизу (2.8), получаем требуемое двойное неравенство (2.2), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.

Отметим, что теорема 2.1 является своеобразным обобщением основных результатов работ [9; 14], полученных для наилучшего полиномиального приближения 2π-периодических дифференцируемых функций, принадлежащих множеству $L_2^{(r)}[0,2\pi]$, на случай наилучшего полиномиального приближения функций f, принадлежащих множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 2.1. *Пусть весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируемой на нем. Если при всех $t\in[0,h]$ и $p\in[1/(2r),2]$, $r\in\mathbb{N}$, выполнено неравенство*

$$(2rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\ge 0, \tag{2.9}$$

то справедливо равенство

$$\inf_{n\le k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)=\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h) \tag{2.10}$$

и имеет место соотношение

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi;h)=\Big\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Исходя из вида величины $\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)$, $k\ge n$, достаточно доказать, что при выполнении неравенства (2.9) функция

$$\eta(x)=x^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt$$

является возрастающей при $x\ge n$. Так как

$$\eta'(x)=2rpx^{2rp-1}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt+x^{2rp}\int\limits_0^h\frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt, \tag{2.12}$$

то, пользуясь очевидным тождеством

$$\frac{d}{dx}(1-\cos xt)^{mp}=\frac{t}{x}\,\frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp}, \tag{2.13}$$

из (2.12) с учетом (2.13), выполнив интегрирование по частям, в силу (2.9) получаем

$$\eta'(x)=2rpx^{2rp-1}\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp}\varphi(t)dt+x^{2rp-1}\int\limits_0^h\frac{d}{dt}(1-\cos xt)^{mp}(t\varphi(t))dt$$

$$=x^{2rp-1}\left\{(1-\cos xh)^{mp}h\varphi(h)+\int\limits_0^h(1-\cos xt)^{mp}\big[(2rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\big]dt\right\}\ge 0,$$

откуда $\inf\{\eta(x)\colon x \ge n\} = \eta(n)$, что равносильно равенству

$$\inf_{n\le k<\infty} \alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h),$$

из которого в силу двойного неравенства (2.2) сразу получаем (2.11). Этим следствие 2.1 доказано.

Следствие 2.2. *Пусть весовая функция* $\varphi(t) \equiv 1$ *и числа* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) \le p \le 2$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$. *Тогда выполнено следующее равенство*:

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(1;h) = \{\alpha_{n,m,r,p}(1;h)\}^{-1} := \left\{n^{2rp}\int_0^h (1-\cos nh)^{mp}dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.14}$$

Доказательство. В самом деле, согласно неравенству (2.9), имеем $(2rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) = 2rp-1 \ge 0$, а потому имеет место (2.14). Следствие доказано.

В равенстве (2.3) положим $h = a/n$, где $0 < a \le \pi$, $\varphi_*(t) = g(nt)$, $g(u) \ge 0$ — суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке $[0,a]$ функция. Тогда

$$\alpha_{k,m,r,p}(g(nt);a/n) = \left\{k^{2rp}\int_0^{a/n}(1-\cos kt)^{mp}g(nt)dt\right\}^{1/p}$$

$$= n^{2r-1/p}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{2rp}\int_0^a\left(1-\cos\frac{k}{n}t\right)^{mp}g(t)dt\right\}^{1/p}. \tag{2.15}$$

Из равенства (2.15) следует, что

$$\inf\{\alpha_{k,m,r,p}(g(n\cdot);a/n)\colon n\le k<\infty\}$$

$$= n^{2r-1/p}\inf_{x\ge1}\left\{x^{2rp}\int_0^a(1-\cos xt)^{mp}g(t)dt\right\}^{1/p} := n^{2r-1/p}\cdot\inf_{x\ge1}\beta_{m,r,p}(a;g,x). \tag{2.16}$$

Используя равенство (2.16) из утверждения теоремы 2.1, получаем

Следствие 2.3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $m,n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $0 < a \le \pi$, $g(t)$ *есть неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0,a]$ *не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)} \le \sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,g(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\limits_{1\le x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x)}.$$

Если при этом функция g *такова, что*

$$\inf_{1\le x<\infty}\beta_{m,r,p}(a;g,x) = \beta_{m,r,p}(a;g,1),$$

то справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^a\Omega_m^p(\mathcal{D}^rf;t/n)_{2,\mu}\,g(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\beta_{m,r,p}(a;g,1)}.$$

Следствие 2.4. *Пусть* $0 < a \le \pi$, $m, n, r \in \mathbb{N}$. *Если при всех* $0 < p \le 2$ *функция* $g(t) := t^{2rp-1} g_1(t)$, *где* $g_1(t)$ *не возрастает, является неотрицательной суммируемой на отрезке* $[0, a]$ *функцией, то*

$$\inf_{1 \le x < \infty} \beta_{m,r,p}(a; g, x) = \beta_{m,r,p}(a; g, 1), \tag{2.17}$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{n^{2r} \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^a \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t/n)_{2,\mu}\, t^{2rp-1} g_1(t) dt \right)^{1/p}} = \frac{1}{\beta_{m,r,p}(a; t^{2rp-1} g_1(t), 1)}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Для установления равенства (2.17) будем следовать схеме рассуждений [4]. Полагаем

$$g_*(t) = \left\{ g_1(t), \text{ если } 0 \le t \le a; \quad g_1(a), \text{ если } a \le t < \infty \right\}.$$

Тогда для $1 \le x < \infty$ имеем

$$\beta_{m,r,p}(a; t^{2rp-1} g_1(t), x) = x^{2rp} \int\limits_0^a (1 - \cos xt)^{mp}\, t^{2rp-1} g_1(t) dt$$

$$= \int\limits_0^{ax} (1 - \cos t)^{mp}\, t^{2rp-1} g_*(t/x) dt \ge \int\limits_0^{ax} (1 - \cos t)^{mp}\, t^{2rp-1} g_*(t) dt$$

$$\ge \int\limits_0^{a} (1 - \cos t)^{mp}\, t^{2rp-1} g_1(t) dt = \beta_{m,r,p}(a; t^{2rp-1} g_1(t), 1),$$

откуда сразу следует равенство (2.17), и тем самым следствие 2.4 доказано.

При решении экстремальных задач теории приближений важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенства типа Колмогорова в различных банаховых пространствах. Если $\mathbb{S} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{S} = \mathbb{R}_+$, то неравенство Колмогорова имеет вид

$$\|f^{(s)}\|_{L_p(\mathbb{S})} \le M \|f\|_{L_q(\mathbb{S})}^{\alpha} \cdot \|f^{(r)}\|_{L_\gamma(\mathbb{S})}^{\beta}, \tag{2.19}$$

где

$$\alpha = \frac{r - s - 1/\gamma + 1/p}{r - 1/\gamma + 1/q}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Различные неравенства типа (2.19) приведены в монографии [27]. Отметим также, что в работе В. В. Арестова [28] приведен обстоятельный обзор всех результатов неравенства вида (2.19), где получены наилучшие константы и анализируется связь задачи Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования $\mathcal{D}^k$ порядка k на различных классах функций.

В приведенной ниже теореме 2.2 доказывается точное неравенство Колмогорова для функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Поскольку для функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ ее промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$, $s = 1, 2, \ldots, r-1$, принадлежат пространству $L_{2,\mu}$, то представляет интерес изучение поведения наилучших приближений $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)$, $s = 1, 2, \ldots, r-1$, на классе $L_{2,\mu}^{(2r)}$. С этой целью нам понадобится неравенство типа (2.19) в пространстве $L_{2,\mu}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть* $r, s \in \mathbb{N},\ r > s$. *Тогда для произвольной функции* $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, $f \neq \mathrm{const}$, *справедливо точное на* $L_{2,\mu}$ *неравенство*

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu} \leq \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{s/r} \cdot \|f\|_{2,\mu}^{1-s/r}. \tag{2.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, в силу линейности оператора $\mathcal{D}^s$ из равенства (1.4) с учетом (1.7) имеем

$$\mathcal{D}^s f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)(\mathcal{D}^s T_k(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^s k^{2s} c_k(f) T_k(x). \tag{2.21}$$

Применяя равенство Парсеваля, из (2.21) выводим

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{4s} |c_k(f)|^2. \tag{2.22}$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера для рядов, из (2.22) получаем

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(k^{4r}|c_k(f)|^2\Big)^{s/r} \Big(|c_k(f)|^2\Big)^{1-s/r}$$

$$\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{4r}|c_k(f)|^2\right)^{s/r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2\right)^{1-s/r} = \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{2s/r} \cdot \|f\|_{2,\mu}^{2(1-s/r)},$$

откуда и вытекает (2.20). Точность неравенства (2.20) на множестве $L_{2,\mu}^{(2r)}$ проверяется непосредственным вычислением для функции $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$. Теорема 2.2 доказана.

Из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 2.5. *При выполнении условий теоремы* 2.2 *имеет место точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq \Big(\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\Big)^{s/r} \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{1-s/r}, \tag{2.23}$$

обращающееся в равенство для $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$.

Следующее утверждение базируется на неравенстве (2.20).

Теорема 2.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}, 0 < p \leq 2, 0 < h \leq 3\pi/(4n),\ r \in \mathbb{Z}_+,\ s = 0, 1, \ldots, r$; $\varphi(t)$ — *неотрицательная суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *не эквивалентная нулю функция и выполняется неравенство* (2.9). *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp} \varphi(t) dt\right\}^{-1/p}. \tag{2.24}$$

В частности, если в (2.24) *полагать* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$, *и* $\varphi(t) \equiv 1$, *то имеем*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt\right)^m} = \left\{\frac{n}{nh - \sin nh}\right\}^m, \tag{2.25}$$

а если же полагать $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$, *и* $\varphi(t) \equiv t$, *то будем иметь*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^{2(r-s)-m} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h t\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt\right)^m} = 2^m \Big\{nh(nh - \sin nh) - [(nh)^2 - 2(1 - \cos nh)]\Big\}^{-m}. \tag{2.26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если выполнено равенство (2.11), то для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}{n^{2r}\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{2.27}$$

Полагая в (2.27) $r = 0$, получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{2.28}$$

Поскольку из определения класса $L_{2,\mu}^{(2r)}$ следует, что $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\mu}$, то, заменяя в неравенстве (2.28) функцию f на $\mathcal{D}^r f$, имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{2.29}$$

Подставляя в правую часть неравенства (2.23) вместо величины наилучших приближений $\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$ и $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}$ их оценки сверху из неравенств (2.27) и (2.29), получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}{n^{2(r-s)}\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \quad (s = 0, 1, \ldots, r),$$

или, что то же самое,

$$\frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, то мы имеем следующую оценку сверху:

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\mu}^{(2r)} \\ f \ne const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\, \varphi(t) dt\right)^{1/p}}. \tag{2.30}$$

С другой стороны, для рассмотренной при доказательстве теоремы 2.1 функции $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ согласно соотношениям (2.7) и очевидному равенству

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s T_n)_{2,\mu} = n^{2s} E_{n-1}(T_n)_{2,\mu} = n^{2s}$$

будем иметь

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}\\ f\neq const}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{n^{2r}}{\left(n^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.31}$$

Требуемое равенство (2.24) получаем из сопоставления оценки сверху (2.30) и оценки снизу (2.31), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.

3. Значения n-поперечников некоторых классов функций в $L_{2,\mu}$

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые понятия и определения, используемые нами в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{B}$ — единичный шар в $L_{2,\mu}$; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\mu}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\mu}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L}\colon L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $L_{2,\mu}$ в Λ_n; $\mathscr{L}^{\perp}\colon L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства $L_{2,\mu}$ на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0\colon \varepsilon\mathcal{B}\cap\Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_{2,\mu}\colon g\in\Lambda_n\right\} : f\in\mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_{2,\mu}\colon f\in\mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_{2,\mu}\subset\Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\mu}\colon f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\mu}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\mu}) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_{2,\mu}\colon f\in\mathfrak{M}\Big\}\colon \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\mu}\subset\Lambda_n\Big\}\colon \Lambda_n \subset L_{2,\mu}\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками*. Поскольку $L_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными выше n-поперечниками (см., например, [26; 29]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}) = \pi_n(\mathfrak{M}; L_{2,\mu}). \tag{3.1}$$

При помощи специального модуля непрерывности (1.2) определим следующий класс функций. Пусть $\Psi(t)$, $0 \leq t < \infty$, — произвольная непрерывная неубывающая функция такая, что $\Psi(0) = 0$. Символом $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$, $1/(2r) < p \leq 2$, $m, r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется условие

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}\,d\tau \leq \Psi^p(t).$$

Полагаем также

$$(1-\cos t)_*^m = \Big\{\ (1-\cos t)^m,\ \text{если } 0<t\le\pi;\quad 2^m,\ \text{если } t\ge\pi\ \Big\}. \tag{3.2}$$

Здесь вычислим точные значения указанных выше n-поперечников при некоторых ограничениях на мажоранту $\Psi(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/(2r)<p\le 2$ и функция Ψ при любых значениях $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/n)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)_*^{mp}d\tau\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1}. \tag{3.3}$$

Тогда выполняются равенства

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi))_{L_{2,\mu}} = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right\}^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n), \tag{3.4}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников, а

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi))_{L_{2,\mu}} \overset{def}{=} \sup\Big\{\,\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\colon f\in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)\Big\}.$$

Множество мажорант Ψ, для которых выполняется ограничение (3.3)*, не пусто.*

Доказательство. Из соотношения (2.5) для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}$ при $h=\pi/n$ и $\varphi(t)\equiv 1$ выводим оценку сверху величины наилучшего полиномиального приближения:

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}d\tau\right)^{1/p}. \tag{3.5}$$

Учитывая определение класса $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$ и соотношение (3.1), из неравенства (3.5) получим

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) \le \mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi))_{L_{2,\mu}} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n). \tag{3.6}$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n-поперечников в силу соотношения (3.1) достаточно оценить снизу бернштейновский n-поперечник класса $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$. С этой целью во множестве $\mathcal{P}_n\cap L_{2,\mu}$ введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} \overset{def}{=} \left\{p_n\in\mathcal{P}_n\colon \|p_n\|_{2,\mu} \le \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n)\right\}.$$

Из равенства (1.10) для произвольной $p_n\in\mathcal{P}_n$ вытекает равенство

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r p_n)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{n}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(p_n).$$

Если учесть, что при любых натуральных $k\le n$ и $h\ge 0$ выполняется неравенство

$$(1-\cos kh)^{2m} \le (1-\cos nh)_*^{2m},$$

то для произвольной $p_n \in S_{n+1}$ получаем $\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r p_n)\|_{2,\mu}^2 \le n^{4r}(1-\cos nh)_*^{2m}\,\|p_n\|_{2,\mu}^2$ или, учитывая соотношение (1.2), запишем

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r p_n;\tau)_{2,\mu} \le n^{2r}(1-\cos n\tau)_*^m\|p_n\|_{2,\mu}. \tag{3.7}$$

Обе части неравенства (3.7) возведем в степень p $(1/(2r) < p \le 2)$, проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t и полученное соотношение поделим на t. Затем в интеграле, расположенном в правой части неравенства, произведем замену переменной $n\tau = u$, а также заменим норму полинома $p_n \in S_{n+1}$ радиусом шара и, учитывая ограничение (3.3), получаем

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r p_n;\tau)_{2,\mu}d\tau \le n^{2rp}\|p_n\|_{2,\mu}^p\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t(1-\cos n\tau)_*^{mp}d\tau$$

$$\le \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt}(1-\cos u)_*^{mp}du\Bigg(\int\limits_0^{\pi}(1-\cos u)^{mp}du\Bigg)^{-1}\Psi(\pi/n) \le \Psi(t).$$

Последнее неравенство означает, что шар $S_{n+1} \subset W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$. Используя определение бернштейновского n-поперечника и соотношение (3.1), имеем

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) \ge b_n(W_{p,m}^{(2r)}(\Psi);L_{2,\mu}) \ge b_n(S_{n+1};L_{2,\mu})$$

$$\ge \Bigg(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\Bigg)^{-1/p} n^{-2r}\,\Psi(\pi/n). \tag{3.8}$$

Сопоставляя оценку сверху (3.6) и оценку снизу (3.8), получаем требуемое равенство (3.4). Приступая ко второй части доказательства, покажем, что функция $\Psi_*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \overset{def}{=} \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\dfrac{\tau}{2}\right)^{2mp}d\tau} - 1 \tag{3.9}$$

удовлетворяет условию (3.3). Сначала определим границу значений числа $\alpha := \alpha(m,p)$ из равенства (3.9). Воспользовавшись неравенством $\sin x \ge (2/\pi)x$ $(0 \le x \le \pi/2)$, имеем

$$\alpha = \alpha(m,p) = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\dfrac{\tau}{2}\right)^{2mp}d\tau} - 1 \le \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\left(\dfrac{\tau}{\pi}\right)^{2mp}d\tau} - 1 = 2mp.$$

Аналогично, учитывая неравенство $|\sin x| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$, получаем

$$\alpha = \alpha(m,p) = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\dfrac{\tau}{2}\right)^{2mp}d\tau} - 1 \ge \frac{\pi}{\pi} - 1 = 0.$$

Таким образом, имеем

$$0 < \alpha < 2mp. \tag{3.10}$$

Анализируем условие (3.3) теоремы 3.1. Подставляя функцию Ψ_* в (3.3), получаем

$$\left(\frac{nt}{\pi}\right)^{\alpha} \ge \frac{\pi}{nt}\,\frac{\int\limits_0^{nt}(1-\cos\tau)_*^{mp}d\tau}{\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau} = \frac{\pi}{nt}\,\frac{\int\limits_0^{nt}\left(\sin\dfrac{\tau}{2}\right)_*^{2mp}d\tau}{\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\dfrac{\tau}{2}\right)^{2mp}d\tau}. \tag{3.11}$$

Полагая $nt = \mu\pi$ $(0 \le \mu < \infty)$, неравенство (3.11) запишем в виде

$$\mu^{\alpha+1} \ge \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)_*^{2mp} d\tau \Big(\int\limits_0^{\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^{2mp} d\tau\Big)^{-1}. \tag{3.12}$$

Предложенная формула (3.9) для $\alpha = \alpha(m,p)$ есть результат приравнивания производных по μ от левой и правой частей неравенства (3.12) при $\mu = 1$. С учетом равенства (3.9) неравенство (3.12) приобретает вид

$$\mu^{\alpha+1} \ge \frac{\alpha+1}{\pi} \int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)_*^{2mp} d\tau, \tag{3.13}$$

что еще предстоит доказать. Рассуждения проведем отдельно для двух случаев

$$\text{а) } 0 \le \mu \le 1; \quad \text{б) } 1 \le \mu < \infty.$$

Пусть $0 \le \mu \le 1$. Сначала заметим, что в достаточно малой окрестности нуля неравенство (3.13) имеет место. Поскольку при $\mu \to 0+0$

$$\varphi(\mu) := \mu^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^{2mp} d\tau = \mu^{\alpha+1}\left[1 - \frac{\pi^{2mp}(\alpha+1)}{2^{2mp}\,(2mp+1)}\, O(\mu^{2mp-\alpha})\right],$$

то в силу правой части (3.10) φ является положительной функцией. Докажем, что функция φ на всем отрезке $[0,1]$ неотрицательна. Если допустить, что в некоторой точке $\xi \in (0,1)$ функция φ меняет знак, то с учетом равенства $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ согласно теореме Ролля получаем, что производная первого порядка

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\left[\mu^{\alpha} - \Big(\sin\frac{\mu\pi}{2}\Big)^{2mp}\right] \tag{3.14}$$

должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее двух различных нулей. Из (3.14) следует, что столько же различных нулей и в тех же точках интервала $(0,1)$ должна иметь функция

$$\varphi_*(\mu) = \mu^{\alpha/(2mp)} - \sin\frac{\mu\pi}{2}. \tag{3.15}$$

Так как кроме того $\varphi_*(0) = \varphi_*(1) = 0$, функция φ_* должна иметь на отрезке $[0,1]$ не менее четырех нулей. Тогда из теоремы Ролля следует, что производная

$$\varphi_*'(\mu) = \frac{\alpha}{2mp}\cdot \mu^{\alpha/(2mp)-1} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\mu\pi}{2} \tag{3.16}$$

обязана обращаться в нуль не менее чем в трех различных точках интервала $(0,1)$. В силу неравенства (3.10) функция $\mu^{\alpha/(2mp)-1}$ является положительной монотонно убывающей выпуклой вниз функцией на $(0,1)$, $\cos(\mu\pi/2)$ — монотонно убывающая выпуклая вверх функция на этом же интервале, а потому из геометрических соображений на основании (3.16) следует, что производная φ_*' на интервале $(0,1)$ может иметь не более двух различных нулей, и мы пришли к противоречию, что доказывает неравенство (3.13) в случае а).

Приступая к рассмотрению случая б), функцию φ с учетом (3.9) и (3.2) запишем в виде

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^{2mp} d\tau - \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\mu\pi} \Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)_*^{2mp} d\tau = \mu^{\alpha+1} - 1 - (\alpha+1)(\mu-1). \tag{3.17}$$

Дифференцируя полученное равенство, для всех $1 \le \mu < \infty$ имеем

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)(\mu^{\alpha}-1) \ge 0.$$

Поскольку, как следует из (3.17), $\varphi(1) = 0$, то $\varphi(\mu) \ge 0$ на указанном точечном множестве. Это означает, что неравенство (3.13) имеет место и в случае б). Значит условие (3.3) справедливо для мажорантной функции Ψ_* при любом $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1 полностью доказана.

Из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Для любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{p,m}^{(r)}(\Psi_*); L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{p,m}^{(r)}(\Psi_*))_{L_{2,\mu}} = 2^m(\alpha+1)^{-1/p}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-(2r+\alpha/p)}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$. Если функция Ψ при любом $t \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию* (3.3) *теоремы* 3.1, *то для всех $s = 0, 1, \ldots, r$ справедливы равенства*

$$\sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}\colon f \in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)\Big\} = n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \tag{3.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (2.24) при $\varphi(t) \equiv 1$ для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ и любого $h \in [0, \pi/n]$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \le n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^p(D^r f; t)_{2,\mu}dt\right)^{1/p}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}dt\right)^{-1/p}. \tag{3.19}$$

Используя определение класса $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$, из неравенства (3.19) при $h = \pi/n$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu} \le n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \tag{3.20}$$

При доказательстве теоремы 3.1 мы установили, что множество полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющих условию

$$\|p_n\|_{2,\mu} \le n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n),$$

принадлежит классу $W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$. Рассмотрим функцию

$$f_1(t) \overset{def}{=} n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n)T_n(x).$$

Так как

$$\|f_1\|_{2,\mu} = n^{-2r}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n),$$

то $f_1 \in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)$, и поскольку

$$\mathcal{E}_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu} = n^{-2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\Psi(\pi/n),$$

то

$$\sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(D^s f)_{2,\mu}\colon f\in W_{p,m}^{(2r)}(\Psi)\Big\}\geq \mathcal{E}_{n-1}(D^s f_1)_{2,\mu}$$

$$= n^{-2(r-s)}\bigg(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau\bigg)^{-1/p}\Psi(\pi/n). \tag{3.21}$$

Сопоставляя неравенства (3.20) и (3.21), получаем равенство (3.18). Теорема 3.2 доказана.

Авторы признательны профессору В. В. Арестову за ценные советы и замечания, использованные в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.
2. **Тайков Л.В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.
3. **Тайков Л.В.** Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Мат. заметки. 1979. Т. 25, № 2. С. 217–223.
4. **Лигун А.А.** Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 785–792.
5. **Бабенко А.Г.** О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.
6. **Шалаев В.В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 1. С. 125–129.
7. **Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т.** Неравенства Джексона — Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 928–932.
8. **Вакарчук С.Б.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 5. С. 792–796.
9. **Вакарчук С.Б., Забутная В.И.** Неравенства типа Джексона — Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 4. С. 497–514.
10. **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: Изд-во ТулГУ, 1995. 192 с.
11. **Есмаганбетов М.Г.** Поперечники классов из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 6. С. 816–820.
12. **Юдин В.А.** К теоремам Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 1. С. 43–47.
13. **Шабозов М.Ш.** Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0,2\pi]$ // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 616–623.
14. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. 2011. Т. 90, № 5. С. 764–775.
15. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Изв. РАН. Серия математическая. 1998. Т. 62, № 6. С. 27–52.
16. **Чертова Д.В.** Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1\leq p\leq 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естест. науки. 2009. Вып.1. С. 5–27.
17. **Кук Во Тхи.** Операторы обобщенного сдвига в пространствах L_p на торе с весом Якоби и их применение // Изв. ТулГУ. Естест. науки. 2012. Вып. 1. С. 17–43.
18. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 180–192.
19. **Иванов А.В., Иванов В.И.** Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 3. С. 338–348.
20. **Вакарчук С.Б.** О неравенствах типа Джексона в L_2 и точных значениях n-поперечников функциональных классов // Укр. мат. вiсник. 2006. Т. 3, № 1. С. 116–133.

21. **Абилов В.А., Абилова Ф.В.** Об одной квадратурной формуле // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 4. С. 451–458.
22. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
23. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.
24. **Тухлиев К.** О верхних гранях отклонения некоторых классов функций от их частичных сумм рядов Фурье — Чебышёва в пространстве L_2 // Докл. АН РТ. 2013. Т. 56, № 8. С. 606–611.
25. **Шабозов М.Ш., Тухлиев К.** $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_2\big((1-x^2)^{-1/2};[-1,1]\big)$ // Изв. ТулГУ. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 83–97.
26. **Pinkus A.** n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 252 p.
27. Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кафанов, С. А. Пичугов. Киев: Наукова думка, 2003. 590 с.
28. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат наук. 1996. Т. 51. Вып. 6 (312). С. 89–124.
29. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 325 с.

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик АН Республики Таджикистан
Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Поступила 27.05.2014

Тухлиев Камаридин
канд. физ.-мат. наук
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
e-mail: kamaridin.t54@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 517.5

ОЦЕНКА СВЕРХУ РАВНОМЕРНЫХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИСТОКООБРАЗНО ПРЕДСТАВИМЫХ СПЛАЙНОВ[1]

В. Т. Шевалдин, О. Я. Шевалдина

В работе для достаточно широкого класса периодических интегрируемых ядер K получены оценки сверху констант Лебега (норм линейных операторов из C из C) интерполяционных истокообразно представимых сплайнов с равномерными узлами.

Ключевые слова: константы Лебега, истокообразно представимые сплайны, равномерные узлы.

V. T. Shevaldin, O. Ya. Shevaldina. Upper bounds for uniform Lebesgue constants of interpolational periodic sourcewise representable splines.

Upper bounds for Lebesgue constants (norms of linear operators from C to C) of interpolational periodic sourcewise representable splines with uniform knots are obtained for a wide class of periodic integrable kernels K

Keywords: Lebesgue constants, sourcewise representable splines, uniform knots.

Введение

Пусть $L_p = L_p[0;2\pi]$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство 2π-периодических функций f, абсолютно интегрируемых на периоде с p-й степенью при $1 \le p < \infty$ и существенно ограниченных при $p = \infty$, $C[a;b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций, $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычными определениями нормы. Пусть также множество $P \subset \mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,\dots\}$, $\operatorname{card} P = \mu$ (P может быть и пустым),

$$T_P(x) = \sum_{k\in P}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R}),$$

$$K(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt) \quad (\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}). \tag{0.1}$$

Далее всюду считаем, что ряд (0.1) сходится абсолютно и функция $K \in L_1[0;2\pi]$. Пусть

$$\overline{\mu} = \dim T_P = \begin{cases} 2\mu, & 0 \notin P, \\ 2\mu - 1, & 0 \in P. \end{cases}$$

Класс $F = F(K,P)$ периодических функций f вида

$$f(x) = T_P(x) + \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt, \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-01-00496), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1) и Программы УрО РАН (проект 15-16-1-4), а также при финансовой поддержке в рамках Постановления Правительства РФ № 211, контракт № 02.A03.21.0006.

где $\Phi \in L_\infty[0;2\pi]$ и $\Phi \perp T_P$, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi} \Phi(t) \begin{Bmatrix} \sin kt \\ \cos kt \end{Bmatrix} dt = 0, \quad k \in P, \tag{0.3}$$

называется классом истокообразно представимых функций. Данное определение было введено Р. Курантом и Д. Гильбертом, при этом функция K называется ядром, а функция Φ — истоком. Различные задачи теории приближения таких классов функций (а в основном, их частных случаев) рассматривались многими авторами (см., например, обширную библиографию в [1–3]). Подчеркнем, что в данной статье множество P и ядро K, задающие класс функций $F = F(K,P)$, считаются фиксированными.

Пусть m — натуральное число, $m > \overline{\mu} = \dim T_P$, $h = 2\pi/m$ и $g = g(t)$ — заданная неотрицательная, непрерывная функция периода h. В классе F определим следующие множества:

$$S_m(F,g) = \big\{f \in F:\ \Phi(t) = Z_j g(t),\ (j-1)h \le t < jh \ \ (j \in \mathbb{Z}),\ Z_{j+m} = Z_j \ \ (j \in \mathbb{Z})\big\},$$

$$W(F,g) = \{f \in F:\ |\Phi(t)| \le g(t) \ \text{ п. в. на } \ [0;2\pi]\}.$$

Множество функций $S \in S_m(F,g)$ называется пространством периодических истокообразно представимых сплайнов (см., например, [4]). В случае четного m, $g = 1$, $P = \{0\}$ и

$$K(t) = \pi^{-1} D_r(t) = \pi^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \frac{\pi r}{2})}{k^r} \quad (r \in \mathbb{N}) \tag{0.4}$$

истокообразно представимые сплайны — хорошо изученные периодические полиномиальные сплайны минимального дефекта степени r с m равномерными узлами на периоде (см., например, [2]), а ядро $\pi^{-1} D_r$ носит название ядра Бернулли. Заметим, что в общем случае любой сплайн $S \in S_m(F,g)$ зависит от $m + \overline{\mu}$ параметров $\{Z_j\}_{j=1}^m$ и $\{a_k\}_{k\in P}$, $\{b_k\}_{k\in P}$, на которые наложено $\overline{\mu}$ ограничений (0.3).

Классическая интерполяционная задача для введенного выше пространства сплайнов состоит в следующем. Пусть $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $0 \le \theta < 1$ и $y_\nu = f(\theta h + \nu h)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$. Требуется в пространстве $S_m(F,g)$ приближенно восстановить функцию f по числам $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющим условиям $y_{\nu+m} = y_\nu$ $(\nu \in \mathbb{Z})$. Более точно, нужно указать условия на множество P, ядро K, функцию g и (что особенно важно) число $\theta:\ 0 \le \theta < 1$, при которых существует единственный истокообразно представимый сплайн $S \in S_m(F,g)$, удовлетворяющий условиям

$$S(\theta h + \nu h) = y_\nu \quad (\nu \in \mathbb{Z}).$$

Таким образом, в общей задаче функциональной интерполяции сплайнами считается, что сетка узлов интерполяции $\{\theta h + \nu h\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$ сдвинута на θh относительно сетки узлов сплайна $\{\nu h\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$. Эта задача имеет богатую историю, которая берет начало с работ Дж. Алберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [5] и Ю. Н. Субботина [6] по полиномиальным сплайнам (библиографию см., например, в [4]). Наиболее общие результаты в данной интерполяционной задаче получены А. К. Кушпелем [7] (случаи $P = \{\varnothing\}$, $P = \{0\}$ и произвольного ядра K) и первым автором [4] данной статьи. Введем некоторые числа и функции.

Ядро K представим следующим образом:

$$K(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j e^{ijt},$$

где

$$\mu_j = \begin{cases} (\alpha_j - i\beta_j)/2, & j > 0, \\ (\alpha_j + i\beta_j)/2, & j < 0, \end{cases} \qquad \mu_0 = \frac{\alpha_0}{2}.$$

Для произвольной функции $f \in F(K,P)$ в силу (0.3) можно считать, что $\mu_j = 0$, если $|j| \in P$, и поэтому

$$K(t) = \sum_{j:\ |j| \notin P} \mu_j e^{ijt}.$$

Определим функции

$$\lambda_r(t) = m \sum_{l\in\mathbb{Z}}{}' \mu_{ml+r} \int\limits_0^h g(x) e^{i(ml+r)(th-x)}\, dx \quad (r = \overline{1,m}), \tag{0.5}$$

где штрих означает, что суммирование производится по всем целым l таким, что $|ml+r| \notin P$. Как следует из [4], $\lambda_r(t)$ $(r = \overline{1,m})$ — собственные числа некоторой матрицы. Пусть также для каждого $\theta:\ 0 \le \theta < 1$ множество

$$R(\theta) = \{r:\ r = \overline{1,m},\ \lambda_r(\theta) = 0\}$$

и A — множество всех $r = \overline{1,m}$ таких, что для каждого $r \in A$ существует число $s = s(r) \in P$ такое, что либо $s \equiv r (\operatorname{mod} m)$, либо $s \equiv -r (\operatorname{mod} m)$.

Теорема 1 [4, теорема 1]. *Для любой последовательности $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющей условию $y_{\nu+m} = y_\nu$ $(\nu \in \mathbb{Z})$, существует единственный сплайн $S \in S_m(F,g)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $\displaystyle\int_0^h g(t) e^{\pm ikt}\, dt \ne 0 \quad \forall\ k \in P$;
2) *число $\theta:\ 0 \le \theta < 1$ таково, что $R(\theta) \subseteq A$*;
3) $s_1 \not\equiv \pm s_2 (\operatorname{mod} m) \quad \forall\ s_1, s_2 \in P$;
4) *если m — четно, то $m/2 \not\equiv s (\operatorname{mod} m) \quad \forall\ s \in P$.*

При выполнении условий 1)–4) параметры a_k, b_k и Z_j интерполяционного сплайна $S \in S_m(F,g)$ вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu \cos kh(\theta+\nu), \quad b_k = \frac{2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu \sin kh(\theta+\nu),$$

$$a_0 = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu, \quad \textit{если} \ \ 0 \in P,$$

$$Z_j = \frac{1}{m} \sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu \sum_{r=1}^{m}{}'' (\lambda_r(\theta+\nu-j+1))^{-1} \quad (j = \overline{1,m}),$$

где двойной штрих означает, что в сумме отсутствуют слагаемые $\lambda_r^{-1}(\theta+\nu-j+1)$ с номерами $r \in A$.

Из теоремы 1 следует, что при выполнении условий 1)–4) интерполяционный сплайн $S \in S_m(F,g)$ может быть представлен в следующем виде:

$$S(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} y_\nu g_\nu(x) \quad (x \in [0; 2\pi]),$$

где $g_\nu(x)$ $(\nu = \overline{0, m-1})$ — некоторые непрерывные 2π-периодические функции. Следовательно, сплайн $S(x) = S(f,x)$ задает линейный метод аппроксимации 2π-периодической функции f по ее значениям $y_\nu = f(\theta h + \nu h)$ $(\nu \in \mathbb{Z})$ в системе равноотстоящих точек. Нас интересует равномерная норма данного оператора. Величина

$$L = L(K,m) = \sup\{\|S(f,\cdot)\|_C:\ \|f\|_C \le 1\}$$

является равномерной нормой оператора S и носит название константы Лебега периодических интерполяционных истокообразно представимых сплайнов с равномерными узлами. Начало исследования констант Лебега интерполяционных сплайнов было положено в работах Ф. Ричардса [8] и А. А. Женсыкбаева [9] (см. библиографию, например, в [10; 11]), причем изучались только полиномиальные и экспоненциальные интерполяционные сплайны.

В настоящей работе для широкого класса ядер K, удовлетворяющих некоторому условию, возникшему в статьях [4; 7] при получении точных оценок снизу для колмогоровских поперечников классов функций $W(F,g)$, в случае четного числа m получена оценка сверху величины $L = L(K,m)$ для интерполяционных сплайнов $S \in S_m(F,g)$, определенных этим ядром K.

1. Свойство C_θ и оценка сверху для $L(K,2n)$

В данном разделе всюду считаем, что $m = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$). При получении точных оценок снизу поперечников по Колмогорову классов функций $W(F,g)$ (в случае $g = 1$) в равномерной метрике А. К. Кушпель [7] (при $P = \{0\}$ и $P = \varnothing$) и первый автор [4] выделили класс ядер K, пространство истокообразно представимых сплайнов у которых удовлетворяет следующему свойству.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что пространство сплайнов $S_{2n}(F,g)$ удовлетворяет свойству C_θ при некотором $\theta:\ 0 \le \theta < 1$, если при этом θ выполнены условия 1) – 4) теоремы 1 и, кроме того, последовательность чисел

$$z_l = \frac{1}{2n} \sum_{r=1}^{2n}{}'' \lambda_r^{-1}(\theta + l) \quad (l = \overline{1,2n})$$

чередуется по знаку, а именно $z_l z_{l+1} \le 0$ ($l = \overline{1,2n-1}$), где двойной штрих означает, что в сумме отсутствуют слагаемые $\lambda_r^{-1}(\theta + l)$ с номерами $r \in A$.

В [4; 7] приведены примеры ядер K, удовлетворяющих данному определению. Напомним, что для аппроксимируемой функции $f \in C_{2\pi}$ мы положили

$$y_\nu = f(\theta h + \nu h) \quad (\nu \in \mathbb{Z}).$$

Теорема 2 [4, теорема 3]. *Пусть пространство $S_{2n}(F,g)$ удовлетворяет свойству C_θ при некотором $\theta:\ 0 \le \theta < 1$. Тогда для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и сплайна $S(x) = S(f,x) \in S_{2n}(F,g)$ имеет место неравенство*

$$\max_j |Z_j| \le |\lambda_n^{-1}(\theta)| \max_\nu |f(\theta h + \nu h)|,$$

где функция $\lambda_n(\theta)$ определена равенством (0.5) *при $m = 2n$ и $r = n$.*

В наших исследованиях важную роль играет функция

$$\lambda_n(x) = 2n \int_0^h g(t) \sum_{l\in\mathbb{Z}} \mu_{(1+2l)n} e^{i(1+2l)(xh-t)n}\, dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

(здесь $h = \pi/n$ и штрих отсутствует в силу условия 4) теоремы 1). В [4] отмечено, что эта функция является сверткой непрерывной функции g и интегрируемой функции, поэтому функция λ_n непрерывна. В случае $g = 1$, $P = \{0\}$ и $K(t) = \pi^{-1} D_r(t)$ функция $\lambda_n(x)$ является совершенным периодическим сплайном степени r с $2n$ равноотстоящими узлами на отрезке $[0; 2n]$ (соответствующие определения, свойства и комментарии см. в [2; 4]) и удовлетворяет свойству $\lambda_n(x+1) = -\lambda_n(x)$. Рассмотрим число $\theta_1:\ 0 \le \theta_1 < 1$ такое, что

$$|\lambda_n(\theta_1)| = \max_x |\lambda_n(x)|,$$

и обозначим через Ω множество тех θ : $0 \le \theta < 1$, при которых пространство $S_{2n}(F,g)$ удовлетворяет данному выше определению.

Следствие 1 [4, следствие 1]. *Если $\theta_1 \in \Omega$, то для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и сплайна $S(x) = S(f,x) \in S_{2n}(F,g)$ справедливо точное неравенство* $\max_j |Z_j| \le \min_{\theta\in\Omega} |\lambda_n^{-1}(\theta)| \cdot \|f\|_C$, *причем знак равенства реализует функция $f(x) = \lambda_n(x/h)$.*

Приступим теперь к оценке сверху константы Лебега $L(K,2n)$ интерполяционных периодических истокообразно представимых сплайнов.

Теорема 3. *Для любой функции $f \in C_{2\pi}$ и сплайна $S(x) = S(f,x) \in S_{2n}(F,g)$, удовлетворяющего свойству C_{θ_1}, такого что*

$$S(\theta_1 h + \nu h) = f(\theta_1 h + \nu h) \quad (\nu \in \mathbb{Z}),$$

имеет место неравенство

$$\|S(f,\cdot)\|_C \le \|f\|_C \Big(\frac{\|K\|_{L_1} \|g\|_C}{\|\lambda_n\|_C} + 2\overline{\mu} \Big).$$

Доказательство. В представлении (0.2) сплайна S оценим сверху каждое слагаемое. Пусть вначале $0 \notin P$. Тогда из формул для чисел a_k, b_k $(k \in P)$ из теоремы 1 при любом $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|T_P(x)| = \Big| \sum_{k\in P} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Big|$$

$$= \Big| \sum_{k\in P} \frac{1}{n} \Big(\sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu \cos kh(\theta+\nu) \cos kx + \sum_{\nu=0}^{2n-1} y_\nu \sin kh(\theta+\nu) \sin kx \Big) \Big|$$

$$\le \|f\|_C \max_x \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{2n-1} \sum_{k\in P} |\cos(kh(\theta+\nu) - kx)| \le 4\mu \|f\|_C.$$

Аналогично, если $0 \in P$, получаем $|T_P(x)| \le 2(2\mu - 1)\|f\|_C$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|T_P\|_C \le 2\overline{\mu} \|f\|_C. \tag{1.1}$$

Теперь с учетом теорем 1 и 2 оценим сверху абсолютную величину интеграла

$$\Big| \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt \Big|$$

в случае $\Phi(t) = Z_j g(t)$, $(j-1)h \le t < jh$ $(j \in \mathbb{Z})$, $h = \pi/n$. Имеем

$$\Big| \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{2n} Z_j \int_{(j-1)h}^{jh} g(t) K(x-t)\,dt \Big|$$

$$\le \max_j |Z_j| \Big(\sum_{j=1}^{2n} \Big| \int_{(j-1)h}^{jh} g(t)K(x-t)\,dt \Big| \Big) \le \max_j |Z_j| \cdot \|g\|_C \sum_{j=1}^{2n} \int_{(j-1)h}^{jh} |K(x-t)|\,dt$$

$$= \max_j |Z_j| \cdot \|g\|_C \cdot \|K\|_{L_1}.$$

Таким образом, из следствия 1 выводим неравенство

$$\Big| \int_0^{2\pi} K(x-t)\Phi(t)\,dt \Big| \le \|g\|_C \cdot \|K\|_{L_1} \cdot \|\lambda_n\|_C^{-1} \cdot \|f\|_C. \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует утверждение теоремы 3. □

Следствие 2. *Из доказанной теоремы* 3 *при* $\theta = \theta_1$ *вытекает следующая оценка сверху для константы Лебега* $L = L(K, 2n)$:

$$L(K, 2n) \le \frac{\|K\|_{L_1}\|g\|_C}{\|\lambda_n\|_C} + 2\overline{\mu}.$$

2. Примеры и комментарии

Вопросы существования и единственности интерполяционных сплайнов исследовались многими авторами (см. библиографию в [4]). Свойство C_θ А. И. Степанец и его ученики А. К. Кушпель, А. С. Сердюк и др. (см., например, [3;7;12;13]) формулировали в терминах производящего полинома ядра K или свойств знакорегулярности фундаментальных сплайнов, соответствующих этому ядру. Приведем, на наш взгляд, наиболее простую интерпретацию этого свойства в случае $P = \varnothing$ из работы [4]. Пусть

$$\tau_s = \int\limits_0^h K((\theta + 1 - s)h - t)\,dt \quad (s = \overline{0, 2n-1}).$$

Рассмотрим матрицу T порядка $2n \times 2n$, которая является циркулянтом с элементами первой строки $\{\tau_s\}_{s=0}^{2n-1}$. Выполнение свойства C_θ означает, что при этом $\theta :\ \ 0 \le \theta < 1 \det T \ne 0$ и все миноры порядка $2n-1$ имеют один и тот же знак. Данное требование на ядро K, как отмечено в [4], является менее жестким, чем условие знакорегулярности ядра K, которое возникло у А. Пинкуса [14] при нахождении точных значений колмогоровских поперечников классов периодических функций типа Соболева.

Теперь рассмотрим несколько примеров в случае $P = \{0\}$. Случай $g = 1$, $K(t) = \pi^{-1}D_r(t)$ $(r \in \mathbb{N})$ — ядра Бернулли (см. (0.4)) приводит, как мы уже отмечали, к интерполяционным полиномиальным сплайнам минимального дефекта степени r. По традиции, начиная с основополагающих работ Дж. Алберга, Э. Нильсона, Дж. Уолша [5] и Ю. Н. Субботина [6], интерполяционные полиномиальные сплайны изучали и применяли в случае нечетного r только при $\theta = 0$, в случае четного r — при $\theta = 1/2$ (отметим, что в случае нечетного r при $\theta = 1/2$, а в случае четного r при $\theta = 0$ задача интерполяции неразрешима). А. К. Кушпель [7] доказал, что при таком классическом выборе интерполяционных условий свойство C_θ также имеет место. Константы Лебега $L(\pi^{-1}D_r, 2n)$ в этих случаях вычислены Ф. Ричардсом [8] и А. А. Женсыкбаевым [9]. Еще один принципиальный результат в данной тематике получен Ю. Н. Субботиным и А. А. Теляковским [10], которые нашли асимптотику роста констант Лебега периодических интерполяционных полиномиальных сплайнов по параметрам r и n. Х. Морше [15], И. Цимбаларио [16], В. А. Ким [11;17] и др. изучали константы Лебега интерполяционных экспоненциальных (и не только периодических) сплайнов, соответствующих линейным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами, характеристические многочлены которых имеют только действительные корни.

Еще один важный случай, возникающий при $P = \{0\}$ — случай ядра Пуассона, приводящий к гармоническим сплайнам (см., например, [1]). Пусть

$$\Pi_{\rho,\alpha}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos\Big(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\Big) \quad (0 < \rho < 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

— ядро, являющееся линейной комбинацией ядра Пуассона $\Pi_\rho(t) = \sum_{k=1}^\infty \rho^k \cos kt$ гармонических функций и его сопряженного $\widetilde{\Pi}_\rho(t) = \sum_{k=1}^\infty \rho^k \sin kt$. Выяснением вопроса: при каких

ρ, α и n свойство C_θ имеет место, помимо авторов цитированных работ [4; 7] занимались также Нгуен Тхи Тхьеу Хоа [18] и А. С. Сердюк и В. В. Боденчук [13]. Из результатов последней статьи, в частности, следует, что при стандартном выборе числа $\theta = \theta_1$, которое является точкой максимума модуля совершенного сплайна $\lambda_n(x)$, свойство C_θ имеет место при любых $0 < \rho < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых $n \geq n(\rho) \geq 9$, где $n(\rho)$ — корень некоторого трансцендентного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шевалдин В.Т.** Истокообразные сплайны и поперечники классов периодических функций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. 193 с.
2. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
3. **Степанец А.И.** Методы теории приближений: в 2 ч. / Ин-т математики НАН Украины. Киев, 2002. Ч. 1. 427 с.; Ч. 2. 468 с.
4. **Шевалдин В.Т.** Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. МИАН. 1989. Т. 189. С. 185–201.
5. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 320 с.
6. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
7. **Кушпель А.К.** Точные оценки поперечников классов сверток // Изв. РАН. Сер. математическая. 1988. Т. 52, № 6. С. 1305–1322.
8. **Richards F.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
9. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
10. **Субботин Ю.Н., Теляковский С.А.** Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 8. С. 131–140.
11. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.
12. **Степанец А.И., Сердюк А.С.** О существовании интерполяционных SK-сплайнов // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 11. С. 1546–1553.
13. **Serdyuk A.S., Bodenchuk V.V.** Exact values of Kolmogorov widths of classes of Poisson integrals // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 173, no. 1. P. 89–109.
14. **Pinkus A.** On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. 1979. Vol. 35. P. 209–235.
15. **ter Morsche H.G.** On the Lebesque constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. С. 232–246.
16. **Tzimbalario J.** Lebesgue constants for cardinal $\mathcal{L}$-spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
17. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
18. **Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.** Экстремальные задачи на некоторых классах гладких периодических функций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / МИАН им. В. А. Стеклова. М., 1994. 219 с.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 9.02.2015

Шевалдина Ольга Яковлевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет им. Б.Н.Ельцина
e-mail: o.ja.shevaldina@urfu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

УДК 519.62

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

В. И. Бердышев

В моей статье "К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями" (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2015, т. 21, № 1), связанной с поиском оптимальных траекторий объекта t в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, имеется погрешность. Она касается характеризации наилучшей траектории в одной из задач, рассмотренных в этой статье для двумерного пространства. В $\mathbb{R}^2$ имеется телесный многоугольник G, препятствующий движению и видимости. В его вершинах располагаются наблюдатели, которые в случае опасности со стороны t могут уйти в теневое множество $s(t) \subset \mathbb{R}^2 \backslash G$. Одной из характеристик оптимальной траектории $\mathcal{T}$ из заданного "коридора" Y траекторий, соединяющих фиксированные начальную и конечную точки, в задаче

$$\max_{\mathcal{T} \subset Y} \min_{t \in \mathcal{T}} \rho(t, s(t))$$

является (см. теорему 3 указанной статьи) принадлежность ей точек из построенного набора. Обозначим его через $\mathcal{P}$. Следующий пример показывает, что этот набор не является полным.

Для вершин $a \in G$ через $T(a)$ обозначается множество видимых из a точек $t \in \mathbb{R}^2 \backslash G$, для которых $a \in \overline{s}(t)$, при этом a — ближайшая к точке t из вершин, обладающих указанным свойством. Здесь $\overline{s}(t)$ — замыкание множества. Множество G (см. рисунок) состоит из двух симметрично расположенных относительно оси ординат прямоугольных треугольников с вершинами $a_1 = (1, 0),\ a_2 = (2, -1),\ a_3 = (2, 1)$ и $a_1' = (-1, 0),\ a_2' = (-2, -1),\ a_3' = (-2, 1)$. Среди траекторий, проходящих между указанными треугольниками, оптимальная траектория должна содержать точки $(0, 1),\ (0, -1)$, являющиеся ближайшими к вершинам a_1, a_1' из пересечения $T(a_1) \bigcap T(a_1')$. Однако в указанном выше наборе $\mathcal{P}$ они не присутствуют.

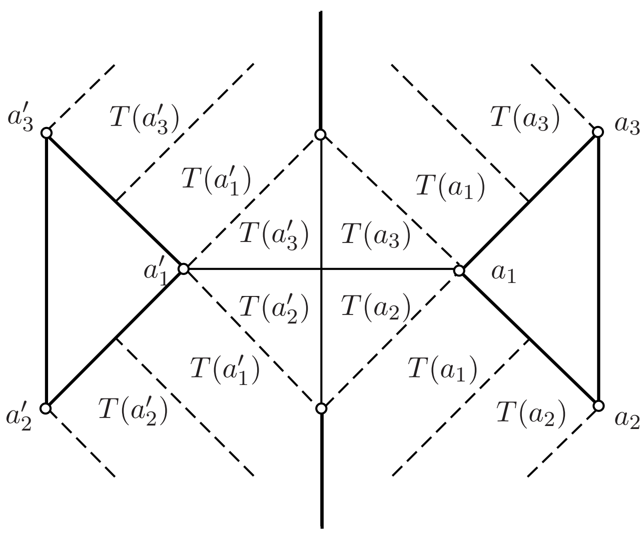


Рисунок.

С уважением, В. И. Бердышев

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 21, 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале "Труды Института математики и механики УрО РАН" публикуются *оригинальные работы* теоретического характера по современным разделам математики и механики.

"Труды Института математики и механики УрО РАН" являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы, математические утверждения должны быть обоснованы. В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В "Труды Института математики и механики" не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла "Трудов Института математики и механики").

Для решения вопроса о целесообразности публикации в "Трудах Института математики и механики" редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей. В настоящее время существует также дорецензионная проверка статей, во время которой статьи проверяются на оригинальность и просматривается структура статей на соответствие правилам журнала.

По решению редколлегии статья может быть включена в переводной номер "Трудов Института математики и механики", который выходит на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК "НАУКА/INTERPERIODICA" под названием "Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics (Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki)" как приложение к "Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement."

Автор представляет в редакцию (на адрес trudy@imm.uran.ru) электронный вариант статьи (формат ps или pdf).

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Лист с индексами статьи по Универсальной десятичной классификации (УДК), английское название статьи, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках.

• Лист со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Правила оформления рукописей:

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в "Труды Института математики и механики УРО РАН" статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации на русском языке, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация должна быть содержательной, не менее 300 знаков, лучше 500–600 знаков. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул.

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 4 2015

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина

TEX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск В. В. Шевченко

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 25.11.15. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38, 1. Уч.-изд. л. 32,8 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226