РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 19, № 1 2013

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 19 № 1 2013

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 19, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. 332 с.

ISSN 0134–4889

Том 19 № 1 2013

СОДЕРЖАНИЕ

Том 19 № 1 2013

(Продолжение)

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

СЕРГЕЙ НИКАНОРОВИЧ ШИМАНОВ

(*К девяностолетию со дня рождения*)

В августе прошедшего года исполнилось 90 лет со дня рождения Сергея Никаноровича Шиманова, крупного ученого, обогатившего науку фундаментальными достижениями по ряду направлений математики и механики.

С.Н. Шиманов родился 16 августа 1922 г. в Екатеринбурге в семье служащих. После окончания в 1940 г. средней образцовой школы № 152 он поступил на физико-математический факультет Уральского государственного университета (УрГУ) им. А.М. Горького, который окончил в 1945 г. по специальности "Механика". С этого времени вся дальнейшая трудовая деятельность С.Н. Шиманова была связана с кафедрой теоретической механики УрГУ. В 1945–1946 гг. он работал старшим лаборантом, в 1946–1949 гг. был аспирантом кафедры (научный руководитель профессор И.Г. Малкин), затем работал в должностях ассистента, доцента, заведующего кафедрой, профессора.

В Институте математики и механики УрО РАН С.Н. Шиманов работал по совместительству: с 1965 г. — в должности старшего научного сотрудника, а с 1987 г. — в качестве ведущего научного сотрудника.

В 1950 г. в ученом совете УрГУ он защитил кандидатскую диссертацию на тему "Колебания систем, близких к системам Ляпунова", в 1963 г. в ученом совете Института механики АН СССР — докторскую диссертацию на тему "Некоторые задачи теории устойчивости и колебаний систем с запаздыванием", а в 1965 г. был утвержден в ученом звании профессора по кафедре теоретической механики.

Будучи учеником И.Г. Малкина, С.Н. Шиманов продолжил научные и педагогические традиции, сложившиеся в русле тех направлений развития русской математико-механической школы, в основании которых лежат труды А.М. Ляпунова. Научные интересы Сергея Никаноровича относились прежде всего к таким фундаментальным разделам механики, как теория устойчивости движения и теория нелинейных колебаний.

Мировую известность приобрели работы С.Н. Шиманова по теории устойчивости систем с запаздыванием. Наряду с Н.Н. Красовским, А.Д. Мышкисом, Дж. Хейлом и другими учеными он интенсивно создавал основы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Опираясь на функциональный подход к системам дифференциальных уравнений с последействием, он развивал методы Ляпунова в теории устойчивости и в теории нелинейных колебаний для этих систем.

В первом методе Ляпунова наиболее значительным научным достижением С.Н. Шиманова является разработка теории канонического разложения движений для автономных и периодических линейных систем с последействием. Используя технику канонического разложения, он развил теорию Флоке для периодических систем с последействием. Им предложен метод нахождения характеристических показателей для квазигармонических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Теория канонического разложения движений позволила ему разработать методы оптимальной стабилизации движений для линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.

В рамках второго метода Ляпунова С.Н. Шимановым построена теория основных критических случаев устойчивости систем с последействием на основе метода функционалов Ляпунова — Красовского и теории канонического разложения движений. Фундаментальное значение для теории функционально-дифференциальных уравнений имеют доказанные им теоремы о неустойчивости движений.

С.Н. Шиманову принадлежит заслуга распространения теории периодических движений Ляпунова — Пуанкаре на системы дифференциальных уравнений с последействием.

Широкую известность и признание получил разработанный им оригинальный метод вспомогательных систем, оказавшийся эффективным средством построения периодических движений в нелинейных системах. Сергей Никанорович разработал модификации этого метода: в теории периодических и почти периодических движений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, периодических и почти периодических движений систем дифференциальных уравнений с последействием, периодических движений систем, близких к системам Ляпунова, периодических движений стохастических систем дифференциальных уравнений. Метод имеет большое прикладное значение.

Методы Ляпунова получили развитие в работах С.Н. Шиманова и для систем разностных уравнений. Им предложен метод нахождения характеристических показателей для квазигармонических систем разностных уравнений, разработаны основы теории критических случаев устойчивости.

С.Н. Шиманов — автор более ста научных работ. Цикл его работ по теории устойчивости систем с последействием был удостоен премии Уральского университета за 1965 г. Его работы и сегодня служат источником для исследований его коллег и учеников. Среди его учеников 21 кандидат и 2 доктора физико-математических наук. Он был признанным лидером среди свердловских механиков.

С.Н. Шиманов был замечательным преподавателем, прочитавшим за годы работы на кафедре теоретической механики УрГУ большое число общих и специальных курсов для студентов-механиков, при этом ряд основных спецкурсов разрабатывался и основывался в том числе на полученных им научных результатах. Сергея Никаноровича отличало доброжелательное отношение к студентам, и они в свою очередь всегда относились к нему с исключительным уважением.

За время работы Сергея Никаноровича заведующим кафедрой (1963–1987 гг.) она выпустила около 800 специалистов в области актуальных разделов современной механики и ее приложений, зарекомендовавших себя в промышленности, исследовательских и учебных заведениях. С.Н. Шиманов был руководителем работ по важнейшей тематике, выполнявшихся по заказам промышленных предприятий.

С.Н. Шиманов стал сотрудником нашего Института в 1965 г. в период становления. Его высокая квалификация в актуальных разделах современной механики и большой научный авторитет оказывались весьма востребованными, когда речь шла о научной экспертизе новых задач и проектов в фундаментальных и прикладных исследованиях по математике и механике, а также об экспертной оценке результатов работы научных коллективов и отдельных авторов.

С.Н. Шиманов был членом Научного совета АН СССР по проблеме “Общая механика”, членом Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике, членом Научно-методического совета по теоретической механике при Минвузе СССР, членом координационного совета по математике и механике при УрО АН СССР, председателем специализированного совета по защите кандидатских диссертаций при УрГУ, членом специализированного совета по защите докторских диссертаций по теоретической механике и дифференциальным уравнениям при ИММ УрО АН СССР.

Сергей Никанорович совсем немного не дожил до своего семидесятилетия, уйдя из жизни 23 мая 1992 г.

В.И. Бердышев, Ю.Ф. Долгий, А.Ф. Клейменов, А.Б. Куржанский,
В.И. Максимов, Ю.С. Осипов, В.П. Прокопьев, В.Е. Третьяков, А.Е. Шнейдер

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ С. Н. ШИМАНОВА

1. Колебания систем, близких к системам Ляпунова: дис. ... канд. физ.-мат. наук / УрГУ. Свердловск, 1949. 140 с.
2. К теории квазигармонических колебаний // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 2. С. 126–146.
3. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка // Прикл. математика и механика. 1953. Т. 17, вып. 3. С. 369–372.
4. Об устойчивости решения одной нелинейной системы уравнений// Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, вып. 6. С. 155–157.
5. К теории колебаний квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1954. Т. 18, вып. 2. С. 155–162.
6. Об одном способе получения условий существования периодических решений нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 2. С. 225–228.
7. К вопросу об отыскании характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1956. Т. 109, № 6. С. 1102–1105.
8. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, вып. 2. С. 244–252.
9. О квазилинейных колебаниях // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 119–120.
10. Об отыскании характеристических показателей системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. математика и механика. 1958. Т. 22, вып. 3. С. 382–385.
11. О почти периодических решениях неоднородных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1958. № 4. С. 270–274.
12. О почти периодических колебаниях в нелинейных системах с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125, № 6. С. 1203–1206.
13. К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 5. С. 836–844.
14. Обобщение одного предложения Ляпунова о существовании периодических решений // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 2. С. 409–411.
15. К теории колебаний квазилинейных систем с постоянным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21, № 6. С. 706–709.
16. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 3. С. 447–457.
17. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 55–63.
18. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 447–457.
19. Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3, № 3. С. 456–466.
20. О почти периодических колебаниях квазилинейных систем с запаздыванием времени в случае вырождения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 1. С. 36–39.
21. Устойчивость в критическом случае одного нулевого корня для систем дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Тр. I Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. М.: АН СССР, 1960 (совм. с Н.Г. Булгаковым, Н.Н. Красовским).
22. Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, вып. 6. С. 992–1002.
23. Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 3. С. 467–480.
24. Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием (особый случай) // Изв. вузов. Математика. 1961. № 1. С. 152–162.
25. Устойчивость и колебания систем с запаздыванием // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1961. 55 с. (совм. с А.Д. Мышкисом, Л.Э. Эльсгольцом).
26. О докладе А.П.Проскурякова // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Т. 1 / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1961.

27. Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием (особый случай) // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 457–470.
28. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450–458.
29. Некоторые задачи теории устойчивости и колебаний систем с запаздыванием: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / Ин-т механики АН СССР. М., 1963.
30. Устойчивость и колебания систем с запаздыванием // Тр. Междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Т. 2 / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1963. С. 241–267 (совм. с А.Д. Мышкисом, Л.Э. Эльсгольцом).
31. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
32. Устойчивость систем с запаздыванием // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Вып. 1. М., 1965. С. 170–180.
33. Об устойчивости в критическом случае двойного нулевого корня для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 4. С. 453–462 (совм. с В.П. Прокопьевым).
34. О сходимости оптимального управления счетной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 314–323 (совм. с Е.М. Маркушиным).
35. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026 (совм. с Е.М. Маркушиным).
36. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Междунар. мат. конгресс. М., 1966. С. 53.
37. К общей теории периодических и почти периодических решений нелинейных систем с запаздыванием, зависящим от малого параметра // Науч. конф. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1966.
38. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для систем с запаздыванием // Науч.конф. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1966 (совм. с Е.М. Маркушиным).
39. О периодических колебаниях квазилинейных автономных систем с запаздыванием // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10, № 3. С. 345–352 (совм. с К.М. Цой).
40. К существованию случайных периодических режимов квазилинейных стохастических систем дифференциальных уравнений. I // Изв. вузов. Математика. 1967. № 5. С. 13–21 (совм. с В.И. Гришаковым).
41. К существованию случайных периодических режимов квазилинейных стохастических систем дифференциальных уравнений. II // Изв. вузов. Математика. 1967. № 12. С. 20–26 (совм. с В.И. Гришаковым).
42. О периодических решениях квазигармонических систем с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1967. № 6. С. 59–67 (совм. с Ю.И. Коноваловым).
43. Устойчивость периодических движений автономных систем с запаздыванием // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 561–568 (совм. с К.М. Цой).
44. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регуляторов для систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1968. Т. 29, № 3. С. 13–20 (совм. с Е.М. Маркушиным).
45. К вопросу существования случайных периодических режимов линейных стохастических разностных и дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 675–680 (совм. с В.И. Гришаковым).
46. К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, близкими к постоянным, и запаздыванием по времени // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 9. С. 1598–1607 (совм. с Э.Б. Лебедевой).
47. К вопросу о существовании и построении периодических решений систем с запаздыванием, близких к системам Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 7. С. 1199–1211 (совм. с А.Ф. Клейменовым).
48. Об устойчивости квазигармонических систем с запаздыванием, медленно меняющимся во времени // Изв. вузов. Математика. 1968. № 12. С. 53–61 (совм. с Э.Б. Лебедевой).
49. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // Пятая летняя мат. шк. / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1968. С. 473–549.
50. О построении асимптотических решений в случае одночастотных колебаний в квазилинейной автономной системе с запаздыванием по времени // Украин. мат. журн. 1968. Т. 20, № 6. С. 814–825.

51. К теории колебаний нелинейных систем // Третий Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. М.: Изд-во АН СССР, 1968. С. 323.
52. Обзор работ по теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием // Материалы Второй Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложениям дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1968. С. 158.
53. Метод интегральных многообразий в теории критических случаев систем с запаздыванием // Материалы Второй Всесоюз. межвуз. конф. по теории и приложениям дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. Черновцы, 1968. С. 158–159.
54. Периодические решения систем с последействием, близких к системам Ляпунова // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 3. С. 403–412 (совм. с А.Ф. Клейменовым).
55. К теории периодических колебаний квазилинейных неавтономных периодических систем с периодическими запаздываниями // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Киев, 1970. С. 617–622.
56. Уравнения с запаздывающим аргументом // История отечественной математики. 1970. Т. 4, кн. 1. С. 438–448.
57. Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 9. С. 1562–1566 (совм. с Г.С. Юдаевым).
58. О некоторых признаках устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнений с запаздываниями времени // Мат. записки / УрГУ. Свердловск, 1970. Т. 7, тетр. 4. С. 120–125 (совм. с Г.С. Юдаевым).
59. Основная теорема о критических случаях разностных систем // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 5. С. 910–918 (совм. с Н.И. Казеевой).
60. Об одном методе интегрирования квазилинейных систем дифференциальных уравнений // Тр. Всесоюз. конф. по качественной теории дифференц. уравнений. Свердловск, 1971. С. 124–125.
61. О построении характеристического уравнения для дифференциальных уравнений с запаздыванием времени // Тр. Всесоюз. конф. по качеств. теории дифференц. уравнений. Свердловск, 1971. С. 35 (совм. с Г.Л. Гасиловым).
62. Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 3. С. 533–536 (совм. с Н.И. Крупновой).
63. О неустойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 11. С. 1963–1968 (совм. с Н.И. Крупновой).
64. Устойчивость решения систем разностных уравнений порядка n+2 для критического случая пары комплексных корней, по модулю равных единице // Изв. вузов. Математика. 1973. № 5. С. 20–27 (совм. с Н.И. Казеевой).
65. Устойчивость одной системы дифференциальных уравнений с периодическим запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 3. С. 560–562 (совм. с Ю.Ф. Долгим).
66. Теорема о критических случаях систем разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 2. С. 234–240 (совм. с Н.И. Казеевой).
67. Об одном методе интегрирования нелинейных механических систем // IV Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: сб. тр. Киев, 1976.
68. Исследование устойчивости систем разностных уравнений в критическом случае двойного единичного корня // Изв. вузов. Математика. 1977, № 12. С. 23–28 (совм. с Н.И. Казеевой).
69. Устойчивость систем разностных уравнений в критическом случае двух пар корней, равных по модулю единице // Мат. записки / УрГУ. Свердловск, 1977. Т. 10, тетр. 2. С. 170–176 (совм. с Н.И. Казеевой).
70. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием / УрГУ. Свердловск, 1977. 17 с. Деп. в ВИНИТИ 27.05.77. № 2078–77 (совм. с Ю.Ф. Долгим).
71. Об устойчивости систем с запаздыванием по времени, содержащих малый параметр при производных // Всесоюз. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно-возмущенных уравнений: сб. тр. Ч. 1. Алма-Ата, 1979. С. 110–111.
72. Две теоремы о неустойчивости для разностных систем // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1979. С. 42–50 (совм. с Б.Н. Каревым).
73. Вынужденные колебания в системе с одной степенью свободы // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1979. С. 86–127 (совм. с В.И. Петровой).
74. О построении линейных функционалов для систем с последействием // Исследования по прикладной математике / УрГУ. Свердловск, 1979. С. 148–153 (совм. с Е.К. Хохловой).

75. Об одной задаче теории нелинейных колебаний // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1980. С. 95–100.
76. Периодические и почти периодические колебания систем с периодическими запаздываниями // IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям: сб. тр. Киев, 1981. С. 368–369.
77. Устойчивость периодической системы дифференциальных уравнений нейтрального типа // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1982. С. 32–39 (совм. с Ю.Ф. Долгим).
78. К теории квазигармонических колебаний // IV Четаевская Всесоюз. конф. по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением: сб. тр. Звенигород, 1982. С. 62.
79. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием: учеб. пособие. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1983. 63 с.
80. Периодические и почти периодические колебания систем с периодическими запаздываниями // Тр. IX Междунар. конф. по нелинейным колебаниям: сб. тр. Т. 1. Киев, 1984. С. 411–414.
81. Задача Летова для уравнения с запаздыванием времени и периодическими коэффициентами // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1984. С. 89–106 (совм. с М.Н. Шабалиным).
82. Об отыскании характеристических показателей линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами, близкими к постоянным в аналитическом случае // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1984. С. 3–10 (совм. с М.Г. Близоруковым).
83. К вопросу об устойчивости тривиального решения линейных разностных систем с периодическими коэффициентами / УрГУ. Свердловск, 1984. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 25.02.84, № 1078-84 (совм. с М.Г. Близоруковым).
84. Критерий асимптотической устойчивости линейных разностных систем // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 10. С. 1827–1829 (совм. с А.Ф. Трусовым).
85. О разложении дискретной периодической функции в тригонометрическую сумму / УрГУ. Свердловск, 1984. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 22.01.85, № 1441-85 (совм. с М.Г. Близоруковым).
86. К вопросу об устойчивости квазигармонического разностного уравнения в банаховом пространстве / УрГУ. Свердловск, 1984. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 22.01.85, № 1440-85 (совм. с М.Г. Близоруковым).
87. Приведение периодических движений к установившимся движениям // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 1. С. 182–186 (совм.с А.И. Мельниковым).
88. Об устойчивости периодических систем разностных уравнений в критических случаях // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1986. С. 49–54 (совм. с А.И. Мельниковым).
89. К теории квазилинейных колебаний // VI Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: сб. тр. Ташкент, 1986. С. 651–652.
90. К вопросу об устойчивости тривиального решения линейных разностных систем с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 977–986 (совм. с М.Г. Близоруковым).
91. Колебания и устойчивость квазилинейных систем с периодическим запаздыванием // VI Всесоюз. конф. “Качественная теория дифференциальных уравнений”: сб. тр. Иркутск, 1986. С. 207–208.
92. Влияние малого запаздывания на устойчивость канонических систем линейных дифференциальных уравнений // Краевые задачи / ПГТУ. Пермь, 1987. С. 31–38 (совм. с Ю.Ф. Долгим).
93. Об устойчивости квазилинейных систем // V Всесоюз. Четаевская конф. “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением”: сб. тр. Казань, 1987. С. 107.
94. К теории квазилинейных колебаний // Нелинейные задачи в обобщенных функциях. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 85–91.
95. О существовании зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1988. С. 11–18 (совм. с Ю.Ф. Долгим).
96. Колебания квазилинейных систем с периодическим запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1988. С. 84–90.
97. О модернизированном методе вспомогательных систем в теории квазилинейных разностных уравнений / УрГУ. Свердловск, 1989. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 31.05.89, № 3608-В89 (совм. с М.Г. Близоруковым).
98. Об устойчивости дифференциально-разностных систем // VII Всесоюз. конф. “Качественная теория дифференциальных уравнений”: сб. тр. Рига, 1989. С. 236.
99. Об одном методе интегрирования квазилинейных систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Задачи оптимизации и устойчивости в управляемых системах. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. С. 107–112.

100. К теории колебаний квазилинейных систем разностных уравнений // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1991. С. 4–10 (совм. с М.Г. Близоруковым).

101. Случайные периодические режимы стохастических квазилинейных систем Ито // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1991. С. 15–23 (совм. с В.И. Гришаковым).

102. Об устойчивости дифференциально-разностных систем // Устойчивость и нелинейные колебания / УрГУ. Свердловск, 1991. С. 95–98.

103. Устойчивость квазигармонических систем дискретных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1992. № 2. С. 30–36 (совм. с М.Г. Близоруковым).

104. Improved method of auxiliary systems for difference equations // Proc. of International Conf. on Differential Equations (Barcelona, 1991). Singapore: World Scientific, 1992. P. 325–329 (совм. с М.Г. Близоруковым).

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 519.856.2

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ[1]

Б. И. Ананьев

Рассматриваются задачи оптимизации для дифференциального включения с выпуклозначной правой частью. Начальное состояние включения точно не задано и либо является случайным вектором, либо, в более общем случае, содержится в некотором случайном замкнутом множестве. Требуется найти траекторию включения, минимизирующую функционал в виде математического ожидания функции от конечного состояния включения, или, в более общем случае, подобную траекторию, доставляющую минимум интегралу Шоке. Указаны предположения, при которых интеграл Шоке сводится к обычному интегралу по вероятностной мере. Полученные результаты используются для получения достаточных условий оптимальности в упомянутых задачах оптимизации, — условий, которые в некоторых случаях являются и необходимыми. Прототипом таких задач является проблема управления ансамблем траекторий. С другой стороны, необходимость изучения задач управления со случайными данными в виде множеств возникает при решении задач коррекции движения, где на этапе наблюдения естественно возникает случайное множество. Приведены примеры.

Ключевые слова: оптимизация, включение, случайное множество, интеграл Шоке, управляемая система.

B. I. Anan'ev. Optimization problems for a differential inclusion with random initial data.

Optimization problems for a differential inclusion with convex-valued right-hand side are considered. The initial state of the inclusion is not given exactly; it is either a random vector or, more generally, an element of some random closed set. It is necessary to find a trajectory of the inclusion that minimizes the expected value of a function of the inclusion's terminal state or, more generally, a similar trajectory that minimizes the Choquet integral. Assumptions are given under which the Choquet integral is reduced to the usual integral with respect to a probability measure. The obtained results are used to derive sufficient optimality conditions in the mentioned optimization problems; these conditions are also necessary in certain cases. A prototype of such problems is the problem of controling an ensemble of trajectories. On the other hand, the necessity of studying control problems with random data in the form of sets arises in the solution of motion correction problems, where a random set appears naturally at the observation stage. Examples are given.

Keywords: optimization, inclusion, random set, Choquet integral, control system.

Введение

Ансамблем траекторий управляемой системы $\dot{x} = f(x,u)$, $t \in [a,b] = \mathfrak{T}$, называется совокупность $\mathcal{S}(f,Q,u(\cdot))$ всех траекторий системы на отрезке $\mathfrak{T}$ при данном управлении $u(\cdot)$, начинающихся в множестве $Q \subset \mathbb{R}^n$. При этом обычно предполагается, что функция $f(\cdot,\cdot)$ непрерывна, множество $\mathcal{S}(f,\{q\},u(\cdot)) = \{x(\cdot,q,u(\cdot))\}$ непусто и состоит из единственной траектории для всех $q \in Q$ и всех допустимых $u(\cdot)$. Различные задачи управления ансамблем траекторий рассматривались в [1–5]. В частности, изучались следующие задачи:

$$\sup_{q\in Q} \ell(x(b,q,u(\cdot))) \to \min_{u(\cdot)\in\mathbf{D}}, \tag{0.1}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell(x(b,q,u(\cdot)))m(dq) \to \min_{u(\cdot)\in\mathbf{D}}, \tag{0.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00672, 13-01-00120) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019).

где $\ell(\cdot)$ — непрерывная функция, $\mathbf{D} = \{u(\cdot)\colon u(t) \in U,\, t \in \mathfrak{T},\, u(\cdot)$ измерима$\}$, U — компактное множество, $m(\cdot)$ —конечная борелевская мера, сосредоточенная на Q. Для этих задач получены необходимые и достаточные условия оптимальности управления.

С другой стороны, перейдем к дифференциальному включению

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) = f(x(t), U), \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{0.3}$$

и предположим, что компактное множество $f(x(t), U)$ выпукло. Обозначим через $\mathbf{S}(F, Q)$ совокупность всевозможных n-векторных функций $x(\cdot,\cdot)$ от переменных (t, q) со следующими свойствами: $x(\cdot, q)$ — решение включения (0.3) с начальным условием $x(a, q) = q$ при каждом $q \in Q$ и $x(t,\cdot)$ — непрерывная функция на Q при каждом $t \in \mathfrak{T}$. Ясно, что справедливо равенство

$$\bigcup_{u(\cdot)\in\mathbf{D}} \mathcal{S}(f, Q, u(\cdot)) = \mathbf{S}(F, Q), \tag{0.4}$$

т. е. введенное множество совпадает с объединением ансамблей по всем допустимым траекториям. Действительно, включение $\subset$ очевидно. Обратное включение следует из леммы Филиппова. Однако ниоткуда не следует, что если $x(\cdot,\cdot) \in \mathbf{S}(F, Q)$, то найдется допустимое управление $u(\cdot)$ со свойством $x(t, q) = x(t, q, u(\cdot))$ для всех $(t, q) \in \mathfrak{T} \times Q$. Отметим тем не менее что это свойство верно для линейных систем вида $\dot{x} = Ax + Bu$, а также в случае одноточечных множеств Q. Поэтому если рассмотреть аналоги задач (0.1), (0.2)

$$\sup_{q\in Q} \ell(x(b, q)) \to \min_{x(\cdot,\cdot)\in\mathbf{S}(F,Q)}, \tag{0.5}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell(x(b, q))m(dq) \to \min_{x(\cdot,\cdot)\in\mathbf{S}(F,Q)}, \tag{0.6}$$

то минимальные значения функционалов могут, вообще говоря, оказаться меньше, чем в задачах, указанных выше. В настоящей работе подробное соотношение между задачами (0.1), (0.2) и (0.5), (0.6) не рассматривается. Это отдельная проблема. Вместо этого исследуются задачи типа (0.5), (0.6) для общих дифференциальных включений с выпуклой правой частью и со случайными начальными данными, а именно мера m в (0.6) считается вероятностной, а множество Q в (0.5) — случайным. В последнем случае в правой части (0.5) добавляется математическое ожидание. Точные определения даны ниже. Для указанных задач получены достаточные условия оптимальности; в некоторых случаях они оказываются и необходимыми. Задачи управления со случайными начальными данными естественно возникают при решении задач коррекции движения [6–9], где на этапе оценивания формируются случайные информационные множества.

Отметим, наконец, что задачам оптимизации для дифференциальных включений посвящена обширная литература, с которой можно ознакомиться по публикациям [10–12].

1. Постановка основных задач

Пусть задано дифференциальное включение

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad t \in [a, b] = \mathfrak{T}, \tag{1.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Для того чтобы решение существовало, мультифункция $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ должна удовлетворять ряду условий. Примем следующее основное

Предположение 1.1. 1. *Для каждых $(t, x) \in \mathfrak{T} \times \mathbb{R}^n$ множество $F(t, x)$ непусто, компактно и выпукло.*

2. *Мультифункция F полунепрерывна сверху (п.н. св.) на $\mathfrak{T} \times \mathbb{R}^n$.*

3. *Существуют положительные константы γ и c такие, что для всех (t, x) из $\mathfrak{T} \times \mathbb{R}^n$ имеем $v \in F(t, x) \Rightarrow |v| \leqslant \gamma |x| + c$.*

Здесь и далее $|\cdot|$ — евклидова норма. Напомним, что мультифункция $F\colon X \rightrightarrows Y$ из одного метрического пространства X в другое Y называется *полунепрерывной сверху в* x, если $\limsup_{y \to x} F(y) \subset F(x)$. Верхний предел определяется как

$$\limsup_{y \to x} F(y) = \big\{ y \in Y \colon \exists \text{ последовательности } x_k \to x,\, y_k \in F(x_k),\, y_k \to y \big\}.$$

При условиях предположения 1.1 для любого начального условия $q \in \mathbb{R}^n$ существует решение (абсолютно непрерывная функция) включения (1.1), определенное на всем отрезке $\mathfrak{T}$. Решение существует и при более слабых предположениях (см. [13]), однако сделанные предположения обеспечивают удобную сходимость эйлеровых дискретных аппроксимаций.

Введем ряд обозначений. Множество всех решений включения (1.1) обозначим через $\mathcal{S}(F)$, а множество всех решений, исходящих из точки q в момент $t = a$, — через $\mathcal{S}(F, q)$. Справедлива следующая теорема о свойствах решений и их зависимости от начальных условий.

Теорема 1.1 [13, теорема 3.2.12]. *При выполнении предположения* 1.1 *мультифункция $\mathcal{S}(F, \cdot) \colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows C(\mathfrak{T}, \mathbb{R}^n)$ имеет непустые компактные значения и полунепрерывна сверху на $\mathbb{R}^n$.*

Здесь $C(\mathfrak{T}, \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных на $\mathfrak{T}$ функций с sup-нормой. Отметим, что всякая п.н. св. на X мультифункция $F\colon X \rightrightarrows Y$ с компактными значениями измерима в том смысле, что ее полный прообраз $F^{-}(O) = \{x \in X \colon F(x) \cap O \neq \varnothing\}$ является борелевским множеством в X для любого открытого множества $O \subset Y$. Следовательно, по теореме 5.1 из [14] для мультифункции $\mathcal{S}(F, \cdot)$ имеется борелевский селектор, т. е. борелевская функция $f\colon \mathbb{R}^n \to C(\mathfrak{T}, \mathbb{R}^n)$ такая, что $f(q) \in \mathcal{S}(F, q)$ для всех $q \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что для этого селектора функция $f(t, \cdot) = f(\cdot)(t)$ также будет борелевской для любого $t \in \mathfrak{T}$.

Для дальнейшего рассмотрения введем более общее, чем (0.4), семейство селекторов:

$$\mathbf{S}(F) = \big\{ x(\cdot) \colon x(q) \in \mathcal{S}(F, q)\, \forall q \in \mathbb{R}^n,\, x(\cdot) - \text{борелевская функция из } \mathbb{R}^n \text{ в } C(\mathfrak{T}, \mathbb{R}^n) \big\}. \tag{1.2}$$

Как установлено выше, множество (1.2) непусто. Элементы множества $\mathbf{S}(F)$ будем называть *траекториями* включения (1.1). Далее вместо $x(q)(t)$ для траектории будем часто писать $x(t, q)$.

Обозначим символом $PM(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}^n$ и пусть $m \in PM(\mathbb{R}^n)$. Сформулируем задачу типа (0.6)

$$E_m \ell(x(b, \cdot)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell(x(b, q)) m(dq) \to \min_{x(\cdot) \in \mathbf{S}(F)} \tag{1.3}$$

для борелевской функции $\ell \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ограниченной снизу. Здесь начальное состояние q интерпретируется как случайная величина с заданным распределением m, символ E — математическое ожидание. Поскольку композиция борелевских функций является борелевской, интеграл в (1.3) корректно определен, но может равняться $+\infty$.

Во многих случаях точное вероятностное распределение m вектора q неизвестно. В таких ситуациях рассмотрим следующее обобщение задачи (1.3). Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ задана мультифункция $Q\colon \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ с замкнутыми значениями, полные прообразы $Q^{-}(B) = \{\omega \colon Q(\omega) \cap B \neq \varnothing\}$ которой принадлежат σ-алгебре $\mathcal{A}$ для всяких борелевских множеств B. Такая мультифункция $Q(\omega)$ называется *замкнутым случайным множеством* [15]. Сформулируем задачу

$$E \sup\{\ell(x(b, q)) \colon q \in Q\} = \int\limits_{\Omega} \sup\{\ell(x(b, q)) \colon q \in Q(\omega)\} P(d\omega) \to \min_{x(\cdot) \in \mathbf{S}(F)}. \tag{1.4}$$

Задача (1.4) сводится к (1.3), если $Q(\omega) = \{q(\omega)\}$ — одноточечное множество. К тому же, если $Q(\omega)$ не зависит от случая, приходим к задаче типа (0.5). Выражение в левой части (1.4) имеет вид интеграла Шоке по случайному множеству $Q(\omega)$. В следующем разделе рассмотрим интеграл Шоке более подробно и укажем условия, при которых он сводится к обычному интегралу по вероятностной мере.

2. Сведение интеграла Шоке к интегралу по вероятностной мере

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — борелевская функция, ограниченная снизу. Тогда для всякой вероятностной меры $m \in PM(\mathbb{R}^n)$ интеграл $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)m(dx)$ либо конечен, либо равен $+\infty$. С помощью случайного замкнутого множества $Q(\omega)$, измеримого в смысле предыдущего раздела, можно определить следующую конструкцию, называемую *интегралом Шоке*. Определим вначале функцию

$$f_Q(\omega) = \sup\{f(x)\colon x \in Q(\omega)\}.$$

Эта функция $f_Q\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$ и ограничена снизу. Действительно, для всякого $t \in R$ имеем

$$\{\omega\colon f_Q(\omega) > t\} = \{\omega\colon \sup\{f(x)\colon x \in Q(\omega)\} > t\} = \{\omega\colon Q(\omega) \cap f^{-1}(t, +\infty] \neq \varnothing\} \in \mathcal{A}.$$

Следовательно, величина

$$\int f dQ = Ef_Q,$$

называемая интегралом Шоке по случайному множеству $Q(\omega)$, корректно определена для всех борелевских функций, ограниченных снизу, но может равняться $+\infty$. Отметим, что исходное оригинальное определение интеграла Шоке состоит в следующем [16]. Пусть $f^d(x) = f(x) - d$, где $d = \inf\{f(x)\colon x \in \mathbb{R}^n\}$. Тогда $f_Q^d(\omega) = f_Q(\omega) - d$. Таким образом, ввиду равенства $E\xi = \displaystyle\int_0^{+\infty} P\{\xi > t\}dt$ для неотрицательной случайной величины $\xi(\omega)$ (см. [17]) имеем

$$\begin{aligned} Ef_Q^d = \int\limits_\Omega f_Q^d(\omega)P(d\omega) = \int\limits_0^{+\infty} P\{f_Q^d > t\}dt = \int\limits_0^{+\infty} P\{f_Q^{-1}(t+d, +\infty]\}dt \\ = \int\limits_0^{+\infty} P\{\omega\colon Q(\omega) \cap f^{-1}(t+d, +\infty] \neq \varnothing\}dt = \int\limits_0^{+\infty} T_Q(\{x\colon f(x) > t+d\})dt \\ = \int\limits_d^{+\infty} T_Q(\{x\colon f(x) > t\})dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int f dQ = Ef_Q = \int\limits_d^{+\infty} T_Q(f^{-1}(t, +\infty])dt + d. \tag{2.1}$$

Здесь и выше $T_Q(B) = P\{\omega\colon Q(\omega) \cap B \neq \varnothing\}$ — *сопровождающая емкость Шоке* для случайного замкнутого множества $Q(\omega)$. Функционал T_Q, определенный на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, неаддитивен, но монотонен: $T_Q(B_1) \leqslant T_Q(B_2)$, если $B_1 \subset B_2$. Отсюда, $T_Q(f^{-1}(t, +\infty])$ — монотонно невозрастающая функция по t, и интеграл в (2.1) корректно определен в смысле Римана.

Нас будет интересовать возможность представления интеграла Шоке в виде обычного интеграла $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)m(dx)$ для некоторой вероятностной меры $m \in PM(\mathbb{R}^n)$. Сделаем следующие предположения.

Предположение 2.1. *Множество*

$$Q_0(\omega) = \operatorname{Argmax}\{f(x)\colon x \in Q(\omega)\} = \{x \in Q(\omega)\colon f(x) = f_Q(\omega)\} \neq \varnothing$$

является борелевским и не равно пустому почти наверное. Кроме того, мультифункция $Q_0\colon \Omega \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *измерима в том смысле, что полный прообраз* $Q_0^-(B) \in \mathcal{A}$ *для всякого множества* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Предположение 2.2. *Существует борелевское стохастическое ядро* $m(dx|\omega)$*, т. е. измеримая случайная вероятностная мера* $m\colon \Omega \to PM(\mathbb{R}^n)$*, для которой* $m^{-1}(\mathcal{B}(PM(\mathbb{R}^n))) \subset \mathcal{A}$ *такое, что*

$$\int\limits_{\Omega} m(Q_0(\omega)|\omega)P(d\omega) = 1.$$

Здесь $\mathcal{B}(PM(\mathbb{R}^n))$ *— борелевская* σ*-алгебра на полном сепарабельном и метризуемом пространстве* $PM(\mathbb{R}^n)$ *со* $*$*-слабой топологией* [18].

Отметим, что из предположения 2.2 следует равенство $m(Q_0(\omega)|\omega) = 1$ почти наверное. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *При предположениях* 2.1 *и* 2.2 *для функции* f *и случайного замкнутого множества* Q *имеет место равенство*

$$\int f dQ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)m(dx),$$

где вероятностная мера m *определяется как* $m(B) = \int_{\Omega} m(B|\omega)P(d\omega)$ *для всех* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку

$$f_Q(\omega) = \sup\{f(x)\colon x \in Q(\omega)\} = f(x) \quad \forall x \in Q_0(\omega),$$

по теореме Фубини получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)m(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \int\limits_{\Omega} m(dx|\omega)P(d\omega) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)m(dx|\omega)P(d\omega)$$

$$= \int\limits_{\Omega}\int\limits_{Q_0(\omega)} f(x)m(dx|\omega)P(d\omega) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{Q_0(\omega)} f_Q(\omega)m(dx|\omega)P(d\omega) = \int\limits_{\Omega} f_Q(\omega)P(d\omega) = \int f dQ$$

в силу того, что $\int_{Q_0(\omega)} m(dx|\omega) = m(Q_0(\omega)|\omega) = 1$ почти наверное. $\square$

Рассмотрим простые примеры выполнения предположений 2.1 и 2.2.

П р и м е р 2.1. Пусть $Q(\omega)$ имеет выпуклые и замкнутые значения, причем $Q(\omega) \subset K$, где K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$. Функция f строго вогнута на K. Тогда $Q_0(\omega) = \{\xi(\omega)\}$, причем функция ξ измерима по лемме Филиппова. Для стохастического ядра $m(\cdot|\omega) = \delta_{\xi(\omega)}(\cdot)$, где $\delta_\xi(\cdot)$ — мера Дирака, предположения выполнены.

П р и м е р 2.2. Пусть $Q(\omega) \subset \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — конечное множество в $\mathbb{R}^n$. Вероятностное пространство отождествим с конечным множеством $\Omega = \{X\colon X \subset \mathcal{X}\}$, состоящим из $2^{|\mathcal{X}|}$ элементов, где $|\mathcal{X}|$ — число элементов в $\mathcal{X}$. Вероятностное распределение случайного множества задается набором чисел $p_X \geqslant 0$ таких, что $\sum_{X\subset\mathcal{X}} p_X = 1$, $p_\varnothing = 0$. Меру $m(\cdot|X)$ на $Q_0(X)$ определим произвольно числами $q^x_{Q_0(X)} \geqslant 0$, для которых $\sum_{x\in Q_0(X)} q^x_{Q_0(X)} = 1$. Если $x \notin Q_0(X)$, то $q^x_{Q_0(X)} = 0$. Равенство теоремы 2.1 для любой функции $f(x)$ означает, что

$$\sum_{X\subset\mathcal{X}} (\max_{x\in X} f(x)) p_X = \sum_{x\in\mathcal{X}} f(x) q_x, \quad \textit{где} \quad q_x = \sum_{X\subset\mathcal{X}} q^x_{Q_0(X)} p_X.$$

Из примера 2.2 видно, что стохастическое ядро определяется не единственным способом. Проверить предположение 2.2 достаточно сложно. Поэтому введем еще одно предположение.

Предположение 2.3. *Существует борелевский селектор* $\xi\colon \xi(\omega) \in Q_0(\omega)$ $\forall\omega \in \Omega$.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения* 2.1 *и* 2.3. *Тогда предположение* 2.2 *также выполнено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве борелевского стохастического ядра выбираем $m(\cdot|\omega) = \delta_{\xi(\omega)}(\cdot)$, т. е. композицию меры Дирака и борелевского селектора. Все требования измеримости являются выполненными. $\square$

Вопросы существования измеримых селекторов исследовались, например, в [14]. В частности, из указанных там теорем вытекает, что если к предположению 2.1 добавить требование замкнутости значений мультифункции Q_0, то нужный селектор в предположении 2.3 будет существовать.

В заключение данного раздела приведем еще один тип интегралов, связанных со случайными множествами, а именно интегралов вида

$$E \int\limits_Q f(x)\lambda(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} T_Q(x) f(x)\lambda(dx), \tag{2.2}$$

где f — конечная борелевская функция, λ — σ-конечная борелевская мера и Q — случайное замкнутое множество. Равенство (2.2) следует из теоремы Фубини, если только интеграл по мере λ от функции $T_Q|f|$ конечен. Здесь символ $T_Q(x)$ используется как синоним значения $T_Q(\{x\})$ сопровождающей емкости Шоке на одноточечном множестве. Из (2.2) вытекает известная формула Роббинса (см. [17])

$$E\lambda(Q) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} T_Q(x)\lambda(dx),$$

если λ — мера Лебега, причем выражения в левой и правой части последней формулы одновременно конечны или нет.

3. Достаточные условия оптимальности

Вернемся к обсуждению задач разд. 1. Напомним некоторые понятия выпуклого и негладкого анализа. Пусть X — действительное гильбертово пространство. Скалярное произведение в X обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle$; норма элемента x определяется стандартным образом: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Пусть $d_S(x) = \inf\{\|x - s\|\colon s \in S\}$ — функция расстояния до множества $S \subset X$ и $\pi_S(x) = \{s \in S\colon d_S(x) = \|x - s\|\}$ — метрическая проекция точки x на множество S. Обратное к $\pi_S(x)$

отображение обозначается символом $\pi_S^{-1}(x) = \{y\colon x \in \pi_S(y)\}$. *Проксимальным нормальным конусом* к множеству S в точке $x \in S$ называется множество

$$N_S^P(x) = \operatorname{cone}(\pi_S^{-1}(x) - x),$$

где операция cone означает взятие конической оболочки множества. Если $\pi_S^{-1}(x) = \varnothing$, то полагают $N_S^P(x) = \{0\}$. Другое эквивалентное определение проксимального нормального конуса имеет вид (см. [19, предложение 1.1.5]):

$$N_S^P(x) = \bigl\{y\colon \exists\sigma = \sigma(y,x) \geqslant 0 \ \forall s \in S,\ \langle y, s - x\rangle \leqslant \sigma\|s - x\|^2\bigr\}.$$

Введем также символы $\operatorname{dom} f = \{x\colon f(x) < +\infty\}$ и $\operatorname{epi} f = \{(x,\alpha)\colon f(x) \leqslant \alpha\}$ для функции $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$. *Проксимальным субдифференциалом* (понятие введено Р.Т. Рокафелларом) п.н. сн. функции $f\colon X \to (-\infty, +\infty]$ в точке $x \in \operatorname{dom} f$ называют множество

$$\partial_P f(x) = \{y\colon (y,-1) \in N^P_{\operatorname{epi} f}(x, f(x))\}.$$

Множества $N_S^P(x)$, $\partial_P f(x)$ — выпуклые, но, вообще говоря, незамкнутые. В случае выпуклых множеств и функций введенные понятия совпадают с их аналогами в выпуклом анализе. Проксимальный анализ достаточно подробно изложен в [19].

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что мультифункция F в (1.1) автономна, т. е. $F(t,x) = F(x)$ для $\forall t \in \mathfrak{T}$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$. К этому всегда можно прийти, совершая стандартное “спрятывание” времени за счет расширения фазового вектора. Нам потребуется новое

Предположение 3.1. 1. *Функция* $\ell(\cdot)$ *непрерывна и* $\inf\{E_m\ell(x(b,\cdot))\colon x(\cdot) \in \mathbf{S}(F)\}$ *конечен. Условие ограниченности снизу для функции* $\ell(\cdot)$ *снимается.*

2. *Автономная мультифункция* F *локально липшицева, и относительно нее выполнены п.* 1 *и* 3 *предположения* 1.1.

Введем в рассмотрение верхний и нижний гамильтонианы

$$H(x,p) = \max\{\langle p, y\rangle\colon y \in F(x)\}, \quad h(x,p) = \min\{\langle p, y\rangle\colon y \in F(x)\},$$

а также расширенный нижний гамильтониан

$$\bar{h}(x,\theta,p) = \theta + h(x,p).$$

Достаточные условия оптимальности для задачи (1.3) даются следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение* 3.1, $\bar{x}(\cdot) \in \mathbf{S}(F)$ *— некоторая траектория автономного включения* (1.1) *и существует непрерывная функция* $\varphi(t,x)$ *на* $\mathfrak{T} \times \mathbb{R}^n$ *такая, что*

$$\bar{h}(x, \partial_P\varphi(t,x)) \geqslant 0 \quad \forall\, (t,x) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

$$\varphi(b,\cdot) = \ell(\cdot), \tag{3.2}$$

$$E_m\ell(\bar{x}(b,\cdot)) = E_m\varphi(a,\cdot). \tag{3.3}$$

Тогда $\bar{x}(\cdot)$ *— оптимальная в задаче* (1.3) *траектория.*

Доказательство. Условие (3.1), состоящее в том, что $\bar{h}(x,\theta,p) \geqslant 0$ для всех $(\theta,p) \in \partial_P\varphi(t,x)$ и $(t,x) \in (a,b) \times \mathbb{R}^n$, означает сильное возрастание пары (φ, F) (см. [19, предложение 4.6.5]). Другими словами, выполняется неравенство $\varphi(t_1, x(t_1,q)) \leqslant \varphi(t_2, x(t_2,q))$ для всех $a < t_1 < t_2 < b$ и всех траекторий с любыми начальными условиями. Переходя к пределу, в силу непрерывности и условия (3.2) получаем

$$\varphi(a,q) = \varphi(a, x(a,q)) \leqslant \varphi(b, x(b,q)) = \ell(x(b,q)).$$

Интегрируя последнее неравенство по положительной мере $m(dq)$ и учитывая (3.3), находим $E_m\ell(\bar{x}(b,\cdot)) \leqslant E_m\ell(x(b,\cdot))$. Ввиду произвольности траектории $x(\cdot)$ теорема доказана. □

Приведем иллюстрирующий пример.

П р и м е р 3.1. Пусть $n = 2$, $a = 0$, $b = 1$, $F(x, y) = \{(0, v)\colon |v| \leqslant |x|\}$, $\ell(x, y) = y$. Нижний гамильтониан имеет вид $h(x, y, p, q) = -|qx|$. Соотношение (3.1) вида $\theta - |qx| \geqslant 0$ удовлетворяется функцией $\varphi(t, x, y) = (t-1)|x| + y$, поскольку включение $(\theta, p, q) \in \partial_P \varphi(t, x, y)$ эквивалентно следующему: $\theta = |x|$, $q = 1$, $p = (t-1)\operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$, $p \in [-(t-1), t-1]$ при $x = 0$. Соотношение (3.2) также удовлетворяется. Пусть начальные состояния x_0 и y_0 независимо и равномерно распределены в отрезке $[-1, 1]$. Тогда $E(y_0 - |x_0|) = -1/2$. Решение включения в виде $(x_0, y_0 - |x_0|t)$ обеспечивает равенство (3.3). Поэтому это выражение и есть оптимальное решение, доставляющее минимум, равный $-1/2$, терминальному функционалу. Впрочем, пусть $m(dx, dy)$ — любая вероятностная мера, для которой интеграл $E_m(y - |x|)$ конечен. Тогда указанное решение дифференциального включения также будет оптимальным.

Рассмотрим *полностью выпуклый случай*, при котором предполагаем, что в дополнение к предположению 3.1 множество $\operatorname{gr} F = \{(x, y)\colon F(x) \ni y\}$ выпукло и замкнуто, а функция ℓ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Тогда верхний гамильтониан $H(x, p)$ будет вогнутым по x и выпуклым по p, а нижний гамильтониан $h(x, p)$ — выпуклым по x. Сформулируем теорему.

Теорема 3.2. *Пусть в полностью выпуклом случае $x(\cdot) \in \mathbf{S}(F)$ — некоторая траектория автономного включения* (1.1). *Пусть также для всякого q существует абсолютно непрерывная по t функция $p(t, q)$ (никаких свойств измеримости по q не предполагается) такая, что*

$$(\dot p(t, q), p(t, q)) \in N_{\operatorname{gr} F}(x(t, q), \dot x(t, q)),\ \text{п.в.}\, t \in \mathfrak{T},\ \text{или} \tag{3.4}$$

$$\dot p(t, q) \in \partial_1 h(x(t, q), -p(t, q)),\quad \dot x(t, q) \in \partial_2 H(x(t, q), p(t, q)),\ \text{п.в.}\, t \in \mathfrak{T}, \tag{3.5}$$

$$-p(b, q) \in \partial \ell(x(b, q)), \tag{3.6}$$

для всех $q \in \mathbb{R}^n$. Здесь точка означает дифференцирование по t, символы $\partial_i h(p_1, p_2)$, $\partial_i H(p_1, p_2)$ означают субдифференциалы по переменной $p_i \in \mathbb{R}^n$ при фиксированной другой переменной. Тогда $x(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (1.3). *Условия* (3.4) *и* (3.5) *эквивалентны. Выполняется условие максимума $\langle p(t, q), \dot x(t, q)\rangle = H(x(t, q), p(t, q))$ для п.в. $t \in \mathfrak{T}$ и всех $q \in \mathbb{R}^n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tilde x(\cdot)$ — любая траектория. В силу (3.6) имеем

$$\ell(\tilde x(b, q)) - \ell(x(b, q)) \geqslant -\langle p(b, q), \tilde x(b, q) - x(b, q)\rangle.$$

Покажем, что правая часть неравенства неотрицательна. Действительно, условие (3.4) означает $\langle \dot p(t, q), u - x(t, q)\rangle + \langle p(t, q), v - \dot x(t, q)\rangle \leqslant 0$ для всех $(u, v) \in \operatorname{gr} F$. Полагая здесь $u = \tilde x(t, q)$, $v = \dot{\tilde x}(t, q)$, приходим к неравенству $d\langle p(t), \tilde x(t, q) - x(t, q)\rangle/dt \leqslant 0$ п.в. на $\mathfrak{T}$. Интегрируя последнее неравенство на отрезке $\mathfrak{T}$, получаем требуемое. Итак, $\ell(\tilde x(b, q)) - \ell(x(b, q)) \geqslant 0$ для всех $q \in \mathbb{R}^n$. Повторяя окончание доказательства теоремы 3.1, заключаем, что $x(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (1.3). Покажем, что условия (3.4) и (3.5) эквивалентны. Зависимость от q будем опускать. Из (3.4) вытекает

$$\langle \dot p(t), u - x(t)\rangle \leqslant \langle -p(t), v\rangle + \langle p(t), \dot x(t)\rangle \leqslant \langle -p(t), v\rangle - h(x(t), -p(t)).$$

Беря здесь минимум по $v \in F(u)$, получаем неравенство

$$\langle \dot p(t), u - x(t)\rangle \leqslant h(u, -p(t)) - h(x(t), -p(t)),$$

из которого следует первое включение в (3.5). Аналогично из (3.4) выводим

$$\begin{aligned}\langle \dot x(t), r - p(t)\rangle &\leqslant \langle -p(t), v\rangle + \langle \dot x(t), r\rangle + \langle \dot p(t), x(t) - u\rangle\\ &\leqslant H(x(t), r) - \langle p(t), v\rangle - H(x(t), p(t)) + H(u, p(t)).\end{aligned}$$

Здесь воспользовались уже полученным неравенством для $\dot p(t)$. Минимизируя по $v \in F(u)$, получаем

$$\langle \dot x(t), r - p(t)\rangle \leqslant H(x(t), r) - H(x(t), p(t)),$$

откуда следует второе включение в (3.5). Для вывода (3.4) из (3.5) сложим последнее неравенство с неравенством для $\dot p(t)$ и сделаем необходимые оценки:

$$\begin{aligned}\langle \dot p(t), u - x(t)\rangle + \langle p(t), v - \dot x(t)\rangle &\leqslant \langle v, p(t)\rangle - \langle r, \dot x(t)\rangle + H(x(t), r) - H(u, p(t))\\ &\leqslant -\langle r, \dot x(t)\rangle + H(x(t), r).\end{aligned}$$

Поскольку левая часть не зависит от r, а r произвольно, получаем неположительность этой части. Следовательно, включение (3.4) выполняется. Условие максимума доказано, например, в [11, теорема 3.8]. $\square$

Полностью выпуклый случай накладывает весьма жесткие ограничения на мультифункцию F. Стандартный пример, удовлетворяющий всем условиям, — это $F(x) = Ax + BU$, где U — выпуклый компакт, A и B — матрицы подходящих размерностей. Чтобы включить в рассмотрение более сложные мультифункции с выпуклым графиком и выпуклыми компактными значениями, исследуем *выпуклый случай*, в котором предположим выпуклость и замкнутость множеств $\operatorname{gr} F$ и $\operatorname{dom} F = \{x\colon F(x) \neq \varnothing\}$, а также выпуклость функции ℓ на $\operatorname{dom} F = \operatorname{dom} \ell$. Однако если $\operatorname{dom} F \neq \mathbb{R}^n$, то никакие условия типа подлинейного роста (ограниченности) или локальной (глобальной) липшицевости уже не обеспечивают существование и продолжимость решений включения в $\operatorname{dom} F$. Это видно на примере одномерного включения, где $F(x) = [\exp(-x) - 2, -1]$ при $x \geqslant 0$ и $F(x) = \varnothing$ при $x < 0$. Здесь $\mathcal{S}(F, 0) = \varnothing$ для временного отрезка любой длины. Решения, исходящие из $x_0 = 1$, существуют лишь локально и непродолжимы, например, на $[0, 2]$. Поэтому в обобщении теоремы 3.2 на выпуклый случай мы вынуждены постулировать существование решения дифференциального включения.

Теорема 3.3. *Рассмотрим выпуклый случай автономного включения* (3.1) *и предположим, что множество $\mathcal{S}(F, x) \neq \varnothing$ для любого $x \in \operatorname{dom} F$ и носитель меры $m(\cdot)$ содержится в $\operatorname{dom} F$. Если $x(\cdot) \in \mathbf{S}(F)$ — траектория включения, для которой при всяком $q \in \operatorname{dom} F$ существует абсолютно непрерывная по t функция $p(t, q)$, такая, что выполняются включения* (3.4), (3.6) *или* (3.5), (3.6) *для любого $q \in \operatorname{dom} F$, то $x(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче* (1.3). *Условия* (3.4) *и* (3.5) *эквивалентны. Для $q \in \operatorname{dom} F$ выполняется условие максимума, указанное в теореме* 3.2.

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 3.2 с использованием стандартных соглашений типа $\min_{x\in\varnothing} f(x) = +\infty$.

П р и м е р 3.2. Пусть $n = 2$, $a = 0$, $b = 1$, $F(x, y) = \{(y, v)\colon v \in [\exp(-y), 1]\}$ при $|x| < \infty$, $y \geqslant 0$, и $F(x, y) = \varnothing$ при $y < 0$, $\ell(x, y) = x + y$. Тогда условия теоремы 3.3 выполнены. Нижний гамильтониан имеет вид $h(x, y, p, q) = py + q\exp(-y)$, если $q \geqslant 0$, и $h(x, y, p, q) = py + q$, если $q < 0$. При $y < 0$ имеем $h(x, y, p, q) = +\infty$. Условия трансверсальности дают $p(1) = q(1) = -1$. Из гамильтоновой системы включений (3.5) находим $p(t) \equiv -1$, $\dot y = \exp(-y)$, $\dot q = 1 + q\dot y$ в области, где $q(t) < 0$. Отсюда находим $q(t) = -\bigl(1/(1+\exp(y_0)) + \log((1+\exp(y_0))\dot y)\bigr)/\dot y$, $y(t) = \log(t + \exp(y_0))$, $x(t) = x_0 + (t + \exp(y_0))y(t) - (t + \exp(y_0)y_0)$. Таким образом, из теоремы 3.3 заключаем, что для всякой вероятностной меры $m(dx_0, dy_0)$ с носителем в верхней полуплоскости, для которой величина $E_m(x(1, x_0, y_0) + y(1, y_0))$ конечна, найденная траектория будет оптимальной в задаче (1.3).

Рассмотрение задачи (1.4) проведем с использованием результатов разд. 2. Сводя интеграл Шоке к обычному интегралу, приходим к теореме.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены предположения одной из теорем* 3.1–3.3 *и функция* $f(\cdot) = \ell(x(b,\cdot))$ *удовлетворяет предположениям* 2.1, 2.2 *или* 2.3. *Дополнительно предполагаем, что функция* $\ell(\cdot)$ *ограничена снизу. Тогда соответствующая траектория будет оптимальной в задаче* (1.4), *если* $E_m\ell(x(b,\cdot)) < +\infty$ *хотя бы для одного* $x(\cdot) \in \mathbf{S}(F)$. *Здесь мера* m *такова, что* $m(dx) = \int_\Omega m(dx|\omega)P(d\omega)$.

4. Необходимые условия оптимальности

Как и в разд. 3, считаем мультифункцию F автономной. Введем в рассмотрение функцию

$$V(\tau, q) = \inf\{\ell(x(b))\colon x(\cdot) - \text{траектория},\ x(\tau) = q\}. \tag{4.1}$$

Известно (см. [19, с. 202]), что при предположении 3.1 нижняя грань в (4.1) достигается и функция $V(\cdot,\cdot)$ непрерывна на $(-\infty, b]\times\mathbb{R}^n$. Известно также, что $V(\cdot,\cdot)$ является единственным непрерывным решением проксимального уравнения

$$\bar{h}(x, \partial_P\varphi(t,x)) = 0\ \forall\,(t,x) \in (-\infty, b] \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(b,\cdot) = \ell(\cdot).$$

Эквивалентный результат получен А.И. Субботиным [20]. В свете этого результата условие типа (3.3) является не только достаточным, но также и необходимым условием оптимальности в задаче (1.3).

Теорема 4.1. *Пусть выполнено предположение* 3.1. *Для оптимальности траектории* $x(\cdot)$ *в задаче* (1.3) *необходимо и достаточно, чтобы* $E_m\ell(x(b,\cdot)) = E_mV(a,\cdot)$.

Доказательство. Поскольку функция $V(\cdot,\cdot)$ является решением проксимального уравнения, то условие достаточно, как это следует из теоремы 3.1. Докажем необходимость. Пусть, от противного, $\ell(x(b,q)) > V(a,q)$ на борелевском множестве S, $m(S) > 0$. Определим многозначное отображение $\mathcal{S}_0(q) = \{x(\cdot) \in \mathcal{S}(F,q)\colon \ell(x(b,q)) = V(a,q)\}$. Так как мультифункция $\mathcal{S}(F,\cdot)$ компактнозначна и п.н.св., то мультифункция $\mathcal{S}_0(\cdot)$ с непустыми компактными значениями измерима по Борелю. По теореме об измеримом селекторе [14] найдется борелевская функция $x_0(q) \in \mathcal{S}_0(q)$, $\forall q \in \mathbb{R}^n$. Отсюда $\ell(x(b,q)) > \ell(x_0(b,q))$ на множестве S, $m(S) > 0$. Следовательно, $E_m\ell(x(b,\cdot)) > E_m\ell(x_0(b,\cdot))$. Получаем противоречие с оптимальностью траектории $x(\cdot)$. □

Для справедливости необходимых условий оптимальности в задаче локальной минимизации функционала $E_m\ell(x(b,\cdot))$ сделаем более ограничительные предположения о дифференциальном включении (1.1) и функции ℓ.

Предположение 4.1. 1. *Автономная мультифункция* F *с непустыми выпуклыми и компактными значениями в* $\mathbb{R}^n$ *удовлетворяет глобальному условию Липшица с константой* $K > 0$ *и ограничена, т. е. для всех* $x \in \mathbb{R}^n$ *и* $v \in F(x)$ *имеем* $|v| \leqslant K$.

2. *Функция* ℓ *глобально липшицева с константой* K.

3. *Мера* $m(\cdot)$ *обладает конечным вторым моментом, т. е.* $E_m|\cdot|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |q|^2 m(dq) < +\infty$.

При сделанном предположении мультифункция $\mathcal{S}(F,\cdot)$ с компактными значениями в пространстве $C(\mathfrak{T}, \mathbb{R}^n)$ будет также глобально липшицевой:

$$\forall x(\cdot, q_1) \in \mathcal{S}(F, q_1),\ \exists y(\cdot, q_2) \in \mathcal{S}(F, q_2),\ \ |x(\cdot, q_1) - y(\cdot, q_2)|_\infty \leqslant \exp(K(b-a))|q_1 - q_2|. \tag{4.2}$$

Здесь и далее $|\cdot|_\infty$ — sup-норма в $C(\mathfrak{T}, \mathbb{R}^n)$. Кроме того, существует хотя бы один непрерывный селектор $x(\cdot) \in \mathcal{S}(F,\cdot)$. Доказательства этих фактов можно найти, например, в [11].

Из оценки (4.1) (если положить $q_2 = 0$) и предположения 4.1 следует, что величины $E_m|x(t,\cdot)|^2$ и $E_m\ell(x(b,\cdot)$ конечны для всякой траектории $x(\cdot)$. Будем говорить, что траектория $\bar{x}(\cdot)$ доставляет *локальный минимум* функционалу $E_m\ell(x(b,\cdot))$, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$E_m\ell(\bar{x}(b,\cdot)) \leqslant E_m\ell(x(b,\cdot))$$

для всякой траектории $x(\cdot)$, удовлетворяющей неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\bar{x}(\cdot)(q) - x(\cdot)(q)|_\infty m(dq) < \varepsilon.$$

С помощью методов проксимального анализа устанавливается следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено предположение* 4.1 *и траектория* $\bar{x}(\cdot)$ *доставляет локальный минимум функционалу* $E_m\ell(x(b,\cdot))$. *Тогда найдется функция* $p(t,q)$, *абсолютно непрерывная по* t *и борелевская по* q, *такая, что*

$$(-\dot{p}(t,q), \dot{\bar{x}}(t,q)) \in \partial_C H(\bar{x}(t,q), p(t,q)), \quad \text{п.в.} \;\; t \in \mathfrak{T}, \quad q \in \mathbb{R}^n, \tag{4.3}$$

$$p(b,q) \in \partial\ell(\bar{x}(b,q)). \tag{4.4}$$

Выполняется условие максимума $\langle p(t,q), \dot{\bar{x}}(t,q)\rangle = H(\bar{x}(t,q), p(t,q))$ *для п.в.* t, q.

Поясним символы, используемые в (4.3), (4.4). Множество $\partial_C H(x,p)$ — это субдифференциал Кларка (см. [19;21]), который является выпуклым и замкнутым множеством для локально липшицевых функций и совпадает с обычным субдифференциалом в выпуклом случае. Отметим формулу $\partial_C f(x,y) = \partial_{1C} f(x,y) \times \partial_{2C} f(x,y)$ для выпукло-вогнутых функций $f(x,y)$. Символом $\partial\ell(x)$ обозначен предельный субдифференциал, или субдифференциал Мордуховича (см. [12]), который в конечномерных пространствах определяется как верхний предел проксимальных субдифференциалов: $\partial\ell(x) = \limsup_{y\to x} \partial_P \ell(y)$. Предельный субдифференциал уже не является, вообще говоря, выпуклым множеством, но в выпуклом случае также совпадает с обычным субдифференциалом выпуклого анализа.

Наметим д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4.2. Рассмотрим гильбертово пространство

$$X = L_2^n(\mathfrak{T} \times \mathbb{R}^n, dt \times m) = \Big\{ v\colon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathfrak{T}} |v(t,q|^2 dt m(dq) < +\infty \Big\}$$

и множества

$$S = \Big\{ v \in X\colon v(t,q) \in F(q + \int\limits_a^t v(s,q)ds) \text{ п.в. } t, q \Big\},$$

$$\Sigma = \Big\{ v \in X\colon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big| \int\limits_a^{\cdot} (v(s,q) - \bar{v}(s,q))ds \Big|_\infty m(dq) \leqslant \varepsilon \Big\},$$

а также функцию

$$\tilde{\ell}(v) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell\Big(q + \int\limits_a^b v(s,q)ds\Big) m(dq).$$

Здесь $\bar{v}(\cdot,\cdot)$ — функция, определяющая локально оптимальное решение, т. е. $\bar{x}(t,q) = q + \int_a^t \bar{v}(s,q)ds$. Нетрудно заметить, что функция $\bar{v}(\cdot,\cdot)$ минимизирует $\tilde{\ell}(v)$ по всем $v \in S \cap \Sigma$.

Поскольку S замкнуто, $\bar v \in \operatorname{int}\Sigma$ и $\tilde\ell$ — глобально липшицева функция, то необходимое условие (в гильбертовом пространстве) минимума здесь состоит в том, что

$$0 \in \partial_P\{\tilde\ell + I_S\}(\bar v),$$

где I_S — индикаторная функция множества S. Для проксимальных субдифференциалов не справедлива формула включения субдифференциала суммы двух функций в сумму субдифференциалов, но для всякого $\varepsilon > 0$ будет иметь место приближенная формула

$$0 \in \partial_P\tilde\ell(v_1) + N_S^P(v_2) + \varepsilon B, \quad v_i \in B(\bar v, \varepsilon), \quad |\tilde\ell(\bar v) - \tilde\ell(v_1)| < \varepsilon \tag{4.5}$$

для некоторых элементов v_i, где $B(v,\varepsilon) = \{w \in X\colon \|w - v\| < \varepsilon\}$, $B = B(0,1)$. Далее по тому же плану, как в [19], устанавливаются две леммы.

Лемма 4.1. *Рассмотрим множество*

$$\mathcal{C} = \big\{(u,v) \in X \times X\colon (u(t,q), v(t,q)) \in \operatorname{gr} F,\ \textit{п.в. } t,q\big\}.$$

Пусть $(\zeta,\xi) \in N_{\mathcal{C}}^P(u,v)$. *Тогда*

$$(-\zeta(t,q), v(t,q)) \in \partial_C H(u(t,q), \xi(t,q))\ \textit{п.в.}$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\zeta \in N_S^P(v_0)$. *Тогда существует функция* $\xi(t,q)$*, абсолютно непрерывная по* $t \in \mathfrak{T}$ *и борелевская по* q*,* $\xi(b,q) = 0$*, такая, что*

$$(-\dot\xi(t,q), v_0(t,q)) \in \partial_C H(u_0(t,q), \xi(t,q) + \zeta(t,q))\ \textit{п.в.},$$

где $u_0(t,q) = q + \int_a^t v_0(s,q)ds$.

После этого совершается предельный переход $\varepsilon \downarrow 0$ в формуле (4.5) и используются свойства слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве X. □

Отметим следующее. В полностью выпуклом или в выпуклом случае верхний гамильтониан оказывается вогнуто-выпуклой функцией и дифференциальное включение (4.3) эквивалентно включениям (3.4) или (3.5). Поэтому в указанных случаях необходимые условия оптимальности оказываются и достаточными.

С учетом результатов разд. 2 теорема, аналогичная 4.2, может быть сформулирована и для функционала задачи (1.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. **Schmitendorf W.E.** Minimax control of systems with uncertainty in the initial state and in the state equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. AC-22, no. 3. P. 439–443.
3. **Овсянников Д.А.** Математические методы управления пучками. Л.: Наука, 1980. 228 с.
4. **Филиппова Т.Ф.** Управление в условиях неопределенности системой с негладкой правой частью // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 10. С. 1693–1699.
5. **Филиппова Т.Ф.** Об одном достаточном условии оптимальности в задаче управления ансамблем движений // Оценивание динамики управляемых движений: сб. ст. Свердловск: Изд-во УрО РАН, 1988. С. 111–118.
6. **Ананьев Б.И.** Многократная коррекция движения статистически неопределенных систем // Тр. междунар. конф. “Проблемы управления и приложения”. Т. 1. Минск: Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 2005. С. 97–102.
7. **Ананьев Б.И.** Коррекция движения статистически неопределенной системы при коммуникационных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 20–31.

8. **Ананьев Б.И.** Оценивание случайных информационных множеств многошаговых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 35–41.
9. **Ананьев Б.И.** Оптимальные каналы связи с шумом в задачах оценивания и коррекции движения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Т. 16, № 1. 2010. С. 15–29.
10. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
11. **Smirnov G.V.** Introduction to the theory of differential inclusions. Graduate Studies in Math. Vol. 41. Providence: AMS, 2002. 226 p.
12. **Mordukhovich B.S.** Variational analysis and generalized differentiation, II. Applications. A series of comprehensive studies in mathematics.Vol. 331. Berlin: Springer, 2006. 610 p.
13. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. М.: КомКнига, 2005. 215 с.
14. **Himmelberg C.J.** Measurable relations // Fundamenta Matematicae. 1975. Vol. 87. P. 53–72.
15. **Molchanov I.** Theory of random sets. New York: Springer, 2005. 488 p.
16. **Choquet G.** Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier 5. 1953. P. 131–295.
17. **Nguyen H.T.** An introduction to random sets. Chapman & Hall, 2006. 257 p.
18. **Бертсекас Д., Шрив С.** Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985. 279 с.
19. Nonsmooth analysis and control theory / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, R.J. Stern, P.R. Wolenski. New York: Springer, 1998. 276 p.
20. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 167 с.
21. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Мир, 1988. 280 с.

Ананьев Борис Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: abi@imm.uran.ru

Поступила 22.09.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 512.54

ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ХАРАКТЕРЫ ГРУПП $\mathrm{Sp}_4(q)$ И $\mathrm{PSp}_4(q)$ ПРИ НЕЧЁТНЫХ q [1]

В. А. Белоногов

Определены все пары полупропорциональных неприводимых характеров (в другой терминологии — малые D-блоки) симплектических групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q. В частности, для этих групп подтверждены две известные ранее гипотезы о таких парах характеров произвольной конечной группы.

Ключевые слова: конечные симплектические группы, таблица характеров, полупропорциональные характеры, малые взаимодействия.

V. A. Belonogov. Semiproportional irreducible characters of the groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ and $\mathrm{PSp}_4(q)$ for odd q.

All pairs of semiproportional irreducible characters (in other terms, small D-blocks) of symplectic groups $\mathrm{Sp}_4(q)$ and $\mathrm{PSp}_4(q)$ are obtained for odd q. In particular, two earlier-known conjectures on such pairs of characters in an arbitrary finite group are verified for these groups.

Keywords: finite symplectic groups, character table, semiproportional characters, small interactions.

Введение

Характеры φ и ψ конечной группы G называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого нормального подмножества D из G пропорциональны ограничения φ и ψ на D и их ограничения на $G \setminus D$. Автором определены все пары полупропорциональных неприводимых характеров (в другой терминологии — малые D-блоки [1]) спорадических простых групп [2]; групп $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$ [3]; групп $\mathrm{PGL}_3(q)$, $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{PGU}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$ [4]; групп $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$ [5]; и, недавно, групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q [6]. При этом обнаружились некоторые интересные свойства таких пар и были высказаны следующие две гипотезы (см. [3; 6]).

Гипотеза 1. *Если конечная группа G имеет два полупропорциональных неприводимых характера φ и ψ, то $\varphi(1) = \psi(1)$.*

Гипотеза 2. *Конечные простые группы лиева типа, определённые над полем характеристики p, как правило,*
не имеют пар полупропорциональных неприводимых характеров при $p = 2$
и имеют пары полупропорциональных неприводимых характеров при $p > 2$.

Точная формулировка гипотезы 2 должна определиться в результате дальнейших исследований. Изучению некоторых свойств произвольной группы, имеющей пару полупропорциональных неприводимых характеров, посвящена статья [7]. Подтверждения гипотез 1 и 2 получены для всех упомянутых выше групп. В квазипростых группах $\mathrm{L}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{L}_3(q)$, $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{U}_3(q)$ и $\mathrm{SU}_3(q)$ пары полупропорциональных неприводимых характеров отсутствуют при всех чётных q и присутствуют при всех нечётных q, за исключением групп $\mathrm{L}_2(5)$, $\mathrm{L}_2(7)$ и $\mathrm{L}_2(9)$, изоморфных соответственно следующим группам чётной характеристики: $\mathrm{L}_2(4)$, $\mathrm{L}_3(2)$ и $\mathrm{PSp}_4(2)'$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-10018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

В простых группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при всех чётных q пары полупропорциональных неприводимых характеров отсутствуют (см. [6]).

В настоящей статье мы опишем все пары пропорциональных неприводимых характеров групп $\mathrm{Sp}_4(q)$ и $\mathrm{PSp}_4(q)$ при нечётных q. При $q = 3$ эти группы являются также и группами чётной характеристики, поскольку $\mathrm{PSp}_4(3) \simeq \mathrm{PSU}_4(2) \simeq \mathrm{SU}_4(2)$. Как видно из таблиц характеров групп $\mathrm{Sp}_4(3)$ и $\mathrm{PSp}_4(3)$ (см. [8]), они не имеют пар полупропорциональных неприводимых характеров. В следующих теоремах мы предполагаем, что $q \geq 5$.

Доказательство теоремы 1 состоит в анализе таблиц характеров рассматриваемых групп, полученных Б. Сринивасан в статье [9], с учётом поправок А. Пшигоцкого [10], а также поправки, сделанной автором в начале разд. 2 настоящей статьи. Эти таблицы приведены в [11, разд. 2] в табл. $A, \ldots, D, A', \ldots, D'$. Ввиду их большого размера (занимающего 10 с.) они здесь не приводятся. Поэтому при чтении настоящей статьи читателю необходимо иметь под рукой статью [11]. Перед чтением теоремы 1 полезно бегло просмотреть [11, разд. 2], в частности, табл. A и A', где указаны множества чисел, которым принадлежат параметры k_i и l_i неприводимых характеров.

Условимся под *парой* понимать здесь неупорядоченную пару, т. е. двухэлементное множество. Запись "a делит $b \pm c$" означает, что a делит $b + c$ *или* $b - c$.

Теорема 1. *Конечная группа* $\mathrm{Sp}_4(q)$ *при нечётном* $q \geq 5$ *имеет в точности следующие пары полупропорциональных неприводимых характеров, записанные в терминах её таблицы характеров* [11, разд. 2] (*в скобках указана степень* deg *рассматриваемых характеров*):

(1) $\{\chi_1^{(k_1)}, \chi_1^{(k_2)}\}$, *где* $\dfrac{q^2+1}{2}$ *делит* $k_1 q \pm k_2$ *или* $k_1 \pm k_2$ *и* $k_1 \neq k_2$ $(\deg = (q^2-1)^2)$;

(2) $\{\chi_2^{(k_1)}, \chi_2^{(k_2)}\}$, *где* $q-1$ *делит* $k_1 \pm k_2$, $q+1$ *делит* $k_1 \pm k_2$ *и* $k_1 \neq k_2$ $(\deg = q^4 - 1)$;

(3) $\{\chi_3^{(k_1,l_1)}, \chi_3^{(k_2,l_2)}\}$, *где* $k_1 + l_2 = k_2 + l_1 = \dfrac{q-1}{2}$ *и* $(k_1, l_1) \neq (k_2, l_2)$ $(\deg = (q+1)^2(q^2+1))$;
число таких пар равно $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{m(m-1)}{2} - \Big[\dfrac{m}{2}\Big]\Big)$, *где* $m = \dfrac{q-3}{2}$;

(4) $\{\chi_4^{(k_1,l_1)}, \chi_4^{(k_2,l_2)}\}$, *где* $k_1 + l_2 = k_2 + l_1 = \dfrac{q+1}{2}$ *и* $(k_1, l_1) \neq (k_2, l_2)$ $(\deg = (q-1)^2(q^2+1))$;
число таких пар равно $\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{m(m-1)}{2} - \Big[\dfrac{m}{2}\Big]\Big)$, *где* $m = \dfrac{q-1}{2}$;

(5) $\{\chi_6^{(k_1)}, \chi_6^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \dfrac{q+1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$ $(\deg = (q-1)(q^2+1))$;
число таких пар равно $\Big[\dfrac{q-1}{4}\Big]$;

(6) $\{\chi_7^{(k_1)}, \chi_7^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = q - 12$ *и* $k_1 \neq k_2$ $(\deg = q(q-1)(q^2+1))$;
число таких пар равно $\Big[\dfrac{q-1}{4}\Big]$;

(7) $\{\chi_8^{(k_1)}, \chi_8^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \dfrac{q-1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$ $(\deg = (q+1)(q^2+1))$;
число таких пар равно $\Big[\dfrac{q-3}{4}\Big]$;

(8) $\{\chi_9^{(k_1)}, \chi_9^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \dfrac{q-1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$ $(\deg = q(q+1)(q^2+1))$;
число таких пар равно $\Big[\dfrac{q-3}{4}\Big]$;

(9) $\{\xi_{21}^{(k_1)}, \xi_{21}^{(k_2)}\}$ *и* $\{\xi_{22}^{(k_1)}, \xi_{22}^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \dfrac{q+1}{2}$ *чётно и* $k_1 \neq k_2$ $\Big(\deg = \dfrac{q^4-1}{2}\Big)$;
число пар каждого типа равно $\Big[\dfrac{q-3}{4}\Big]$;

(10) $\{{\xi'}_{41}^{(k_1)}, {\xi'}_{41}^{(k_2)}\}$ *и* $\{{\xi'}_{42}^{(k_1)}, {\xi'}_{42}^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \dfrac{q-1}{2}$ *чётно и* $k_1 \neq k_2$ $\Big(\deg = \dfrac{q^4-1}{2}\Big)$;
число пар каждого типа равно $\Big[\dfrac{q-5}{4}\Big]$.

По-видимому, трудно найти общие формулы для числа пар характеров $\{\chi_i^{k_1}, \chi_i^{k_2}\}$ из п. (1) и (2) теоремы 1 для произвольного поля $\mathbb{F}_q$. Укажем число таких пар в некоторых частных случаях. Группа $\mathrm{Sp}_4(5)$ имеет точно 3 пары полупропорциональных неприводимых характеров типа (1), а именно, $\{\chi_1^{(1)}, \chi_1^{(8)}\}$, $\{\chi_1^{(2)}, \chi_1^{(3)}\}$, $\{\chi_1^{(4)}, \chi_1^{(7)}\}$, и одну пару $\{\chi_2^{(1)}, \chi_2^{(5)}\}$ таких характеров типа (2). Группа $\mathrm{Sp}_4(7)$ имеет точно 5 пар полупропорциональных неприводимых характеров типа (1) (с $\{k_1, k_2\} \in \{\{1,18\}, \{2,11\}, \{3,4\}, \{5,10\}, \{9,12\}\}$) и точно 3 такие пары характеров типа (2) (с $\{k_1, k_2\} \in \{\{1,7\}, \{2,10\}, \{5,11\}\}$). Группа $\mathrm{Sp}_4(9)$ имеет точно 10 пар полупропорциональных неприводимых характеров типа (1) (с $\{k_1, k_2\} \in \{\{1,32\}, \{2,23\}, \{3,14\}, \{4,5\}, \{6,13\}, \{7,22\}, \{8,31\}, \{11,24\}, \{12,15\}, \{16,21\}\}$) и точно 6 таких пар характеров типа (2) (с $\{k_1, k_2\} \in \{\{1,9\}, \{2,18\}, \{3,13\}, \{6,14\}, \{7,17\}, \{11,19\}\}$).

Заметим, что число $\frac{1}{2}\Big(\frac{m(m-1)}{2} - \Big[\frac{m}{2}\Big]\Big)$ (из пп. (3) и (4) теоремы 1) равно $\frac{m(m-2)}{4}$ при чётном m и равно $\frac{(m-1)^2}{4}$ при нечётном m.

Рассмотренные автором примеры позволяют предположить, что выражение “или $k_1 \pm k_2$” в п. (1) теоремы 1 излишне. Более того, оно определённо излишне, если гипотетическое правило построения множества R_1, сформулированное в разд. 3, верно.

Из теоремы 1 легко получить описание пар полупропорциональных неприводимых характеров (при нечётном $q \geq 5$) группы $\mathrm{PSp}_4(q) = \mathrm{Sp}_4(q)/Z(\mathrm{Sp}_4(q))$, где $Z(\mathrm{Sp}_4(q)) = \langle a_1' \rangle$ — группа порядка 2 (см. столбец под номером 2 таблицы характеров группы $\mathrm{Sp}_4(q)$).

Пусть N — нормальная подгруппа конечной группы G. Положим $\mathrm{Irr}(G \mid N) := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \mathrm{Ker}(\chi) \subseteq N\}$, где $\mathrm{Ker}(\chi)$ — ядро характера χ (состоящее из всех $g \in G$ таких, что $\chi(g) = \chi(1)$). Согласно [1, A34] существует взаимно однозначное отображение $\chi \mapsto \widetilde{\chi}$ из $\mathrm{Irr}(G)$ на $\mathrm{Irr}(G \mid N)$ такое, что $\widetilde{\chi}(gN) = \chi(g) = \chi(gn) = \chi(ng)$ для всех $g \in G$ и $n \in N$.

Применим этот результат при $G = \mathrm{Sp}_4(q)$ и $N = Z(G)$. Множество $\mathrm{Irr}(G \mid N)$ сразу усматривается из значений характеров на элементе a_1'. Например, $\chi_3^{(k,l)} \in \mathrm{Irr}(G \mid N)$ если и только если число $k+l$ чётно. Пробегая по пунктам теоремы 1, мы заменяем в ней характеры χ на $\widetilde{\chi}$ и уточняем ограничения на параметры. Избегая громоздкости, мы будем ставить знак $\sim$ только лишь над греческой буквой из обозначения характера. Например, мы пишем $\widetilde{\chi}_1^{(k_1)}$ вместо $\widetilde{\chi_1^{(k_1)}}$. При подсчёте числа пар $\{\widetilde{\chi}_3^{(k_1,l_1)}, \widetilde{\chi}_3^{(k_2,l_2)}\}$ и пар $\{\widetilde{\chi}_4^{(k_1,l_1)}, \widetilde{\chi}_4^{(k_2,l_2)}\}$ следует применить лемму 1.3. В итоге, простой подсчёт позволяет получить следующий результат.

Теорема 2. *Конечная простая группа* $\mathrm{PSp}_4(q)$ *при нечётном* $q \geq 5$ *имеет следующие пары полупропорциональных неприводимых характеров*:

(1) $\{\widetilde{\chi}_1^{(k_1)}, \widetilde{\chi}_1^{(k_2)}\}$, *где* $\frac{q^2+1}{2}$ *делит* $k_1 q \pm k_2$ *или* $k_1 \pm k_2$, k_1 *и* k_2 *чётны и* $k_1 \neq k_2$;

(2) $\{\widetilde{\chi}_2^{(k_1)}, \widetilde{\chi}_2^{(k_2)}\}$, *где* $q-1$ *делит* $k_1 \pm k_2$, $q+1$ *делит* $k_1 \pm k_2$, k_1 *и* k_2 *чётны и* $k_1 \neq k_2$;

(3) $\{\widetilde{\chi}_3^{(k_1,l_1)}, \widetilde{\chi}_3^{(k_2,l_2)}\}$, *где* $k_1 + l_2 = k_2 + l_1 = (q-1)/2$, *числа* $k_1 + l_1$ *и* $k_2 + l_2$ *чётны и* $(k_1, l_1) \neq (k_2, l_2)$; *число таких пар равно* $\frac{1}{2}\Big[\frac{q-3}{4}\Big]\Big[\frac{q-7}{4}\Big]$;

(4) $\{\widetilde{\chi}_4^{(k_1,l_1)}, \widetilde{\chi}_4^{(k_2,l_2)}\}$, *где* $k_1 + l_2 = k_2 + l_1 = (q+1)/2$, *числа* $k_1 + l_1$ *и* $k_2 + l_2$ *чётны и* $(k_1, l_1) \neq (k_2, l_2)$; *число таких пар равно* $\frac{1}{2}\Big[\frac{q-1}{4}\Big]\Big[\frac{q-5}{4}\Big]$;

(5) $\{\widetilde{\chi}_6^{(k_1)}, \widetilde{\chi}_6^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \frac{q+1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$; *число таких пар равно* $\Big[\frac{q-1}{4}\Big]$;

(6) $\{\widetilde{\chi}_7^{(k_1)}, \widetilde{\chi}_7^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \frac{q-1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$; *число таких пар равно* $\Big[\frac{q-1}{4}\Big]$;

(7) $\{\widetilde{\chi}_8^{(k_1)}, \widetilde{\chi}_8^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \frac{q-1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$; *число таких пар равно* $\Big[\frac{q-3}{4}\Big]$;

(8) $\{\widetilde{\chi}_9^{(k_1)}, \widetilde{\chi}_9^{(k_2)}\}$, *где* $k_1 + k_2 = \frac{q-1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$; *число таких пар равно* $\Big[\frac{q-3}{4}\Big]$;

(9) $\{\widetilde{\xi}_{21}^{(k_1)}, \widetilde{\xi}_{21}^{(k_2)}\}$ *и* $\{\widetilde{\xi}_{22}^{(k_1)}, \widetilde{\xi}_{22}^{(k_2)}\}$, *где* k_1 *и* k_2 *нечётны,* $k_1 + k_2 = \dfrac{q+1}{2}$ *и* $k_1 \neq k_2$;
число пар каждого типа равно $\left[\dfrac{q+1}{8}\right]$;

(10) $\{\widetilde{\xi'}_{41}^{(k_1)}, \widetilde{\xi'}_{41}^{(k_2)}\}$ *и* $\{\widetilde{\xi'}_{42}^{(k_1)}, \widetilde{\xi'}_{42}^{(k_2)}\}$, *где* k_1 *и* k_2 *нечётны,* $k_1 + k_2 = q - 12$ *и* $k_1 \neq k_2$;
число пар каждого типа равно $\left[\dfrac{q-1}{8}\right]$.

Например, группа $\mathrm{PSp}_4(5)$ имеет точно две пары полупропорциональных неприводимых характеров: $\{\widetilde{\chi}_6^{(1)}, \widetilde{\chi}_6^{(2)}\}$ и $\{\widetilde{\chi}_7^{(1)}, \widetilde{\chi}_7^{(2)}\}$. В обозначениях Атласа [8] это пары $\{\chi_{11}, \chi_{12}\}$ и $\{\chi_{26}, \chi_{27}\}$.

Из теорем 1, 2 и из [6] непосредственно вытекает

Теорема 3. *Гипотезы* 1 *и* 2 *справедливы для групп* $G = \mathrm{PSp}_4(q)$ *при всех* q.

О б о з н а ч е н и я. $\mathrm{Cl}(G)$ — множество всех классов сопряжённых элементов группы G; g^G — класс сопряжённых элементов группы G, содержащий элемент g из G; $\mathrm{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых характеров группы G; $\dot\cup$ — знак объединения попарно непересекающихся множеств; $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных, целых и натуральных чисел соответственно; $\widehat{\mathbb{Z}}$ — кольцо всех целых алгебраических чисел из $\mathbb{C}$. Для $a, b, c \in \mathbb{Z}$ запись "$a \mid b$" означает, что a делит b; "$a = \pm b$" пишется вместо "$a \in \{b, -b\}$"; запись "$a \mid b \pm c$" означает, что a делит $b+c$ *или* $b-c$. Записи $A := B$ и $B =: A$ означают, что A есть обозначение для B (читаются: A по определению равно B). Хотя под *парой* мы понимаем обычно двухэлементное множество, но в выражениях типа "упорядоченная пара (x, y)" слово "упорядоченная" будем опускать.

1. Предварительные результаты

Из [1, теорема 833] непосредственно вытекает

Предложение 1.1. *Пусть* φ *и* ψ *— полупропорциональные неприводимые характеры группы* G *и* $g_1, g_2 \in G$. *Тогда*

(1) $\varphi(g) = 0 \iff \psi(g) = 0$ *для всех* $g \in G$;

(2) *если* $\varphi(g_1)$ *и* $\varphi(g_2)$ *— ненулевые, то* $\dfrac{\varphi(g_i)}{\psi(g_i)} \in \left\{\dfrac{\varphi(1)}{\psi(1)}, -\dfrac{\psi(1)}{\varphi(1)}\right\}$ $(i \in \{1, 2\})$.

Предложение 1.2 (L. Wlodarski [12]). *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *— числа из* $[0, \pi]$ *рационально кратные* π *такие, что* $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 = 0$. *Тогда после подходящей перестановки индексов последовательность* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ *может принимать лишь одно из следующих значений*:

(1) $(\varphi, \psi, \pi - \varphi, \pi - \psi)$, *где* $\phi, \psi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

(2) $(\nu, \dfrac{2\pi}{3} - \nu, \dfrac{2\pi}{3} + \nu, \dfrac{\pi}{2})$, *где* $0 \le \nu \le \dfrac{\pi}{3}$;

(3) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{5}, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(4) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{3\pi}{5}, \pi\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{2\pi}{5}, 0\right)$;

(5) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{5}, \dfrac{7\pi}{15}, \dfrac{13\pi}{15}\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{5}, \dfrac{8\pi}{15}, \dfrac{2\pi}{15}\right)$;

(6) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{5}, \dfrac{\pi}{15}, \dfrac{11\pi}{15}\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{14\pi}{15}, \dfrac{4\pi}{15}\right)$;

(7) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}, \dfrac{6\pi}{7}\right)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{7}, \dfrac{3\pi}{7}, \dfrac{\pi}{7}\right)$.

Предложение 1.3 [11, теорема]. *Пусть* $G = \mathrm{Sp}_4(q)$, *где* q *нечётно. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

(1) *Для группы G верна гипотеза* 1.

(2) *Если φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G, то в терминах её таблицы характеров* (см. [11, разд. 2]) $\{\varphi, \psi\}$ *содержится в одном из множеств* X_i, *где* $i \in \{1, \ldots, 13\}$, Ξ_s *и* Ξ'_s, *где* $s \in \{1, 3, 21, 22, 41, 42\}$.

Лемма 1.1 [3, лемма B1]. *Пусть* $\{m, k, l\} \subseteq \mathbb{N}$.

(1) $\cos\dfrac{2k\pi}{m} = \cos\dfrac{2l\pi}{m} \iff k + l$ *или* $k - l$ *кратно* m.

(2) $\cos\dfrac{2k\pi}{m} = -\cos\dfrac{2l\pi}{m} \iff m$ *чётно, а* $k+l$ *или* $k-l$ *есть нечётное кратное числа* $\dfrac{m}{2}$.

(*В частности, при чётном* m $\cos\dfrac{2k\pi}{m} = \pm\cos\dfrac{2l\pi}{m} \iff \dfrac{m}{2}$ *делит* $k \pm l$.)

Из определения функции cos непосредственно вытекает

Лемма 1.2. Если $\cos\alpha = \varepsilon\cos\beta$, где $\varepsilon = \pm 1$, то $\cos n\alpha = \varepsilon^n \cos n\beta$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 1.3. *Пусть* $M = \{1, \ldots, m\}$ *— множество всех натуральных чисел, не превосходящих* m, P *— множество всех пар* $(k, l) \in M \times M$ *таких, что* $k < l$ *и* $k + l \neq m + 1$, R *— множество всех пар* $((k_1, l_1), (k_2, l_2)) \in P \times P$ *таких, что* $k_1 < k_2$ *и* $k_1 + l_2 = k_2 + l_1 = m + 1$, P_i *— множество всех* i*-х координат* (k_i, l_i) *элементов из* R, *где* $i \in \{1, 2\}$, S *— множество всех пар* $((k_1, l_1), (k_2, l_2))$ *из* R *с чётными* $k_1 + l_1$ *и* $k_2 + l_2$. *Тогда*

(1) $|P| = m(m-1)/2 - [m/2]$;

(2) $|R| = |P_1| = |P_2| = |P|/2$,

(3) $|S| = [m/2][(m-2)/2]/2$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из равенств $|\{(k, l) \in P \mid k < l\}| = m(m-1)/2$ и $|\{(k, l) \in P \mid k < l, k + l = m + 1\}| = [m/2]$.

Если $((k_1, l_1), (k_2, l_2)) \in R$, то $(k_2, l_2) = (m + 1 - l_1, m + 1 - k_1)$, $k_1 + l_1 < m + 1$, $k_1 < [m/2]$ и $k_2 + l_2 > m + 1$. Отсюда следует утверждение (2).

Очевидно, $|S|$ равно числу пар (k_1, l_1) из P_1 с чётным $k_1 + l_1$. Из приведённых выше соотношений следует, что $P_1 = \cup_{i=1}^{n} L_i$, где $L_i = \{(i, i + 1), \ldots, (i, m - i)\ |\}$ и $n = [(m-1)/2]$ ($L_n = \{(m/2 - 1, m/2), (m/2 - 1, m/2 + 1)\}$ при чётном m и $L_n = \{([m/2], [m/2 + 1])\}$ при нечётном m). Понятно, что $|S \cap L_i| = [|L_i|/2] = [(m - 2i)/2] = [m/2] - i$. Отсюда (суммируя эти числа от $i = 1$ до $i = n$), получаем (3) (заметим, что $[(m-2)/2] = [m/2] - 1$ для всех целых m). Лемма 1.3 доказана.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = Sp_4(q)$, где $q \geq 5$. Сначала напомним некоторые обозначения из [11, разд. 2], которые будут часто встречаться далее, а также исправим некорректность в определении множества R_1, допущенную в статье Б. Сринивасан [9].

Далее $\zeta_n := e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}}$ при любом $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbf{i}$ — мнимая единица),

$\sigma := \zeta_{q^2-1}$, $\tau := \zeta_{q^2+1}$, $\alpha_m := \zeta_{q-1}^{m} + \zeta_{q-1}^{-m} = 2\cos\dfrac{2m\pi}{q-1}$, $\beta_m := \zeta_{q+1}^{m} + \zeta_{q+1}^{-m} = 2\cos\dfrac{2m\pi}{q+1}$;

$t := (q-1)/2$, $\varepsilon := (-1)^t$, $b := (-1 - \varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2$, $b^* := (-1 + \varepsilon\sqrt{\varepsilon q})/2$;

$s(i, j) := (-1)^i + (-1)^j$, $d(i, j) := (-1)^i - (-1)^j$, $q_- := q - 1$ и $q_+ := q + 1$;

$T_1 := \{1, 2, \ldots, (q-3)/2\}$, $T_2 := \{1, 2, \ldots, (q-1)/2\}$;

R_2 есть множество, состоящее из первых $(q-1)^2/4$ членов ряда, получающегося из натурального ряда $1, 2, \ldots$ удалением чисел, делящихся на $q - 1$ или на $q + 1$ (так что при $i \in R_2$ числа σ^i, σ^{-i}, σ^{qi}, σ^{-qi} попарно различны). (Заметим, что в [11] при определении R_2 вместо буквы σ ошибочно поставлена буква θ.)

R_1 определено в [9] как множество $\{1, 2, \dots, (q^2-1)/4\}$; но в этом случае число характеров вида $\chi_1^{(k)}$ оказывается меньше, чем $(q^2-1)/4$, в противоречие с утверждением автора. Например, как легко проверить, $\chi_1^{(q)} = \chi_1^{(1)}$ и, более того, при любых $a, b \in \mathbb{N}$ верно равенство $\chi_1^{(|aq+b|)} = \chi_1^{(|bq-a|)}$, которое существенно уменьшает число характеров вида $\chi_1^{(k)}$ при $k \in R_1$.

Корректное определение должно быть таким:

R_1 есть множество, состоящее из первых $(q^2-1)/4$ членов ряда, получающегося из натурального ряда $1, 2, \dots$ удалением чисел k таких, что $\chi_1^{(k)} = \chi_1^{(j)}$ при некотором $j < k$ (значения характеров $\chi_1^{(k)}$ вычисляются по формулам из таблицы характеров группы G).

Например, при $q = 5$ $R_1 = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, поскольку $\chi_1^{(5)} = \chi_1^{(1)}$ и $\chi_1^{(6)} = \chi_1^{(4)}$, что видно из приведённых выше равенств, а при $q = 7$ $R_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 17, 18\}$. На основании рассмотренных автором примеров, в разд. 3 сформулирована гипотеза, позволяющая при данном q выписать все элементы множества R_1, не вычисляя значения характеров. В частности, согласно этой гипотезе наибольший элемент в R_1 есть $(q-1)^2/2$.

(Определение множества R_1 из [9] повторено в [11, разд. 2], но это не приводит к неверным результатам, так как конкретный вид R_1 там не используется.)

Укажем некоторые различия обозначений в таблицах характеров из [9] и [11]. В [11] элементы группы G обозначаются строчными латинскими буквами с индексами и параметрами; при замене этих букв соответствующими заглавными буквами получаются обозначения соответствующих классов сопряжённых элементов в G, принятые в [9] (например, $B_2(i) = b_2(i)^G$). В таблице характеров статьи [9] (в отличие от [11]) присутствуют строки, состоящие из значений обобщённого характера $-\chi$, где $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, а не самого характера χ, (причём обозначение введено для $-\chi$). В следующем предложении стрелка $\to$ заменяет слова “соответствует обозначениям” (или “равносильно обозначениям”). Обозначение θ_i в [11] $\to$ θ_i или $-\theta_i$ (последнее — в точности при $i \in \{5, 6, 7, 8\}$) в [9]; обозначение φ_i в [11] $\to$ Φ_i или $-\Phi_i$ (последнее — в точности при $i \in \{1, 2, 3, 4\}$) в [9]; обозначение $\chi_i^{(k)}$ в [11] $\to$ $\chi_i(k)$ или $-\chi_i(k)$ (последнее — в точности при $i \in \{2, 6\}$) в [9]; обозначение $\chi_5^{(k,l)}$ в [11] $\to$ $-\chi_5(k, l)$ в [9]; обозначение $\xi_m^{(k)}$ в [11] $\to$ $\xi_m(k)$ или $-\xi_m(k)$ (последнее — в точности при $m \in \{1, 21\}$) в [9]; обозначение ${\xi'}_m^{(k)}$ в [11] $\to$ ${\xi'}_m(k)$ или $-{\xi'}_m(k)$ (последнее — в точности при $m \in \{1, 21\}$) в [9]; обозначения $\widetilde{\varepsilon}$ и $\widetilde{\varepsilon}'$ в [11] $\to$ b и b^* соответственно в [9]; обозначения τ и σ в [11] $\to$ $\widetilde{\zeta}$ и $\widetilde{\theta}$ соответственно в [9].

В таблице характеров $\mathrm{X}(G)$ группы G в [11] классы сопряжённых элементов группы G выписаны во второй строке, а неприводимые характеры этой группы записаны во втором столбце. Повторим здесь некоторые особенности этих записей, которые необходимо будет иметь в виду.

Замечание 2.1. Представители алгебраически сопряжённых классов сопряжённых элементов записаны в одной колонке, причём в этой колонке даются значения неприводимых характеров лишь на одном из них; значения неприводимых характеров на другом получаются из значений на первом заменой b на b^* и b^* на b.

Замечание 2.2. Для любого элемента g группы G через g' обозначается элемент gz в случае, когда $(gz)^G \neq g^G$. Элементы g и g' записываются в одной колонке, где даны лишь значения характеров $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ на g. Для получения значения $\chi(g')$ нужно взять запись из 2-й колонки (в той же строке) и положить в ней $D = \chi(g)$. (Во 2-й колонке — $D = \chi(a_1)$.)

Замечание 2.3. В таблице характеров группы G алгебраически сопряжённые характеры расположены в одной строке, причём приведены значения только одного характера от каждой пары. Значение второго на любом элементе g получаются из значений первого на g заменой b на b^* и b^* на b.

В таблице $\mathrm{X}(G)$ после двух вспомогательных полос имеются 32 нумерованных полосы, состоящие из значений нескольких характеров, указанных во второй колонке таблицы, и, подобно, после двух вспомогательных колонок имеются 23 нумерованные колонки, состоящие из значений неприводимых характеров на классах сопряжённых элементов, представители которых записаны во второй полосе.

Пусть $\widetilde{i}$ и $\widehat{j}$ обозначают полосу и колонку таблицы характеров $\mathrm{X}(G)$, помеченные номерами i и j соответственно.

Перейдём непосредственно к доказательству теоремы 1.

Пусть φ и ψ — полупропорциональные неприводимые характеры группы G. Согласно предложению 1.3 существует номер i такой, что

$$\{\varphi, \psi\} \subseteq \widetilde{i}, \text{ где } 11 \leq i \leq 27. \tag{2.1}$$

Тогда (см. таблицу характеров) $\varphi(1) = \psi(1)$ и согласно предложению 1.1 должно быть

$$\varphi(g) = \pm\psi(g) \text{ для всех } g \in G. \tag{2.2}$$

Соответственно (2.1) мы рассматриваем далее 17 случаев, перебирая пары характеров φ и ψ из соответствующих $\widetilde{i}$. В каждом случае, из условия полупропорциональности φ и ψ выводим некоторые необходимые условия на их параметры. Затем доказываем либо их противоречивость, либо что эти условия не только необходимы, но и достаточны для полупропорциональности характеров рассматриваемого вида. В последнем случае получаем соответствующий пункт теоремы 1.

Рассмотрим сначала полосы $\widetilde{i}$ с $24 \leq i \leq 27$. Каждая из них состоит из двух серий характеров. Характеры первой серии алгебраически сопряжены с соответствующими (с теми же индексами k) характерами второй. Из значений этих характеров на a_{41} видно (см. замечание 2.1), что характеры разных серий любой из этих полос не могут быть полупропорциональными. Например, если ${\xi'}_{41}^{(k_1)}$ полупропорционален ${\xi'}_{42}^{(k_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in T_1$, то по (2.2) должно быть $b = \pm b^*$, что противоречиво. Из замечания 2.1 также следует, что полупропорциональность двух характеров одной серии влечёт полупропорциональность соответствующих характеров (т. е. с теми же индексами k) другой. Поэтому далее мы будем предполагать, что φ и ψ принадлежат первой серии (именно той, значения которой реально выписаны в таблице характеров), а затем полученный вывод распространим на другую.

Случай 1. Пусть $i = 27$, $\varphi = {\xi'}_{41}^{(k_1)}$ и $\psi = {\xi'}_{41}^{(k_2)}$ при некоторых k_1, $k_2 \in T_1$ $(k_1 \neq k_2)$.

По (2.2) при $g = d_1$ получаем $(-1)^{k_1} - (-1)^t = \pm((-1)^{k_2} - (-1)^t)$, откуда следует (при любом знаке), что

$$(-1)^{k_1} = (-1)^{k_2}, \text{ т. е. число } k_1 + k_2 \text{ чётно} \tag{2.3}$$

(в частности, $d(k_1, t) = d(k_2, t)$). Далее, применив (2.2) при $g = c_{41}(1)$, получим

$$\alpha_{k_1} = \pm\alpha_{k_2}, \text{ т. е. } \cos\frac{2k_1\pi}{q-1} = \pm\cos\frac{2k_2\pi}{q-1}.$$

По лемме 1.1 отсюда следует, что $(q-1)/2$ делит $k_1 \pm k_2$. Так как $k_1, k_2 \in T_1 = \{1, \ldots, (q-3)/2\}$, то $(q-1)/2$ не делит $k_1 - k_2$ и, значит (учитываем также (2.3)),

$$k_1 + k_2 = (q-1)/2 \text{ и } 4 \mid q-1. \tag{2.4}$$

Согласно леммам 1.1 и 1.2 из (2.4) следует, что для всех натуральных i

$$\alpha_{ik_1} = (-1)^i\alpha_{ik_2}. \tag{2.5}$$

Итак, мы доказали, что если характеры ${\xi'}_{41}^{(k_1)}$ и ${\xi'}_{41}^{(k_2)}$ группы G полупропорциональны, то выполнено условие (2.4) (а следовательно, условия (2.3) и (2.5)).

Покажем, что верно и обратное утверждение. Действительно, просматривая полосу $\widetilde{27}$ таблицы характеров, мы увидим, что ввиду (2.3) ${\xi'}_{41}^{(k_1)}(g) = {\xi'}_{41}^{(k_2)}(g)$ при всех $g \in G$, не входящих в B_5, C_3, C_4 (колонки $\widetilde{11}, \widetilde{18}, \widetilde{19}$), а ввиду (2.5) значения этих характеров на B_5, C_3, C_4 могут отличаться друг от друга лишь знаком.

Из приведённых аргументов следует вывод:

характеры φ и ψ из $\widetilde{27}$ полупропорциональны если и только если $4 \mid q-1$ и $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{{\xi'}_{41}^{(k_1)},{\xi'}_{41}^{(k_2)}\}$ или $\{{\xi'}_{42}^{(k_1)},{\xi'}_{42}^{(k_2)}\}$, где $k_1+k_2=(q-1)/2$ и $k_1\neq k_2$. Очевидно, число пар каждого из двух типов равно $(q-1)/4-1=(q-5)/4$.

Случай 2. Пусть $i=26$, $\varphi=\xi_{41}^{(k_1)}$ и $\psi=\xi_{41}^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_1$ $(k_1\neq k_2)$.

Применив (2.2) при $b_9(1)$, мы получим $\alpha_{k_1}=\pm\alpha_{k_2}$, т. е. $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q-1}=\pm\cos\dfrac{2k_2\pi}{q-1}$. По лемме 1.1 отсюда следует, что $(q-1)/2$ делит $k_1\pm k_2$, а так как $k_1,k_2\in T_1=\{1,\dots,(q-3)/2\}$, то

$$k_1+k_2=(q-1)/2.$$

Отсюда по лемме 1.1 следует, что $\alpha_{k_1}=-\alpha_{k_2}$, причём $\alpha_{k_1}\neq 0$, так как иначе $\dfrac{2k_1\pi}{q-1}=\dfrac{\pi}{2}$, т. е. $k_1=(q-1)/4=k_2$. Используя эти равенства, получаем

$$\xi_{41}^{(k_2)}(c_{41}(1))=-1-\alpha_{k_2}b=-1+\alpha_{k_1}b\neq\pm(-1-\alpha_{k_1}b)=\pm\xi_{41}^{(k_1)}(c_{41}(1)).$$

Это противоречит условию (2.2). Следовательно, в полосе $\widetilde{26}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 3. Пусть $i=25$, $\varphi={\xi'}_{21}^{(k_1)}$ и $\psi={\xi'}_{21}^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_2$ $(k_1\neq k_2)$.

Применив (2.2) при $b_7(1)$, мы получим $\beta_{k_1}=\pm\beta_{k_2}$, т. е. $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q+1}=\pm\cos\dfrac{2k_2\pi}{q+1}$. По лемме 1.1 отсюда следует, что $(q+1)/2$ делит $k_1\pm k_2$, а так как $k_1,k_2\in T_2=\{1,\dots,(q-1)/2\}$, то

$$k_1+k_2=(q+1)/2.$$

Отсюда по лемме 1.1 следует, что $\beta_{k_2}=-\beta_{k_1}$, причём $\beta_{k_1}\neq 0$, так как иначе $\dfrac{2k_1\pi}{q+1}=\dfrac{\pi}{2}$ и $k_1=(q+1)/4=k_2$. Используя эти равенства, получаем

$${\xi'}_{21}^{(k_2)}(c_{21}(1))=-1-\beta_{k_2}b=-1+\beta_{k_1}b\neq\pm(-1-\beta_{k_1}b)=\pm{\xi'}_{21}^{(k_1)}(c_{21}(1)).$$

Это противоречит условию (2.2). Следовательно, в полосе $\widetilde{25}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 4. Пусть $i=24$, $\varphi=\xi_{21}^{(k_1)}$ и $\psi=\xi_{21}^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_2$ $(k_1\neq k_2)$.

По (2.2) при $g=d_1$ получаем $(-1)^{k_1}+(-1)^t=\pm((-1)^{k_2}+(-1)^t)$, откуда следует, что

$$(-1)^{k_1}=(-1)^{k_2},\ \text{ т. е. число } k_1+k_2 \text{ чётно.} \tag{2.6}$$

Далее, применив (2.2) при $g=c_1(1)$, мы получим $\beta_{k_1}=\pm\beta_{k_2}$, т. е. $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q+1}=\pm\cos\dfrac{2k_2\pi}{q+1}$. По лемме 1.1 отсюда следует, что $(q+1)/2$ делит $k_1\pm k_2$. Так как $k_1,k_2\in T_2=\{1,\dots,(q-1)/2\}$, то $(q+1)/2$ не делит k_1-k_2 и, значит,

$$k_1+k_2=(q+1)/2 \ \text{ и (по ((2.6))) } \ 4\mid q+1. \tag{2.7}$$

Согласно леммам 1.1 и 1.2 из (2.7) следует, что $\beta_{ik_1}=(-1)^i\beta_{ik_2}$ для всех натуральных i.

Теперь, просматривая полосу $\widetilde{24}$ таблицы характеров, мы убеждаемся (так же, как в случае 1) в достаточности условия (2.7) для полупропорциональности характеров $\xi_{21}^{(k_1)}$ и $\xi_{21}^{(k_2)}$ и делаем вывод:

характеры φ и ψ из $\widetilde{24}$ полупропорциональны если и только если $4 \mid q+1$ и $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{\xi_{21}^{(k_1)},\xi_{21}^{(k_2)}\}$ или $\{\xi_{22}^{(k_1)},\xi_{22}^{(k_2)}\}$, где $k_1+k_2=(q+1)/2$ и $k_1\neq k_2$. Очевидно, число пар каждого из двух типов равно $(q-3)/4$.

Случай 5. Пусть $i=23$, $\varphi={\xi'}_3^{(k_1)}$ и $\psi={\xi'}_3^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_1$ $(k_1\neq k_2)$.

Этот случай исключается в точности так же, как случай 2. А именно, применив (2.2) при $g=b_9(1)$, получаем равенство $\alpha_{k_1}=\pm\alpha_{k_2}$, откуда по лемме 1.1 следует, что $k_1+k_2=(q-1)/2$ и $\alpha_{k_2}=-\alpha_{k_1}\neq 0$. Но тогда

$$
{\xi'}_3^{(k_2)}(c_3(1))=q_++q\alpha_{k_2}=q_+-q\alpha_{k_1}\neq\pm(q_++q\alpha_{k_1})=\pm{\xi'}_3^{(k_1)}(c_3(1)),
$$

что противоречит условию (2.2). Следовательно, в полосе $\widetilde{23}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 6. Пусть $i=22$, $\varphi=\xi_3^{(k_1)}$ и $\psi=\xi_3^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_1$ $(k_1\neq k_2)$.

Этот случай исключается подобно случаю $i=23$. По (2.2) при $g=b_9(1)$ $\alpha_{k_1}=\pm\alpha_{k_2}$, откуда по лемме 1.1 $k_1+k_2=(q-1)/2$ и $\alpha_{k_2}=-\alpha_{k_1}\neq 0$. Но тогда

$$
\xi_3^{(k_2)}(c_{41}(1))=1+\alpha_{k_2}=1-\alpha_{k_1}\neq\pm(1+\alpha_{k_1})=\pm\xi_3^{(k_1)}(c_{41}(1)).
$$

Следовательно, в полосе $\widetilde{22}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 7. Пусть $i=21$, $\varphi={\xi'}_1^{(k_1)}$ и $\psi={\xi'}_1^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_2$ $(k_1\neq k_2)$.

По (2.2) при $b_7(1)$ $\beta_{k_1}=\pm\beta_{k_2}$, откуда по лемме 1.1 $k_1+k_2=(q+1)/2$, $\beta_{k_2}=-\beta_{k_1}\neq 0$, и тогда

$$
{\xi'}_1^{(k_2)}(c_1(1))=-q_--q\beta_{k_2}=-q_-+q\beta_{k_1}\neq\pm(-q_--q\beta_{k_1})=\pm{\xi'}_1^{(k_1)}(c_1(1)).
$$

Следовательно, в полосе $\widetilde{21}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 8. Пусть $i=20$, $\varphi=\xi_1^{(k_1)}$ и $\psi=\xi_1^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_2$ $(k_1\neq k_2)$.

Применив (2.2) при $b_7(1)$, получаем $\beta_{k_1}=\pm\beta_{k_2}$, откуда по лемме 1.1 $k_1+k_2=(q+1)/2$ и $\beta_{k_2}=-\beta_{k_1}\neq 0$. Но тогда

$$
\xi_1^{(k_2)}(c_{21}(1))=-1-\beta_{k_2}=-1+\beta_{k_1}\neq\pm(-1-\beta_{k_1})=\pm{\xi'}_1^{(k_1)}(c_{21}(1)).
$$

Это противоречит условию (2.2). Следовательно, в полосе $\widetilde{20}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 9. Пусть $i=19$, $\varphi=\chi_9^{(k_1)}$ и $\psi=\chi_9^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_1$ $(k_1\neq k_2)$.

Применив (2.2) при $b_{21}(1)$, получаем равенство $\alpha_{k_1}=\pm\alpha_{k_2}$, откуда по лемме 1.1 следует, что $k_1+k_2=(q-1)/2$ (так как $k_1,k_2\in T_1$) и тогда $\alpha_{ik_1}=(-1)^i\alpha_{ik_2}$ для натуральных i; в частности, $\alpha_{2k_1}=\alpha_{2k_2}$. Используя эти равенства, убеждаемся в справедливости для полосы $\widetilde{19}$ условия (2.2) при любом $g\in G$. Следовательно, характеры φ и ψ из $\widetilde{19}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{\chi_9^{(k_1)},\chi_9^{(k_2)}\}$, где $k_1+k_2=(q-1)/2$ и $k_1\neq k_2$. Число таких пар равно $[(q-3)/4]$ (т. е. равно $(q-5)/4$, если 4 делит $q-1$ и равно $(q-3)/4$, если 4 не делит $q-1$).

Случай 10. Пусть $i=18$, $\varphi=\chi_8^{(k_1)}$ и $\psi=\chi_8^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_1$ $(k_1\neq k_2)$.

Подобно предыдущему случаю, получаем:

характеры φ и ψ из $\widetilde{18}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{\chi_8^{(k_1)},\chi_8^{(k_2)}\}$, где $k_1+k_2=(q-1)/2$ и $k_1\neq k_2$. Число таких пар равно $[(q-3)/4]$.

Случай 11. Пусть $i=17$, $\varphi=\chi_7^{(k_1)}$ и $\psi=\chi_7^{(k_2)}$ при некоторых $k_1,k_2\in T_2$ $(k_1\neq k_2)$.

Применив (2.2) при $b_2(1)$, мы имеем $\beta_{k_1} = \pm\beta_{k_2}$, откуда по лемме 1.1 следует, что $k_1 + k_2 = (q+1)/2$ и тогда $\beta_{ik_1} = (-1)^i \beta_{ik_2}$ при натуральных i. Отсюда и из таблицы характеров видно, что характеры φ и ψ из $\widetilde{17}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi, \psi\}$ есть $\{\chi_7^{(k_1)}, \chi_7^{(k_2)}\}$, где $k_1 + k_2 = (q+1)/2$ и $k_1 \neq k_2$. Число таких пар равно $[(q-1)/4]$.

Случай 12. Пусть $i = 16$, $\varphi = \chi_6^{(k_1)}$ и $\psi = \chi_6^{(k_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in T_2$ $(k_1 \neq k_2)$.

Подобно предыдущему случаю, получаем:

характеры φ и ψ из $\widetilde{18}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi, \psi\}$ есть $\{\chi_6^{(k_1)}, \chi_6^{(k_2)}\}$, где $k_1 + k_2 = (q+1)/2$ и $k_1 \neq k_2$. Число таких пар равно $[(q-1)/4]$.

Случай 13. Пусть $i = 15$, $\varphi = \chi_5^{(k_1,l_1)}$ и $\psi = \chi_5^{(k_2,l_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in T_2$ и $l_1, l_2 \in T_1$ $((k_1, l_1) \neq (k_2, l_2))$.

Применив (2.2) при $g = c_{21}(1)$, получим $\beta_{k_1} = \pm\beta_{k_2}$. По лемме 1.1 отсюда следует, что $(q+1)/2$ делит $k_1 \pm k_2$, а так как $k_1, k_2 \in T_2 = \{1, \dots, (q-1)/2\}$, то

$$k_1 + k_2 = (q+1)/2. \tag{2.8}$$

Далее, применив (2.2) при $g = c_{41}(1)$, получим $\alpha_{l_1} = \pm\alpha_{l_2}$. По лемме 1.1 отсюда следует, что $(q-1)/2$ делит $l_1 \pm l_2$, а так как $l_1, l_2 \in T_1 = \{1, \dots, (q-3)/2\}$, то

$$l_1 + l_2 = (q-1)/2. \tag{2.9}$$

По (2.2) при $g = d_1$ получаем $s(k_1, l_1) = \pm s(k_2, l_2)$, т. е. $(-1)^{k_1} + (-1)^{l_1} = \pm((-1)^{k_2} + (-1)^{l_2})$, что равносильно утверждению, что числа $k_1 + l_1$ и $k_2 + l_2$ имеют одинаковую чётность и, значит, $k_1 + l_1 + k_2 + l_2$ чётно. Но это противоречит утверждениям (2.8), (2.9), согласно которым $k_1 + l_1 + k_2 + l_2 = (q+1)/2 + (q-1)/2 = q$, а у нас q нечётно. Следовательно, в полосе $\widetilde{15}$ нет пар полупропорциональных неприводимых характеров.

Случай 14. Пусть $i = 14$, $\varphi = \chi_4^{(k_1,l_1)}$ и $\psi = \chi_4^{(k_2,l_2)}$ при некоторых $k_1, k_2, l_1, l_2 \in T_2$, $k_1 < l_1$, $k_2 < l_2$ $((k_1, l_1) \neq (k_2, l_2))$.

По (2.2) при $g = d_1$ получаем $s(k_1, l_1) = \pm s(k_2, l_2)$, т.ė. $(-1)^{k_1} + (-1)^{l_1} = \pm((-1)^{k_2} + (-1)^{l_2})$ и, значит,

$$k_1 + l_1 + k_2 + l_2 \text{ чётно.} \tag{2.10}$$

Далее, применив (2.2) при $g = c_1(i)$, мы получим $\beta_{ik_1} + \beta_{il_1} = \pm(\beta_{ik_2} + \beta_{il_2})$ $(i \in T_2)$, т. е.

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q+1} + \cos\frac{2il_1\pi}{q+1} = \pm\Big(\cos\frac{2ik_2\pi}{q+1} + \cos\frac{2il_2\pi}{q+1}\Big) \text{ при } i \in T_2. \tag{2.11}$$

Применив (2.2) при $g = b_7(i)$, получим $\beta_{ik_1}\beta_{il_1} = \pm\beta_{ik_2}\beta_{il_2}$ $(i \in T_2)$, т. е.

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q+1}\cos\frac{2il_1\pi}{q+1} = \pm\cos\frac{2ik_2\pi}{q+1}\cos\frac{2il_2\pi}{q+1} \text{ при } i \in T_2. \tag{2.12}$$

Применив (2.2) при $g = b_4(i,j)$ $(i, j \in T_2, i < j)$, получим $\beta_{ik_1}\beta_{jl_1} + \beta_{il_1}\beta_{jk_1} = \pm(\beta_{ik_2}\beta_{jl_2} + \beta_{il_2}\beta_{jk_2})$ $(i \in T_2)$, т. е.

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q+1}\cos\frac{2jl_1\pi}{q+1} + \cos\frac{2il_1\pi}{q+1}\cos\frac{2jk_1\pi}{q+1} = \pm\Big(\cos\frac{2ik_2\pi}{q+1}\cos\frac{2jl_2\pi}{q+1} + \cos\frac{2il_2\pi}{q+1}\cos\frac{2jk_2\pi}{q+1}\Big). \tag{2.13}$$

Согласно (2.11)

$$\cos\frac{2k_1\pi}{q+1} + \cos\frac{2l_1\pi}{q+1} + \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q+1} + \varepsilon\cos\frac{2l_2\pi}{q+1} = 0 \text{ при нектором } \varepsilon = \pm 1. \tag{2.14}$$

Поэтому по предложению 1.2 последовательность $\Big(\cos\frac{2k_1\pi}{q+1}, \cos\frac{2l_1\pi}{q+1}, \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q+1}, \varepsilon\cos\frac{2l_2\pi}{q+1}\Big)$ получается перестановкой членов некоторой последовательности $C := (\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \cos\gamma_3, \cos\gamma_4)$, указанной в п. (1)–(7) этого предложения.

Покажем сначала, что C не может содержаться в п. (2)–(7). Для этого мы используем утверждение (2.12) при $i = 1$, из которого следует, что для последовательности C должно быть выполнено хотя бы одно из равенств

$$|\cos\gamma_1\cos\gamma_2| = |\cos\gamma_3\cos\gamma_4|,\ \ |\cos\gamma_1\cos\gamma_3| = |\cos\gamma_2\cos\gamma_4|,\ \ |\cos\gamma_1\cos\gamma_4| = |\cos\gamma_2\cos\gamma_3|. \tag{2.15}$$

Если C указано в п. (2) или (3), то ни одно из равенств (2.15) не выполнено, так как в этих случаях точно один из четырёх косинусов $\cos\gamma_i$ равен нулю.

Пусть теперь $C = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi\right)$ — последовательность из п. (4) (понятно, что достаточно рассмотреть лишь одну последовательность каждого из п. (3)–(7)). С помощью калькулятора вычисляем с точностью до четырёх знаков после запятой значения косинусов углов из $C:$ $0,5;$ $0,8090;$ $-0,3090;$ -1. Видим, что ни одно из равенств (2.15) не выполнено.

Для $C = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{7\pi}{15}, \frac{13\pi}{15}\right)$ (последовательность из п. (5)) подобно вычисляем значения косинусов: $0,5;$ $0,3090;$ $0,1045;$ $-0,9135$. И снова ни одно из равенств (2.15) не выполнено ($0.5\times 0.3090 = 0.1545$, но $0.1045\times 0.9135 = 0.0954$; $0.5\times 0.1045 = 0.05225$, но $0.3090\times 0.9135 = 0.2822$; $0.5\times 0.9135 = 0.45675$, но $0.1045\times 0.3090 = 0.0322$).

Тот же отрицательный результат получим и для последовательностей $C = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{15}, \frac{11\pi}{15}\right)$ (последовательность косинусов: 0.5; -0.8090; 0.9781; -0.6691; здесь $0.5\times 0.8090 = 0.4045$, но $0.9781\times 0.6691 = 0.6444$; $0.5\times 0.9781 = 0.48905$, но $0.8090\times 0.6691 = 0.5413$; $0.5\times 0.6691 = 0.3345$, но $0.8090\times 0.9781 = 0.7912$) и $C = \left(\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{3}\right)$ (последовательность косинусов: 0.5; 0.6234; -0.2225; -0.9009; здесь $0.5\times 0.6234 = 0.3117$, но $0.2225\times 0.9009 = 0.2004$; $0.5\times 0.2225 = 0.1114$, но $0.6234\times 0.9009 = 0.5616$; $0.5\times 0.9009 = 0.45045$, но $0.6234\times 0.2225 = 0.1387$).

Таким образом, остаётся единственная возможность

$$C = (\varphi, \psi, \pi-\varphi, \pi-\psi), \quad \text{где} \quad \phi, \psi \in [0, \pi/2]).$$

Это означает, что сумма (2.14) распадается на две равные нулю подсуммы, состоящие из двух слагаемых. При этом возможны лишь следующие три случая (А), (Б), (В).

(А) Пусть $\cos\frac{2k_1\pi}{q+1} + \cos\frac{2l_1\pi}{q+1} = 0$ и $\cos\frac{2k_2\pi}{q+1} + \cos\frac{2l_2\pi}{q+1} = 0$. Отсюда следует (так как аргументы косинусов меньше π), что $\frac{2k_1\pi}{q+1} = \pi - \frac{2l_1\pi}{q+1}$ и $\frac{2k_1\pi}{q+1} = \pi - \frac{2l_1\pi}{q+1}$, т. е.

$$k_1 + l_1 = k_2 + l_2 = (q+1)/2. \tag{2.16}$$

В рассматриваемом случае согласно (2.12) выполняется равенство $\cos^2\frac{2k_1\pi}{q+1} = \cos^2\frac{2k_2\pi}{q+1}$, откуда $\cos\frac{2k_1\pi}{q+1} = \pm\cos\frac{2k_2\pi}{q+1}$ и, значит, либо $k_1 = k_2$, либо $k_1 + k_2 = (q+1)/2$. Если $k_1 = k_2$, то из (2.16) следует, что $l_1 = l_2$, т. е. $(k_1, l_1) = (k_2, l_2)$, что противоречиво. Если $k_1 + k_2 = (q+1)/2$, то отсюда и из (2.16) следует равенство $l_1 + l_2 = (q+1)/2$. Но это равенство противоречит предыдущему, так как $k_1 < l_1$ и $k_2 < l_2$. Случай (А) противоречив.

(Б) Пусть $\cos\frac{2k_1\pi}{q+1} + \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q+1} = 0$ и $\cos\frac{2l_1\pi}{q+1} + \varepsilon\cos\frac{2l_2\pi}{q+1} = 0$. Если $\varepsilon = 1$, то отсюда подобно случаю (А) получаем $k_1 + k_2 = (q+1)/2$ и $l_1 + l_2 = (q+1)/2$. Но это противоречиво, так как $k_1 < l_1$ и $k_2 < l_2$. Если же $\varepsilon = -1$, то получим $k_1 = k_2$ и $l_1 = l_2$, что также противоречиво, так как $\chi_4^{(k_1,l_1)} \neq \chi_4^{(k_2,l_2)}$. Случай (Б) противоречив.

(В) Пусть $\cos\frac{2k_1\pi}{q+1} + \varepsilon\cos\frac{2l_2\pi}{q+1} = 0$ и $\cos\frac{2l_1\pi}{q+1} + \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q+1} = 0$. Если $\varepsilon = -1$, то $k_1 = l_2$ и $l_1 = k_2$, что невозможно, так как при $k_1 \le k_2$ должно быть $k_1 < l_2$, а при $k_2 \le k_1$ должно быть $k_2 < l_1$. Следовательно, $\varepsilon = 1$ и тогда

$$k_1 + l_2 = l_1 + k_2 = (q+1)/2. \tag{2.17}$$

Таким образом, если характеры $\chi_4^{(k_1,l_1)}$ и $\chi_4^{(k_2,l_2)}$ полупропорциональны, то верно утверждение (2.17).

Докажем обратное. Если верно утверждение (2.17), то, очевидно, верно (2.10), и, как легко увидеть, будут верны равенства

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q+1} = (-1)^i\cos\frac{2l_2\pi}{q+1} \quad \text{и} \quad \cos\frac{2l_1\pi}{q+1} = (-1)^i\cos\frac{2k_2\pi}{q+1},$$

а из них, очевидно, следуют равенства (2.11)–(2.13) и, следовательно, равенства $s(k_1,l_1) = \pm s(k_2,l_2)$, $\beta_{ik_1}+\beta_{il_1} = \pm(\beta_{ik_2}+\beta_{il_2})$, $\beta_{ik_1}\beta_{il_1} = \pm\beta_{ik_2}\beta_{il_2}$, $\beta_{ik_1}\beta_{jl_1}+\beta_{il_1}\beta_{jk_1} = \pm(\beta_{ik_2}\beta_{jl_2}+\beta_{il_2}\beta_{jk_2})$. Поэтому, как видно из таблицы характеров, характеры $\chi_4^{(k_1,l_1)}$ и $\chi_4^{(k_2,l_2)}$ полупропорциональны.

Итак, характеры φ и ψ из полосы $\widetilde{14}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{\chi_4^{(k_1,l_1)},\chi_4^{(k_2,l_2)}\}$, где $k_1+l_2 = k_2+l_1 = (q+1)/2$. По лемме 1.3 число таких пар равно $\frac{1}{2}\Bigl(\frac{m(m-1)}{2} - \Bigl[\frac{m}{2}\Bigr]\Bigr)$, где $m = (q-1)/2$.

Случай 15. Пусть $i = 13$, $\varphi = \chi_3^{(k_1,l_1)}$ и $\psi = \chi_3^{(k_2,l_2)}$ при некоторых $k_1,k_2,l_1,l_2 \in T_1$, $k_1 < l_1$, $k_2 < l_2$ $((k_1,l_1) \neq (k_2,l_2))$.

Похожесть полос $\widetilde{13}$ и $\widetilde{14}$ позволяет применить здесь схему рассуждений случая 14. По (2.2) при $g = d_1$ имеем $s(k_1,l_1) = \pm s(k_2,l_2)$, откуда следует, что

$$\text{числа } k_1+l_1 \text{ и } k_2+l_2 \text{ имеют одинаковую чётность, т. е. } k_1+l_1+k_2+l_2 \text{ чётно.} \tag{2.18}$$

Далее, применив (2.2) при $g = c_3(i)$, затем при $g = b_9(i)$ и затем при $g = b_3(i,j)$, мы получим следующие равенства:

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q-1} + \cos\frac{2il_1\pi}{q-1} = \pm\left(\cos\frac{2ik_2\pi}{q-1} + \cos\frac{2il_2\pi}{q-1}\right) \quad \text{при } i \in T_1, \tag{2.19}$$

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q-1}\cos\frac{2il_1\pi}{q-1} = \pm\cos\frac{2ik_2\pi}{q-1}\cos\frac{2il_2\pi}{q-1} \quad \text{при } i \in T_1, \tag{2.20}$$

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q-1}\cos\frac{2jl_1\pi}{q-1} + \cos\frac{2il_1\pi}{q-1}\cos\frac{2jk_1\pi}{q-1} = \pm\left(\cos\frac{2ik_2\pi}{q-1}\cos\frac{2jl_2\pi}{q-1} + \cos\frac{2il_2\pi}{q-1}\cos\frac{2jk_2\pi}{q-1}\right). \tag{2.21}$$

Согласно (2.19)

$$\cos\frac{2k_1\pi}{q-1} + \cos\frac{2l_1\pi}{q-1} + \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q-1} + \varepsilon\cos\frac{2l_2\pi}{q-1} = 0 \quad \text{при некотором } \varepsilon = \pm 1. \tag{2.22}$$

По предложению 1.2 последовательность $\Bigl(\cos\frac{2k_1\pi}{q-1}, \cos\frac{2l_1\pi}{q-1}, \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q-1}, \varepsilon\cos\frac{2l_2\pi}{q-1}\Bigr)$ должна получаться перестановкой членов некоторой последовательности $C := (\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \cos\gamma_3, \cos\gamma_4)$, указанной в п. (1)–(7) этого предложения.

Вычисления, приведённые в случае 14, показывают, что C не может содержаться в п. (2)–(7) предложения 1.2 и, следовательно,

$$C = (\varphi, \psi, \pi-\varphi, \pi-\psi), \quad \text{где} \quad \phi,\psi \in [0,\pi/2]),$$

т. е. сумма (2.22) распадается на две равные нулю подсуммы, состоящие из двух слагаемых.

Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями случая 14; в итоге лишь следует заменить число $q+1$ числом $q-1$. В частности, получаем равенства $k_1+l_2 = l_1+k_2 = (q-1)/2$, из которых следуют утверждения (2.18)–(2.21).

Итак, характеры φ и ψ из полосы $\widetilde{13}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{\chi_3^{(k_1,l_1)},\chi_3^{(k_2,l_2)}\}$, где $k_1+l_2 = k_2+l_1 = (q-1)/2$. Число таких пар равно $\frac{1}{2}\Bigl(\frac{m(m-1)}{2} - \Bigl[\frac{m}{2}\Bigr]\Bigr)$, где $m = (q-3)/2$.

Случай 16. Пусть $i = 12$, $\varphi = \chi_2^{(k_1)}$ и $\psi = \chi_2^{(k_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in R_2$.

Как видно из таблицы характеров (полоса $\widetilde{12}$), характеры φ и ψ полупропорциональны если и только если выполнены следующие условия:

$$\alpha_{ik_1} = \pm\alpha_{ik_2} \text{ при } i \in T_2, \ \ \beta_{ik_1} = \pm\beta_{ik_2} \text{ при } i \in T_1, \tag{2.23}$$

и $\left(\text{здесь следует учесть, что } \sigma^m + \sigma^{-m} = 2\cos\dfrac{2m\pi}{q^2-1}\right)$

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q^2-1} + \cos\frac{2qik_1\pi}{q^2-1} = \pm\left(\cos\frac{2ik_2\pi}{q^2-1} + \cos\frac{2qik_2\pi}{q^2-1}\right) \text{ при } i \in R_2. \tag{2.24}$$

Предположим, что эти условия выполнены. По формулам тригонометрии равенство из (2.24) равносильно равенству

$$\cos\frac{ik_1(1+q)\pi}{q^2-1}\cos\frac{(1-q)ik_1\pi}{q^2-1} = \pm\cos\frac{(1+q)ik_2\pi}{q^2-1}\cos\frac{(1-q)ik_2\pi}{q^2-1},$$

т. е. равенству $\cos\dfrac{ik_1\pi}{q-1}\cos\dfrac{ik_1\pi}{q+1} = \pm\cos\dfrac{ik_2\pi}{q-1}\cos\dfrac{ik_2\pi}{q+1}$, а следовательно, и равенству

$$\cos^2\frac{ik_1\pi}{q-1}\cos^2\frac{ik_1\pi}{q+1} = \cos^2\frac{ik_2\pi}{q-1}\cos^2\frac{ik_2\pi}{q+1}. \tag{2.25}$$

Используя формулу $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$, равенство (2.25) перепишем виде

$$(2+\alpha_{ik_1})(2+\beta_{ik_1}) = (2+\alpha_{ik_2})(2+\beta_{ik_2}). \tag{2.26}$$

Согласно (2.23) $\alpha_{k_2} = \varepsilon\alpha_{k_1}$ и $\beta_{k_2} = \delta\beta_{k_1}$ при некоторых $\varepsilon, \delta \in \{1, -1\}$, причём условимся выбрать $\varepsilon = \delta$ в случаях, когда $\alpha_{k_1} = 0$ или $\beta_{k_1} = 0$. Равенство (2.26) при $i = 1$ можно переписать в виде $(2+\alpha_{k_1})(2+\beta_{k_1}) = (2+\varepsilon\alpha_{k_1})(2+\delta\beta_{k_1})$ или

$$2(1-\varepsilon)\alpha_{k_1} + 2(1-\delta)\beta_{k_1} = (\varepsilon\delta - 1)\alpha_{k_1}\beta_{k_1}. \tag{2.27}$$

Если $\varepsilon = \delta = -1$ (т. е. $\alpha_{k_2} = -\alpha_{k_1}$ и $\beta_{k_2} = -\beta_{k_1}$), то по лемме 1.1 $k_1 \pm k_2$ есть нечётное кратное числа $(q-1)/2$ и, одновременно, $k_1 \pm k_2$ есть нечётное кратное числа $(q+1)/2$, а так как числа $(q-1)/2$ и $(q+1)/2$ имеют разную чётность (а $k_1 + k_2$ и $k_1 - k_2$ имеют одинаковую чётность), то это противоречиво. Если $\varepsilon = 1, \delta = -1$, то из (2.27) следует равенство $\beta_{k_1} = 0$, а это противоречит выбору чисел ε и δ, описанному выше. Если $\varepsilon = -1, \delta = 1$, то из (2.27) следует равенство $\alpha_{k_1} = 0$, что также противоречит выбору чисел ε и δ.

Следовательно, $\varepsilon = \delta = 1$, т. е. $\alpha_{k_2} = \alpha_{k_1}$ и $\beta_{k_2} = \beta_{k_1}$. По лемме 1.1 это равносильно условию

$$q-1 \text{ делит } k_1 \pm k_2 \text{ и } q+1 \text{ делит } k_1 \pm k_2. \tag{2.28}$$

Итак, если выполнены условия (2.23) и (2.24), то выполнено и условие (2.28).

Обратно, пусть выполнено условие (2.28). Тогда, очевидно, верно (2.23), а также по лемме 1.1 при любом натуральном i будет $\alpha_{ik_2} = \alpha_{ik_1}$, $\beta_{ik_2} = \beta_{ik_1}$, и, следовательно, верно равенство (2.26), равносильное равенству из (2.24). Отсюда следует, что характеры φ и ψ из $\widetilde{12}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi, \psi\}$ есть $\{\chi_2^{(k_1)}, \chi_2^{(k_2)}\}$, где $q-1$ делит $k_1 \pm k_2$ и $q+1$ делит $k_1 \pm k_2$.

Случай 17. Пусть $i = 11$, $\varphi = \chi_1^{(k_1)}$ и $\psi = \chi_1^{(k_2)}$ при некоторых $k_1, k_2 \in R_1$.

Применив (2.2) при $g = b_1(1)$, получим равенство $\tau^{k_1} + \tau^{-k_1} + \tau^{qk_1} + \tau^{-qk_1} + \varepsilon(\tau^{k_2} + \tau^{-k_2} + \tau^{qk_2} + \tau^{-qk_2}) = 0$, где $\varepsilon = \pm 1$, которое можно записать в следующей форме:

$$\cos\frac{2k_1\pi}{q^2+1} + \cos\frac{2qk_1\pi}{q^2+1} + \varepsilon\cos\frac{2k_2\pi}{q^2+1} + \varepsilon\cos\frac{2qk_2\pi}{q^2+1} = 0. \tag{2.29}$$

Положим $\alpha := 2\pi/(q^2+1)$. Первые два слагаемых в равенстве (2.29) можно тогда записать в виде $\cos k_1\alpha$ и $\cos qk_1\alpha$. Третье слагаемое в (2.29) есть либо $\cos k_2\alpha$ (если $\varepsilon = 1$), либо $\cos(\pi + k_2\alpha) = \cos((q^2+1)/2+k_2)\alpha$ (если $\varepsilon = -1$); в любом случае оно имеет вид $\cos m\alpha$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Подобный вид имеет и четвёртое слагаемое. Таким образом, равенство (2.29) можно переписать (не изменяя величин слагаемых) в виде

$$\cos k_1\alpha + \cos qk_1\alpha + \cos m\alpha + \cos n\alpha = 0, \quad \text{где} \ \ m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.30}$$

Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ обозначим через $\widetilde{\varphi}$ (очевидно, единственное) число из $[0,\pi]$ такое, что $\cos\varphi = \cos\widetilde{\varphi}$; при этом $\varphi = 2z\pi \pm \widetilde{\varphi}$ с $z \in \mathbb{Z}$. Тогда равенство (2.30) можно записать в виде

$$\cos \widetilde{k_1\alpha} + \cos \widetilde{qk_1\alpha} + \cos \widetilde{m\alpha} + \cos \widetilde{n\alpha} = 0, \quad \text{где} \ \ m, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.31}$$

Поскольку число π и все аргументы косинусов в (2.30) целочисленно кратны α, то и все аргументы косинусов в (2.31) целочисленно кратны α (ввиду равенства $\varphi = 2z\pi \pm \widetilde{\varphi}$), и, значит, условие (2.31) можно записать в виде:

$$\cos m_1\alpha + \cos m_2\alpha + \cos m_3\alpha + \cos m_4\alpha = 0, \quad \text{где} \ \ m_i \in \{1, \ldots, (q^2+1)/2\}. \tag{2.32}$$

Теперь все аргументы косинусов в (2.32) принадлежат отрезку $[0,\pi]$ и рационально кратны числу π. Поэтому к равенству (2.32) мы можем применить предложение 1.2.

Для произвольных последовательностей a и b будем писать $a \sim b$ и говорить, что a *эквивалентна* b, если a получается из b перестановкой членов.

Согласно предложению 1.2 последовательность $(m_1\alpha, m_2\alpha, m_3\alpha, m_4\alpha)$ эквивалентна некоторой последовательности $a := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, указанной в одном из п. (1)–(7) этого предложения.

Так как $\alpha = \pi/((q^2+1)/2)$, где $(q^2+1)/2$ нечётно, то ни одно из четырёх слагаемых в (2.32) не равно нулю. Поэтому последовательность a не может иметь тип (2) или (3) предложения 1.2.

Предположим, что a — одного из типов (4)–(7). Тогда при некотором $i \leq 4$ число $m_i\alpha = 2m_i\pi/(q^2+1)$ должно совпадать с $\pi/3$ или $2\pi/3$, и поэтому q^2+1 должно делиться на 3. Но это невозможно ни при каком q (если $q = 3k \pm 1$, то $q^2+1 = 9k^2 \pm 6k + 2$ не делится на 3).

Таким образом, a есть последовательность типа (1) предложения 1.2. В этом случае сумма (2.32), а следовательно, и сумма (2.29) распадается на две равные нулю подсуммы, состоящие из двух слагаемых. Возможны лишь следующие три варианта.

1. Пусть $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q^2+1} + \cos\dfrac{2qk_1\pi}{q^2+1} = 0$. По лемме 1.1 $(q^2+1)/2$ делит $(q\pm1)k_1$ и, следовательно, делит k_1, так как $((q^2+1)/2, q\pm1) = 1$. Но тогда $2k_1/(q^2+1) = s \in \mathbb{N}$, $2qk_1/(q^2+1) = qs \in \mathbb{N}$, причём числа s и qs имеют одну и ту же чётность, и потому $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q^2+1} + \cos\dfrac{2qk_1\pi}{q^2+1} = \cos s\pi + \cos qs\pi = \pm 2 \neq 0$, в противоречие с предположением.

2. Пусть $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q^2+1} + \varepsilon\cos\dfrac{2k_2\pi}{q^2+1} = 0$. Тогда по лемме 1.1 $(q^2+1)/2$ делит $k_1 \pm k_2$, а по лемме 1.2 $\cos\dfrac{2qk_1\pi}{q^2+1} - (-\varepsilon)^q\cos\dfrac{2qk_2\pi}{q^2+1} = 0$, т. е. $\cos\dfrac{2qk_1\pi}{q^2+1} + \varepsilon\cos\dfrac{2qk_2\pi}{q^2+1} = 0$. Из первого и последнего равенств по лемме 1.2 для любого $i \in \mathbb{N}$ получаем

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q^2+1} = (-\varepsilon)^i\cos\frac{2ik_2\pi}{q^2+1}, \ \cos\frac{2qik_1\pi}{q^2+1} = (-\varepsilon)^i\cos\frac{2qik_2\pi}{q^2+1},$$

и поэтому

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q^2+1} + \cos\frac{2qik_1\pi}{q^2+1} - (-\varepsilon)^i\Big(\cos\frac{2ik_2\pi}{q^2+1} + \cos\frac{2qik_2\pi}{q^2+1}\Big) = 0,$$

т. е. $\chi_1^{(k_1)}(g) = \pm\chi_1^{(k_2)}(g)$ для всех $g \in B_1$, а следовательно, и для всех $g \in G$, поскольку, как видно из таблицы характеров, $\chi_1^{(k_1)}(g) = \pm\chi_1^{(k_2)}(g)$ для всех $g \in G \setminus B_1$.

Таким образом, равенство $\cos\dfrac{2k_1\pi}{q^2+1}+\cos\dfrac{2k_1\pi}{q^2+1}=0$, а следовательно, и равносильное ему условие "$(q^2+1)/2$ делит $k_1\pm k_2$" достаточно для полупропорциональности характеров $\chi_1^{(k_1)}$ и $\chi_1^{(k_2)}$.

3. Остаётся рассмотреть случай, когда

$$\cos\frac{2k_1\pi}{q^2+1}+\varepsilon\cos\frac{2qk_2\pi}{q^2+1}=0. \tag{2.33}$$

Заметим сначала, что это условие является достаточным для полупропорциональности характеров $\chi_1^{(k_1)}$ и $\chi_1^{(k_2)}$. Действительно, согласно лемме 1.2 из (2.34) следует, что для любого $i\in\mathbb{N}$ $\cos\dfrac{2ik_1\pi}{q^2+1}=(-\varepsilon)^i\cos\dfrac{2qik_2\pi}{q^2+1}$, откуда снова по лемме 1.2 $\cos\dfrac{2qik_1\pi}{q^2+1}=(-\varepsilon)^{iq}\cos\dfrac{2q^2ik_2\pi}{q^2+1}=(-\varepsilon)^i\cos\dfrac{2((q^2+1)-1)ik_2\pi}{q^2+1}=(-\varepsilon)^i\cos\dfrac{2q^2ik_2\pi}{q^2+1}$. Из этих равенств следует, что

$$\cos\frac{2ik_1\pi}{q^2+1}+\cos\frac{2qik_1\pi}{q^2+1}-(-\varepsilon)^i\Big(\cos\frac{2ik_2\pi}{q^2+1}+\cos\frac{2qik_2\pi}{q^2+1}\Big)=0,$$

т. е. $\chi_1^{(k_1)}(g)=\pm\chi_1^{(k_2)}(g)$ для всех $g\in B_1$, а следовательно, как уже отмечалось выше, и для всех $g\in G$.

По лемме 1.1 условие (2.33) равносильно условию "q^2+1 делит $k_1\pm qk_2$", которое можно записать также в эквивалентной форме "q^2+1 делит $qk_1\pm k_2$", что следует при любом $\mu=\pm1$ из равенства "$(k_1+\mu qk_2)q=k_1q+\mu k_2q^2=k_1q+\mu k_2(q^2+1)-\mu k_2$".

Таким образом, условие (2.33), а следовательно, и равносильное ему условие "$(q^2+1)/2$ делит $qk_1\pm k_2$", достаточно для полупропорциональности характеров $\chi_1^{(k_1)}$ и $\chi_1^{(k_2)}$.

Итак, характеры φ и ψ из $\widetilde{1}$ полупропорциональны если и только если $\{\varphi,\psi\}$ есть $\{\chi_1^{(k_1)},\chi_1^{(k_2)}\}$, где $(q^2+1)/2$ делит $k_1\pm k_2$ или $k_1q\pm k_2$ и $k_1\neq k_2$.

Теорема 1 доказана.

3. Гипотеза о строении множества R_1

Приведём несколько примеров, которые позволяют предположить общий вид множества R_1 при произвольном q ($|R_1|=(q^2-1)/4$). При этом мы будем использовать следующую, легко доказываемую, формулу

$$\chi_1^{(|aq+b|)}=\chi_1^{(|bq-a|)}\ \text{при любых}\ a,b\in\mathbb{N}, \tag{3.1}$$

которая позволяет удалять из R_1 "лишние" числа. Оставшиеся числа k должны давать различные характеры $\chi_1^{(k)}$. Вычисления дают следующие результаты (промежутки между числами оставлены не зря):

при $q=5$ $\quad R_1=\{1,2,3,4,\ \ 7,8\}$,
при $q=7$ $\quad R_1=\{1,2,3,4,5,6,\ \ 9,10,11,12,\ \ 17,18\}$,
при $q=9$ $\quad R_1=\{1,2,3,4,6,7,8,\ \ 11,12,13,14,15,16,\ \ 21,22,23,24,\ \ 31,32\}$,
при $q=11$ $\quad R_1=\{1,2,3,4,6,7,89,10,\ \ 13,14,15,16,17,18,19,20,\ \ 25,26,27,28,29,30,$
$37,38,39,40,\ \ 49,50\}$.

Эти примеры (и некоторые аналитические выкладки) позволяют предположить, что построение множества R_1 при произвольном q можно провести следующим образом.

Предполагаемое правило построения множества R_1. Числа ряда $1,2,\dots,(q-1)^2/2$ разделяем на $(q-1)/2$ групп по $q-1$ чисел (см. следующий пример). Затем вычёркиваем во второй группе первые 2 числа, в 3-й группе первые 4 числа, и далее в каждой следующей группе на 2 числа больше, чем в предыдущей, так что в последней группе вычёркиваем первые $q-3$ числа (остаются в ней лишь $(q-1)^2/2-1$ и $(q-1)^2/2$). В итоге получаем множество R_1.

П р и м е р. Пусть $q=9$. Расположим группы чисел одна под другой (вместо вычёркивания мы применим надчёркивание):

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\
\overline{9}, & \overline{10}, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, \\
\overline{17}, & \overline{18}, & \overline{19}, & \overline{20}, & 21, & 22, & 23, & 24, \\
\overline{25}, & \overline{26}, & \overline{27}, & \overline{28}, & \overline{29}, & \overline{30}, & 31, & 32.
\end{array}$$

В этом построении при любом q вычёркиваются во второй строке два числа q и $q+1$, в третьей строке — 4 числа $2q-1, 2q, 2q+1, 2q+2$, в 4-й строке — $3q-2, 3q-1, 3q, 3q+1, 3q+2, 3q+3$, $\ldots$, в $(m+1)$-й строке — $2m$ чисел $mq-(m-1), \ldots, mq+m$. Законность удаления всех этих чисел легко доказывается с помощью (3.1).

Отметим некоторые очевидные следствия сформулированного выше правила построения множества R_1:

(1) наибольшим элементом в R_1 является число $(q-1)^2/2$,

(2) сумма любых двух элементов из R_1 отлична от $(q^2+1)/2$ (следовательно, ввиду (1) не делится на $(q^2+1)/2$),

(3) выражение “или $k_1 \pm k_2$” в п. (1) теоремы 1 может быть опущено (что легко следует из (1) и (2)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В.А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 379 с.
2. **Белоногов В.А.** Взаимодействия и D-блоки в конечных группах // Подгрупповая структура групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1988. С. 4–44.
3. **Белоногов В.А.** О малых взаимодействиях в конечных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 3–18.
4. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{GL}_3(q)$, $\mathrm{GU}_3(q)$, $\mathrm{PGL}_3(q)$ и $\mathrm{PGU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 17–47.
5. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{SL}_3(q)$, $\mathrm{SU}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$ и $\mathrm{PSU}_3(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 3–27.
6. **Белоногов В.А.** Малые взаимодействия в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ при чётных q // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 19–37.
7. **Белоногов В.А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 299–314.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Srinivasan B.** The characters of the finite symplectic group $\mathrm{Sp}(4,q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 131, no. 2. P. 488–525.
10. **Przygocki A.** Schur indices of Symplectic groups // Commun. Algebra. 1982. Vol. 10, no. 3. P. 279–310.
11. **Белоногов В.А.** К гипотезе о полупропорциональных характерах в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. Р. 30–46.
12. **Wlodarski L.** On the equation $\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4=0$ // Ann. Univ. Budapestiniensis. 1969. Vol. 12. P. 147–156.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 22.05.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977

ПОИМКА ДВУХ СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

М. Н. Виноградова, Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

Рассматривается линейная нестационарная задача конфликтного взаимодействия группы преследователей и двух убегающих с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников и при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентой функцией, а убегающие используют одно и то же управление. Получены достаточные условия поимки двух убегающих. Приведены иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, рекуррентная функция.

M. N. Vinogradova, N. N. Petrov, N. A. Solov'eva. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games.

A linear nonstationary problem of a conflict interaction of a group of pursuers with two evaders with equal dynamic and inertial capabilities of all the participants is considered under the assumptions that the fundamental matrix of the homogeneous system is a recurrent function and the evaders use the same control. Sufficient conditions for the capture of the evaders are obtained. Illustrative examples are given.

Keywords: differential game, group pursuit, recurrent function.

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–6]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия, когда в игре участвуют две группы – преследователей и убегающих. Целью группы преследователей является поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [4–10].

К настоящему времени работ, посвященных условиям поимки двух и более убегающих, достаточно мало. В работе [10] рассмотрена линейная задача преследования группой преследователей двух убегающих. В работе [11] получены достаточные условия поимки двух жестко скоординированных убегающих в задаче простого преследования с равными возможностями всех участников.

В данной работе получены достаточные условия поимки группой преследователей двух убегающих, использующих одно и то же управление в линейной дифференциальной игре с равными возможностями всех участников и при условии, что фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной функцией. Работа примыкает к исследованиям [11–15].

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i,\ u_i \in V. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00195) и программы Президиума РАН № 29 "Математическая теория управления".

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i,\ y_j,\ u_i,\ v \in \mathbb{R}^k,\ A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функции порядка k, $i \in I = \{1, \ldots n\}, j = 1, 2,\ V$ — строго выпуклый компакт с гладкой границей. При $t = t_0$ заданы начальные условия $x_i(t_0) = x_i^0, y_j(t_0) = y_j^0$, причем $x_i^0 \neq y_j^0$.

Вместо систем (1.1) и (1.2) рассмотрим систему

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v, \quad u_i, v \in V, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 1. Будем говорить, что задана квазистратегия $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i, если определено отображение $\mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальному состоянию $z^0 = (z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающих E_j измеримую функцию $u_i(t) = \mathcal{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$ со значениями в V.

Определение 2. В игре Γ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$, квазистратегии $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0]$, найдутся номера $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что $z_{p1}(\tau_1) = 0, z_{q2}(\tau_2) = 0$.

Определение 3 [16]. Функция $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t,\ a \in \mathbb{R}^1$ существуют $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Если можно выбрать $\tau(t)$ не зависящим от t для всех t, то функция $f(t)$ называется почти периодической.

Определение 4. Функция $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

2. Вспомогательные результаты

Определение 5 [17]. Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s.$$

Через $\Phi(t)$ обозначим фундаментальную матрицу системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega,$$

причем $\Phi(t_0)$ совпадает с единичной матрицей. Будем предполагать в дальнейшем, что выполнено

Предположение 1. *$\Phi(t)$ является рекуррентной на $[t_0, \infty)$ функцией, а $\dot{\Phi}(t)$ ограничена на $[t_0, \infty)$.*

Лемма 1. *Пусть векторы $b_1, \ldots, b_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого набора $(c_1, \ldots, c_s)$, $\|c_l - b_l\| < \delta_0, l = 1, \ldots, s$, векторы $c_1, \ldots, c_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем рассуждать от противного. Пусть $\{\delta_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность положительных вещественных чисел такая, что $\lim\limits_{l\to\infty}\delta_l = 0$. Тогда для каждого l существует набор векторов $(c_1^l, \ldots, c_s^l)$, который не образует положительный базис, и при этом $\|c_j^l - b_j\| < \delta_l$ для всех j. Из результатов работы [17] следует, что существует вектор p_l, $\|p_l\| = 1$, и такой, что

$$(c_j^l, p_l) \leqslant 0 \text{ для всех } j. \tag{2.4}$$

Из последовательности $\{p_l\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что $p_l \to p_0$. Переходя в (2.4) к пределу при $l \to \infty$, получаем $(b_j, p_0) \leqslant 0$ для всех j, причем $\|p_0\| = 1$. Последнее неравенство противоречит тому, что векторы $b_1, \ldots, b_s$ образуют положительный базис [17]. Лемма доказана.

Определим функции

$$\lambda(v,h) = \sup\{\lambda\colon \lambda \geqslant 0, -\lambda h \in V - v\} \text{ при } h \neq 0,$$

$$G(t,h) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s)h)ds.$$

Обозначим через $\mathrm{Int}X, \mathrm{co}X$ соответственно внутренность и выпуклую оболочку множества X, $D_\varepsilon(a) = \{y \mid \|y-a\| < \varepsilon\}$.

Лемма 2 [4]. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Следующие утверждения равносильны*:

1. *Векторы $b_1, \ldots, b_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$*;
2. $0 \in \mathrm{Intco}\{b_1, \ldots, b_s\}$;
3. $\min\limits_{v\in V}\max\limits_{i} \lambda(v, b_i) > 0$.

Лемма 3. *Пусть векторы $b_1, \ldots, b_s$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$. Тогда существует $T > t_0$ такое, что для любой измеримой функции $v\colon [t_0, T] \to V$ справедливо неравенство $\max\limits_{p} G(T, b_p) \geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $0 \notin D_{2\varepsilon}(b_p)$ для всех $p \in I_s = \{1, \ldots, s\}$ и для любых $c_p \in D_{2\varepsilon}(b_p)$ набор векторов $c_1, \ldots, c_s$ образовывал положительный базис $\mathbb{R}^k$. Такое ε существует в силу леммы 1.

Определим два множества:

$$\Omega = \big\{t \geqslant t_0 \bigm| \Phi(t)b_p \in D_{2\varepsilon}(b_p) \text{ для всех } p\big\},$$
$$Q = \big\{q \in I_s \bigm| \Phi(t)b_q \in D_{2\varepsilon}(b_q) \text{ для всех } t \geqslant t_0\big\}.$$

$\mu(G)$ — мера Лебега множества $G \subset \mathbb{R}^1$. Возможны два случая:

1. $Q = I_s$. Тогда $\mu(\Omega) = \infty$.

2. $Q \neq I_s$. Будем считать, что $Q = \emptyset$, т.е. значение каждой из функций $\Phi(t)b_p$ в некоторый момент не принадлежит шару $D_{2\varepsilon}(b_p)$. Докажем, что и в этом случае $\mu(\Omega) = \infty$.

Поскольку функции $\Phi(t)b_p$ являются рекуррентными, то по $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого j существует $\tau_j(t_0) \in [t_0 + T(\varepsilon)j; t_0 + T(\varepsilon)j + T(\varepsilon)]$, для которых выполнено неравенство

$$\|\Phi(t_0 + \tau_j(t_0))b_p - \Phi(t_0)b_p\| < \varepsilon$$

для всех p.

Пусть

$$\Omega_j = \big\{t \bigm| t \in [\tau_j(t_0), \tau_{j+1}(t_0)), \Phi(t_0+t)b_p \in D_{2\varepsilon}(b_p) \text{ для всех } p\big\},$$

$$\operatorname{dist}(D_1, D_2) = \inf_{d_1 \in D_1, d_2 \in D_2} \|d_1 - d_2\|.$$

По условию функции $\dot\Phi(t)b_p$ равномерно ограничены, т. е. найдется такое положительное число M, что

$$\max_{t \in [t_0, \infty)} \|\dot\Phi(t)b_p\| \leqslant M \text{ для всех } p.$$

Из теоремы о среднем следует, что для любых $t_2 > t_1 > t_0$ справедливо неравенство

$$\|\Phi(t_2)b_p - \Phi(t_1)b_p)\| \leqslant \sup_{t \in [t_1, t_2]} \|\dot\Phi(t)b_p\| \cdot |t_2 - t_1| \leqslant M|t_2 - t_1|.$$

Поэтому если $\|\Phi(t_2)b_p - \Phi(t_1)b_p)\| \geqslant L$, то справедливо неравенство $t_2 \geqslant t_1 + L/M$.
Так как

$$\operatorname{dist}(\partial D_\varepsilon(b_p), \partial D_{2\varepsilon}(b_p)) = \varepsilon,\ \Phi(t_0 + \tau_j(t_0))b_p \in \operatorname{Int} D_\varepsilon(b_p)$$

для всех p, j, то $[\tau_j(t_0), \tau_j(t_0) + \varepsilon/M] \subset \Omega_j$ для всех j. Следовательно, $\mu(\Omega) \geqslant \mu\big(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Omega_j\big) = \infty$. В силу леммы 2 для любого $d = (h_1, h_2, \ldots, h_s) \in D = D_{2\varepsilon}(b_1) \times D_{2\varepsilon}(b_2) \times \cdots D_{2\varepsilon}(b_s)$ справедливо неравенство $\rho(d) = \min\limits_{v \in V} \max\limits_{p} \lambda(v, h_p) > 0$.

Докажем, что функция ρ непрерывна на D, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех d, удовлетворяющих неравенству $|d - d^*| < \delta$, выполнено $|\rho(d) - \rho(d^*)| < \varepsilon$. Рассмотрим разность

$$|\rho(d) - \rho(d^*)| = \Big|\min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i) - \min_{v \in V} \max_{i \in I} \lambda(v, h_i^*)\Big|$$
$$\leqslant \max_{v \in V} \Big|\max_{p} \lambda(v, h_p) - \max_{p} \lambda(v, h_p^*)\Big| \leqslant \max_{v \in V} \max_{p} \big|\lambda(v, h_p) - \lambda(v, h_p^*)\big|.$$

По лемме [4, лемма 1.3.13] функция λ непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех h_p, удовлетворяющих неравенству $|h_p - h_p^*| < \delta$, выполнено $|\lambda(v, h_p) - \lambda(v, h_p^*)| < \varepsilon$. Следовательно, функция ρ непрерывна на D.

Так как D компакт, то получим

$$r = \min_{d \in D} \min_{v \in V} \max_{p} \lambda(v, h_p) = \min_{d \in D} \rho(d) > 0.$$

Таким образом, величина

$$\delta = \min_{t \in \Omega} \min_{v \in V} \max_{p} \lambda(v, \Phi(t)b_p) \geqslant \min_{d \in D} \min_{v \in V} \max_{p} \lambda(v, h_p) = r > 0.$$

Далее

$$\max_p G(t, b_p) = \max_p \int_{t_0}^{t} \lambda(v(s), \Phi(s)b_p)\, ds \geqslant \max_p \int_{[t_0, t] \cap \Omega} \lambda(v(s), \Phi(s)b_p)\, ds$$
$$\geqslant \frac{1}{n} \int_{[t_0, t] \cap \Omega} \sum_p \lambda(v(s), \Phi(s)b_p)\, ds \geqslant \frac{1}{n} \int_{[t_0, t] \cap \Omega} \delta\, ds = \frac{\delta}{n} \mu([t_0, t] \cap \Omega).$$

Отметим, что $\lim\limits_{t \to \infty} \mu([t_0, t] \cap \Omega) = \infty$, так как $\mu(\Omega) = \infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия

$$\frac{\delta}{n} \mu([t_0, T] \cap \Omega) \geqslant 1,$$

и некоторого q выполнено $G(T, b_q) \geqslant 1$. Лемма доказана.

3. Достаточные условия разрешимости задачи преследования

Теорема. *Пусть существуют множества* $J_1, J_2 \subset I, I_1, I_2 \subset I \setminus (J_1 \cup J_2)$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ *такие, что наборы*

$$\{z_{l1}^0, l \in J_1, -c\},\ \{z_{l2}^0, l \in J_2, c\},$$
$$\{z_{l1}^0, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{l2}^0, l \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{l1}^0, l \in I_1, z_{l2}^0, l \in I_2\}$$

образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, *где* $c = y_1^0 - y_2^0$. *Тогда в игре* Γ *происходит поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\delta_0 > 0$ такое, что наборы

$$\{z_{l1}^0, l \in J_1, -c\},\ \{z_{l2}^0, l \in J_2, c\},$$
$$\{z_{l1}^0, l \in J_1 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{l2}^0, l \in J_2 \setminus (J_1 \cap J_2), z_{l1}^0, l \in I_1, z_{l2}^0, l \in I_2\}$$

удовлетворяют условиям леммы 1.

Возможны два случая.

1. $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. Поскольку $\{z_{l1}^0,\ l \in J_1,\ -c\}$, $\{z_{l2}^0,\ l \in J_2,\ c\}$ образуют положительный базис $\mathbb{R}^k$, то существуют положительные числа $\gamma_{l1},\ l \in J_1, \gamma_{l2},\ l \in J_2$ такие, что

$$\sum_{l \in J_1} \gamma_{l1} z_{l1}^0 - c = 0,\ \sum_{l \in J_2} \gamma_{l2} z_{l2}^0 + c = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{l \in J_1} \gamma_{l1} z_{l1}^0 + \sum_{l \in J_2} \gamma_{l2} z_{l2}^0 = 0.$$

Следовательно, набор $\{z_{l1}^0,\ l \in J_1,\ z_{l2}^0,\ l \in J_2\}$ образует положительный базис $\mathbb{R}^k$. Определим момент $T_0 = T(z^0)$:

$$T(z^0) = \min\big\{T \geqslant t_0 \ \big|\ \inf_{v(\cdot)} \max\{\max_{l \in J_1} G(T, z_{l1}^0), \max_{l \in J_2} G(T, z_{l2}^0)\} \geqslant 1\big\}.$$

Пусть $v(\tau), t_0 \leqslant \tau \leqslant T_0$ — произвольное допустимое управление убегающих и $t_1 \geqslant t_0$ — наименьший положительный корень функции

$$F(t) = 1 - \max\{\max_{l \in J_1} G(t, z_{l1}^0), \max_{l \in J_2} G(t, z_{l2}^0\}.$$

Отметим, что в силу леммы 3 момент t_1 существует и $t_1 \leqslant T_0$. Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_l(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_{l1}^0) \Phi(t) z_{l1}^0, \quad l \in J_1,$$
$$u_l(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_{l2}^0) \Phi(t) z_{l2}^0, \quad l \in J_2.$$

Управления остальных преследователей задаем произвольно. Считаем, что $\lambda(v(t), \Phi(t) z_{sj}^0) = 0$ для всех $t \in [t_1, T_0], s \in J_1 \cup J_2$.

Из системы (1.3) получаем

$$z_{l1}(t) = \Phi(t) z_{l1}^0 h_{l1}(t), \quad l \in J_1, \quad z_{l2}(t) = \Phi(t) z_{l2}^0 h_{l2}(t), \quad l \in J_2,$$

где $h_{ij}(t) = 1 - G(t, z_{ij}^0)$.

Из леммы 3 следует, что существует номер $r \in J_1 \cup J_2$ такой, что либо $r \in J_1$ и $h_{r1}(T_0) = 0$, либо $r \in J_2$ и $h_{r2}(T_0) = 0$, причем $h_{sj}(T_0) \geqslant 0$. Поэтому в момент T_0 происходит поимка по крайней мере одного из убегающих. Предположим, что $r \in J_1$. Поскольку $\Phi(t)$ является рекуррентной функцией, то по любому $\varepsilon > 0$ существует момент $T_1 > T_0$ такой, что $\|\Phi(T_1) - \Phi(t_0)\| < \varepsilon$. Выберем ε так, чтобы $\varepsilon \max\{\max\limits_{ij} \|z_{ij}^0\|, \|c\|\} < \delta_0$.

Задаем управления преследователей на $[T_0, T_1]$ полагая $u_i(t) = v(t)$. Тогда

$$z_{l1}(T_1) = \Phi(T_1) z_{l1}^0 h_{l1}(T_0), \quad l \in J_1, \quad z_{l2}(T_1) = \Phi(T_1) z_{l2}^0 h_{l2}(T_0), \quad l \in J_2.$$

Кроме того, $z_{r2}(T_1) = x_r(T_1) - y_1(T_1) + y_1(T_1) - y_2(T_2) = \Phi(T_1)c$. Поэтому

$$\|z_{lj}(T_1) - z_{lj}^0\|\, h_{lj}(T_0) = \|\Phi(T_1) z_{lj}^0 h_{lj}(T_0) - z_{lj}^0 h_{lj}(T_0)\| < \delta_0, \quad \|z_{r2}(T_1) - c\| < \delta_0.$$

Из условия теоремы и леммы 1 следует, что набор $\{z_{l2}^0 h_{l2}(T_1), l \in J_2, c\}$ образует положительный базис. Поэтому положительный базис образует набор $\{z_{l2}(T_1), l \in J_2, z_{r2}(T_1)\}$. В силу [15] преследователи $\{P_l, l \in J_2, P_r\}$ ловят убегающего E_2. Таким образом, в игре Γ происходит поимка.

2. $J_1 \cap J_2 \neq \varnothing$. Пусть $J = J_1 \cap J_2$, $I_1^0 = I_1 \cup (J_1 \setminus J)$, $I_2^0 = I_2 \cup (J_2 \setminus J)$. Определим момент $T_0 = T(z^0)$ следующим образом:

$$T(z^0) = \min\big\{T \geqslant t_0 \;\big|\; \inf_{v(\cdot)} \max\{\max_{l \in I_1^0} G(T, z_{l1}^0),\ \max_{l \in I_2^0} G(T, z_{l2}^0)\} \geqslant 1\big\}.$$

В силу леммы 2 $T(z^0) < \infty$. Пусть $v(\tau), t_0 \leqslant \tau \leqslant T_0$ — произвольное допустимое управление убегающих и $t_1 \geqslant t_0$ — наименьший положительный корень функции

$$F(t) = 1 - \max\big\{\max_{l \in I_1^0} G(t, z_{l1}^0) ds, \max_{l \in I_2^0} G(t, z_{12}^0)\big\}.$$

Отметим, что в силу леммы 3 момент t_1 существует и $t_1 \leqslant T_0$. Задаем управление преследователей P_i следующим образом:

$$u_l(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_{l1}^0) \Phi(t) z_{l1}^0, \quad l \in I_1^0,$$
$$u_l(t) = v(t) - \lambda(v(t), \Phi(t) z_{l2}^0) \Phi(t) z_{l2}^0, \quad l \in I_2^0,$$
$$u_l(t) = v(t), \quad l \in J.$$

Управления остальных преследователей задаем произвольно. Считаем, что $\lambda(v(t), \Phi(t) z_{sj}^0) = 0$ для всех $t \in [t_1, T_0], s \in I_1^0 \cup I_2^0$.

Из системы (1.3) получаем

$$z_{l1}(t) = \Phi(t) z_{l1}^0 h_{l1}(t), \quad l \in I_1^0,$$
$$z_{l2}(t) = \Phi(t) z_{l2}^0 h_{l2}(t), \quad l \in I_2^0,$$
$$z_{l1}(t) = \Phi(t) z_{l1}^0, \quad z_{l2}(t) = \Phi(t) z_{l2}^0, \quad l \in J,$$

где $h_{ij}(t) = 1 - G(t, z_{ij}^0)$. Из леммы 3 следует, что существует номер r такой, что либо $r \in I_1^0$ и $h_{r1}(T_0) = 0$, либо $r \in I_2^0$ и $h_{r2}(T_0) = 0$. Пусть $r \in I_1^0$ и $h_{r1}(T_0) = 0$. Тогда $z_{r1}(T_0) = 0$ и $z_{r2}(T_0) = \Phi(T_0)c$. Поскольку функция $\Phi(t)$ является рекуррентной, то существует момент $T_1 > T_0$ такой, что

$$\|\Phi(T_1) z_{l2}^0 h_{l2}(T_0) - z_{l2}^0 h_{l2}(T_0)\| < \delta_0, \quad l \in I_2^0,$$
$$\|\Phi(T_1) z_{l2}^0 - z_{l2}^0\| < \delta_0, \quad l \in J,$$
$$\|\Phi(T_1)c - c\| < \delta_0.$$

Поэтому набор $\{z_{l2}(T_1), l \in J_2, \Phi(T_1)c\}$ образует положительный базис. Следовательно, положительный базис образует набор $\{z_{l2}(T_1), l \in J_2, z_{r2}(T_1)\}$. В силу результатов работы [15] преследователи $\{P_l, l \in J_2, P_r\}$ ловят убегающего E_2. Тем самым в игре Γ происходит поимка. Теорема доказана.

4. Примеры

П р и м е р 1. Пусть $k=2, n=5, t_0=0$,

$$x_1^0=(-2;3),\ x_2^0=(2;3),\ x_3^0=(1;4),\ x_4^0=(2;-3), x_5^0=(6;-1),\ y_1^0=(0;2),\ y_2^0=(3;0),$$

$A(t)=\omega(t)E$, где

$$\omega(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } t\in[0,2\pi], \\ \sin t, & \text{если } t\notin[0,2\pi]. \end{cases}$$

В работе [15] доказано, что функция $\Phi(t)$ является рекуррентной. В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества $J_1=\{1,2\}, J_2=\{4,5\}, I_1=\{3\}, I_2=\varnothing$. Тогда наборы векторов

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, -c\},\ \{z_{42}^0, z_{52}^0, c\},\ \{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{42}^0, z_{52}^0, z_{31}^0\}$$

образуют положительный базис $\mathbb{R}^2$. Следовательно, в игре Γ происходит поимка.

П р и м е р 2. Пусть $k=3, n=6, t_0=0$, $A(t)$ — нулевая матрица,

$$x_1^0=(-3;0;0),\ x_2^0=(0;3;3),\ x_3^0=(2;2;1),\ x_4^0=(-2;-6;6),$$
$$x_5^0=(1;2;4),\ x_6^0=(2;3;-2),\ y_1^0=(0;1;0),\ y_2^0=(0;0;2).$$

В качестве J_1, J_2, I_1, I_2 возьмем множества

$$J_1=\{1,2,3\},\ J_2=\{2,3,4\},\ I_1=\{5\},\ I_2=\{6\}.$$

Получаем, что наборы векторов

$$\{z_{11}^0, z_{21}^0, z_{31}^0, -c\},\ \{z_{22}^0, z_{32}^0, z_{42}^0, c\},\ \{z_{11}^0, z_{42}^0, z_{51}^0, z_{62}^0\}$$

образуют положительный базис и, следовательно, в игре Γ происходит поимка.

П р и м е р 3. Пусть $A(t)$ — постоянная марица порядка k, все собственные числа которой являются простыми и чисто мнимыми. Тогда функция $\Phi(t)$ является рекуррентной и поэтому предположение 1 выполнено автоматически. Следовательно, если начальные позиции игроков удовлетворяют условию теоремы, то в игре Γ происходит поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
4. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
5. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
6. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
7. **Петров Н.Н., Петров Н.Никандр.** О дифференциальной игре “казаки-разбойники” // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. XIX, № 8. С. 1246–1254.
8. **Сатимов Н., Маматов М.Ш.** О задаче преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // Докл. АН Уз.ССР. 1983. № 4. С. 3–6.
9. **Вагин Д.А., Петров Н.Н.** Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.

10. **Григоренко Н.Л.** Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 5. С. 1051–1954.
11. **Виноградова М.Н.** О поимке двух убегающих в нестационарной задаче простого преследования // Мат. теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, № 1. С. 21–31.
12. **Банников А.С., Петров Н.Н.** К нестационарной задаче группового преследования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 40–51.
13. **Петров Н.Н.** К нестационарной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Мат. теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, № 4. С. 74–83.
14. **Вагин Д.А., Петров Н.Н.** Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, № 2. С. 234–241.
15. **Соловьева Н.А.** Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Мат. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, № 1. С. 81–90.
16. **Зубов В.И.** Теория колебаний. М.: Высш. шк, 1979. 200 с.
17. **Петров Н.Н.** Об управляемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 4. С. 606–617.

Поступила 01.09.2012

Виноградова Марина Николаевна,
соискатель
Удмуртский государственный университет
e-mail: mnvinogradova@mail.ru

Петров Николай Никандрович,
д-р физ.-мат. наук
декан
Удмуртский государственный университет
e-mail: npetrov@udmnet.ru

Соловьева Надежда Александровна
аспирант
Удмуртский государственный университет
e-mail: solov_na@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.9

К ЗАДАЧАМ ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. И. Воротников, Ю. Г. Мартышенко

Для нелинейных нестационарных систем дифференциальных уравнений с последействием рассматривается задача устойчивости по части переменных как нулевого положения равновесия, так и “частичного” положения равновесия. Делаются более общие, в сравнении с известными, допущения относительно значений супремум-нормы компонент начальной вектор-функции, соответствующих “неконтролируемым” переменным. Получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости указанного типа в контексте метода функционалов Ляпунова — Красовского, обобщающие ряд известных результатов.

Ключевые слова: системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием, частичная устойчивость, метод функционалов Ляпунова — Красовского.

V. I. Vorotnikov, Yu. G. Martyshenko. On problems of partial stability for delay systems.

The problem of stability with respect to a part of variables of both zero equilibrium state and “partial” equilibrium state is considered for nonlinear nonstationary delay systems of differential equations. As compared to known assumptions, more general assumptions are made for the values of the supremum norm of components of the initial vector function that correspond to the “uncontrolled” variables. Within the method of Lyapunov–Krasovskii functionals, new conditions for stability and asymptotic stability of this type are obtained, which generalize a number of existing results.

Keywords: delay systems of functional differential equations, partial stability, method of Lyapunov–Krasovskii functionals.

Введение

Фундаментальные результаты Н. Н. Красовского [1], С. Н. Шиманова [2], Дж. К. Хейла [3] по теории устойчивости систем с последействием, основанные на функциональной трактовке понятия решений данного класса систем и использовании вспомогательных функционалов (функционалов Ляпунова — Красовского), получили к настоящему времени существенное развитие. Также существенное развитие получили идеи Н. Н. Красовского [1] и Б. С. Разумихина [4], связанные с использованием конечномерных функций Ляпунова для анализа устойчивости систем с последействием. Укажем, в частности, на недавние работы [5–7], где можно найти библиографию.

Отметим, что в работах [1–4] и большинстве последующих публикаций устойчивость рассматривается по отношению ко всем переменным, определяющим состояние системы. Однако для многих важных в приложениях случаев представляет интерес более общая задача: об устойчивости по отношению не ко всем, а только к некоторой заданной части фазовых переменных. Такая задача стала систематически исследоваться для систем обыкновенных дифференциальных уравнений начиная с работы В. В. Румянцева [8]. Ряд последующих результатов и библиографию по данной проблеме можно найти, например, в монографиях [9–12].

Начиная с работ А. Халаная [13] и К. Кордуняну [14] метод функционалов Ляпунова — Красовского стал использоваться при исследовании устойчивости по части переменных систем с последействием; см. по данному направлению исследований обзорные работы [6; 15].

В определении устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений [8] предполагается, что область начальных возмущений является достаточно малой окрестностью нулевого положения равновесия. Наряду с этой постановкой задачи изучаются также случаи [9–12; 16] когда начальные возмущения, являясь малыми по исследуемой на устойчивость части переменных, могут быть в то же время большими по одной части и произвольными по другой (оставшейся) части "неконтролируемых" переменных. Такие задачи тесно связаны с задачами устойчивости "частичных" положений равновесия [9–12; 16; 17] или, в более общем виде, с задачами устойчивости некомпактных (замкнутых, но неограниченных) множеств [18–20].

С другой стороны, в задачах устойчивости по части переменных "частичных" (нулевых по некоторой части фазовых переменных) положений равновесия также естественно [16] допущение о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, могут быть большими по одной части и произвольными по оставшейся их части.

Далее рассмотренные в работе [16] для случая систем обыкновенных дифференциальных уравнений задачи частичной устойчивости анализируются применительно к системам дифференциальных уравнений с последействием.

Вводятся понятия устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, предполагающие более общие, в сравнении с известными, допущения относительно значений супремум-нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют оставшейся ("неконтролируемой") части переменных. Также вводятся понятия устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия, где аналогичные допущения касаются значений супремум-нормы тех компонент начальной вектор-функции, которые соответствуют переменным, не определяющим данное положение равновесия. Получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости указанного типа в контексте метода функционалов Ляпунова — Красовского, обобщающие ряд известных результатов.

1. Задачи устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия

Пусть $\tau \geq 0$ — заданное действительное число, $\mathbb{R}^n$ — линейное действительное пространство n-мерных векторов $\boldsymbol{x}$ с нормой $|\boldsymbol{x}| = \max|x_i|$ (x_i — i-я компонента вектора $\boldsymbol{x}$), C — банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi}: [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ с стандартной супремум-нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup|\boldsymbol{\varphi}(\theta)|$ $(\theta \in [-\tau, 0]), \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Если $t_0, \beta \in \mathbb{R}_+, \beta > t_0$, то для непрерывной функции $\boldsymbol{x}\colon [t_0 - \tau, \beta) \to \mathbb{R}^n$ определим функцию $\boldsymbol{x}_t \in C$ соотношением $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}(t + \theta)$ $(\theta \in [-\tau, 0])$; под $\boldsymbol{x}'(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Сделаем разбиение $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}^T, \boldsymbol{z}^T)^T$ (T — знак транспонирования), где $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n-m}$ $(1 \leq m \leq n)$. В соответствии с этим разбиением положим $C = C^{\boldsymbol{y}} \times C^{\boldsymbol{z}}$, где $C^{\boldsymbol{y}}$ и $C^{\boldsymbol{z}}$ — банаховы пространства непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi_y}\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{\varphi_z}\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^{n-m}$ с нормами $\|\boldsymbol{\varphi_y}\| = \sup|\boldsymbol{\varphi_y}(\theta)|$ и $\|\boldsymbol{\varphi_z}\| = \sup|\boldsymbol{\varphi_z}(\theta)|$ $(\theta \in [-\tau, 0])$. Для $\boldsymbol{\varphi} \in C$ имеем $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}^T, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}^T)^T$ и $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \max(\|\boldsymbol{\varphi_y}\|, \|\boldsymbol{\varphi_z}\|)$.

1.1. Рассматриваемый класс систем

Рассмотрим нелинейную нестационарную систему функционально-дифференциальных уравнений с последействием [1–3; 21]

$$\boldsymbol{x}'(t) = \mathbf{X}(t, \boldsymbol{x}_t), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0},$$

которую с учетом указанных разбиений представим в виде

$$\boldsymbol{y}'(t) = \mathbf{Y}(t, \boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{z}_t), \quad \boldsymbol{z}'(t) = \mathbf{Z}(t, \boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{z}_t). \tag{1.1}$$

Допустим, что оператор $\mathbf{X}\colon \mathbb{R}_+ \times C \to \mathbb{R}^n$, определяющий правую часть системы (1.1), вполне непрерывен в области

$$G = \mathbb{R}_+ \times C_h^{\boldsymbol{y}} \times C^{\boldsymbol{z}} = \{t \geq 0,\ \|\boldsymbol{\varphi_y}\| < h,\ \|\boldsymbol{\varphi_z}\| < \infty\}, \tag{1.2}$$

и на каждом компактном подмножестве K из области (1.2) выполняется следующее условие Коши — Липшица: существует постоянная $L = L(K)$ такая, что для любых $(t, \boldsymbol{\varphi}_1), (t, \boldsymbol{\varphi}_2) \in K$ выполняется неравенство $|\mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{X}(t, \boldsymbol{\varphi}_1)| \le L\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\|$.

Тогда для каждой точки $t_0, \boldsymbol{\varphi}$ из области (1.2) существует единственное решение $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1.1), продолжимое до границы области $C_h^{\boldsymbol{y}} \times C^{\boldsymbol{z}}$ и непрерывно зависящее от $t_0, \boldsymbol{\varphi}$.

Следуя [21; 22], обозначим $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})$ значение $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ в момент времени t. Существует $\beta > t_0$ такое, что $\boldsymbol{x}(t)$ непрерывна при $t \in [t_0 - \tau, \beta)$, непрерывно дифференцируема при $t \in [t_0, \beta)$ (в момент времени $t = t_0$ — справа) и удовлетворяет при $t \in (t_0, \beta)$ — системе (1.1), а при $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ — начальному условию $\boldsymbol{x}_{t_0}(t_0, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}$. В момент $t = t_0$ будем полагать, что справедливо равенство $\boldsymbol{x}'(t) = \mathbf{X}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$.

Если $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \le h_1 < h$ и $|\boldsymbol{z}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \le H < \infty$, то при сделанных предположениях относительно правой части системы (1.1) $\beta = +\infty$ и соответствующие функции $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})$ определены при всех $t \ge t_0$. Однако при исследовании устойчивости по части переменных (по $\boldsymbol{y}$) нулевого положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.1) условие $|\boldsymbol{z}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \le H < \infty$ при всех $t \ge t_0$ является излишне ограничительным.

С другой стороны, аналогично [3] (см. также [6]) можно обосновать следующее утверждение: если $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}})$ для каждого ограниченного замкнутого подмножества S из $\mathbb{R}_+ \times C_h^{\boldsymbol{y}}$ отображает множество $S \times C^{\boldsymbol{z}}$ в ограниченное множество (в $\mathbb{R}^n$), то неравенство $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \le h_1 < h$ означает, что $\boldsymbol{y}$-компоненты соответствующих решений системы (1.1) определены при всех $t \ge t_0$. Однако при этом $\boldsymbol{z}$-компоненты решений могут быть определены только на конечном интервале времени $t \in [t_0 - \tau, \beta), \beta < +\infty$ и $|\boldsymbol{z}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \to \infty$ при $t \to \beta$.

В результате при исследовании устойчивости по части переменных (по $\boldsymbol{y}$) нулевого положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.1) вводится предположение о $\boldsymbol{z}$-продолжимости решений: решения системы определены при всех тех $t \ge t_0$, при которых $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < h$. В данном случае если $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \le h_1 < h$ при всех $t \ge t_0$, то соответствующие функции $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})$ также определены при всех $t \ge t_0$.

З а м е ч а н и е 1. Если $\boldsymbol{y}$-переменные рассматривать как “выход” системы, то понятие $\boldsymbol{z}$-продолжимости решений тесно связано с понятием “наблюдаемость неограниченности” (unboundedness observability), введенным в работе [23] для случая нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и анализировавшимся [24; 25] на основе прямого метода Ляпунова. Данное понятие означает, что если “выход” системы ограничен, то решения такой системы определены при всех $t \ge t_0$.

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, изучение $\boldsymbol{z}$-продолжимости решений системы (1.1) может проводиться как путем анализа структурной формы этой системы, так и на основе прямого метода Ляпунова.

1.2. Понятия устойчивости по части переменных

Имея в виду различные требования к компонентам начальной вектор-функции, разобьем $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}$ на две части, так что $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}} = (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}^T, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}2}^T)^T$.

Будем использовать обозначения: D_δ – область начальных значений $\boldsymbol{\varphi}$ такая, что $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}\| \le L$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}2}\| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ.

О п р е д е л е н и е 1. Положение равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}2}$ является:

1) $\boldsymbol{y}$-*устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ следует $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$;

2) $\boldsymbol{y}$-*устойчивым равномерно по* t_0, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *равномерно асимптотически* $\boldsymbol{y}$-*устойчивым*, если оно равномерно $\boldsymbol{y}$-устойчиво в смысле п. 2) и найдется $\Delta(L) > 0$ такое, что произвольное решение $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1.1) с $\boldsymbol{\varphi} \in D_\Delta$

равномерно по t_0, $\boldsymbol{\varphi}$ из области $t_0 \geq 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in D_\Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim |\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0, \quad t \to \infty.$$

Замечание 2. В задаче $\boldsymbol{y}$-устойчивости положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы функционально-дифференциальных уравнений (1.1) изучались два случая: 1) $\|\varphi\| < \delta$ [11–13]; 2) $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty$ ($\boldsymbol{y}$-устойчивость в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}$ [11;12]). Случай $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| \leq L$, по аналогии с [11; 12], можно назвать $\boldsymbol{y}$-устойчивостью при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}$. Этот случай, а также более общая ситуация $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$, не анализировались.

1.3. Условия устойчивости по части переменных

Рассмотрим однозначные, непрерывные функционалы $V = V(t, \boldsymbol{\varphi})$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные на любой непрерывной вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}\colon [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ в области

$$t \geq 0, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < h_1 < h, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty. \tag{1.3}$$

Подставим в функционал $V(t, \boldsymbol{\varphi})$ вектор-функцию $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi})$, определяющую элемент траектории в текущий момент времени $t \geq t_0$. В результате получим значение функционала $V(t, \boldsymbol{x}_t)$ на решениях системы (1.1). Под производной V-функционала вдоль решений системы (1.1) будем понимать величину [1]

$$V'(t, \boldsymbol{x}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi})) = \overline{\lim} \delta^{-1}\{V(t+\delta, \boldsymbol{x}_{t+\delta}) - V(t, \boldsymbol{x}_t)\}, \quad \delta \to 0^+.$$

Если функционал V является локально липшицевым по второму аргументу, то указанный предел определяется единственным образом.

Для получения условий устойчивости указанного выше типа также будем рассматривать непрерывные в области (1.3) вспомогательные функционалы $V^*(t, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1})$, $V^*(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv 0$ и скалярную функцию $a(r)$ — непрерывную, монотонно возрастающую при $r \in [0, h_1)$, такую, что $a(0) = 0$ (функция $a \in K$ типа Хана [3]).

Теорема 1. *Пусть для системы* (1.1) *в области* (1.3) *найдется V–функционал такой, что выполнены условия*

$$V(t, \boldsymbol{\varphi}) \geq a(|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}(0)|), \quad V'(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq 0. \tag{1.4}$$

Тогда при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}1}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}2}$ положение равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$:
1) *$\boldsymbol{y}$-устойчиво, если, кроме того,*

$$V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq V^*(t, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}), \quad V^*(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}) \equiv 0; \tag{1.5}$$

2) *$\boldsymbol{y}$-устойчиво равномерно по t_0, если*

$$V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq V^*(\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}), \quad V^*(\mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}) \equiv 0. \tag{1.6}$$

Доказательство. Для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ в силу непрерывности функционалов V, V^*, условия $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и условий (1.5) можно найти $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ следует $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}) < a(\varepsilon)$.

С учетом неравенств (1.4) для произвольного решения $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1.1) с $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ при всех $t \geq t_0$ имеют место соотношения

$$a(|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})|) \leq V(t, \boldsymbol{x}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi})) \leq V(t_0, \boldsymbol{\varphi}) < a(\varepsilon).$$

Имея в виду свойства функций $\alpha(r)$, получаем $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Первая часть теоремы доказана.

При выполнении условий (1.6) для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ в силу непрерывности функционалов V, V^* можно найти такое не зависящее от t_0 число $\delta(\varepsilon, L) > 0$, что из $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ следует $V(t_0, \boldsymbol{\varphi}) < a(\varepsilon)$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично. □

З а м е ч а н и е 3. Изучение $\boldsymbol{y}$-устойчивости в целом по $\boldsymbol{\varphi_z}$ положения равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ системы функционально-дифференциальных уравнений (1.1) неизбежно приводит к весьма жестким требованиям к V-функционалу, в то время как при изучении $\boldsymbol{y}$-устойчивости при больших значениях $\boldsymbol{\varphi_z}$ такие требования существенно ослабляются.

В этом плане введенные понятия $\boldsymbol{y}$-устойчивости при больших значениях $\boldsymbol{\varphi_{z1}}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi_{z2}}$ можно рассматривать как приемлемый компромисс (за счет выбора разбиения $\boldsymbol{\varphi_z} = (\boldsymbol{\varphi}^T_{\boldsymbol{z}1}, \boldsymbol{\varphi}^T_{\boldsymbol{z}2})^T$) между содержательным смыслом понятия $\boldsymbol{y}$-устойчивости при не малых значениях $\boldsymbol{\varphi_z}$ и соответствующими требованиями к V-функционалу.

1.4. Условия асимптотической устойчивости по части переменных

Дополнительно введем L_2-норму [1; 21]

$$|||\boldsymbol{\varphi}||| = \left(\int\limits_{-\tau}^{0} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(\theta)\, d\theta\right)^{1/2},$$

где φ_i — i-я компонента $\boldsymbol{\varphi}$, а также рассмотрим функции $b_1, b_2, c \in K$.

Кроме того, наряду с V-функционалом будем рассматривать непрерывные в области (1.3) вспомогательные (векторные, вообще говоря) функции $\boldsymbol{w}\colon C^{\boldsymbol{y}}_{h_1} \times C^{\boldsymbol{z}} \to \mathbb{R}^l$, $l \geq 1, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1.1) *в области* (1.3) *найдутся V-функционал, а также непрерывная функция $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$ такие, что выполнены условия*

$$\begin{gathered} a(|\boldsymbol{\varphi_y}(0)|) \leq V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq b_1(|\boldsymbol{u}(0)|) + b_2(|||\boldsymbol{u}|||), \\ V'(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -c(|\boldsymbol{u}(0)|), \\ \boldsymbol{u} = [\boldsymbol{\varphi_y}, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi})], \quad \boldsymbol{u}(0) = [\boldsymbol{\varphi_y}(0), \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi}(0))]. \end{gathered}$$

Тогда при выполнении условий (1.6) *положение равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ равномерно асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчиво при больших значениях $\boldsymbol{\varphi_{z1}}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi_{z2}}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная $\boldsymbol{y}$-устойчивость положения равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ при больших значениях $\boldsymbol{\varphi_{z1}}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi_{z1}}$ следует из теоремы 1.

Для доказательства равномерной асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости при больших значениях $\boldsymbol{\varphi_{z1}}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi_{z2}}$ покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ при всех $t > t_0 + T(\varepsilon)$, если $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$, $t_0 \geq 0$, где δ находится в силу равномерной $\boldsymbol{y}$-устойчивости.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Обозначим

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u}_t = [\boldsymbol{y}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi}))], \\ \boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi}))]. \end{gathered}$$

Выберем такие $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и $\varepsilon_2 < \varepsilon$, что:

1) $b_1(\varepsilon_1) < 1/2a(\varepsilon)$;

2) $b_2(|||\boldsymbol{u}_t|||) < 1/2a(\varepsilon)$, если $\|\boldsymbol{u}_t\| < \varepsilon_2$.

Возможность указанного выбора ε_2 обеспечивается неравенством $b_2(|||\boldsymbol{u}_t|||) \leq b_2(\varepsilon_2(l_1\tau)^{1/2})$ при $\|\boldsymbol{u}_t\| < \varepsilon_2$; $l_1 = m + l$.

Положим $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и покажем, что если $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$, то существует число $T_1 > \tau$ такое, что неравенство $|\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \geq \varepsilon_3$ нарушается для некоторого значения t в каждом интервале длины T_1. В самом деле, поскольку при $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ значение $V(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ в силу условий (1.6) ограничено числом $\alpha^*(\delta, L) > 0$, имеем

$$V(t_2, \boldsymbol{x}_{t_2}) \leq V(t_1, \boldsymbol{x}_{t_1}) - c(\varepsilon_3)(t_2 - t_1) \leq \alpha^* - c(\varepsilon_3)(t_2 - t_1),$$

если $|\boldsymbol{u}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| \geq \varepsilon_3$ на интервале (t_1, t_2). Поэтому при $t = t_2$, $(t_2 - t_1) > \alpha^* c^{-1}(\varepsilon_3)$ значение V-функционала является отрицательным, что противоречит условиям теоремы.

В результате существует монотонная последовательность значений $t_n > \infty$ такая, что $|\boldsymbol{u}(t_n, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon_3$. Переходя к подпоследовательности t_k, потребуем, чтобы $t_k + \tau < t_{k+1}$. Таким образом, если $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$, то найдется число $T_1(\varepsilon, L) > \tau$ такое, что неравенство $|\boldsymbol{u}(t_n, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon_3$ имеет место при $t_k \in (t_0 + kT_1, t_0 + (k+1)T_1)$.

Рассмотрим последовательность функций $\boldsymbol{u}_t$, соответствующую выбранной подпоследовательности t_k. Покажем, что найдется число $N > 0$ такое, что неравенство $b_2(|||\boldsymbol{u}_t|||) < 1/2a(\varepsilon)$ имеет место при $t = t_i$, $1 \leq i \leq N$.

Предполагая противное, рассмотрим те значения t_k, для которых $b_2(|||\boldsymbol{u}_t|||) \geq 1/2a(\varepsilon)$. Используя функцию c против b_1, можно подобрать (см. [22]) число $N > 0$ такое, что при $k > N$ для значений $t > t_k$ при некотором $\beta > 0$ получаем противоречивые неравенства $0 \leq V(t, \boldsymbol{x}_t) \leq \alpha^* - (k-1)\beta$.

Тогда при $t \geq t_i$ имеем цепочку соотношений

$$a(|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})|) \leq V(t, \boldsymbol{x}_t) \leq V(t_i, \boldsymbol{x}_{t_i}) \leq a(\varepsilon)$$

и, следовательно, $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_i$.

Учитывая, что $t_N < t_0 + 2NT_1$, положим $T = 2NT_1$. Значит, при всех значениях $t > t_0 + T$ справедливо неравенство $|\boldsymbol{y}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$, если выполняются соотношения $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$. □

Дополнение к теореме 2. *Первую группу условий теоремы* 2 *в области* (1.3) *можно заменить условиями*

$$a(|\boldsymbol{u}(0)|) \leq V(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq b_1(|\boldsymbol{u}(0)|) + b_2(|||\boldsymbol{u}|||), \quad V'(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -c(|\boldsymbol{u}(0)|),$$

выполняемыми в более узкой области

$$t \geq 0, \quad \|\boldsymbol{u}\| < h_1 < h, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty. \tag{1.7}$$

З а м е ч а н и е 4. Дополнение к теореме 2 показывает, что при решении задач $\boldsymbol{y}$-устойчивости (асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости) допустимо построение V-функционала в виде

$$V(t, \boldsymbol{\varphi}) \equiv V^*(t, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi})).$$

В результате можно использовать известные V^*-функционалы (в том числе квадратичные), знакоопределенные по отношению ко всем переменным.

Отметим, что производная V-функционала, удовлетворяющего в области (1.7) условию $V'(t, \boldsymbol{\varphi}) \leq -c(|\boldsymbol{u}(0)|)$, вообще говоря, будет знакопеременной в области (1.3).

З а м е ч а н и е 5. Теоремы 1, 2 являются обобщением соответствующих теорем Н. Н. Красовского [1], Т. А. Бэртона [22], В. В. Румянцева [8], а также результатов работ [11; 12; 16]. Для сравнения, в работах [1; 22] применительно к системе (1.1) рассмотрена устойчивость по всем переменным, а в работах [11; 12] устойчивость по части переменных соответствует случаю $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty$. В работах [8; 16] эффект последействия не учитывался.

2. Задачи устойчивости по части переменных “частичных” положений равновесия

В пространстве C рассмотрим множество

$$M = \{\boldsymbol{\varphi} \in C\colon\ \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}\}.$$

Если имеет место тождество $\mathbf{Y}(t, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{\varphi} \in M$, то решение $\boldsymbol{x}(t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1.1) удовлетворяет условию $\|\boldsymbol{y}_t(t_0, \boldsymbol{\varphi})\| \equiv 0$. Другими словами, $M = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ есть “частичное” положение равновесия системы (1.1). В данном случае система (1.1) может и не иметь нулевого положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

2.1. Понятия устойчивости по части переменных

Допустим, что $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1^T, \boldsymbol{y}_2^T)^T$. Соответственно, компоненту $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ также разобъем на две части и представим ее в виде $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}^T, \boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}2}^T)^T$.

Предположим, что в области

$$t \ge 0, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}\| < h, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}2}\| + \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty, \tag{2.1}$$

оператор $\mathbf{X}$, определяющий правую часть системы (1.1), вполне непрерывен, и на каждом компактном подмножестве из области (2.1) выполняется условие Коши — Липшица.

Кроме того, считаем, что решения системы (1.1) $(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z})$-продолжимы; это значит, что решения определены при всех $t \ge t_0$, при которых $|\boldsymbol{y}_1(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < h$.

Определение 2. “Частичное” положение равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}2}$ является:

1) $\boldsymbol{y}_1$-*устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \ge 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0, L) > 0$ такое, что из $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ следует $|\boldsymbol{y}_1(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ при всех $t \ge t_0$;

2) $\boldsymbol{y}_1$-*устойчивым равномерно по* t_0, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *равномерно асимптотически* $\boldsymbol{y}_1$-*устойчивым*, если оно $\boldsymbol{y}_1$-устойчиво в смысле п. 2) и найдется $\Delta(L) > 0$ такое, что произвольное решение $\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})$ системы (1.1) с $\boldsymbol{\varphi} \in D_\Delta$ равномерно по $t_0, \boldsymbol{\varphi}$ из области $t_0 \ge 0$, $\boldsymbol{\varphi} \in D_\Delta$ удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim |\boldsymbol{y}_1(t, t_0, \boldsymbol{\varphi})| = 0, \quad t \to \infty.$$

2.2. Условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных

Наряду с V-функционалом будем рассматривать непрерывные в области (1.3) вспомогательные (векторные, вообще говоря) функции $\boldsymbol{w}\colon C_{h_1}^{\boldsymbol{y}} \times C^{\boldsymbol{z}} \to \mathbb{R}^l$, $l \ge 1$, $\boldsymbol{w}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\mu}\colon \mathbb{R}_+ \times C_{h_1}^{\boldsymbol{y}} \times C^{\boldsymbol{z}} \to \mathbb{R}^p$, $p \ge 1$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1.1) *найдутся V-функционал, а также непрерывная функция $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\mu}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ такие, что в области*

$$t \ge 0, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi})\| < h_1 < h, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}2}\| + \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty \tag{2.2}$$

выполнены условия

$$V(t, \boldsymbol{\varphi}) \ge a(|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}(0)| + |\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\varphi}(0))|), \quad V'(t, \boldsymbol{\varphi}) \le 0.$$

Тогда при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}2}$ “частичное” положение равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$: 1) $\boldsymbol{y}_1$-устойчиво, если выполнены условия (1.5); *2) $\boldsymbol{y}_1$-устойчиво равномерно по t_0, если выполнены условия* (1.6).

Теорема 4. *Пусть для системы* (1.1) *найдутся* V*-функционал, а также непрерывные функции* $\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{\mu}(t,\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *и* $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi})$, $\boldsymbol{w}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ *такие, что в области* (2.2) *наряду с условиями* (1.6) *выполнены условия*

$$a(|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}(0)| + |\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{\varphi}(0))|) \le V(t,\boldsymbol{\varphi}) \le b_1(|\boldsymbol{u}(0)|) + b_2(|||\boldsymbol{u}|||),$$

$$V'(t,\boldsymbol{\varphi}) \le -c(|\boldsymbol{u}(0)|),$$

$$\boldsymbol{u} = [\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\varphi})].$$

Тогда при больших значениях $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}1}$ *в целом по* $\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}2}$ *"частичное" положение равновесия* $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ *равномерно асимптотически* $\boldsymbol{y}_1$*-устойчиво.*

Доказательство теорем 3, 4 проводится по той же схеме, что и доказательство теорем 1, 2.

З а м е ч а н и е 6. Целесообразность анализа $\boldsymbol{y}_1$-устойчивости в области (2.2), а не в области

$$t \ge 0, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}\| < h_1 < h, \quad \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}2}\| + \|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty, \tag{2.3}$$

объясняется тем, что $\boldsymbol{y}_1$-устойчивое "частичное" положение равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1) всегда фактически устойчиво не только по $\boldsymbol{y}_1$, но также и по отношению к некоторым функциям от $t, \boldsymbol{x}$. Поскольку заранее не всегда ясно, какие именно это функции, то им естественно поставить в соответствие в пространстве $\mathbb{R}_+ \times C$ компоненты некоторой дополнительной векторной $\boldsymbol{\mu}$-функции Ляпунова для наиболее рациональной замены области (2.3) областью (2.2). Естественно, что сделанное допущение $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\boldsymbol{\varphi})\| < h_1 < h$ должно подтверждаться в процессе решения, что гарантируется условиями теорем 3, 4. При этом не требуется анализировать собственно производную $\boldsymbol{\mu}$-функции Ляпунова в силу системы (1.1), что является дополнительным аргументом в пользу предложенного подхода.

Такой подход позволяет не только облегчить построение функционалов Ляпунова, но и использовать для доказательства $\boldsymbol{y}_1$-устойчивости функционалы, которые могут не быть знакоопределенными ни по $\boldsymbol{y}_1$ в смысле В.В. Румянцева [8] (т.е. условие $V(t,\boldsymbol{\varphi}) \ge a(|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}1}(0)|)$ в области (2.3) может не выполняться), ни по Ляпунову; см. также работу [26].

Кроме того, производная V-функционала в теоремах 3, 4, вообще говоря, будет знакопеременной в области (2.3).

З а м е ч а н и е 7. Теоремы 3, 4 являются обобщением соответствующих результатов работ [16;27;28]. Для сравнения, в работах [27;28] $\boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{w} \equiv \mathbf{0}$ и для случая $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| < \infty$ получены условия

$$a(\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\|) \le V(t,\boldsymbol{\varphi}) \le b_1(\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\|), \quad V'(t,\boldsymbol{\varphi}) \le -c(\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\|)$$

равномерной асимптотической устойчивости "частичного" положения равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ системы (1.1). Эти условия более жесткие, чем условия теоремы 4.

Устойчивость по части переменных (по $\boldsymbol{y}_1$) "частичного" положения равновесия $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, а также устойчивость в случае $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{y}}\| < \delta$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{z}}\| \le L$ и более общая ситуация $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$ не анализировались. В работе [16] эффект последействия не учитывался.

3. Пример

Пусть система (1.1) имеет вид

$$\begin{gathered} y_1'(t) = -(t+4)y_1(t) + y_1(t-\tau) + y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau), \\ y_2'(t) = y_2(t)[1 + e^t y_1(t) + y_2^2(t)z_1(t)], \\ z_1'(t) = -2[2 + e^t y_1(t)]z_1(t), \quad z_2'(t) = e^t y_1(t)z_2(t). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Рассмотрим вспомогательные функционал V и функции μ_1, w_1 вида

$$V(\boldsymbol{\varphi}) = 1/2[\varphi_{y1}^2(0) + \mu_1^2(0)] + \int\limits_{-\tau}^{0} \varphi_{y1}^2(\theta)\,d\theta + \int\limits_{-\tau}^{0} \mu_1^2(\theta)\,d\theta,$$

$$\mu_1(\boldsymbol{\varphi}) = w_1(\boldsymbol{\varphi}) = \varphi_{y2}^2\varphi_{z1}, \quad \mu_1(0) = w_1(0) = \varphi_{y2}^2(0)\varphi_{z1}(0),$$

для которых выполнены условия

$$1/2[\varphi_{y1}^2(0) + \mu_1^2(0)] = V(\boldsymbol{\varphi}) \le b_1(|\boldsymbol{u}(0)|) + b_2(|||\boldsymbol{u}|||),$$

$$V(\boldsymbol{\varphi}) \le V^*(\varphi_{y1}, \varphi_{y2}, \varphi_{z1}), \quad V^*(0, 0, \varphi_{z1}) \equiv 0,$$

$$\boldsymbol{u} = [\varphi_{y1}, \mu_1(\boldsymbol{\varphi})], \quad \boldsymbol{u}(0) = [\varphi_{y1}(0), \mu_1(0)].$$

Производная V-функционала в силу системы (3.1) в области (2.2) оценивается следующим образом:

$$V'(t,\boldsymbol{\varphi}) = -(t+2)\varphi_{y1}^2(0) + \varphi_{y1}(0)\mu_1(-\tau) - \mu_1^2(-\tau)$$

$$-\varphi_{y1}^2(0) + \varphi_{y1}(0)\varphi_{y1}(-\tau) - \varphi_{y1}^2(-\tau) - \mu_1^2(0) + 2\mu_1^3(0) \le -\gamma[\varphi_{y1}^2(0) + w_1^2(0)] \le -\gamma|\boldsymbol{u}(0)|^2,$$

$$\gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Система (3.1) допускает представление в виде двух групп уравнений

$$\begin{gathered}
1) \quad y_1'(t) = -(t+4)y_1(t) + y_1(t-\tau) + \mu_1(t-\tau),\\
\mu_1'(t) = -2\mu_1(t)[1 - \mu_1(t)];\\
2) \quad y_2'(t) = [1 + e^t y_1(t) + \mu_1(t)]y_2(t), \quad z_1'(t) = -2[2 + e^t y_1(t)]z_1(t),\\
z_2'(t) = [e^t y_1(t)]z_2(t);\\
\mu_1(t) = y_2^2(t)z_1(t), \quad \mu_1(t-\tau) = y_2^2(t-\tau)z_1(t-\tau).
\end{gathered}$$

Вторую группу уравнений можно рассматривать как линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, получающуюся после подстановки решений первой группы уравнений во вторую. Известно, что решения такой системы определены при всех $t \ge t_0$, при которых определены и непрерывны ее коэффициенты.

Поскольку положение равновесия $y_1 = \mu_1 = 0$ первой группы уравнений системы (3.1) устойчиво (по y_1, μ_1), то решения системы (3.1), для которых $\boldsymbol{\varphi} \in D_\delta$, определены при всех $t \ge t_0$.

На основании теоремы 4 “частичное” положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (3.1) равномерно асимптотически y_1-устойчиво при больших значениях $\boldsymbol{\varphi_{z1}}$ в целом по $\boldsymbol{\varphi_{z2}}$.

Отметим, что в области (2.3) производная выбранного V-функционала знакопеременна и условия теоремы 4 при $\boldsymbol{\mu} \equiv \boldsymbol{0}$ не выполняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959. 211 с.
2. **Шиманов С.Н.** О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 1. С. 55–63.
3. **Hale J.K.** Theory of functional differential equations. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 1977. 365 p.
4. **Разумихин Б.С.** Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 4. С. 500–512.
5. **Karafyllis I., Pepe P., Jiang Z.P.** Global output stability for systems described by retarded functional differential equations // European J. Control. 2008. Vol. 14, no. 6. P. 516–536.

6. **Андреев А.С.** Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
7. **Александров А.Ю., Жабко А.П.** Об асимптотической устойчивости решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 2012. № 5. С. 3–12.
8. **Румянцев В.В.** Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, физики, астрономии, химии. 1957. № 4. С. 9–16.
9. **Румянцев В.В., Озиранер А.С.** Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
10. **Савченко А.Я., Игнатьев А.О.** Некоторые задачи устойчивости неавтономных систем. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
11. **Vorotnikov V.I.** Partial stability and control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
12. **Воротников В.И., Румянцев В.В.** Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
13. **Halanay A.** Differential equation: Stability, oscillations, time-lags. New York: Acad. Press, 1966. 528 p.
14. **Corduneanu C.** On partial stability for delay systems // Ann. Polon. Math. 1974. Vol. 29. P. 357–362.
15. **Воротников В.И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3–58.
16. **Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.** К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 5. С. 23–31.
17. **Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными нелинейными системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
18. **Lin Y., Sontag E.D., Wang Y.** A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability // SIAM J. Control Optim. 1996. Vol. 34, no. 1. P. 124–160.
19. **Ефимов Д.В.** Робастное и адаптивное управление нелинейными колебаниями. СПб.: Наука, 2005. 314 с.
20. **Kellett C.M., Teel A.R.** Weak converse Lyapunov theorems and control-Lyapunov functions // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 42, no. 6. P. 1934–1959.
21. **Burton T.A.** Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations. Orlando: Acad. Press, 1985. 342 p.
22. **Burton T.A.** Uniform asymptotic stability in functional differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 68, no. 3. P. 195–199.
23. **Mazenc F., Praly L., Dayawansa W.P.** Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples // Systems & Control Letters. 1994. Vol. 23, no. 2. P. 119–125.
24. **Angeli D., Sontag E.D.** Forward completeness, unboundedness observability, and their Lyapunov characterization // Systems & Control Letters. 2000. Vol. 38, no. 4–5. P. 209–217.
25. **Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D.** Input to state stability and allied systems properties // Autom. Remote Control. 2011. Vol. 72, no. 8. P. 1579–1614.
26. **Воротников В.И.** К теории устойчивости по части переменных // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 55, вып. 4. С. 553–561.
27. **Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O.** On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Analysis: TMA. 2003. Vol. 55, no. 4–6. P. 641–656.
28. **Corduneanu C., Ignatyev A.O.** Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Funct. Anal. & Appl. 2005. Vol. 10, no. 1. P. 11–24.

Поступила 20.06.2012

Воротников Владимир Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зам. директора
Уральский федеральный университет, Нижнетагильский технологический ин-т
e-mail: vorot@ntiustu.ru

Мартышенко Юлия Геннадьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет, Нижнетагильский технологический ин-т
e-mail: j-mart@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В КЛАССЕ КОНТРСТРАТЕГИЙ[1]

М. И. Гомоюнов, Д. В. Корнев

Для линейной динамической системы, подверженной воздействиям управления и помехи, рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи с оптимизацией евклидовой нормы совокупности отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целей. Задача формализуется в дифференциальную игру в классах “стратегии — контрстратегии”. Обосновывается процедура вычисления цены игры, сводящая задачу к рекуррентному построению выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: дифференциальные игры, цена игры, седловая точка, контрстратегии.

M. I. Gomoyunov, D. V. Kornev. On calculating the value of a differential game in the class of counterstrategies.

For a linear dynamic system with control and disturbance, a feedback control problem is considered, in which the Euclidean norm of the set of deviations of the system's motion from given targets at given times is optimized. The problem is formalized into a differential game in “strategy–counterstrategy” classes. A game value computing procedure, which reduces the problem to a recursive construction of upper convex hulls of auxiliary functions, is justified. Results of numerical simulations are presented.

Keywords: differential games, value of the game, saddle point, counterstrategies.

Введение

В статье для линейной динамической системы, подверженной воздействиям управления и помехи, рассматривается задача об управлении по принципу обратной связи с оптимизацией показателя качества, представляющего собой евклидову норму совокупности отклонений движения системы в заданные моменты времени от заданных целей. При этом не предполагается выполнение условия “седловой точки для маленькой игры” [1, с. 79] или, в другой терминологии, условия Айзекса [2] (см. ниже равенство (2.7)). В рамках теоретико-игрового подхода [1–8] задача формализуется в позиционную дифференциальную игру в классах “стратегии — контрстратегии” (см., например, [1, с. 78]).

С опорой на конструкции из [4; 5] в работах [7; 8] при условии (2.7) была дана процедура, которая сводит рассматриваемую задачу к рекуррентному построению выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций. В настоящей статье обосновывается применимость данной процедуры без предположения о выполнении условия (2.7). Для этого, следуя идее унификации дифференциальных игр [3], мы используем конструкции характеристических комплексов из теории минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби [6].

Приводятся результаты численных экспериментов.

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A(t)x + f(t,u,v), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^s. \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002), а также РФФИ (проекты 11-01-12088-офи-м-2011, 12-01-31247-мол_а, 12-01-31300-мол_а).

Здесь t — время, x — фазовый вектор, u — вектор управления, v — вектор помехи; t_0 и ϑ — фиксированные моменты времени ($t_0 < \vartheta$); P и Q — известные компакты; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ матрица-функция, $f(t,u,v)$ — непрерывная на $[t_0,\vartheta] \times P \times Q$ вектор-функция.

Назовем позицией системы (1.1) пару $(t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\lambda_1 = \max_{t\in[t_0,\vartheta]} \max_{x\in\mathbb{R}^n,\,\|x\|=1} \|A(t)x\|, \quad \lambda_2 = \max_{(t,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times P\times Q} \|f(t,u,v)\|, \quad \lambda = \max\{\lambda_1,\lambda_2\}. \tag{1.2}$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора. Определим множество K возможных позиций

$$K = \{(t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leqslant (1+R_0)e^{(t-t_0)\lambda} - 1\}, \tag{1.3}$$

где $R_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Пусть заданы позиция $(t_*, x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$, и момент времени $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Допустимы измеримые по Борелю реализации управления $u[t_*[\cdot]t^*) = \{u(t) \in P,\, t_* \leqslant t < t^*\}$ и помехи $v[t_*[\cdot]t^*) = \{v(t) \in Q,\, t_* \leqslant t < t^*\}$. Из позиции (t_*, x_*) такие реализации единственным образом порождают движение системы (1.1) — абсолютно непрерывную вектор-функцию $x[t_*[\cdot]t^*] = \{x(t) \in \mathbb{R}^n,\, t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$, которая при $t = t_*$ удовлетворяет условию $x(t_*) = x_*$ и при почти всех $t \in [t_*, t^*]$ вместе с $u = u(t)$ и $v = v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). При этом всякая позиция $(t, x(t))$, $t \in [t_*, t^*]$, реализующаяся на этом движении, будет принадлежать множеству K (см., например, [1, с. 41]).

Пусть заданы натуральное число N; моменты времени $t^{[i]} \in [t_0,\vartheta]$, $t^{[i]} < t^{[i+1]}$, $i = \overline{1, N-1}$, $t^{[N]} = \vartheta$; постоянные $(p^{[i]} \times n)$-матрицы $D^{[i]}$ $(1 \leqslant p^{[i]} \leqslant n)$ и n-мерные векторы $g^{[i]}$, $i = \overline{1,N}$. Качество движения $x[t_*[\cdot]\vartheta]$, порожденного из позиции $(t_*, x_*) \in K$ некоторыми допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$, оценивается показателем

$$\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \biggl(\sum_{i=h(t_*)}^{N} \|D^{[i]}(x(t^{[i]}) - g^{[i]})\|^2\biggr)^{1/2}, \tag{1.4}$$

где

$$h(t) = \min\{i = \overline{1,N} \colon t^{[i]} \geqslant t\}, \quad t \in [t_0,\vartheta]. \tag{1.5}$$

Задача управления состоит в том, чтобы доставить показателю γ (1.4) как можно меньшее значение. При ее решении оказывается удобным дополнительно рассмотреть задачу о формировании самых неблагоприятных с точки зрения целей управления воздействий помехи, которые нацелены на максимизацию γ.

Эти две задачи можно объединить согласно [1, с. 75; 5, с. 51] в антагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц в классах “стратегии — контрстратегии”. Воздействие управления u трактуется как действие первого игрока, воздействие помехи v — как действие второго. Допустимой стратегией $u(\cdot)$ первого игрока считаем любую функцию

$$u(\cdot) = \{u(t,x,\varepsilon) \in P,\, (t,x) \in K,\, \varepsilon > 0\},$$

а допустимой контрстратегией второго игрока — любую функцию

$$v(\cdot) = \{v(t,x,u,\varepsilon) \in Q,\, (t,x) \in K,\, u \in P,\, \varepsilon > 0\},$$

которая при фиксированных $(t,x) \in K$, $\varepsilon > 0$ измерима по Борелю по $u \in P$. Здесь $\varepsilon > 0$ — параметр точности (см., например, [1, с. 68]).

Из результатов монографий [1; 5] следует, что рассматриваемая дифференциальная игра (1.1), (1.4) имеет цену $\rho(\cdot)$ и седловую точку, которая складывается из оптимальных минимаксной стратегии $u^0(\cdot)$ и максиминной контрстратегии $v^0(\cdot)$. В частности, это означает, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$, что при любых исходной позиции $(t_*, x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$, значении параметра точности $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$

и разбиении $\Delta_M\{t_i\} = \{t_i\colon t_1 = t_*,\, t_i < t_{i+1},\, i = \overline{1,M},\, t_{M+1} = \vartheta\}$ отрезка времени $[t_*,\vartheta]$ с диаметром $\delta_M = \max_{i=\overline{1,M}}(t_{i+1}-t_i) \leqslant \delta_*(\varepsilon)$, с одной стороны, пошаговый закон управления первого игрока $U^0 = \{u^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_M\{t_i\}\}$, формирующий воздействия

$$u(t) = u^0(t_i, x(t_i), \varepsilon), \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad i = \overline{1,M},$$

будет обеспечивать неравенство

$$\gamma \leqslant \rho(t_*,x_*) + \zeta \tag{1.6}$$

при любой допустимой реализации $v[t_*[\cdot]\vartheta)$; а с другой стороны, для всякой допустимой реализации $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ пошаговый закон управления второго игрока $V^0 = \{v^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_M\{t_i\}\}$, формирующий воздействия

$$v(t) = v^0(t_i, x(t_i), u(t), \varepsilon), \quad t_i \leqslant t < t_{i+1}, \quad i = \overline{1,M},$$

будет обеспечивать неравенство

$$\gamma \geqslant \rho(t_*,x_*) - \zeta. \tag{1.7}$$

2. Процедура вычисления цены игры

В согласии с [8] рассмотрим следующую процедуру для вычисления цены дифференциальной игры (1.1), (1.4). Пусть $t_* \in [t_0,\vartheta)$. Назначим разбиение отрезка времени $[t_*,\vartheta]$

$$\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j\colon \tau_1 = t_*,\, \tau_j < \tau_{j+1},\, j = \overline{1,k},\, \tau_{k+1} = \vartheta\}. \tag{2.1}$$

При этом, рассматривая далее разбиение вида (2.1), будем всегда предполагать, что оно содержит моменты времени $t^{[i]}$, $i = \overline{h(t_*),N}$, из показателя (1.4).

Пусть $X(t,\tau)$ — матрица Коши для уравнения $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = A(t)x$. Обозначим

$$\Delta\psi_j(t_*,m) = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle m, X(\vartheta,\tau)f(\tau,u,v)\rangle\mathrm{d}\tau, \quad m\in\mathbb{R}^n, \quad j=\overline{1,k}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов. Двигаясь попятно по шагам разбиения Δ_k (2.1), определим множества $G_j(t_*,\tau_j\pm 0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ векторов m и скалярные функции $\varphi_j(t_*,\tau_j\pm 0,m)$, $m\in G_j(t_*,\tau_j\pm 0)$, $j=\overline{1,k+1}$.

При $j=k+1$ полагаем

$$G_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}+0) = \{m\in\mathbb{R}^n\colon m=0\}, \quad \varphi_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}+0,m) = 0, \quad m\in G_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}+0),$$
$$G_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}-0) = \{m\in\mathbb{R}^n\colon m = D^{[N]\top}l,\, l\in\mathbb{R}^{p^{[N]}},\, \|l\|\leqslant 1\},$$
$$\varphi_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}-0,m) = -\langle m, g^{[N]}\rangle, \quad m\in G_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}-0),$$

где верхний индекс $\top$ означает транспонирование.

Дальнейшие построения проводятся по следующим рекуррентным соотношениям. Пусть для $j+1$, $1\leqslant j\leqslant k$, уже известны множества $G_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}\pm 0)$ и функции $\varphi_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}\pm 0,m)$, $m\in G_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}\pm 0)$. Тогда для текущего j определяем

$$G_j(t_*,\tau_j+0) = G_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}-0),$$
$$\psi_j(t_*,m) = \Delta\psi_j(t_*,m) + \varphi_{j+1}(t_*,\tau_{j+1}-0,m), \quad m\in G_j(t_*,\tau_j+0),$$
$$\varphi_j(t_*,\tau_j+0,\cdot) = \bigl\{\psi_j(t_*,\cdot)\bigr\}^*_{G_j(t_*,\tau_j+0)},$$

где символ $\bigl\{\psi(\cdot)\bigr\}^*_G$ означает выпуклую сверху оболочку функции $\psi(\cdot)$ на множестве G, т. е. минимальную вогнутую функцию, которая на множестве G мажорирует функцию $\psi(\cdot)$.

Далее, если момент τ_j не совпадает ни с одним из моментов времени $t^{[i]}$ из (1.4), то полагаем

$$G_j(t_*,\tau_j-0)=G_j(t_*,\tau_j+0),\qquad \varphi_j(t_*,\tau_j-0,m)=\varphi_j(t_*,\tau_j+0,m),\quad m\in G_j(t_*,\tau_j-0).$$

Если же $\tau_j=t^{[h]}$, $h=h(\tau_j)$, то определяем

$$\begin{gathered}G_j(t_*,\tau_j-0)=\Big\{m\in\mathbb{R}^n\colon m=\nu m_*+X^\top(t^{[h]},\vartheta)D^{[h]\top}l,\ 0\leqslant\nu\leqslant 1,\\ l\in\mathbb{R}^{p^{[h]}},\ \|l\|^2\leqslant 1-\nu^2,\ m_*\in G_j(t_*,\tau_j+0)\Big\},\end{gathered}\tag{2.3}$$

$$\varphi_j(t_*,\tau_j-0,m)=\max_{\{\nu,m_*,l\}}[\nu\,\varphi_j(t_*,\tau_j+0,m_*)-\langle l,D^{[h]}g^{[h]}\rangle],\quad m\in G_j(t_*,\tau_j-0),$$

где максимум вычисляется по всем возможным тройкам $\{\nu,m_*,l\}$, которые согласно (2.3) отвечают заданному вектору $m\in G_j(t_*,\tau_j-0)$.

Обозначим

$$e(t_*\pm 0,x;\Delta_k)=\max_{m\in G_1(t_*,\tau_1\pm 0)}[\langle m,X(\vartheta,t_*)x\rangle+\varphi_1(t_*,\tau_1\pm 0,m)],\quad x\in\mathbb{R}^n.\tag{2.4}$$

В случае $t_*=\vartheta$ формально считаем, что через Δ_k обозначено вырожденное разбиение, состоящее из одной точки $\tau_1=t_*=\vartheta=\tau_{k+1}$, при этом $G_1(t_*,\tau_1\pm 0)=G_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}\pm 0)$, а $\varphi_1(t_*,\tau_1\pm 0,m)=\varphi_{k+1}(t_*,\tau_{k+1}\pm 0,m)$, $m\in G_1(t_*,\tau_1\pm 0)$. Тогда

$$e(\vartheta-0,x;\Delta_k)=\|D^{[N]}(x-g^{[N]})\|,\quad e(\vartheta+0,x;\Delta_k)=0,\quad x\in\mathbb{R}^n.\tag{2.5}$$

Теорема. *Для любого числа* $\xi>0$ *найдется число* $\delta>0$ *такое, что, каковы бы ни были исходная позиция* $(t_*,x_*)\in K$ *и разбиение* Δ_k (2.1) *отрезка времени* $[t_*,\vartheta]$ *с диаметром* $\delta_k=\max_{j=\overline{1,k}}(\tau_{j+1}-\tau_j)\leqslant\delta$, *содержащее моменты времени* $t^{[i]}$, $i=\overline{h(t_*),N}$, *из показателя качества* (1.4), *будет выполнено неравенство*

$$|\rho(t_*,x_*)-e(t_*-0,x_*;\Delta_k)|\leqslant\xi.\tag{2.6}$$

В работе [8] утверждение данной теоремы было обосновано в предположении о том, что выполняется условие седловой точки для маленькой игры

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s,f(t,u,v)\rangle=\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s,f(t,u,v)\rangle,\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad s\in\mathbb{R}^n.\tag{2.7}$$

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве теоремы без использования условия (2.7).

3. Свойства u- и v-стабильности величины $e(\cdot)$

В [8] для обоснования неравенства (2.6) устанавливаются подходящие свойства u- и v-стабильности величины $e(\cdot)$ (2.4) относительно системы (1.1). Но в случае, когда условие (2.7) не выполняется, требуется более сильное свойство u-стабильности (см., например, [1, с. 208]). При попытке доказательства этого более сильного свойства по схеме из [8] возникают существенные трудности, связанные, в частности, с тем, что множество достижимости системы (1.1), когда управляющее воздействие v формируется в ответ на допустимые реализации $u=u(t)$ по правилу $v=v_*(u(t))$, где функция $v_*\colon P\to Q$ измерима по Борелю, может не обладать нужным свойством компактности. Поэтому далее предлагается рассмотреть вспомогательную z-модель, установить соответствующую близость движений системы (1.1) и z-модели и показать подходящую u-стабильность величины $e(\cdot)$ уже относительно z-модели. Что касается свойства v-стабильности, то оно не зависит от условия (2.7), поэтому далее используется свойство v-стабильности, установленное в [8].

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — единичная сфера и $q \in S$. Движения вспомогательной z-модели описываются дифференциальным включением

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t \in F^*(t,z,q) = A(t)z + F(t,q), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

где

$$F(t,q) = \{g \in \mathbb{R}^n \colon \|g\| \leqslant \sqrt{2}\lambda_2,\ \langle g, q\rangle \geqslant H(t,q)\}, \quad t \in [t_0,\vartheta], \quad q \in S,$$
$$H(t,s) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s, f(t,u,v)\rangle, \quad t \in [t_0,\vartheta], \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Здесь $\lambda_2 \geqslant 0$ — константа из (1.2). Отметим, что подобные дифференциальные включения рассматриваются при определении минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби (см., например, [6, с. 14]).

Назовем позицией z-модели (3.1) пару $(t,z) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Определим множество K_z возможных позиций z-модели

$$K_z = \{(t,z) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \colon \|z\| \leqslant (1 + R_0 + \alpha)e^{\sqrt{2}(t-t_0)\lambda} - 1\}, \tag{3.2}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, а $\lambda \geqslant 0$ — константа, определенная в (1.2). Можно проверить, что для любых $(t,z,q) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times S$ множество $F^*(t,z,q)$ является непустым выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$ и многозначное отображение $[t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n \times S \ni (t,z,q) \mapsto F^*(t,z,q) \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно по Хаусдорфу. Поэтому (см., например, [9]), для всякой позиции $(t_*,z_*) \in K_z$, $t_* < \vartheta$, для любых $t^* \in (t_*,\vartheta]$ и $q \in S$ дифференциальное включение (3.1) имеет по крайней мере одно решение $z[t_*[\cdot]t^*] = \{z(t) \in \mathbb{R}^n,\ t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$, удовлетворяющее равенству $z(t_*) = z_*$. Каждое такое решение определяет движение z-модели (3.1), исходящее из позиции (t_*,z_*). Для любого такого движения имеет место включение $(t,z(t)) \in K_z$, $t \in [t_*,t^*]$. Кроме того, согласно [9] при любом фиксированном q множество достижимости дифференциального включения (3.1) в момент t^* из позиции (t_*,z_*) является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1 (о близости движений). *Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что будет справедливо следующее утверждение. Пусть*

1. $(t_*,x_*) \in K$, $(t_*,z_*) \in K_z$, $t_* < \vartheta$, $t^* \in (t_*,\vartheta]$ *и* $t^* - t_* \leqslant \delta$.
2. $x[t_*[\cdot]t^*]$ *— движение системы* (1.1), *порожденное из позиции* (t_*,x_*) *реализацией управления* $u^{\mathrm{e}}[t_*[\cdot]t^*) = \{u^{\mathrm{e}}(t) = u^{\mathrm{e}} \in P,\ t_* \leqslant t < t^*\}$, *где*

$$u^{\mathrm{e}} \in \operatorname*{argmin}_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s_*, f(t_*,u,v)\rangle, \quad s_* = x_* - z_*, \tag{3.3}$$

в паре с какой угодно допустимой реализацией помехи $v[t_*[\cdot]t^*)$.

3. $z[t_*[\cdot]t^*]$ *— какое-либо исходящее из позиции* (t_*,z_*) *движение z-модели* (3.1) *при* $q = q^{\mathrm{e}}$, *где*

$$q^{\mathrm{e}} \in \operatorname*{argmax}_{q\in S}\min_{g\in F(t_*,q)}\langle s_*, g\rangle. \tag{3.4}$$

Тогда для всех значений $t \in [t_*,t^*]$ выполняется неравенство

$$\nu(t,x(t),z(t)) \leqslant \nu(t_*,x_*,z_*) + (t - t_*)\varepsilon, \tag{3.5}$$

где

$$\nu(t,x,z) = \|x - z\|^2 e^{-2(t-t_0)\lambda}. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится по схеме из [1, лемма 25.1], только в качестве модели используется система (3.1), а не модель-копия системы (1.1). Пользуясь липшицевостью функций $x(t)$ и $z(t)$, непрерывностью функции $f(t,u,v)$ и многозначного отображения $F(t,q)$, соотношениями (3.3) и (3.4), с учетом равенства (см., например, [6, с. 16])

$$\max_{q\in S}\min_{g\in F(t,q)}\langle g, s\rangle = H(t,s), \quad t \in [t_0,\vartheta], \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

выводим, что при почти всех $\tau \in (t_*, t^*)$ справедливо неравенство

$$\mathrm{d}\nu(\tau, x(\tau), z(\tau))/\mathrm{d}\tau \leqslant \eta(\delta)$$

для некоторой функции $\eta(\delta)$ со свойством $\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Интегрируя это неравенство при $t_* \leqslant \tau \leqslant t$, получаем

$$\nu(t, x(t), z(t)) \leqslant \nu(t_*, x_*, z_*) + (t - t_*)\eta(\delta).$$

При выборе $\delta > 0$ из условия $\eta(\delta) \leqslant \varepsilon$ будет справедливо неравенство (3.5). □

Лемма 2 (u-стабильность относительно z-модели). *Пусть*
1. $(t_*, z_*) \in K_z$, $t_* < \vartheta$ *и выбрано разбиение* Δ_k (2.1).
2. $t^* = \tau_2$ — *вторая точка разбиения* Δ_k.

Тогда для любого $q_* \in S$ *существует такое исходящее из позиции* (t_*, z_*) *движение* $z[t_*[\cdot]t^*]$ *z-модели* (3.1) *при* $q = q_*$, *что будет справедливо неравенство*

$$e(t_* + 0, z_*; \Delta_k) \geqslant e(t^* - 0, z(t^*); \Delta^*_{k^*}).$$

Здесь $\Delta^*_{k^*}$ — *разбиение отрезка времени* $[t^*, \vartheta]$, *порожденное точками разбиения* Δ_k:

$$\Delta^*_{k^*} = \Delta^*_{k^*}\{\tau^*_j\} = \{\tau^*_j = \tau_{j+1} \in \Delta_k \colon j = \overline{1, k^* + 1},\ k^* = k - 1\}. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы аналогично доказательству свойства u-стабильности из [8] с заменой множества достижимости системы (1.1) на множество достижимости дифференциального включения (3.1). □

Лемма 3 (v-стабильность, [8]). *Пусть*
1. $(t_*, x_*) \in K$, $t_* < \vartheta$ *и выбрано разбиение* Δ_k (2.1).
2. $t^* = \tau_2$ — *вторая точка разбиения* Δ_k *и* $\Delta^*_{k^*}$ — *разбиение* (3.7).

Тогда для любой реализации управления $u_*[t_*[\cdot]t^*) = \{u_*(t) = u_* \in P,\ t_* \leqslant t < t^*\}$ *найдется такая допустимая реализация помехи* $v[t_*[\cdot]t^*)$, *что из позиции* (t_*, x_*) *под действием этих реализаций будет порождено движение* $x[t_*[\cdot]t^*]$ *системы* (1.1), *для которого имеет место неравенство*

$$e(t_* + 0, x_*; \Delta_k) \leqslant e(t^* - 0, x(t^*); \Delta^*_{k^*}).$$

Лемма 4 [8]. *Каковы бы ни были позиция* $(t_*, z_*) \in K_z$, $t_* < \vartheta$, *и разбиение* Δ_k (2.1), *имеем*

$$e^2(t_* - 0, z_*; \Delta_k) = \begin{cases} e^2(t_* + 0, z_*; \Delta_k), \ \text{при } t_* < t^{[h(t_*)]}, \\ \|D^{[h(t_*)]}(z_* - g^{[h(t_*)]})\|^2 + e^2(t_* + 0, z_*; \Delta_k), \ \text{при } t_* = t^{[h(t_*)]}, \end{cases} \tag{3.8}$$

где значение $h(t_*)$ *определяется согласно* (1.5).

4. Доказательство теоремы

По числу $\zeta = \xi/2 > 0$ определим число $\varepsilon_* > 0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, так, чтобы обеспечить неравенства (1.6) и (1.7). Выберем число $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы было справедливо неравенство $\varepsilon_1 + (\vartheta - t_0)\varepsilon_1 \leqslant \alpha^2 e^{-2(\vartheta - t_0)\lambda}$, где постоянная $\alpha > 0$ взята из (3.2), а постоянная $\lambda \geqslant 0$ определена в (1.2). Подберем число $\varepsilon_2 > 0$ так, чтобы для любого $i = \overline{1, N}$ и для любых позиций $(t, z_1) \in K_z$ и $(t, z_2) \in K_z$, для которых $\nu(t, z_1, z_2) \leqslant \varepsilon_2 + (\vartheta - t_0)\varepsilon_2$, где функция $\nu(\cdot)$ взята из (3.6), имело место неравенство

$$\|D^{[i]}(z_1 - g^{[i]})\|^2 - \|D^{[i]}(z_2 - g^{[i]})\|^2 \leqslant \zeta^2/N. \tag{4.1}$$

По числу $\varepsilon = \min\{\varepsilon_*, \varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$ найдем такое число $\delta^* > 0$, для которого будет выполняться утверждение леммы 1. Покажем, что число $\delta = \min\{\delta_*(\varepsilon), \delta^*\} > 0$ удовлетворяет утверждению теоремы.

Для позиций $(\tau_j, x) \in K$, $j = \overline{1, k+1}$, определим сопутствующие точки $z(\tau_j, x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$

$$z(\tau_j, x, \varepsilon) \in \operatorname*{argmin}_z e(\tau_j - 0, z; \Delta^{(j)}_{k^{(j)}}), \tag{4.2}$$

где минимум берется при условии

$$\nu(\tau_j, x, z) \leqslant \varepsilon + (\tau_j - t_0)\varepsilon, \tag{4.3}$$

а разбиения $\Delta^{(j)}_{k^{(j)}}$ определяются по разбиению $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ следующим образом:

$$\Delta^{(j)}_{k^{(j)}} = \Delta^{(j)}_{k^{(j)}}\{\tau^{(j)}_i\} = \{\tau^{(j)}_i = \tau_{i+j-1} \in \Delta_k : \, i = \overline{1, k^{(j)}+1},\, k^{(j)} = k - j + 1\}.$$

Отметим, что из (1.3) и (3.2), если учесть выбор числа $\varepsilon_1 > 0$, вытекает справедливость включений $(\tau_j, z(\tau_j, x, \varepsilon)) \in K_z$. При $t = \tau_j$, $j = \overline{1, k}$, определим стратегию управления $u^{\mathrm{e}}(\cdot)$ из условия экстремального сдвига на сопутствующие точки

$$u^{\mathrm{e}}(\tau_j, x, \varepsilon) \in \operatorname*{argmin}_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s(\tau_j, x, \varepsilon), f(\tau_j, u, v)\rangle, \quad s(\tau_j, x, \varepsilon) = x - z(\tau_j, x, \varepsilon), \quad (\tau_j, x) \in K. \tag{4.4}$$

При остальных значениях t стратегию $u^{\mathrm{e}}(\cdot)$ доопределим произвольно.

Пусть $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ — движение системы (1.1), порожденное из позиции (t_*, x_*), когда первый игрок формирует управляющие воздействия согласно закону управления $U^{\mathrm{e}} = \{u^{\mathrm{e}}(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\}$, а второй игрок руководствуется законом формирования помехи $V^0 = \{v^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_k\}$ на базе оптимальной максиминной контрстратегии $v^0(\cdot)$. Тогда, благодаря указанному выше выбору $\varepsilon_* > 0$ и $\delta_*(\varepsilon) > 0$, на этом движении имеем неравенство (1.7). Рассуждая по индукции от $j = 1$ до $j = k+1$, покажем, что вдоль этого движения будет также выполняться неравенство

$$\sum_{i=h(t_*)}^{h(\tau_j)-1} \|D^{[i]}(x(t^{[i]}) - g^{[i]})\|^2 + e^2(\tau_j - 0, z_j; \Delta^{(j)}_{k^{(j)}}) \leqslant e^2(t_* - 0, x_*; \Delta_k) + \zeta^2(h(\tau_j) - 1)/N, \tag{4.5}$$

где $z_j = z(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon)$ и в случае $h(t_*) > h(\tau_j) - 1$ сумма полагается равной нулю.

При $j = 1$ неравенство (4.5) следует из соотношения (4.2).

Предположим, что неравенство (4.5) верно для j, $1 \leqslant j \leqslant k$, и докажем его для $j+1$. Выберем вектор $q^{\mathrm{e}}_j = q^{\mathrm{e}}_j(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon) \in S$ из условия

$$q^{\mathrm{e}}_j \in \operatorname*{argmax}_{q \in S} \min_{g \in F(\tau_j, q)} \langle s(\tau_j, x(\tau_j), \varepsilon), g\rangle. \tag{4.6}$$

По лемме 2 для $q = q^{\mathrm{e}}_j$ найдется такое исходящее из позиции (τ_j, z_j) движение $z^{(j)}[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1}]$ z-модели (3.1), для которого будет справедливо неравенство

$$e(\tau_j + 0, z_j; \Delta^{(j)}_{k^{(j)}}) \geqslant e(\tau_{j+1} - 0, z^{(j)}(\tau_{j+1}); \Delta^{(j+1)}_{k^{(j+1)}}). \tag{4.7}$$

По лемме 1, благодаря выбору числа $\delta^* > 0$, если учесть определение (4.4) стратегии $u^{\mathrm{e}}(\cdot)$, выбор (4.6) вектора q^{e}_j и неравенство (4.3), получаем

$$\nu(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), z^{(j)}(\tau_{j+1})) \leqslant \nu(\tau_j, x(\tau_j), z_j) + (\tau_{j+1} - \tau_j)\varepsilon \leqslant \varepsilon + (\tau_{j+1} - t_0)\varepsilon.$$

Отсюда, принимая во внимание определение (4.2) сопутствующих точек, выводим

$$e(\tau_{j+1} - 0, z^{(j)}(\tau_{j+1}); \Delta^{(j+1)}_{k^{(j+1)}}) \geqslant e(\tau_{j+1} - 0, z_{j+1}; \Delta^{(j+1)}_{k^{(j+1)}}). \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) заключаем

$$e(\tau_{j+1}-0,z_{j+1};\Delta^{(j+1)}_{k^{(j+1)}})\leqslant e(\tau_j+0,z_j;\Delta^{(j)}_{k^{(j)}}). \tag{4.9}$$

Если $\tau_j<t^{[h(\tau_j)]}$, тогда $h(\tau_{j+1})=h(\tau_j)$, и справедливость неравенства (4.5) для $j+1$ следует из неравенства (4.9), равенства (3.8) и предположения индукции.

Если же $\tau_j=t^{[h(\tau_j)]}$, то из (4.9), учитывая сначала равенство (3.8), а затем неравенство (4.3) и выбор (4.1) числа $\varepsilon_2>0$, выводим

$$\begin{aligned}e^2(\tau_{j+1}-0,z_{j+1};\Delta^{(j+1)}_{k^{(j+1)}})&\leqslant e^2(\tau_j-0,z_j;\Delta^{(j)}_{k^{(j)}})-\|D^{[h(\tau_j)]}(z_j-g^{[h(\tau_j)]})\|^2\\&\leqslant e^2(\tau_j-0,z_j;\Delta^{(j)}_{k^{(j)}})-\|D^{[h(\tau_j)]}(x(t^{[h(\tau_j)]})-g^{[h(\tau_j)]})\|^2+\zeta^2/N,\end{aligned}$$

откуда в силу предположения индукции и равенства $h(\tau_{j+1})=h(\tau_j)+1$ вытекает справедливость неравенства (4.5) для $j+1$ и в случае, когда $\tau_j=t^{[h(\tau_j)]}$.

Учитывая (2.5), (4.5) при $j=k+1$ и вновь (4.3) и (4.1), имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=h(t_*)}^{N}\|D^{[i]}(x(t^{[i]})-g^{[i]})\|^2&=\sum_{i=h(t_*)}^{N-1}\|D^{[i]}(x(t^{[i]})-g^{[i]})\|^2+e^2(\tau_{k+1}-0,z_{k+1};\Delta^{(k+1)}_{k^{(k+1)}})\\&+\|D^{[N]}(x(t^{[N]})-g^{[N]})\|^2-\|D^{[N]}(z_{k+1}-g^{[N]})\|^2\leqslant e^2(t_*-0,x_*;\Delta_k)+\zeta^2.\end{aligned}$$

Таким образом, для значения γ показателя качества (1.4), реализовавшегося на рассматриваемом движении, имеем неравенство $\gamma\leqslant e(t_*-0,x_*;\Delta_k)+\zeta$, а стало быть, если учесть (1.7),

$$\rho(t_*,x_*)-e(t_*-0,x_*;\Delta_k)\leqslant 2\zeta=\xi. \tag{4.10}$$

Пусть теперь $x[t_*[\cdot]\vartheta]$ — движение системы (1.1), порожденное из позиции (t_*,x_*), когда первый игрок выбирает управление согласно закону $U^0=\{u^0(\cdot),\varepsilon,\Delta_k\}$ на базе оптимальной минимаксной стратегии $u^0(\cdot)$, а второй игрок каждый раз, используя информацию о реализовавшейся позиции $(\tau_j,x(\tau_j))$ и назначенной на промежуток $[\tau_j,\tau_{j+1})$ постоянной реализации управления $u(t)=u^0(\tau_j,x(\tau_j),\varepsilon)$ первого игрока, подбирает реализацию $v[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$ в соответствии со свойством v-стабильности (лемма 3), $j=\overline{1,k}$. Тогда на этом движении имеем неравенство (1.6). Кроме того, рассуждая по индукции от $j=1$ до $j=k+1$ и опираясь при этом на неравенство

$$e(\tau_j+0,x(\tau_j);\Delta^{(j)}_{k^{(j)}})\leqslant e(\tau_{j+1}-0,x(\tau_{j+1});\Delta^{(j+1)}_{k^{(j+1)}}),$$

справедливое в силу выбора $v[\tau_j[\cdot]\tau_{j+1})$, и равенство (3.8), можно показать, что вдоль такого движения будет также выполняться неравенство

$$\sum_{i=h(t_*)}^{h(\tau_j)-1}\|D^{[i]}(x(t^{[i]})-g^{[i]})\|^2+e^2(\tau_j-0,x(\tau_j);\Delta^{(j)}_{k^{(j)}})\geqslant e^2(t_*-0,x_*;\Delta_k). \tag{4.11}$$

Из (4.11) при $j=k+1$, учитывая (2.5), выводим, что для реализовавшегося таким образом значения γ показателя качества (1.4) имеет место неравенство $\gamma\geqslant e(t_*-0,x_*;\Delta_k)$. Отсюда и из (1.6) заключаем

$$\rho(t_*,x_*)-e(t_*-0,x_*;\Delta_k)\geqslant-\zeta=-\xi/2. \tag{4.12}$$

Неравенства (4.10) и (4.12) доказывают теорему. □

З а м е ч а н и е 1. Подобным образом с понятными изменениями можно проверить, что если в процедуре при определении функции $\Delta\psi_j(\cdot)$ (2.2) поменять операции взятия минимума и максимума местами, то величина $e(\cdot)$ (2.4), построенная согласно такой процедуре, будет приближать функцию цены в дифференциальной игре (1.1), (1.4) в классах “контрстратегии — стратегии”.

З а м е ч а н и е 2. Опираясь на величину $e(\cdot)$ (2.4), методом экстремального сдвига на сопутствующую точку [1] можно построить ζ-оптимальные законы управления игроков (см. [5; 11]), которые будут обеспечивать выполнение неравенств (1.6) и (1.7).

5. Пример

Рассматриваемый ниже пример имеет своей основой модельную задачу из [10, с. 49–58]. Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t = x_2, \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t = -te^{0.2t}x_1 - 0.02e^{0.2t}x_2 - 1.8(u_1\cos v_1 - u_2\sin v_1) + e^{0.2t}v_2, \\ \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t = x_4, \\ \mathrm{d}x_4/\mathrm{d}t = -te^{0.2t}x_3 - 0.02e^{0.2t}x_4 - 1.8(u_1\sin v_1 + u_2\cos v_1) + e^{0.2t}v_3, \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 4, \tag{5.1}$$

$$x = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbb{R}^4,$$

$$u = (u_1,\, u_2) \in P = \{(1,\,0),\,(0,\,1),\,(-1,\,0),\,(0,\,-1)\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$v = (v_1,\, v_2,\, v_3) \in Q = \{(v_1,\, v_2,\, v_3) \in \mathbb{R}^3\colon v_1 \in \{-\pi/4,\, \pi/4\},\, v_2^2 + v_3^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Заданы начальное условие $x(0) = (1,\, -1,\, 1,\, 1)$ и показатель качества процесса управления

$$\gamma = \bigl(|x_1(2) + 0.5|^2 + |x_3(3) + 2|^2 + |x_1(4)|^2 + |x_3(4) - 2|^2\bigr)^{1/2}. \tag{5.2}$$

Задача управления для системы (5.1) при показателе качества (5.2) решалась на основе описанных выше конструкций. Приведем результаты численного моделирования. При вычислениях были выбраны равномерное разбиение отрезка времени $[0, 4]$ с шагом $\delta = 0.02$ и значение параметра точности $\varepsilon = 0.2$. Априорно посчитанная величина цены дифференциальной игры (5.1), (5.2) в классах “стратегии — контрстратегии” составила $\rho_u \approx 2.46$, а в классах “контрстратегии — стратегии” — $\rho_v \approx 1.52$.

На рис. 1 тонкой линией изображена траектория движения системы (5.1), сформированного в результате действия ζ-оптимальных законов управления первого и второго игроков в классах “стратегии — контрстратегии”. При этом реализовалось следующее значение показателя качества (5.2):

$$\gamma = \bigl(|-1.55 + 0.5|^2 + |-0.91 + 2|^2 + |-1.16|^2 + |0.75 - 2|^2\bigr)^{1/2} \approx 2.28 \approx \rho_u.$$

Жирной линией изображена траектория движения, сформированного в результате действия ζ-оптимальных законов управления первого и второго игроков в классах “контрстратегии —

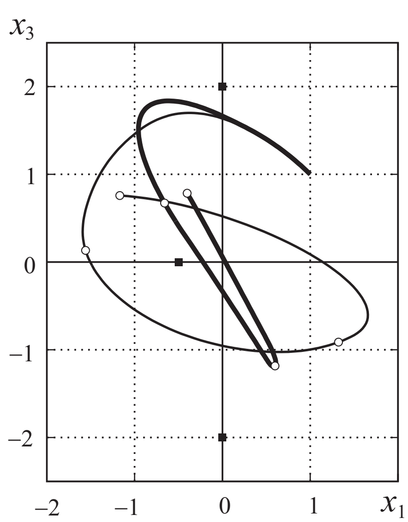


Рис. 1

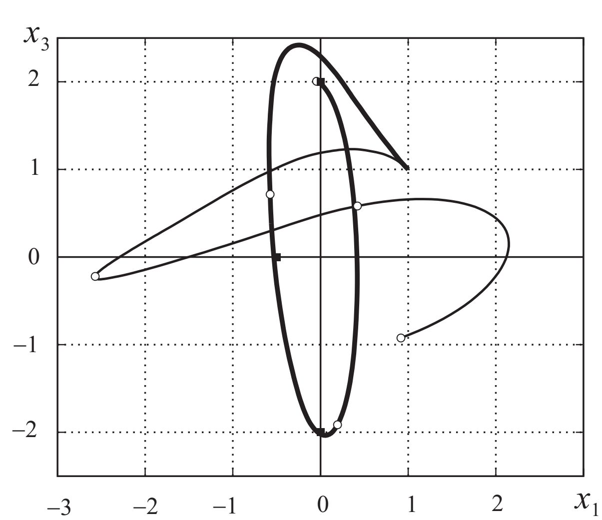


Рис. 2

стратегии". Реализовавшееся в этом случае значение показателя качества составило

$$\gamma = \big(|-0.65+0.5|^2 + |-1.18+2|^2 + |-0.40|^2 + |0.78-2|^2\big)^{1/2} \approx 1.53 \approx \rho_v.$$

На рис. 2 тонкой линией изображена траектория движения, сформированного в результате действия ζ-оптимального закона управления второго игрока в классах "стратегии — контрстратегии", когда управляющие воздействия первого игрока назначались случайным образом. Реализовалось значение показателя качества $\gamma \approx 4.51 > \rho_u$. Жирной линией изображена траектория движения, сформированного в результате действия ζ-оптимального закона управления первого игрока в классах "контрстратегии — стратегии", когда управляющие воздействия второго игрока назначались случайным образом. Реализовалось значение показателя качества $\gamma \approx 0.12 < \rho_v$.

На рисунках цели обозначены черными точками. Точки на траекториях соответствуют моментам времени оценки качества движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
2. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
4. **Красовский А.Н.** Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 186–192.
5. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
6. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. **Лукоянов Н.Ю.** Одна дифференциальная игра с нетерминальной платой // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 85–90.
8. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
9. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
10. **Красовский А.Н., Решетова Т.Н.** Управление при дефиците информации: учеб. пособие. Свердловск: УрГУ, 1990. 104 с.
11. **Корнев Д.В.** О численном решении позиционных дифференциальных игр с нетерминальной платой // Автоматика и телемеханика. 2012. № 11. С. 60–75.

Поступила 3.09.2012

Гомоюнов Михаил Игоревич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: gomojunov@mail.ru

Корнев Дмитрий Васильевич
ассистент
Уральский федеральный университет
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: d.v.kornev@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК УДК 517.923

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. А. Григорян

С применением метода уравнения Риккати получены оценки снизу и сверху расстояния между двумя соседними нулями решения и производной решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка через его коэффициенты. Доказаны осцилляционные признаки и признак устойчивости, а также одна теорема об асимптотическом поведении нулей решений линейного уравнения второго порядка и об асимптотическом поведении одного из его решений.

Ключевые слова: уравнение Риккати, оценки расстояния между двумя соседними нулями, осциллируемость, неосциллируемость, осциллируемость на конечном отрезке, асимптотическое поведение, устойчивость.

G. A. Grigoryan. Some properties of solutions of second-order linear ordinary differential equations.

The Riccati equation method is used to obtain lower and upper estimates for the distance between two consecutive zeros of a solution and the derivative of the solution to a second-order linear ordinary differential equation in terms of its coefficients. Oscillation conditions and a stability condition are proved, and a theorem on the asymptotic behavior of zeros of solutions to a second-order linear equation and on the asymptotic behavior of one of the solutions to this equation is established.

Keywords: Riccati equation, estimation of the distance between two consecutive zeroes, oscillation, nonoscillation, oscillation on a finite interval, asymptotic behavior, stability.

Введение

Пусть $p(t), q(t)$ и $r(t)$ — непрерывные на $[t_0; +\infty)$ действительнозначные функции и пусть $p(t) > 0,\ t \in [t_0; +\infty)$. Рассмотрим уравнение

$$(p(t)\phi'(t))' + q(t)\phi'(t) + r(t)\phi(t) = 0, \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{1.1}$$

Изучение вопросов об осциллируемости или неосциллируемости, асимптотического поведения и устойчивости решений уравнения (1.1) является важной задачей качественной теории дифференциальных уравнений. Она имеет важное как теоретическое, так и прикладное значение, и этому посвящены многочисленные работы (см., например, [1] и цитированные в ней работы, [2–19]). Одним из эффективных и активно применяемых в настоящее время методов является метод уравнения Риккати (см. [13–15; 17; 19]).

В разд. 1 дается представление действительнозначных решений уравнения (1.1) через мнимую компоненту комплексного решения уравнения Риккати, соответствующего (1.1). С применением метода уравнения Риккати получены оценки снизу и сверху расстояния между двумя соседними нулями решения уравнения (1.1), а также оценки снизу и сверху расстояния между двумя соседними нулями производной решения (1.1) через коэффициенты уравнения. При этом оказывается, что оценка снизу расстояния между двумя последовательными нулями решения более точна, чем известная оценка Вале Пуссена [5, с. 212; 6, с. 125]. Оценка сверху расстояния между двумя соседними нулями получена при ограничениях $q^2(t) - 4p(t)r(t) < 0, r(t) > 0$, где t пробегает отрезок, содержащий последовательные нули. Эти ограничения обусловлены исключительно применяемым методом.

Следует отметить, что при $r(t) \le 0,\ t \in [t_0; +\infty),\ q(t) \equiv 0$ не имеет смысла говорить о расстоянии между двумя соседними нулями решения (1.1), ибо в этом случае любое нетривиальное решение (1.1) имеет не более одного нуля [2, с. 422]. На основе соотношений, полученных в разд. 1, в разд. 2 доказываются осцилляционные признаки и признак устойчивости для (1.1). Доказывается одна теорема об асимптотическом поведении нулей решений осциллирующего уравнения (1.1) и об асимптотическом поведении решения (1.1). В формулировке теоремы 1 в отличие от результатов работ [17; 18] не фигурируют свободные параметры и параметры-функции, создающие дополнительные трудности при применении указанных результатов. Теорема 3 носит частично условный характер: устанавливается устойчивость (1.1) по определенным свойствам его коэффициентов при предположении, что каждое решение (1.1) (производная каждого решения (1.1)) ограничено. Замечательный результат такого типа с изящным доказательством для случая $p(t) \equiv 1,\ q(t) \equiv 0$ имеется в [5, с. 221, 222]. Ограничение $q(t) \ge 0,\ t \in [t_0; +\infty)$, фигурирующее в условиях теоремы 3, в некотором смысле близко (ввиду формулы Лиувилля) к необходимому условию устойчивости (1.1): $\inf\limits_{t \ge t_0} \int_{t_0}^{t} q(\tau)/p(\tau)d\tau > -\infty$.

1. Вспомогательные соотношения

Рассмотрим уравнение Риккати, соответствующее (1.1)

$$y'(t) + [1/p(t)]y^2(t) + [q(t)/p(t)]y(t) + r(t) = 0, \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{2.1}$$

Уравнения (1.1) и (2.1) связаны между собой посредством соотношений (см. [2, с. 351, 352; 20, с. 153, 154])

$$[p(t)\phi'(t)]/\phi(t) = y(t), \quad \phi(t) = \lambda_0 \exp\biggl\{\int\limits_{t_0}^{t} y(\tau)/p(\tau)d\tau\biggr\}, \tag{2.2}$$

$t \in [t_0; +\infty), \lambda_0 = \mathrm{const} \ne 0$. Покажем, что решение $\widetilde{y}_0(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее начальному условию $\widetilde{y}_0(t_0) = p(t_0)i$, существует на всем $[t_0; +\infty)$. Пусть $\phi_\pm(t)$ — решения уравнения (1.1) такие, что

$$\phi_+(t_0) = \phi'_-(t_0) = 1, \quad \phi'_+(t_0) = \phi_-(t_0) = 0. \tag{2.3}$$

Поскольку вронскиан

$$W(t) \equiv \begin{vmatrix} \phi_+(t) & \phi_-(t) \\ \phi'_+(t) & \phi'_-(t) \end{vmatrix} = \exp\biggl\{-\int\limits_{t_0}^{t} q(\tau)/p(\tau)d\tau\biggr\} \ne 0, \quad t \in [t_0; +\infty),$$

то $\phi_\pm(t)$ линейно независимы. Рассмотрим (комплекснозначную) функцию $\widetilde{\phi}(t) \equiv \equiv \phi_+(t) + i\phi_-(t)$. Как (комплексная) линейная комбинация решений $\phi_\pm(t)$ уравнения (1.1) $\widetilde{\phi}(t)$ является (комплексным) решением последнего. Так как $\phi_\pm(t)$ линейно независимы и действительнозначны, то из определения $\widetilde{\phi}(t)$ видно, что $\widetilde{\phi}(t) \ne 0, t \in [t_0; +\infty)$. В силу (2.2) следует, что $\widetilde{y}_0(t) \equiv [p(t)\widetilde{\phi}'_0(t)]/\widetilde{\phi}_0(t)$ — решение уравнения (2.1) на $[t_0; +\infty)$. Из (2.3) имеем, что $\widetilde{y}_0(t_0) = p(t_0)i$.

Пусть $x_0(t) \equiv Re\widetilde{y}_0(t), z_0(t) \equiv Im\widetilde{y}_0(t),\ t \in [t_0; +\infty)$. Тогда $\widetilde{y}_0(t) = x_0(t) + iz_0(t),\ t \in [t_0; +\infty)$. Подставляя $x_0(t)+iz_0(t)$ в (2.1) и отделяя действительную и мнимую части, приходим в частности к равенству

$$z'_0(t) + [(2x_0(t) + q(t))/p(t))]\, z_0(t) = 0, \quad t \in [t_0; +\infty).$$

С учетом равенства $z_0(t_0) = p(t_0)$ отсюда получим

$$z_0(t) = p(t_0)\exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t}[2x_0(\tau) + q(\tau)]/p(\tau)d\tau\Big\}, \quad t \in [t_0;+\infty).$$

Следовательно,

$$\exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{t} x_0(\tau)/p(\tau)d\tau\Big\} = E(t)/\sqrt{z_0(t)}, \quad t \in [t_0;+\infty), \tag{2.4}$$

где $E(t) \equiv \sqrt{p(t_0)}\exp\Big\{-1/2\int_{t_0}^{t} q(\tau)/p(\tau)d\tau\Big\}$.

Из (2.2)–(2.4) легко вывести равенства

$$\phi_+(t) = E(t)/\sqrt{z_0(t)}\cos\Big(\int\limits_{t_0}^{t} z_0(\tau)/p(\tau)d\tau\Big), \quad t \in [t_0;+\infty); \tag{2.5}$$

$$\phi_-(t) = E(t)/\sqrt{z_0(t)}\sin\Big(\int\limits_{t_0}^{t} z_0(\tau)/p(\tau)d\tau\Big), \quad t \in [t_0;+\infty); \tag{2.6}$$

$$\phi_+^2(t) + \phi_-^2(t) = E^2(t)/z_0(t), \quad t \in [t_0;+\infty); \tag{2.7}$$

$$\phi_-'(t)\cos\Big(\int\limits_{t_0}^{t} z_0(\tau)/p(\tau)d\tau\Big) - \phi_+'(t)\sin\Big(\int\limits_{t_0}^{t} z_0(\tau)/p(\tau)d\tau\Big)$$
$$= [E(t)/p(t)]\sqrt{z_0(t)}, \quad t \in [t_0;+\infty). \tag{2.8}$$

.

Пусть $\phi_0(t)$ — решение уравнения (1.1) с соседними нулями $t_1 < t_2$:

$$\phi_0(t_j) = 0, \quad j = 1,2, \quad \phi_0(t) \neq 0, \quad t \in (t_1;t_2). \tag{2.9}$$

В уравнении (2.1) произведем замену $y(t) = ctg\theta(t)$, $t \in [t_0;+\infty)$. Придем к уравнению

$$\theta'(t) = [1 + p(t)r(t)]/2p(t)$$
$$+ [1/2p(t)]\sqrt{(1 - p(t)r(t))^2 + q^2(t)}\sin(2\theta(t) + \nu(t)),\ t \in [t_0;+\infty), \tag{2.10}$$

где

$$\nu(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}[1 - p(t)r(t)]/q(t), & q(t) \neq 0, \quad t \in [t_0;+\infty); \\ \pm\pi/2, & q(t) = 0, \quad t \in [t_0;+\infty). \end{cases}$$

В силу (2.2) из (2.9) следует, что $y_0(t) \equiv [p(t)\phi_0'(t)]/\phi_0(t)$ — решение уравнения (2.1) на $(t_1;t_2)$, и $(t_1;t_2)$ является максимальным интервалом существования для $y_0(t)$. Тогда $\theta_0(t) \equiv \operatorname{arctg} y_0(t)$ $(t \in (t_1;t_2))$ — решение уравнения (2.10) на $(t_1;t_2)$, и поэтому имеет место оценка

$$R_-(t) \leq 2\theta_0'(t) \leq R_+(t), \quad t \in (t_1;t_2), \tag{2.11}$$

где $R_\pm(t) \equiv [1 + p(t)r(t)]/p(t) \pm \sqrt{(1 - p(t)r(t))^2 + q^2(t)}/p(t)$, $t \in [t_0;+\infty)$. Поскольку в силу (2.2) $y_0(t) \to +\infty$ при $t \to t_1 + 0$ и $y_0(t) \to +\infty$ при $t \to t_2 - 0$, то существуют $\theta_0(t_1 + 0) \stackrel{def}{=} \theta_0(t_1)$ и $\theta_0(t_2 - 0) \stackrel{def}{=} \theta_0(t_2)$. При этом

$$\theta_0(t_2) - \theta_0(t_1) = \pi. \tag{2.12}$$

Интегрируем (2.11) в пределах от t_1 до t_2. С учетом (2.12) получим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} R_-(\tau)d\tau \le 2\pi \le \int\limits_{t_1}^{t_2} R_+(\tau)d\tau. \tag{2.13}$$

Пусть $I(\subset [t_0;+\infty))$ — отрезок, содержащий $(t_1;t_2)$. Обозначим: $m_I \equiv \min\limits_{t\in I} R_-(t)$, $M_I \equiv \max\limits_{t\in I} R_+(t)$. Из (2.13) следует

1) $t_2 - t_1 \ge 2\pi p(t)/M_I$;

2) если $1 + p(t)r(t) > \sqrt{(1-p(t)r(t))^2 + q^2(t)}$, $t \in I$, или, что то же самое, если $q^2(t) - 4p(t)r(t) < 0$, $t \in I$, то

$$t_2 - t_1 \le 2\pi/m_I.$$

В уравнении (1.1) произведем замену $\phi(t) = \psi(\alpha t)$, $t \in [t_0;+\infty)$, где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Придем к уравнению

$$(p_\alpha(t)\psi'(t))' + q_\alpha(t)\psi'(t) + r_\alpha(t)\psi(t) = 0, \quad t \in [\alpha t_0;+\infty), \tag{2.14}$$

где

$$p_\alpha(t) \equiv p\Big(\frac{t}{\alpha}\Big), \quad q_\alpha(t) \equiv \frac{1}{\alpha} q\Big(\frac{t}{\alpha}\Big), \quad r_\alpha(t) \equiv \frac{1}{\alpha^2} r\Big(\frac{t}{\alpha}\Big), \quad t \in [\alpha t_0;+\infty).$$

Пусть $\psi_0(t) \equiv \phi_0\Big(\dfrac{t}{\alpha}\Big)$, $t \in [\alpha t_0;+\infty)$. Очевидно, $\psi_0(t)$ — решение уравнения (2.14), а αt_1 и αt_2 — соседние нули $\psi_0(t)$. Обозначим

$$R_\alpha^\pm(t) \equiv [1 + p_\alpha(t)r_\alpha(t)]/p_\alpha(t) \pm \sqrt{(1 - p_\alpha(t)r_\alpha(t))^2 + q_\alpha^2(t)}/p_\alpha(t),$$

$t \in [\alpha t_0;+\infty), \alpha I \equiv \{\alpha t : t \in I\}$, $m_I(\alpha) \equiv \min\limits_{t\in\alpha I} R_\alpha^-(t)$, $M_I(\alpha) \equiv \max\limits_{t\in\alpha I} R_\alpha^+(t)$. Тогда в силу 1) и 2) будем соответственно иметь

1_α) $t_2 - t_1 \ge [2\pi]/[\alpha M_I(\alpha)]$;

2_α) если $q_\alpha^2(t) - 4p_\alpha(t)r_\alpha(t) < 0$, $t \in \alpha I$, или, что то же самое , если $q^2(t) - 4p(t)r(t) < 0$, $t \in I$, то $t_2 - t_1 \le [2\pi]/[\alpha m_I(\alpha)]$.

Нетрудно проверить, что

$$\alpha M_I(\alpha) = \max_{t\in I}\Big\{\alpha/p(t) + r(t)/\alpha + \sqrt{(\alpha/p(t) - r(t)/\alpha)^2 + (q(t)/p(t))^2}\,\Big\},$$

$$\alpha m_I(\alpha) = \min_{t\in I}\Big\{\alpha/p(t) + r(t)/\alpha - \sqrt{(\alpha/p(t) - r(t)/\alpha)^2 + (q(t)/p(t))^2}\,\Big\}.$$

Следовательно,

$$\alpha M_I(\alpha) \le \max_{t\in I}\Big\{\frac{\alpha}{p(t)} + \frac{r(t)}{\alpha} + \Big|\frac{\alpha}{p(t)} - \frac{r(t)}{\alpha}\Big| + \Big|\frac{q(t)}{p(t)}\Big|\Big\}, \tag{2.15}$$

$$\alpha m_I(\alpha) \ge \min_{t\in I}\Big\{\frac{\alpha}{p(t)} + \frac{r(t)}{\alpha} - \Big|\frac{\alpha}{p(t)} - \frac{r(t)}{\alpha}\Big| - \Big|\frac{q(t)}{p(t)}\Big|\Big\}. \tag{2.16}$$

Пусть $s \in [t_0;+\infty)$, $h > 0$, $I \equiv I(s;h) = [s; s+h](\supset (t_1;t_2))$. Обозначим $m_1 = m_1(s;h) \equiv \min\limits_{t\in I} p(t)$, $M_1 = M_1(s;h) \equiv \max\limits_{t\in I} p(t)$, $M_2 = M_2(s;h) \equiv \max\limits_{t\in I}[|q(t)|/p(t)]$, $m_3 = m_3(s;h) \equiv \min\limits_{t\in I} |r(t)|$, $M_3 = M_3(s;h) \equiv \max\limits_{t\in I} |r(t)|$.

Заметим, что для произвольных действительных чисел a и b выполняются равенства

$$a + b + |a - b| = 2\max\{a,b\}, \tag{2.17}$$

$$a + b - |a - b| = 2\min\{a,b\}. \tag{2.18}$$

Положим в (2.15) $\alpha = \sqrt{m_1 M_3}$. С учетом (2.17) получим $\alpha M_I(\alpha) \leq 2\sqrt{M_3/m_1} + M_2$, а отсюда и из 1_α) — оценку

$$t_2 - t_1 \geq 2\pi\sqrt{m_1}/[2\sqrt{M_3} + \sqrt{m_1}M_2]. \tag{2.19}$$

Положим в (2.16) $\alpha = \sqrt{M_1 m_3}$. С учетом (2.18) получим

$$\alpha m_I(\alpha) \geq 2\sqrt{m_3/M_1} - M_2. \tag{2.20}$$

Легко показать, что если $2\sqrt{\dfrac{m_3}{M_1}} > M_2$ и $r(t) > 0,\ t \in I$, то $q^2(t) - 4p(t)r(t) < 0,\ t \in I$. Тогда из 2_α) и (2.20) имеем

$$t_2 - t_1 \leq 2\pi\sqrt{M_1}/[2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2] \tag{2.21}$$

$$(2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2 > 0,\ r(t) > 0,\ t \in I).$$

Для случая $p(t) \equiv 1 (m_1 = M_1 = 1)$ известны оценки Вале Пуссена (см. [5, с. 212, 6, с. 125]):

$$t_2 - t_1 \geq 2/M_2 \quad (M_3 = 0); \tag{2.22}$$

$$t_2 - t_1 \geq [2(\sqrt{M_2^2 + 2M_3} - M_2)]/M_3 \quad (M_3 \neq 0). \tag{2.23}$$

Покажем, что при $p(t) \equiv 1$ оценка (2.19) точнее оценок (2.22) и (2.23). При $M_3 = 0$ оценка (2.19) дает

$$t_2 - t_1 \geq 2\pi/M_2,$$

так что в этом случае оценка (2.19) в π раз точнее оценки (2.22). При $M_3 \neq 0$ правая часть (2.19) относится к правой части (2.23) как

$$\frac{2\pi}{2\sqrt{M_3} + M_2} : \frac{2(\sqrt{M_2^2 + 2M_3} - M_2)}{M_3} \geq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11.$$

Следовательно, при $M_3 \neq 0$ оценка (2.19) по меньшей мере в $\pi/[2\sqrt{2}] \approx 1,11$ раза точнее оценки (2.23). Заметим, что оценки (2.19) и (2.21) при $M_2 = 0$ ($q(t) \equiv 0$) следуют из теоремы сравнения Штурма. Следует отметить, что на основе теоремы сравнения Штурма можно получить оценки расстояния между двумя соседними нулями решения (1.1) преобразованием (1.1) к виду, не содержащему $\phi'(t)$. При этом нужно учитывать связь между нулями решений исходного и преобразованного уравнений.

В уравнении (2.1) произведем замену $y(t) = 1/v(t),\ t \in [t_0; +\infty)$. Придем к уравнению

$$v'(t) = r(t)v^2(t) - [q(t)/p(t)]v(t) + 1/p(t), \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{2.24}$$

В силу (2.2) решения $v(t)$ уравнения (2.24) связаны с решениями $\phi(t)$ уравнения (1.1) посредством соотношений

$$\phi(t)/[p(t)\phi'(t)] = v(t), \quad \phi(t) = \lambda_0 \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} d\tau/[p(\tau)v(\tau)]\right\}, \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{2.25}$$

В уравнении (2.24) произведем замену $v(t) = \operatorname{tg}\theta(t),\ t \in [t_0; +\infty)$. Придем к уравнению

$$\theta'(t) = [1 + p(t)r(t)]/2p(t) - \left(\sqrt{(1 - p(t)r(t))^2 + q^2(t)}/[2p(t)]\right)\sin(2\theta(t) + \nu(t)), \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{2.26}$$

Пусть $t_1' < t_2'$ — два соседних нуля $\phi_0'(t)$:

$$\phi_0'(t_j') = 0, \quad j = 1, 2, \quad \phi_0'(t) \neq 0, \quad t \in (t_1'; t_2'). \tag{2.27}$$

В силу (2.25) из (2.27) следует, что $v_0(t) \equiv \phi_0(t)/[p(t)\phi_0'(t)]$ — решение уравнения (2.24) на $(t_1';t_2')$ и $(t_1';t_2')$ — максимальный интервал существования для $v_0(t)$. Тогда $\theta_1(t) \equiv \operatorname{arctg} v_0(t)$ — решение уравнения (2.26) на $(t_1';t_2')$. В силу (2.25) выполняются соотношения: $v_0(t) \to -\infty$ при $t \to t_1' + 0$, $v_0(t) \to +\infty$ при $t \to t_2' - 0$. Поэтому существуют $\theta_1(t_1'+0) \overset{def}{=} \theta_1(t_1')$ и $\theta_1(t_1'+0) \overset{def}{=} \theta_1(t_1')$, при этом

$$\theta_1(t_2') - \theta_1(t_1') = \pi. \tag{2.28}$$

В силу (2.26) имеет место оценка $R_-(t) \le 2\theta_1'(t) \le R_+(t),\ t \in (t_1';t_2')$. Интегрируем ее в пределах от t_1' до t_2'. С учетом (2.28) получим

$$\int\limits_{t_1'}^{t_2'} R_-(\tau)d\tau \le 2\pi \le \int\limits_{t_1'}^{t_2'} R_+(\tau)d\tau.$$

Сопоставляя эту оценку с (2.13), приходим к заключению, что при $(t_1';t_2') \subset I = I(s;h)$ выполняются оценки, аналогичные (2.19) и (2.21):

$$t_2' - t_1' \ge 2\pi\sqrt{m_1}/[2\sqrt{M_3} + \sqrt{m_1}M_2]; \tag{2.29}$$

$$t_2' - t_1' \le 2\pi\sqrt{M_1}/[2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2] \tag{2.30}$$

$$(2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2 > 0,\ r(t) > 0,\ t \in I).$$

Обозначим $M(\phi_0) \equiv \max\limits_{t\in[t_1;t_2]} |\phi_0(t)|,\ M(\phi_0') \equiv \max\limits_{t\in[t_1;t_2]} |\phi_0'(t)|$. Поскольку $\phi_0(t_1) = 0$, то $\phi_0(t) = \int_{t_1}^{t} \phi_0'(\tau)d\tau,\ t \in [t_1;t_2]$. Поэтому $M(\phi_0) \le (t_2 - t_1)M(\phi_0')$. Отсюда и из (2.21) получим

$$M(\phi_0) \le \big(2\pi\sqrt{M_1}/[2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2]\big)M(\phi_0') \tag{2.31}$$

$$(2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2 > 0,\ r(t) > 0, \quad t \in I \supset (t_1;t_2)).$$

Рассмотрим (1.1) как линейное уравнение первого порядка относительно $p(t)\phi'(t)$ со свободным членом $r(t)\phi(t)$. Тогда

$$\phi'(t) = [1/p(t)]\exp\Bigg\{-\int\limits_{t_{(0)}}^{t}[q(u)/p(u)]du\Bigg\}\Bigg[p(t_{(0)})\phi'(t_{(0)})$$

$$-\int\limits_{t_{(0)}}^{t}\exp\Bigg\{\int\limits_{t_{(0)}}^{\tau}[q(u)/p(u)]du\Bigg\}r(\tau)\phi(\tau)d\tau\Bigg], \quad t, t_{(0)} \in [t_0;+\infty) \tag{2.32}$$

т. е. уравнение (1.1) эквивалентно (2.32). Поскольку $\phi_0'(t_1') = 0$, то в силу (2.32)

$$\phi_0'(t) = -[1/p(t)]\int\limits_{t_{(0)}}^{t}\exp\Bigg\{\int\limits_{t_{(0)}}^{\tau}[q(u)/p(u)]du\Bigg\}r(\tau)\phi(\tau)d\tau, \quad t \in [t_1';t_2']. \tag{2.33}$$

Обозначим $\widetilde{M}(\phi_0) = \max\limits_{t\in[t_1';t_2']} |\phi_0(t)|,\ \widetilde{M}(\phi_0') = \max\limits_{t\in[t_1';t_2']} |\phi_0'(t)|$. Пусть $q(t) \ge 0,\ t \in [t_1';t_2'] \subset I$. Тогда из (2.33) следует $\widetilde{M}(\phi_0') \le [M_3/m_1](t_2' - t_1')\widetilde{M}(\phi_0)$. Отсюда и из (2.30) получим

$$\widetilde{M}(\phi_0') \le (2\pi\sqrt{M_1}/[2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2])\widetilde{M}(\phi_0), \tag{2.34}$$

$$\big(2\sqrt{m_3} - \sqrt{M_1}M_2 > 0, \quad q(t) \geq 0, \quad r(t) > 0, \quad t \in I \supset [t_1'; t_2']\big).$$

Пусть $p_1(t), q_1(t)$ и $r_1(t)$ — непрерывные на $[t_0; +\infty)$ действительнозначные функции, и пусть $p_1(t) > 0,\ t \in [t_0; +\infty)$. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y'(t) + [1/p_1(t)]y^2(t) + [q_1(t)/p_1(t)]y(t) + r_1(t) = 0, \quad t \in [t_0; +\infty), \tag{2.35}$$

и дифференциальные неравенства

$$\eta'(t) + [1/p(t)]\eta^2(t) + [q(t)/p(t)]\eta(t) + r(t) \geq 0, \quad t \in [t_0; +\infty), \tag{2.36}$$

$$\eta'(t) + [1/p_1(t)]\eta^2(t) + [q_1(t)/p_1(t)]\eta(t) + r_1(t) \geq 0, \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{2.37}$$

Нетрудно показать, что неравенства (2.36) и (2.37) имеют на $[t_0; +\infty)$ решения со сколь угодно большими начальными значениями. В дальнейшем нам понадобится следующая

Теорема A [19, теорема 3.1]. *Пусть $y_0(t)$ — решение уравнения* (2.1) *на $[a; b)(\subset [t_0; +\infty))$, а $\eta_0(t)$ и $\eta_1(t)$ — решения соответственно неравенств* (2.36) *и* (2.37) *с $\eta_0(a) \geq y_0(a),\ \eta_1(a) \geq y_0(a)$. Пусть, кроме того,*

$$y_{(1)} - y_0(a) + \int\limits_a^t \exp\Big\{\int\limits_a^\tau [\eta_0(u) + \eta_1(u) + q_1(u)/p_1(u)]\, du\Big\}$$

$$\times\Big[\,(1/p(\tau) - 1/p_1(\tau))\, y_0^2(\tau) + (q(\tau)/p(\tau) - q_1(\tau)/p_1(\tau))\, y_0(\tau) + r(\tau) - r_1(\tau)\Big] d\tau \geq 0,$$

$t \in [a; b)$, для некоторого $y_{(1)} \in [y_0(a); \eta_1(a)]$. Тогда уравнение (2.35) *имеет решение $y_1(t)$ на $[a; b)$ такое, что $y_1(t) \geq y_0(t),\ t \in [a; b)$.*

2. Некоторые свойства решений уравнения (1.1)

О п р е д е л е н и е 1. Уравнение (1.1) называется осциллирующим, если его некоторое ненулевое (а следовательно, каждое) действительное решение имеет бесконечное число нулей. В противном случае уравнение (1.1) называется неосциллирующим.

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *было осциллирующим, необходимо, чтобы*

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} R_+(\tau) d\tau = +\infty, \tag{3.1}$$

и достаточно, чтобы

$$\sup_{t \geq t_0} \int\limits_{t_0}^{t} R_-(\tau) d\tau = +\infty. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ — все нули решения $\phi(t)$ уравнения (1.1). В силу (2.13) выполняются неравенства

$$\int\limits_{t_1}^{t_n} R_+(\tau) d\tau \geq 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.3}$$

Нетрудно убедиться, что $R_+(t) > 0,\ t \in [t_0; +\infty)$. Тогда из (3.3) следует (3.1).

Достаточность. Предположим, что уравнение (1.1) неосциллирующее. Тогда существует действительное решение $\phi_0(t)$ уравнения (1.1) такое, что $\phi_0(t) \neq 0,\ t \in [T; +\infty)$, для некоторого $T \geq t_0$. Значит, в силу (2.2) $y_0(t) \equiv [p(t)\phi_0'(t)]/\phi(t)$ — решение уравнения (2.1) на $[T; +\infty)$, а следовательно, $\theta_0(t) \equiv \operatorname{arctg} y_0(t)$ — решение (2.19) на $[T;+\infty)$. Тогда $R_-(t) \le 2\theta_0'(t)$, $t \in [T;+\infty)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_T^t R_-(\tau)d\tau \le 2(\theta_0(t) - \theta_0(T)) \le 2\pi, \quad t \in [T;+\infty),$$

а это противоречит (3.2). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Из теоремы (3.1) непосредственно вытекает

Следствие 1. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *было неосциллирующим, необходимо, чтобы*

$$\sup_{t \ge t_0} \int\limits_{t_0}^t R_-(\tau)d\tau < +\infty,$$

и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} R_+(\tau)d\tau < +\infty.$$

Следствие 2. *Пусть* $p(t)r(t)$ *и* $q(t)$ *ограничены* $4p(t)r(t) - q^2(t) \ge 0$, $t \in [t_0;+\infty)$,

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} \Big([4p(\tau)r(\tau) - q^2(\tau)]/p(\tau)\Big)d\tau = +\infty. \tag{3.4}$$

Тогда уравнение (1.1) *осциллирующее.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $p(t)r(t)$ и $q(t)$ ограничены, то $0 < R_+(t) \le K$, $t \in [t_0 : +\infty)$, $K = \mathrm{const} > 0$. Тогда в силу неотрицательности $4p(t)r(t) - q^2(t)$ будем иметь

$$\int\limits_{t_0}^t R_-(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^t \frac{4p(\tau)r(\tau) - q^2(\tau)}{p(\tau)R_+(\tau)}d\tau \ge [1/K] \int\limits_{t_0}^t \frac{4p(\tau)r(\tau) - q^2(\tau)}{p(\tau)}d\tau, \quad t \in [t_0;+\infty).$$

Отсюда и из (3.4) следует (3.2). Поэтому в силу теоремы 1 уравнение (1.1) осциллирующее. Следствие доказано.

О п р е д е л е н и е 2. Уравнение (1.1) называется осциллирующим на отрезке $[a;b](\subset [t_0;+\infty))$, если каждое его действительное решение имеет по меньшей мере один нуль на $(a;b)$.

Пусть $s \in [t_0;+\infty)$, $h > 0$. Обозначим $d(s;h) \equiv 4m_3(s;h) - M_1(s;h)M_2(s;h)^2$.

Теорема 2. *Пусть* $r(t) > 0$, $t \in [t_0;+\infty)$, *и пусть при некотором* $s > t_0$ *числа* $h = h^0$ *и* $h_1 = h_1^0$ *образуют решение системы*

$$\begin{cases} h^2 d(s;h) = 4\pi^2 M_1(s;h); \\ h_1^2 d(s+h;h_1) = 4\pi^2 M_1(s+h;h_1); \\ h > 0,\ h_1 > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Тогда уравнение (1.1) *осциллирующее на* $[s;s+h^0+h_1^0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\phi_0(t)$ — ненулевое действительное решение уравнения (1.1). Докажем, что $\phi_0(t)$ имеет нуль на $(s;s+h^0+h^1)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\phi_0(t) \ge 0$ в некоторой правой окрестности точки s. Возможны два случая: а) $\phi_0'(s) \le 0$; б) $\phi_0'(s) > 0$. Пусть имеет место а). Покажем, что тогда $\phi_0(t)$ обращается в нуль на $(s;s+h^0)$. Предположим, что $\phi_0(t)$ на $(s;s+h^0)$ не обращается в нуль. Тогда поскольку $\phi_0(s) > 0$, то

$$\phi_0(t) > 0, \quad t \in [s;s+h^0). \tag{3.6}$$

Поскольку $r(t) > 0,\ t \in [s; s+h^0)$, и $\phi_0'(s) \le 0$, то в силу (2.33) из (3.6) вытекает, что $\phi_0'(t) \le 0,\ t \in [s; s+h^0)$. Отсюда следует, что решение уравнения (2.1) может быть записано так:

$$y_0(t) \equiv [p(t)\phi_0'(t)]/\phi_0(t) \le 0, \quad t \in [s; s+h^0). \tag{3.7}$$

Положим $p_1(t) \equiv p_1 = M_1(s; h^0),\ q_1(t) \equiv q_1 = M_1(s; h^0)M_2(s; h^0),\ \ r_1(t) \equiv r_1 = m_3(s; h^0),\ t \in [s; s+h_0]$. Тогда

$$1/p(t) - 1/p_1(t) \ge 0,\ r(t) - r_1(t) \ge 0, \quad t \in [s; s+h^0], \tag{3.8}$$

а из (3.7) следует

$$(q(t)/p(t) - q_1(t)/p_1(t))\, y_0(t) \ge 0, \quad t \in [s; s+h^0].$$

В силу теоремы А и из (3.8) следует, что уравнение (2.35) имеет действительное решение на $[s; s+h^0)$. Значит, в силу (2.2) уравнение

$$p_1\phi''(t) + q_1\phi'(t) + r_1\phi(t) = 0, \quad t \in [s; s+h^0], \tag{3.9}$$

имеет действительное решение $\phi_1(t) \ne 0,\ t \in [s; s+h^0)$. Но, с другой стороны, в силу того что $h = h_0$ удовлетворяет первому из уравнений системы (3.5), имеет место равенство

$$\phi_1(t) = \mu_1 e^{-[q_1/(2p_1)]t} \sin\left([\pi/h^0]t + \nu_1\right), \quad t \in [t_0; +\infty),$$

где $\mu_1 (\ne 0)$ и ν_1 — некоторые действительные постоянные. Отсюда видно, что $\phi_1(t)$ обращается в нуль на $[s; s+h^0)$. Полученное противоречие показывает, что $\phi_0(t)$ обращается в нуль на $(s; s+h^0)$ (так как $\phi_0(s) > 0$). Предположим теперь, что имеет место случай б). Возможны два подслучая: б$_1$) $\phi_0'(s+h^0) \le 0$; б$_2$) $\phi_0'(s+h^0) > 0$. Если в случае б$_1$) $\phi_0(t)$ обращается в нуль на $(s; s+h^0]$, то теорема доказана. В противном случае б$_1$) аналогичен а). Тогда, повторяя рассуждения, приводившиеся при рассмотрении случая а) (заменив при этом s на $s+h^0$, h^0 на h_1^0), приходим к заключению, что $\phi_0(t)$ обращается в нуль на $(s+h^0; s+h^0+h_1^0)$. Остается рассмотреть случай б$_2$). Поскольку $r(t) > 0,\ \phi(t) > 0,\ t \in (s; s+h^0)$, то функция $f(t) \equiv p(s)\phi_0'(s) - \displaystyle\int_s^t \exp\left\{\int_s^\tau [q(u)/p(u)]du\right\} r(\tau)\phi_0(\tau)d\tau$ монотонно убывает на $[s; s+h^0]$. Так как $\phi_0'(s) > 0$ и $\phi_0'(s+h^0) > 0$, то в силу (2.32) $\phi_0'(t) > 0,\ t \in (s; s+h^0]$. Значит, решение уравнения (2.1) может быть записано в виде

$$y_0(t) \equiv [p(t)\phi_0'(t)]/\phi_0(t) > 0,\ t \in (s; s+h^0]. \tag{3.10}$$

Пусть $p_1(t) \equiv p_1,\ q_1(t) \equiv q_1,\ r_1(t) \equiv r_1,\ t \in [s; s+h_0]$, где p_1, q_1, r_1 те же, что и в (3.9), величины. Тогда из (3.10) получаем

$$(q(t)/p(t) - q_1(t)/p_1(t))\, y_0(t) \ge 0, \quad t \in (s; s+h^0].$$

В силу теоремы А и из (3.8), (3.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < h_0)$ уравнение

$$y'(t) + [1/p_1]y^2(t) - [q_1/p_1]y(t) + r_1 = 0, \quad t \in [t_0; +\infty), \tag{3.11}$$

имеет действительное решение $y_\varepsilon(t)$ на $[s+\varepsilon; s+h^0]$, при этом

$$y_\varepsilon(s+h_0) \ge y_0(s+h_0). \tag{3.12}$$

Пусть $\widetilde{y}(t)$ — решение (3.11) с $\widetilde{y}(s+h_0) = y_0(s+h_0)$. Тогда в виду (3.12) имеем $\widetilde{y}(s+h_0) \le y_\varepsilon(s+h_0)$ для всех $\varepsilon > 0$, следовательно, $\widetilde{y}(t)$ продолжается на $(s; s+h^0]$. Значит, в силу (2.2) уравнение

$$p_1\phi''(t) - q_1\phi'(t) + r_1\phi(t) = 0, \quad t \in [s; s+h^0],$$

имеет действительное решение, которое не обращается в нуль на $(s; s+h^0]$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что $\phi_0(t)$ обращается в нуль на $(s; s+h^0]$. Теорема 2 доказана.

Пусть для каждого $s \in [t_0; +\infty)$ число $h(s) > 0$ такое, что любое решение уравнения (1.1) имеет по меньшей мере два нуля на $[s; s+h(s)]$, а $h_1(s) > 0$ такое, что производная каждого решения уравнения (1.1) имеет по меньшей мере два нуля на $[s; s+h_1(s)]$. Пусть $r(t) > 0,\ t \in [t_0; +\infty)$. Обозначим

$$A(s) \equiv \frac{\sqrt{M_1(s; h(s))}}{2\sqrt{m_3(s; h(s))} - \sqrt{M_1(s; h(s))}M_2(s; h(s))}$$

$$(2\sqrt{m_3(s; h(s))} - \sqrt{M_1(s; h(s))}M_2(s; h(s)) > 0);$$

$$B(s) \equiv \frac{\sqrt{M_1(s; h_1(s))}M_3(s; h_1(s))}{m_1(s; h_1(s))[2\sqrt{m_3(s; h_1(s))} - \sqrt{M_1(s; h_1(s))}M_2(s; h_1(s))]}$$

$$(2\sqrt{m_3(s; h_1(s))} - \sqrt{M_1(s; h_1(s))}M_2(s; h_1(s)) > 0),$$

$s \in [t_0; +\infty)$. Из оценок (2.31) и (2.34) непосредственно получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $r(t) > 0,\ t \in [t_0; +\infty)$, и пусть уравнение (1.1) осциллирующее. Тогда*

1. *Если $q(t) \geq 0,\ t \in [t_0; +\infty),\ 2\sqrt{m_3(s; h_1(s))} - \sqrt{M_1(s; h_1(s))}M_2(s; h_1(s)) > 0,\ s \in [t_0; +\infty)$, $B(s)$ ограничена и все решения $\phi(t)$ уравнения (1.1) ограничены (стремятся к нулю при $t \to +\infty$), то уравнение (1.1) устойчиво по Ляпунову (асимптотически).*

2. *Если $2\sqrt{m_3(s; h(s))} - \sqrt{M_1(s; h(s))}M_2(s; h(s)) > 0,\ s \in [t_0; +\infty)$, $A(s)$ ограничена и производная каждого решения $\phi(t)$ уравнения (1.1) ограничена (стремится к нулю при $t \in +\infty$), то уравнение (1.1) устойчиво по Ляпунову (асимптотически).*

Теорема 4. *Пусть $r(t) > 0,\ t \in [t_0; +\infty)$, и пусть выполняются следующие условия:*

1) *$p(t) = o(r(t)),\quad q(t) = o(\sqrt{p(t)r(t)}),\quad t \to +\infty$;*

2) *существует окрестность $\delta(0)$ точки нуль и число $N > 0$ такие, что*

$$\max_{\xi \in \delta(0)} p(t+\xi) / \min_{\xi \in \delta(0)} p(t+\xi) \leq N, \quad \max_{\xi \in \delta(0)} r(t+\xi) / \min_{\xi \in \delta(0)} r(t+\xi) \leq N, \quad t \in [t_0; +\infty).$$

Тогда уравнение (1.1) осциллирующее. Если $t_1(\phi) < \ldots < t_n(\phi) < \ldots$ — все нули решения $\phi(t)$ уравнения (1.1), то

$$\lim_{n \to \infty} [t_{n+1}(\phi) - t_n(\phi)] = 0. \tag{3.13}$$

Кроме того, если еще $q(t)$ неотрицательна и

3) $$\int\limits_{t_9}^{+\infty} [q(u)/p(u)]du < +\infty, \quad \overline{\lim_{t \to +\infty}} [r(t)/p^3(t)] = +\infty,$$

то существует решение $\phi_0(t)$ уравнения (1.1) такое, что

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\phi_0(t)| \sqrt{r(t)/p(t)} = +\infty. \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < h \in \delta(0)$. Тогда из условий 1) и 2) следует

$$4m_3(s; h)/M_1(s; h) - M_2(s; h)^2 \geq [4M_2(s; h)]/[N^2 m_1(s; h)] - M_2(s; h)^2$$

$$\geq [4/N^2] \max_{t \in [s; s+h]} \{r(t)/p(t)\} - \max_{t \in [s; s+h]} |q(t)/p(t)|^2 \to +\infty \text{ при } s \to +\infty.$$

Поэтому для всех достаточно больших значений s система (3.5) имеет решение. При этом если $h = h^0(s)$ и $h_1 = h_1^0(s)$ образуют решение (3.5), то $h^0(s) \to 0$, $h_1(s)^0 \to 0$ при $s \to +\infty$. Так как $r(t)$ положительна, то в силу теоремы 2 следует, что уравнение (1.1) осциллирующее и выполняется (3.13). Пусть еще $q(t)$ неотрицательна и выполняются условия 3) и 4). Предположим, что не существует решения $\phi_0(t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего соотношению (3.14). Тогда существуют постоянные $c_\pm$ такие, что

$$|\phi_\pm(t)| \le c_\pm \sqrt{p(t)/r(t)}, \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{3.15}$$

В силу (2.34) с учетом условия 2) получим

$$\widetilde{M}(\phi'_\pm) \le \frac{2\pi c_\pm \sqrt{M_1(s;h_1(s))}M_3(s;h_1(s))}{m_1(s;h_1(s))[2\sqrt{m_3(s;h_1(s))} - \sqrt{M_1(s;h_1(s))}M_2(s;h_1(s))]}$$

$$\times \max_{t\in[s;s+h]} \sqrt{\frac{p(t)}{r(t)}} \le \frac{M_1(s;h)M_3(s;h)}{m_1(s;h)m_3(s;h)} \frac{2\pi c_\pm}{\left(2 - M_2(s;h)\sqrt{\frac{M_1(s;h)}{m_3(s;h)}}\right)}$$

$$\le \frac{2\pi N^2 c_\pm}{2 - M_2(s;h)\sqrt{\frac{M_1(s;h)}{m_3(s;h)}}} \tag{3.16}$$

для всех достаточно больших значений s, где $h = h(s) \in \delta(0)$. В силу условия 1) имеем

$$|q(t)/p(t)|\sqrt{p(t)/r(t)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{3.17}$$

а в силу условия 2) — $\max\limits_{t\in[s;s+h]} \left\{|q(t)/p(t)|\sqrt{p(t)/r(t)}\right\} \ge M_2(s;h)/N\sqrt{M_1(s;h)/m_3(s;h)}$. Отсюда из (3.16) и (3.17) следует, что $\widetilde{M}(\phi'_\pm) \le 2\pi N^2 c_\pm$ для всех достаточно больших значений s. Значит, $\phi'_\pm(t)$ ограничены. Тогда из (2.8) получим

$$E(t)\sqrt{z_0(t)}/p(t) \le N_1 = \text{const}, \quad t \in [t_0; +\infty). \tag{3.18}$$

С другой стороны, из (2.7) и (3.15) следует, что

$$E(t)/\sqrt{z_0(t)} \le \sqrt{c_+^2 + c_-^2 p(t)/r(t)}, \quad t \in [t_0; +\infty).$$

В силу условия 3) имеем

$$E(t)\sqrt{z_0(t)}/p(t) \le N_2\sqrt{p(t)/r(t)}, \quad t \in [t_0; +\infty)$$

для некоторого $N_2 = \text{const} > 0$. Отсюда и из условия 4) следует, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, E(t)\sqrt{z_0(t)}/p(t) = +\infty,$$

а это противоречит (3.18). Полученное противоречие доказывает (3.14). Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чезари Л.** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 479 с.
2. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
3. **Беллман Р.** Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954. 215 с.
4. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

5. **Адрианова Л.Я.** Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во с.-петерб. ун-та, 1992. 239 с.
6. **Трикоми Ф.** Дифференциальные уравнения. М.: ИЛ, 1962. 351 с.
7. **Мак-Лахлан Н.В.** Теория и приложения функций Матье. М.: Мир, 1953. 476 с.
8. **Соболь И.М.** Исследование асимптотического поведения решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка при помощи полярных координат // Мат. сб. Т. 28 (70), № 3. 1951. С. 707–714.
9. **Гусаров Л.А.** О стремлении к нулю решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. Т. 71, № 1. 1950. С. 9–12.
10. **Кондратьев В.А .** Достаточные условия неколеблемости и колеблемости решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113, № 4. С. 742–745.
11. **Кондратьев В.А.** О нулях решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 6. С. 1190–1182.
12. **Кондратьев В.А.** О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 419–436.
13. **Stafford R.A., Heidel J.W.** A new comparison theorem for scalar Riccati equations // Bull Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 4. P. 754–757.
14. **Travis C.C.** Remarks on a comparison theorem for scalar Riccati equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. Vol. 52. P. 311–324.
15. **Liu W.-L., Li H.-J.** Oscilation criteria for second order linear differential equations with damping // J. Appl. Analisis. 1996. Vol. 2, № 1. P. 105–118.
16. **Howards H.C.** Scalar and matrix complex nonoscillation criteria // Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2. 1973. Vol. 18, iss. 03. P. 173–189.
17. **Kwong M.K.** Integral criteria for second-order linear oscillation // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2006. No. 10. 1–18 p. (electronic).
18. **Yan J.** Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. Vol. 98, no. 1. P. 276–282.
19. **Григорян Г.А.** О двух признаках сравнения для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 9. С. 1225–1240.
20. **Егоров А. И.** Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. 476 с.

Григорян Геворг Авагович
канд. физ.-мат. наук.
старший научн. сотрудник
Институт математики НАН Армении
e-mail: mathphys2@instmath.sci.am

Поступила 12.04.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977.1

О МЕТОДЕ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

М. И. Гусев

В работе рассматривается задача построения множеств достижимости нелинейной управляемой системы с фазовыми ограничениями, заданными в виде неравенств. Предлагается аналог метода штрафных функций, состоящий в замене исходной системы с фазовыми ограничениями вспомогательной системой без ограничений. Правая часть последней получается модификацией правой части исходной системы и зависит от скалярного параметра (коэффициента штрафа). При определенных условиях показано, что множество достижимости исходной системы может быть приближено изнутри множествами достижимости вспомогательных систем в хаусдорфовой метрике при стремлении коэффициента к бесконечности.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, фазовые ограничения, метод штрафных функций.

M. I. Gusev. On the penalty function method in the problem of constructing reachable sets for control systems with state constraints.

The paper is devoted to the problem of constructing reachable sets for a nonlinear control system with state constraints given in the form of inequalities. An analog of the penalty function method is proposed; it consists in replacing the original system with state constraints by an auxiliary system without state constraints. The right-hand side of the auxiliary system is a modification of the right-hand side of the original system and depends on a scalar parameter (a penalty coefficient). Under certain conditions, we show that a reachable set of the original system can be approximated from within in the Hausdorff metric by reachable sets of auxiliary systems as the penalty coefficient tends to infinity.

Keywords: control system, reachable set, state constraints, penalty function method.

1. Введение

В работе рассматривается задача приближенного построения множеств достижимости управляемой системы с фазовыми ограничениями. Предлагается аналог метода штрафных функций для внутренней аппроксимации множеств достижимости. Другие варианты метода штрафных функций, позволяющие получать внешние аппроксимации трубок траекторий и множеств достижимости, были рассмотрены в [1; 2]. Алгоритмы приближенного построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, аппроксимациях при помощи эллипсоидов и полиэдров, рассматривались во многих работах (см., например, [3–13]) применительно к системам с фазовыми ограничениями и для систем без ограничений.

В данной работе рассматривается нелинейная управляемая система, имеющая вид

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t_0 \le t \le t_1, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр. Считаем, что ограничение на управление и начальный вектор x^0 имеют вид

$$u(t) \in U, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x^0 \in X^0, \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019) и гранта РФФИ (проект 11-01-12088-офи-м-2011).

где U — компакт в $\mathbb{R}^r$, X^0 — компакт в $\mathbb{R}^n$. В качестве управлений будем рассматривать измеримые функции $u\colon [t_0,t_1] \to U$, множество всех таких функций обозначим через $\mathcal{U}$. Будем далее считать отображение $(t,x,u) \to f(t,x,u)$ удовлетворяющим локальным условиям Липшица по (t,x) и непрерывным по u. Обозначим через $x(t,u(\cdot),x^0)$ решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0)=x^0$.

Пусть фазовые ограничения для системы (1.1) заданы в виде

$$g(t,x) \le 0, \tag{1.3}$$

где $g(t,x)$ — функция класса C^1.

Множество начальных состояний X^0 удовлетворяет ограничению (1.3), т. е.

$$g(t_0,x^0) \le 0 \quad \forall x^0 \in X^0.$$

Множеством (областью) достижимости в момент времени $\theta \in [t_0,\ t_1]$ называется множество

$$G(\theta) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \exists x^0 \in X^0,\ \exists u(\cdot) \in \mathcal{U},\ x = x(\theta,u(\cdot),x^0),\ g(t,x(t,u(\cdot),x^0)) \le 0,\ t_0 \le t \le \theta\Big\}.$$

Таким образом, $G(\theta)$ — это множество всех точек, в которые можно перевести систему (1.1) в момент времени θ из начальных состояний $x^0 \in X^0$ при ограничениях (1.2), (1.3).

Цель данной работы — обоснование метода, который можно рассматривать как аналог метода штрафных функций, позволяющего множество достижимости $G(\theta)$ приблизить множествами достижимости для управляемой системы с модифицированной правой частью, но уже без фазовых ограничений. Отметим, что в работах [1; 2] была предложена процедура замены дифференциального включения с выпуклым фазовым ограничением

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(t) \in Y(t), \quad t \in [t_0,t_1],$$

семейством дифференциальных включений без фазовых ограничений

$$\dot{x} \in F_L(t,x) = F(t,x) + L(x - Y(t)), \quad t \in [t_0,t_1],$$

зависящих от матричного параметра L. Для точек (t,x), удовлетворяющих фазовым ограничениям, $F(t,x) \subset F_L(t,x)$.

В [1; 2] показано, что при выполнении некоторых условий пересечение пучков траекторий семейства по L дает пучок траекторий исходного дифференциального включения, удовлетворяющих фазовым ограничениям. Для множества достижимости в общем случае пересечение по L позволяет получить его верхнюю оценку.

В данной работе исходная управляемая система заменяется семейством управляемых систем без фазовых ограничений, зависящих от скалярного параметра k. Множества достижимости данных систем аппроксимируют $G(\theta)$ изнутри при $k \to \infty$. Предлагаемый подход можно считать аналогом метода внутренних штрафных функций в задачах оптимизации.

2. Основные определения и результаты

Пусть $k > 0$. Определим множество

$$U_k(t,x) = \big\{u \in U \colon g_t(t,x) + g_x^\top(t,x) f(t,x,u) \le -kg(t,x)\big\},$$

где g_t, g_x — градиенты функции g по t и x, символ $\top$ означает транспонирование матрицы. Если исходная система линейна по u ($f(t,x,u) = A(t,x) + B(t,x)u$), множество

$$U_k(t,x) = U \bigcap \big\{u \colon g_x^\top(t,x)B(t,x)u \le -kg(t,x) - g_x^\top(t,x)A(t,x) - g_t(t,x)\big\}$$

представляет собой пересечение компакта U и линейного полупространства. Обозначим через $G_k(\theta)$ множество достижимости системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U_k(t,x), \quad t \in [t_0,t_1], \tag{2.1}$$

в момент времени θ. Заметим, что если систему (1.1) представить в виде дифференциального включения $\dot{x} \in F(t,x)$, а систему (2.1) в виде $\dot{x} \in F_k(t,x)$, то правые части включений удовлетворяют условию $F_k(t,x) \subset F(t,x)$.

Будем далее предполагать выполненными следующие условия.

Предположение 1. *Правая часть системы* (1.1) *удовлетворяет условиям подлинейного роста по* x

$$\|f(t,x,u)\| \le C(1+\|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \quad t \in [t_0,t_1].$$

Это условие обеспечивает продолжимость решений системы (1.1) на $[t_0,t_1]$ и ограниченность пучка траекторий, стартующих из компактного множества X^0 и, следовательно, ограниченность множества достижимости $G(\theta)$. Далее можно считать, что любое решение системы лежит в евклидовом шаре B_R радиуса $R>0$ с центром в нуле.

Предположение 2. *Для всех точек* (t,x), *в которых* $g(t,x)=0$, *имеет место неравенство*

$$g_t(t,x) + \min_{u\in U} g_x^\top(t,x) f(t,x,u) < 0. \tag{2.2}$$

Последнее условие обеспечивает слабую инвариантность фазовых ограничений относительно системы (1.1). При этом для любого начального состояния существует траектория системы (1.1), удовлетворяющая фазовым ограничениям, и, значит, $G(\theta) \ne \varnothing$.

Далее мы докажем, что $G_k(\theta) \ne \varnothing$ при достаточно больших значениях k.

Лемма. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда* $G_k(\theta) \subset G(\theta)$ *при любом* $k>0$ *и* $G_{k_1}(\theta) \subset G_{k_2}(\theta)$ *при* $k_1<k_2$.

Доказательство. Пусть $x \in G_k(\theta)$, $k>0$, тогда существует траектория $x(t)$ системы (1.3) с начальным состоянием $x(t_0)=x^0 \in X^0$ такая, что $x(\theta)=x$. Покажем, что $x(t)$ удовлетворяет ограничению $g(t,x(t)) \le 0$. Для почти всех $t \in [t_0,\theta]$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad u(t) \in U_k(t,x(t)).$$

Из определения U_k следует, что

$$\frac{d}{dt} g(t,x(t)) \le -kg(t,x(t)), \quad \text{п.в. } t \in [t_0,\theta].$$

Из теорем сравнения для дифференциальных неравенств (см., например, [14]) получаем

$$g(t,x(t)) \le g(t_0,x^0)e^{-k(t-t_0)} \le 0, \quad t \in [t_0,\theta].$$

Поскольку $U_k(t,x(t)) \subset U$ для почти всех $t \in [t_0,\theta]$, то $x(t)$ — решение системы (1.1), удовлетворяющее фазовому ограничению, т.е. $x \in G(\theta)$. Включение $G_{k_1}(\theta) \subset G_{k_2}(\theta)$ при $k_1<k_2$ следует из того, что $U_{k_1}(t,x) \subset U_{k_2}(t,x)$ при $g(t,x) \le 0$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $f(t,x,u)$ *локально липшицева по* (t,x) *и непрерывна по* u, *выполнены предположения* 1, 2 *и* $g(t_0,x^0)<0$ *для любых* $x^0 \in X^0$. *Тогда*

$$h(G_k(\theta),G(\theta)) \to 0 \ \ \text{при} \ \ k \to \infty,$$

где h — *хаусдорфово расстояние между множествами.*

Доказательство. Обозначим через X $(n+1)$-вектор $(x_0, x_1, \dots, x_n)^\top$, положим $F(X,u) = (1, f(x_0, x, u))$ и рассмотрим уравнение

$$\dot{X} = F(X,u),$$

получающееся добавлением к системе (1.1) уравнения $\dot{x}_0 = 1,\ x(t_0) = t_0$. В новых переменных фазовые ограничения и условие (2.2) принимают вид

$$G(X) = g(x_0, x) \le 0, \quad \min_{u \in U} G_X^\top F(X,u) \le 0.$$

Множество

$$K = \{(t,x)\colon g(t,x) \le 0\} = \{X \colon G(X) \le 0\}$$

замкнуто, из предположения 2 следует, что вектор $G_X = (g_t, g_x) \ne 0$ в точках X, где $G(X) = g(t,x) = 0$. Отсюда получаем, что

$$\mathrm{Int}K = \{(t,x)\colon g(t,x) < 0\} = \{X \colon G(X) < 0\}, \quad \partial K = \{(t,x)\colon g(t,x) = 0\} = \{X \colon G(X) = 0\},$$

где $\mathrm{Int}K$ и ∂K обозначают, соответственно, внутренность и границу K.

Из результатов работы [15] (см. также [16], где приведена соответствующая библиография) получаем, что для любой траектории $X(t) \in K,\ t \in [t_0, t_1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется траектория $\hat{X}$ такая, что

$$\hat{X}(t) \in \mathrm{Int}K, \quad t \in (t_0, t_1], \quad X(t_0) = \hat{X}(t_0)$$

и $\|X(t) - \hat{X}(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, t_1]$. Для исходной системы это означает, что для любой траектории $x(t)$, удовлетворяющей фазовым ограничениям $g(t, x(t)) \le 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется траектория $\hat{x}(t)$ такая, что $g(t, x(t)) < 0$ при $t \in (t_0, t_1]$, $x(t_0) = \hat{x}(t_0)$ и $\|x(t) - \hat{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть $x \in G(\theta)$. Существует траектория $x(t)$ системы (1.1) такая, что $x(t_0) = x^0 \in X^0$, $x = x(\theta)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ построим траекторию $\hat{x}(t)$ такую, что $g(t, x(t)) < 0$ при $t \in (t_0, t_1]$ и $\|x(t) - \hat{x}(t)\| < \varepsilon$ при $t \in [t_0, t_1]$. Так как $g(t_0, x^0) < 0$, то для всех точек $\hat{x}(t)$ имеем $g(t, \hat{x}(t)) < 0$. Множество $\{(t,x)\colon x = \hat{x}(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$ компактно, поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что $g(t, \hat{x}(t)) < -\delta$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Пусть $\hat{u}(t)$ — управление, порождающее траекторию $\hat{x}(t)$. Функция

$$g_t(t, \hat{x}(t)) + g_x^\top(t, \hat{x}(t)) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$$

ограничена, поэтому для достаточно больших k

$$g_t(t, \hat{x}(t)) + g_x^\top(t, \hat{x}(t)) f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \le -k\delta \le g(t, \hat{x}(t))$$

для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Следовательно, найдется $k = k(\varepsilon, x^0)$ такое, что

$$\hat{u}(t) \in U_k(t, \hat{x}(t))$$

для почти всех $t \in [t_0, \theta]$, и, значит, $\hat{x}(\theta) \in G_k(\theta)$.

Таким образом, доказано следующее: для любого $x \in G(\theta)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $k = k(\varepsilon, x(\cdot))$, $\hat{x} \in G_k(\theta)$ такие, что $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$. Докажем, что

$$h(G_k(\theta), G(\theta)) \to 0 \ \text{ при } k \to \infty.$$

Допустим противное. Так как по лемме $G_k(\theta) \subset G(\theta)$, то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall k_0\ \exists k \ge k_0\ G \not\subseteq G_k + \varepsilon B_1$ (B_1 — шар единичного радиуса с центром в нуле). Отсюда следует, что можно построить последовательность $k_n \to \infty$ и последовательность $x^n \in G(\theta)$ такие, что

$$d(x^n, G_{k_n}(\theta)) \ge \frac{\varepsilon}{2},$$

где $d(x,G)=\inf_{y\in G}\|x-y\|$ — расстояние от x до множества G. Так как x^n ограничена, то она содержит сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, будем считать, что $x^n\to\overline{x}$, $\overline{x}\in\overline{G(\theta)}$, $\overline{G(\theta)}$— замыкание $G(\theta)$. Для достаточно больших n имеем тогда неравенство

$$d(\overline{x},G_{k_n}(\theta))\geq\frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $k_n\to\infty$, $n\to\infty$, и $G_k(\theta)\subset G_{k_n}(\theta)$ при $k<k_n$, то

$$d(\overline{x},G_k(\theta))\geq\frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $k>0$. Последнее, очевидно, входит в противоречие с возможностью приблизить сколь угодно точно точки из $G(\theta)$ точками из $G_k(\theta)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (2.2) достаточно проверять для точек $(t,x)\in[t_0,t_1\times B_R]$, где B_R содержит все траектории системы, исходящие из начального множества X^0.

Замечание 2. При построении множества $G_k(\theta)$ могут возникнуть трудности, обусловленные тем, что множество $U_k(t,x)$ в некоторых точках (t,x) оказывается пустым. Для того чтобы избежать этого, можно определение $U_k(t,x)$ модифицировать следующим образом. На множестве $\{(t,x)\colon g(t,x)<0\}$ определим функции

$$p(t,x)=-\frac{1}{g(t,x)}\big[g_t(t,x)+\min_{u\in U}g_x^\top(t,x)f(t,x,u)\big],\quad k_1(t,x,k)=\max\{k,p(t,x)+1\}.$$

Если в определениях $U_k(t,x)$ и $G_k(\theta)$ заменить k на $k_1(t,x,k)$, то $U_k(t,x)$ будет непустым множеством, при этом утверждение теоремы останется в силе.

Заметим, что при приближении точки (t,x) к границе фазовых ограничений $g(t,x)\to 0$ и $p(t,x)\to\infty$. Однако в достаточно малой окрестности границы непустота множества $U_k(t,x)$ обеспечивается автоматически при любом k, так как из условия (2.2) следует, что в этих точках

$$g_t(t,x)+\min_{u\in U}g_x^\top(t,x)f(t,x,u)<0<-kg(t,x).$$

Для иллюстрации приведенных выше построений рассмотрим стационарную управляемую систему вида

$$\dot{x}=A(x)+Bu,\quad |u(t)|\leq 1,\quad t\in[0,T],$$

со скалярным входом u и постоянной матрицей B размером $n\times 1$. Пусть фазовые ограничения заданы в виде полупространства $\{x\colon g(x)=(a,x)-\alpha\leq 0\}$, где $a\neq 0$.

Условие (2.2) в данном случае трансформируется в условие

$$\min_u a^\top(A(x)+Bu)=a^\top A(x)-|a^\top B|<0,$$

которое должно выполняться в точках пересечения гиперплоскости $\{x\colon (a,x)=\alpha\}$ с шаром B_R, задающим априорные ограничения на траектории системы при $t\in[0,T]$.

Пусть для определенности $a^\top B>0$. Множество $U_k(x)$ в данном примере есть пересечение отрезка $[-1,1]$ и полупрямой $\{u\colon u\leq h(k,x)\}$, где

$$h(k,x)=\frac{1}{a^\top B}\big(-k((a,x)-\alpha)-a^\top A(x)\big).$$

Положим $l(k,x)=\min\{1,h(k,x)\}$, $c(k,x)=(l(k,x)-1)/2$, $d(k,x)=(l(k,x)+1)/2$. Тогда, как нетрудно видеть, $G_k(\theta)$ — множество достижимости для управляемой системы

$$\dot{x}=A(x)+c(k,x)B+d(k,x)Bv,\ |v(t)|\leq 1,\ t\in[0,\theta],$$

с множеством начальных состояний $x(0)\in X^0$.

В приведенном примере $U_k(t,x)=\varnothing$, если $l(k,x)<-1$. Это эквивалентно тому, что

$$-k((a,x)-\alpha)-(a^\top A(x)-a^\top B)<0.$$

Однако, если выполнено условие (2.2), то $a^\top A(x)-a^\top B<0$ на множестве $\{x\in B_R\colon (a,x)=\alpha\}$. Отсюда следует, что

$$k((a,x)-\alpha)-(a^\top A(x)-a^\top B)<0 \tag{2.3}$$

на пересечении шара B_R и полосы $\{x\colon \alpha-\delta\le (a,x)\le\alpha\}$ для некоторого положительного δ. При $x\in\{x\colon (a,x)\le\alpha-\delta\}\cap B_R$ неравенство (2.3), очевидно, выполняется при достаточно большом k, и, значит, $U_k(t,x)\ne\varnothing$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании множества выживающих траекторий дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 1. С. 38–41.
2. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Об описании пучка выживающих траекторий управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1303–1315.
3. **Chernousko, F. L.** State estimation for dynamic systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 268 p.
4. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
5. **Лотов А. В.** Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями// Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 67–78.
6. **Lempio F., Veliov V.M.** Discrete approximations to differential inclusions // GAMM Mitt. 1998. Vol. 21, no. 2. P. 101–135.
7. **Гусейнов Х.И., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости систем управления // Прикл. математика и механика. 1998. № 2. С. 179–186.
8. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 8–16.
9. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
10. **Mitchell I.M., Tomlin C.J.** Overapproximating reachable sets by Hamilton–Jacobi Projections // J. Sci. Comput. 2003. Vol. 19, no. 1–3. P. 323–346.
11. **Костоусова Е.К.** Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелотопов// Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
12. **Гусев М.И.** Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 82–94.
13. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
14. **Walter W.** Differential and integral inequalities. Berlin: Springer, 1970. 352 p.
15. **Forcellini F., Rampazzo F.** On non-convex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set // J. Differ. Integr. Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
16. **Bettiol P., Bressan A., Vinter R.** Trajectories satisfying a state constraint: $W^{1,1}$ estimates and counterexamples // SIAM J. Control Optim. 2010. Vol. 48, no. 7. P. 4664–4679.

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: gmi@imm.uran.ru.

Поступила 31.10.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.929

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ[1]

Ю. Ф. Долгий, Е. В. Кошкин

Рассматривается задача оптимальной стабилизации линейных периодических конечномерных систем с последействием. Класс допустимых управлений ограничивается кусочно-постоянными управлениями, формируемыми в дискретные моменты времени по принципу обратной связи. Установлена связь поставленной задачи с задачей оптимальной стабилизации линейной автономной системы разностных уравнений.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, линейные периодические конечномерные системы дифференциальных уравнений, последействие, управления по обратной связи.

Yu. F. Dolgii, E. V. Koshkin. Optimal stabilization of linear periodic finite-dimensional systems of differential equations with aftereffect.

The problem of optimal stabilization is studied for linear periodic finite-dimensional systems with aftereffect. The class of admissible controls is limited to piecewise constant feedback controls formed at discrete times. It is shown that the problem under investigation is equivalent to a stabilization problem for a linear system of difference equations.

Keywords: optimal stabilization, linear periodic finite-dimensional system of differential equations, aftereffect, feedback control.

Введение

Задача нахождения оптимального стабилизирующего управления для общего класса систем дифференциальных уравнений с последействием и общего множества допустимых управлений является достаточно сложной [1]. Отсутствуют примеры аналитического решения этой задачи. Фундаментальные результаты аппроксимационной теории оптимальной стабилизации получены в работах [2–5] для автономных систем, а в работах [6–8] — для периодических систем. Сужение класса систем с последействием и множества допустимых управлений позволяет продвинуться в аналитическом решении этой проблемы. В работе класс допустимых управлений ограничивается кусочно-постоянными управлениями, формируемыми в дискретные моменты времени по принципу обратной связи. Предложен метод построения оптимального стабилизирующего управления для рассматриваемого множества допустимых управлений. Он обобщает аналогичный результат для дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами [9].

1. Линейная периодическая конечномерная система дифференциальных уравнений с последействием

Рассматривается линейная периодическая неоднородная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(t,\theta)x(t+\theta) + f(t),\ t \in \mathbb{R}^+ = (0,+\infty), \tag{1.1}$$

[1]Работа поддержана программой Президиума РАН “Математическая теория управления” (проект 12-П-1-1019).

где $x\colon [-\tau,+\infty) \to \mathbb{R}^m$; ω-периодическая по первому аргументу матричная функция η при каждом фиксированном значении второго аргумента $\theta \in [-\tau,0]$ интегрируема по Лебегу на $(0,\omega]$, а при почти каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0,\omega]$ имеет ограниченную вариацию $var_{[-\tau,0]}\eta(t,\cdot)$, интегрируемую на $(0,\omega]$, $\eta(t,0)=0$, $t \in (0,\omega]$; функция f локально интегрируема на $\mathbb{R}^+$.

Вводя функции $x_n(t) = x(n\omega+t)$, $t \in [-\tau,\omega]$, $f_n(t) = f(n\omega+t)$, $t \in (0,\omega]$, $n \geq 0$, от системы (1.1) перейдем к счетной системе дифференциальных уравнений с последействием на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(t,\theta)x_n(t+\theta) + f_n(t), \quad t \in (0,\omega], \quad n \geq 0. \tag{1.2}$$

Найдем условия, при выполнении которых непрерывный оператор $\hat{F}\colon C\left([-\tau,\omega],\mathbb{R}^m\right) \to L_1\left((0,\omega],\mathbb{R}^m\right)$, определяемый формулами

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = \int\limits_{-\tau}^{0} d\eta(t,\theta)x(t+\theta) = \int\limits_{t-\tau}^{t} d\eta(t,s-t)x(s) = \int\limits_{-\tau}^{\omega} d\eta(t,s-t)x(s), \quad t \in (0,\omega], \tag{1.3}$$

является конечномерным. В последней формуле продолжение ядра Стилтьеса η определяется следующим образом:

$$\eta(t,\theta)=0 \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \omega - t; \quad \eta(t,\theta) = \eta(t,-\tau) \quad \text{при } -\tau - t \leq \theta \leq -\tau, \quad t \in (0,\omega]. \tag{1.4}$$

Произвольный непрерывный линейный конечномерный оператор $\hat{F}\colon C\left([-\tau,\omega],\mathbb{R}^m\right) \to L_1\left((0,\omega],\mathbb{R}^m\right)$ допускает представление

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k(t) f_k(x), \quad t \in (0,\omega],$$

где $a_k \in L_1\left((0,\omega],\mathbb{R}^m\right)$, f_k — линейные непрерывные функционалы, $1 \leq k \leq K$. Наборы функций и функционалов в этом представлении можно выбрать линейно независимыми. Учитывая аналитические представления линейных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных функций [10, с. 284], получим следующую форму аналитического представления непрерывного линейного конечномерного оператора:

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k(t) \int\limits_{-\tau}^{\omega} d\mu_k^T(s)x(s), \quad t \in (0,\omega], \tag{1.5}$$

где $\mu_k\colon [-\tau,\omega] \to \mathbb{R}^m$ — функции с ограниченной вариацией, $\mu_k(\omega)=0$, $1 \leq k \leq K$. Из формул (1.3) и (1.5) находим

$$\eta(t,s-t) = \sum_{k=1}^{K} a_k(t)\mu_k^T(s), \quad t \in (0,\omega], \quad s \in [-\tau,\omega]. \tag{1.6}$$

Оператор (1.3) является вольтерровым по Тихонову [11] и имеет ограниченное последействие, равное τ. Поэтому ядро Стилтьеса (1.6) конечномерного оператора (1.5) должно удовлетворять дополнительным условиям (1.4).

Теорема 1. *Вольтерровый по Тихонову оператор $\hat{F}$ с ограниченным последействием τ является конечномерным тогда и только тогда, когда он допускает представление* (1.5)*, в котором функции удовлетворяют условиям*: $\operatorname{supp} a_k \subseteq (t_k^-, t_k^+]$; $\mu_k(s) = 0$ *при* $t_k^- < s \leq \omega$ *и* $\mu_k(s) = \mu_k(t_k^+ - \tau)$ *при* $-\tau \leq s \leq t_k^+ - \tau$ *для некоторых чисел* $0 \leq t_k^- < t_k^+ \leq \omega$, $t_k^+ - \tau \leq t_k^-$, $1 \leq k \leq K$.

Доказательство. Необходимо найти условия, при выполнении которых каждая функция $\eta_k(t,s-t)=a_k(t)\mu_k^T(s)$, $1\le k\le K$, удовлетворяет условию (1.4). Последнее возможно тогда и только тогда, когда область $\{(t,s)\colon t-\tau\le s\le t,\ 0<t\le\omega\}$ содержит прямоугольник $\big\{(t,s)\colon t_k^+-\tau\le s\le t_k^-,\ t_k^-<t\le t_k^+\big\}$, вне которого функции a_k и μ_k $(1\le k\le K)$ определяются специальным образом, указанным в формулировке теоремы. □

Согласно теореме 1 аналитическое представление конечномерного оператора, вольтеррового по Тихонову и с ограниченным последействием, имеет вид

$$\big(\hat{F}x\big)(t)=\sum_{k=1}^{K}a_k(t)\int\limits_{t_k^+-\tau}^{t_k^-+0}d\mu_k^T(s)x(s),\quad t\in(0,\omega],\tag{1.7}$$

где $\operatorname{supp}a_k\subseteq(t_k^-,t_k^+]$, $\mu_k(t_k^-+0)=0$, $0\le t_k^-<t_k^+\le\omega$, $t_k^+-\tau\le t_k^-$, $1\le k\le K$. Без ограничения общности числа t_k^-, $1\le k\le K$, будем считать упорядоченными по неубыванию.

В данной работе рассматривается линейная периодическая неоднородная система дифференциальных уравнений с последействием следующего вида:

$$\frac{dx(t)}{dt}=(Fx)\,(t)+f(t),\quad t\in\mathbb{R}^+,\tag{1.8}$$

в которой линейный оператор

$$F\colon C\left([-\tau,+\infty),\mathbb{R}^m\right)\to L_1^{loc}\left((0,+\infty),\mathbb{R}^m\right)$$

удовлетворяет свойству

$$\left(Fx(\omega+\cdot)\right)(t)=\left(Fx(\cdot)\right)(\omega+t),\quad t\in\mathbb{R}^+,$$

и его значения на $(0,\omega]$ совпадают со значениями оператора $\hat{F}$, $f\in L_1^{loc}\left((0,+\infty),\mathbb{R}^m\right)$.

Эти уравнения обобщают уравнения с кусочно-постоянными аргументами [12–17], которые находят приложения при моделировании динамических процессов в теории автоматического управления [18], экологии [19–21] и экономики [22; 23]. При этом обобщении сохраняется свойство конечномерности пространства решений системы с последействием.

Пример 1. Рассматривается линейная периодическая система дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{I}A_i(t)x([t-\tau_i])+f(t),\quad t\in\mathbb{R}^+,$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_I<1$, A_i — 1-периодические матричные функции, интегрируемые на $(0,1]$, $[\alpha]$ — целая часть числа α. Здесь $\tau=1+\tau_I$, $\omega=1$.

Оператор $\hat{F}\colon C\left([-\tau,1],\mathbb{R}^m\right)\to L_1\left((0,1],\mathbb{R}^m\right)$ определяется формулами

$$\big(\hat{F}x\big)(t)=\sum_{i=1}^{I}A_i(t)x([t-\tau_i]),\quad t\in(0,1],$$

в частности, имеем

$$\big(\hat{F}x\big)(t)=\sum_{i=1}^{I}A_i(t)x(-1),\quad t\in(0,\tau_1),$$

$$\big(\hat{F}x\big)(t)=\sum_{i=k+1}^{I}A_i(t)x(-1)+\sum_{i=1}^{k}A_i(t)x(0),\quad t\in[\tau_k,\tau_{k+1}),\quad k=1,\ldots,I-1,$$

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = \sum_{i=1}^{I} A_i(t)x(0), \quad t \in [\tau_I, 1].$$

Следовательно,

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = \hat{A}_1(t)x(-1) + \hat{A}_2(t)x(0) = \hat{A}_1(t)\int\limits_{-\tau}^{1} d\hat{\mu}_1(s)x(s) + \hat{A}_2(t)\int\limits_{-\tau}^{1} d\hat{\mu}_2(s)x(s), \quad 0 < t \le 1.$$

Здесь $\hat{A}_1(t) = \sum_{i=1}^{I} A_i(t)$, $t \in (0, \tau_1)$; $\hat{A}_1(t) = \sum_{i=k+1}^{I} A_i(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $1 \le k \le I-1$; $\hat{A}_1(t) = 0$, $t \in [\tau_I, 1]$; $\hat{A}_2(t) = 0$, $t \in (0, \tau_1)$; $\hat{A}_2(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $1 \le k \le I-1$; $\hat{A}_2(t) = \sum_{i=1}^{I} A_i(t)$, $t \in [\tau_I, 1]$;

$$\hat{\mu}_1(s) = \begin{cases} 0, & s \in (-1, 1], \\ -I_m, & s \in [-\tau, -1], \end{cases} \quad \hat{\mu}_2(s) = \begin{cases} 0, & s \in (0, 1], \\ -I_m, & s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

В результате функции из представления (1.7) определяются формулами $a_k(t) = \hat{A}_1(t)e_k$, $\mu_k(s) = \hat{\mu}_1(s)e_k$, $t_k^- = 0$, $t_k^+ = \tau_I$, $1 \le k \le m$; $a_k(t) = \hat{A}_2(t)e_{k-m}$, $\mu_k(s) = \hat{\mu}_2(s)e_{k-m}$, $t_k^- = \tau_1$, $t_k^+ = 1$; $m+1 \le k \le 2m$. Здесь e_k, $1 \le k \le m$, — единичные векторы пространства $\mathbb{R}^m$.

Пример 2. Рассматривается линейное периодическое скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\int\limits_{-1}^{0} x\left([t+s]\right) ds + f\left(t\right), \quad a \ne 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Здесь $[\alpha]$ — целая часть числа α, $\tau = 2$, $\omega = 1$.

Оператор $\hat{F}\colon C[-2, 1] \to L_1(0, 1]$ определяется формулой

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = a\int\limits_{-1}^{0} x\left([t+s]\right) ds, \quad t \in (0, 1].$$

Учитывая эквивалентность функций пространства $L_1(0, 1]$, отличающихся только на множестве меры нуль, находим

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = a\left(1-t\right)x\left(-1\right) + atx\left(0\right) = a_1(t)\int\limits_{-2}^{1} d\mu_1(s)x(s) + a_2(t)\int\limits_{-2}^{1} d\mu_2(s)x(s), \quad 0 < t \le 1.$$

Здесь $a_1\left(t\right) = a\left(1-t\right)$, $a_2\left(t\right) = at$, $0 < t \le 1$; $\mu_1\left(s\right) = -1$, $-2 \le s \le -1$, $\mu_1\left(s\right) = 0$, $-1 < s \le 1$, $\mu_2\left(s\right) = -1$, $-2 \le s \le 0$, $\mu_1\left(s\right) = 0$, $0 < s \le 1$; $t_1^- = t_2^- = 0$, $t_1^+ = t_2^+ = 1$.

В результате представление оператора $\hat{F}$ согласуется с формулой (1.7) и имеет вид

$$\big(\hat{F}x\big)(t) = a_1(t)\int\limits_{-1}^{+0} d\mu_1(s)x(s) + a_2(t)\int\limits_{-1}^{+0} d\mu_2(s)x(s), \quad 0 < t \le 1.$$

Специальный класс уравнений вида (1.8) изучался в работе [24]. Дальнейшим обобщением уравнения (1.8) являются линейные периодические дифференциальные уравнения с последействием и конечномерным оператором монодромии [25; 26].

2. Общее решение системы дифференциальных уравнений с последействием (1.8)

Для произвольной функции $\varphi \in C\left([-\tau,0],\mathbb{R}^m\right)$ найдем решение задачи Коши системы (1.8) $x(t,\varphi)$, $t\in(0,\omega]$, $x(\xi,\varphi)=\varphi(\xi)$, $\xi\in[-\tau,0]$. Интегрируя (1.8), имеем

$$x(t,\varphi)=\varphi(0)+\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{0}^{t}a_k(s)ds\int\limits_{t_k^+-\tau}^{t_k^-+0}d\mu_k^T(s)x(s,\varphi)+\int\limits_{0}^{t}f(s)ds,\quad 0<t\le\omega.$$

Пусть $\mathcal{K}^-=\left\{k: t_k^+\le\tau, k=1,\dots,K\right\}$. Будем полагать, что $\mathcal{K}^-$ не является пустым. Предыдущее равенство запишем в следующем виде:

$$x(t,\varphi)=\varphi(0)+\sum_{k=1}^{K}\hat{a}_k(t)g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)+\sum_{k\in\mathcal{K}^-}\hat{a}_k(t)g_k^-\left(\varphi\right)+\hat{f}(t),\quad 0<t\le\omega,\tag{2.1}$$

где

$$\hat{a}_k(t)=\int\limits_{0}^{t}a_k(s)ds,$$

$$\hat{f}(t)=\int\limits_{0}^{t}f(s)ds,\quad 0<t\le\omega,\quad g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)=\int\limits_{\max\left(+0,t_k^+-\tau\right)}^{t_k^-+0}d\mu_k^T(s)x(s,\varphi),\quad 1\le k\le K,$$

$$g_k^-\left(\varphi\right)=\int\limits_{t_k^+-\tau}^{0}d\mu_k^T(s)\varphi(s),\quad k\in\mathcal{K}^-.$$

Используя формулу (2.1), получим

$$g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)=-\mu_k^T\left(\max\left(+0,t_k-\tau\right)\right)\varphi(0)+\sum_{i=1}^{K}g_k\left(\hat{a}_i\right)g_i\left(x(\cdot,\varphi)\right)$$
$$+\sum_{i\in\mathcal{K}^-}g_k\left(\hat{a}_i\right)g_i^-\left(\varphi\right)+g_k\left(\hat{f}\right),\quad 1\le k\le K.\tag{2.2}$$

Пусть $1\le k\le i\le K$. Имеем $a_i(s)=0$ при $0<s\le t\le t_k^-\le t_i^-$. Отсюда находим, что $\hat{a}_i(t)=0$ при $0<t\le t_k^-$ и $g_k\left(\hat{a}_i\right)=0$ при $1\le k\le i\le K$. Пусть $1\le i\le k\le K$. Имеем

$$g_k\left(\hat{a}_i\right)=\int\limits_{\max\left(t_i^-,t_k^+-\tau\right)}^{t_k^-+0}d\mu_k^T(t)\int\limits_{t_i^-}^{t}a_i(s)ds=-\mu_k^T\left(\max\left(t_i^-,t_k^+-\tau\right)\right)$$
$$\times\int\limits_{t_i^-}^{\max\left(t_i^-,t_k^+-\tau\right)}a_i(s)ds-\int\limits_{\max\left(t_i^-,t_k^+-\tau\right)}^{\min\left(t_k^-+0,t_i^+\right)}\mu_k^T(t)a_i(t)dt.$$

В результате линейная система алгебраических уравнений для нахождения значений функционалов $g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)$, $1\le k\le K$, преобразуется к следующему виду:

$$g_1\left(x(\cdot,\varphi)\right)=p_1,$$

$$g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)=\sum_{i=1}^{k-1} g_k\left(\hat a_i\right) g_i\left(x(\cdot,\varphi)\right)+p_k, \tag{2.3}$$

где

$$p_1=-\mu_1^T\left(\max\left(+0,t_1^+-\tau\right)\right)\varphi(0)+g_1\big(\hat f\big),$$

$$p_k=-\mu_k^T\left(\max\left(+0,t_k^+-\tau\right)\right)\varphi(0)+\sum_{i\in\mathcal K^-} g_k\left(\hat a_i\right) g_i^-(\varphi)+g_k\big(\hat f\big),\quad 2\le k\le K. \tag{2.4}$$

Решение линейной алгебраической системы (2.3) определяется формулами

$$g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)=\sum_{i=1}^{k} T_{ki}p_i,\quad 1\le k\le K, \tag{2.5}$$

в которых коэффициенты находятся из рекуррентных соотношений $T_{kk}=1$, $1\le k\le K$, $T_{ki}=\sum_{j=i}^{k-1} g_k\left(\hat a_j\right)T_{ji}$, $1\le i\le k-1$, $2\le k\le K$. Подставляя в (2.5) значения p_k, $1\le k\le K$, определяемые формулами (2.4), находим

$$g_1\left(x(\cdot,\varphi)\right)=\hat T_{10}^T\varphi(0)+g_1\big(\hat f\big),$$

$$g_k\left(x(\cdot,\varphi)\right)=\hat T_{k0}^T\varphi(0)+\sum_{j=1}^{k-1}\chi_{\mathcal K^-}(j)\hat T_{kj}g_j^-(\varphi)+\sum_{j=1}^{k} T_{kj}g_j\big(\hat f\big),\quad 2\le k\le K, \tag{2.6}$$

где $\hat T_{k0}=-\sum_{i=1}^{k} T_{ki}\mu_i\left(\max\left(+0,t_i^+-\tau\right)\right)$, $1\le k\le K$, $\hat T_{kj}=\sum_{i=j+1}^{k} T_{ki}g_i\left(\hat a_j\right)$, $1\le j\le k-1$, $2\le k\le K$, $\chi_E(\cdot)$ — индикатор множества E. При определении общего решения будут использованы также значения $\hat T_{kk}=1$, $1\le k\le K$.

Подставляя значения функционалов (2.6) в формулу (2.1), находим представление общего решения системы (1.8).

Теорема 2. *Общее решение системы* (1.8) *определяется формулой*

$$x(t,\varphi)=A_0(t)\varphi(0)+\sum_{j\in\mathcal K^-}\hat\alpha_j(t)g_j^-(\varphi)+\sum_{j=1}^{K}\alpha_j(t)g_j\left(\hat f\right)+\hat f(t),\quad 0<t\le\omega,$$

где $A_0(t)=I_m+\sum_{k=1}^{K}\hat a_k(t)\hat T_{k0}^T$, $\hat\alpha_j(t)=\sum_{k=j}^{K}\hat a_k(t)\hat T_{kj}$, $j\in\mathcal K^-$, $\alpha_j(t)=\sum_{k=j}^{K}\hat a_k(t)T_{kj}$, $1\le j\le K$, $\varphi\in C\left([-\tau,0],\mathbb R^m\right)$.

3. Сведение к задаче оптимальной стабилизации дискретной системы

Рассматривается линейная управляемая модель с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt}=(Fx)(t)+B(t)u,\quad t\in\mathbb R^+, \tag{3.1}$$

в которой оператор $F\colon C\left([-\tau,+\infty),\mathbb R^m\right)\to L_1^{loc}\left((0,+\infty),\mathbb R^m\right)$ определен в разд. 1, $u\in\mathbb R^r$, B — ω-периодическая матричная функция интегрируемая на $(0,\omega]$.

В множестве допустимых управлений U, формируемых по принципу обратной связи, требуется найти управление u^0, стабилизирующее систему (3.1) с наименьшим значением показателя качества переходных процессов

$$J=\int_0^{+\infty}\left(x^T(t)C_1(t)x(t)+u^T(t)C_2(t)u(t)\right)dt, \tag{3.2}$$

где C_1, C_2 — ω-периодические матричные функции, значения которых являются симметрическими положительно определенными матрицами.

Для периодических систем с последействием управления, формируемые по принципу обратной связи, моделируются функциями $u = u\,(t, x_t(\cdot))$, $u\,(t+\omega, x_t(\cdot)) = u\,(t, x_t(\cdot))$, где $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $t \in \mathbb{R}^+$. Учитывая специальную форму представления оператора F, множество допустимых управлений U^0 будем моделировать функциями $u = u\,(t, x_t(\cdot)) = \hat{u}\,(x_{n\omega}(\cdot))$, $n\omega < t \le (n+1)\omega$, $n \ge 0$, определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}(\cdot)\colon C\big([-\tau, 0], \mathbb{R}^m\big) \to \mathbb{R}^r$.

Для рассматриваемого класса допустимых управлений системе (3.1) ставится в соответствие счетная система управляемых уравнений на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{K} a_k(t) \int\limits_{t_k^+ - \tau}^{t_k^- + 0} d\mu_k^T(s) x_n(s) + B(t) u_n, \quad 0 < t \le \omega, \quad u_n \in \mathbb{R}^r, \quad n \ge 0. \tag{3.3}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\omega \ge \tau$. В этом случае критерию качества (3.2) будет отвечать критерий качества

$$J = \int\limits_0^{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(x_n^T(t) C_1(t) x_n(t) + u_n^T C_2(t) u_n\big)\, dt. \tag{3.4}$$

Используя теорему 2, находим общее решение счетной системы дифференциальных уравнений с последействием (3.3):

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t)\varphi_n(0) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t) g_j^-(\varphi_n) + \sum_{j=1}^{K} \alpha_j(t) g_j\left(\hat{f}_n\right) + \hat{B}(t) u_n, \quad n \ge 0, \quad t \in (0, \omega], \tag{3.5}$$

где $\varphi_n \in C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^m\right)$,

$$\hat{f}_n(t) = \int\limits_0^t B(s) ds u_n = \hat{B}(t) u_n, \quad t \in (0, \omega],$$

$$g_j\big(\hat{f}_n\big) = \int\limits_{\max\left(+0, t_j^+ - \tau\right)}^{t_j^- + 0} d\mu_j^T(s) \hat{B}(s) u_n = \beta_j u_n, \quad 1 \le j \le K, \quad n \ge 0.$$

Для согласования решений (3.1) и (3.3) требуется выполнение условий

$$\varphi_0(s) = \varphi(s) = x_{-1}(\omega + s, \varphi_{-1}), \quad \varphi_n(s) = x_{n-1}(\omega + s, \varphi_{n-1}), \quad n \ge 1, \quad s \in [-\tau, 0], \tag{3.6}$$

где $\varphi_{-1} \in C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^m\right)$ — произвольная непрерывная функция.

С учетом этих условий находим

$$g_j^-\left(\varphi_n\right) = \hat{g}_j^-\left(x_{n-1}\right) = \int\limits_{t_j^+ + \omega - \tau}^{\omega} d\mu_j^T(s - \omega) x_{n-1}\left(s, \varphi_{n-1}\right), \quad j \in \mathcal{K}^-, \quad n \ge 0. \tag{3.7}$$

В результате формулы (3.5) принимают вид

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t) x_{n-1}\left(\omega, \varphi_{n-1}\right) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t) \hat{g}_j^-(x_{n-1}) + \tilde{B}(t) u_n, \quad n \ge 0, \tag{3.8}$$

где $\tilde{B}(t)=\sum_{j=1}^{K}\alpha_j(t)\beta_j+\hat{B}(t)$, $t\in(0,\omega]$.

Покажем, что величины $x_{n-1}(\omega,\varphi_{n-1})$, $\hat{g}_j^-(x_{n-1})$, $n\geq 1$, удовлетворяют системе разностных уравнений. Имеем

$$x_n(\omega,\varphi_n)=A_0(\omega)x_{n-1}(\omega,\varphi_{n-1})+\sum_{j\in\mathcal{K}^-}\hat{\alpha}_j(\omega)\hat{g}_j^-(x_{n-1})+\tilde{B}(\omega)u_n,\quad n\geq 0. \tag{3.9}$$

Используя определения функционалов $\hat{g}_j^-$, $j\in\mathcal{K}^-$, находим

$$\hat{g}_j^-(x_n)=\int\limits_{t_j^++\omega-\tau}^{\omega}d\mu_j^T(s-\omega)A_0(s)x_{n-1}(\omega,\varphi_{n-1})+\sum_{p\in\mathcal{K}^-}\int\limits_{t_j^++\omega-\tau}^{\omega}d\mu_j^T(s-\omega)\hat{\alpha}_p(s)\hat{g}_p^-(x_{n-1})$$

$$+\int\limits_{t_j^++\omega-\tau}^{\omega}d\mu_j^T(s-\omega)\tilde{B}(s)u_n,\quad j\in\mathcal{K}^-,\quad n\geq 0.$$

Последние формулы представим в следующей форме:

$$\hat{g}_j^-(x_n)=\hat{g}_j^-(A_0)\,x_{n-1}(\omega,\varphi_{n-1})+\sum_{p\in\mathcal{K}^-}\hat{g}_j^-(\hat{\alpha}_p)\,\hat{g}_p^-(x_{n-1})+\hat{g}_j^-\big(\tilde{B}\big)u_n,\quad j\in\mathcal{K}^-,\quad n\geq 0. \tag{3.10}$$

Обозначим через y_{in}, $1\leq i\leq m$, i-ю компоненту вектора $x_n(\omega,\varphi_n)$, $n\geq -1$. Пусть дискретная функция $i\to j_i$ задает взаимно однозначное отображение упорядоченного множества чисел $\{m+1,\ldots,m+\dim\mathcal{K}^-\}$ на множество $\mathcal{K}^-$. Здесь величина $\dim\mathcal{K}^-$ равняется числу элементов в множестве $\mathcal{K}^-$. В дальнейшем будем использовать обозначения $y_{in}=\hat{g}_{j_i}^-(x_n)$, $m+1\leq i\leq m+\dim\mathcal{K}^-$, $y_n^1=\{y_{in}\}_1^m$, $y_n^2=\{y_{in}\}_{m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}$, $n\geq -1$. Тогда решение (3.8) системы (3.3) с выполненными условиями согласования (3.6) опишется формулами

$$x_n(t,\varphi_n)=A_0(t)y_{n-1}^1+\sum_{j=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\hat{\alpha}_{j_i}(t)y_{i(n-1)}+\tilde{B}(t)u_n,\quad t\in(0,\omega],\quad n\geq 0, \tag{3.11}$$

в которых величины $y_n^1=\{y_{in}\}_1^m$, $y_n^2=\{y_{in}\}_{m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}$, $n\geq 0$, согласно (3.9) и (3.10) определяются решениями разностной системы уравнений

$$y_n^1=A_0(\omega)y_{n-1}^1+\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\hat{\alpha}_{j_i}(\omega)y_{i(n-1)}+\tilde{B}(\omega)u_n,$$

$$y_{in}=\hat{g}_{j_i}^-(A_0)\,y_{n-1}^1+\sum_{p=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\hat{g}_{j_i}^-(\alpha_{j_p})\,y_{p(n-1)}+\hat{g}_{j_i}^-\Big(\tilde{B}\Big)u_n,\quad m+1\leq i\leq m+\dim\mathcal{K}^-,\quad n\geq 0, \tag{3.12}$$

с начальными условиями $y_{i(-1)}$, $1\leq i\leq m+\dim\mathcal{K}^-$.

Используя формулы (3.11), преобразуем выражение для критерия качества (3.4):

$$J=\sum_{n=0}^{+\infty}\Bigg[y_{n-1}^{1T}\Gamma_1y_{n-1}^1+y_{n-1}^{1T}\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\Gamma_{1i}y_{i(n-1)}+y_{n-1}^{1T}\Gamma_2u_n+\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}y_{i(n-1)}\Gamma_{1i}^Ty_{n-1}^1$$

$$+\sum_{p,q=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}y_{p(n-1)}\Gamma_{3pq}y_{q(n-1)}+\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}y_{i(n-1)}\Gamma_{2i}u_n+u_n^T\Gamma_2^Ty_{n-1}^1+u_n^T\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\Gamma_{2i}^Ty_{i(n-1)}+u_n^T\Gamma_4u_n\Bigg], \tag{3.13}$$

где

$$\Gamma_1=\int\limits_0^\omega A_0^T(t)C_1(t)A_0(t)dt,\quad \Gamma_2=\int\limits_0^\omega A_0^T(t)C_1(t)\tilde B(t)dt,\quad \Gamma_4=\int\limits_0^\omega\left(\tilde B^T(t)C_1(t)\tilde B(t)+C_2(t)\right)dt,$$

$$\Gamma_{1i}=\int\limits_0^\omega A_0^T(t)C_1(t)\alpha_{j_i}(t)dt,\quad \Gamma_{2i}=\int\limits_0^\omega \alpha_{j_i}^T(t)C_1(t)\tilde B(t)dt,\quad m+1\le i\le m+\dim\mathcal K^-,$$

$$\Gamma_{3pq}=\int\limits_0^\omega \alpha_{j_p}^T(t)C_1(t)\alpha_{j_q}(t)dt,\quad m+1\le p,q\le m+\dim\mathcal K^-.$$

Теорема 3. *Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации* (3.12), (3.13) *существует оптимальное стабилизирующее управление* $u_n^0=\tilde u^0\left(y_{n-1}^1,y_{(m+1)(n-1)},\ldots,y_{(m+\dim\mathcal K^-)(n-1)}\right)$, $n\ge 0$. *Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации* (3.1), (3.2) *с множеством допустимых управлений* U^0 *определяется формулами*

$$u^0=\hat u^0\left(x_{n\omega}(\cdot)\right)=\tilde u^0\left(x(n\omega),\int\limits_{t_{j_1}^+-\tau}^0 d\mu_{j_1}^T(s)x(n\omega+s),\ldots,\int\limits_{t_{j_{\dim\mathcal K^-}}^+-\tau}^0 d\mu_{j_{\dim\mathcal K^-}}^T(s)x(n\omega+s)\right),$$

где $n\omega<t\le(n+1)\omega$, $n\ge 0$.

Справедливость теоремы 3 обосновывается функциональными зависимостями между описаниями непрерывной и дискретной задач стабилизации, выписанными выше.

4. Расширение множества допустимых управлений

Зададим разбиение полуинтервала $(0,\omega]$ точками $0=t_0<t_1<\ldots<t_p=\omega$. Множество допустимых управлений U^1 будем моделировать функциями $u=u\left(t+\omega,x_t(\cdot)\right)=u\left(t,x_t(\cdot)\right)$, $t\in\mathbb R^+$, $u=\sum_{j=1}^p\chi_{(t_{j-1},t_j]}(t-n\omega)u_j\left(x_{n\omega}(\cdot)\right)$, $n\omega<t\le(n+1)\omega$, $n\ge 0$, определяемыми непрерывными отображениями $u_j(\cdot)\colon C\left([-\tau,0],\mathbb R^m\right)\to\mathbb R^r$, $1\le j\le p$.

Для рассматриваемого класса допустимых управлений системе (3.1) ставится в соответствие счетная система управляемых уравнений на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt}=\sum_{k=1}^K a_k(t)\int\limits_{t_k^+-\tau}^{t_k^-+0} d\mu_k^T(s)x_n(s)+B(t)u_n(t),\tag{4.1}$$

где $u_n(t)=\sum_{j=1}^p\chi_{(t_{j-1},t_j]}(t)u_{jn}$, $0<t\le\omega$, $u_{jn}\in\mathbb R^r$, $1\le j\le p$, $n\ge 0$. Тогда критерий качества (3.2) принимает вид

$$J=\int\limits_0^\omega\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x_n^T(t)C_1(t)x_n(t)+u_n^T(t)C_2(t)u_n(t)\right)dt.\tag{4.2}$$

Используя теорему 2, находим общее решение счетной системы дифференциальных уравнений с последействием (4.1):

$$x_n(t,\varphi_n)=A_0(t)\varphi_n(0)+\sum_{j\in\mathcal K^-}\hat\alpha_j(t)g_j^-(\varphi_n)+\sum_{j=1}^K\alpha_j(t)g_j\left(\hat f_n\right)+\sum_{j=1}^p\hat B_j(t)u_{jn},\quad t\in(0,\omega],\tag{4.3}$$

где $\varphi_n \in C\left([-\tau,0],\mathbb{R}^m\right)$,

$$\hat{f}_n(t)=\sum_{q=1}^{p}\hat{B}_q(t)u_{qn},\quad \hat{B}_q(t)=\int\limits_0^t B(s)\chi_{(t_{q-1},t_q]}(s)ds,\quad t\in(0,\omega],$$

$$g_j\left(\hat{f}_n\right)=\sum_{q=1}^{p}\beta_{jq}u_{qn},\quad \beta_{jq}=\int\limits_{\max\left(+0,t_j^+-\tau\right)}^{t_j^-+0} d\mu_j^T(s)\hat{B}_q(s)u_{qn},\quad 1\le j\le K,\quad 1\le q\le p,\quad n\ge 0.$$

С учетом условий согласования (3.6) и формул (3.7) из общего решения счетной системы (4.3) находим

$$x_n(t,\varphi_n)=A_0(t)x_{n-1}\left(\omega,\varphi_{n-1}\right)+\sum_{j\in\mathcal{K}^-}\hat{\alpha}_j(t)\hat{g}_j^-(x_{n-1})+\sum_{q=1}^{p}\tilde{B}_q(t)u_{qn},\quad n\ge 0,\tag{4.4}$$

где $\tilde{B}_q(t)=\sum_{j=1}^K\alpha_j(t)\beta_{jq}+\hat{B}_q(t)$, $1\le q\le p$, $t\in(0,\omega]$.

Разностной системе уравнений (3.12) соответствует система

$$y_n^1=A_0(\omega)y_{n-1}^1+\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\hat{\alpha}_{j_i}(\omega)y_{i(n-1)}+\sum_{q=1}^{p}\tilde{B}_q(\omega)u_{qn},$$

$$y_{in}=\hat{g}_{j_i}^-\left(A_0\right)y_{n-1}^1+\sum_{q=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\hat{g}_{j_i}^-\left(\alpha_{j_q}\right)y_{q(n-1)}+\sum_{q=1}^{p}\hat{g}_{j_i}^-\left(\tilde{B}_q\right)u_{qn},\ \ m+1\le i\le m+\dim\mathcal{K}^-,\ n\ge 0,\tag{4.5}$$

с начальными условиями $y_{i(-1)}$, $1\le i\le m+\dim\mathcal{K}^-$. Соответствующий ей критерий качества будет определяться формулой

$$\begin{aligned}J=\sum_{n=0}^{+\infty}\Bigg[&y_{n-1}^{1T}\Gamma_1y_{n-1}^1+y_{n-1}^{1T}\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\Gamma_{1i}y_{i(n-1)}+y_{n-1}^{1T}\sum_{q=1}^{p}\Gamma_{2q}u_{qn}+\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}y_{i(n-1)}\Gamma_{1i}^Ty_{n-1}^1\\&+\sum_{p,q=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}y_{p(n-1)}\Gamma_{3pq}y_{q(n-1)}+\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}y_{i(n-1)}\sum_{q=1}^{p}\Gamma_{2iq}u_{qn}\\&+\sum_{q=1}^{p}u_{qn}^T\Gamma_{2q}^Ty_{n-1}^1+\sum_{q=1}^{p}u_{qn}^T\sum_{i=m+1}^{m+\dim\mathcal{K}^-}\Gamma_{2iq}^Ty_{i(n-1)}+\sum_{j,q=1}^{p}u_{qn}^T\Gamma_{4jq}u_{jn}\Bigg].\end{aligned}\tag{4.6}$$

Здесь величины Γ_1, Γ_{1i}, $m+1\le i\le m+\dim\mathcal{K}^-$, Γ_{3pq}, $m+1\le p,q\le m+\dim\mathcal{K}^-$, определяются формулами, приведенными выше,

$$\Gamma_{2q}=\int\limits_0^\omega A_0^T(t)C_1(t)\tilde{B}_q(t)dt,$$

$$\Gamma_{2iq}=\int\limits_0^\omega \alpha_{j_i}^T(t)C_1(t)\tilde{B}_q(t)dt,\quad m+1\le i\le m+\dim\mathcal{K}^-,$$

$$\Gamma_{4jq}=\int\limits_0^\omega \tilde{B}_q^T(t)C_1(t)\tilde{B}_j(t)dt+\delta_{jq}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}C_2(t)dt,$$

δ_{jq} — символ Кронекера, $1\le j,q\le p$.

В результате справедливо обобщение теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации* (4.5), (4.6) *существует оптимальное стабилизирующее управление* $u_{qn}^0 = \tilde{u}_q^0\big(y_{n-1}^1, y_{(m+1)(n-1)}, \ldots, y_{(m+\dim\mathcal{K}^-)(n-1)}\big)$, $1 \le q \le p$, $n \ge 0$. *Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации* (3.1), (3.2) *с множеством допустимых управлений* U^1 *определяется формулами*

$$u^0 = \sum_{q=1}^{p} \chi_{(t_{q-1},t_q]}(t-n\omega)\tilde{u}_q^0\left(x(n\omega), \int\limits_{t_{j_1}^+-\tau}^{0} d\mu_{j_1}^T(s)x(n\omega+s), \ldots, \int\limits_{t_{j_{\dim\mathcal{K}^-}}^+-\tau}^{0} d\mu_{j_{\dim\mathcal{K}^-}}^T(s)x(n\omega+s)\right),$$

где $n\omega < t \le (n+1)\omega$, $n \ge 0$.

Теоремы 3 и 4 позволяют использовать известные методы оптимальной стабилизации автономных дискретных систем [27; 28] при нахождении оптимальных стабилизирующих управлений линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием. Последние системы можно использовать в качестве аппроксимационных моделей для общих линейных периодических систем с последействием и находить для них приближения оптимальных стабилизирующих управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании регулятора в системе с запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 3. С. 39–51.
2. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
3. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
4. **Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.** Приближенное решение задачи аналитического регулятора для систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026.
5. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.
6. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 450–458.
7. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
8. **Шабалин М.Н., Шиманов С.Н.** Задача Летова для управления с запаздыванием времени и периодическими коэффициентами // Устойчивость и нелинейные колебания: сб. науч. тр. Свердловск: Изд-во Урал. гос. ун-та, 1984. С. 89–106.
9. **Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.** Оптимальная стабилизация динамических процессов в периодических линейных системах дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы динамического управления: сб. науч. тр. ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2010. Вып. 5. С. 102–112.
10. **Данфорд Н., Шварц Д.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962. 895 с.
11. **Тихонов А.Н.** О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их приложении к некоторым задачам математической физики // Бюл. МГУ. Сек. А. 1938. Т. 1, № 8. С. 1–25.
12. **Cooke K.L.** Stability of non-autonomous delay differential equations by Liapunov functionals // Lec. Notes in Math. 1984. No. 1076. P. 41–52.
13. **Cooke K.L., Ferreira J.M.** Stability conditions for linear retarded functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 96, no. 2. P. 480–504.
14. **Cooke K.L., Wiener J.** Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. Appl. 1984. Vol. 99. P. 265–297.
15. **Alonso A., Hong. J., Rojo J.** A class of ergodic solution of differential equations with piecewise constant arguments // Dyn. Syst. Appl. 1998. Vol. 7, no. 4. P. 561–574.
16. **Rong Y** On almost periodic solution of differential equations with piecewise constant arguments // Math. Cambridge Phil. Soc. 2006. Vol. 141, no. 1. P. 161–174.

17. **George S.** Periodic solutions of differential equations with piecewise constant delays // Commun. Appl. Anal. 2003. Vol. 7, no. 2–3. P. 443–453.
18. **Cooke K.L., Turi J., Turner G.** Stabilization of hybrid systems in the presence of feedback delays / USA Institute for mathematics and its applications. Preprint series No. 906. 1991. 15 p.
19. **Yoshiaki M.** A sufficient condition on global stability in a logistic equations with piecewise constant arguments // Hokkaido Math. J. 2003. Vol. 32, no. 1. P. 75–83.
20. **Golpalsamy K.** Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dortrecht: Kluwer academic publishers, 1992. 520 p.
21. **Liu P., Golpalsamy K.** Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments // Appl. Math. and Comput. 1999. Vol. 101, no. 1. P. 63–88.
22. **Симонов П.М.** О некоторых динамических моделях макроэкономики // Экономическая кибернетика: математические и инструментальные методы анализа, прогнозирования и управления. Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 2002. С. 213–231.
23. **Симонов П.М.** О некоторых динамических моделях микроэкономики // Вест. ПГТУ. Математика и прикладная математика. 2002. С. 109–114.
24. **Тарасян В.С.** Периодические системы дифференциальных уравнений с конечномерными операторами // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2002. № 4. С. 67–91.
25. **Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С.** Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. № 18. С. 67–83. (Математика и механика; вып. 3.)
26. **Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С.** Условия конечномерности оператора монодромии для периодических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2003. № 3. С. 27–39.
27. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.
28. **Фурасов В.Д.** Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982. 192 с.

Поступила 10.09.2012

Долгий Юрий Филиппович
д-р ф.-м. наук, профессор
Уральский федеральный университет
вед. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Yurii.Dolgii@usu.ru

Кошкин Евгений Вячеславович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: Koshkin@uralmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.538.2

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ С КРУГОВЫМИ ГРАНИЦАМИ[1]

Г. А. Дубосарский

Предложен новый способ решения задач Шварца и Дирихле в области с круговыми компонентами границы. Изучена скорость сходимости рядов, представляющих решение в пространствах типа Харди, равномерно сходящихся для гладких граничных значений. Приведены примеры функций, для которых построенные ряды расходятся. Построены гармонические всплески, ряды по которым сходятся для всех функций из рассматриваемых пространств.

Ключевые слова: задача Шварца, задача Дирихле, гармонические всплески, базис пространств гармонических функций.

G. A. Dubosarskii. Harmonic wavelets in a multiply connected domain with circular boundaries.

A new approach to the solution of the Schwarz and Dirichlet problems in a domain with circular components of the boundary is proposed. The convergence rate is studied for the series that represent a solution in spaces of Hardy type and converge uniformly for smooth boundary values. Examples of functions for which the constructed series diverge are presented. Harmonic wavelets are constructed such that series in these wavelets converge for all functions from the considered spaces.

Keywords: Schwarz problem, Dirichlet problem, harmonic wavelets, basis in spaces of harmonic functions.

1. Введение

В данной статье построены всплески, с помощью которых могут быть решены задачи Дирихле и Шварца. Задачи Дирихле и Шварца являются классическими задачами математической физики. Задача Дирихле состоит в определении гармонической функции в области по ее известным граничным значениям. Задача Шварца заключается в восстановлении аналитической функции (в общем случае многозначной) в области по ее вещественной части на границе. В работах [1–3] для решения задач Дирихле и Шварца в областях с круговыми границами составлялись функциональные уравнения, решения которых представлялись в виде рядов бесконечной кратности. В статьях [4–7] ядра интегральной формулы Шварца находились с помощью метода симметрии. В областях с круговыми границами ряд, представляющий ядра, был получен в виде суммы по элементам группы симметрий относительно всевозможных конечных последовательностей граничных окружностей. При этом количество таких последовательностей длины n в областях со степенью связности, большей двух, растет экспоненциально при n, стремящемся к бесконечности. В [8] приводится решение задачи Шварца в многосвязной области, ограниченной конечным числом кривых. Ядра в этой работе выражались через θ-функцию Римана, представляемую в форме многократного ряда. В работах [9; 10] были построены гармонические всплески, являющиеся базисами пространств гармонических функций в единичном круге, а также в центральном и нецентральном кольцах.

В данной статье мы приводим новый способ решения задачи Дирихле в форме ряда по гармоническим функциям, что легко позволяет найти аналитический ряд, являющийся решением задачи Шварца. Полученные формулы не содержат многократных рядов и более просты, чем формулы в работах [1–8].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00004), интеграционного проекта, выполняемого учеными УрО РАН совместно с СО РАН (проект 12-С-1-1018), и проекта поддержки молодых ученых и аспирантов “Гармонические и аналитические всплески” (2012 г.).

В разд. 2 построены базисы пространств типа Харди $h_p, 1 < p < \infty$, в области с круговыми границами. В теореме 2 найдена оценка скорости сходимости частичных сумм ряда, представляющего решение задачи Дирихле. Прежде чем ее получить, мы доказали несколько лемм. В теореме 3 показано, что существуют гармонические функции из пространств h_1 и h_∞, для которых построенные ряды расходятся по норме пространств h_1 и h_∞ соответственно. На основе системы функций из разд. 2 и всплесков из статьи [10] в разд. 3 построены всплески, ряды по которым сходятся для всех функций из пространств $h_p, 1 \le p \le \infty$.

Обозначим через $C_r(a)$ окружность с центром в точке a радиуса r. Будем также использовать обозначение $B_r(a) = \{z\colon |z-a| < r\}$ и обозначать $B_1(0)$ через K. Рассмотрим область комплексной плоскости $\widetilde{K} = \widetilde{K}(z_1, r_1, z_2, r_2, \ldots, z_m, r_m)$, ограниченную окружностями $C_{r_0}(z_0) = C_1(0), C_{r_1}(z_1), C_{r_2}(z_2), \ldots, C_{r_m}(z_m)$, где $|z_k| + r_k < 1, k = \overline{1,m}$ и $|z_k - z_l| > r_k + r_l, k \ne l$.

Будем полагать, что все гармонические функции в данной статье являются вещественнозначными. Напомним, что гармоническая функция $u(z)$ в круге K принадлежит классу Харди $h_p(K)$, $1 \le p \le \infty$, если она удовлетворяет условию

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx < \infty \quad \text{при} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\sup_{z \in K} |u(z)| < \infty \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Известно [11, с. 371], что у функции $u(z)$ из пространства $h_p(K), 1 \le p \le \infty$, почти всюду на окружности $C_1(0)$ существуют угловые значения $u(e^{ix}) \in L_p[0, 2\pi)$. Если $u(z) \in h_p(K)$, $1 < p \le \infty$, то $u(z)$ восстанавливается по своим граничным значениям с помощью интеграла Пуассона

$$u(re^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P\big(re^{i(x-t)}\big) dt, \quad \text{где} \quad P(re^{ix}) = \frac{1-r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}. \tag{1.1}$$

Сохранив обозначения, сузим классы $h_p(K), 1 \le p \le \infty$, как это сделано в статье [9]:

$$h_p(K) = \begin{cases} \{u(z) \in h_1(K) : u(z) \text{ удовлетворяет равенству (1.1)}\}, & p = 1, \\ h_p(K), & 1 < p < \infty, \\ \{u(z) : u(z) \text{ непрерывна в круге } \overline{K}\}, & p = \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим пространства гармонических функций $h_p(\widetilde{K}), 1 \le p \le \infty$. Обозначим через ρ минимум из попарных расстояний между компонентами границы $\widetilde{K}$ — окружностями $C_{r_0}(z_0), C_{r_1}(z_1), \ldots, C_{r_m}(z_m)$. При $1 < p < \infty$ будем считать, что $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$, если $u(z)$ гармоническая в $\widetilde{K}$ и выполнены требования

$$\sup_{1-\rho<r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{ix})|^p dx < \infty, \qquad \sup_{r_l<r<r_l+\rho} \int_0^{2\pi} |u(z_l + re^{ix})|^p dx < \infty, \quad l = \overline{1,m}. \tag{1.2}$$

Если $1 \le p \le \infty$ и выполнены условия (1.2), то функция $u(z)$ почти всюду на $\partial\widetilde{K}$ имеет граничные значения, определяемые по некасательным путям. При $p = \infty$ будем считать, что $u(z) \in h_\infty(\widetilde{K})$, если $u(z)$ гармоническая в $\widetilde{K}$ и непрерывна в $\overline{\widetilde{K}}$. В класс $h_1(\widetilde{K})$ выделим гармонические функции, удовлетворяющие при $p = 1$ условию (1.2) и, кроме того, дополнительным условиям

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{ix}) - u(e^{ix})| dx \xrightarrow[r\to 1-0]{} 0, \quad \int_0^{2\pi} |u(z_l + re^{ix}) - u(z_l + r_l e^{ix})| dx \xrightarrow[r\to r_l+0]{} 0, \quad l = \overline{1,m}.$$

2. Ортонормированная гармоническая система

Рассмотрим систему функций

$$\Big\{h_0^0(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}},\ h_0^l(z) = \frac{\ln|z-z_l|}{\sqrt{2}\ln r_l},\ h_k^0(z) = Rez^k,\ \widetilde{h}_k^0(z) = Imz^k,$$

$$h_k^l(z) = Re\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ \widetilde{h}_k^l(z) = -Im\Big(\frac{r_l}{z-z_l}\Big)^k,\ l=\overline{1,m}, k\in\mathbb{N}\Big\} \tag{2.1}$$

и введем скалярное произведение

$$(u,v) = \sum_{l=0}^{m}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_l + r_l e^{ix})v(z_l + r_l e^{ix})dx. \tag{2.2}$$

Займемся теперь ортонормированием системы гармонических функций (2.1) относительно произведения $(\cdot,\cdot)$ и построением ряда, представляющего решение задачи Дирихле в $\widetilde{K}$. Процесс ортогонализации Грама — Шмидта будем осуществлять в следующем естественном порядке:

$$\begin{gathered} h_0^0(z), h_0^1(z), h_0^2(z), \ldots, h_0^m(z), \\ h_1^0(z), \widetilde{h}_1^0(z), h_1^1(z), \widetilde{h}_1^1(z), \ldots, h_1^m(z), \widetilde{h}_1^m(z), \\ h_2^0(z), \widetilde{h}_2^0(z), h_2^1(z), \widetilde{h}_2^1(z), \ldots, h_2^m(z), \widetilde{h}_2^m(z), \ldots \end{gathered} \tag{2.3}$$

Обозначим через $\overset{(\sim)}{f}{}_k^l(z)$ функцию, которая получается после ортонормирования части системы (2.1) в порядке (2.3) до функции $\overset{(\sim)}{h}{}_k^l(z)$ включительно (знак волны в скобках над функциями $f_k^l(z)$ и $h_k^l(z)$ означает, что волна либо не ставится, либо ставится над обеими функциями). Также мы будем нумеровать функции $h_k^l(z)$ одним нижним индексом: $h_s(z), s\in\mathbb{N}$, в порядке, в котором они выписаны в (2.3). Аналогичную нумерацию введем для функций $f_k^l(z)$. Сопоставим гармонической функции $u(z)\in h_p(\widetilde{K})$ ряд

$$u(z) \sim \sum_{s=1}^{\infty}(u,f_s)f_s(z). \tag{2.4}$$

Мы изучим скорость сходимости частичных сумм

$$S_n(z;u) = \sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n}(u,f_k^l)f_k^l(z) + \sum_{k=1}^{n}(u,\widetilde{f}_k^l)\widetilde{f}_k^l(z)\right) \tag{2.5}$$

ряда (2.4). Для этого нам потребуется следующее утверждение о специальном разложении гармонической функции. Доказательство существования этого разложения можно найти в [1], а единственность проверяется так же, как в [9, лемма 2.1].

Утверждение. *Пусть функция $u(z)$ является гармонической в $\widetilde{K}$. Тогда $u(z)$ однозначным образом представима в виде*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m}u_k(z) + \sum_{k=1}^{m}A_k\ln|z-z_k|, \tag{2.6}$$

где $u_0(z)$ гармоническая в $B_1(0)$, $u_k(z)$ — в $\mathbb{C}\setminus\overline{B_{r_k}(z_k)}$, $u_k(\infty) = \lim_{z\to\infty}u(z) = 0, k=\overline{1,m}$, и $A_k, k=\overline{1,m}$, — некоторые вещественные константы.

Из утверждения следует, что система (2.1) является всюду плотным множеством в каждом из пространств $h_p(\widetilde{K}), 1\le p\le\infty$.

Лемма 1. *Пусть гармоническая функция $u(z)$ принадлежит классу $h_p(K), 1 \le p < \infty$, и функция $\omega(z)$ аналитическая в круге K, непрерывная в $\overline{K}$ и $\omega(K) \subseteq K$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} |u(\omega(e^{ix}))|^p dx \le \frac{1 + |\omega(0)|}{1 - |\omega(0)|} \int_0^{2\pi} |u(e^{ix})|^p dx.$$

Лемма 2. *Пусть гармоническая в области $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_k, r_k)}$ функция $u(z)$ такова, что функция $v(z) = u\big(z_k + \frac{r_k}{z}\big) \in h_p(K), 1 \le p < \infty$. Функция $\omega(z)$ аналитическая в круге K, непрерывная в $\overline{K}$, и $\omega(K) \subseteq K, \omega(e^{ix}) \subset \mathbb{C} \setminus B_{r_k}(z_k)$. Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$\int_0^{2\pi} |u(\omega(e^{ix}))|^p dx \le \int_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|^p dx, \quad \text{если} \quad B_{r_k}(z_k) \subseteq \omega(K), \tag{2.7}$$

$$\int_0^{2\pi} |u(\omega(e^{ix}))|^p dx \le \frac{|\omega(0) - z_k| + r_k}{|\omega(0) - z_k| - r_k} \int_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|^p dx, \quad \text{если} \quad B_{r_k}(z_k) \not\subseteq \omega(K). \tag{2.8}$$

Докажем только лемму 2, так как обоснование леммы 1 содержит те же идеи. Принцип рассуждений заимствован из теоремы Литлвуда [12, с. 90].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U(z)$ — гармоническое продолжение функции $|u(z)|^p$ с окружности $C_{r_k}(z_k)$ во внешность круга $\overline{B_{r_k}(z_k)}$ такое, что предел $U(\infty) = \lim_{z \to \infty} U(z)$ конечен. Тогда в силу субгармоничности в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$ функции $|u(z)|^p$ выполняется неравенство $|u(\omega(e^{ix}))|^p \le U(\omega(e^{ix}))$.

Докажем неравенство (2.8). Заметим, что тогда $\omega(K) \subset K \setminus \overline{B_{r_k}(z_k)}$, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |u(\omega(e^{ix}))|^p dx \le \int_0^{2\pi} U(\omega(e^{ix})) dx = 2\pi U(\omega(0)). \tag{2.9}$$

Введем гармоническую функцию $V(z) = U\Big(z_k + \dfrac{r_k}{z}\Big)$. По формуле Пуассона получаем

$$V(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(e^{ix}) P(z e^{-ix}) dx, \quad z \in K.$$

Откуда заключаем, что

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(z_k + r_k e^{ix}) P\Big(\frac{r_k}{z - z_k} e^{ix}\Big) dx. \tag{2.10}$$

Собирая вместе (2.9), (2.10) и используя то, что $P(z) \le \dfrac{1 + |z|}{1 - |z|}$, выводим

$$\int_0^{2\pi} |u(\omega(e^{ix}))|^p dx \le 2\pi U(\omega(0)) = \int_0^{2\pi} U(z_k + r_k e^{ix}) P\Big(\frac{r_k}{\omega(0) - z_k} e^{ix}\Big) dx$$

$$\le \frac{1 + \dfrac{r_k}{|\omega(0) - z_k|}}{1 - \dfrac{r_k}{|\omega(0) - z_k|}} \int_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|^p dx = \frac{|\omega(0) - z_k| + r_k}{|\omega(0) - z_k| - r_k} \int_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|^p dx.$$

Неравенство (2.8) доказано.

Докажем теперь неравенство (2.7). Заметим, что многочлены образуют всюду плотное множество в пространстве $h_\infty(K)$. Поэтому достаточно провести доказательство в предположении, что $\omega(z)$ — многочлен. В случае (2.7) выполнено условие $B_{r_k}(z_k) \subseteq \omega(K)$, в силу которого вне K функция $U(\omega(z))$ гармоническая. Поэтому выполняется следующая цепочка:

$$\int\limits_0^{2\pi} |u(\omega(e^{ix}))|^p dx \leq \int\limits_0^{2\pi} U(\omega(e^{ix}))dx = 2\pi U(\omega(\infty))$$

$$= \pi U(\infty) = \int\limits_0^{2\pi} U(z_k + r_k e^{ix})dx = \int\limits_0^{2\pi} |u(z_k + r_k e^{ix})|^p dx.$$

Что и требовалось доказать. □

Будем использовать нормы

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|f(x)\|_{L_\infty} = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

и следующее скалярное произведение: $(f,g)_{L_2} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Обозначим через $E_n f(x)_p$ наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n по норме пространства $L_p[0,2\pi]$. Через $\tau,\ 0 < \tau < 1$, обозначим максимум из величин

$$|z_k| + r_k, \quad \frac{r_k}{1-|z_k|}, \quad \frac{r_k}{|z_k - z_l| - r_l}, \quad k,l = \overline{1,n}, \quad k \neq l.$$

В разд. 2 константы в оценках вида $O(a_n), n \to \infty$, зависят только от геометрии области $\widetilde{K}$.

Лемма 3. *Пусть функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Тогда для компонент $u_k(z), k = \overline{0,m}$, из разложения* (2.6) *при $k \neq l$ выполняется оценка*

$$E_n u_k(z_l + r_l e^{ix})_p = O(\tau^n)\|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}, \quad n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$, то по аналогии с тем, как это было доказано в [9], проверяется, что $u_0(z) \in h_p(K), u_k\big(z_k + \dfrac{r_k}{z}\big) \in h_p(K), k = \overline{1,m}$. Следовательно, для почти всех x существуют граничные значения $u_0(e^{ix}), u_k(z_k + r_k e^{ix}), k = \overline{1,m}$, определяемые по некасательным путям.

Докажем лемму в случае $l = 0$, поскольку в других случаях доказательство аналогично. Введем функцию $v_k(z) = u_k\big(\dfrac{\tau}{z}\big)$. Ясно, что $v_k(z) \in h_p(K)$. В [13, с. 68] доказано неравенство, которое для функции $v_k(z)$ запишется в виде

$$E_n v_k(\tau e^{ix})_p \leq \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\tau^{n+1} E_n v_k(e^{ix})_p.$$

Откуда заключаем, что

$$E_n u_k(e^{ix})_p = E_n v_k(\tau e^{ix})_p \leq \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\tau^{n+1}\|v_k(e^{ix})\|_{L_p} = \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\tau^{n+1}\|u_k(\tau e^{ix})\|_{L_p}.$$

Остается заметить, что из леммы 2 при $\omega(z) = \tau z$ следует, что

$$E_n u_k(e^{ix})_p \leq \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\tau^{n+1}\|u_k(\tau e^{ix})\|_{L_p} \leq \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\tau^{n+1}\|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}. \tag{2.11}$$

Откуда вытекает утверждение леммы при $l = 0$. □

Лемма 4. *Нормы*

$$\|u\|_p = \sum_{k=0}^{m} \|u(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}$$

и

$$\|u\|_{p,\widetilde{K}} = \sum_{k=0}^{m} \|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p} + \sum_{k=1}^{m} |A_k|$$

эквивалентны в пространстве $h_p(\widetilde{K})$, $1 \le p \le \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя неравенство треугольника к тождеству (2.6), получаем оценку

$$\|u\|_p \le \sum_{k=0}^{m} \|u_k\|_p + \sum_{k=1}^{m} |A_k| \|\ln|z - z_k|\|_p. \tag{2.12}$$

Из леммы 1 при $\omega(z) = z_k + r_k z$ заключаем, что выполняется неравенство

$$\|u_0\|_p \le \|u_0(e^{ix})\|_{L_p} \biggl(\sum_{k=0}^{m} \Bigl(\frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|} \Bigr)^{1/p} \biggr).$$

Из леммы 2 при $\omega(z) = z_l + r_l z, l = \overline{0, m}$, получается оценка

$$\|u_k\|_p = \sum_{l=0}^{m} \|u(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_p} \le \biggl(1 + \sum_{\substack{l=1,\\ l\ne k}}^{m} \Bigl(\frac{|z_l - z_k| + r_k}{|z_l - z_k| - r_k} \Bigr)^{1/p} \biggr) \|u_k(z_k + r_k e^{ix})\|_{L_p}.$$

Подставляя последние неравенства в (2.12), выводим, что $\|u\|_p \le C_1 \|u\|_{p,\widetilde{K}}$.

Докажем теперь, что существует константа C_2 такая, что $\|u\|_{p,\widetilde{K}} \le C_2 \|u\|_p$. Оценим величину $\|u_0(e^{ix})\|_{L_p}$. Введем число $\rho', 0 < \rho' < \rho$, где ρ определено перед неравенствами (1.2), и рассмотрим кольцо, образованное окружностями $C_1(0)$ и $C_{1-\rho'}(0)$. Применяя к этому кольцу утверждение, получаем, что существуют функции $u_0^*(z)$ и $u_1^*(z)$ и константа A^* такие, что

$$u(z) = u_0^*(z) + u_1^*(z) + A^* \ln|z|, \tag{2.13}$$

где $u_0^*(z)$ гармоническая в $B_1(0)$, $u_1^*(z)$ гармоническая вне $B_{1-\rho'}(0)$, $u_1^*(\infty) = 0$. С другой стороны, в силу (2.6) выполняется равенство

$$u(z) = u_0(z) + \sum_{k=1}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln\Bigl|1 - \frac{z_k}{z}\Bigr| + \biggl(\sum_{k=1}^{m} A_k \biggr) \ln|z|.$$

Поскольку разложение (2.6) однозначно, мы заключаем, что справедливы соотношения

$$u_0^*(z) = u_0(z),$$

$$u_1^*(z) = \sum_{k=1}^{m} u_k(z) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln\Bigl|1 - \frac{z_k}{z}\Bigr|, \quad A^* = \sum_{k=1}^{m} A_k.$$

Оценим выражение $E_0 u_0^*(e^{ix})_p + E_0 u_1^*((1 - \rho')e^{ix})$ так же, как это сделано в работе [9]. По неравенству треугольника получаем

$$E_0 u_0^*(e^{ix})_p \le E_0 \Bigl(u(e^{ix}) - A^* \ln|z| \Big|_{z=e^{ix}} \Bigr)_p + E_0 u_1^*(e^{ix})_p = E_0 \bigl(u(e^{ix}) \bigr)_p + E_0 u_1^*(e^{ix})_p. \tag{2.14}$$

Аналогично выводится следующая оценка:

$$E_0 u_1^*((1 - \rho')e^{ix})_p \le E_0 u((1 - \rho')e^{ix})_p + E_0 u_0^*((1 - \rho')e^{ix})_p. \tag{2.15}$$

В [13] доказано, что справедливо неравенство

$$E_0u_0^*((1-\rho')e^{ix})_p \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(1-\rho')E_0u_0^*(e^{ix})_p. \tag{2.16}$$

Неравенство (2.11) в случае кольца, ограниченного окружностями $C_1(0)$ и $C_{1-\rho'}(0)$, переписывается в виде

$$E_0u_1^*((1-\rho')e^{ix})_p \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(1-\rho')E_0u_1^*(e^{ix})_p. \tag{2.17}$$

Складывая неравенства (2.14) и (2.15) и учитывая (2.16) и (2.17), получаем

$$\begin{aligned} E_0u_0^*(e^{ix})_p + E_0u_1^*((1-\rho')e^{ix})_p &\le E_0\left(u(e^{ix})\right)_p + E_0u((1-\rho')e^{ix})_p \\ &+ \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(1-\rho')(E_0u_0^*(e^{ix})_p + E_0u_1^*((1-\rho')e^{ix})_p). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Из неравенства (2.18) мы заключаем, что

$$\begin{aligned} E_0u_0(e^{ix})_p = E_0u_0^*(e^{ix})_p &\le E_0u_0^*(e^{ix})_p + E_0u_1^*((1-\rho')e^{ix})_p \\ &\le \frac{1}{1-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(1-\rho')}(E_0\left(u(e^{ix})\right)_p + E_0u((1-\rho')e^{ix})_p). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Оценим теперь выражение $\left\|u_0(e^{ix}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(e^{it})dt\right\|_{L_p}$. Поскольку интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(e^{it})dt$ является первым членом ряда Фурье функции $u_0(e^{ix})$, то в силу неравенства Лебега существует константа C_3 такая, что выполняется

$$\left\|u_0(e^{ix}) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_0(e^{it})dt\right\|_{L_p} \le C_3E_0u_0(e^{ix})_p. \tag{2.20}$$

Из неравенств (2.19) и (2.20) следует, что

$$\|u_0(e^{ix})\|_{L_p} \le \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}u_0(e^{it})dt\right| + C_4(E_0\left(u(e^{ix})\right)_p + E_0u((1-\rho')e^{ix})_p). \tag{2.21}$$

Заметим теперь, что справедливо соотношение $\int_0^{2\pi}\left(u_1^*(e^{it}) + A^*\ln|z|\Big|_{z=e^{ix}}\right)dt = 2\pi u_1^*(\infty) = 0$, поэтому в силу (2.13) выполняется равенство $\int_0^{2\pi}u_0^*(e^{it})dt = \int_0^{2\pi}u(e^{it})dt$. Отсюда и неравенства (2.21) следует, что существует константа C_5 такая, что

$$\|u_0(e^{ix})\|_{L_p} \le C_5(\|u(e^{ix})\|_{L_p} + \|u((1-\rho')e^{ix})\|_{L_p}). \tag{2.22}$$

Известно, что решение задачи Дирихле в $\widetilde{K}$ представимо следующим образом:

$$u(z) = \sum_{l=0}^{m}\int_0^{2\pi}u(z_l + r_le^{ix})K_l(x,z)dx,$$

где $K_l(x,z), l = \overline{0,m}$, — однозначно определяемые ядра. Из работы [8] вытекает, что ядра $K_l(t,z)$ являются непрерывными при $z \in \widetilde{K}$ и, следовательно, ограничены при $z = (1-\rho')e^{ix}$ по модулю некоторой константой C_6. Отсюда получаем оценку

$$\|u((1-\rho')e^{ix})\|_{L_p} = \left\|\sum_{l=0}^{m}\int_0^{2\pi}u(z_l + r_le^{it})K_l((1-\rho')e^{ix},t)\right\|_{L_p}$$

$$\leq (m+1)C_6 \sum_{l=0}^{m} \|u(z_l + r_l e^{it})\|_{L_p} = (m+1)C_6\|u\|_p. \tag{2.23}$$

Объединяя неравенства (2.22) и (2.23), получаем, что существует константа C_7 такая, что выполняется оценка

$$\|u_0(e^{ix})\|_{L_p} \leq C_7\|u\|_p. \tag{2.24}$$

Мы сформулировали разложение (2.6) для круговых областей, у которых внешней границей является окружность с центром в точке ноль радиуса 1. Оно остается верным для областей с внешней окружностью с другим центром и радиусом. Для каждого фиксированного $l = \overline{1,m}$ рассмотрим кольцо, ограниченное окружностями $C_{r_l}(z_l)$ и $C_{r_l+\rho'}(z_l)$. В этом кольце соответствующие компоненты функции $u(z)$ вычисляются по формулам

$$u_0^{**}(z) = u(z) - u_l(z) - A_l \ln|z - z_l|, \quad u_1^{**}(z) = u_l(z), \quad A^{**} = A_l.$$

Константа A^{**} вычисляется следующим образом:

$$A^{**} = \frac{1}{2\pi \ln \dfrac{r_l + \rho'}{r_l}} \left(\int_0^{2\pi} u(z_l + (r_l + \rho')e^{ix})dx - \int_0^{2\pi} u(z_l + r_l e^{ix})dx \right).$$

По аналогии со случаем $l = 0$ можно убедиться, что при $l = \overline{1,m}$ выполняется

$$\|u_l(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_p} = \|u^{**}(z_l + r_l e^{ix})\|_{L_p} \leq C_9\|u\|_p. \tag{2.25}$$

Откуда при $l = \overline{1,m}$ получаем оценку

$$|A_l| = |A^{**}| \leq C_8\|u\|_p\,. \tag{2.26}$$

Из неравенств (2.24), (2.25) и (2.26) следует, что норма $\|\cdot\|_{p,\widetilde{K}}$ мажорируется нормой $\|\cdot\|_p$. Что и требовалось доказать. □

Путем непосредственного вычисления с помощью разложения в ряд Тейлора и оценивания с использованием бинома Ньютона можно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 5. *Для функций системы* (2.1), *скалярного произведения* (2.2) *и числа* τ, *введенного перед леммой* 3, *равномерно по* k', l *и* l' *выполняются оценки*:

$$(\overset{(\sim)}{h}{}^{l}_{k}, \overset{(\sim)}{h}{}^{l'}_{k'}) = \delta_{k,k'}\delta_{l,l'} + O(\tau^k), \quad k \to \infty,$$

$$(h^l_k, \widetilde{h}^{l'}_{k'}) = O(\tau^k), \quad k \to \infty.$$

Пусть система $\{h_s(z), s = \overline{1,n}\}$ состоит из функций $h^l_k(z), k = \overline{0,n_l}$ и $\widetilde{h}^l_k(z), k = \overline{1,\widetilde{n}_l}$, $l = \overline{0,m}$. Используя (2.6), введем следующие частичные суммы:

$$s_n(z;u) = \sum_{k=1}^{n} (f_k, u) f_k(z), \tag{2.27}$$

$$s^*_n(z;u) = h^0_0(z)(h^0_0(e^{ix}), u_0(e^{ix}))_{L_2} + \sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n_l} h^l_k(z)(h^l_k(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\widetilde{n}_l} \widetilde{h}^l_k(z)(\widetilde{h}^l_k(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2} \right) + \sum_{l=1}^{m} A_l \ln|z - z_l|. \tag{2.28}$$

Заметим, что сумма $s_n(z;u)$ связана с суммой $S_n(z;u)$, которая определена равенством (2.5), соотношением $S_n(z;u) = s_{(m+1)(2n+1)}(z;u)$.

Лемма 6. *Пусть функция* $u(z) \in h_p(\widetilde{K})$, $1 \le p \le \infty$. *Тогда выполняется оценка*

$$\|s_n(\cdot;u) - s_n^*(\cdot;u)\|_p = O(n^3\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу (2.6) внутри $\widetilde{K}$ функция $u(z)$ представляется рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k h_k(z)$. Будем считать, что функция $u(z)$ имеет дифференцируемые по x граничные значения $u(z_l + r_l e^{ix})$, $l = \overline{0,m}$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k h_k(z)$ равномерно сходится в $\overline{\widetilde{K}}$. Лемму достаточно доказать для таких функций, потому что они образуют всюду плотное множество в $h_p(\widetilde{K})$. Перепишем последний ряд в виде $\sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\beta_s^l h_s^l(z) + \sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\beta}_s^l\widetilde{h}_s^l(z)\right)$. В силу однозначности разложения (2.6) заключаем (см. (2.1)), что выполняются равенства

$$u_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty}\beta_s^0 h_s^0(z) + \sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\beta}_s^0\widetilde{h}_s^0(z), \tag{2.29}$$

$$u_l(z) = \sum_{s=1}^{\infty}\beta_s^l h_s^l(z) + \sum_{s=1}^{\infty}\widetilde{\beta}_s^l\widetilde{h}_s^l(z), \quad A_l = \sqrt{2}\ln r_l\beta_0^l, \quad l = \overline{1,m}. \tag{2.30}$$

Умножая равенство (2.29) на функцию $\overset{(\sim)}{h}{}_s^0(z)$ и интегрируя по единичной окружности, в силу ортонормированности тригонометрической системы на периоде получаем

$$\overset{(\sim)}{\beta}{}_s^0 = (u_0(e^{ix}), \overset{(\sim)}{h}{}_s^0(e^{ix}))_{L_2}. \tag{2.31}$$

Аналогичным образом поступая с равенствами (2.30), заключаем, что

$$\overset{(\sim)}{\beta}{}_s^l = (u_l(z_l + r_l e^{ix}), \overset{(\sim)}{h}{}_s^l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}, \quad l = \overline{1,m}, \quad s > 0. \tag{2.32}$$

Из равенств (2.30),(2.31) и (2.32) и определения (2.27) частичной суммы $s_n^*(\cdot;u)$ следует, что

$$s_n^*(z;u) = \sum_{l=1}^{n}\beta_l h_l(z). \tag{2.33}$$

Из равенств (2.30)–(2.32) и леммы 4 следует, что существует константа C_{10} такая, что для коэффициентов β_k, определяемых по формулам (2.31) и (2.32), справедливы оценки

$$|\beta_k| \le C_{10}\|u\|_1. \tag{2.34}$$

Это неравенство будет использовано в дальнейшем.

Пусть $v^*(z) \in h_p(\widetilde{K})$. Поскольку функции $f_s(z), s \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированную систему и являются линейными комбинациями функций $h_l(z), l \le s$, то частичная сумма $s_n(\cdot, v^*)$, будучи в силу (2.27) линейной комбинацией функций $h_l(z), l = \overline{1,n}$, однозначно определяется из условия

$$(v^* - s_n(\cdot, v^*), h_k) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.35}$$

Представим сумму $s_n(z, v^*)$ в следующем виде: $s_n(z, v^*) = \sum_{l=1}^{n}\alpha_l^* h_l(z)$. Тогда из условия (2.35) вытекает, что коэффициенты α_l^* удовлетворяют системе уравнений

$$A\alpha^* = V^*, \tag{2.36}$$

где A — матрица Грама, $A = ((h_l, h_k))_{l,k=1}^n$, $\alpha^* = (\alpha_l^*)_{l=1}^n$, $V^* = ((v^*, h_k))_{k=1}^n$. Решение системы уравнений (2.36) записывается в виде $\alpha^* = A^{-1}V^*$.

Оценим норму $\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} = \max_{\|V\|_{l_\infty}=1} \|A^{-1}V\|_{l_\infty}$, где $\|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|_{l_\infty} = \max_{k=\overline{1,n}} |y_k|$. Пусть $\|V\|_{l_\infty} = \|(V_1, V_2, \ldots, V_n)\|_{l_\infty} = 1$. Подберем функцию $v(z)$ как линейную комбинацию функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$, удовлетворяющую условию

$$(v, h_k) = V_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.37}$$

Разложим функцию $v(z)$ по функциям $f_s(z), s = \overline{1,n}$:

$$v(z) = \sum_{s=1}^{n} (f_s, v) f_s(z). \tag{2.38}$$

Представим функцию $f_s(z)$ в виде $f_s(z) = \sum_{l=1}^{s} \alpha_{l,s} h_l(z)$. Из того, что $\|f_k\|_2 = 1$, и из неравенства (2.34) следует, что коэффициенты $\alpha_{l,s}$ ограничены. Пусть $v(z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^v h_k(z)$. Подставив выражение $f_s(z) = \sum_{l=1}^{s} \alpha_{l,s} h_l(z)$ в (2.38), мы получим, что $\alpha_l^v = \sum_{s=l}^{n} (f_s, v)\alpha_{l,s}$. Таким образом, справедлива оценка

$$|\alpha_l^v| = \left| \sum_{s=l}^{n} (f_s, v)\alpha_{l,s} \right| \le C_{11} \sum_{s=l}^{n} |(f_s, v)| = C_{11} \sum_{s=l}^{n} \left| \left(\sum_{\nu=1}^{s} \alpha_{\nu,s} h_\nu, v \right) \right|$$

$$\le C_{12} \sum_{s=l}^{n} \sum_{\nu=1}^{s} |(h_\nu, v)| = C_{12} \sum_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1)|(h_\nu, v)|. \tag{2.39}$$

Учитывая (2.37), (2.39) и $\|V\|_\infty = 1$, получаем $|\alpha_k^v| \le C_{13} \dfrac{n(n+1)}{2}$. Заметим, что коэффициенты α_k^v являются решением системы уравнений $A\alpha = V$, где $\alpha = (\alpha_k^v)_{k=1}^n$. Таким образом, из того что $\|V\|_\infty = 1$, следует: $\|A^{-1}V\|_\infty = \|(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\|_\infty \le C_{13} \dfrac{n(n+1)}{2}$. Поэтому выполняется неравенство

$$\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} \le C_{13} \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.40}$$

Частичная сумма $s_n(\cdot, u)$ является полиномом наилучшего приближения по гармоникам $h_k, k = \overline{1,n}$ функции $u(z)$ по норме $\|\cdot\|_2$. Следовательно, частичная сумма $s_n(\cdot; u)$ сохраняет линейные комбинации функций $h_k(z), k = \overline{1,n}$. Отсюда выводим, что

$$s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u) = s_n(\cdot; u - s_n^*(\cdot; u)). \tag{2.41}$$

Пусть $v^*(z) = u(z) - s_n^*(z; u)$. Частичная сумма $s_n(\cdot; v^*)$ находится из системы (2.36). В силу оценки (2.40) получаем, что справедливо неравенство

$$\|\alpha^*\|_{l_\infty} \le \|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} \|V^*\|_{l_\infty} \le C_{13} \frac{n(n+1)}{2} \|V^*\|_{l_\infty}. \tag{2.42}$$

Оценим теперь величину $\|V^*\|_{l_\infty}$. Координаты V_k^* вычисляются по формуле $V_k^* = (v^*, h_k) = (u - s_n^*(\cdot, u), h_k)$. Из равенства (2.33) вытекает, что

$$u(z) - s_n^*(z; u) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \beta_l h_l(z).$$

С помощью леммы 5 и неравенств (2.34) и (2.43) получаем следующую оценку:

$$(u - s_n^*(\cdot; u), h_k) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \beta_l (h_l, h_k) = \sum_{l=n+1}^{\infty} \beta_l O(\tau^{l/2m})$$

$$= \|u\|_1 \sum_{l=n+1}^{\infty} O(\tau^{l/2m}) = \|u\|_1 O(\tau^{n/2m}), \quad n \to \infty. \tag{2.43}$$

Значит, $\|V^*\|_{l_\infty} = \max_{k=\overline{1,n}} |(v^*, h_k)| = \max_{k=\overline{1,n}} |(u - s_n(\cdot; u), h_k)| = O(\tau^{n/2m})\|u\|_1, n \to \infty$. Остается только подставить это соотношение в (2.42) и получить, что

$$\max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| = \|\alpha^*\|_{l_\infty} = O(n^2\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty. \tag{2.44}$$

Из определения коэффициентов α_k^* следует, что выполняются равенства: $s_n(z; u - s_n^*(\cdot; u)) = s_n(z; v^*) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^* h_k(z)$. Как следствие из (2.41) и (2.44) мы получаем, что

$$\|s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u)\|_p = \|s_n(u - s_n^*(\cdot; u))\|_p = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k^* h_k(z) \right\|_p$$

$$\le \max_{k=\overline{1,n}} |\alpha_k^*| \sum_{k=1}^n \|h_k(z)\|_p = O(n^3\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty.$$

Что и требовалось доказать. □

Будем считать по определению, что функция $u_k(z) = O(a_k)$, $k \to \infty, a_k > 0$, если существует константа $C > 0$ такая, что $\|u_k(z)\|_\infty \le Ca_k$.

Теорема 1. *Справедлива оценка* $f_k(z) = h_k(z) + O(k^3\tau^{k/2m}), \quad k \to \infty.$

Доказательство. Функция $f_k(z)$ получается нормированием функции $h_k(z) - \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l h_l(z)$, которая удовлетворяет условию $(h_k - \sum_{l=1}^{k-1} \alpha_l h_l, h_s) = 0$, $s = \overline{1, k-1}$. Поскольку выполняется $(h_k - s_{k-1}(\cdot; h_k), h_s) = 0$ при $s = \overline{1, k-1}$ (см. (2.35)) получаем, что

$$f_k(z) = \frac{h_k(z) - s_{k-1}(z; h_k)}{\|h_k - s_{k-1}(\cdot; h_k)\|_2}. \tag{2.45}$$

Из определения (2.28) следует, что $s_{k-1}^*(\cdot; h_k) \equiv 0$. Откуда по лемме 6 имеем, что

$$\|s_{k-1}(\cdot; h_k))\|_\infty = O(k^3\tau^{k/2m})\|h_k\|_1 = O(k^3\tau^{k/2m}), \quad k \to \infty.$$

Подставляя последнее соотношение в (2.45) и используя лемму 5, получаем, что

$$f_k(z) = \frac{h_k(z) - O(k^3\tau^{k/2m})}{\|h_k - O(k^3\tau^{k/2m})\|_2} = \frac{h_k(z)}{(h_k, h_k)} + O(k^3\tau^{k/2m}) = h_k(z) + O(k^3\tau^{k/2m})), \quad k \to \infty.$$

Что и требовалось доказать. □

Используя теорему 1, мы можем улучшить оценку леммы 6. А именно, из теоремы 1 и неравенства (2.34) для $u(z) = f_s(z) - h_s(z)$ следует, что в цепочке неравенств (2.39) $\alpha_{l,s} = \delta_{l,s} + (l^3\tau^{l/2m}), l \to \infty$. Откуда получается, что $\|A^{-1}\|_{l_\infty(M)} = O(1), n \to \infty$. Рассуждая далее по аналогии с доказательством леммы 6, приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 6′. *Пусть функция* $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \le p \le \infty$. *Тогда выполняется оценка*

$$\|s_n(\cdot; u) - s_n^*(\cdot; u)\|_p = O(n\tau^{n/2m})\|u\|_1, \quad n \to \infty.$$

Из леммы 6′ выводится следующее усиление теоремы 1.

Теорема 1′. *Справедлива оценка* $f_k(z) = h_k(z) + O(k\tau^{k/2m}), \quad k \to \infty.$

Введем норму

$$\|u\|_{p,\delta} = \|u(\delta e^{ix})\|_{L_p} + \sum_{l=1}^m \left\| u\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta} e^{ix}\Big) \right\|_{L_p},$$

где δ удовлетворяет неравенствам

$$\delta \leq 1, \quad \delta \geq 1-\rho, \quad \delta \geq \max_{k=\overline{1,m}} \frac{r_k}{r_k+\rho}, \tag{2.46}$$

число ρ определено перед (1.2). Определим число $\tau_\delta, 0<\tau_\delta<1$ как максимум из чисел

$$|z_k| + \frac{r_k}{\delta}, \quad \frac{r_k}{\delta-|z_k|}, \quad \frac{r_k}{|z_k-z_l|-r_l/\delta}, \quad k,l=\overline{1,m}, \quad k \neq l.$$

При $\delta = 1$ выполняется равенство $\tau_\delta = \tau$, где число τ введено перед леммой 3.

Обозначим через $S_n^{\mathfrak{F}}(\cdot; f)$ частичную сумму ряда Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Через $\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}$ будем обозначать норму оператора $S_n^{\mathfrak{F}}$ в $L_p[0,2\pi]$. Введем частичную сумму $S_n^*(\cdot; u)$ следующим образом: $S_n^*(\cdot; u) = s^*_{(m+1)(2n+1)}(\cdot; u)$, где сумма $s_n^*(\cdot; u)$ определена в (2.28). Сумма $S_n(\cdot; u)$ определена равенством (2.5).

Теорема 2. *Пусть функция $u(z) \in h_p(\widetilde{K}), 1 \leq p \leq \infty$. Тогда справедлива оценка*

$$\|u-S_n(\cdot;u)\|_{p,\delta} \leq (\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}+1)\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\delta^{n+1}\sum_{l=0}^{m} E_n u(z_l+r_l e^{ix})_p + O(n\tau^n + \|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}\tau_\delta^n)\|u\|_p, \quad n \to \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из принципа максимума следует, что для $v \in h_\infty(\widetilde{K})$ выполняются неравенства $\|v\|_{p,\delta} \leq \|v\|_{\infty,\delta} \leq \|v\|_\infty$. Оценим норму $\|u - S_n(\cdot; u)\|_{p,\delta}$ с помощью леммы 6$'$ и предыдущих неравенств:

$$\|u - S_n(\cdot;u)\|_{p,\delta} \leq \|u - S_n^*(\cdot;u)\|_{p,\delta} + \|S_n^*(\cdot;u) - S_n(\cdot;u)\|_{p,\delta}$$

$$\leq \|u - S_n^*(\cdot;u)\|_{p,\delta} + \|S_n^*(\cdot;u) - S_n(\cdot;u)\|_\infty \leq \|u - S_n^*(\cdot;u)\|_{p,\delta} + O(n\tau^n)\|u\|_1, \quad n \to \infty. \tag{2.47}$$

Оценим теперь выражение $\|u - S_n^*(\cdot; u)\|_{p,\delta}$, пользуясь разложением (2.6), неравенством треугольника и тем, что $\ln|z - z_l| = S_n^*(z; \ln|\cdot - z_l|)$:

$$\|u - S_n^*(\cdot;u)\|_{p,\delta} \leq \sum_{l=0}^{m} \|u_l - S_n^*(\cdot;u_l)\|_{p,\delta}. \tag{2.48}$$

Заметим, что $S_n^*(\delta e^{ix}; u_0)$ представляет собой частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $u_0(\delta e^{ix})$ и, следовательно, выполняется известная оценка

$$\|u_0(\delta e^{ix}) - S_n^*(\delta e^{ix};u_0)\|_{p,\delta} \leq (\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}+1)E_n u_0(\delta e^{ix})_p. \tag{2.49}$$

Применяя результат из [13], заключаем, что

$$E_n u_0(\delta e^{ix})_p \leq \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\delta^{n+1} E_n u_0(e^{ix})_p. \tag{2.50}$$

Используя разложение (2.6), получим, что

$$E_n u_0(e^{ix})_p \leq E_n u(e^{ix})_p + \sum_{l=1}^{m} E_n u_l(e^{ix})_p + \sum_{l=1}^{m} |A_l| E_n \ln|e^{ix} - z_l|_p. \tag{2.51}$$

Справедлива следующая оценка:

$$E_n \ln|e^{ix} - z_l|_p = E_n \ln|1 - z_l e^{-ix}|_p$$

$$= E_n Re\{1 + z_l e^{-ix} + z_l^2 e^{-2ix} + \ldots\}_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |z_l|^k = O(|z_l|^n), \quad n \to \infty. \tag{2.52}$$

Из лемм 3 и 4 и неравенств (2.51) и (2.52) следует, что

$$E_n u_0(e^{ix})_p = E_n u(e^{ix})_p + O(\tau^n)\|u\|_p, \quad n \to \infty. \tag{2.53}$$

Из неравенств (2.49)–(2.53) получаем, что

$$\|u_0(\delta e^{ix}) - S_n^*(\delta e^{ix}; u_0)\|_{L_p} \le (\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p} + 1)\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\delta^{n+1} E_n u(e^{ix})_p + O(\tau^n)\|u\|_p, \quad n \to \infty. \tag{2.54}$$

Оценим теперь остальные слагаемые $\|u_0(z_l + r_l/\delta e^{ix}) - S_n^*(z_l + r_l/\delta e^{ix}; u_0)\|_{L_p}$ в определении $\|u_0 - S_n^*(\cdot; u_0)\|_{p,\delta}$. Заметим, что $B_{r_l/\delta}(0) \subset B_{|z_l| + r_l/\delta}(0)$. Применяя лемму 1 к функции $u_0((|z_l| + r_l/\delta)z) - S_n^*((|z_l| + r_l/\delta)z; u_0)$ и полагая $\omega(z) = (z_l + r_l z/\delta)\,/(|z_l| + r_l/\delta)$, получаем

$$\left\|u_0\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta}e^{ix}\Big) - S_n^*\Big(z_l + \frac{r_l}{\delta}e^{ix}; u_0\Big)\right\|_{L_p} \le \Big(1 + 2\frac{|z_l|\delta}{r_l}\Big)\left\|u_0\Big(\Big(|z_l| + \frac{r_l}{\delta}\Big)e^{ix}\Big) - S_n^*\Big(\Big(|z_l| + \frac{r_l}{\delta}\Big)e^{ix}; u_0\Big)\right\|_{L_p}.$$

Правую часть в последнем неравенстве оценим по аналогии с (2.49) и (2.50) и получим

$$\left\|u_0\left(z_l + \frac{r_l}{\delta}e^{ix}\right) - S_n^*\left(z_l + \frac{r_l}{\delta}e^{ix}; u_0\right)\right\|_{L_p} = O\left(\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}\left(|z_l| + \frac{r_l}{\delta}\right)^n\right)\|u\|_p, \quad n \to \infty. \tag{2.55}$$

Из неравенств (2.54) и (2.55) заключаем, что

$$\|u_0 - S_n^*(\cdot; u_0)\|_{p,\delta} \le (\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p} + 1)\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\delta^{n+1} E_n u(e^{ix})_p + O(\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}\tau_\delta^n)\|u\|_p, \quad n \to \infty.$$

Аналогично оценивается выражения $\|u_l - S_n(\cdot; u_l)\|_{p,\delta}$. Учитывая (2.47) и (2.48), получаем требуемое неравенство. □

Отметим, что из теоремы 2 следует, что для $u(z) \in h_\infty(\widetilde{K})$ сходимость частичных сумм $S_n(z; u)$ внутри $\widetilde{K}$ происходит со скоростью геометрической прогрессии. Поскольку нормы $\|S_n^{\mathfrak{F}}\|_{L_p}$, $1 < p < \infty$, при всех n ограничены, согласно теореме 2 при $\delta = 1$ система $\{f_s(z)\}_{s\in\mathbb{N}}$ является базисом пространств $h_p(\widetilde{K}), 1 < p < \infty$.

Частичные суммы тригонометрического ряда Фурье непрерывной функции ограниченной вариации сходятся к ней равномерно. С помощью леммы 6 можно доказать, что частичные суммы $s_n(\cdot; u)$ гармонической функции $u(z)$ из $h_\infty(\widetilde{K})$ с граничными значениями $u(z_k + r_k e^{ix}), k = \overline{0, m}$, имеющими ограниченную вариацию, сходятся к ней равномерно в $\overline{\widetilde{K}}$.

Теорема 3. *Система $\{f_s(z)\}_{s\in\mathbb{N}}$ не является базисом пространств $h_1(\widetilde{K})$ и $h_\infty(\widetilde{K})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем пример функции $f^*(z) \in h_1(\widetilde{K})$, к которой не сходятся частичные суммы $s_n(\cdot; u)$ в пространстве $h_1(\widetilde{K})$. Пример в $h_\infty(\widetilde{K})$ строится аналогично на основании [14, теорема 1.2, с. 471].

Из [14, теорема 1.12, с. 296] следует, что частичные суммы тригонометрического ряда Фурье функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x) k \left\{ \frac{1}{\sqrt{\ln(k+3)}} - \frac{2}{\sqrt{\ln(k+2)}} + \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}} \right\}$$

не сходятся к $f(x) \in L_1[0, 2\pi]$ по норме пространства $L_1[0, 2\pi]$, где $\Phi_k(x) = \dfrac{1}{2\pi k}\dfrac{\sin^2 kt/2}{\sin^2 t/2}$ — ядра Фейера. Определим гармоническую в круге K функцию $f^*(z)$, задав ее на границе следующим образом: $f^*(e^{ix}) = f(x)$, и сузим на $\widetilde{K}$. Можно проверить, что $f^*(z) \in h_1(\widetilde{K})$.

В силу леммы $6'$ сходимость частичных сумм $s_n(\cdot; f^*)$ к функции f^* эквивалентна сходимости сумм $s_n^*(\cdot; f^*)$ к функции f^* по норме $\|\cdot\|_1$. Остается заметить, что суммы $s_n^*(\cdot; f^*)$ представляют собой гармонически продолженные внутрь K частичные суммы тригонометрического ряда Фурье, которые на его границе расходятся по норме L_1. Следовательно, суммы $s_n(\cdot; f^*)$ расходятся по норме $\|\cdot\|_1$. □

3. Гармонические всплески

Нам потребуется функция Мейера $\widehat{\theta}(\omega)$. Чтобы ее определить, приведем здесь неотрицательную четную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi}(\omega)$. Функция $\widehat{\varphi}(\omega)$ удовлетворяет следующим требованиям:

$$\widehat{\varphi}(\omega)\equiv 1 \text{ при } |\omega|\le\frac{1-\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}(\omega)\equiv 0 \text{ при } |\omega|\ge\frac{1+\varepsilon}{2},\quad \widehat{\varphi}^2\Big(\omega+\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2} \text{ нечетна при } |\omega|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

где $0<\varepsilon\le 1/3$. Функция $\widehat{\theta}(\omega)$ неотрицательна и определяется соотношением $\widehat{\theta}^2(\omega)=\widehat{\varphi}^2(\omega/2)-\widehat{\varphi}^2(\omega)$. Заметим, что $\operatorname{supp}\widehat{\theta}(\omega)\subseteq\{\omega\in\mathbb{R}\colon (1-\varepsilon)/2<|\omega|<1+\varepsilon\}$ и $\widehat{\theta}(\omega)$ — четная и дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Перейдем теперь к построению гармонических всплесков. Построение будем основывать на всплесках из статьи [10], являющихся базисом пространств $L_p[0,2\pi]$, $1\le p\le\infty$. Выпишем эти всплески в явном виде:

$$w_0(x)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}},\quad w_n(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\cos\nu x,\quad \widetilde{w}_n(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\sin\nu x, \tag{3.1}$$

где

$$\theta_\nu^n=2^{(2-j)/2}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sin\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^j},\quad n=2^{j-1}+k,\quad j\in\mathbb{N},\quad k=0,1,\dots,2^{j-1}-1.$$

Заметим, что система функций $\big\{1/\sqrt{2},\cos nx,\sin nx,n\in\mathbb{N}\big\}$ ортогональна относительно произведения $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ и система $\{w_0(x),w_n(x),\widetilde{w}_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ также ортогональна. Это эквивалентно некоторым соотношениям на коэффициенты θ_ν^n.

Таким образом, рассматривая преобразование произвольной системы $\{\gamma_0,\gamma_n,\widetilde{\gamma}_n,n\in\mathbb{N}\}$, переводящее γ_0 в γ_0 и $\overset{(\sim)}{\gamma}_n$ в $\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{\gamma}_\nu$, видим, что такое преобразование сохраняет свойство ортонормированности системы.

Применим это преобразование при каждом $l=\overline{0,m}$ к системе $\{f_0^l(z),f_n^l(z),\widetilde{f}_n^l(z),\,n\in\mathbb{N}\}$ и получим следующие системы функций $\{F_0^l,F_n^l(z),\widetilde{F}_n^l(z),n\in\mathbb{N}\}$:

$$F_0^l(z)=f_0^l(z),\quad \overset{(\sim)}{F}{}_n^l(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^n\overset{(\sim)}{f}{}_\nu^l(z). \tag{3.2}$$

Введем для гармонической функции $u(z)\in h_p(\widetilde{K})$ частичную сумму $S_n^W(z;u)$, $n\in\mathbb{N}:$

$$S_n^W(z;u)=\sum_{l=0}^m F_0^l(z)(u,F_0^l)+\sum_{l=0}^m\sum_{s=1}^{n-1}\{F_s^l(z)(u,F_s^l)+\widetilde{F}_s^l(z)(u,\widetilde{F}_s^l)\}.$$

Рассмотрим частичные суммы $W_n(x;f)$ разложения $f(x)\in L_p[0,2\pi]$ по всплескам (3.1):

$$W_n(x;f)=\sum_{l=0}^{n-1}w_l(x)(w_l,f)_{L_2}+\sum_{l=1}^{n-1}\widetilde{w}_l(x)(\widetilde{w}_l,f)_{L_2}.$$

В статье [10] доказано, что нормы операторов $W_n\colon L_p\to L_p, 1\le p\le\infty$, равномерно ограничены. Поэтому из следующей теоремы следует, что система, состоящая из функций (3.2), $l=\overline{0,m}$, является базисом пространств $h_p(\widetilde{K}), 1\le p\le\infty$. Далее константы в оценках вида $O(a_n), n\to\infty$, зависят только от геометрии области $\widetilde{K}$ и функции $\widehat{\theta}(\omega)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $u(z)\in h_p(\widetilde{K})$, $1\le p\le\infty$, $n=2^{j-1}+k$, $0\le k<2^{j-1}$, $N=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$, δ *определяется неравенствами* (2.46). *Тогда выполняется оценка*

$$\|u-S_n^W(\cdot;u)\|_{p,\delta}\le\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\delta^{N+1}(\|W_n\|_{L_p}+1)\sum_{l=0}^m E_N u(z_l+r_le^{ix})_p+O\Big(N^4\tau^N+\tau_\delta^N\Big)\|u\|_p,\quad N\to\infty,$$

где норма $\|\cdot\|_{p,\delta}$ *и числа* τ *и* τ_δ *введены перед теоремой* 2 *и леммой* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем частичную сумму

$$S_n^{*W}(z;u)=F_0^{*0}(z)(F_0^{*0}(e^{ix}),u_0(e^{ix}))_{L_2}+\sum_{l=0}^{m}\left\{\sum_{s=1}^{n-1}F_s^{*l}(z)(F_s^{*l}(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{n-1}\widetilde{F}_s^{*l}(z)(\widetilde{F}_s^{*l}(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}\right\}+\sum_{l=1}^{m}A_l\ln|z-z_l|,$$

где $F_0^{*0}(z)\equiv 1/\sqrt{2}$, $\overset{(\sim)}{F}{}_s^{*l}(z)=\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\theta_\nu^s\overset{(\sim)}{h}{}_\nu^l(z)$. В статье [10] доказано, что частичные суммы $W_n(\cdot;f)$ сохраняют тригонометрические полиномы порядка не выше $N=[2^{j-1}(1-\varepsilon)]$. Это эквивалентно некоторым соотношениям для коэффициентов θ_ν^s, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что сумма $S_n^W(\cdot;u)$ сохраняет линейные комбинации функций $f_s^l(z)$ и $\widetilde{f}_s^l(z)$, $s\le N$, а следовательно, и линейные комбинации функций $h_s^l(z)$ и $\widetilde{h}_s^l(z)$, $s\le N$. Из того что $W_n(\cdot;f)$ сохраняют тригонометрические полиномы, можно вывести, что сумма $S_n^{*W}(\cdot;\cdot)$ также сохраняет линейные комбинации функций $h_s^l(z)$ и $\widetilde{h}_s^l(z)$, $s\le N$.

Оценим разность $S_n^W(\cdot;u)-S_n^{*W}(\cdot;u)$. Для линейной комбинации $\sum_{\nu,\eta}\lambda_\nu^\eta h_\nu^\eta+\sum_{\nu,\eta}\widetilde{\lambda}_\nu^\eta\widetilde{h}_\nu^\eta$ введем операцию $[\sum_{\nu,\eta}\lambda_\nu^\eta h_\nu^\eta+\sum_{\nu,\eta}\widetilde{\lambda}_\nu^\eta\widetilde{h}_\nu^\eta]_N$ удаления из нее всех функций h_ν^η и $\widetilde{h}_\nu^\eta$, $\nu\le N$. Из последних замечаний следует, что справедливо тождество

$$S_n^W(\cdot;u)-S_n^{*W}(\cdot;u)=\sum_{l=0}^{m}\sum_{N<s<n}\left\{[F_s^l]_N(u,[F_s^l]_N)-[F_s^{*l}]_N([F_s^{*l}]_N(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}\right\}$$

$$+\sum_{l=0}^{m}\sum_{N<s<n}\left\{[\widetilde{F}_s^l]_N(u,[\widetilde{F}_s^l]_N)-[\widetilde{F}_s^{*l}]_N([\widetilde{F}_s^{*l}]_N(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}\right\}+S_N(\cdot;u)-S_N^*(\cdot;u). \quad (3.3)$$

Сделаем оценку для $[\overset{(\sim)}{F}{}_s^l(z)]_N-[\overset{(\sim)}{F}{}_s^{*l}(z)]_N$. По теореме $1'$ выполняется $\overset{(\sim)}{f}{}_s^l(z)=\overset{(\sim)}{h}{}_s^l(z)+O(s\tau^s)$, $s\to\infty$. Пусть

$$f_s^l(z)=\sum_{\nu,\eta}\alpha_\nu^\eta h_\nu^\eta(z)+\sum_{\nu,\eta}\widetilde{\alpha}_\nu^\eta\widetilde{h}_\nu^\eta(z),\quad s>N. \quad (3.4)$$

Из неравенства (2.34) при $u(z)=f_s^l(z)-h_s^l(z)=O(s\tau^s)$, $s\to\infty$, следует, что при $\nu\le N$ выполняется $\overset{(\sim)}{\alpha}{}_{\nu,s}^{\eta,l}=O(s\tau^s)$, $s\to\infty$. Отсюда заключаем, что при $s>N$

$$[f_s^l]_N=f_s^l-\sum_{\nu\le N,\eta}\alpha_\nu^\eta h_\nu^\eta-\sum_{\nu\le N,\eta}\widetilde{\alpha}_\nu^\eta\widetilde{h}_\nu^\eta=h_s^l+O(s\tau^s)-\sum_{\nu\le N,\eta}O(s\tau^s)=h_s^l+O(sN\tau^s),\quad s\to\infty.$$

Аналогично оценивается $[\widetilde{f}_s^l]_N$. Поскольку $\sum_{\nu>N}O(\nu\tau^\nu)=O(N\tau^N)$, получаем

$$[\overset{(\sim)}{F}{}_s^l]_N=\sum_{\nu>N}\theta_\nu^s[\overset{(\sim)}{f}{}_\nu^l]_N=\sum_{\nu>N}\theta_\nu^s(\overset{(\sim)}{h}{}_\nu^l+O(\nu N\tau^\nu))=[\overset{(\sim)}{F}{}_s^{*l}(z)]_N+O(N^2\tau^N),\quad N\to\infty. \quad (3.5)$$

Оценим теперь $([\overset{(\sim)}{F}{}_s^l]_N,u)-([\overset{(\sim)}{F}{}_s^{*l}]_N(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}$. Из теоремы $1'$ и неравенства (2.34) следует, что для коэффициента α_s^l в формуле (3.4) справедлива оценка

$$\alpha_s^l=1+O(s\tau^s),\quad s\to\infty. \quad (3.6)$$

Пусть выполняется $h_s^l=h_k$. Коэффициент перед функцией h_s^l в разложении $S_k(\cdot;u)-S_k^*(\cdot;u)$ равен $(f_s^l,u)\alpha_s^l-(h_s^l(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}$. Применяя к функции $S_k(\cdot;u)-S_k^*(\cdot;u)$ неравенство (2.34) и используя лемму $6'$, получаем, что

$$|(f_s^l,u)\alpha_s^l-(h_s^l(z_l+r_le^{ix}),u_l(z_l+r_le^{ix}))_{L_2}|\le C_{10}\|S_k(\cdot;u)-S_k^*(\cdot;u)\|_1=O(s\tau^s)\|u\|_1,\quad s\to\infty. \quad (3.7)$$

Из того, что $(f_s^l, u) = O(1)\|u\|_1, s \to \infty$ и оценок (3.6) и (3.7) выводим

$$(f_s^l, u) - \big(h_s^l(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix})\big)_{L_2} = O(s\tau^s)\|u\|_1, \quad s \to \infty. \tag{3.8}$$

Наконец, из неравенства (3.8) получаем оценку

$$([F_s^l]_N, u) - \big([F_s^{*l}]_N(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix})\big)_{L_2} = \sum_{\nu > N} \theta_\nu^s \big\{(f_\nu^l, u) - (h_\nu^l(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}\big\}$$

$$= \|u\|_1 \sum_{\nu > N} O(\nu\tau^\nu) = O(N\tau^N)\|u\|_1, \quad N \to \infty. \tag{3.9}$$

Аналогично проверяется оценка для $([\widetilde{F}_s^l]_N, u)$ и $([\widetilde{F}_s^{*l}]_N(z_l + r_l e^{ix}), u_l(z_l + r_l e^{ix}))_{L_2}$. Поскольку выполняются тождество (3.3) и оценки $[F_s^{*l}]_N = O(N), [\widetilde{F}_s^{*l}]_N = O(N), N \to \infty$, а также в силу леммы $6'$ и оценок (3.5) и (3.9), получаем, что

$$S_n^W(z; u) - S_n^{*W}(z; u) = O(N^4\tau^N)\|u\|_1, \quad N \to \infty.$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Голузин Г.М.** Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'а и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Мат. сб. 1934. Т. 41, № 2. С. 246–276.
2. **Александров И.А., Сорокин А.С.** Задача Шварца для многосвязных круговых областей // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. № 5. С. 970–1001.
3. **Mityushev V.V.** R-linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains. Advances in applied analysis. New York: Birkhauser, 2012. P. 147–176.
4. **Аксентьев Л.А.** Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. семинара по краев. задачам. 1964. Вып. 2. С. 3–11.
5. **Аксентьев Л.А.** Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. семинара по краев. задачам. 1966. Вып. 3. С. 11–24.
6. **Аксентьев Л.А.** Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. семинара по краев. задачам. 1967. Вып. 4. С. 3–10.
7. **Пацевич Е.Л.** О построении оператора Шварца в круговой счетно-связной σ-области методом симметрии // Изв. вузов. Математика. 1986. № 10. С. 67–76.
8. **Зверович Э.И.** Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, вып. 1. С. 113–179.
9. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
10. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. летней мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
11. **Голузин Г.М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с.
12. **Хейман У., Кеннеди П.** Субгармонические функции, М.: Мир, 1980. 304 с.
13. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев.: Наук. думка, 1982. 249 с.
14. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1964. 611 с.

Дубосарский Глеб Александрович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: glebUU@mail.ru

Поступила 15.09.2012

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ НА ГРАНИЦЕ[1]

А.П. Зорин

Рассматривается задача оптимального управления решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей, с малым коэффициентом при операторе Лапласа и интегральными ограничениями на управление. Упарвление осуществляется с помощью ограниченного потока через границу. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальное уравнение эллиптического типа, асимптотические оценки.

A. P. Zorin. Asymptotic expansion of a solution to the problem of optimal control of a bounded flow at a boundary.

A problem of optimal control of solutions to an elliptic-type equation with a small coefficient at the Laplace operator and integral constraints on the control is considered in a bounded domain with smooth boundary. The control is effected by a bounded flow through the boundary. A complete asymptotic expansion of a solution to this problem in powers of the small parameter is obtained.

Keywords: optimal control, elliptic-type differential equation, asymptotic estimates.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область такая, что $\overline{\Omega}$ есть многообразие с краем $\Gamma := \partial\Omega$ класса C^∞.

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x) z = f(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \quad |||u||| \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$J(u) = \|z\|^2 + \nu^{-1} |||u|||^2 \to \inf, \tag{1.2}$$

где $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial z/\partial n$ — производная по внешней нормали к Γ,

$$\begin{gathered} a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \mathcal{U} := \big\{ u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant 1 \big\}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь через $|||\cdot|||$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Скалярное произведение в этом пространстве будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В пространстве $L_2(\Omega)$ для нормы и скалярного произведения используются обозначения $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ соответственно.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00679) в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках" (при финансовой поддержке УрО РАН, проект 12–П–1–1009).

Задача, подобная этой, рассматривалась в работах [2; 3]. Отличие этой задачи состоит в следующем: теперь в левой части граничного условия отсутствует малый параметр ε, что соответствует меньшему воздействию управления.

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [4–7].

2. Определяющие соотношения

Для получения условий оптимальности сведем эту задачу к задаче, которая рассмотренна в [2; 3] и для которой условие оптимальности уже получено.

С этой целью введем новые функции $\widetilde{g} := \varepsilon^2 g(x)$, $\widetilde{u} = \varepsilon^2 u(x)$ и $\widetilde{z} = z$.

Тогда граничное условие примет вид $\varepsilon^2 \dfrac{\partial z}{\partial n} = \widetilde{g}(x) + \widetilde{u}(x)$, $x \in \Gamma$. При этом изменятся ограничение на управления и критерий оптимальности:

$$|||\widetilde{u}||| = |||\varepsilon^2 u||| \leqslant \varepsilon^2, \quad J(\widetilde{u}) = \|z\|^2 + \nu^{-1}\varepsilon^{-4}|||\widetilde{u}|||^2.$$

В новых переменных задача (1.1), (1.2) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta \widetilde{z} - a(x)\widetilde{z} = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \widetilde{z}}{\partial n} = \widetilde{g}(x) + \widetilde{u}(x), & x \in \Gamma, \quad |||\widetilde{u}||| \leqslant \varepsilon^2 = r, \end{cases}$$

$$J(\widetilde{u}) = \|\widetilde{z}\|^2 + \widetilde{\nu}^{-1}\, |||\widetilde{u}|||^2,$$

где $\widetilde{\nu} = \varepsilon^4 \nu$. В силу [3, формулы (4), (5)] и с учетом замены получим, что оптимальное управление $\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot)$ определяется равенством $\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot) = -\widetilde{\lambda}_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon(\cdot)\Big|_\Gamma$, где $\widetilde{z}_\varepsilon, \widetilde{p}_\varepsilon$ и $\widetilde{\lambda}_\varepsilon$ есть единственное решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta \widetilde{z}_\varepsilon - a(x)\widetilde{z}_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta \widetilde{p}_\varepsilon - a(x)\widetilde{p}_\varepsilon + \widetilde{z}_\varepsilon = 0, & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \widetilde{z}_\varepsilon}{\partial n} + \widetilde{\lambda}_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon = \widetilde{g}(x),\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \\ 0 < \widetilde{\lambda}_\varepsilon \leqslant \nu\varepsilon^4,\ \widetilde{\lambda}_\varepsilon |||\widetilde{p}_\varepsilon||| \leqslant \varepsilon^2, \\ (\nu\varepsilon^4 - \widetilde{\lambda}_\varepsilon)(\varepsilon^2 - \widetilde{\lambda}_\varepsilon |||\widetilde{p}_\varepsilon|||) = 0. \end{cases}$$

Обозначив $\lambda_\varepsilon := \varepsilon^{-2}\widetilde{\lambda}$, $p_\varepsilon(\cdot) := \widetilde{p}(\cdot)$ и вернувшись к старым переменным, получим следующие условия оптимальности для исходной задачи: оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ в задаче (1.1), (1.2) определяется равенством $u_\varepsilon(\cdot) = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(\cdot)|_\Gamma$, где $z_\varepsilon(\cdot)$ — оптимальный процесс, $p_\varepsilon(\cdot)$ — сопряженное состояние и $\lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}$ есть единственное решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon - a(x)p_\varepsilon + z_\varepsilon = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon = g(x),\ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} 0 < \lambda_\varepsilon \leqslant \nu\varepsilon^2,\ \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| \leqslant 1, \\ (\nu\varepsilon^2 - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon|||) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Отметим, что в силу свойств эллиптических операторов имеют место соотношения z_ε, $p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

3. Априорные оценки

Методами из работ [2; 3] с использованием соотношения

$$\exists\, K>0 \ \ \forall\, y(\cdot)\in C^1(\Omega) \quad \forall\, \varepsilon\in(0;\varepsilon_0) \quad |||y|||^2 \leqslant K \quad \big(\varepsilon^{-1}\|y\|^2+\varepsilon\|\nabla y\|^2\big)$$

получаются следующие априорные оценки.

Лемма. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3).

Если $z_\varepsilon(\cdot)$, $p_\varepsilon(\cdot)\in C^\infty(\overline{\Omega})$, λ_ε есть решение задачи (2.1), (2.2), *то найдется $K>0$ такое, что*

$$\begin{gathered}\max\big\{\|z_\varepsilon\|,\, \|p_\varepsilon\|,\, \varepsilon^{1/2}|||p_\varepsilon|||,\, \varepsilon\|\nabla p_\varepsilon\|\big\} \leqslant K(|||g|||+\|f\|),\\ \max\big\{\varepsilon^{1/2}|||z_\varepsilon|||,\, \varepsilon\|\nabla z_\varepsilon\|\big\} \leqslant K\big(\varepsilon^{3/2}|||g|||+\varepsilon^{3/2}\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||+\|f\|\big).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Следствие. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3).

Если $z_\varepsilon(\cdot)$, $p_\varepsilon(\cdot)\in C^\infty(\overline{\Omega})$ есть решение задачи (2.1), (2.2), *то при $\varepsilon\to 0$ справедливы следующие асимптотические представления*:

$$\begin{gathered}\|z\|=O\big(1\big), \quad |||z|||=O\big(\varepsilon^{-1/2}\big), \quad \|\nabla z\|=O\big(\varepsilon^{-1}\big),\\ \|p\|=O\big(1\big), \quad |||p|||=O\big(\varepsilon^{-1/2}\big), \quad \|\nabla p\|=O\big(\varepsilon^{-1}\big).\end{gathered} \tag{3.2}$$

□

В силу неравенства $0<\lambda_\varepsilon\leqslant\nu\varepsilon^2$ и полученных оценок (3.2) имеем $\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||=O\big(\varepsilon^{3/2}\big)$, поэтому при достаточно малых ε справедливо соотношение $\lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||\neq 1$ и, тем самым, $\lambda_\varepsilon=\nu\varepsilon^2$, т. е. в данной задаче достигается абсолютный минимум функционала качества и оганичения на $u(\cdot)$ оказались не по существу. Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3). *Функции $u_\varepsilon(\cdot)$ и $z_\varepsilon(\cdot)$ являются решением задачи* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда существует $p_\varepsilon(\cdot)$ такая, что $z_\varepsilon(\cdot)$ и $p_\varepsilon(\cdot)$ есть решение задачи*

$$\begin{cases}\varepsilon^2\Delta z_\varepsilon-a(x)z_\varepsilon=f(x), \quad \varepsilon^2\Delta p_\varepsilon-a(x)p_\varepsilon+z_\varepsilon=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n}+\varepsilon^2\nu p_\varepsilon=g(x), \ \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n}=0, & x\in\Gamma.\end{cases} \tag{3.3}$$

При этом $u_\varepsilon(\cdot)=-\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(\cdot)|_\Gamma$. □

Аналогом теоремы 1 из [3] в рассматриваемом случае является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции $f_1(\cdot),f_2(\cdot)\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_1(\cdot),g_2(\cdot)\in C^\infty(\Gamma)$, а функция $a(\cdot)$ удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда задача*

$$\begin{cases}\varepsilon^2\Delta z-a(x)z=f_1(x), \quad \varepsilon^2\Delta p-a(x)p+z=f_2(x), & x\in\Omega, \quad z,\, p\in H^1(\Omega),\\ \dfrac{\partial z}{\partial n}+\varepsilon^2\nu p(x)=g_1(x), \quad \dfrac{\partial p}{\partial n}=g_2(x), & x\in\Gamma\end{cases} \tag{3.4}$$

разрешима, ее решение единственно и при некотором K, не зависящем ни от ε, ни от f_i,g_i, $i=\overline{1,2}$, справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\max\{\|z\|,\, \|p\|,\, \varepsilon^{1/2}|||z|||,\, \varepsilon^{1/2}|||p|||,\, \varepsilon\|\nabla z\|,\, \varepsilon\|\nabla p\|\}\\ \leqslant K\big(\varepsilon^{3/2}|||g_1|||+\varepsilon^{3/2}|||g_2|||+\|f_1\|+\|f_2\|\big).\end{gathered} \tag{3.5}$$

□

Поскольку в рассматриваемом случае система оптимальности линейна, то и теорема, обосновывающая асимптотические разложения решения, является следствием предыдущей теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть функции* $f_{1,\varepsilon,m}(\cdot)$, $f_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $g_{1,\varepsilon,m}(\cdot)$, $g_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^{\infty}(\Gamma)$, *а функция* $a(\cdot)$ *удовлетворяет условию* (1.3). *Если*

$$\max\{\|f_{i,\varepsilon,m}\|, \|\nabla f_{i,\varepsilon,m}\|, |||g_{i,\varepsilon,m}||| :\ i=1,2\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \to 0,$$

а $z_m(\cdot)$, $p_m(\cdot)$ *— решение задачи, то для* $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$ *и* $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$, *где* z_ε *и* p_ε *— решение задачи* (3.3)

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_m - a(x) z_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_m - a(x) p_m + z_m = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_m, p_m \in H^1(\Omega), \\ \dfrac{\partial z_m}{\partial n} + \varepsilon^2 \nu p_m(x) = g(x) + g_{1,\varepsilon,m}(x),\ \dfrac{\partial p_m}{\partial n} = g_{2,\varepsilon,m}(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\max\Big\{\|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2}|||z_{\varepsilon,m}|||, \varepsilon\|\nabla z_{\varepsilon,m}\|, \|p_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2}|||p_{\varepsilon,m}|||, \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon,m}\|\Big\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \to 0.$$

4. Построение асимптотики

В силу теоремы 3 для построения асимптотического разложения новой задачи нужно построить ее формальное асимптотическое разложение. Построение осуществляется аналогично задаче, рассмотренной в [2; 3].

Внешнее разложение ищем в виде рядов

$$z_{out}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_{2k}(x), \quad p_{out}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_{2k}(x), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.1}$$

Коэффициенты $z_{2k}(x), p_{2k}(x)$ этих рядов находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$\begin{aligned} &z_0(x) = -f(x)[a(x)]^{-1}, \quad z_{2k}(x) = \Delta z_{2k-2}[a(x)]^{-1}, \quad k \geqslant 1, \\ &p_0(x) = -f(x)[a(x)]^{-2}, \quad p_{2k} = [\Delta p_{2k-2} + z_{2k}] \cdot [a(x)]^{-1}, \quad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Все $z_{2k}(x)$ и $p_{2k}(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, но они не удовлетворяют граничным условиям.

Для того чтобы устранить невязку в граничных условиях, нужно построить экспоненциально убывающие функции в окрестности всей границы Γ, удовлетворяющие соответствующей однородной системе и подправляющие граничные условия.

В силу гладкости Γ в ее окрестности можно ввести систему координат $(s;\tau)$, где s — это координаты на Γ, а τ — расстояние от текущей точки $x \in \Omega$ до Γ.

Пограничный слой имеет ширину порядка ε, а поправочные функции (внутреннее разложение) нужны не во всей области Ω, а лишь в ее малой окрестности. Поэтому после построения поправочные функции нужно умножить на срезающую функцию η, т. е. функцию с носителем в малой окрестности границы и равной тождественно 1 в некоторой меньшей окрестности границы.

В пограничном слое надо перейти к новым *растянутым* координатам (см., например, [8], [9, с. 31–34]) $\xi = \tau\,\varepsilon^{-1}$.

При переходе к новым координатам $(s;\xi)$ оператор $Lw = \varepsilon^2\Delta w - a(x,y)w$ перейдет в оператор $\mathcal{L}_\varepsilon w \equiv \dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varepsilon L_1 \dfrac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^2 L_2 w - \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)u$. Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s с гладкими коэффициентами от s и $\tau = \varepsilon\,\xi$.

Будем искать "внутреннее" разложение в следующем виде:

$$Z(s,\xi,\varepsilon)=\sum_{m=m_0}^{\infty}\varepsilon^m Z_m(s,\xi), \text{ и } P(s,\xi,\varepsilon)=\sum_{m=m_0}^{\infty}\varepsilon^m P_m(s,\xi),$$

при этом ряды $Z(s,\xi,\varepsilon)$ и $P(s,\xi,\varepsilon)$ должны быть ф.а.р. системы однородных уравнений, соответствующих неоднородной системе из (3.4).

Пусть $\widetilde{g}(s)$, $\widetilde{z}_m(s)$, $\widetilde{p}_m(s)$ и $\widehat{p}_m(s)$ — это $g(x)$, $\dfrac{\partial z_m}{\partial n}(x)\big|_\Gamma$, $\dfrac{\partial p_m}{\partial n}(x)\big|_\Gamma$, и $p_m(x)\big|_\Gamma$ в новой системе координат при четных m соответственно, и 0 при нечетных m.

С учетом того, что оператор $\dfrac{\partial}{\partial n}$ в новых координатах есть $-\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial}{\partial \xi}$, после подстановки рядов $z_{out}(x,\varepsilon)+Z(s,\xi,\varepsilon)$ и $p_{out}(x,\varepsilon)+P(s,\xi,\varepsilon)$ в граничные условия системы (3.4) получим следующие асимптотические равенства:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{z}_k(s)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k+2}\nu\widetilde{p}_k(s)-\sum_{m=m_0}^{\infty}\varepsilon^{m-1}\frac{\partial Z_m}{\partial\xi}(s,0)-\sum_{m=m_0}^{\infty}\varepsilon^{m+2}P_m(s,0)=\widetilde{g}(s),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\widetilde{p}_k(s)-\sum_{m=m_0}^{\infty}\varepsilon^{m-1}\frac{\partial P_m}{\partial\xi}(s,0)=0.$$

Поскольку внутреннее разложение призвано устранить невязку в граничных условиях, порожденную внешним разложением, то m_0 надо взять равным 1. Таким образом, внутреннее разложение имеет вид

$$Z(s,\xi,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m Z_m(s,\xi),\qquad P(s,\xi,\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m P_m(s,\xi). \tag{4.3}$$

Подставляя в соответствующую однородную систему ряды (4.3) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ в ряды Тейлора по переменной $\tau=\varepsilon\xi$, получим следующую систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)Z_1=0, & \dfrac{\partial^2 P_{-1}}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)P_1+Z_1=0,\\ \dfrac{\partial^2 Z_m}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)Z_m=F_m(s,\xi), & m\geqslant 2,\\ \dfrac{\partial^2 P_m}{\partial\xi^2}-\widetilde{a}_0(s)P_m+Z_m=G_m(s,\xi), & m\geqslant 2,\end{cases} \tag{4.4}$$

где $F_m(s,\xi)$ и $G_m(s,\xi)$ линейно выражаются через предыдущие функции Z_k, P_k и их производные и полиномиально зависят от ξ и гладко от s, а функция

$$a(x)=\widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\xi^i\widetilde{a}_i(s)$$

разложена в ряд по степеням малого параметра.

Подстановка соответствующих рядов в граничные условия приведет к системам

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Z_1}{\partial\xi}(s;0)=\widetilde{z}_0(s)-\widetilde{g}(s), & \dfrac{\partial P_1}{\partial\xi}(s;0)=\widetilde{p}_0(s),\\ \dfrac{\partial Z_m}{\partial\xi}(s;0)=\widetilde{g}_{m,1}(s), & \dfrac{\partial P_m}{\partial\xi}(s;0)=\widetilde{g}_{m,2},\end{cases} \tag{4.5}$$

где $\widetilde{g}_{m,1}(s)$ и $\widetilde{g}_{m,2}(s)$ есть линейные комбинации известных функций $\widetilde{z}_k(s)$, $\widetilde{p}_k(s)$, $Z_k(s,0)$ и $P_k(s,0)$ при $k<m$. При этом функции Z_m и P_m должны экспоненциально убывать при $\xi\to+\infty$.

Решая первое уравнение системы (4.4) с учетом экспоненциального убывания решения и граничных условий (4.5), получим

$$Z_1(s,\xi)=\frac{\widetilde{g}(s)-\widetilde{z}_0(s)}{\widehat{a}(s)}\,e^{-\widehat{a}(s)\xi},\qquad P_1(s,\xi)=\widetilde{p}_0(s)e^{-\widehat{a}(s)\xi}+\frac{(\widetilde{g}(s)-\widetilde{z}_0(s))\xi}{2\widehat{a}^2(s)}\,e^{-\widehat{a}(s)\xi},$$

где $\widehat{a}(s):=\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}$.

Применением метода математической индукции, стандартным образом доказывается единственная разрешимость задач (4.4), (4.5) в классе функций, экспоненциально стремящихся к нулю при $\xi\longrightarrow+\infty$.

Таким образом, справедлива следующая (итоговая) теорема.

Теорема 4. *Пусть функции* $a(\cdot)$, $g(\cdot)$ *и* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям* (1.3), *коэффициенты рядов* (4.2) *определяются по формуле* (4.2), *а коэффициенты рядов* (4.3) *есть единственное решение задач* (4.4), (4.5). *Тогда ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}z_{2k}(x)+\eta(s,\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m Z_m(s,\tau/\varepsilon)\quad и\quad \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}p_{2k}(x)+\eta(s,\tau)\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m P_m(s,\tau/\varepsilon),$$

где x *и* τ,s *связаны введенной системой координат, есть равномерные как в смысле пространства* $H^1(\Omega)$, *так и в смысле пространства* $C(\overline{\Omega})$, *асимптотические разложения при* $\varepsilon\to 0$ *функций* $z_\varepsilon(x)$ *и* $p_\varepsilon(x)$.

Здесь $z_\varepsilon(x)$ *и* $p_\varepsilon(x)$ *— решение задачи* (3.3), *а* $\eta(s,\tau)$ *— срезающая функция, равная* 1 *в некоторой окрестности границы* Γ. □

З а м е ч а н и е. Отметим, что в силу полученного разложения оценки (3.2) оказались слегка завышенными.

Автор благодарит А.Р. Данилина за внимание к работе и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
3. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления //Докл. РАН. 2011. Т. 440, № 4. С. 1–4.
4. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
5. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
6. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. 1992. № 2. С. 70–74. (Математика, естествознание, технические науки.)
7. **Капустян В.Е.** Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // Докл. АН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
8. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
9. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
10. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

Зорин Александр Павлович
ст. преподаватель
Уральский федеральный университет

Поступила 22.08.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 519.168

УСЕЧЕННЫЙ МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА С СИММЕТРИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ СТОИМОСТИ[1]

Е. Е. Иванко

В работе приводится метод точного решения замкнутой задачи коммивояжера с симметричной функцией стоимости на основе метода динамического программирования. Предлагаемый метод позволяет гарантированно получать оптимальное решение за меньшее число операций по сравнению с классическим методом динамического программирования. В конце работы приводится короткий эксперимент, позволяющий сравнить трудоемкость применения классической и новой схем в задачах коммивояжера различной размерности.

Ключевые слова: метод динамического программирования, задача коммивояжера.

E. E. Ivanko. Truncated dynamic programming method in a closed traveling salesman problem with symmetric value function.

A method for the exact solution of a closed traveling salesman problem with symmetric value function based on the dynamic programming method is presented. The method produces an optimal solution in a smaller number of operations as compared to the classical dynamic programming method. A short experiment, which compares the efficiencies of the classical scheme and of the new scheme in traveling salesman problems of different dimensions, is given in the end of the paper.

Keywords: dynamic programming method, traveling salesman problem.

Введение

Задача коммивояжера в наиболее общем виде может быть сформулирована как задача нахождения “экономного порядка” на конечном множестве элементов с заданной функцией “несхожести” на упорядоченных парах элементов этого множества. Подобной структурой обладают практически все прикладные задачи, в которых необходимо составить наиболее вероятную эволюционную цепочку объектов или событий, обладая информацией об их попарном различии. Например, к задаче коммивояжера можно свести задачу выстраивания хронологии событий в случае, если для каждой упорядоченной пары (a, b) событий известна вероятность следования события b за событием a.

По-видимому, первой постановкой задачи коммивояжера, обусловившей само название, является задача, в которой требуется найти оптимальный маршрут однократного посещения конечного множества позиций [1]. Среди других постановок можно отметить оптимизацию прокладки коммуникаций, эволюционный анализ ДНК, исследование этимологии слов в лингвистике. Небольшой обзор современных приложений задачи коммивояжера можно найти во введении к работе [2].

Задаче коммивояжера посвящено множество работ [3–9]. В частности, проведена оценка трудоемкости [9] и показана NP-полнота этой задачи [10]; разработаны методы динамического [11] и линейного программирования для получения точного решения; получено большое количество приближенных и эмпирических алгоритмов, позволяющих решать задачу коммивояжера за полиномиальное от числа посещаемых позиций количество итераций без существенных потерь в точности.

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 10-08-00484-а и 10-01-96020-р-урал-а) и Программы 09-П-1-1014.

Одним из первых методов точного решения задачи коммивояжера является метод динамического программирования [11]. Несмотря на высокую трудоемкость и ограниченность применения в прикладных задачах, этот метод до сих пор используется как для качественного исследования задачи (например, оценки трудоемкости), так и для точного решения задачи коммивояжера в условиях ряда сложных ограничений (например, при наличии условий предшествования [7]).

В настоящей работе строится новый метод решения задачи коммивояжера на основе классического метода динамического программирования [7; 11]. Новый метод позволяет находить точное решение задачи коммивояжера в замкнутой постановке (где обход позиций должен начаться и закончиться в одной и той же позиции) при условии симметричной функции стоимости, при этом требуется меньшее число итераций по сравнению с классическим методом динамического программирования.

В первом разделе вводятся обозначения и кратко излагается схема классического метода динамического программирования. Во втором разделе строится новый метод решения замкнутой задачи коммивояжера с симметричной функцией стоимости. Наконец, в третьем разделе проводится сравнение вычислительной сложности классического и предлагаемого методов.

1. Обозначения и классическая схема

Автор не предполагает подробно рассматривать и доказывать корректность классического метода динамического программирования в задаче коммивояжера. Заинтересованному читателю можно порекомендовать монографию [7], где этот вопрос детально изучен для целого ряда общих постановок. Ограничимся обозначениями и результатами, необходимыми в следующем разделе для формулировки и доказательства корректности усеченной версии метода динамического программирования.

Рассмотрим множество $X_0 \triangleq \overline{0,n}\colon n > 1$, в рамках которого будем вести все дальнейшие рассуждения. Зададим симметричную функцию стоимости перемещений: $d\colon X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}$, $\forall x, y \in X_0 \;\; d(x,y) = d(y,x)$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Зафиксируем два различных элемента $x, y \in X_0$ и подмножество $K \subseteq X_0 \setminus \{x, y\}\colon |K| = k$. Введем взаимно-однозначное соответствие $\gamma\colon \overline{1,|K|} \leftrightarrow K$, доопределенное равенствами: $\gamma(0) = x, \gamma(k+1) = y$. Всякую упорядоченную последовательность $\alpha = (\gamma(0), \ldots, \gamma(k+1))$ будем называть *маршрутом обхода множества K с началом в x и концом в y*. *Длиной* такого маршрута будем называть сумму стоимостей его ребер

$$D(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} d(\gamma(i), \gamma(i+1)).$$

Всякую упорядоченную последовательность $\alpha = (\gamma(0), \ldots, \gamma(n), \gamma(0))$, где $\gamma\colon X_0 \leftrightarrow X_0$ — некоторая произвольная перестановка элементов множества X_0, будем называть *замкнутым маршрутом* обхода множества X_0. По аналогии *длиной замкнутого маршрута* $\alpha = (\gamma(0), \ldots, \gamma(n), \gamma(0))$ будем называть функцию

$$D(\alpha) = d(\gamma(n), \gamma(0)) + \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(i), \gamma(i+1)).$$

Исследуемая в настоящей работе замкнутая задача коммивояжера заключается в нахождении замкнутого маршрута наименьшей длины при заданных (X_0, d). Всякий такой маршрут далее будем называть *оптимальным*.

Пусть $X_0 = X \cup \{x_0\}\colon x_0 \notin X$. Для всякого $i \in \overline{0,n}$ введем функцию $v_i\colon X_0 \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{P}(X)$ традиционно есть множество всех подмножеств X. Рекурсивно зададим значения функций v_i на некоторых подмножествах областей их определения с помощью следующего соотношения, состоящего из $n+1$ последовательных шагов.

С х е м а 1.

$$
\begin{array}{rl}
0) & \forall x \in X \;\; v_0(x, \varnothing) \triangleq d(x, x_0);\\
1) & \forall K \subset X\colon |K| = 1, \;\; \forall x \in X \setminus K \;\; v_1(x, K) \triangleq \min\limits_{y \in K}\{d(x, y) + v_0(y, K \setminus \{y\})\};\\
2) & \forall K \subset X\colon |K| = 2, \;\; \forall x \in X \setminus K \;\; v_2(x, K) \triangleq \min\limits_{y \in K}\{d(x, y) + v_1(y, K \setminus \{y\})\};\\
\ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
n-1) & \forall K \subset X\colon |K| = n-1, \;\; \forall x \in X \setminus K \;\; v_{n-1}(x, K) \triangleq \min\limits_{y \in K}\{d(x, y) + v_{n-2}(y, K \setminus \{y\})\};\\
n) & v_n(x_0, X) \triangleq \min\limits_{y \in X}\{d(x_0, y) + v_{n-1}(y, K \setminus \{y\})\}.
\end{array}
$$

Вычислительная трудоемкость схемы 1 изучается, например, в [12]. Содержательно значение $v_i(x, K)$ равно стоимости оптимального маршрута обхода элементов множества K с началом в x и концом в x_0, а $v_n(x_0, X)$ — искомая длина оптимального замкнутого маршрута обхода множества X_0. Несмотря на то, что доказательства этих простых фактов приводились в классических работах (например, [9]) либо непосредственно следуют из них, в целях полноты изложения запишем эти доказательства подробно в форме предложений.

Предложение 1. *Пусть заданы конечное множество* $X_0 = X \cup \{x_0\}\colon (X \neq \varnothing)\&(x_0 \notin X)$ *и симметричная функция* $d\colon X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}$, *тогда* $\forall i \in \overline{0, |X| - 1}$, $\forall K \subset X\colon |K| = i$, $\forall x \in X \setminus K$ *величина* $v_i(x, K)$, *определяемая из схемы* 1, совпадает с длиной оптимального маршрута обхода K с началом в x и концом в x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем индукцию по номеру шага i.

Б.И. Для $i = 0$ $\exists! K = \varnothing\colon |K| = 0$. При этом $\forall x \in X \setminus \varnothing$ — утверждение очевидно, поскольку оптимальный обход пустого множества с началом в x и концом в x_0 совпадает с $d(x, x_0)$.

Ш.И. Пусть $n \triangleq |X|$, $i \leq n - 1$ и утверждение справедливо для всех $K \subset X\colon |K| < i$ и всех $x \in X \setminus K$. Проведем доказательство утверждения леммы для всякого $K \subset X\colon |K| = i$ и всякого $x \in X \setminus K$. Выберем произвольные $K\colon |K| = i$, $x \in X \setminus K$. Рассмотрим произвольный маршрут $\beta = (\gamma(0), \ldots, \gamma(i+1))$, где $\gamma\colon \overline{1, |K|} \leftrightarrow K, \gamma(0) = x, \gamma(i+1) = x_0$ и его "подмаршрут" $\beta' = (\gamma(1), \ldots, \gamma(i+1)) = (\gamma'(0), \ldots, \gamma'(i))$, где $\forall j \in \overline{0, i}$ $\gamma'(j) \triangleq \gamma(j+1)$. Следовательно, β' является маршрутом обхода множества $K \setminus \{\gamma(1)\}$ с началом в $\gamma(1)$ и концом в x_0. Длину маршрута β можно записать в виде

$$
D(\beta) = \sum_{i=0}^{i} d(\gamma(i), \gamma(i+1)) = d(\gamma(0), \gamma(1)) + D(\beta'). \tag{1.1}
$$

Поскольку β' является маршрутом обхода множества мощности меньшей, чем i, согласно предположению индукции справедливо неравенство $v_{i-1}(\gamma(1), K \setminus \{\gamma(1)\}) \leq D(\beta')$, откуда, учитывая (1.1) и очевидное $\gamma(1) \in K$, имеем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
v_i(x, K) = \min_{y \in K}\{d(x, y) + v_{i-1}(y, K \setminus \{y\})\} &\leq d(x, \gamma(1)) + v_{i-1}(\gamma(1), K \setminus \{\gamma(1)\})\\
&\leq d(\gamma(0), \gamma(1)) + D(\beta') = D(\beta).
\end{aligned}
$$

Итак, для всякого $K\colon |K| = i$, всякого $x \in X \setminus K$ длина любого маршрута обхода K с началом в x и концом в x_0 не менее величины $v_i(x, K)$.

Покажем, что найдется маршрут обхода K с началом в x и концом в x_0, обладающий длиной $v_i(x, K)$. Учитывая, что K конечно, из определения $v_i(x, K)$ имеем

$$
\exists y_0 \in K\colon d(x, y_0) + v_{i-1}(y_0, K \setminus \{y_0\}) = v_i(x, K) = \min_{y \in K}\{d(x, y) + v_{i-1}(y, K \setminus \{y\})\}.
$$

Пусть $\alpha' = (\gamma'(0), \ldots, \gamma'(i))$ — некоторый оптимальный маршрут обхода множества $K \setminus \{y_0\}$ с началом в y_0 и концом в x_0. По предположению индукции $D(\alpha') = v_{i-1}(y_0, K \setminus \{y_0\})$, тогда маршрут $\alpha \triangleq (\gamma(0), \ldots, \gamma(i+1))$, где $\gamma(0) = x$ и $\forall j \in \overline{1, i+1}$ $\gamma(j) = \gamma'(j-1)$, является маршрутом обхода множества K с началом в x и концом в x_0, а по построению $D(\alpha) = d(x, y_0) + D(\alpha') = d(x, y_0) + v_{i-1}(y_0, K \setminus \{y_0\}) = v_i(x, K)$. □

Предложение 2. *Пусть задано конечное множество* $X_0 = X \cup \{x_0\}\colon (X \neq \varnothing)\&(x_0 \notin X)$ *и симметричная функция* $d\colon X_0 \times X_0 \to \mathbb{R}$*, тогда величина* $v_n(x_0, X)$*, где* $n = |X|$*, определяемая из схемы* 1*, совпадает с длиной оптимального замкнутого маршрута обхода множества* X_0.

Доказательство. Будем рассуждать по аналогии с доказательством шага индукции в предложении 1. Пусть $\beta = (\gamma(0), \ldots, \gamma(n), \gamma(0))$, где $\gamma\colon X_0 \leftrightarrow X_0$ — произвольный замкнутый маршрут обхода множества X_0. Без ограничения общности будем считать, что $\gamma(0) = x_0$. Рассмотрим маршрут $\beta' = (\gamma'(0), \ldots, \gamma'(n))$, где $\forall i = \overline{0, n-1}$ $\gamma'(i) = \gamma(i+1)$ и $\gamma'(n) = \gamma(0)$, обхода множества $X \setminus \{\gamma(1)\}$ с началом в $\gamma(1)$ и концом в x_0. По построению

$$D(\beta) = d(x_0, \gamma(1)) + D(\beta'). \tag{1.2}$$

Согласно предложению 1 стоимость маршрута β' не менее величины $v_{n-1}(\gamma(1), X \setminus \{\gamma(1)\})$, а значит (учитывая очевидное включение $\gamma(1) \in X$ и (1.2)),

$$D(\beta) \geq d(x_0, \gamma(1)) + v_{n-1}(\gamma(1), X \setminus \{\gamma(1)\}) \geq \min_{y \in X}\{d(x_0, y) + v_{n-1}(y, X \setminus \{y\})\} = v_n(x_0, X).$$

Осталось показать, что найдется замкнутый маршрут обхода множетва X_0, стоимость которого совпадает с $v_n(x_0, X)$. В силу конечности X $\exists y_0 \in X$

$$d(x_0, y_0) + v_{n-1}(y_0, X \setminus \{y_0\}) = v_n(x_0, X_0) = \min_{y \in X}\{d(x_0, y) + v_{n-1}(y, X \setminus \{y\})\}.$$

Рассмотрим $\alpha' = (\gamma'(0), \ldots, \gamma'(n))$ — некоторый оптимальный маршрут обхода множества $X \setminus \{y_0\}$ с началом в y_0 и концом в x_0. По предложению 1 $D(\alpha') = v_{n-1}(y_0, X \setminus \{y_0\})$, тогда маршрут $\alpha \triangleq (\gamma(0), \ldots, \gamma(n), \gamma(0))$, где $\gamma(0) = x_0$ и $\forall j \in \overline{1, n}$ $\gamma(j) = \gamma'(j-1)$, по определению является замкнутым маршрутом обхода множества X_0 и по построению

$$D(\alpha) = d(x_0, y_0) + D(\alpha') = d(x_0, y_0) + v_{n-1}(y_0, X \setminus \{y_0\}) = v_n(x_0, X). \qquad \square$$

Рассмотрим усечение схемы 1, позволяющее за меньшее число итераций вычислить стоимость оптимального обхода в замкнутой задаче коммивояжера.

2. Сокращенная схема

Сокращения количества итераций в классическом методе динамического программирования для решения задачи коммивояжера с симметричной функцией стоимости в замкнутой постановке можно добиться за счет отбрасывания "второй половины" схемы 1 — всех шагов, где $i > m \triangleq [(n-1)/2] + 1$. Опишем кратко идею такого сокращения, после чего приведем новую схему и формальное доказательство ее корректности. На каждом i-м шаге схемы 1 расчет функции v_i проводится для всяких $K \subset X\colon |K| = i$, следовательно, как только мощность таких подмножеств K начинает превосходить половину мощности исходного множества X, появляется возможность перебрать все разбиения множества X следующего вида:

$$\begin{gathered} X = K_1 \cup \{x\} \cup K_2, \text{ где} \\ x \notin K_1 \cup K_2 \ \ \& \ \ K_1 \cap K_2 = \varnothing, \\ |K_1| = m, \ \ |K_2| \leq m, \end{gathered} \tag{2.3}$$

зная при этом из “первой половины” схемы 1 значения $v_{|K_1|}(x,K_1)$ и $v_{|K_2|}(x,K_2)$. Любой замкнутый маршрут обхода всего множества X_0 можно получить, “склеивая” два участка (x_0,K_1,x) и (x,K_2,x_0), а значит, и стоимость оптимального замкнутого маршрута можно найти, перебирая всевозможные разбиения вида (2.3) и соответствующие им суммы $v_{|K_1|}(x,K_1)+v_{|K_2|}(x,K_2)$. Запишем новую схему формально, учитывая, что, как и прежде, имеет место задача (X_0,d), выбраны произвольный элемент $x_0\in X_0$ и соответствующее множество $X\colon X_0=X\cup\{x_0\}$, где $x_0\notin X$ и $n=|X|$.

Схема 2.

$$
\begin{array}{ll}
0) & \forall x\in X\ \ v_0(x,\varnothing)\triangleq d(x,x_0);\\
1) & \forall K\subset X\colon |K|=1,\ \ \forall x\in X\setminus K\ \ v_1(x,K)\triangleq \min\limits_{y\in K}\{d(x,y)+v_0(y,K\setminus\{y\})\};\\
2) & \forall K\subset X\colon |K|=2,\ \ \forall x\in X\setminus K\ \ v_2(x,K)\triangleq \min\limits_{y\in K}\{d(x,y)+v_1(y,K\setminus\{y\})\};\\
\dots & \dots\qquad \dots\qquad \dots\\
m) & \forall K\subset X\colon |K|=m,\ \ \forall x\in X\setminus K\ \ v_m(x,K)\triangleq \min\limits_{y\in K}\{d(x,y)+v_{m-1}(y,K\setminus\{y\})\};\\
m+1) & v^*\triangleq \min\limits_{\substack{K\subset X\colon |K|=m\\ y\in X\setminus K}}\big\{v_m(y,K)+v_{n-m-1}(y,X\setminus(K\cup\{y\}))\big\}.
\end{array}
$$

Отметим, что при $m=[(n-1)/2]+1$ справедливо неравенство $n-m-1<m$, следовательно, для всякого $L\subset X\colon |L|=n-m-1$ и всякого $x\in X\setminus L$ значение функции $v_{n-m-1}(x,L)$ определено из предыдущих шагов схемы 2, а значит, и величина v^* корректно определена и вычислима по схеме 2. Наглядно схему 2 можно представить как поиск “наилучшего” (в смысле минимакса) среди различных маршрутов обхода элементов множества X двумя коммивояжерами, стартующими из вершины y и финиширующими в вершине x_0. Каждому коммивояжеру при этом достается приблизительно одинаковое число вершин. Обращая оптимальный “подмаршрут” одного из коммивояжеров “вспять”, в силу симметричности функции d получаем оптимальный обход множества X. Покажем строго, что величина v^* совпадает с длиной оптимального замкнутого маршрута обхода множества X_0.

Теорема. *Пусть заданы множество $X_0=X\cup\{x_0\}\colon x_0\notin X$ и симметричная функция стоимости $d\colon X_0\times X_0\to\mathbb{R}$, тогда величина v^*, рассчитываемая по схеме 2, равняется длине оптимального замкнутого маршрута обхода множества X_0.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный замкнутый маршрут обхода множества $X_0\colon \beta=(\gamma(0),\dots,\gamma(n),\gamma(0))$ (без ограничения общности считаем, что $x_0=\gamma(0)$). Напомним, что $X=X_0\setminus\{x_0\},\ n=|X|,\ m=[(n-1)/2]+1$.

Рассмотрим две части маршрута $\beta\colon \beta_1=(\gamma(0),\dots,\gamma(m+1)),\beta_2=(\gamma(m+1),\dots,\gamma(n),\gamma(0))$ и маршрут, “обратный” к $\beta_1\colon \beta_1'=(\gamma'(0),\dots,\gamma'(m+1))$, где $\forall i\in\overline{0,m+1}\ \gamma'(i)=\gamma(m+1-i)$. Пусть $K\triangleq\{\gamma(1),\dots,\gamma(m)\}$. Обе последовательности β_1' и β_2 являются маршрутами обхода множеств K и $X\setminus(K\cup\{\gamma(m+1)\})$ соответственно с началом в $\gamma(m+1)$ и концом в $\gamma(0)$. Учитывая симметричность функции d и предложение 1, для маршрута β можно записать следующую цепочку:

$$
\begin{aligned}
D(\beta)=D(\beta_1')+D(\beta_2)&\geq v_m(\gamma(m+1),K)+v_{n-m-1}\big(\gamma(m+1),X\setminus(K\cup\{\gamma(m+1)\})\big)\\
&\geq \min_{\substack{K\subset X\colon |K|=m\\ y\in X\setminus K}}\{v_m(y,K)+v_{n-m-1}(y,X\setminus(K\cup\{y\}))\}=v^*.
\end{aligned}
$$

Итак, длина всякого замкнутого маршрута обхода множества X_0 не менее величины v^*. Покажем теперь, как это делалось ранее в предложениях 1 и 2, что существует замкнутый маршрут обхода множества X_0, обладающий длиной v^*.

Пусть $K_0\subset X\colon |K_0|=m$ и $y_0\in X\setminus K_0$ такие, что справедливо равенство

$$
v_m(y_0,K_0)+v_{n-m-1}(y_0,X\setminus(K_0\cup\{y_0\}))=\min_{\substack{K\subset X\colon |K|=m\\ y\in X\setminus K}}\big\{v_m(y,K)+v_{n-m-1}(y,X\setminus(K\cup\{y\}))\big\}=v^*.
$$

Рассмотрим произвольные оптимальные маршруты обхода множеств K_0 и $X \setminus (K_0 \cup \{y_0\})$ соответственно с началом в y_0 и концом в x_0

$$\alpha_1 = (\gamma_1(0), \ldots, \gamma_1(m+1)) \text{ и } \alpha_2 = (\gamma_2(0), \ldots, \gamma_2(n-m)),$$

где

$$\gamma_1 \colon \overline{1, |K_0|} \leftrightarrow K_0, \ \gamma_2 \colon \overline{1, |X \setminus (K_0 \cup \{y_0\})|} \leftrightarrow X \setminus (K_0 \cup \{y_0\}),$$
$$\text{доопределенное } \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = y_0 \text{ и } \gamma_1(m+1) = \gamma_2(n-m) = x_0.$$

Пусть $\alpha_1' = (\gamma(0), \ldots, \gamma(m+1))$ — маршрут обхода K_0 с началом в x_0 и концом в y_0, "обратный" к α_1: $\forall i \in \overline{0, m+1}$ $\gamma(i) = \gamma_1(m+1-i)$, тогда $D(\alpha_1) = D(\alpha_1')$. "Склеим" новый замкнутый маршрут α обхода множества X_0 из маршрутов α_1' и α_2:

$$\alpha \triangleq (\gamma(0), \ldots, \gamma(m+1), \gamma_2(1), \ldots, \gamma_2(n-m)) = (\gamma_0(0), \ldots, \gamma_0(n), \gamma_0(0)),$$

где $\gamma_0 \colon X_0 \leftrightarrow X_0$ определяется соотношением

$$\forall i \in \overline{0, n+1} \ \ \gamma_0(i) = \begin{cases} \gamma(i), & \text{если } i \in \overline{0, m+1}, \\ \gamma_2(i-m-1), & \text{если } i \in \overline{m+2, n+1}, \end{cases}$$

при этом по построению и предложению 1 (учитывая симметричность d) длины α_1' и α_2 совпадают с величинами $v_m(y_0, K_0)$ и $v_{n-m-1}(y_0, X \setminus (K_0 \cup \{y_0\}))$ соответственно, а значит,

$$D(\alpha) = D(\alpha_1') + D(\alpha_2) = D(\alpha_1) + D(\alpha_2) = v_m(y_0, K_0) + v_{n-m-1}(y_0, X \setminus (K_0 \cup \{y_0\})) = v^*.$$

3. Сравнение вычислительной сложности

Для сравнения вычислительной трудоемкости применения схем 1 и 2 введем понятие "единичной операции" и подсчитаем количество таких операций, требующихся для нахождения длины оптимального маршрута по каждой из схем. Будем считать, что при вычислении всякого минимума затрачивается число единичных операций, равное количеству величин, по которым этот минимум рассчитывается. Операциями присваивания и сложения будем пренебрегать, считая, что их число пропорционально определенным выше единичным операциям.

Итак, для всякого из шагов $i \in \overline{1, n-1}$ в схеме 1 происходит перебор подмножеств K множества X мощности i. Всего таких подмножеств существует C_n^i; всякому из них соответствует выбор x одним из $n-i$ способов, а всякой паре (K, x) — вычисление минимума среди i величин. Таким образом, количество единичных операций на i-м шаге схемы 1, где $i \in \overline{1, n-1}$, можно выразить в виде $i(n-i)C_n^i$. На n-м шаге затрачивается всего n операций. Общее количество операций, затрачиваемых в схеме 1, можно выразить в виде

$$f_1(n) = n + \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)C_n^i. \tag{3.4}$$

В схеме 2 шаги $i \in \overline{1, m}$ аналогичны шагам схемы 1 (напомним, что $m = [(n-1)/2] + 1$). На шаге $m+1$ происходит перебор всех подмножеств мощности m, коих всего C_n^m. Для каждого подмножества K перебираются все $y \in X \setminus K$, всего $n-m$ элементов. По всевозможным таким парам (K, y) и вычисляется минимум. Всего $(m+1)$-й шаг схемы 2 потребует $(n-m)C_n^m$ операций. Общую численность операций в схеме 2 можно выразить в следующем виде

$$f_2(n) = (n-m)C_n^m + \sum_{i=1}^{m} i(n-i)C_n^i. \tag{3.5}$$

Сравнение значений функций (3.4) и (3.5) приводится в следующей таблице. Здесь величина $h \triangleq f_1(n)/f_2(n)$ показывает, во сколько раз схема 2 "быстрее" схемы 1 для различных значений параметра n.

Т а б л и ц а

n	10	14	18	22	26	30	50	100	500
h	1.5	1.59	1.64	1.67	1.7	1.72	1.78	1.84	1.93

Рассмотрим величину h в асимптотике при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_2(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)C_n^m + \sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i}{n + \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)C_n^i}$$
$$= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)C_n^m}{n + \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)C_n^i}}_{(*)} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i}{n + \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)C_n^i}}_{(**)}.$$

Оценим выражение (*)

$$(*) = 1/\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n-m)C_n^m}}_{0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{m(n-m)C_n^m}{(n-m)C_n^m}}_{m\to\infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=\overline{1,n}\setminus\{m\}} i(n-i)C_n^i}{(n-m)C_n^m}}_{\geq 0}\Bigg) = 0.$$

Теперь оценим выражение (**). Рассмотрим четные значения n, в этом случае $m = n/2$ и выражение $\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i$ равно половине выражения $\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i$, а тогда

$$(**) = 1/\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i}}_{0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i}{\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i}}_{2}\Bigg) = \frac{1}{2}.$$

В случае, когда n нечетно, половину выражения $\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i$ можно выразить в виде $\sum_{i=1}^{m-1} i(n-i)C_n^i + m(n-m)C_n^m/2 = \sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i - m(n-m)C_n^m/2$ и

$$(**) = 1/\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i}}_{0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i}{\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i}}_{(***)}\Bigg).$$

Распишем (***)

$$(***) = 1/\Bigg(\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^m i(n-i)C_n^i - m(n-m)C_n^m/2}{\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i}}_{1/2} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{m(n-m)C_n^m/2}{\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i}}_{****}\Bigg).$$

Наконец, учитывая, что $\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i = n(n-1)2^{n-2}$ и $C_n^m \leq 2^{n-m}$, для (****) справедлива оценка

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{m(n-m)C_n^m/2}{\sum_{i=1}^n i(n-i)C_n^i} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{m(n-m)(n-m)2^{n-m}}{n(n-1)2^{n-1}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{m}{2^{m-1}} = 0.$$

Следовательно, в случае нечетных n выражение (**) также стремится к $1/2$ при $n \to \infty$.

В ходе вычислительного эксперимента при решении замкнутой задачи коммивояжера с симметричной матрицей для $n = 15$ время вычисления стоимости оптимального маршрута по схеме 1 в 1.58 раза превзошло время вычисления стоимости оптимального маршрута по схеме 2, что хорошо согласуется с приведенными в таблице теоретическими оценками.

4. Заключение

В работе описывается дробление множества посещаемых вершин на два близких (или равных) по мощности подмножества. Можно составить аналогичные схемы, соответствующие случаям дробления множества посещаемых вершин на большее число подмножеств. В этих случаях, однако, вычислительного выигрыша по сравнению со схемой 1 не наблюдается. Подсчет количества элементарных операций при дроблении исходного множества вершин на 3 и 4 подмножества позволяет предположить, что при увеличении количества частей вычислительная сложность соответствующей схемы лишь растет, существенно превышая вычислительную сложность исходной схемы 1. Рассмотрим на идейном уровне пример аналога схемы 2 при дроблении множества исходных вершин на три подмножества мощности, близкой к $n/3$.

Во-первых, в отличие от случая двух подмножеств, где "склеивание" происходило по фиксированной вершине x_0 и произвольной $y \in X_0 \setminus \{x_0\}$, в случае трех подмножеств появляется три вершины "склейки", а значит, какую бы вершину мы ни зафиксировали в качестве x_0, для одного из трех подмножеств разбиения эта вершина не будет ни началом, ни концом. В такой ситуации для вычисления финишного шага следует предварительно рассчитать длины оптимальных маршрутов со свободными как началом, так и концом. Эти величины можно рассчитать с помощью серии схем 2 (без последнего шага), каждой из которых соответствует своя вершина x_0, выбирающаяся из X_0. Иными словами, шаги $\overline{1, m-1}$ повторяются $n+1$ раз для всякого $x_0 \in X_0$ (в силу симметричности d число повторений можно уменьшить до $[(n-1)/2]+1$).

Во-вторых, последний шаг также существенно усложнится за счет того, что каждому выбору первого подмножества одним из приблизительно $C_n^{[n/3]}$ способов и "первого элемента склейки" x_0^1 одним из приблизительно $[2n/3]$ способов соответствует приблизительно $C_{[2n/3]}^{[n/3]}$ способов выбора второго подмножества и приблизительно $[n/3]$ способов выбора "второго элемента склейки" x_0^2. С ростом n произведение

$$[2n/3][n/3]C_n^{[n/3]}C_{[2n/3]}^{[n/3]}$$

быстро растет, превышая уже при $n = 10$ число операций на всех предыдущих шагах новой схемы.

В завершение следует отметить, что в настоящей работе не рассматривается алгоритм восстановления маршрута после того, как вычислены все значения в схеме 1 или 2. Для схемы 1 алгоритм такого восстановления заинтересованный читатель может найти в работе [13]. Несложно видеть, что процесс восстановления оптимального маршрута при вычислениях по схеме 2 состоит из двух частей, соответствующих множествам K_0 и $X \setminus (K_0 \cup \{y_0\})$. Первая часть оптимального маршрута будет восстановлена с помощью аналогичного классическому движения в обратном направлении (вверх) по схеме 2, начиная с позиции $v_{|K_0|}(y_0, K_0)$, а вторая — с позиции $v_{|X \setminus (K_0 \cup \{y_0\})|}(y_0, X \setminus (K_0 \cup \{y_0\}))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Menger K.** Das botenproblem in Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 2 / ed. K. Menger. Leipzig, 1932. P. 11–12.
2. **Иванко Е.Е.** Метод масштабирования в приближенном решении задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2011. № 12. С. 115–129.
3. **Gutin G., Punnen A.** The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer, 2002. 850 p.
4. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
5. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
6. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.

7. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 238 с.
8. **Гимади Э.Х.** Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкальской междунар. конф. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2001. Т. 1. С. 117–124.
9. **Held M., Karp R.M.** A dynamic programming approach to sequencing problems // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. № 10. P. 196–210.
10. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
11. **Bellman R.** Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem // J. Assoc. Comput. Mach. 1962. № 9. P. 61–63.
12. **Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г.** Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера с внутренними работами: элементы параллельной структуры // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 3. С. 101–124.
13. **Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации с ограничениями. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2009. 65 с.

Иванко Евгений Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ivanko@ural.ru

Поступила 15.09.2012

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977.8

НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ПОЗИЦИОННАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ДВУХ ЛИЦ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ И ВЕКТОРНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ИГРОКОВ[1]

А. Ф. Клейменов

Рассматривается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух лиц на заданном отрезке времени. Функционал выигрыша первого игрока представляется в виде суммы интегрального и терминального членов, в то время как второй игрок имеет векторный терминальный функционал. Оба игрока в текущий момент времени знают значение фазового вектора системы. Помимо этого, первый игрок знает также значение управления второго игрока. Второй игрок действует в классе чистых позиционных стратегий, а первый — в классе позиционных контрстратегий. Вводится понятие решения игры нэшевского типа. Формулируется задача, решения которой составляют базу для конструкции равновесий нэшевского типа.

Ключевые слова: неантагонистическая позиционная дифференциальная игра, векторные критерии, интегральный и терминальный функционалы качества, равновесное решение нэшевского типа.

A. F. Kleimenov. A two-person non-antagonistic positional differential game with integral and vector payoffs of the players.

A two-person non-antagonistic positional differential game is considered on a given time interval. The payoff functional of the first player is the sum of integral and terminal components, whereas the second player has a vector terminal payoff functional. Both players know the value of the state vector of the system at the current time. In addition, the first player knows the value of the control of the second player. The second player acts in the class of pure positional strategies, and the first player acts in the class of positional counter-strategies. The notion of Nash-type solution of the game is introduced. A problem whose solutions are the basis for the construction of Nash-type equilibria is formulated.

Keywords: non-antagonistic positional differential game, vector criteria, integral and terminal payoff functionals, Nash-type equilibrium solution.

Введение

Постановка рассматриваемой неантагонистической игры и ее решение опирается на формализацию и результаты теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, представленные в монографиях Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [1; 2]. Надо сказать, что динамические игровые задачи, для которых характерны неантагонистические постановки, отличаются весьма большим разнообразием (см., например, [3–7]). И во многих задачах возникают серьезные трудности при их решении. Отметим два таких частных случая неантагонистической динамической игры двух лиц. Первый — это игра с нелинейной динамикой, геометрическими ограничениями на управления и с интегрально-терминальными показателями качества. Для антагонистического варианта такой игры в [8] было показано существование седловой точки в классе стратегий, зависящих только от позиции. Второй — это игра с векторными показателями качества игроков [6]. В настоящей работе изучается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух лиц, в которой один игрок имеет интегрально-терминальный показатель качества, в то время как другой игрок имеет векторный показатель, состоящий из терминальных компонент. Работа примыкает к исследованиям [7; 9; 10].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00290) и в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002).

1. Уравнения движения, функционалы качества игроков

Рассмотрим неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц, динамика которой описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

$$u \in P \in compR^p, \quad v \in Q \in compR^q, \tag{1.2}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, управления u и v подчинены первому и второму игрокам соответственно.

Пусть G есть компакт в пространстве $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$, проекция которого на ось времени равна отрезку $[t_0, \vartheta]$, где ϑ — заданный момент окончания игры. Предполагаем, что все траектории системы (1.1), начинающиеся в произвольной позиции $(t_*, x_*) \in G$, остаются в G при всех $t \in (t_*, \vartheta]$.

Целью первого игрока является максимизация функционала I_1, где

$$I_1 = \sigma(x(\vartheta)) + \int_{t_0}^{\vartheta} \omega(t, x(t), u(t), v(t))dt. \tag{1.3}$$

Второй игрок стремится “максимизировать” векторный функционал $I_2 = (I_{21}, I_{22})$, где

$$I_{2i} = \sigma_i(x(\vartheta)), \quad i = 1, 2. \tag{1.4}$$

Примем следующие предположения.

1^0. Функции $f,\ \omega : G \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывны по совокупности аргументов и удовлетворяют условиям Липшица по x.

2^0. Существует константа $\lambda > 0$ такая, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \lambda(1 + \|x\|)$$

для всех $(t, x) \in G,\ u \in P,\ v \in Q$.

3^0. Функции σ, σ_i непрерывны по x.

Предполагаем, что оба игрока знают значение фазового вектора игры $x(t)$ в текущий момент времени t. Кроме того, полагаем, что первый игрок знает значение управления второго игрока $v(t)$ в текущий момент времени t. Тогда действия первого игрока естественно формализовать в классе позиционных контрстратегий, в то время как действия второго игрока — в классе чистых позиционных стратегий [1; 2].

2. Формализация позиционных стратегий и движений

Формализация позиционных стратегий и позиционных контрстратегий игроков, а также порождаемых ими движений, в неантагонистической позиционной дифференциальной игре базируется на формализации и результатах теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, изложенной в монографиях [1; 2]. Подробно эта формализация приводится в [7].

Чистая стратегия второго игрока отождествляется с парой $V \div \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$, где $v(\cdot, \cdot, \cdot)$ — произвольная функция, зависящая от позиции (t, x) и от положительного параметра точности ε, и принимает значения в множестве Q. Функция $\beta_2(\varepsilon)$ непрерывна, монотонна и удовлетворяет условию $\beta_2(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$. Для фиксированного ε величина $\beta_2(\varepsilon)$ является верхней границей для шага разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, который второй игрок использует при построении аппроксимационных движений.

Позиционная контрстратегия первого игрока отождествляется с парой $U^v \div \{u(t,x,v,\varepsilon), \beta_1(\varepsilon))\}$, где $u(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — произвольная функция, зависящая от позиции (t,x), управления v и положительного параметра точности ε; функция $\beta_1(\varepsilon)$ того же класса, что и $\beta_2(\varepsilon)$. Для фиксированного ε величина $\beta_1(\varepsilon)$ является верхней границей для шага разбиения отрезка $[t_0,\vartheta]$, который первый игрок использует при построении аппроксимационных движений.

В качестве движений, порожденных набором $(U^v,\ V)$, рассматриваются движения двух типов — аппроксимационные (пошаговые) и идеальные (предельные).

Аппроксимационное движение $x^\varepsilon_\Delta[\cdot] = x[\cdot,t_0,x_0,U^v,\varepsilon_1,\Delta_1,V,\varepsilon_2,\Delta_2]$, порожденное набором $(U^v,\ V)$ из начальной позиции (t_0,x_0) при фиксированных значениях параметров точности игроков ε_1 и ε_2 и при фиксированных разбиениях $\Delta_1 = \{t_i^{(1)}\}$ и $\Delta_2 = \{t_i^{(2)}\}$ отрезка $[t_0,\vartheta]$, выбранных первым и вторым игроками соответственно определяется как пошаговое решение дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}
\dot{x^\varepsilon_\Delta}[t] = f(t,x^\varepsilon_\Delta[t],u^{\varepsilon_1}_{\Delta_1}[t],v^{\varepsilon_2}_{\Delta_2}[t]), \quad x^\varepsilon_\Delta[t_0]=x_0,\\
u^{\varepsilon_1}_{\Delta_1}[t] = u(t_i^{(1)},x^\varepsilon_\Delta[t_i^{(1)}],v^{\varepsilon_2}_{\Delta_2}[t],\varepsilon_1), \quad t_i^{(1)} \le t < t_{i+1}^{(1)},\\
v^{\varepsilon_2}_{\Delta_2}[t] = v(t_j^{(2)},x^\varepsilon_\Delta[t_j^{(2)}],\varepsilon_2), \quad t_j^{(2)} \le t < t_{j+1}^{(2)},
\end{gathered} \tag{2.5}$$

при условиях $\delta(\Delta_i) \le \beta_i(\varepsilon_i),\ i=1,2$, где символом $\delta(\Delta_i)$ обозначен шаг разбиения Δ_i.

Предельное движение, порожденное набором $(U^v,\,V)$ из начальной позиции (t_0,x_0), определяется как непрерывная функция $x[t]=x[t,t_0,x_0,U^v,V]$, для которой существует последовательность аппроксимационных движений $\{x[t,t_0^k,x_0^k,U^v,\varepsilon_1^k,\Delta_1^k,V,\varepsilon_2^k,\Delta_2^k]\}$, равномерно сходящаяся к $x(t)$ на $[t_0,\vartheta]$, когда $k\to\infty,\ \varepsilon_1^k\to 0,\ \varepsilon_2^k\to 0,\ t_0^k\to t_0,\ x_0^k\to x_0;\ \delta(\Delta_i^k)\le\beta_i(\varepsilon_i^k),\ i=1,2.$

Набор (U^v,V) порождает непустое компактное (в метрике пространства $C[t_0,\vartheta]$) множество $X(t_0,x_0,U^v,V)$, состоящее из предельных движений $x[\cdot,t_0,x_0,U^v,V]$.

Далее в соответствии с [7] имеем дело с аппроксимационными движениями, которые скоординированы по параметрам точности, т. е. считаем, что $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$.

3. Гарантированные выигрыши игроков

В качестве гарантированного выигрыша первого игрока в начальной позиции (t_0,x_0) на наборе $(U^v,\ V)$ принимаем величину

$$\rho_1(t_0,x_0,U^v,V) = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\left[\sigma(x^\varepsilon_\Delta[\vartheta]) + \int_{t_0}^{\vartheta}\omega(t,x^\varepsilon_\Delta[t],u^{\varepsilon_1}_{\Delta_1}[t],v^{\varepsilon_2}_{\Delta_2}[t])dt\right], \tag{3.6}$$

где в выражениях $u^{\varepsilon_1}_{\Delta_1}[\cdot]$ и $v^{\varepsilon_2}_{\Delta_2}[\cdot]$, определенных в (2.5), полагаем $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$.

Введем обозначение

$$\widetilde{\rho}_1(t_0,x_0,U^v,V) = \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\left[\sigma(x^\varepsilon_\Delta[\vartheta]) + \int_{t_0}^{\vartheta}\omega(t,x^\varepsilon_\Delta[t],u^{\varepsilon_1}_{\Delta_1}[t],v^{\varepsilon_2}_{\Delta_2}[t])dt\right], \tag{3.7}$$

которое будем использовать и при несовпадающих ε_1 и ε_2.

Нетрудно показать, что для любого предельного движения $x[\cdot]\in X(t_0,x_0,U^v,V)$, где U^v и V — произвольные стратегии, можно найти пару измеримых по первому аргументу управлений вида $(u(t,\varepsilon),\ v(t,\varepsilon),\ t_0\le t\le\vartheta,\ \varepsilon>0)$, порождающую единственное предельное движение, совпадающее с $x[\cdot]$. Множество всех пар управлений, порождающих одну и ту же траекторию $x[\cdot]$, обозначим через $L(x[\cdot])$.

В дальнейшем будет использоваться следующее условие.

4^0. Для пары $(u(\cdot,\cdot),\ v(\cdot,\cdot)) \in L(x[\cdot])$ условие выполнено, если для любой пары $(\widetilde{u}(\cdot,\cdot),\ v(\cdot,\cdot)) \in L(x[\cdot])$ имеет место неравенство

$$\rho_1(t_0, x_0, u(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot)) \geq \rho_1(t_0, x_0, \widetilde{u}(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot)). \tag{3.8}$$

Далее, рассмотрим множество

$$W(t_0, x_0, U^v, V) = \Big\{(w_1, w_2)\colon w_1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_1(x^\varepsilon_\Delta[\vartheta]),\ w_2 = \lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_2(x^\varepsilon_\Delta[\vartheta])\Big\}, \tag{3.9}$$

где оба предела в (3.9) берутся по одним и тем же последовательностям аппроксимационных движений.

Введем множество

$$W^*(t_0, x_0, U^v, V) = P^{\min}(W(t_0, x_0, U^v, V)), \tag{3.10}$$

где символ $P^{\min}(A)$ обозначает множество Парето-минимальных элементов множества A.

Множество $W^*(t_0, x_0, U^v, V)$ представляет собой непустой компакт. Его элементы могут быть интерпретированы как “гарантированные выигрыши” второго игрока в ситуации, когда оба игрока придерживаются набора стратегий (U^v, V). Гарантия понимается в следующем смысле: для любого движения $x[\cdot] \in X(t_0, x_0, U^v, V)$ найдется вектор $w \in W^*(t_0, x_0, U^v, V)$ такой, что выполняется неравенство $I_2(x(\vartheta)) \geq w$. Здесь и ниже векторное неравенство $\geq$ обозначает такое же неравенство для соответствующих координат.

Далее нам потребуется следующее бинарное отношение предпочтения. Пусть A, B — непустые множества из пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Множество A μ-доминирует множество B (обозначаем $A\mu B$), если для любого $a \in A$ найдется $b \in B$ такое, что $a \geq b$, и, кроме того, по крайней мере для одной такой пары имеем $a \neq b$.

4. Определение NE-решения

Определение 2. Набор $(\tilde{U^v},\ \tilde{V})$ называется решением нэшевского типа (NE-решением) в рассматриваемой игре, если для любой траектории $x[\cdot] \in X(t_0, x_0, \tilde{U^v}, \tilde{V})$, любого $\tau \in [t_0, \vartheta)$, любой контрстратегии U^v и любой стратегии V выполнены следующие условия:

(i) $\widetilde{\rho}_1(\tau, x[\tau], U^v, \tilde{V}) \leq \rho_1(\tau, x[\tau], \tilde{U^v}, \tilde{V})$;

(ii) множество $W^*(\tau, x[\tau], \tilde{U^v}, V)$ не μ-доминирует множество $W^*(\tau, x[\tau], \tilde{U^v}, \tilde{V})$.

Из определения 2 следует, что любому игроку в любой момент времени $\tau \in [t_0, \vartheta)$ невыгодно отклоняться от NE-решения. Причем выгодность отклонения для первого игрока заключается в неуменьшении гарантированного выигрыша. В то же время выгодность отклонения для второго игрока понимается относительно μ-доминирования множества гарантированных выигрышей.

Основная задача заключается в нахождении множества NE-решений.

5. Антагонистические позиционные дифференциальные игры Γ_1 и Γ_2

Рассмотрим теперь траектории $x(t)$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, системы (1.1), порожденные всевозможными парами измеримых управлений $(u(t), v(t),\ t_0 \leq t \leq \vartheta)$. Обозначим через S множество этих траекторий. Конечные точки этих траекторий образуют множество достижимости $G(\vartheta)$ системы (1.1).

Пусть заданы траектория $x^*(\cdot) \in S$ и значение параметра $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множества

$$M^\varepsilon_i(x^*(\cdot)) = \{x \in G(\vartheta)\colon \sigma_i(x) \leq \sigma_i(x^*(\vartheta)) - \varepsilon\}, \quad i = 1, 2;$$

$$M^{\varepsilon}(x^*(\cdot)) = \bigcup_{i\in\overline{1,2}} M_i^{\varepsilon}(x^*(\cdot)). \tag{5.11}$$

Определим семейства антагонистических позиционных дифференциальных игр $\Gamma_1(\tau, x^*(\tau))$ и $\Gamma_2(\tau, x^*(\tau))$, $\tau \in [t_0, \vartheta)$, следующим образом.

Динамика обеих игр описывается уравнением (1.1). В качестве начальной позиции берется позиция $(\tau, x^*(\tau))$. Первый игрок действуют в классе позиционных контрстратегий $U^v \div u(t, x, v, \varepsilon)$, а второй — в классе чистых позиционных стратегий $V \div v(t, x, \varepsilon)$.

В игре $\Gamma_1(\tau, x^*(\tau))$ первый игрок максимизирует функционал (1.3), а второй игрок противодействует ему. Из [8] следует, что игра $\Gamma_1(\tau, x^*(\tau))$ имеет непрерывную функцию игры $\gamma^1(t, x)$ и универсальную седловую точку

$$\bigl\{U^{v(1)} \div u^{(1)}(t, x, v, \varepsilon), \quad V^{(1)} \div v^{(1)}(t, x, \varepsilon)\bigr\}. \tag{5.12}$$

Игра $\Gamma_2(\tau, x^*(\tau))$ представляет собой антагонистическую игру сближения [1; 2], в которой первый игрок стремится выбрать свою контрстратегию U^v так, что для любого движения $x[\cdot] \in X(\tau, x^*(\tau), U^v)$ состояние $x[\vartheta]$ попадает на множество $M^{\varepsilon}(x^*(\cdot))$ (5.11). С другой стороны, второй игрок препятствует этому.

Обозначим разрешающую контрстратегию первого игрока в этой игре через

$$U^{v(2)} \div u^{(2)}(t, x, v, \varepsilon).$$

6. Структура NE-решений

З а д а ч а 1. Найти пару измеримых по первому аргументу управлений $(u(t, \varepsilon),\ v(t, \varepsilon),\ t_0 \le t \le \vartheta,\ \varepsilon > 0)$, порождающих единственное предельное движение $x[\cdot]$, удовлетворяющее условию 4^0, и таких, что:

1) При всех $t \in [t_0, \vartheta)$ выполнено неравенство

$$\gamma^1(\vartheta, x[\vartheta]) + S_1(t_0, \vartheta, u(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot)) \ge \gamma^1(t, x[t]) + S_1(t_0, t, u(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot)), \tag{6.13}$$

где

$$S_1(t_1, t_2, u(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot)) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{t_1}^{t_2} \omega(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon))dt. \tag{6.14}$$

2) Для любой позиции $(\tau, x[\tau])$, $\tau \in [t_0, , \vartheta)$, существует стратегия первого игрока такая, что второй игрок не может гарантировать выигрыш, который μ-доминирует его выигрыш на траектории $x[\cdot]$.

Обозначим множество решений задачи 1 через L^0.

Пусть пара управлений $(u^0(t, \varepsilon), v^0(t, \varepsilon)) \in L^0$ порождает движение $x^0[\cdot]$. Рассмотрим контрстратегию первого игрока $U^{v0} \div \{u^0(t, x, v, \varepsilon), \beta_1^0(\varepsilon)\}$ и стратегию второго игрока

$$V^0 \div \{v^0(t, x, \varepsilon), \beta_2^0(\varepsilon)\},$$

где

$$u^0(t, x, v, \varepsilon) = \begin{cases} u^0(t, \varepsilon), & \text{если } \bigl\|x - x^0[t]\bigr\| < \varepsilon\varphi(t), \\ u^{(2)}(t, x, v, \varepsilon), & \text{если } \bigl\|x - x^0[t]\bigr\| \ge \varepsilon\varphi(t), \end{cases} \tag{6.15}$$

$$v^0(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} v^0(t, \varepsilon), & \text{если } \bigl\|x - x^0[t]\bigr\| < \varepsilon\varphi(t), \\ v^{(1)}(t, x, \varepsilon), & \text{если } \bigl\|x - x^0[t]\bigr\| \ge \varepsilon\varphi(t) \end{cases} \tag{6.16}$$

для всех $(t, x) \in G$, $\varepsilon > 0$.

Функции $\beta_i^0(\cdot)$ и положительная возрастающая функция $\varphi(\cdot)$ выбираются так, что неравенство

$$\left\|x(t,t_0,x_0,U^0,\varepsilon,\Delta_1,V^0,\varepsilon,\Delta_2)-x^0[t]\right\|<\varepsilon\varphi(t) \tag{6.17}$$

выполняется для всех $t\in[t_0,\vartheta)$, если $\delta(\Delta_i)\le\beta_i^0(\varepsilon)$.

Стратегия $v^{(1)}(t,x,\varepsilon)$, входящая в (6.16), определена в (5.12); контрстратегия $u^{(2)}(t,x,v,\varepsilon)$, входящая в (6.15), есть разрешающая контрстратегия в игре $\Gamma_2(\tau,x^*(\tau))$.

Эти стратегии могут быть проинтерпретированы как универсальные стратегии наказания, применяемые в случае, если партнер в некоторый момент времени $\tau\in[t_0,\vartheta)$ отказывается отслеживать траекторию $x^0[\cdot]$. Стратегии наказания рассматривались в работах [4; 5; 7; 10].

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в дифференциальной игре* (1.1)–(1.4) *выполнены предположения* 1^0–3^0. *Пусть пара управлений* $(u^0(t,\varepsilon),\ v^0(t,\varepsilon))$, *порождающая единственное движение* $x^0[\cdot]$, *является решением задачи* 1. *Тогда набор* $(U^{v0},\ V^0)$, $U^{v0}\div\{u^0(t,x,v,\varepsilon),\beta_1^0(\varepsilon)\}$, $V^0\div\{v^0(t,x,\varepsilon),\beta_2^0(\varepsilon)\}$ (6.15)–(6.17) *является* NE-*решением.*

Доказательство теоремы производится по схеме из [7, гл. II, IV].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. New York: Academic Press, 1999. 519 p.
4. **Tolwinski B., Haurie A., Leitman G.** Cooperative equilibria in differential games // J. Math. Anal. Appl. 1986. Vol. 119, no.1-2. P. 182–202.
5. **Кононенко А.Ф.** О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 2. С. 285–288.
6. **Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E.** The vector-valued maximum. New York: Academic Press, 1994. 404 p.
7. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
8. **Красовский А.Н.** Нелинейная дифференциальная игра с интегральной платой // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 8. С. 1306–1312.
9. **Клейменов А.Ф.** Универсальное решение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре с векторными критериями // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 97–105.
10. **Kleimenov A.F.** Equilibrium coalitional mixed strategies in differential games of m players // Probl. Control Inform. Theory. 1982. Vol. 11, no. 2. P. 85–95.

Клейменов Анатолий Федорович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Поступила 27.09.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, КАК У ГРУППЫ A_{10}[1]

А. С. Кондратьев

Описаны конечные группы с графом простых чисел, как у группы A_{10}.

Ключевые слова: конечная группа, группа A_{10}, граф простых чисел, распознавание по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev. Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10}.

Finite groups that have the same prime graph as the group A_{10} are described.

Keywords: finite group, group A_{10}, prime graph, recognition by prime graph.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \le i \le s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Группа G называется *распознаваемой по спектру*, если любая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ изоморфна G. Две группы называются *изоспектральными*, если их спектры совпадают. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [6]) тесно связано направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов (т. е. совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно) влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

Проблема распознаваемости конечных (прежде всего простых) групп по графу простых чисел включается в следующую общую задачу: описать все конечные группы, графы простых чисел которых имеют заданные свойства.

Группа A_{10} во многих смыслах исключительна. Так, она является единственной группой со связным графом простых чисел среди простых групп из известного "Атласа конечных групп" [12], а также среди простых четырепримарных групп (см. [3]).

Нераспознаваемость группы A_{10} по спектру была установлена еще в 1998 г. В. Д. Мазуровым [5]. В работах А.М. Старолетова [8;9] описано строение конечной группы, изоспектральной группе A_{10}, в частности, доказана ее неразрешимость. Из результатов работы [19] следует распознаваемость группы A_{10} по ее порядку и графу простых чисел.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00476), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

Обобщая эти результаты, в данной работе мы описываем конечные группы с графом простых чисел, как у группы A_{10}. Поскольку графы $\Gamma(A_{10})$ и $\Gamma(Aut(J_2))$ изоморфны как абстрактные графы, наши рассуждения при этом похожи на рассуждения из недавней работы автора [2], где соответствующее описание дано для группы $Aut(J_2)$. Любопытно, что $\Gamma(A_{10}) = \Gamma(3 \times J_2)$.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [4; 10–12]. Если A и B — группы, то $A.B$, $A:B$ (или $A \leftthreetimes B$) и $A^{\cdot}B$ обозначают соответственно расширение, расщепляемое расширение (или полупрямое произведение) и нерасщепляемое расширение группы A посредством группы B, а $A \circ B$ — центральное произведение групп A и B над их общей центральной подгруппой. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n и p^n иногда обозначается также циклическая группа порядка n и элементарная p-группа порядка p^n соответственно. Через G^∞ будем обозначать последний член ряда коммутантов конечной группы G.

Конечную группу G назовем 2-*фробениусовой*, если в G существуют такие подгруппы A, B и C, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно.

Пусть K и L — два соседних члена главного ряда конечной группы G, причем $K < L \le F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, называется *p-главным фактором* группы G и группа G индуцирует (сопряжением) на V неприводимый $GF(p)G/F(G)$-модуль (так как $C_{G/K}(V) \ge F(G)/K$).

Два представления T_1 и T_2 группы G называются *квазиэквивалентными*, если существует автоморфизм α группы G такой, что представления $T_1\alpha$ и T_2 группы G эквивалентны.

Если группа G действует на группе H, то будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа, $\Gamma(G) = \Gamma(A_{10})$ и $\tilde{G} = G/O_3(G)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G разрешима, 3-дополнение в G есть группа Фробениуса, ядро которой является нециклической абелевой 7-группой, а дополнение — бипримарной группой вида $C:D$, где C — циклическая 5-группа и D — циклическая или обобщенно кватернионная 2-группа, фактор-группа $G/O(G)$ изоморфна либо D, либо $SL_2(3)$, либо группе вида $Q_8.S_3$;*

(2) *G разрешима, 3-дополнение R в G есть группа Фробениуса вида $A:B$, где $A = F(R)$ — бипримарная $\{2,5\}$-группа и B — циклическая 7-группа, фактор-группа $O_{7'}(G)/O_3(G)$ имеет нормальное 3-дополнение $F(R)O_3(G)/O_3(G)$ и фактор-группа $G/O_{7'}(G)$ изоморфна B или группе Фробениуса порядка $3|B|$;*

(3) *G разрешима, 3-дополнение R в G есть 2-фробениусова группа вида $A:B:C$, где $A = F(R)$ — $\{2,5\}$-группа порядка, делящегося на 5, B — циклическая 7-группа и $|C| = 2$, фактор-группа $O_{7'}(G)/O_3(G)$ имеет нормальное 3-дополнение $F(R)O_3(G)/O_3(G)$, и фактор-группа $G/O_{7'}(G)$ изоморфна группе Фробениуса порядка $2|B|$ или $6|B|$;*

(4) *$\tilde{G}$ изоморфна полупрямому произведению нетривиальной абелевой 7-группы A на группу B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \times L$, где группа L изоморфна $SL_2(q)$ для $q \in \{5,9\}$, группа $B/O_3(B)$ изоморфна $L_2(q)$ или $PGL_2(q)$ и каждый 7-главный фактор группы AL как L-модуль изоморфен при $q = 5$ точному неприводимому 2-мерному $GF(49)SL_2(5)$-модулю или точному неприводимому 4-мерному $GF(7)SL_2(5)$-модулю, а при $q = 9$ — одному из двух квазиэквивалентных точных неприводимых 4-мерных $GF(7)SL_2(9)$-модулей;*

(5) *$\tilde{G}$ изоморфна одной из групп S_7, S_8, A_9, A_{10}, $PGL_2(49)$, $L_3(4):2_3$, $L_3(4).3.2_3$, $U_3(5)$, $U_3(5):2$, $U_3(5):3$, $U_3(5):S_3$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, $O_8^+(2):3$, J_2;*

(6) *$\tilde{G}$ изоморфна расширению нильпотентной $\{2,5\}$-группы A порядка, делящегося на 5, посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \times L$, где $L \cong L_2(7)$, группа $B/O_3(B)$ изоморфна $L_2(7)$ или $PGL_2(7)$, каждый 2-главный фактор группы $\tilde{G}^\infty$ как L-модуль изоморфен одному из двух квазиэквивалентных 3-мерных неприводимых $GF(2)L_2(7)$-модулей, каж-*

дый 5-главный фактор группы $\tilde{G}^{\infty}$ как L-модуль изоморфен либо 3-мерному неприводимому $GF(25)L_2(7)$-модулю, либо 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(5)L_2(7)$-модулю;

(7) $\tilde{G}$ изоморфна расширению нетривиальной нильпотентной $\{2,5\}$-группы A посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \times L$, где группа L изоморфна A_7 или $U_3(3)$ и $|B : F^*(B)| \le 2$ и p-главные факторы группы $\tilde{G}^{\infty}$ как L-модули изоморфны неприводимому 6-мерному $GF(p)L$-модулю для $p \in \{2,5\}$;

(8) $\tilde{G}$ изоморфна расширению нетривиальной нильпотентной $\{2,5\}$-группы A посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \circ L$, где $L \cong 3^{\cdot}A_7$, группа $B/O_3(B)$ изоморфна L или $Aut(L)$, и каждый p-главный фактор группы $\tilde{G}^{\infty}$ для $p \in \{2,5\}$ как L-модуль изоморфен либо точному неприводимому 6-мерному $GF(p^2)L$-модулю, либо неточному неприводимому 6-мерному $GF(p)L$-модулю с ядром порядка 3 (см. п. (6));

(9) $\tilde{G}$ изоморфна расширению нетривиальной 5-группы A посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \circ L$, где $L \cong SU_3(5)$, группа $B/O_3(B)$ изоморфна подгруппе из $Aut(L)$ и каждый 5-главный фактор группы $\tilde{G}^{\infty}$ как L-модуль изоморфен точному неприводимому 3-мерному или 6-мерному $GF(25)L$-модулю;

(10) $\tilde{G}$ изоморфна расширению нетривиальной 2-группы A посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \circ L$, где группа L изоморфна A_8, $S_6(2)$, $3^{\cdot}U_4(3)$ или J_2 и группа $B/O_3(B)$ изоморфна подгруппе из S_8, $S_6(2)$, $U_4(3).2_{2/3}$ или J_2 соответственно, каждый 2-главный фактор группы $\tilde{G}^{\infty}$ как L-модуль изоморфен точному неприводимому 6-мерному L-модулю над полем $GF(2)$ в первых двух случаях и над полем $GF(4)$ — в остальных случаях;

(11) $\tilde{G}$ изоморфна расширению нетривиальной 2-группы A посредством группы B такому, что $F^*(B) = O_3(B) \circ L$, где группа L изоморфна $L_3(4)$ или $SL_3(4)$, группа $B/O_3(B)$ изоморфна подгруппе из $L_3(4).6$ или $L_3(4).3.2_3$ и каждый 2-главный фактор группы $\tilde{G}^{\infty}$ как L-модуль изоморфен либо естественному 3-мерному неприводимому $GF(4)SL_3(4)$-модулю, либо одному из двух квазиэквивалентных неточных неприводимых 9-мерных $GF(2)L$-модулей с ядром порядка 3.

Каждый из п. (1)–(11) теоремы реализуется.

З а м е ч а н и е. Группы наименьших порядков из пунктов (1), (2), (3) теоремы соответственно имеют вид $3 \times (7^4 : 10)$, $3 \times ((2^3 \times 5^6) : 7))$, $3 \times (5^6 : D_{14})$.

1. Вспомогательные результаты

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Предложение 1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [21, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) G — группа Фробениуса;

(2) G — 2-фробениусова группа;

(3) G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \le A \le Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \le s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [1, лемма 4]).

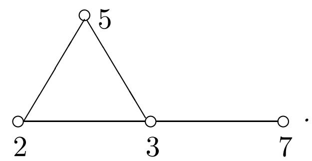
Предложение 1.2. *Пусть G — конечная квазипростая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — точный абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, взаимно простого с $p|Z(G)|$, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Предложение 1.3 [7, лемма 15]. *Пусть q — простое число и G — конечная группа вида $G = P \leftthreetimes (T \leftthreetimes \langle x \rangle)$, где P — нетривиальная группа, T — группа порядка, взаимно простого с $2q|P|$, $|x| = q$ и $C_G(P) = Z(P)$. Если $[T, x] \neq 1$, то $C_P(x) \neq 1$.*

2. Доказательство теоремы

Лемма 2.1. *Граф $\Gamma(A_{10})$ имеет вид*



Доказательство. Утверждение леммы следует из [12].

Лемма 2.2. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и $\Gamma(G)$ есть подграф графа $\Gamma(A_{10})$. Тогда G изоморфна одной из групп A_5, $L_2(7)$, A_6, $L_2(8)$, $U_3(3)$, $U_4(2)$, A_7, A_8, A_9, A_{10}, $L_2(49)$, $L_3(4)$, $U_3(5)$, $U_4(3)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, J_2.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 2.1 и [12; 14; 17; 20]. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Пусть далее G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(A_{10})$. В частности, G является $\{2, 3, 5, 7\}$-группой по лемме 2.1.

Пусть сначала G разрешима, R — 3-дополнение в G и $\pi = \{2, 5\}$. Тогда по лемме 2.1 граф $\Gamma(R)$ несвязен, причем ввиду [15, теорема 6.4.1] имеем $\pi_1(R) = \pi$ и $\pi_2(R) = \{7\}$. Следовательно, по предложению 1.1 подгруппа R — либо группа Фробениуса, либо 2-фробениусова группа.

Пусть R — группа Фробениуса с ядром A и дополнением B.

Предположим, что $7 \in \pi(A)$. Тогда ввиду известных свойств конечных групп Фробениуса A — 7-группа и B — бипримарная π-группа, причем в B силовские 5-подгруппы циклические, а силовские 2-подгруппы циклические или обобщенно кватернионные. Так как элементы порядка 2 и 5 из B не централизуют нееединичные элементы из A, то A — нециклическая абелева 7-группа и, следовательно, $O_{7'}(G) = O_3(G)$. Ввиду [15, теорема 6.3.2] имеем $C_G(A) \leq O_{7',7}(G)$ и $O_{7',7}(G) = O_3(G)A$. Без ограничения общности (см. утверждения (1)–(3) теоремы) будем считать, что $O_3(G) = 1$. Тогда $G = A \leftthreetimes K$, где K — некоторая $7'$-подгруппа в G и $C_G(A) = A$. Можно считать, что $B \leq K$. Пусть T — силовская 2-подгруппа в $O_{2',2}(K)$. Тогда T — нетривиальная циклическая или обобщенно кватернионная 2-группа. По лемме Фраттини $K = O(K)N_K(T)$. По [15, теорема 6.3.2] имеем $C_K(T) \leq O_{2',2}(K)$. Ввиду теоремы Бернсайда [15, теорема 7.4.3] группа $C_K(T)$ имеет нормальное 2-дополнение. Если $N_K(T)/C_K(T)$ является 2-группой, то $K = O(K)T$. Если $N_K(T)/C_K(T)$ не является 2-группой, то $T \cong Q_8$ и фактор-группа $N_K(T)/TC_K(T)$ изоморфна группе порядка 3 или группе S_3, откуда следует, что группа $K/O(K)$ изоморфна $SL_2(3)$ или группе вида $Q_8.S_3$. Таким образом, выполняется утверждение (1) теоремы.

Предположим, что $7 \in \pi(B)$. Тогда A — нильпотентная бипримарная π-группа, а B — циклическая силовская 7-подгруппа в G. Положим $\tilde{G} = G/O_3(G)$ и $K = O_{7'}(G)$. Тогда $1 \neq O_{3'}(\tilde{K}) = O_\pi(\tilde{K}) = F(\tilde{K}) \leq \tilde{A}$, причем $C_{\tilde{K}}(F(\tilde{K})) = Z(F(\tilde{K}))$. Покажем, что группа $\tilde{K}$ является $3'$-замкнутой. Предположим противное. Тогда $O_{3'}(\tilde{K}) < O_{3',3}(\tilde{K}) < O_{3',3,3'}(\tilde{K})$. Пусть $\tilde{T}$ — (нетривиальная) силовская 3-подгруппа в $O_{3',3}(\tilde{K})$. Тогда ввиду [15, теорема 6.3.2] имеем $C_{\tilde{K}}(\tilde{T}) \leq O_{3',3}(\tilde{K})$. По лемме Фраттини $\tilde{G} = O_{3',3}(\tilde{K})N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$, и, следовательно, в $N_{\tilde{G}}(\tilde{T})$ найдется элемент $\tilde{x}$ порядка 7. Применяя предложение 1.3 к группе $O_{3'}(\tilde{K}) \leftthreetimes (\tilde{T} \leftthreetimes \langle x \rangle)$, получаем, что $\tilde{T}$ централизует элемент $\tilde{x}$. Но тогда элемент $\tilde{x}$ действует тождественно на фактор-группе

$\tilde{K}/O_{3',3}(\tilde{K})$ и, значит, централизует элемент порядка 2 или 5 из $\tilde{K}$, что противоречит лемме 2.1. Итак, группа $\tilde{K}$ является $3'$-замкнутой. Ввиду [15, теорема 6.3.2] имеем $C_{\tilde{G}}(B) \leq KB$, откуда следует справедливость утверждения (2) теоремы.

Пусть R — 2-фробениусова группа вида $R = A \rtimes (B \rtimes C)$ (AB и BC — группы Фробениуса). Ясно, что B — циклическая 7-группа и, следовательно, $|C| = 2$ и A — нильпотентная π-группа. Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим справедливость утверждения (3) теоремы.

Пусть далее группа G неразрешима, $S = S(G)$ — ее наибольшая разрешимая нормальная подгруппа и $\overline{G} = G/S$. Ясно, что неабелевы композиционные факторы группы $\overline{G}$ изоморфны некоторым простым группам из заключения леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Если порядок группы S делится на 7, то выполняется утверждение* (4) *теоремы.*

Доказательство. Предположим, что $7 \in \pi(S)$ и $A \in Syl_7(S)$. По лемме Фраттини $G = SN_G(A)$, и, следовательно, нормализатор $N_G(A)$ неразрешим. Так как инволюция из $N_G(A)$ инвертирует подгруппу A, эта подгруппа абелева.

Предположим, что A циклична. Поскольку тогда группа $Aut(A)$ абелева, то $C_G(A)$ — неразрешимая группа, а значит, в $C_G(A)$ есть элемент порядка 2, что невозможно по лемме 2.1.

Итак, A — нециклическая абелева 7-группа и, следовательно, $O_{7'}(S) = O_3(S) = O_3(G)$. Без ограничения общности будем считать, что $O_3(G) = 1$. Тогда $A = O_7(G)$ и $C_G(A) = A$ по [15, теорема 6.3.2]. Ввиду леммы 2.1 в группе G силовские 5-подгруппы циклические, а по теореме Бернсайда [15, теорема 7.4.3] силовские 2-подгруппы обобщенно кватернионные. Ввиду теоремы Брауэра — Судзуки [13] центр группы $G/O(G)$ содержит (единственную) инволюцию z. Порядок же этой группы не делится на 7, поэтому ввиду леммы 2.2 цоколь группы $\overline{G}$ изоморфен A_5 или A_6. Ввиду [16] и [12] группа $G/O(G)\langle z\rangle$ изоморфна $L_2(q)$ или $PGL_2(q)$, где $q \in \{5, 9\}$. Теперь ясно, что группа $F^*(G/O(G))$ изоморфна $SL_2(q)$.

Покажем, что 5 не делит $O(G)$. Предположим противное, и пусть $Q \in Syl_5(O(G))$. Так как Q циклична и, следовательно, $Aut(Q)$ — абелева $\{2, 5\}$-группа, то по теореме Бернсайда [15, теорема 7.4.3] группа Q имеет в S нормальное 5-дополнение R, которое, очевидно, равно $O_{\{3,7\}}(G)$. В фактор-группе $\hat{G} = G/R$ имеем $\hat{Q} = O_5(\hat{G})$, поэтому $F^*(\hat{G}/\hat{Q} \cong F^*(G/O(G)) \cong SL_2(q)$. Пусть K — полный прообраз в $\hat{G}$ подгруппы $F^*(\hat{G}/\hat{Q})$. Тогда $\hat{Q} \leq Z(K)$. Поскольку порядок мультипликатора Шура группы $L_2(q)$ делит 6 (см. [12]), группа K изоморфна группе $Q \times SL_2(q)$. Но тогда силовские 5-подгруппы в G нециклические, что противоречиво.

Итак, 5 не делит $|O(G)|$. Тогда $G = A \rtimes B$, где B — некоторая $7'$-подгруппа в G. Поэтому $O(G) = A \rtimes T$, где $T = O_3(B)$. Возьмем в B элемент x порядка 5. Применяя предложение 1.3 к группе $A \rtimes (T \rtimes \langle x\rangle)$, получаем, что x централизует подгруппу T. Пусть B_0 — полный прообраз в B группы $F^*(B/T)$, изоморфной $SL_2(q)$. Тогда $T < Z(B_0)$ и, следовательно, $B_0 = F^*(B) = T \circ L$, где подгруппа $L := B_0^\infty$ изоморфна $SL_2(q)$ или $6 \cdot A_6$.

Предположим, что $L \cong 6 \cdot A_6$. Тогда на каждом 7-главном факторе V группы AL группа L индуцирует точный неприводимый $GF(7)L$-модуль. Применяя предложение 1.2 к каждому точному неприводимому 7-модулярному характеру Брауэра и элементу порядка 5 группы L (см. [12]), получим, что этот элемент централизует неединичный элемент из V, что противоречит лемме 2.1.

Итак, $F^*(B) = T \times L$, где $L \cong SL_2(q)$ для $q \in \{5, 9\}$. Опять применяя предложение 1.2 к каждому точному неприводимому 7-модулярному характеру Брауэра и элементу порядка 5 группы L (см. [12]), находим, что единственными (с точностью до изоморфизма) точными абсолютно неприводимыми L-модулями над полем характеристики 7, на которых элемент порядка 5 из L действует свободно, являются два 2-мерных модуля с полем определения $GF(49)$ при $q = 5$ и два 4-мерных квазиэквивалентных модуля с полем определения $GF(7)$ при $q = 9$. Следовательно, выполнено утверждение (4) теоремы.

Лемма доказана.

Пусть далее порядок группы S не делится на 7.

Лемма 2.4. *Группа $\overline{G}$ почти проста, и порядок ее цоколя делится на* 7.

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа в $\overline{G}$. Тогда $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, где $M_1, \ldots, M_n$ — изоморфные неабелевы простые группы.

Предположим, что $n > 1$. Тогда $7 \notin \pi(M)$ по лемме 2.1, откуда по лемме 2.2 подгруппа M_1 изоморфна A_5, A_6 или $U_4(2)$.

По лемме 2.3 имеем $7 \notin \pi(S)$, и, следовательно, $7 \in \pi(\overline{G}/M)$. Пусть x — элемент порядка 7 в $\overline{G}$. Так как группа $N_{\overline{G}}(M_1)/C_{\overline{G}}(M_1)$ изоморфна подгруппе $7'$-группы $Aut(M_1)$, то если элемент x нормализует M_1, то он централизует M_1 и, следовательно, $21 \in \omega(\overline{G})$, что противоречит лемме 2.1. Поэтому подгруппа $K := \langle M_1, x\rangle$ изоморфна сплетению группы M_1 с группой $\langle x\rangle$, и, следовательно, $C_{K'}(x) \cong M_1$, откуда опять $21 \in \omega(G)$, что противоречиво.

Итак, $n = 1$, т.е. M проста. Если в $\overline{G}$ найдется отличная от M минимальная нормальная подгруппа N, то по доказанному выше N проста и централизует M. Теперь, рассуждая, как выше, приходим к противоречию.

Итак, M есть простой цоколь группы $\overline{G}$, т.е. $\overline{G}$ почти проста. Второе утверждение леммы следует из лемм 2.2 и 2.3 и [12].

Лемма доказана.

Пусть далее $M := Soc(\overline{G})$.

Лемма 2.5. *Если $S = O_3(G)$, то выполняется утверждение* (5) *теоремы, причем каждый его случай реализуется.*

Доказательство. Пусть $S = O_3(G)$. Из лемм 2.2 и 2.4 следует, что M изоморфна одной из групп A_7, A_8, A_9, A_{10}, $L_2(49)$, $L_3(4)$, $U_3(5)$, $U_4(3)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, J_2.

Предположим, что $M \cong L_2(49)$. Тогда $Out(M) \cong 2^2$. Пусть $M.2_1$, $M.2_2$ и $M.2_3$ обозначают расширения группы M посредством внешнего диагонального, полевого и диагонально-полевого автоморфизма соответственно. Тогда легко проверить следующее: в $M.2_1$ есть элемент порядка 10, но нет элемента порядка 14; в $M.2_2$ есть элемент порядка 14, но нет элемента порядка 10; в $M.2_3$ нет элемента порядка 10 (и 14). Поэтому ввиду леммы 2.1 получаем, что $\overline{G} \cong M.2_1 \cong PGL_2(49)$.

Используя [12], легко проверить, что если $\overline{G} \in \{A_7, A_8, L_3(4), L_3(4).2_1, U_4(3)\}$, то $10 \notin \omega(G)$; если $\overline{G} \in \{S_8, S_9, S_{10}, L_3(4).2_2, U_4(3).2_1, U_4(3).4, O_8^+(2).2, J_2.2\}$, то $14 \in \omega(G)$; если $\overline{G} \in \{S_7, S_8, A_9, A_{10}, PGL_2(49), L_3(4) : 2_3, L_3(4).3.2_3, U_3(5), U_3(5) : 2, U_3(5) : 3, U_3(5) : S_3, S_6(2), O_8^+(2), O_8^+(2) : 3, J_2\}$, то $\Gamma(G) = \Gamma(3 \times \overline{G}) = \Gamma(A_{10})$.

Лемма доказана.

Лемма 2.6. (1) *Если $M \cong L_2(49)$, то $S = O_3(G) \neq 1$.*

(2) *Если группа M изоморфна одной из групп $L_2(8)$, A_8, A_9, A_{10}, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, J_2, то порядок группы S не делится на* 5. *В частности, группа M не изоморфна $L_2(8)$.*

Доказательство. Пусть $M \cong L_2(49)$. Тогда G содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 7^2. Поэтому, если $S \neq O_3(G)$, то S содержит элемент порядка 2 или 5 и, следовательно, G содержит элемент порядка 14 или 35, что противоречит лемме 2.1. Таким образом, $S = O_3(G)$. По лемме 2.5 $\overline{G} \cong PGL_2(49)$. Если $S = 1$, то в G нет элементов порядка 10, что противоречиво. Пункт (1) леммы доказан.

Пусть группа M изоморфна одной из групп $L_2(8)$, A_8, A_9, A_{10}, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, J_2, и порядок группы S делится на 5. По [12] группа M содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса вида $2^3 : 7$. Через R обозначим 3-дополнение в полном прообразе в G этой подгруппы. По лемме 2.3 имеем $|R|_7 = 7$, и, следовательно, по доказанному выше R — группа Фробениуса с ядром $F(R) = O_2(R) \times O_5(R)$ и дополнением порядка 7. Поскольку $O_5(R)$ является силовской 5-подгруппой в S, то ввиду леммы Фраттини $G = SN_G(O_5(R))$. Но $C_G(O_5(R))$ — нетривиальная нормальная подгруппа в почти простой группе $\overline{G}$, поэтому $\overline{C_G(O_5(R))}$ содержит M. Но тогда $O_5(R)$ централизует элемент порядка 7 из G, что противоречит лемме 2.1. Пункт (2) леммы доказан.

Лемма доказана.

Ввиду леммы 2.5 будем предполагать далее, что $\pi(S)$ содержит число из $\{2, 5\}$. Пусть H — полный прообраз в G подгруппы порядка 7 из M и R — 3-дополнение в H. Тогда $|R|_7 = 7$ и H — разрешимая группа. Рассуждая, как выше при доказательстве утверждения (2) теоремы, получим, что R — группа Фробениуса вида $F(R) : 7$, где $1 \neq F(R) = R \cap S = O_2(R) \times O_5(R)$, причем $F(R)O_3(G)/O_3(G)$ — нормальное 3-дополнение в $S/O_3(G)$ и $O_3(G)F(R) = O_{3,3'}(S)$. Поэтому $N_H(F(R)) = F(R) \leftthreetimes L$, где $L = O_3(L) \leftthreetimes \langle x \rangle$, $S = O_3(G)F(R)O_3(L)$ и x — некоторый элемент порядка 7 из $N_H(F(R))$. Ввиду [15, теорема 6.3.2] имеем $C_H(F(R)) = Z(F(R))$. Если $[O_3(L), x] \neq 1$, то $C_{F(R)}(x) \neq 1$ по предложению 1.3, что противоречит лемме 2.1. Поэтому $O_3(L)$ централизует элемент x.

Без ограничения общности будем считать далее, что $O_3(G) = 1$. Положим $A = F(R)$ и $B = G/A$. Тогда из доказанного в предыдущем абзаце следует, что $A = F(S) = F(G)$, $S(B) = O_3(B)$, $B/O_3(B) \cong \overline{G}$ и $F^*(B) = O_3(B) \circ L$, где группа $L = B^\infty$ изоморфна накрывающей группе для M, причем $Z(L)$ является 3-группой.

Ввиду лемм 2.2–2.6 и [12] квазипростая группа L изоморфна одной из следующих групп: $L_2(7)$, $U_3(3)$, A_7, $3^{\cdot}A_7$, A_8, A_9, A_{10}, $L_3(4)$, $SL_3(4)$, $U_3(5)$, $SU_3(5)$, $U_4(3)$, $3^{\cdot}U_4(3)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, J_2.

Лемма 2.7. *Если $Z(L) = 1$, то выполняется одно из утверждений* (6), (7), (10), (11) *теоремы.*

Доказательство. Пусть $Z(L) = 1$. Тогда простая группа L действует на A так, что $C_A(x) = 1$ для элемента x порядка 7 из L. Учитывая лемму 2.6 и применяя предложение 1.2 и таблицы 2-модулярных и 5-модулярных характеров Брауэра группы L из [10; 12], получим утверждение леммы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда группа L изоморфна $L_2(7)$. Тогда 5 делит $|A|$. Пусть $p \in \{2, 5\}$. Согласно предложению 1.2 и таблице p-модулярных характеров Брауэра группы L из [12] при $p = 5$ и из [10] при $p = 2$ существуют только следующие абсолютно неприводимые L-модули над полем характеристики p, на которые элемент x действует свободно: два 3-мерных модуля с полем определения $GF(5)(\sqrt{-7}) = GF(5^2)$ и один 6-мерный с полем определения $GF(5)$ при $p = 5$ и два квазиэквивалентных 3-мерных модуля с полем определения $GF(2)$ при $p = 2$. Поскольку два неизоморфных 3-мерных абсолютно неприводимых $GF(5^2)L$-модуля алгебраически сопряжены, то по [18, теорема VII.1.16] этим модулям соответствует 6-мерный неприводимый, но не абсолютно неприводимый $GF(5)L$-модуль (он изоморфен 3-мерному $GF(5^2)L$-модулю, рассматриваемому над полем $GF(5)$). Ясно, что группа $B/O_3(B)$ изоморфна $L_2(7)$ или $PGL_2(7) \cong Aut(L_2(7))$. Поэтому выполняется утверждение (6) теоремы.

Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Если $Z(L) \neq 1$, то выполняется одно из утверждений* (8)–(11) *теоремы.*

Доказательство. Пусть $Z(L) \neq 1$.Тогда квазипростая группа L действует точно на A так, что $C_A(x) = 1$ для элемента x порядка 7 из L. Учитывая лемму 2.7 и применяя предложение 1.2 и таблицы 2-модулярных и 5-модулярных характеров Брауэра группы L из [10], получим утверждение леммы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда группа L изоморфна $SL_3(4)$. Пусть $p \in \{2, 5\}$. Ввиду предложения 1.2 и таблиц p-модулярных характеров Брауэра группы L из [10] существуют только следующие абсолютно неприводимые L-модули над полем характеристики p, на которые элемент x действует свободно: два точных 3-мерных модуля с полем определения $GF(4)$ и два неточных квазиэквивалентных 9-мерных модуля с ядром порядка 3 и полем определения $GF(2)$, причем $p = 2$. Поскольку два неизоморфных 3-мерных абсолютно неприводимых $GF(4)L$-модуля алгебраически сопряжены, то по [18, теорема VII.1.16] этим модулям соответствует 6-мерный неприводимый, но не абсолютно неприводимый $GF(2)L$-модуль (он изоморфен естественному 3-мерному $GF(4)L$-модулю, рассматриваемому над полем $GF(2)$). Поскольку $F^*(B) = O_3(B) \circ L$, группа $B/O_3(B)$ изоморфна подгруппе из $Aut(L_3(4))$, граф простых чисел которой является подграфом в $\Gamma(G)$. Вычисляя $\Gamma(B/O_3(B))$ посредством [10] с учетом лемм 2.1 и 2.5, получим, что группа $B/O_3(B)$ изоморфна подгруппе из $L_3(4).6$ или $L_3(4).3.2_3$. Поэтому выполняется утверждение (11) теоремы.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** $C55$-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
2. **Кондратьев А.С.** Конечные группы с графом простых чисел как у группы $Aut(J_2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 131–138.
3. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
4. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
5. **Мазуров В.Д.** Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
6. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
7. **Мазуров В.Д., Хухро Е.И.** О группах, допускающих группу автоморфизмов, ранг централизатора которой ограничен // Сиб. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 257–283.
8. **Старолетов А.М.** О неразрешимости групп, изоспектральных знакопеременной группе степени 10 // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 20–24.
9. **Старолетов А.М.** Группы, изоспектральные знакопеременной группе степени 10 // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 638–648.
10. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
11. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
12. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
13. **Brauer R., Suzuki M.** On finite groups of even order whose 2-Sylow subgroup is quaternion group // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. Vol. 45, no. 12. P. 1757–1759.
14. **Bugeaud Y., Cao Z., Mignotte M.** On simple K_4-groups // J. Algebra. 2001. Vol. 241, no. 2. P. 658–668.
15. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968. 528 p.
16. **Gorenstein D., Walter J.H.** A characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups // I. J. Algebra. 1965. Vol. 2, no. 1. P. 85–151; II. J. Algebra. 1965. Vol. 2, no. 2. P. 218–270; III. J. Algebra. 1965. Vol. 2, no. 3. P. 354–393; Errata. J. Algebra. 1969. Vol. 11, no. 2. P. 315–318.
17. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10, no. 3. P. 383–388.
18. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups II. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
19. **Moghaddamfar A.R., Zokayi A.R.** OD-characterization of certain finite groups having connected prime graphs // Algebra Colloq. 2010. Vol. 17, no. 1. P. 121–130.
20. **Shi W.J.** On simple K_4-groups // Chinese Science Bull. 1991. Vol. 36 (17). P. 1281–1283.
21. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 03.05.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 004.932

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА СТРУКТУРНЫХ РАЗЛИЧИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ[1]

Ф. А. Корнилов

В работе рассматривается методика построения распределения яркости результирующего изображения для алгоритма поиска структурных различий изображений на основе морфологического проектора в случае возмущения входных изображений аддитивным шумом. Определяются формула оптимального порога и оценки ошибок первого и второго рода результатов работы алгоритма для нее. Приводятся результаты применения полученной методики и их сравнение с результатами численного эксперимента.

Ключевые слова: обработка изображений, структурные различия, математическая морфология.

F. A. Kornilov. Investigation of an algorithm for finding structural difference of images.

We consider a technique for the construction of brightness distribution of a resulting image for the algorithm of finding structural differences based on a morphological image projector in the case when input images are disturbed by an additive noise. An optimal threshold formula is derived, and estimates for errors of the first and second kind are found for the algorithm. The results of applying the technique are presented and compared with the results of a numerical experiment.

Keywords: image processing, structural differences, mathematical morphology.

1. Введение

Автоматический анализ данных дистанционного зондирования, в частности космических снимков в оптическом диапазоне, является важной проблемой при решении многих практических задач [1–3]. Необходимость своевременного обновления топографических карт с наименьшими затратами делает крайне актуальной задачу поиска структурных различий на разновременных снимках одного и того же участка земной поверхности. В неформальном, содержательном смысле структурные различия — это существенные изменения местности, при которых объекты интереса появляются, исчезают или изменяют свою форму. При этом изменения освещенности и цвета объектов структурными различиями не считаются. Примером подобной задачи может служить мониторинг сельскохозяйственных земель.

В работах [4; 5] развиты методы, инвариантные относительно преобразований, характеризующих влияние условий регистрации изображений. В работе [6] приведено обобщение морфологического подхода в задачах обработки изображений, основанное на построении и оптимизации априорных критериев (функционалов) проектирования, учитывающих специфику решаемой задачи (в отличии от подхода [4; 5], опирающегося только на алгебраические свойства оператора проектирования). Формализация понятия структурного возмущения и вопрос устойчивости алгоритмов к нему рассмотрены в [7; 8].

В данной работе представлено исследование предложенного в [9] алгоритма поиска структурных различий, построенного на основе морфологического проектора Ю.П. Пытьева с целью оценки его оптимального параметра T пороговой обработки.

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН при финансовой поддержке УрО РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 12-П-1-1022) и “Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы” (проект 12-П-1-1023).

2. Описание алгоритма и основные обозначения

Пусть множество пикселей X (поле зрения) — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, $S = |X|$ (количество пикселей) будем называть *размером* (или *площадью*) изображения. Под *изображением* f будем понимать функцию $f\colon X \to \mathbb{R}$, а семейством допустимых изображений будем называть конечномерное евклидово пространство Φ таких функций f, наделенное естественным скалярным произведением $(f, g) = \sum\limits_X f(x)g(x)$. Значение $f(x)$ будем называть *яркостью* изображения f в точке $x \in X$.

Определим класс $\mathfrak{F}$ функций преобразования яркости следующим образом. Для $f \in \Phi$ и $F \in \mathfrak{F}$ выполняются условия: 1) $F \circ f \in \Phi$; 2) если $f(x_1) = f(x_2)$, то $(F \circ f)(x_1) = (F \circ f)(x_2)$ (т. е. F не может разбивать уровни яркости). Здесь $F \circ f$ означает суперпозицию: $(F \circ f)(x) = F(f(x))$.

Центральным понятием морфологического анализа изображений Ю.П. Пытьева является *форма изображения* f, которую можно определить как оператор P_f в пространстве Φ на множество $V(f) = \{F \circ f \mid F \in \mathfrak{F}\}$. Как показано в [4; 5], этот оператор является оператором проектирования и его формула такова:

$$P_f g(x) = \sum_i \frac{\sum\limits_{x' \in X} g(x') \cdot \chi_i^f(x')}{\sum\limits_{x' \in X} \chi_i^f(x')} \chi_i^f(x), \qquad \text{где } \chi_i^f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) = i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1}$$

где суммирование по i производится по всем значениям функции f. С содержательной точки проектор работает следующим образом: он усредняет яркости второго изображения g по уровням яркости первого f.

Рассмотрим алгоритм поиска структурных различий, основанный на морфологическом проекторе. Этот алгоритм подробно описан в [9]. Дадим здесь его краткое описание. Алгоритм получает на вход пару изображений одинакового размера и состоит из трех шагов. Первый шаг — построение проекции $P_f g$ второго изображения g на форму первого изображения $V(f)$ и проекции $P_g f$ первого изображения f на форму второго изображения $V(g)$. Второй шаг — построение разностных изображений $R_{fg} = |P_f g - g|$ и $R_{gf} = |P_g f - f|$, после чего строится результирующее изображение $R = \max(R_{fg}, R_{gf})$ (все операции понимаются в поточечном смысле). Третий шаг — пороговая обработка изображения R, параметр порога будем обозначать T. В качестве результатов пороговой обработки можно рассматривать следующие два случая.

1. Если значение функции R в некоторой зафиксированной точке x_c превосходит заданный порог, то будем говорить, что в этой точке обнаружено структурное различие. В этом случае можно говорить о *локализации* структурного различия в точке x_c.

2. Если количество точек, в которых обнаружено структурное различие, больше некоторого заданного значения, то будем считать, что структура входных изображений различна. В этом случае можно говорить об *обнаружении структурного* различия этих изображений в целом.

Выбор способа интерпретации зависит от конкретных требований практического применения алгоритма.

Структурой изображения f называется семейство $\pounds_f = \{L_f(i)\}_i$ множеств уровня $L_f(i) = \{x \in X \mid f(x) = i\}$ функции f. Введем на пространстве изображений Φ отношение частичного порядка. Для произвольных $f, g \in \Phi$ будем говорить, что структура изображения f не сложнее структуры изображения g, и писать $\pounds_f \preceq \pounds_g$, если для каждого значения i функции f найдется разбиение $L_f(i) = \bigcup_{j=1}^n L_g(i_j)$, $n \geq 1$, причем $i_k \neq i_l$ $\forall k, l \in [1, n]$. Если говорить неформально, то на изображении g сохранены все границы изображения f, но к ним, возможно, добавлены новые. Очевидно, что $|\pounds_f| \leq |\pounds_g|$ (здесь $|\cdot|$ — мощность множества).

Следующее утверждение устанавливает связь между понятием структуры изображения, удобным для теоретических исследований, и оператором морфологического проектирования, позволяющим строить практические алгоритмы.

Утверждение 1. *$\pounds_f \preceq \pounds_g$ тогда и только тогда, когда $f = P_g f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии $|\pounds_f| = |\pounds_g|$, включающем в себя случай $f = g$, справедливость утверждения очевидна. Ниже полагаем $|\pounds_f| \neq |\pounds_g|$.

1. Пусть $\pounds_f \preceq \pounds_g$. Покажем, что для произвольного $x_0 \in X$ выполняется равенство $f(x_0) = P_g f(x_0)$. Введем обозначения $f_0 = f(x_0)$ и $g_0 = g(x_0)$. По формуле (1)

$$P_g f(x_0) = \sum_i \frac{\sum\limits_{x' \in X} f(x') \cdot \chi_i^g(x')}{\sum\limits_{x' \in X} \chi_i^g(x')} \chi_i^g(x_0) = \frac{1}{|L_g(g_0)|} \sum_{x' \in L_g(g_0)} f(x')$$

По условию $L_g(g_0) \subset L_f(f_0)$, поэтому $\forall x' \in L_g(g_0)$ $f(x') = f_0$ и

$$P_g f(x_0) = \frac{1}{|L_g(g_0)|} \sum_{x' \in L_g(g_0)} f_0 = f_0 = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

2. Покажем, что равенство $f = P_g f$ влечет $\pounds_f \preceq \pounds_g$. Допустим, что это не так и найдется значение j такое, что $L_g(j) \cap L_f(i_1) \neq \varnothing$ и $L_g(j) \cap L_f(i_2) \neq \varnothing$ для некоторых значений i_1, i_2 функции f. Пусть $x_1 = L_g(j) \cap L_f(i_1)$ и $x_2 = L_g(j) \cap L_f(i_2)$, т. е. $f(x_1) = i_1 \neq i_2 = f(x_2)$ и $g(x_1) = g(x_2) = j$. Согласно определению оператора P_g

$$P_g f(x_1) = \frac{1}{|L_g(j)|} \sum_{x' \in L_g(j)} f(x') = P_g f(x_2),$$

следовательно, $f(x_1) = P_g f(x_1) = P_g f(x_2) = f(x_2)$, что противоречит выбору точек x_1 и x_2. Найденное противоречие завершает доказательство.

Утверждение доказано.

Благодаря этому утверждению можно разбить все возможные варианты соотношения структур исходных изображений на следующие три случая.

1. Изображения f и g независимы: $\pounds_f \npreceq \pounds_g$ и $\pounds_g \npreceq \pounds_f$. Тогда $f \neq P_g f$ и $g \neq P_f g$. В этом случае будем говорить, что структура этих изображений различна, т. е. обнаружено структурное различие изображений в целом.

2. Изображения f и g изоморфны: $\pounds_f \preceq \pounds_g$ и $\pounds_g \preceq \pounds_f$. Тогда $f = P_g f$ и $g = P_f g$. В этом случае будем говорить, что изображения имеют одинаковую структуру, т. е. структурных различий нет.

3. Для изображений f и g выполнено либо $\pounds_f \preceq \pounds_g$ и $\pounds_g \npreceq \pounds_f$, либо $\pounds_f \npreceq \pounds_g$ и $\pounds_g \preceq \pounds_f$. Поскольку эти случаи симметричны, то, не нарушая общности, далее везде будем считать, что выполняются условия $\pounds_f \preceq \pounds_g$ и $\pounds_g \npreceq \pounds_f$ ($f = P_g f$ и $g \neq P_f g$). В отличии от случаев независимых и изоморфных изображений здесь можно говорить не только об обнаружении структурного различия, но и о его локализации, т. е. об определении наличия или отсутствия структурного различия в произвольной зафиксированной точке x_c. Для исследования этого случая рассмотрим следующую математическую модель структурного различия и задачу локализации такого различия.

3. Постановка задачи

Пусть дана пара изображений f^0, $g^0 \in \Phi$. Первое изображение f^0 (будем называть его фоном) содержит N_f уровней яркости. Значение яркости i-го уровня обозначим f_i^0, площадь уровня — $S_i = |L_{f^0}(f_i^0)|$ ($i \in [1, N_f]$). Изображение g^0 строится путем добавления к i-ому уровню объекта, состоящего из N_g^i уровней яркости. Значение яркостей уровней разбиения $j \in [0, N_g^i]$ обозначим $g_{i,j}^0$, $S_{i,j} = |L_{g^0}(g_{i,j}^0)|$, $S_i = \sum_{j=0}^{N_g^i} S_{i,j}$ (индексы j от 1 до N_g^i соответствуют объекту, 0 — фону). Таким образом, $L_{f^0}(f_i^0) = \bigcup_{j=0}^{N_g^i} L_{g^0}(g_{i,j}^0)$, $i \in [1, N_f]$. Чтобы избежать краевых эффектов, добавим условие, что площадь добавленного объекта много меньше площади фона. Таким образом, изображение g состоит из $N_f + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_g^i} N_g^j$ уровней яркости, где первое слагаемое соответствует количеству значений функции f^0, второе слагаемое соответствует добавленному объекту. Будем считать, что *в данной точке есть структурное различие*, если эта точка принадлежит объекту. Для моделирования реальной ситуации в задаче поиска структурных различий к каждому изображению добавляем дискретный, стационарный и независимый в каждой точке аддитивный шум с известными параметрами: для первого изображения — n_η, для второго — n_ξ (η и ξ — плотности). Обозначим $f = f^0 + n_\eta$ и $g = g^0 + n_\xi$. В результате имеем два семейства случайных величин $\{f(x_i)\}_{i=1}^S$ и $\{g(x_i)\}_{i=1}^S$ (два случайных поля), которые можно интерпретировать как модели случайных изображений, к которым будем применять алгоритм поиска структурных различий на основе морфологического проектора Пытьева.

Такая модельная ситуация достаточно точно отражает возникновение реальных структурных различий, связанных с появлением или исчезновением некоторых объектов (например, домов), и потому представляет определенный практический интерес.

Поскольку изображения f и g — случайные поля, то значение разностного изображения $R(x_c)$ в точке $x_c \in X$ также является величиной случайной. Нашей основной задачей будет построение способа ее вычисления. Решение этой задачи позволит определить оптимальное значение порога для алгоритма и оценки ошибок для него. В качестве критерия оптимальности будем использовать минимум суммы вероятностей двух событий — пропуска структурного различия и ложного обнаружения различия (ошибки первого и второго рода).

Однако значения случайной величины $R(x_c)$ существенно зависит от того, есть структурное различие в точке x_c или его нет, поэтому необходимо рассматривать соответствующие два условных распределения.

У с л о в и е 1: точка x_c принадлежит объекту, т. е. в этой точке есть структурное различие.

У с л о в и е 2: точка x_c принадлежит фону, т. е. структурного различия в этой точке нет.

Распределение вероятности $r(R(x_c) \mid x_c$ принадлежит объекту$)$ обозначим $r^+(R)$. Второе распределение $r(R(x_c) \mid x_c$ принадлежит фону$)$ обозначим $r^-(R)$.

З а д а ч а 1. Получить условные распределения вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$ величины $R(x_c)$ для модельной задачи. Решение представлено в теоремах 1 и 2.

Для простоты изложения удобно свести решение этой задачи к решению последовательности более простых задач с нарастающей сложностью модели изображения g.

З а д а ч а 1.1. Получить распределения вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$ для модельной задачи с параметрами $N_f = 1$, $N_g^1 = 1$. Решение представлено в лемме 1 и теореме 2.

З а д а ч а 1.2. Получить распределения вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$ для модельной задачи с параметрами $N_f = 1$, $N_g^1 = 2$. Решение представлено в лемме 2 и теореме 2.

З а д а ч а 1.3. Получить распределения вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$ для модельной задачи с параметрами $N_f = 1$, $N_g^1 \geq 1$. Решение представлено в лемме 3 и теореме 2.

Случай $N_f \geq 1$, $N_g^1 \geq 1$ соответствует задаче 1, решение которой позволит определить важный для практических приложений способ вычисления оптимального порога алгоритма поиска структурных различий.

4. Исследование алгоритма

Поскольку алгоритм поиска структурных различий оценивает только одну зафиксированную точку $x_c \in X$, то при использовании морфологического проектора важно только множество $L_f(f(x_c))$, которому эта точка принадлежит. Пусть $k = |L_f(f(x_c))|$. Очевидно, что $k \in [1, S]$. Введем обозначение $L_f^{i,j}(f(x_c)) = \{x \in L_f(f(x_c)) \mid f^0(x) = f_i^0 \text{ и } g^0(x) = g_{i,j}^0\}$. Заметим, что

$$|L_f^{i,j}(f(x_c))| \leq S_{i,j}. \tag{2}$$

По построению $L_f^{i,j}(f(x_c)) \subset L_f(f(x_c))$ и $L_f(f(x_c)) = \bigcup_{i,j(i)} L_f^{i,j}(f(x_c))$.

Далее везде будем обозначать через $B(n, m, p)$ биномиальное распределение вероятностей: вероятность появления события ровно n раз в серии из m испытаний при условии, что в единичном испытании вероятность его появления равна p [10]. Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть дано случайное поле f.*

1. *В задаче* 1.1 *при условии* 1 *вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{1,1}(f(x_c))| = a_1 + 1$ и $|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0$, определяется по формуле*

$$p_{k,a}^1 = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot B(a_1, S_{1,1} - 1, p(f = i)) \cdot B(a_0, S_{1,0}, p(f = i))\Big),$$

где $a = (a_0, a_1)$, $a_0 = k - a_1 - 1$, $a_1 \in [\max\{0, k - 1 - S_{1,0}\}, \min\{k - 1, S_{1,1} - 1\}]$.

2. *В задаче* 1.1 *при условии* 2 *вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{1,1}(f(x_c))| = a_1$ и $|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0 + 1$, определяется по формуле*

$$p_{k,a}^0 = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot B(a_1, S_{1,1}, p(f = i)) \cdot B(a_0, S_{1,0} - 1, p(f = i))\Big),$$

где $a = (a_0, a_1)$, $a_0 = k - a_1 - 1$, $a_1 \in [\max(0, k - S_{1,0}), \min(k - 1, S_{1,1})]$.

Доказательство. 1. Элементы множества $L_f(f(x_c))$ можно разделить на три группы: $L_f(f(x_c)) = \{x_c\} \cup \{L_f^{1,1}(f(x_c)) \setminus \{x_c\}\} \cup L_f^{1,0}(f(x_c))$. Пусть $|L_f^{1,1}(f(x_c)) \setminus \{x_c\}| = a_1$ и $|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0$. Таким образом, с учетом (2) должна выполняться следующая система:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 = k - 1, \\ 0 \leq a_0 \leq S_{1,0}, \\ 0 \leq a_1 \leq S_{1,1} - 1. \end{array}\right\}$$

Ограничения можно переписать в следующем виде: $a_1 \in [\max\{0, k - 1 - S_{1,0}\}, \min\{k - 1, S_{1,1} - 1\}]$, $a_0 = k - a_1 - 1$.

Занумеруем все точки поля зрения, кроме x_c, числами от 1 до $S-1$: $x_1, x_2, \ldots, x_{S-1}$, причем множество $L_f(f(x_c)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_c\}$. Зафиксируем элементарное событие i (исход для случайной величины $f(x_j)$). Далее вычислим вероятность появления реализации поля f с таким множеством $L_f(f(x_c))$. Учитывая, что случайные величины $f(x_j)$ независимы, получим

$$p_{k,a}^{(1)} = p(f(x_c) = i) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} p(f(x_j) = i) \cdot \prod_{j=k}^{S-1} p(f(x_j) \neq i).$$

Выбирая элементы $L_f(f(x_c))$, мы не могли распоряжаться только зафиксированной точкой x_c. Набор остальных $k-1$ элементов можно выбрать C_{S-1}^{k-1} различными способами. Поэтому можно определить вероятность появления такой реализации поля f, для которой множество $L_f(f(x_c))$ состоит из произвольных $k-1$ элементов и точки x_c, причем $\forall x \in L_f(f(x_c))\ f(x) = i$:

$$p^{(2)}_{k,a} = p(f(x_c) = i) \cdot C^{k-1}_{S-1} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} p(f(x_j) = i) \cdot \prod_{j=k}^{S-1} p(f(x_j) \neq i).$$

По условию случайные величины $f(x_j) = f^0(x_j) + n_\eta(x_j)$ распределены одинаково для всех x_j (включая x_c), поэтому нумерация x_j не важна. Имеем

$$p^{(2)}_{k,a} = p(f = i) \cdot C^{k-1}_{S-1} \cdot p^{k-1}(f = i) \cdot p^{S-k}(f \neq i).$$

Чтобы получить вероятность появления реализации f, для которой множество $L_f(f(x_c))$ состоит из произвольных $k-1$ элементов и зафиксированной точки x_c, нужно просуммировать вероятности $p^{(2)}_{k,a}$ по всем возможным исходам i:

$$p^{(3)}_{k,a} = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot C^{k-1}_{S-1} \cdot p^{k-1}(f = i) \cdot p^{S-k}(f \neq i)\Big).$$

Теперь уточним способ выбора $k-1$ элемента из $S-1$ точек множества X. Выбирая эти $k-1$ элементы, мы должны разделить их на два подмножества: $L^{1,1}_f(f(x_c)) \setminus \{x_c\}$ и $L^{1,0}_f(f(x_c))$, т. е. выбираем a_1 элементов из $S_{1,1}-1$ точек и a_0 элементов из $S_{1,0}$ точек. Таким образом, вместо C^{k-1}_{S-1} способов будет $C^{a_1}_{S_{1,1}-1} \cdot C^{a_0}_{S_{1,0}}$ способ выбора элементов множества $L_f(f(x_c))$:

$$p^{(4)}_{k,a} = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot C^{a_1}_{S_{1,1}-1} \cdot C^{a_0}_{S_{1,0}} \cdot p^{k-1}(f = i) \cdot p^{S-k}(f \neq i)\Big).$$

Применяя преобразования

$$p^{S-k}(f \neq i) = p^{(S_{1,0}+S_{1,1})-(1+a_0+a_1)}(f \neq i) = p^{(S_{1,1}-1)-a_1}(f \neq i) \cdot p^{S_{1,0}-a_0}(f \neq i),$$

получим

$$p^{(4)}_{k,a} = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot C^{a_1}_{S_{1,1}-1} \cdot p^{a_1}(f = i) \cdot p^{(S_{1,1}-1)-a_1}(f \neq i) \cdot C^{a_0}_{S_{1,0}} \cdot p^{a_0}(f = i) \cdot p^{S_{1,0}-a_0}(f \neq i)\Big).$$

Далее, учитывая, что $p(f \neq i) = 1 - p(f = i)$ и $C^x_m \cdot p^x \cdot (1-p)^{m-x} = B(x, m, p)$ — биномиальное распределение вероятностей, получаем итоговую формулу

$$p^1_{k,a} = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot B(a_1, S_{1,1} - 1, p(f = i)) \cdot B(a_0, S_{1,0}, p(f = i))\Big).$$

2. Доказательство аналогично доказательству п. 1.

Лемма доказана.

Теперь перейдем к более сложной задаче, когда добавленный объект состоит из двух уровней яркости. Введем обозначение $a = (a_0, a_1, a_2)$.

Лемма 2. *Пусть дано случайное поле f.*

1. *В задаче 1.2 при выполнении условий 1 и $x_c \in L^{1,1}_f(f(x_c))$ вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L^{1,1}_f(f(x_c))| = a_1 + 1$, $|L^{1,2}_f(f(x_c))| = a_2$ и $|L^{1,0}_f(f(x_c))| = a_0$, определяется как*

$$p^1_{k,a} = \sum_i \Big(p(f = i) \cdot B(a_1, S_{1,1} - 1, p(f = i)) \cdot B(a_2, S_{1,2}, p(f = i)) \cdot B(a_0, S_{1,0}, p(f = i))\Big),$$

где

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1+a_2=k-1,\\ 0\le a_0\le S_{1,0},\\ 0\le a_1\le S_{1,1}-1,\\ 0\le a_2\le S_{1,2}. \end{array}\right\}$$

Если же $x_c \in L_f^{1,2}(f(x_c))$, *то* $|L_f^{1,1}(f(x_c))| = a_1$, $|L_f^{1,2}(f(x_c))| = a_2+1$, $|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0$ *и эта вероятность определяется по формуле*

$$p_{k,a}^2 = \sum_i \Big(p(f=i)\cdot B(a_1, S_{1,1}, p(f=i))\cdot B(a_2, S_{1,2}-1, p(f=i))\cdot B(a_0, S_{1,0}, p(f=i))\Big),$$

где

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1+a_2=k-1,\\ 0\le a_0\le S_{1,0},\\ 0\le a_1\le S_{1,1},\\ 0\le a_2\le S_{1,2}-1. \end{array}\right\}$$

2. *В задаче* 1.2 *при условии* 2 *вероятность появления реализации поля* f *такой, что* $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{1,1}(f(x_c))| = a_1$, $|L_f^{1,2}(f(x_c))| = a_2$ *и* $|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0+1$, *определяется как*

$$p_{k,a}^0 = \sum_i \Big(p(f=i)\cdot B(a_1, S_{1,1}, p(f=i))\cdot B(a_2, S_{1,2}, p(f=i))\cdot B(a_0, S_{1,0}-1, p(f=i))\Big),$$

где

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1+a_2=k-1,\\ 0\le a_0\le S_{1,0}-1,\\ 0\le a_1\le S_{1,1},\\ 0\le a_2\le S_{1,2}. \end{array}\right\}$$

Доказательство. Как и в лемме 1, разобьем все возможные реализации поля f на классы в зависимости от принадлежности зафиксированной точки x_c определенному подмножеству $L_f(f(x_c))$: $L_f^{1,0}(f(x_c))$ (вероятность $p_{k,a}^0$), $L_f^{1,1}(f(x_c))$ (вероятность $p_{k,a}^1$) или $L_f^{1,2}(f(x_c))$ (вероятность $p_{k,a}^2$).

1. Найдем вероятность $p_{k,a}^1$. В отличие от леммы 1 набор элементов, составляющих множество $L_f(f(x_c))$, делится уже на четыре группы. Первая группа — это зафиксированная точка x_c. Вторая и третья группы — элементы множеств $L_f^{1,1}(f(x_c))\setminus\{x_c\}$ и $L_f^{1,2}(f(x_c))$. Мощность этих множеств $|L_f^{1,1}(f(x_c))\setminus\{x_c\}| = a_1$ и $|L_f^{1,2}(f(x_c))| = a_2$. Четвертая группа — оставшиеся точки $L_f^{1,0}(f(x_c))$ ($|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0$). Таким образом, должна выполняться следующая система:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1+a_2=k-1,\\ 0\le a_0\le S_{1,0},\\ 0\le a_1\le S_{1,1}-1,\\ 0\le a_2\le S_{1,2}, \end{array}\right\}$$

где $k = 1+a_0+a_1+a_2$. В этой системе необходимость равенства очевидна, а неравенства следуют из того, что $a_0 = |L_f^{1,0}(f(x_c))| \le S_{1,0}$, $a_1 = |L_f^{1,1}(f(x_c))\setminus\{x_c\}| = |L_f^{1,1}(f(x_c))| - 1 \le S_{1,1}-1$ и $a_2 = |L_f^{1,2}(f(x_c))| \le S_{1,2}$.

В лемме 1 была получена вероятность появления такой реализации f, для которой множество $L_f(f(x_c))$ состоит из произвольно выбранных $k-1$ элементов из $S-1$ точек поля зрения X и зафиксированного элемента x_c. Имеем

$$p_{k,a}^{(1)} = \sum_i \big(p(f=i)\cdot C_{S-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}(f=i)\cdot p^{S-k}(f\ne i)\big).$$

В процессе выбора $k-1$ элементов происходит разделение их на три подмножества: $L_f^{1,1}(f(x_c))\setminus \{x_c\}$, $L_f^{1,2}(f(x_c))$ и $L_f^{1,0}(f(x_c))$, т. е. выбираются a_1 элементов из $S_{1,1}-1$ точек, a_2 — из $S_{1,2}$ точек и a_0 — из $S_{1,0}$ точек. Таким образом, вместо C_{S-1}^{k-1} способов будет $C_{S_{1,1}-1}^{a_1} \cdot C_{S_{1,2}}^{a_2} \cdot C_{S_{1,0}}^{a_0}$ способ выбора элементов множества $L_f(f(x_c))$. Получим

$$p_{k,a}^{(2)} = \sum_i \Big(p(f=i) \cdot C_{S_{1,1}-1}^{a_1} \cdot C_{S_{1,2}}^{a_2} \cdot C_{S_{1,0}}^{a_0} \cdot p^{k-1}(f=i) \cdot p^{S-k}(f \neq i) \Big).$$

После проведения преобразований

$$p^{S-k}(f \neq i) = p^{(S_{1,0}+S_{1,1}+S_{1,2})-(1+a_0+a_1+a_2)}(f \neq i)$$
$$= p^{(S_{1,1}-1)-a_1}(f \neq i) \cdot p^{S_{1,2}-a_2}(f \neq i) \cdot p^{S_{1,0}-a_0}(f \neq i)$$

имеем

$$p_{k,a}^{(2)} = \sum_i \Big(p(f=i) \cdot C_{S_{1,1}-1}^{a_1} \cdot p^{a_1}(f=i) \cdot p^{(S_{1,1}-1)-a_1}(f \neq i)$$
$$\times C_{S_{1,2}}^{a_2} \cdot p^{a_2}(f=i) \cdot p^{S_{1,2}-a_2}(f \neq i)) \cdot C_{S_{1,0}}^{a_0} \cdot p^{a_0}(f=i) \cdot p^{S_{1,0}-a_0}(f \neq i) \Big).$$

Далее, учитывая, что $p(f \neq i) = 1 - p(f=i)$ и $C_m^x \cdot p^x \cdot (1-p)^{m-x} = B(x,m,p)$, получаем итоговую формулу

$$p_{k,a}^1 = \sum_i \Big(p(f=i) \cdot B(a_1, S_{1,1}-1, p(f=i)) \cdot B(a_2, S_{1,2}, p(f=i)) \cdot B(a_0, S_{1,0}, p(f=i)) \Big).$$

Вероятность $p_{k,a}^2$ вычисляется аналогично вероятности $p_{k,a}^1$.

2. Доказательство аналогично доказательствам леммы 1 и п. 1.

Лемма доказана.

Подобным образом можно доказать и более общий факт, когда объект на втором изображении состоит из N_g^1 уровней яркости. Как и при формулировке леммы 2, введем обозначение $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{N_g^1})$.

Лемма 3. *Пусть дано случайное поле f.*

1. *В задаче* 1.3 *при выполнении условий* 1 *и $x_c \in L_f^{1,m}(f(x_c))$ $(m \in [1, N_g^1])$ вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{1,m}(f(x_c))| = a_m+1$ и $|L_f^{1,j}(f(x_c))| = a_j$ для $j \in [0, N_g^1]$, $j \neq m$, определяется как*

$$p_{k,a}^m = \sum_i \Bigg(p(f=i) \cdot \prod_{j=0}^{m-1} B(a_j, S_{1,j}, p(f=i)) \cdot B(a_m, S_{1,m}-1, p(f=i)) \cdot \prod_{j=m+1}^{N_g^1} B(a_j, S_{1,j}, p(f=i)) \Bigg),$$

где

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{N_g^1} a_j = k-1, \\ 0 \leq a_j \leq S_{1,j} \quad \forall j \in [0, N_g^1], \quad j \neq m, \\ a_m \leq S_{1,m}-1. \end{array}\right\}$$

2. *В задаче* 1.3 *при выполнении условия* 2 *вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{1,0}(f(x_c))| = a_0+1$ и $|L_f^{1,j}(f(x_c))| = a_j$ для $j \in [1, N_g^1]$, определяется по формуле*

$$p_{k,a}^0 = \sum_i \Big(p(f=i) \cdot B(a_0, S_{1,0}-1, p(f=i)) \cdot \prod_{j=1}^{N_g^1} B(a_j, S_{1,j}, p(f=i)) \Big),$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{j=0}^{N_g^1} a_j = k-1,\\ 0 \le a_0 \le S_{1,0}-1,\\ 0 \le a_j \le S_{1,j} \quad \forall j \in [1, N_g^1].\end{array}\right\}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 2.

Теперь можно приступить к рассмотрению самого общего случая, когда и фон, и объект состоят из нескольких уровней яркости.

Введем обозначения: $a = (a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,N_g^1}, \ldots, a_{N_f,0}, a_{N_f,1}, \ldots, a_{N_f,N_g^{N_f}})$, причем $a_{q,j}$ соответствует на первом изображении уровню яркости с номером q, а на втором — уровню яркости с номером j, индекс 0 соответствует фону на втором изображении. Из-за разницы яркостей незашумленного изображения f^0 в точках разных уровней после добавления шума распределения вероятностей яркостей в этих уровнях также будут различными, поэтому далее будем обозначать $p_q(f = i) = p(f(x) = i \mid f^0(x) = f_q^0)$ — вероятность появления яркости i в точке, которая на изображении f^0 принадлежит уровню яркости с номером q .

Теорема 1. *Пусть дано случайное поле f.*

1. *В задаче 1 при выполнении условий 1 и $x_c \in L_f^{n,m}(f(x_c))$ ($n \in [1, N_f]$ и $m \in [1, N_g^1]$) вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{n,m}(f(x_c))| = a_{n,m}+1$ и $|L_f^{q,j}(f(x_c))| = a_{q,j}$ для $(q,j)\colon q \in [1, N_f],\ j \in [0, N_g^q]$, $(q,j) \ne (n,m)$, определяется как*

$$p_{k,a}^{n,m} = \sum_i \Bigg(p_n(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{N_g^q} B(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i))$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} B(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i)) \cdot B(a_{n,m}, S_{n,m}-1, p_n(f=i)) \cdot \prod_{j=m+1}^{N_g^n} B(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i))$$

$$\times \prod_{q=n+1}^{N_f} \prod_{j=0}^{N_g^q} B(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i)) \Bigg),$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{q=1}^{N_f} \sum\limits_{j=1}^{N_g^q} a_{q,j} = k-1,\\ 0 \le a_{q,j} \le S_{q,j} \quad \forall (q,j)\colon q \in [1, N_f],\ j \in [0, N_g^q], \quad (q,j) \ne (n,m),\\ 0 \le a_{n,m} \le S_{n,m}-1.\end{array}\right\}$$

2. *В задаче 1 при выполнении условий 2 и $x_c \in L_f^{n,0}(f(x_c))$ ($n \in [1, N_f]$) вероятность появления реализации поля f такой, что $|L_f(f(x_c))| = k$, $|L_f^{n,0}(f(x_c))| = a_{n,0}+1$ и $|L_f^{q,j}(f(x_c))| = a_{q,j}$ для $(q,j)\colon q \in [1, N_f]$, $j \in [0, N_g^q]$, $(q,j) \ne (n,0)$, определяется по формуле*

$$p_{k,a}^{n,0} = \sum_i \Bigg(p_n(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{n-1} \prod_{j=0}^{N_g^q} B(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i))$$

$$\times B(a_{n,0}, S_{n,0}-1, p_n(f=i)) \cdot \prod_{j=1}^{N_g^n} B(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i)) \cdot \prod_{q=n+1}^{N_f} \prod_{j=0}^{N_g^q} B(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i)) \Bigg),$$

где

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{q=1}^{N_f}\sum\limits_{j=1}^{N_g^q} a_{q,j} = k-1,\\ 0 \le a_{n,0} \le S_{n,0}-1,\\ 0 \le a_{q,j} \le S_{q,j}, \quad \forall (q,j)\colon q\in[1,N_f],\ j\in[0,N_g^q], \quad (q,j)\ne(n,0).\end{array}\right\}$$

Доказательство. 1. Элементы множества $L_f(f(x_c))$ можно разбить на $N_f + \sum_{q=1}^{N_f} N_g^q + 1$ подмножеств следующим образом: $L_f(f(x_c)) = \{x_c\} \cup \{L_f^{n,m}(f(x_c)) \setminus \{x_c\}\} \cup \{\bigcup\limits_{(q,j)} L_f^{q,j}(f(x_c))\}$, где $(q,j)\colon q\in[1,N_f],\ j\in[0,N_g^q]$, $(q,j)\ne(n,m)$. Пусть $|L_f^{n,m}(f(x_c))| = a_{n,m}+1$ и $|L_f^{q,j}(f(x_c))| = a_{q,j}$. Таким образом, с учетом (2) должна выполняться следующая система:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{q=1}^{N_f}\sum\limits_{j=1}^{N_g^q} a_{q,j} = k-1,\\ 0 \le a_{q,j} \le S_{q,j} \quad \forall (q,j)\colon q\in[1,N_f],\ j\in[0,N_g^q], \quad (q,j)\ne(n,m),\\ 0 \le a_{n,m} \le S_{n,m}-1.\end{array}\right\}$$

Занумеруем все точки поля зрения, кроме x_c, числами от 1 до $S-1$: $x_1, x_2, \ldots, x_{S-1}$, причем множество $L_f(f(x_c)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_c\}$. Зафиксируем элементарное событие i (исход для случайной величины $f(x_l)$). Далее вычислим вероятность появления реализации поля f с таким множеством $L_f(f(x_c))$. Учитывая, что случайные величины $f(x_l)$ независимы, получим

$$p_{k,a}^{(1)} = p(f(x_c)=i)\cdot\prod_{l=1}^{k-1} p(f(x_l)=i)\cdot\prod_{l=k}^{S-1} p(f(x_l)\ne i).$$

Выбирая элементы $L_f(f(x_c))$, мы не могли распоряжаться только зафиксированной точкой x_c. Набор остальных $k-1$ элементов можно выбрать C_{S-1}^{k-1} различными способами. Поэтому можно определить вероятность появления такой реализации поля f, для которой множество $L_f(f(x_c))$ состоит из произвольных $k-1$ элементов и точки x_c:

$$p_{k,a}^{(2)} = p(f(x_c)=i)\cdot C_{S-1}^{k-1}\cdot\prod_{l=1}^{k-1} p(f(x_l)=i)\cdot\prod_{l=k}^{S-1} p(f(x_l)\ne i).$$

По условию случайные величины $f(x_l) = f^0(x_l) + n_\eta(x_l)$ распределены одинаково для всех $x_l \in L_f^{q,j}(f(x_c))$, $q\in[1,N_f],\ j\in[0,N_g^q]$ (включая x_c), поэтому нумерация x_l не важна. Имеем

$$p_{k,a}^{(2)} = p_n(f=i)\cdot C_{S-1}^{k-1}\cdot\prod_{q=1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} p_q^{a_{q,j}}(f=i)\cdot\prod_{q=1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} p_q^{S_{q,j}-a_{q,j}}(f\ne i).$$

Чтобы получить вероятность появления реализации f, для которой множество $L_f(f(x_c))$ состоит из произвольных $k-1$ элементов и зафиксированной точки x_c, нужно просуммировать вероятности $p_{k,a}^{(2)}$ по всем возможным исходам i:

$$p_{k,a}^{(3)} = \sum_i \Bigl(p_n(f=i)\cdot C_{S-1}^{k-1}\cdot\prod_{q=1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} p_q^{a_{q,j}}(f=i)\cdot\prod_{q=1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} p_q^{S_{q,j}-a_{q,j}}(f\ne i)\Bigr).$$

Теперь уточним способ выбора $k-1$ элемента из $S-1$ точек множества X. При выборе $k-1$ элементов происходит разделение их на $N_f + \sum_{q=1}^{N_f} N_g^q$ подмножеств, т. е. мы выбираем $a_{n,m}$ элементов из $S_{n,m}-1$ и $a_{q,j}$ элементов из $S_{q,j}$ точек. Поэтому вместо C_{S-1}^{k-1} способов будет $\prod\limits_{q=1}^{n-1}\prod\limits_{j=0}^{N_g^q} C_{S_{q,j}}^{a_{q,j}} \cdot \prod\limits_{j=0}^{m-1} C_{S_{n,j}}^{a_{n,j}} \cdot C_{S_{n,m}-1}^{a_{n,m}} \cdot \prod\limits_{j=m+1}^{N_g^n} C_{S_{n,j}}^{a_{n,j}} \cdot \prod\limits_{q=n+1}^{N_f}\prod\limits_{j=0}^{N_g^q} C_{S_{q,j}}^{a_{q,j}}$ способов выбора элементов множества $L_f(f(x_c))$:

$$p_{k,a}^{(4)} = \sum_i \biggl(p_n(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{n-1}\prod_{j=0}^{N_g^q} C_{S_{q,j}}^{a_{q,j}} \cdot \prod_{j=0}^{m-1} C_{S_{n,j}}^{a_{n,j}} \cdot C_{S_{n,m}-1}^{a_{n,m}} \cdot \prod_{j=m+1}^{N_g^n} C_{S_{n,j}}^{a_{n,j}} \cdot \prod_{q=n+1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} C_{S_{q,j}}^{a_{q,j}}$$

$$\times \prod_{q=1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} p_q^{a_{q,j}}(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} p_q^{S_{q,j}-a_{q,j}}(f\neq i) \biggr).$$

Группируя множители с одинаковыми индексами, получим

$$p_{k,a}^{n,m} = \sum_i \biggl(p_n(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{n-1}\prod_{j=0}^{N_g^q} \bigl(C_{S_{q,j}}^{a_{q,j}} \cdot p_q^{a_{q,j}}(f=i) \cdot p_q^{S_{q,j}-a_{q,j}}(f\neq i)\bigr)$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} \bigl(C_{S_{n,j}}^{a_{n,j}} \cdot p_n^{a_{n,j}}(f=i) \cdot p_n^{S_{n,j}-a_{n,j}}(f\neq i)\bigr) \cdot \bigl(C_{S_{n,m}-1}^{a_{n,m}} \cdot p_n^{a_{n,m}}(f=i) \cdot p_n^{S_{n,m}-1-a_{n,m}}(f\neq i)\bigr)$$

$$\times \prod_{j=m+1}^{N_g^n} \bigl(C_{S_{n,j}}^{a_{n,j}} \cdot p_n^{a_{n,j}}(f=i) \cdot p_n^{S_{n,j}-a_{n,j}}(f\neq i)\bigr) \cdot \prod_{q=n+1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} \bigl(C_{S_{q,j}}^{a_{q,j}} \cdot p_q^{a_{q,j}}(f=i) \cdot p_q^{S_{q,j}-a_{q,j}}(f\neq i)\bigr) \biggr).$$

Далее, учитывая, что $p(f\neq i) = 1 - p(f=i)$ и $C_m^x\, p^x\,(1-p)^{m-x} = B(x,m,p)$ — биномиальное распределение вероятностей, получаем итоговую формулу

$$p_{k,a}^{n,m} = \sum_i \biggl(p_n(f=i) \cdot \prod_{q=1}^{n-1}\prod_{j=0}^{N_g^q} B\bigl(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i)\bigr)$$

$$\times \prod_{j=0}^{m-1} B\bigl(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i)\bigr) \cdot B\bigl(a_{n,m}, S_{n,m}-1, p_n(f=i)\bigr) \cdot \prod_{j=m+1}^{N_g^n} B\bigl(a_{n,j}, S_{n,j}, p_n(f=i)\bigr)$$

$$\times \prod_{q=n+1}^{N_f}\prod_{j=0}^{N_g^q} B\bigl(a_{q,j}, S_{q,j}, p_q(f=i)\bigr) \biggr).$$

2. Доказательство аналогично доказательству п. 1.

Теорема доказана.

Таким образом, пространство всех изображений разбивается на классы в зависимости от параметров (k,a) путем перебора всех возможных вариантов реализации поля (изображения) f. Теорема 1 позволяет определить вероятности для классов из этого разбиения. Докажем основную теорему.

Теорема 2. 1. *В задаче* 1 *при условии* 1 *распределение вероятностей случайной величины* $R(x_c)$ *имеет вид*

$$r^+(i) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N_f}\sum\limits_{m=1}^{N_g^n} (S_{n,m} \cdot r_{n,m}(i))}{\sum\limits_{u=1}^{N_f}\sum\limits_{v=1}^{N_g^u} S_{u,v}},$$

где

$$r_{n,m}(i) = \sum_{k,a} (p_{k,a}^{n,m} \cdot p(|G_{k,a}^{n,m} + E_k| = i)),$$

величина $p^{n,m}_{k,a}$ определяется теоремой 1,

$$G^{n,m}_{k,a} = \frac{1}{k}\left(\sum_{q=1}^{N_f}\sum_{j=0}^{N_g^q}(a_{q,j}\cdot g^0_{q,j}) + (1-k)\,g^0_{n,m}\right), \quad E_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon_j + \frac{1-k}{k}\,\varepsilon_c,$$

ε_j — распределение вероятностей случайной величины $g(x_j)$, соответствующей точке $x_j \in L_f(f(x_c))$, ε_c — распределение вероятностей случайной величины $g(x_c)$.

2. *В задаче 1 при условии 2 распределение вероятностей случайной величины $R(x_c)$ имеет вид*

$$r^-(i) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N_f}(S_{n,0}\cdot r_{n,0}(i))}{\sum\limits_{u=1}^{N_f} S_{u,0}},$$

где

$$r_{n,0}(i) = \sum_{k,a}(p^{n,0}_{k,a}\cdot p(|G^{n,0}_{k,a} + E_k| = i)),$$

величина $p^{n,0}_{k,a}$ определяется теоремой 1,

$$G^{n,0}_{k,a} = \frac{1}{k}\left(\sum_{q=1}^{N_f}\sum_{j=0}^{N_g^q}(a_{q,j}\cdot g^0_{q,j}) + (1-k)\,g^0_{n,0}\right),$$

определения E_k, ε_j и ε_c такие же, как в п. 1.

Доказательство. 1. Для реализации поля f с параметрами (k,a) и случайного поля g вычислим значение величины $R(x_c)$ при условии, что $x_c \in L^{n,m}_f(f(x_c))$ (обозначим эту величину $R_{n,m}(x_c)$):

$$R_{n,m}(x_c) = |P_f g(x_c) - g(x_c)| = \left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} g(x^{k,a}_j) - g(x_c)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{k}\left(\sum_{q=1}^{N_f}\sum_{j=0}^{N_g^q}(a_{q,j}\cdot g^0_{q,j}) + g^0_{n,m} + \sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j\right) - (g^0_{n,m} + \varepsilon_c)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{k}\left(\sum_{q=1}^{N_f}\sum_{j=0}^{N_g^q}(a_{q,j}\cdot g^0_{q,j}) + (1-k)\,g^0_{n,m}\right) + \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon_j + \frac{1-k}{k}\,\varepsilon_c\right|.$$

Здесь

$$G^{n,m}_{k,a} = \frac{1}{k}\left(\sum_{q=1}^{N_f}\sum_{j=0}^{N_g^q}(a_{q,j}\cdot g^0_{q,j}) + (1-k)\,g^0_{n,m}\right) \text{ — константа при фиксированных} (k,a),$$

$$E_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1}\varepsilon_j + \frac{1-k}{k}\,\varepsilon_c \text{ — случайная величина,}$$

и, значит, $R_{n,m}(x_c) = |G^{n,m}_{k,a} + E_k|$. Таким образом, каждой вероятности $p^{n,m}_{k,a}$ из теоремы 1 соответствует случайная величина $R_{n,m}(x_c)$.

Распределения яркости пикселя разностного изображения в зависимости от параметров (k, a)

(k,a)	$R^{\min}_{n,m}$	$R^{\min}_{n,m}+1$	$\ldots$	$R^{\max}_{n,m}-1$	$R^{\max}_{n,m}$
$(1,a)$	$p^{n,m}_{1a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m})$	$p^{n,m}_{1a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m}+1)$		$p^{n,m}_{1a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m}-1)$	$p^{n,m}_{1a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m})$
$(2,a)$	$p^{n,m}_{2a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m})$	$p^{n,m}_{2a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m}+1)$		$p^{n,m}_{2a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m}-1)$	$p^{n,m}_{2a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m})$
$(3,a)$	$p^{n,m}_{3a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m})$	$p^{n,m}_{3a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m}+1)$		$p^{n,m}_{3a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m}-1)$	$p^{n,m}_{3a}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m})$
$\ldots$					
(S,a)	$p^{n,m}_{Sa}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m})$	$p^{n,m}_{Sa}$ $\times p(R(x_c)=R^{\min}_{n,m}+1)$		$p^{n,m}_{Sa}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m}-1)$	$p^{n,m}_{Sa}$ $\times p(R(x_c)=R^{\max}_{n,m})$

Пусть $R^{\min}_{n,m} = \min\limits_{k,a} R_{n,m}(x_c)$, $R^{\max}_{n,m} = \max\limits_{k,a} R_{n,m}(x_c)$. Составим таблицу (см. выше): каждая строка соответствует классу реализаций поля f с параметрами (k, a), каждый столбец — значению случайной величины $R_{n,m}(x_c)$. Каждое поле таблицы — совместная реализация этих двух случайных событий, а записанное в это поле значение — вероятность, равная произведению вероятностей исходных событий. Фактически строки таблицы определяются распределением вероятностей случайных величин, составляющих поле f, столбцы — распределением вероятностей случайных величин, составляющих поле g.

Суммируя таблицу по столбцам и переписывая $p^{n,m}_{k,a} \cdot p(R_{n,m}(x_c) = i) = p^{n,m}_{k,a} \cdot p(|G^{n,m}_{k,a} + E_k| = i)$, получаем распределение вероятности случайной величины $R(x_c)$ при условии $x_c \in L^{n,m}_f(f(x_c))$:

$$p\big(R_{n,m}(x_c) = i \mid x_c \in L^{n,m}_f(f(x_c))\big) \triangleq r_{n,m}(i) = \sum_{k,a} \big(p^{n,m}_{k,a} \cdot p(|G^{n,m}_{k,a} + E_k| = i)\big).$$

Далее, применяя формулу полной вероятности

$$r^+(i) = \sum_{n=1}^{N_f} \sum_{m=1}^{N^n_g} \Big(p\big(R_{n,m}(x_c) = i \mid x_c \in L^{n,m}_f(f(x_c))\big) \cdot p\big(x_c \in L^{n,m}_f(f(x_c))\big)\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{N_f} \sum_{m=1}^{N^n_g} \left(r_{n,m}(i) \cdot \frac{S_{n,m}}{\sum\limits_{u=1}^{N_f} \sum\limits_{v=1}^{N^u_g} S_{u,v}} \right) = \frac{\sum\limits_{n=1}^{N_f} \sum\limits_{m=1}^{N^n_g} (S_{n,m} \cdot r_{n,m}(i))}{\sum\limits_{u=1}^{N_f} \sum\limits_{v=1}^{N^u_g} S_{u,v}},$$

получаем искомое выражение.

2. Доказательство аналогично доказательству п. 1.

Теорема доказана.

Опираясь на теорему 2, можно определить способ вычисления оптимального порога алгоритма. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Оптимальный порог алгоритма поиска структурных различий на основе морфологического проектора вычисляется по следующей формуле*

$$T_{opt} = \arg\min_T \Big(\sum_{i<T} r^+(i) + \sum_{i>T} r^-(i) \Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя полученные в теореме 2 формулы распределений, для фиксированного значения порога T можно выписать формулы для вычисления вероятности пропуска $P_{FN} = \sum_{i<T} r^+(i)$ и вероятности ложной тревоги $P_{FP} = \sum_{i>T} r^-(i)$. Поскольку критерием оптимальности был выбран минимум суммы вероятностей ошибок первого и второго рода, то формула для оптимального порога будет иметь вид

$$T_{opt} = \arg\min_T (P_{FN} + P_{FP}) = \arg\min_T \left(\sum_{i<T} r^+(i) + \sum_{i>T} r^-(i) \right).$$

Теорема доказана.

В следующем разделе будут даны результаты применения теоремы 3.

5. Результаты численных экспериментов

1. На рис. 1 приведены графики распределений вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$, полученных при условиях задачи 1.1. Параметры изображений $S = 441$, $S_{1,1} = 120$, $g_{1,1} = 100$, $g_{1,0} = 0$. Оба изображения содержат дискретный шум, распределение которого аппроксимируется нормальным распределением с параметрами $N(0, 10)$.

Выброс в нуле связан с тем, что в случае, когда на первом изображении f уровень яркости, содержащий пиксель x_c, состоит только из этого пикселя (т. е. $k = 1$), на втором изображении g также будет взята яркость только одного пикселя, $P_f g(x_c) \equiv g(x_c)$. Яркость этой точки на разностном изображении будет ноль, независимо от добавленного на изображение g шума. Однако с увеличением размера изображений вероятность появления изображения f с параметром $k = 1$ уменьшается, следовательно, уменьшается и величина выброса. Для сравнения приведем графики распределений вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$ в случае запрета появления изображений f с $k = 1$ (рис. 2). Фактически это означает, что в лемме 1 и теореме 2 $k \in [2, S]$. На представленных графиках можно видеть, что выброс исчез.

2. Рассмотрим случай объекта, состоящего из двух уровней яркости. На рис. 3 приведены графики распределений вероятностей $r^+(R)$ и $r^-(R)$, полученных с помощью леммы 2 для задачи 1.2. Параметры изображений $S = 441$, $S_{1,1} = 60$, $S_{1,2} = 60$, $g_{1,1} = 120$, $g_{1,2} = 80$, $g_{1,0} = 0$. Оба изображения содержат дискретный шум, распределение которого аппроксимируется нормальным распределением с параметрами $N(0, 10)$. График распределения $r^+(R)$ состоит из двух пиков, соответствующих двум уровням объекта.

3. Для сравнения полученных теоретических распределений с эмпирическими генерируем исходные изображения с заданными параметрами, применяем к ним алгоритм поиска структурных различий на основе морфологического проектора и строим распределение для значений яркости центральной точки разностного изображения. Для изображений с параметрами $S = 2601$, $S_{1,1} = 441$, $g_{1,1} = 100$, $g_{1,0} = 0$, $n_\eta = N(0, 10)$, $n_\xi = N(0, 10)$ и миллиона сгенерированных изображений средняя ошибка оказалась равна 7%.

6. Заключение

Приведенная в данной работе методика теоретического исследования алгоритма поиска структурных различий изображений на основе морфологического проектора Пытьева позволяет уточнить результаты эмпирических исследований [9] и полученную в ходе них пригодную для практического применения формулу оптимального порога алгоритма, а также получить точные оценки ошибок первого и второго рода для этой формулы.

Автор благодарен своему научному руководителю В.Б. Костоусову, а также Д.С. Перевалову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

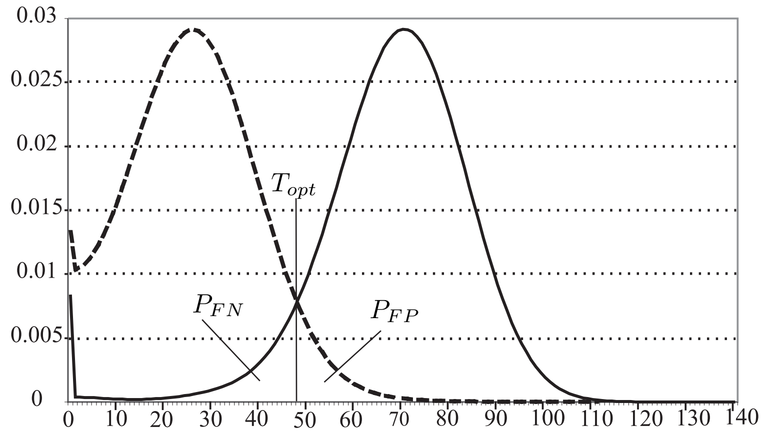


Рис. 1. Графики распределений $r^+(R)$ (сплошная линия) и $r^-(R)$ (пунктирная линия) для изображений с параметрами $S = 441$, $S_{1,1} = 120$, $g_{1,1} = 100$, $g_{1,0} = 0$. Оптимальный порог $T_{opt} = 48$. Оценки ошибок: $P_{FN} = 0.076$, $P_{FP} = 0.049$.

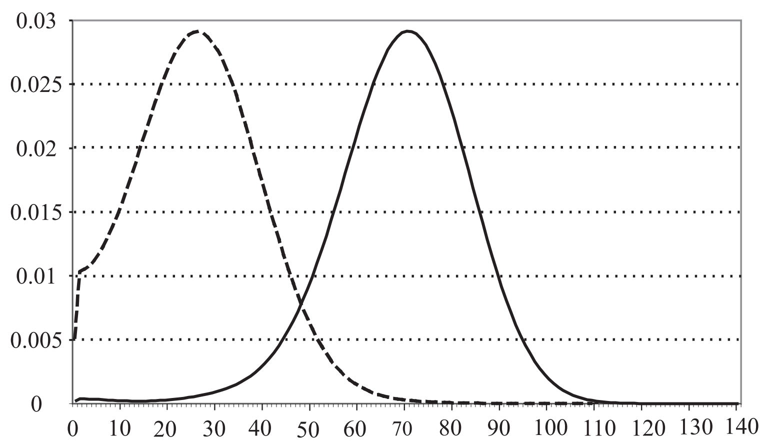


Рис. 2. Графики распределений $r^+(R)$ (сплошная линия) и $r^-(R)$ (пунктирная линия) для изображений с параметрами $S = 441$, $S_{1,1} = 120$, $g_{1,1} = 100$, $g_{1,0} = 0$ и запретом на появление изображения f с параметром $k = 1$.

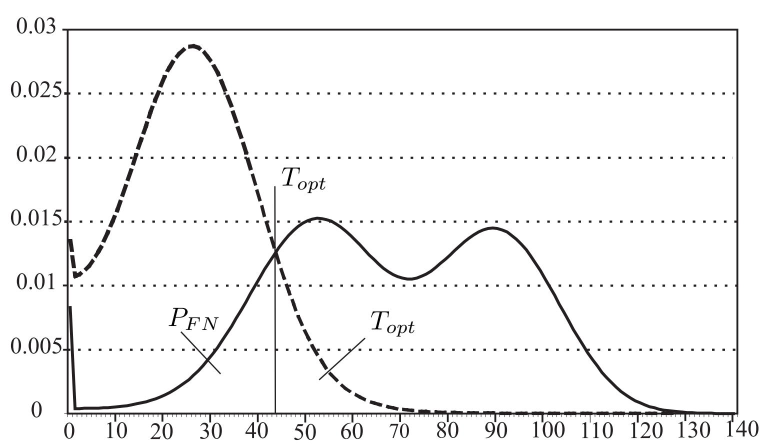


Рис. 3. Графики распределений $r^+(R)$ (сплошная линия) и $r^-(R)$ (пунктирная линия) для изображений с параметрами $S = 441$, $S_{1,1} = 60$, $S_{1,2} = 60$, $g_{1,1} = 120$, $g_{1,2} = 80$, $g_{1,0} = 0$. Оптимальный порог $T_{opt} = 43$. Оценки ошибок: $P_{FN} = 0.15$, $P_{FP} = 0.1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The system for automated deciphering of cosmic Earth surface photographs / V.B. Kostousov, I.N. Kandoba, V.V. Skripnuk, G.A. Shabanov // International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing. Vol. XXXIII, Part B4. Amsterdam, 2000. P. 425–432.
2. **Костоусов В.Б., Кандоба И.Н.** Система автоматизированного дешифрирования космических снимков земной поверхности // Практика приборостроения. 2003. № 1. С. 45–50.
3. Система автоматизированного топографического мониторинга по снимкам земной поверхности / С.А. Ефимов, И.Н. Кандоба, В.Б. Костоусов, Д.С. Перевалов, В.В Скрипнюк // Геодезия и картография. 2008. № 12. С. 34–41.
4. **Пытьев Ю.П.** Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 5. С. 1061–1064.
5. **Пытьев Ю.П., Чуличков А.И.** Методы морфологического анализа изображений. М.: ФизМатЛит, 2010. 336 с.
6. **Визильтер Ю.В.** Обобщенная проективная морфология // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 4. С. 384–399.
7. **Перевалов Д.С.** Исследование алгоритмов обнаружения и локализации объекта на изображении в условиях структурных искажений // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 1. С. 94–104.
8. **Perevalov D.S.** Using structural functions for analysis and comparison of algorithms // Proc. of 8-th Open German-Russian Workshop “Pattern recognition and image understanding”, N. Novgorod, 2011. P. 230–233.
9. **Корнилов Ф.А., Перевалов Д.С.** Задача обнаружения структурных различий изображений // Алгоритмы и програм. средства параллел. вычислений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. Вып. 11. С. 37–56.
10. **Кобзарь А.И.** Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников. М.: ФизМатЛит, 2006. 816 с.

Корнилов Федор Андреевич
программист
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: FAKornilov@mail.ru

Поступила 26.07.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ[1]

А. И. Короткий, Д. О. Михайлова

Рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных распределенных управлений в параболических системах по результатам приближенных измерений состояний наблюдаемого движения системы. Задача решается в динамическом варианте, когда для определения текущего приближения неизвестного управления разрешено использовать только поступившие к данному моменту измерения. Рассматриваемая задача некорректна. Для ее решения предлагается воспользоваться методом динамической регуляризации. Построены новые динамические регуляризующие алгоритмы решения задачи, которые позволяют получить усиленную сходимость регуляризованных приближений, в частности кусочно-равномерную сходимость. Выполнена конечномерная аппроксимация задачи. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, управление, реконструкция, наблюдение, измерение, обратная задача, регуляризация, метод динамической регуляризации, вариация, кусочно-равномерная сходимость.

A. I. Korotkii, D. O. Mikhailova. Reconstruction of distributed controls in parabolic systems by a dynamic method.

We consider the problem of reconstructing a priori unknown distributed controls in parabolic systems from results of approximate measurements of states of the system's observed motion. The problem is solved in the dynamic variant, when a current approximation of the unknown control is found only from the measurements received no later than the current time. The problem under consideration is ill-posed. We propose to solve it by the method of dynamic regularization and construct new dynamic regularization algorithms, which provide a strengthened convergence of regularized approximations, in particular, their piecewise uniform convergence. A finite-dimensional approximation of the problem is carried out and results of numerical simulation are presented.

Keywords: dynamic system, control, reconstruction, observation, measurement, inverse problem, regularization, method of dynamic regularization, variation, piecewise uniform convergence.

Введение

В данной работе, продолжающей исследования [1–12], изучается задача о восстановлении неизвестных распределенных управлений, функционирующих в управляемой параболической системе. Управляющие воздействия в динамической системе заранее неизвестны и должны быть определены по результатам мгновенных приближенных измерений текущих фазовых положений системы, которые поступают наблюдателю в динамике в течение заданного промежутка времени. Для определения текущего приближения неизвестного управления разрешено использовать только поступившие к данному моменту измерения. Для решения задачи предлагается воспользоваться методом, разработанным Ю. С. Осиповым и его школой, — методом динамической регуляризации [2–8]. В работе построены и обоснованы новые динамические регуляризующие алгоритмы решения задачи, которые в отличие от традиционных алгоритмов позволяют получить усиленную сходимость регуляризованных приближений, в частности кусочно-равномерную сходимость. Выполнена конечномерная аппроксимация задачи восстановления, основанная на методе разделения переменных. Приводятся результаты численного моделирования, показывающие работоспособность построенных алгоритмов.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках" при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

1. Постановка задачи о восстановлении распределенного управления

Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени t из заданного ограниченного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$ характеризуется функцией $y[t] = y(t, \cdot)$, определенной в некоторой области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Эволюция состояний $y[t] = y(t, x)$, $x \in \Omega$, во времени описывается параболической краевой задачей [13; 14]

$$y_t = L\, y + f\, u, \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$y(t, x) = 0, \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \tag{1.3}$$

где $y_0 = y_0(x)$, $x \in \Omega$, — начальное состояние системы; $f = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $x \in \Omega$, — заданная векторная функция; $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ — вектор управляющего воздействия на систему в момент времени $t \in T$; L — заданный дифференциальный оператор:

$$L\, y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \Big) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_i(t, x)\, y \Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_i} + a(t, x)\, y.$$

Допустимые текущие значения управляющего воздействия подчинены заданным геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T.$$

Пусть за управляемой динамической системой и ее движением $y = y[t]$, $t \in T$, осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы $y[t]$, причем результаты этих измерений $y_\delta[t]$ удовлетворяют следующему условию точности измерений:

$$\| \, y_\delta(t) - y(t) \, \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta, \quad t \in T,$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы построить такой динамический алгоритм реконструкции управления, который по результатам $y_\delta = y_\delta[t]$, $t \in T$, приближенных измерений наблюдаемого движения системы $y = y[t]$, $t \in T$, приближенно определял (восстанавливал) ту реализацию $u = u(t)$, $t \in T$, управляющего воздействия на динамическую систему, которая соответствует результатам наблюдений. При этом результат $u_\delta = u_\delta(t)$, $t \in T$, восстановления искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\| \, u_\delta - u \, \|_{L_2(T; \mathbb{R}^m)} \to 0, \quad \delta \to 0.$$

Предполагается, что при решении задачи восстановления известны априорные геометрические ограничения P на множество допустимых управлений и уравнения динамики процесса вместе с начальным состоянием y_0.

Уточним постановку задачи. Пусть P — выпуклое компактное множество из $\mathbb{R}^m$; U — множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, которые при почти всех $t \in T$ принадлежат компакту P,

$$U = \{ \; u \in E \colon u(t) \in P \;\; \text{п.в.} \;\; t \in T \; \}, \quad E = L_2(T; \mathbb{R}^m),$$

множество U представляет собой множество всех допустимых управлений в задаче.

Будем считать, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей Γ [13; 14]. Пусть $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям [13, с. 165]. Известно [13, гл. 3, § 3], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) для каждого управления $u \in E$ существует единственное обобщенное решение

$y = y(t,x) = y(t,x;u)$, $(t,x) \in Q$, этой краевой задачи из пространства $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q)$. Это решение иногда будем называть движением динамической системы (1.1)–(1.3), порожденным управлением $u \in U$, и обозначать его символом $y = y[\cdot;u] = y[t;u]$, $t \in T$. Определения функциональных пространств, используемых в данной работе, имеются в [13; 14].

Введем множество $Y = \{\, y[\cdot;u] \colon u \in U \,\}$ всех возможных движений системы (1.1)–(1.3), отвечающих всем возможным управлениям $u \in U$. Для каждого движения $y \in Y$ введем множество $U(y) = \{\, u \in U \colon y[\cdot;u] = y \,\}$ всех допустимых управлений, порождающих данное движение, и множество $Y_\delta(y) = \{y_\delta \in L_2(T;\, L_2(\Omega)) \colon \|\, y[t] - y_\delta[t] \,\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta, t \in T\,\}$ всех возможных измерений этого движения. Множество Y компактно в $C(T; L_2(\Omega))$ и функции из Y имеют единый модуль непрерывности $\mu \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ [12].

Далее будет рассматриваться также банахово пространство $W = \{\, u \in E \colon V[u] < +\infty \,\}$, $\|\, u \,\|_W = \|\, u \,\|_E + V[\, u \,]$, где $V[\, u \,] = \sup \{\, \sum_{i=1}^{l} \|\, u(t_i) - u(t_{i-1}) \,\|_{\mathbb{R}^m} : \sigma \in \Sigma \,\}$ — полная вариация функции $u \colon T \ni t \to u(t) \in \mathbb{R}^m$, супремум берется по множеству Σ всех конечных разбиений σ отрезка T, $\sigma = \{\, [t_0, t_1), \ldots, [t_{l-1}, \vartheta] \,\}$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$.

Искомый алгоритм будем строить в классе конечношаговых динамических алгоритмов (КДА) [2–8]. Формализовать КДА можно в виде троек:

$$D_\delta^\sigma = \big((t_i)_{i=0}^{l};\, (E_i)_{i=0}^{l-1};\, (F_i)_{i=0}^{l-1}\big), \tag{1.4}$$

где $(t_i)_{i=0}^{l}$ — точки разбиения σ отрезка времени T: $t_0 < t_1 < \cdots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$; E_i — отображение, которое позиционным способом формирует на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ приближение к искомому управлению; F_i — отображение, формирующее движение некоторой вспомогательной системы-модели на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$.

Детализируем указанные выше отображения. Обозначим через H некоторое непустое множество (далее оно будет представлять собой фазовое пространство некоторой вспомогательной системы-модели); $U_i = U[t_i, t_{i+1}] = L_2([t_i, t_{i+1}]; P)$ — множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, которые при почти всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$ принадлежат компакту P, т. е. U_i есть сужение функций из U на отрезок $[t_i, t_{i+1}]$; W_i — сужение функций из W на $[t_i, t_{i+1}]$. Пусть E_i — отображение $L_2(\Omega) \times H \times P \times \mathbb{R}_+ \times [0, \infty)$ в U_i, F_i — отображение $H \times U_i$ в H. Последними двумя аргументами отображения E_i являются числовые параметры $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon \in [0, \infty)$, которые будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ, т. е. будут являться параметрами регуляризации. Разбиение σ отрезка T также будет выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ, причем так, чтобы диаметр $d = d(\sigma(\delta)) = \max \{\, t_{i+1} - t_i \colon i = 0, \ldots, l-1 \,\}$ разбиения стремился к нулю при $\delta \to 0$, $d = d(\sigma(\delta)) \to 0$ при $\delta \to 0$. Можно считать, что $d(\sigma(\delta)) \leqslant \varphi(\delta)$, где $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть заданы какие-либо числа $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $\varepsilon \in [0, \infty)$. Для КДА (1.4) и функции $y_\delta \colon T \to L_2(\Omega)$ назовем $(D_\delta^\sigma,\, y_\delta)$-реализацией алгоритма управление $u_\delta \in U$, определенное по правилу

$$u_\delta(\tau) = u_\delta^i(\tau) = E_i(y_\delta(t_i), z_i, u_\delta^{i-1}(t_i), \alpha, \varepsilon), \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}), \quad i = 0, \ldots, l-1, \quad u_\delta(\vartheta) \in P,$$

где $z_{i+1} = F_i(z_i, u_\delta^i)$, $i = 0, \ldots, l-1$, — значения вспомогательной переменной z (состояния вспомогательной системы-модели), которые будут формироваться по ходу движения исходной системы. Далее $(D_\delta^\sigma,\, y_\delta)$-реализацию алгоритма будем обозначать символом $D_\delta^\sigma(y_\delta)$, это и будет выход КДА.

Семейство КДА $D = \{\, D_\delta^\sigma \colon \sigma \in \Sigma,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \,\}$ назовем регуляризующим, если при некотором выборе зависимостей $\sigma = \sigma(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ для любого $y \in Y$

$$r_\delta(y) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

где

$$r_\delta(y) = \sup \{\, \rho[\, D_\delta^\sigma(y_\delta),\, U(y) \,] \colon y_\delta \in Y_\delta(y) \,\},$$

$$\rho[\, D_\delta^\sigma(y_\delta),\, U(y) \,] = \min \{\, \|\, D_\delta^\sigma(y_\delta) - v \,\|_E \colon v \in U(y) \,\}.$$

З а д а ч а. Требуется построить регуляризующее семейство КДА.

2. Динамическое восстановление распределенного управления

Опишем сначала идею динамического метода решения задачи. На отрезке $T = [t_0, \vartheta]$ вводится разбиение точками $(t_i)_{i=0}^{l}$: $t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$. Помимо исходной динамической системы рассматривается некоторая вспомогательная система-модель, траекторию (движение) этой системы будем называть траекторией поводыря. В качестве системы-модели выберем копию исходной системы:

$$z_t = L\,z + f\,v, \quad (t,x) \in Q = T \times \Omega, \tag{2.1}$$

$$z(t_0,x) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$z(t,x) = 0, \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Надо выбрать закон $(E_i)_{i=0}^{l-1}$ выбора управления v в системе-модели и описать отображения $(F_i)_{i=0}^{l-1}$, формирующие состояния ее движения в силу краевой задачи (2.1)–(2.3). Закон управления моделью в дискретной по времени схеме в каждый момент t_i назначает на основании поступивших к этому моменту данных об исходной системе и о системе-модели управляющее воздействие u_i на промежуток времени $[t_i, t_{i+1}]$. На модель в течение этого промежутка времени подается именно это управление, которое и принимается за приближение к искомому на данном промежутке. Закон управления выбирается так, чтобы имело место сближение в определенном смысле поводыря и движения наблюдаемой системы. Закон управления системой-моделью в теории позиционного управления называют стратегией управления. Идея построения подходящей стратегии основана на методе “прицеливания” поводыря на результаты измерения состояния наблюдаемой системы. Правило выбора управляющего воздействия по подходящей стратегии называют также регуляризованным экстремальным сдвигом [1; 2].

Пусть известно некоторое приближение $u_h \in P$ искомого управления u в момент времени t_0 с точностью $h = h(\delta)$: $\|\, u_h - u(t_0)\,\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant h$, $h \in [0, h_0]$. В алгоритме положим $v_\delta^{-1}(t_0) = u_h$.

Введем обозначения:

$$\Phi_i(v) = 2\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \langle\, f\,v(\tau),\, z_i - y_\delta(t_i)\rangle_{L_2(\Omega)} d\tau + \alpha\,\Lambda_{t_i}^{t_{i+1}}(v), \quad \alpha = \mathrm{const} > 0,$$

$$\Lambda_t^\tau(v) = \|\, v\,\|^2_{L_2(\,[t,\tau];\mathbb{R}^m)} + V_t^\tau(v), \quad \Lambda(v) = \Lambda_{t_0}^{\vartheta}(v),$$

$$\Phi_i^* = \min\{\, \Phi_i(v)\colon v \in U[\,t_i,\, t_{i+1};\, w\,] \cap W_i\,\}, \tag{2.4}$$

где $V_t^\tau(v)$ — полная вариация функции v на отрезке $[t,\tau]$, $U[\,t_i,\, t_{i+1};\, w\,] = \{\, u \in U_i\colon u(t_i) = w\,\}$, $w \in P$. Если множество $U[\,t_i,\, t_{i+1};\, w\,] \cap W_i \neq \varnothing$, то задача (2.4) разрешима и множество ее решений состоит из единственного элемента [12].

Приступим к построению алгоритма. Фиксируем $\delta \in [0, \delta_0]$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in \{0, \dots, l-1\}$, $y \in L_2(\Omega)$, $z \in H = L_2(\Omega)$, $w \in P$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in [0, \infty)$. Определим значение отображения E_i в точке $(y, z, w, \alpha, \varepsilon)$ по правилу $E_i(y, z, w, \alpha, \varepsilon) = v_\delta^i$, где v_δ^i есть элемент множества $U[\,t_i,\, t_{i+1};\, w\,] \cap W_i$, удовлетворяющий условию

$$\Phi_i^* \leqslant \Phi_i(v_\delta^i) \leqslant \Phi_i^* + \varepsilon\,(t_{i+1} - t_i), \tag{2.5}$$

параметр ε характеризует точность по функционалу решения экстремальной задачи (2.4). Этот параметр будет являться параметром метода (параметром регуляризации) и будет выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$.

Значение z внутренней переменной, определяющей состояние системы-модели в начальный момент времени t_0, положим равным $y_\delta(t_0)$, т. е. $z_0 = y_\delta(t_0)$. В последующие моменты времени $t_{i+1} \in T$, $i \in \{0, \dots, l-1\}$, элемент z_{i+1} будет находиться из решения краевой задачи:

$$\widetilde{z}_t = L\,\widetilde{z} + f\,v_\delta^i, \quad (t,x) \in [t_i, t_{i+1}] \times \Omega, \tag{2.6}$$

$$\widetilde{z}(t_i, x) = z_i(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.7}$$

$$\widetilde{z}(t, x) = 0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad x \in \Gamma; \tag{2.8}$$

$$z_{i+1} = \widetilde{z}(t_{i+1}, \cdot) = F_i\,(\,z_i, v_\delta^i\,). \tag{2.9}$$

Работа КДА (формирование $(D_\delta^\sigma, y_\delta)$-реализации) протекает во времени по следующей схеме. Пусть наблюдение осуществляется за каким-либо движением $y \in Y$, результатом приближенных измерений фазовых положений динамической системы служит функция $y_\delta \in Y_\delta(y)$. До начала процесса восстановления фиксируются зависимости $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $h = h(\delta)$, разбиение $\sigma = \sigma(\delta) \in \Sigma$ отрезка времени T с диаметром $d = d(\sigma(\delta)) \leqslant \varphi(\delta)$ и становится известным уровень погрешности измерений δ.

Шаг $i = 0$. В начальный момент времени t_0 известно приближенное измерение $y_\delta(t_0)$ состояния системы $y[t_0]$. По предположению, наблюдателю становится известным также приближенное значение u_h восстанавливаемого управления u в начальный момент времени t_0. Положив $y = y_\delta(t_0)$, $z = z_0 = y_\delta(t_0)$, $w = u_h$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, наблюдатель в момент времени t_0 находит значение $E_0(y, z, w, \alpha, \varepsilon) = u_\delta^0$ по правилу (2.5). Найденное значение u_δ^0 принимается за приближение к искомому управлению u на отрезке времени $[t_0, t_1]$. Значение $u_\delta^0(t_1)$ запоминается для выполнения следующего шага. Далее по правилу (2.9) система-модель переводится из состояния z_0 в состояние $z_1 = F_0(z_0, u_\delta^0)$, которое запоминается для выполнения следующего шага.

Шаг $i = 1$. В момент времени t_1 наблюдателю поступает информация о реальном положении системы $y[t_1]$ в виде приближенного измерения $y_\delta(t_1)$. Положив $y = y_\delta(t_1)$, $z = z_1$, $w = u_\delta^0(t_1)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, наблюдатель в момент времени t_1 находит значение $E_1(y, z, w, \alpha, \varepsilon) = u_\delta^1$ по правилу (2.5). Найденное значение u_δ^1 принимается за приближение к искомому управлению u на отрезке времени $[t_1, t_2]$. Значение $u_\delta^1(t_2)$ запоминается для выполнения следующего шага. Далее по правилу (2.9) поводырь переводится из состояния z_1 в состояние $z_2 = F_1(z_1, u_\delta^1)$, которое запоминается для выполнения следующего шага.

По мере поступления новых измерений $y_\delta(t_2)$, $y_\delta(t_3)$, $\ldots$, $y_\delta(t_{l-1})$, аналогично шагу $i = 1$, последовательно определяются функции u_δ^2, u_δ^3, $\ldots$, u_δ^{l-1} на отрезках $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$, $\ldots$, $[t_{l-1}, t_l]$ соответственно. Таким образом, в динамике к конечному моменту времени $t_l = \vartheta$ наблюдатель получает полную $(D_\delta^\sigma, y_\delta)$-реализацию алгоритма u_δ. Из описания работы КДА во времени видна возможность его осуществления в режиме реального времени.

Теорема 2.1. *Пусть для* $y \in Y$ *множество* $S = U(y) \cap U[t_0, \vartheta; u_0] \cap W \neq \varnothing$, *тогда во множестве* S *существует единственный* Λ*-нормальный элемент* $\widehat{u}$, *т. е. элемент, минимизирующий на множестве* S *функционал* Λ. *Если параметры регуляризации* $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\varphi = \varphi(\delta)$, $h = h(\delta)$ *и модуль непрерывности* $\mu = \mu(\delta)$ *семейства движений* Y *удовлетворяют условиям согласования*

$$(\,\mu(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta\,)\,\alpha(\delta)^{-1} \to 0, \quad \varepsilon(\delta) \to 0, \quad \varphi(\delta) \to 0, \quad h(\delta) \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \to 0,$$

то семейство КДА, состоящее из алгоритмов (2.5)–(2.9), *решает задачу восстановления на наблюдаемом движении* y, *т. е.* $r_\delta(y) \to 0$ *при* $\delta \to 0$. *Кроме того, какие бы ни случились реализации измерений* $y_\delta \in Y_\delta(y)$, *для* $(D_\delta^\sigma, y_\delta)$*-реализаций алгоритма* u_δ *при* $\delta \to 0$ *имеют место следующие сходимости*: 1) $u_\delta \to \widehat{u}$ *сильно в* E; 2) $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ *в* $\mathbb{R}^m$ *поточечно на* T; 3) $V[u_\delta] \to V[\widehat{u}]$; 4) $u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ *в* $\mathbb{R}^m$ *равномерно по* t *на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции* $\widehat{u}$.

Доказательство теоремы проводится по схеме [9–11] и основано на установлении равномерной малости оценочного функционала

$$\Xi(t) = \|\,y[\,t; \widehat{u}\,] - \widetilde{z}[\,t; u_\delta\,]\,\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\,\Lambda_{t_0}^t(\,u_\delta\,) - \alpha\,\Lambda_{t_0}^t(\,\widehat{u}\,), \quad t \in T, \tag{2.10}$$

и применении результатов [15, гл. 4] о возможности получения кусочно-равномерной сходимости регуляризованных приближений.

3. Аппроксимация задачи

Восстановление управлений в системе (1.1)–(1.3) на основе результатов предыдущего раздела связано с минимизацией функционалов и пересчетом состояний вспомогательной системы в бесконечномерных пространствах. Для численной реализации алгоритма требуется конечномерная аппроксимация. Опишем способ аппроксимации задачи восстановления управлений, основанный на методе разделения переменных.

Пусть дифференциальный оператор в краевой задаче (1.1)–(1.3) имеет вид

$$L\,y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\,\frac{\partial y}{\partial x_j}\Big) + a(x)\,y, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a(x) \leqslant a_0 = \mathrm{const} < 0.$$

Тогда решение краевой задачи (1.1)–(1.3) представимо в виде ряда Фурье

$$y = y(t,x;u) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)\,\omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in \Omega.$$

Фиксируем какое-нибудь число $N \in \mathbb{N}$. В основу построений динамического регуляризующего алгоритма положим системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье:

$$\dot y_i(t) = -\lambda_i\, y_i(t) + f^{(i)}\,u(t), \quad t \in T, \quad f^{(i)} = \langle\, f(\cdot), \omega_i\,\rangle_{L_2(\Omega)}, \tag{3.1}$$

$$y_i(t_0) = y_{0i}, \quad y_{0i} = \langle\, y_0, \omega_i\,\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad i = 1,\ldots,N, \tag{3.2}$$

где $\{\,\lambda_i, \omega_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ — решение в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ спектральной задачи

$$L\,\omega = -\lambda\,\omega,\ x \in \Omega; \quad \omega = 0,\ x \in \Gamma; \quad \langle\, \omega, \omega\,\rangle_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно [13; 14], что спектральная задача разрешима для счетного набора вещественных положительных чисел λ_i, $i \in \mathbb{N}$, каждое из которых имеет конечную кратность и которые можно упорядочить (с учетом их кратности) в порядке возрастания. Соответствующие собственным числам λ_i собственные функции ω_i образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, базис в $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $W^2_{2,0}(\Omega) = W^2_2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

В качестве поводыря возьмем копию конечномерной системы (3.1)–(3.2). Движение поводыря $\widetilde z^{(N)}(\cdot) = (\widetilde z_1(\cdot),\ldots,\widetilde z_N(\cdot))$ на отрезке T формируется из решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматриваемых на отрезках $[t_k,\,t_{k+1}]$, $k = 0,\ldots,l-1$, соответствующих какому-либо разбиению $\sigma \in \Sigma$:

$$\dot{\widetilde z}_i(t) = -\lambda_i\,\widetilde z_i(t) + f^{(i)}\,u^k_\delta(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

$$\widetilde z_i(t_k) = \widetilde z_i(t_k - 0), \quad \widetilde z_i(t_0 - 0) = y_{\delta\,i}(t_0), \quad i = 1,\ldots,N.$$

Обозначим $\widetilde z_i(t_k)$ через $z_{i\,k}$ и $\widetilde z^{(N)}(t_k)$ через $z^{(N)}_k$.

Решение задачи восстановления будем искать в виде семейства алгоритмов КДА $D = \{\,D^{N,\sigma}_\delta\colon N \in \mathbb{N},\ \sigma \in \Sigma,\ \delta \in [0,\delta_0]\,\}$, состоящего из алгоритмов

$$D^{N,\sigma}_\delta = \big(\,(t_k)^l_{k=0};\,(E^N_k)^{l-1}_{k=0};\,(F^N_k)^{l-1}_{k=0}\,\big), \tag{3.3}$$

где $(t_k)^l_{k=0}$ — точки разбиения $\sigma \in \Sigma$; E^N_k — отображение $L_2(\Omega)\times\mathbb{R}^N\times P\times\mathbb{R}_+\times[0,\infty)$ в U_k; F^N_k — отображение $\mathbb{R}^N\times U_k$ в $\mathbb{R}^N$ (соответствующие пояснения к отображениям имеются в разд. 2).

Для любых $N \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma$, $\delta \in [0,\delta_0]$ и $k \in \{0,1,\ldots,l-1\}$ положим

$$E^N_k(y_\delta(t_k), z^{(N)}_k, w, \alpha, \varepsilon) = u^k_\delta(\tau), \quad \tau \in [t_k, t_{k+1}), \quad u_\delta(\vartheta) \in P, \tag{3.4}$$

где u_δ^k есть элемент множества $U[\,t_k, t_{k+1}; w\,] \cap W_k$, удовлетворяющий условию

$$\widetilde{\Phi}_k^{(N)} \leqslant \Phi_k^{(N)}(u_\delta^k) \leqslant \widetilde{\Phi}_k^{(N)} + \varepsilon\,(t_{k+1} - t_k), \tag{3.5}$$

ε — параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи

$$\widetilde{\Phi}_k^{(N)} = \min\{\,\Phi_k^{(N)}(u)\colon u \in U[t_k, t_{k+1}; w] \cap W_k\,\}, \tag{3.6}$$

$$\Phi_k^{(N)}(u) = J_{1\,k}^{(N)}(u) + \alpha\,\Lambda_{t_k}^{t_{k+1}}(u),$$

$$J_{1\,k}^{(N)}(u) = \sum_{i=1}^{N} 2\,(z_{i\,k} - y_{\delta\,i}(t_k))\,f^{(i)}\int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t)\,dt, \quad y_{\delta\,i}(t_k) = \langle\, y_\delta(t_k,\cdot), \omega_i\,\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Правило формирования элемента w аналогично правилу формирования подобного элемента, указанному в разд. 2.

Определим второе отображение алгоритма:

$$F_k^N(\,z_k^{(N)}, u_\delta^k) = z_{k+1}^{(N)} = \Big(\,z_{1\,k+1}^{(N)}, \ldots, z_{N\,k+1}^{(N)}\Big), \tag{3.7}$$

$$z_{i\,k+1}^{(N)} = z_{i\,k}^{(N)}\,\exp\Big(-\lambda_i\,(\,t_{k+1} - t_k\,)\Big) + f^{(i)}\int_{t_k}^{t_{k+1}} u_\delta^k(s)\,\exp\Big(-\lambda_i\,(\,t_{k+1} - s\,)\Big)\,ds, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Работа алгоритма $D_\delta^{N,\,\sigma}$ во времени аналогична работе алгоритма D_δ^σ и подробно описана в разд. 2. В результате работы алгоритма $D_\delta^{N,\,\sigma}$ к конечному моменту времени ϑ наблюдатель получит полную реализацию алгоритма $D_\delta^{N,\,\sigma}(\,y_\delta\,) = u_\delta^{(N)} = u_\delta$ на отрезке T.

Перед тем как сформулировать соответствующую теорему о сходимости и регуляризируемости семейства алгоритмов D, отметим, что для любых $t \in T$ и $u \in U$ справедлива оценка со сходящимся рядом [8]

$$\|\,y(t,\cdot;u)\,\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t;u)^2 \leqslant 3\sum_{i=1}^{\infty} y_{0i}^2 + \frac{3}{2}\,\sum_{i=1}^{\infty}(\,\lambda_i\,)^{-1}\,(\vartheta - t_0)\,\gamma_u^2\,\|f^{(i)}\|_{\mathbb{R}^m}^2 < \infty, \tag{3.8}$$

из которой, в частности, следует, что остаток ряда $R_N \to 0$ при $N \to \infty$,

$$R_N = 3\sum_{i=N}^{\infty} y_{0i}^2 + \frac{3}{2}\,\sum_{i=N}^{\infty}(\,\lambda_i\,)^{-1}\,(\vartheta - t_0)\,\gamma_u^2\,\|f^{(i)}\|_{\mathbb{R}^m}^2\,.$$

Опираясь на оценку (3.8) и свойства построенного семейства КДА, можно установить равномерную малость функционала (2.10), из которой, с учетом исследований [9–11;15], вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть для $y \in Y$ множество $S = U(y) \cap U[t_0, \vartheta; u_0] \cap W \neq \varnothing$, тогда во множестве S существует единственный Λ-нормальный элемент $\widehat{u}$, т. е. элемент, минимизирующий на множестве S функционал Λ. Если параметры регуляризации $N = N(\delta)$, $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $\varphi = \varphi(\delta)$, $h = h(\delta)$ и модуль непрерывности $\mu = \mu(\delta)$ семейства движений Y удовлетворяют условиям согласования*

$$(\,(R_{N(\delta)})^{1/2} + \mu(\delta) + \varepsilon(\delta) + \delta\,)\alpha(\delta)^{-1} \to 0,$$

$$N(\delta) \to \infty, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \varepsilon(\delta) \to 0, \quad \varphi(\delta) \to 0, \quad h(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0,$$

то семейство алгоритмов D, состоящее из алгоритмов (3.3)–(3.7)*, решает задачу восстановления на наблюдаемом движении y, т. е. $r_\delta(y) \to 0$ при $\delta \to 0$. Кроме того, какие бы ни случились реализации измерений $y_\delta \in Y_\delta(y)$, для реализаций алгоритма u_δ при $\delta \to 0$ имеют место следующие сходимости*: 1) *$u_\delta \to \widehat{u}$ сильно в E*; 2) *$u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ поточечно на T*; 3) $V[u_\delta] \to V[\widehat{u}]$; 4) *$u_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $\widehat{u}$.*

4. Численное моделирование задачи восстановления

Проведем численное моделирование решения задачи восстановления управления в динамической системе

$$y_t = a^2 y_{xx} + f\,u, \quad (t,x) \in Q = T \times \Omega,$$

$$y(0,x) = y_0(x), \quad x \in \Omega = (0,b),$$

$$y(t,0) = 0 = y(t,b), \quad t \in T = [t_0,\vartheta] = [0,\vartheta].$$

По условию $f \in L_2(\Omega)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $a = \mathrm{const} > 0$. Пусть множество P геометрических ограничений на управления есть отрезок $P = [\,\nu_1,\nu_2\,] \subset \mathbb{R}$, приближенное измерение состояний динамической системы моделируется соотношением

$$y_\delta(t,x) = y(t,x;u) + \delta\,\xi(t,x), \qquad \int\limits_T \|\,\xi(t,\cdot)\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt \leqslant 1.$$

Легко найти, что в данном конкретном случае

$$\lambda_i = \left(\frac{\pi\,i}{b}\right)^2, \quad \omega_i(x) = \left(\frac{2}{b}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi\,i\,x}{b}\right), \quad i = 1,2,\ldots\ .$$

Опираясь на результаты предыдущего раздела, проведем конечномерную аппроксимацию задачи и численное моделирование. Фиксируем какое-либо натуральное число $N \in \mathbb{N}$ и разбиение σ отрезка T, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$. Одна из основных задач состоит в решении на каждом из отрезков $[t_k, t_{i+1}]$, $k = 0,\ldots,l$, экстремальной задачи (3.5), которая будет решаться методом проекции субградиента. Предварительно дискретизируем задачу (3.5). Введем для этого на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ дополнительное равномерное разбиение с шагом τ. Подробные рассуждения по дискретизации задач вида (3.5), нахождению субградиентов целевого функционала и реализации метода проекции субградиента имеются в [9–12].

Погрешности измерений моделируются соотношениями

$$\xi_i^{(N)}(t) = \varkappa_i \sin(\,\beta_i\,t), \quad t \in T, \quad \beta_i = \mathrm{const}_{\,i}, \quad \varkappa_i = \mathrm{const}_{\,i} > 0, \quad \vartheta\,(\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_N) \leqslant 1.$$

Численные эксперименты, иллюстрирующие предлагаемый метод, проводились при следующих параметрах задачи:

$$a = 1,\ t_0 = 0,\ \ \vartheta = 1,\ b = 1,\ \ \nu_1 = 0,\ \nu_2 = 2,\ \ y_0 = 0,\ \ \beta_i = 2,\ \ \varkappa_i = N^{-1},\ \ i = 1,\ldots,N,$$

$$f = f_1\omega_1(x) + \ldots + f_N\omega_N(x), \quad f_1 = 1\,,\ldots,\, f_N = 1.$$

Т а б л и ц а

Значения параметров и результаты восстановления

Параметр	Непрерывное кусочно-гладкое управление	Разрывное управление
Δ	0.001	0.0005
τ	$\Delta/5$	$\Delta/5$
M	10000	5000
δ	0.0005	0.0002
α	0.0001	0.00005
N	50	100
Невязка	0.0013	3.4184
Относительная погрешность	0.0014	1.8290

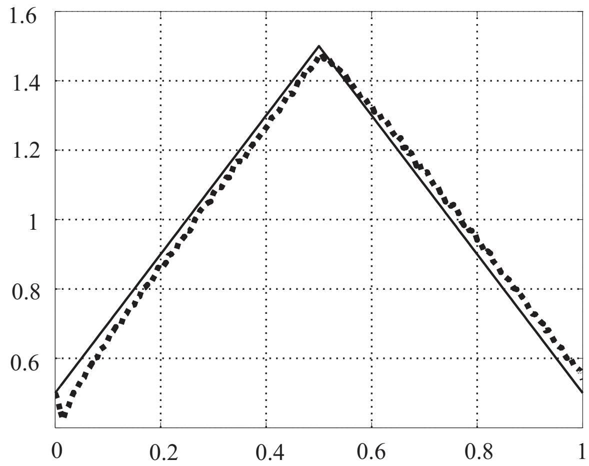


Рис. 1. Реконструкция управления $u_{(1)}$.

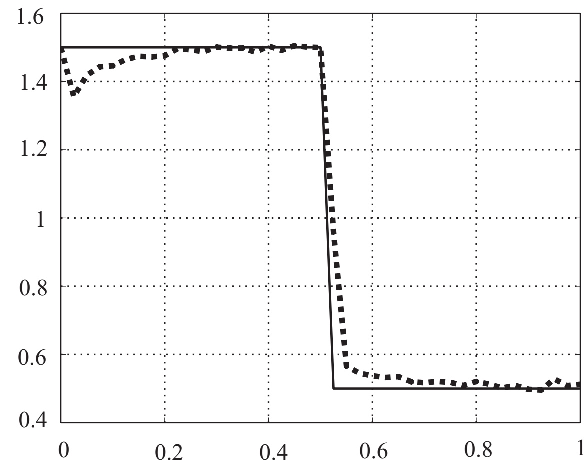


Рис. 2. Реконструкция управления $u_{(2)}$.

В качестве модельных восстанавливаемых управлений были выбраны две функции:

1) $u = u_{(1)}(t) = 1.5 - |2t - 1|$ (непрерывное кусочно-гладкое управление);

2) $u = u_{(2)}(t) = \begin{cases} 1.5, & \text{если } t \in [0, 0.5], \\ 0.5, & \text{если } t \in (0.5, 1] \end{cases}$ (разрывное управление).

В обоих случаях начальной функцией в методе проекции субградиента служила сеточная аппроксимация функции $u^{[0]} = 0.1$. Зависимость параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ от погрешности δ напрямую не контролировалась, точность решения экстремальной задачи определялась выбором количества итераций M в методе проекции субградиента. Разбиение σ считалось равномерным с шагом Δ. Полагалось также $h = 0$. Значения параметров алгоритма для каждой из задач восстановления модельного управления приведены в таблице. Результаты расчетов приведены на рис. 1 (восстановление непрерывного кусочно-гладкого управления) и на рис. 2 (восстановление разрывного управления), сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, линией с точками — результат восстановления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
3. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
4. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 237 с.
5. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 304 с.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
7. **Короткий А.И.** Обратные задачи динамики управляемых систем с распределенными параметрами // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 101–124.
8. **Короткий А.И.** Прямые и обратные задачи управляемых систем с распределенными параметрами: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1993. 331 с.
9. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, № 8. P. 853–865.

10. **Короткий М.А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 39–53.
11. **Короткий М.А.** Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 132 с.
12. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление управлений в параболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 211–227.
13. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
14. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
15. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.

Короткий Александр Илларионович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Поступила 22.10.2012

Михайлова Дарья Олеговна
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: darso@rambler.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977.8

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПО НЭШУ В ЛИНЕЙНОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ С ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ ДВУХ[1]

Д. Р. Кувшинов

Рассматривается задача построения решений по Нэшу в неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц с терминальными показателями качества, линейной динамикой и ограничениями на управления игроков в виде выпуклых многогранников. Формализация стратегий игроков и порождаемых ими движений основывается на формализации и результатах теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, разработанной Н.Н. Красовским и его научной школой. Задача нахождения решений игры сводится к решению нестандартных задач управления. В статье предлагаются алгоритмы, строящие алгебраическую сумму и геометрическую разность выпуклых многогранников, позволяющие расширить область применимости разработанного ранее алгоритма построения решений по Нэшу на задачи с динамиками в фазовых пространствах размерности больше двух.

Ключевые слова: неантагонистическая дифференциальная игра, вычислительная геометрия, решения Нэша.

D. R. Kuvshinov. Numerical construction of Nash solutions in a two-player linear positional differential game in which the phase space has more than two dimensions.

The problem of constructing Nash solutions in a two-player non-zero-sum positional differential game with terminal payoffs, linear dynamics, and constraints on the players' controls in the form of convex polyhedra is considered. The formalization of the players' strategies and of the motions generated by them is based on the formalization and results of the theory of zero-sum positional differential games developed by N.N. Krasovskii and his scientific school. The problem of finding game solutions is reduced to solving nonstandard control problems. We propose algorithms for the construction of the algebraic sum and geometric difference of convex polyhedra. The algorithms extend the applicability domain of an earlier developed algorithm, which constructed Nash solutions, to problems with dynamics in phase spaces with more than two dimensions.

Keywords: non-zero-sum differential game, computational geometry, Nash solutions.

Введение

В данной статье рассматривается задача численного построения решений по Нэшу в неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц с терминальными показателями качества, линейной динамикой и ограничениями на управления игроков, заданными в виде выпуклых многогранников.

Формализация стратегий игроков и порождаемых ими движений основывается на формализации и результатах теории антагонистических позиционных дифференциальных игр [1; 2], разработанной Н.Н. Красовским и его научной школой. Задача нахождения решений неантагонистической игры сводится к решению нестандартных задач управления [3]. Множество решений по Нэшу разбивается на классы эквивалентности по доставляемым этими решениями выигрышам игроков. Вследствие терминальной формы показателей качества множество классов эквивалентности решений изоморфно множеству конечных позиций движений, порождаемых этими решениями, поэтому задача численного нахождения решений сводится к покрытию множества конечных позиций сеткой узлов и построению аппроксимаций приходящих в эти узлы движений системы, удовлетворяющих условиям нестандартных задач управления.

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002) и РФФИ (проекты 12-01-00290 и 12-01-31247).

В предыдущих работах автора по данной тематике [4; 5] рассмотрена описанная выше задача и представлены алгоритмы, строящие решения, однако предполагается, что игра сводится к игре на плоскости. Основной причиной введения ограничения на размерность фазового пространства игры являлось отсутствие известных реализаций необходимых алгоритмов вычислительной геометрии для работы с многогранниками общего вида (а именно, теоретико-множественных операций и алгебраической суммы). На данный момент существуют доступные реализации для работы с многогранниками в $\mathbb{R}^3$ (например, в составе библиотеки CGAL [6]), но не для $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$. При фиксированном количестве вершин с ростом размерности пространства происходит экспоненциальный рост объемов описаний многогранников, поэтому было решено разработать алгоритмы, оперирующие только выпуклыми оболочками наборов точек и отдельными аппроксимационными движениями, заданными конечными наборами узлов. Существуют процедуры построения выпуклой оболочки заданного набора точек в пространстве произвольной размерности [6; 7].

Построение решений в неантагонистической игре сводится к решению последовательностей задач, сформулированных в терминах теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, а именно, использующих понятие максимального стабильного моста. В работах [4; 5] отправной точкой для реализации процедуры построения стабильного моста для игры в плоскости послужил алгоритм, описанный в [8].

В существующих работах в области численного построения решений в антагонистических играх в фазовом пространстве размерности больше двух, в основном, используются сеточные методы и методы линейного и выпуклого программирования [9–13]. В работе [14] используется методы вычислительной геометрии, но автор опирается на особый вид ограничений на управления.

В разд. 1 дана постановка задачи.

В разд. 2 приведены разработанные автором статьи алгоритмы вычисления алгебраической суммы и геометрической разности выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$, позволяющие строить аппроксимации максимальных стабильных мостов в форме альтернированных сумм [15].

В разд. 3 приведен предлагаемый автором алгоритм поиска аппроксимационного движения системы с заданными фазовыми ограничениями, позволяющий построить некоторое решение нестандартной задачи управления.

Вкупе представленные алгоритмы позволяют расширить область применимости ранее разработанных алгоритмов построения решений в неантагонистических играх [4;5] на системы, заданные в фазовом пространстве размерности больше двух. Разработанная автором программная реализация указанных алгоритмов работает с фазовым пространством $\mathbb{R}^3$. Выпуклые оболочки строятся средствами библиотеки CGAL [6].

Изложенные в статье результаты были представлены на конференции [16].

1. Постановка задачи

Пусть динамика позиционной дифференциальной игры задана уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{C}(t)\mathbf{v}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ϑ — фиксированный момент окончания игры. Игроки 1 и 2 распоряжаются выбором управлений $\mathbf{u} \in P \subset \mathbb{R}^p$ и $\mathbf{v} \in Q \subset \mathbb{R}^q$ соответственно, где множества P и Q — выпуклые многогранники. Матрицы-функции $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{C}(t)$ поэлементно непрерывны для $t \in [t_0, \vartheta]$ и имеют размеры $n \times p$ и $n \times q$ соответственно. Пусть существует компактное множество $G \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, содержащее начальную позицию $(t_0, \mathbf{x}_0)$, такое, что все движения системы (1.1), начинающиеся в произвольной позиции $(t_*, \mathbf{x}_*) \in G$, остаются в G при $t \in (t_*, \vartheta]$.

Цель игрока i состоит в максимизации терминального показателя качества

$$I_i = \sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta)), \quad i = 1, 2, \tag{1.2}$$

где $\sigma_i\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ — непрерывные функции такие, что множества $M_i^{c_i}$, $c_i \in \mathbb{R}$, (1.3) выпуклы.

$$M_i^{c_i} \triangleq \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\vartheta, \mathbf{x}) \in G \wedge \sigma_i(\mathbf{x}) \geqslant c_i \,\}, \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Полагаем, что оба игрока имеют полную информацию о текущей позиции игры $(t, \mathbf{x}(t))$. Формализация стратегий игроков и порождаемых ими движений в рассматриваемой неантагонистической игре опирается на формализацию, введенную для антагонистических позиционных дифференциальных игр в [1; 2]. Формализация неантагонистических позиционных дифференциальных игр подробно изложена в [3].

Определение 1. Пару $U \triangleq (\,\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\,)$, где $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ — произвольная функция позиции $(t, \mathbf{x})$ и положительного параметра точности ε, принимающая значения из P, будем называть *чистой позиционной стратегией* (далее — *стратегией*) игрока 1. Функция $\beta_1\colon (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$ является непрерывной, монотонной и удовлетворяет условию $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Стратегия $V \triangleq (\,\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\,)$ игрока 2 определяется аналогично.

Рассматриваются движения двух типов, порождаемые парой стратегий игроков: *аппроксимационные* (ломаные Эйлера) и *идеальные* (предельные). Ломаные Эйлера используются при практическом построении решений численными алгоритмами. На ломаных Эйлера могут быть получены значения показателей качества игроков, сколь угодно мало отличающиеся от значений показателей качества на идеальных движениях. При фиксированном ε величина $\beta_i(\varepsilon)$ служит ограничением сверху на шаг разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, используемого игроком i при построении ломаных Эйлера.

Выпущенное из начальной позиции $(t_*, \mathbf{x}_*) \in G$ аппроксимационное движение

$$\mathbf{x}(t; t_*, \mathbf{x}_*; U, \varepsilon_1, \Delta_1; V, \varepsilon_2, \Delta_2), \quad t \in [t_*, \vartheta],$$

вводится для фиксированных значений параметров точности ε_1 и ε_2 и для фиксированных разбиений отрезка $[t_0, \vartheta]$

$$\Delta_1 = \{\, t_j^{(1)} \,\}_1^{N_1}, \quad \Delta_2 = \{\, t_k^{(2)} \,\}_1^{N_2},$$

выбираемых игроком 1 и игроком 2 соответственно, с соблюдением следующих условий, наложенных на шаги разбиений:

$$\max_{1<j\leqslant N_1} (t_j^{(1)} - t_{j-1}^{(1)}) \leqslant \beta_1(\varepsilon_1), \quad \max_{1<k\leqslant N_2} (t_k^{(2)} - t_{k-1}^{(2)}) \leqslant \beta_2(\varepsilon_2).$$

Предельное движение, порожденное парой стратегий (U, V) из начальной позиции $(t_*, \mathbf{x}_*) \in G$, определяется как непрерывная функция $\mathbf{x}(t; t_*, \mathbf{x}_*; U, V)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, являющаяся пределом последовательности аппроксимационных движений. Пара стратегий (U, V) порождает непустое компактное (в метрике пространства $\mathrm{C}[t_*, \vartheta]$) специальным образом пополненное [3, с. 18] множество предельных движений $X(t_*, \mathbf{x}_*, U, V)$.

При выполнении условия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ аппроксимационные движения будем называть *согласованными*. Движения, являющиеся пределами последовательностей согласованных аппроксимационных движений, назовем *согласованными предельными движениями*. Согласованное предельное движение, порожденное стратегиями U и V из начальной позиции $(t_*, \mathbf{x}_*) \in G$, будем обозначать через $\mathbf{x}^{\mathrm{c}}(t; t_*, \mathbf{x}_*; U, V)$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

Определение 2. Пара стратегий (U^N, V^N) называется *равновесным по Нэшу решением (N-решением) игры*, если для любого движения $\mathbf{x}^*(\cdot) \in X(t_0, \mathbf{x}_0, U^N, V^N)$, любого $\tau \in [t_0, \vartheta]$ и любых стратегий U и V выполнены следующие неравенства:

$$\max \sigma_1(\mathbf{x}(\vartheta; \tau, \mathbf{x}^*(\tau); U, V^N)) \leqslant \min \sigma_1(\mathbf{x}^{\mathrm{c}}(\vartheta; \tau, \mathbf{x}^*(\tau); U^N, V^N)),$$
$$\max \sigma_2(\mathbf{x}(\vartheta; \tau, \mathbf{x}^*(\tau); U^N, V)) \leqslant \min \sigma_2(\mathbf{x}^{\mathrm{c}}(\vartheta; \tau, \mathbf{x}^*(\tau); U^N, V^N)),$$

где максимумы берутся по соответствующим множествам предельных движений, а минимумы — по множествам согласованных предельных движений. Движения системы (1.1), порожденные N-решениями, будем называть *N-движениями*.

Алгоритм построения N-решений опирается на решение нестандартных задач управления [3], сформулированных с использованием вспомогательных антагонистических позиционных дифференциальных игр Γ_1 и Γ_2. Динамика этих игр описывается уравнением (1.1). В игре Γ_i игрок i максимизирует свой показатель качества $\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta))$ (1.2), в то время как игрок $(3-i)$ противодействует ему.

Известно [2], что в обеих играх Γ_1 и Γ_2 существуют универсальные седловые точки

$$(\,\mathbf{u}^{(i)}(t,\mathbf{x},\varepsilon),\ \mathbf{v}^{(i)}(t,\mathbf{x},\varepsilon)\,),\quad i=1,2, \tag{1.4}$$

и непрерывные функции цены $\gamma_1(t,\mathbf{x})$ и $\gamma_2(t,\mathbf{x})$.

Свойство универсальности стратегий (1.4) означает, что они оптимальны не только для заданной начальной позиции $(t_0,\mathbf{x}_0)\in G$, но и для любой другой позиции $(t_*,\mathbf{x}_*)\in G$, рассматриваемой в качестве начальной.

В [3–5] выписана конкретная структура N-решений, использующая стратегии (1.4) и позволяющая перейти от общей задачи построения N-решений к задаче нахождения некоторых программных управлений $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$ (*нестандартной задаче управления*).

З а д а ч а 1. Найти измеримые управления $\mathbf{u}\colon[t_0,\vartheta]\mapsto P$ и $\mathbf{v}\colon[t_0,\vartheta]\mapsto Q$ такие, что порождаемое ими движение $\mathbf{x}(t)$ системы (1.1) при $t\in[t_0,\vartheta]$ удовлетворяет неравенствам:

$$\gamma_i(t,\mathbf{x}(t))\leqslant\gamma_i(\vartheta,\mathbf{x}(\vartheta))=\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta)),\quad t\in[t_0,\vartheta],\quad i=1,2.$$

Стратегии (1.4), используемые в структуре решений, могут быть интерпретированы как универсальные “стратегии наказания”, применяемые одним из игроков в случае, когда другой игрок отклоняется в некоторый момент времени $t\in[t_0,\vartheta]$ от следования движению $\mathbf{x}(t)$, отвечающему выбранному решению задачи 1.

Алгоритм, строящий решения задачи 1, основан на следующем утверждении.

Утверждение 1 [5, утверждение 2]. *Движение $\mathbf{x}(t)$, $t\in[t_0,\vartheta]$, системы* (1.1) *будет N-движением тогда и только тогда, когда существуют числа c_1 и c_2 такие, что*

$$(t,\mathbf{x}(t))\notin\mathrm{int}W_1^{c_1}\cup\mathrm{int}W_2^{c_2},\quad t\in[t_0,\vartheta),\quad \mathbf{x}(\vartheta)\in\partial M_1^{c_1}\cap\partial M_2^{c_2},$$

где $\partial M_i^{c_i}$ обозначает границу множества $M_i^{c_i}$ (1.3)*, а множество*

$$W_i^{c_i}\triangleq\{\,(t,\mathbf{x})\in G\mid\gamma_i(t,\mathbf{x})\geqslant c_i\,\}$$

— максимальный в G u-$(i=1)$ или v-$(i=2)$ стабильный мост в игре сближения игрока i с целью $M_i^{c_i}$ в момент ϑ.

В [4; 5] представлен алгоритм, позволяющий построить аппроксимацию множества значений показателей качества игроков (1.2), доставляемых N-решениями. Указанный алгоритм перебирает пары целевых значений показателей качества (c_1,c_2) и в соответствии с приведенным выше утверждением проверяет существование решения задачи 1, на котором достигаются значения (c_1,c_2). Для этого требуется строить аппроксимации множеств $W_i^{c_i}$ и движения системы (1.1) с заданными фазовыми ограничениями.

Стандартным способом аппроксимации максимальных стабильных мостов в игре сближения с заданной целью в фиксированный момент времени с динамикой вида (1.1) является построение альтернированных сумм Понтрягина [15] (см. также [9; 10; 14]). Прямое построение альтернированной суммы опирается на выполнение последовательности операций алгебраической суммы и геометрической разности множеств (многогранников в $\mathbb{R}^n$).

2. Геометрические алгоритмы

2.1. Выпуклые многогранники

Для произвольного конечного набора точек из $\mathbb{R}^n$ можно построить выпуклую оболочку, которая будет выпуклым многогранником (*симплициальным комплексом*). Выпуклая оболочка N точек может содержать до $O(N^{\lfloor n/2 \rfloor})$ симплексов, ее построение возможно осуществить за $O(N \log N + N^{\lfloor n/2 \rfloor})$ время [7]. Будем обозначать выпуклую оболочку некоторого множества $R \subset \mathbb{R}^n$ через $\operatorname{conv} R$.

Используемая в работе структура данных "*выпуклый многогранник*" (далее *многогранник*) состоит из следующих элементов.

- Массив вершин *Vertices*. Радиус-вектор некоторой вершины v будем обозначать $\mathbf{r}(v)$.
- Массив граней *Facets*. Каждая грань f представлена (внешней) нормалью $\mathit{Normal}(f)$, расстоянием от ее опорной гиперплоскости до начала координат $\mathit{Dist}(f)$ и массивом вершин $\mathit{Vertices}(f)$, на которые натянута эта грань. Таким образом, грань f лежит в гиперплоскости, удовлетворяющей уравнению (здесь $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ обозначает скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$)

$$\mathbf{x} \cdot \mathit{Normal}(f) = \mathit{Dist}(f), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Графы, задающие свойства "быть соседями" для вершин (есть общее ребро) *VG*, для граней (есть общая вершина) *FG*, а также граф *VF*, позволяющий быстро определить, каким граням инцидентна заданная вершина. Графы представлены списками смежности.
- Наборы индексов *VertexPivots* и *FacetPivots*, используемые для ускорения поиска на вершинах и гранях соответственно.

Список смежности для элемента g графа G будем обозначать $\mathit{Adj}(g, G)$. Соответственно, например, вершины, соседние в графе *VG* для вершины v многогранника, обозначены через $\mathit{Adj}(v, \mathit{VG})$, а грани, инцидентные вершине v, обозначены через $\mathit{Adj}(v, \mathit{VF})$. Множество ребер графа G будем обозначать через $\mathit{Edg}(G)$.

Для удобства записи далее используются следующие условные обозначения.

$$X \Leftarrow Y \triangleq X \leftarrow X \cup Y, \quad \arg\max\{\, f(x) \mid x \in X \,\} \triangleq \arg\max_{x \in X} f(x).$$

Поиск максимума аффинной функции на вершинах или гранях (нормалях) многогранника осуществляется направленным поиском по графу вершин или графу граней соответственно. Выбор вершины или грани, с которой будет запущен направленный поиск, осуществляется выбором максимума на *VertexPivots* или *FacetPivots* соответственно. Направленный поиск на каждом шаге выбирает локальный максимум функции среди соседей и продолжается до тех пор, пока этот локальный максимум превосходит значение функции в последнем выбранном элементе. Для нахождения всех элементов, доставляющих максимум, после направленного поиска выполняется поиск в ширину от элемента, найденного направленным поиском.

2.2. Алгебраическая сумма

Обозначим через $A \oplus B$ алгебраическую сумму многогранников $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $v \in \mathit{Vertices}(A \oplus B)$, тогда существуют $a \in \mathit{Vertices}(A)$ и $b \in \mathit{Vertices}(B)$ такие, что $\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(a) + \mathbf{r}(b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство от противного. Пусть $\mathbf{a} \in A$ и $\mathbf{b} \in B$ такие, что $\mathbf{r}(v) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Без ограничения общности рассмотрим случай, когда $\mathbf{a}$ не является радиусом-вектором никакой из вершин A ($\mathbf{a}$ не является крайней точкой A). По определению крайней точки [17, с. 178] это означает, что найдутся $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\lambda^* \in (0, 1)$ такие, что

$\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $(1-\lambda^*)\mathbf{x} + \lambda^*\mathbf{y} = \mathbf{a}$. В то же время, из выпуклости A следует, что $\forall\lambda \in [0,1]$ $(1-\lambda)\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \in A$. Очевидно, что тогда и $(1-\lambda)(\mathbf{x}+\mathbf{b})+\lambda(\mathbf{y}+\mathbf{b}) \in (A\oplus B)$. Кроме того, имеем $(1-\lambda^*)(\mathbf{x}+\mathbf{b}) + \lambda^*(\mathbf{y}+\mathbf{b}) = \mathbf{r}(v)$. Таким образом, $\mathbf{r}(v)$ не является крайней точкой $A \oplus B$. Противоречие получено. □

Из леммы 1 следует, что $A \oplus B$ может быть получена как выпуклая оболочка множества $\{\, \mathbf{r}(a) + \mathbf{r}(b) \mid a \in \mathit{Vertices}(A),\ b \in \mathit{Vertices}(B)\,\}$. Однако, как правило, лишь малая часть элементов этого множества дает вершины выпуклой оболочки. Чтобы сократить количество точек, для которых будет строиться выпуклая оболочка, был разработан алгоритм 1.

Пусть a — некоторая вершина многогранника A. Обозначим коническую оболочку нормалей сходящихся в a граней A через $\mathrm{cone}(a)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $a \in \mathit{Vertices}(A)$ и $b \in \mathit{Vertices}(B)$. Если вершина $v \in \mathit{Vertices}(A \oplus B)$ такова, что $\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(a) + \mathbf{r}(b)$, то $\mathrm{cone}(a) \cap \mathrm{cone}(b)$ содержит ненулевой элемент.*

Доказательство. Из того, что v является вершиной $A \oplus B$, следует, что найдется $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}(v) = \max\{\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in A \oplus B\,\}$, откуда получаем $\max\{\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A\,\} + \max\{\, \mathbf{k}\cdot\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in B\,\} = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}(a)+\mathbf{r}(b))$. Конус нормалей при вершине содержит направления, вдоль которых эта вершина является наиболее удаленной точкой своего многогранника. Очевидно, $\mathbf{k}$ принадлежит и $\mathrm{cone}(a)$ и $\mathrm{cone}(b)$. □

Алгоритм 1. Алгебраическая сумма.

Через $\mathrm{BFS}(G, S, P, R)$ обозначим объединение множеств $R(u)$, построенное для всех вершин u графа G, удовлетворяющих предикату P, пройденных поиском в ширину по графу G, начиная с вершин из множества S. Алгоритм построения алгебраической суммы основан на следующем утверждении.

Утверждение 2. *Пусть A и B — выпуклые многогранники, тогда*

$$\begin{aligned}A \oplus B = \mathrm{conv}\Big\{\, &\mathrm{BFS}\Big(\mathit{VG}(A),\ \arg\max\{\, \mathbf{r}(a) \cdot \mathit{Normal}(f) \mid a \in \mathit{Vertices}(A)\,\},\\ &\quad \lambda u\ .\ \mathbf{r}(u) \cdot \mathit{Normal}(f) = \max\{\, \mathbf{r}(u) \cdot \mathit{Normal}(g) \mid g \in \mathit{Facets}(B)\,\},\\ &\quad \lambda a\ .\ \mathrm{BFS}\big(\mathit{VG}(B),\ \mathit{Vertices}(f),\ \lambda b\ .\ \mathrm{cone}(a) \cap \mathrm{cone}(b) \neq \{\mathbf{0}\},\ \lambda b\ .\ \{\, \mathbf{r}(a)+\mathbf{r}(b)\,\}\big)\Big)\\ &\mid f \in \mathit{Facets}(B)\,\Big\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что $A \oplus B = \mathrm{conv}\,\{\, \mathbf{r}(a) + \mathbf{r}(b) \mid a \in \mathit{Vertices}(A),\ b \in \mathit{Vertices}(B),\ \mathrm{cone}(a) \cap \mathrm{cone}(b) \neq \{\mathbf{0}\}\,\}$. Конусы вершин многогранника полностью заметают $\mathbb{R}^n$ и являются выпуклыми, поэтому каждой вершине v одного многогранника отвечает связная область графа вершин другого многогранника, содержащая все вершины, конусы которых имеют нетривиальное пересечение с конусом v.

Внешний поиск в ширину для каждой грани B находит вершины A, конусы которых содержат нормаль этой грани (являющуюся, таким образом, общим элементом конусов вершин грани и конусов найденных вершин A). Внутренний поиск в ширину для каждой пройденной в процессе поиска вершины A находит вершины B, конусы которых имеют общие ненулевые элементы с конусом выбранной вершины A. Таким образом, для каждой вершины b из B находятся все вершины a из A такие, что $\mathrm{cone}(a) \cap \mathrm{cone}(b) \neq \{\mathbf{0}\}$. □

Замечание. Проверка существования ненулевого элемента в пересечении конусов может быть сведена к проверке на совместность системы линейных неравенств и осуществлена, например, методами из [18].

2.3. Геометрическая разность

Геометрическая разность $A \ominus B$ многогранников $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ строится (алгоритм 3) как пересечение отрицательных полупространств сдвинутых опорных гиперплоскостей A. Для каждой грани $f \in \mathit{Facets}(A)$ находится максимальный обеспечиваемый вершинами B сдвиг ее опорной гиперплоскости против направления ее внешней нормали. Построение пересечения производится отсечением частей A, попавших в положительное полупространство какой-либо из полученных гиперплоскостей (алгоритм 2).

Помимо геометрической разности, алгоритм 2 может быть использован для построения пересечения двух многогранников A и B. Для этого требуется отсечь от (например) A положительные полупространства всех опорных гиперплоскостей B.

Гиперплоскость будем отождествлять с парой (“нормаль”, “расстояние до нуля”). Пусть $\alpha \triangleq (\mathbf{n}, d)$ — некоторая гиперплоскость. Обозначим положительное полупространство гиперплоскости α через $\mathit{Outer}(\alpha)$:

$$\mathit{Outer}(\alpha) \triangleq \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} > d \,\}.$$

Отсечение положительного полупространства производится в три этапа.

1. Направленным поиском найти вершину, попавшую в положительное полупространство отсекающей гиперплоскости. Если такой вершины не существует, то A целиком лежит в неположительном полупространстве.

2. Поиском в ширину найти вершины, удаляемые при отсечении. Поиск в ширину останавливается на вершинах, оказавшихся в неположительном полупространстве. Таким образом, определяется набор E всех ребер вида (w, u), где w — удаляемая вершина, а u — остающаяся вершина. Может оказаться, что A полностью находится в положительном полупространстве (ситуация $A \ominus B = \varnothing$), тогда набор E будет пуст.

3. Построить выпуклую оболочку точек пересечения отрезков, отвечающих элементам из E, с отсекающей гиперплоскостью. Вершины этой выпуклой оболочки являются вершинами новой грани.

Из описанных выше построений и выпуклости A следует следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для заданных многогранника A и гиперплоскости α алгоритм* 2 *строит $A \setminus \mathit{Outer}(\alpha)$.*

Алгоритм 2. Отсечение полупространства (CutPlane).

Input: A — непустой многогранник, $\alpha \triangleq (\mathbf{n}, d)$ — отсекающая гиперплоскость
Output: $C = A \setminus \mathit{Outer}(\alpha)$
— найти, с какой вершины начать удаление (взять любую v из множества):
let $v \in \arg\max\{\, \mathbf{r}(a) \cdot \mathbf{n} \mid a \in \mathit{Vertices}(A) \,\}$
if $v \notin \mathit{Outer}(\alpha)$ **then return** A — уже верно, что $A \cap \mathit{Outer}(\alpha) = \varnothing$;
— заполнить набор удаляемых вершин VD поиском в ширину по $\mathit{VG}(A)$, начиная с v:
$\mathit{VD} \leftarrow \{\, w \in \mathit{Outer}(\alpha) \mid w \in \mathit{Vertices}(A) \,\}$
— получить набор ребер E в процессе заполнения VD:
$E \leftarrow \{\, (w, u) \mid w \in \mathit{VD} \wedge u \in \mathit{Adj}(w, \mathit{VG}(A)) \setminus \mathit{VD} \,\}$
— построить $(n-1)$-мерный многогранник, формирующий новую грань f:
$f \leftarrow \operatorname{conv}\{\, \alpha \cap \operatorname{conv}\{\mathbf{r}(w), \mathbf{r}(u)\} \mid (w, u) \in E \,\}$
— построить многогранник C:
$\mathit{Vertices}(C) \leftarrow (\, \mathit{Vertices}(A) \setminus \mathit{VD}) \cup \mathit{Vertices}(f)$
$\mathit{Facets}(C) \leftarrow \{\, g \in \mathit{Facets}(A) \mid \mathit{Vertices}(g) \setminus \mathit{VD} \neq \varnothing \,\} \cup \{\, f \,\}$
сформировать $\mathit{VG}(C)$, $\mathit{FG}(C)$, $\mathit{VF}(C)$ на основе $\mathit{VG}(A)$, $\mathit{FG}(A)$, $\mathit{VF}(A)$, исключив элементы, отвечающие удаленным вершинам и граням, и добавив элементы, отвечающие f;
— связать f с остальной частью C:
for all $p \in \mathit{Vertices}(f)$ **do**
  let $(w, u) \in E \colon \mathbf{r}(p) = \operatorname{conv}\{\mathbf{r}(w), \mathbf{r}(u)\,\} \cap \alpha$
  $\mathit{Edg}(\mathit{VG}(C)) \Leftarrow \{\, (p, u) \,\}$
  $B \leftarrow \mathit{Facets}(w) \cap \mathit{Facets}(u)$

$Edg(FG(C)) \Leftarrow \{\, (f, b) \mid b \in B \,\}$
$Adj(p, VF(C)) \Leftarrow B$
end for
return C

А л г о р и т м 3. Геометрическая разность.
Input: A и B — непустые многогранники, $\mathbf{0} \in B$
Output: $A \ominus B$
$maxshift(f) \triangleq -\max\{\, \mathbf{r}(b) \cdot Normal(f) \mid b \in Vertices(B) \,\}$
— построить набор сдвинутых опорных гиперплоскостей A:
$D \leftarrow \{\, (\, Normal(f), Dist(f) + maxshift(f) \,) \mid f \in Facets(A) \,\}$
— отсечь положительное полупространство каждой сдвинутой гиперплоскости:
for all $\alpha \in D$ **do**
$A \leftarrow \mathrm{CutPlane}(A, \alpha)$
if $Vertices(A) = \varnothing$ **then return** $\varnothing$
end for
return A

Утверждение 4. *Пусть* $\mathbf{0} \in B$. *Алгоритм 3 строит* $A \ominus B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство от противного.

1. Предположим, найдется $\mathbf{y} \in A \ominus B$ такое, что для некоторого $f \in Facets(A)$ верно $\mathbf{y} \cdot Normal(f) > Dist(f) - \max\{\, \mathbf{r}(b) \cdot Normal(f) \mid b \in Vertices(B) \,\}$.

По определению $A \ominus B = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \{\mathbf{x}\} \oplus B \subseteq A \,\}$. Следовательно, для любого $\mathbf{z} \in B$ найдется $\mathbf{a} \in A$ такое, что $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{a}$. Домножим скалярно это равенство на $Normal(f)$ и вычтем из обеих его частей $\mathbf{y} \cdot Normal(f)$. Из того, что $\mathbf{a} \cdot Normal(f) \leqslant Dist(f)$, следует, что должно выполняться $\mathbf{z} \cdot Normal(f) < \max\{\, \mathbf{r}(b) \cdot Normal(f) \mid b \in Vertices(B) \,\}$. Противоречие получено.

2. Предположим, найдется $\mathbf{y} \in (A \ominus B) \setminus A$. Из определения геометрической разности следует, что $\forall \mathbf{z} \in B \; \exists \mathbf{a} \in A \colon \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{a}$. Чтобы получить противоречие, положим $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. $\square$

З а м е ч а н и е. Если условие $\mathbf{0} \in B$ не соблюдается, то следует предварительно вычесть, например, арифметическое среднее радиусов-векторов вершин B из A и из B.

3. Алгоритм построения аппроксимационного движения

Практическая реализация того или иного N-решения требует предварительного согласования игроками отслеживаемого движения $\mathbf{x}(t)$ и максимального допустимого отклонения от него в процессе движения. В дальнейшем удобно положить, что игроки выбирают общее разбиение временно́го отрезка $\Delta = \{\, t_j \,\}_1^N$, где $t_1 = t_0$ и $t_N = \vartheta$, и в процессе отслеживания движения $\mathbf{x}(t)$ реализуют управления $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ как кусочно-постоянные функции $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}(t_j)$ и $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}(t_j)$ при $t \in [t_j, t_{j+1})$, $1 \leqslant j < N$.

З а д а ч а 2. Пусть заданы набор точек $M \subset \mathbb{R}^n$ и начальная позиция $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Требуется построить (или определить, что это невозможно) движение $\mathbf{x}(t)$

- удовлетворяющее динамике (1.1) с ограничениями на управления игроков P и Q;
- соединяющее $(t_0, \mathbf{x}_0)$ и (ϑ, M);
- удовлетворяющее условию $\mathbf{x}(t_j) \notin W_j^1 \cup W_j^2$ для заданных выпуклых многогранников $W_j^i, \quad i = 1, 2, \quad 1 < j < N$;
- максимизирующее показатель качества, заданный на M.

Обозначим

$$Control_j \triangleq \int\limits_{t_{j+1}}^{t_j} \mathbf{B}(t)\, dt\; P \oplus \int\limits_{t_{j+1}}^{t_j} \mathbf{C}(t)\, dt\; Q, \quad AC_j \triangleq \bigoplus_{k=1}^{j} Control_k.$$

Решение задачи 2 строится следующим образом. Перебираются элементы M в порядке убывания показателя качества (целевые конечные позиции $(\vartheta, \mathbf{x}_\vartheta)$). Для каждой позиции $(\vartheta, \mathbf{x}_\vartheta)$ выполняется направленный поиск в глубину (алгоритм 4) по неявно заданному графу позиций.

На каждом шаге поиска производится попытка перейти из последней полученной на текущий момент позиции $(t_{j+1}, \mathbf{x})$ в еще не пройденную ранее (с заданной точностью) позицию $(t_j, \mathbf{x}+\mathbf{h})$, где $\mathbf{h} \in \mathit{Control}_j$ отвечает допустимому в силу динамики (1.1) и заданных ограничений на управления игроков переходу из $(t_j, \mathbf{x}+\mathbf{h})$ в $(t_{j+1}, \mathbf{x})$ и минимизирует $\|(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{x}_0\|$ (эвристика).

Кроме того, на выбор $\mathbf{h}$ накладываются следующие условия:

- соблюдение фазовых ограничений $(\mathbf{x}+\mathbf{h}) \notin (W_j^1 \cup W_j^2)$;
- $(\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}+\mathbf{h})) \in AC_{j-1}$, что обеспечивает существование аппроксимационного движения системы (1.1) из $(t_0, \mathbf{x}_0)$ в $(t_j, \mathbf{x}+\mathbf{h})$ без учета фазовых ограничений.

Если такого $\mathbf{h}$ не найдено, то происходит возврат, при котором выбирается наиболее близкая в $\mathbb{R}^n$ к $\mathbf{x}_0$ позиция из лежащих на вершинах стеков (для каждого шага по времени создается по одному стеку позиций). Если все стеки пусты, то считаем, что искомого движения не существует.

Для выбора $\mathbf{h}$ на $\mathit{Control}_j$ строятся сетки узлов $\mathit{Grid}(\mathit{Control}_j)$.

А л г о р и т м 4. Движение.

Input: W^1, W^2, $\mathit{Control}$ и AC — массивы многогранников; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_\vartheta$ — начальная и конечная позиции искомого движения; S — ссылка на массив наборов проверенных позиций; $\kappa > 0$ — параметр точности; N — размер всех массивов

Output: **true**, если движение построено (тогда массив T содержит его узлы), иначе **false**

if $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\vartheta) \notin AC_{N-1}$ **then return false**

Σ_k, $k = \overline{1, N}$ — стеки позиций в $\mathbb{R}^n$;

push Σ_N, $\mathbf{x}_\vartheta$

$j \leftarrow N$

repeat

  if $\Sigma_j = \varnothing$ **then** $j \leftarrow \arg\min\{\, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{top}\ \Sigma_k\| \mid k = \overline{1, N-1}\,\}$

  $T_j \leftarrow \mathbf{pop}\ \Sigma_j$

  $j \leftarrow j - 1$

  if $j > 1$ **then**

    $Y \triangleq \{\, T_{j+1} + \mathbf{h} \mid \mathbf{h} \in \mathit{Grid}(\mathit{Control}_j)\,\}$

    $A \leftarrow \{\, \mathbf{y} \in Y \mid \mathbf{y} \notin W_j^1 \ \wedge\ \mathbf{y} \notin W_j^2 \ \wedge\ (\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}) \in AC_{j-1} \ \wedge\ O_\kappa(\mathbf{y}) \cap S_j = \varnothing\,\}$

    $S_j \Leftarrow A$

    sort A: $A_k \prec A_l \equiv \|A_k - \mathbf{x}_0\| > \|A_l - \mathbf{x}_0\|$

    — поместить в стек элементы A в порядке сортировки:

    push Σ_j, A_k: $k = \overline{1, |A|}$ — на вершине окажется ближайшая к $\mathbf{x}_0$ позиция из A;

  else

    $T_1 \leftarrow \mathbf{x}_0$

    return true

  end if

until $\forall k = \overline{1, N}\ \Sigma_k = \varnothing$ — цикл останавливается, когда исчерпаны все стеки;

return false

Для ускорения проверки попадания внутрь W_j^1, W_j^2 и AC_j для каждого многогранника предварительно строится содержащий его параллелотоп с гранями, параллельными осям координат.

В процессе работы пройденные позиции $\mathbf{x}$ помещаются в хеш-таблицы S_j. При этом предварительно выполняется покоординатное округление до целых вектора $(1/\kappa)\mathbf{x}$, что при проверке попадания точки-кандидата в S_j соответствует проверке попадания в κ-окрестность по

∞-норме в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, хеш-таблицы представляют собой множества кубических ячеек с ребром κ, на которые разбивается $\mathbb{R}^n$. В процессе поиска S_j накапливают ячейки, через которые не проходит искомое движение.

Выбор малой величины κ может привести к большому расходу памяти и замедлению поиска. Выбор большой величины κ может привести к необнаружению некоторых движений, проходящих через "узкие щели" между W^1 и W^2.

Использование вместо одного стека набора стеков позволяет избежать "плутания в тупике", когда строимое движение обрывается на удалении от $\mathbf{x}_0$. Выбор ближайшей к $\mathbf{x}_0$ позиции среди точек, находящихся на вершинах стеков Σ_j, позволяет начать поиск нового движения из окрестности произвольного узла старого. Указанный подход можно считать компромиссом между простым направленным поиском и алгоритмом A^* [19], выбирающим позицию с наилучшей оценкой длины пути из фронта поиска, что требует хранения большого количества позиций в очереди с приоритетом, допускающей удаление произвольных элементов. Такая очередь может быть реализована с помощью сбалансированного двоичного дерева, что может приводить к существенно большему расходу памяти и снижению быстродействия, чем использование фиксированного набора стеков. Кроме того, на движения, являющиеся решениями задачи 2, не накладывается требование минимизации длины пройденного пути.

Главным недостатком используемого подхода является невозможность быстрого определения факта отсутствия искомого движения. В общем случае для этого может понадобиться покрыть все достижимые ячейки (с учетом фазовых ограничений).

4. Модельные примеры

4.1. Стабильный мост

Для сравнения с существующими алгоритмами, строящими максимальные стабильные мосты для игр в плоскости, был выбран пример из [8], имеющий следующую динамику:

$$\dot{x}_1 = x_2 + v,$$
$$\dot{x}_2 = u.$$

На управления игроков наложены следующие ограничения: $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$. Заданы моменты начала $t_0 = 0$ и окончания $\vartheta = 4$ игры и целевое множество M — круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Для построении моста в $\mathbb{R}^3$ динамика была дополнена уравнением

$$\dot{x}_3 = 0,$$

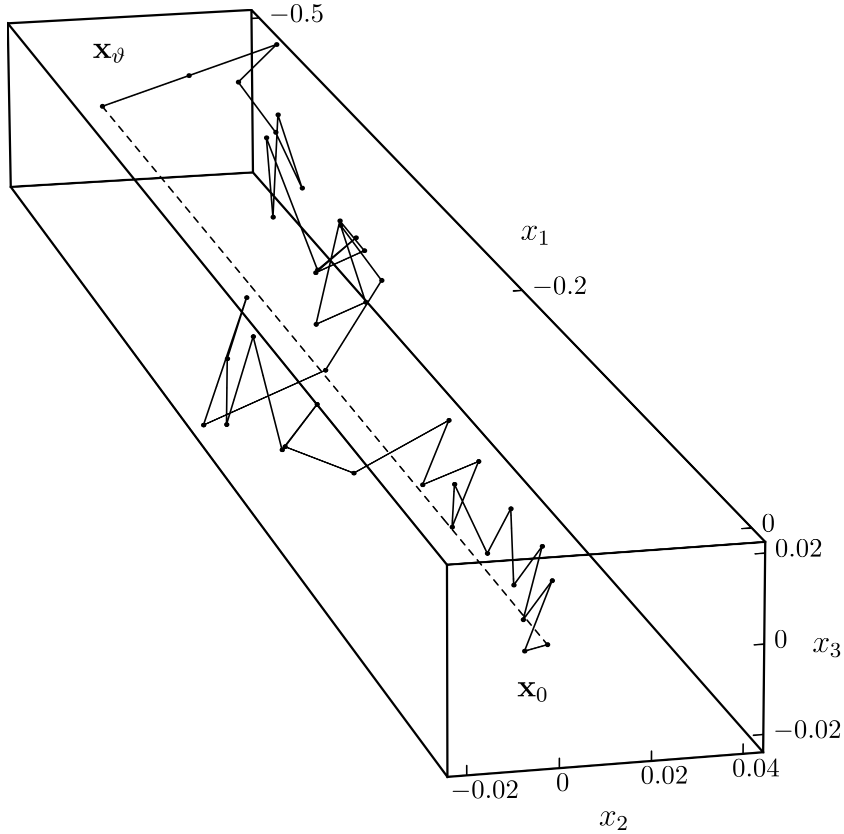
а множество M заменено на цилиндр высоты 1. Как и в [8], использовался шаг по времени, равный 0.05, и приближение круга (основания цилиндра) вписанным в него стоугольником.

Полученный мост сохраняет высоту исходного цилиндра по оси $0x_3$, а в проекции на плоскость (x_1, x_2) визуально совпадает с результатом в [8], при этом верхняя точка для момента $t = t_0$ в приведенных координатах (используется замена известного вида [2] для приведения динамики к форме (1.1)) имеет координаты $(5.9845, 3.6610)$. В [8] приведены координаты $(5.9654, 3.6574)$. Вычисление заняло порядка 10 с на ЭВМ с ЦП AMD Phenom 2 x4 2.1ГГц.

4.2. Стабильные мосты и движения

В качестве модельной рассматривалась игра со следующими характеристиками:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad t_0 = 0,\ \vartheta = 1, \quad \mathbf{x}_0 = (0,0,0)^\top,$$
$$P = \{\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{u}\| \leqslant 1 \,\}, \quad Q = \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{v}\| \leqslant 0.5 \,\},$$
$$\sigma_1(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x} - (-2,0,0)^\top\|, \quad \sigma_2(\mathbf{x}) = -\|\mathbf{x} - (2,0,0)^\top\|.$$



Траектория.

Были зафиксированы целевые значения показателей качества $c_1 = 1.5, c_2 = 2.5$.

В указанной постановке игра симметрична относительно оси $0x_1$, t-сечения моста $W_1^{c_1}$ представляют собой шары с центрами в $(-2,0,0)^\top$ радиуса $(2-0.5t)$. Аналогично, t-сечения моста $W_2^{c_2}$ представляют собой шары с центрами в $(2,0,0)^\top$ радиуса $(2+0.5t)$. Таким образом, $W_{c_1}^1 \cap W_{c_2}^2 = \{\,(t,(-0.5t,0,0)^\top) \mid t \in [t_0,\vartheta]\,\}$. Позиция $(t_0,\mathbf{x}_0) \in W_1^{c_1} \cap W_2^{c_2}$. Движение, являющееся решением задачи 2 в данной системе, должно соединять позиции $(0,(0,0,0)^\top)$ и $(1,(-0.5,0,0)^\top)$, не заходя в промежуточных позициях в $W_1^{c_1} \cup W_2^{c_2}$.

При построении движения использовались следующие параметры точности: шаг по времени 0.025, сферы P и Q покрывались 262 вершинами, $M_i^{c_i}$ — 1002 вершинами, параметр $\kappa = 0.005$. Полученное движение (показано на рисунке, отрезок $\mathbf{x}_0$ – $\mathbf{x}_\vartheta$ изображен пунктирной линией) блуждает около оси $0x_1$ на расстоянии от 0.0055 до 0.048 в промежуточных позициях (они не попадают в соответствующие t-сечения $W_i^{c_i}$). Вычисление $W_1^{c_1}$ заняло 152 с, $W_2^{c_2}$ — 97 с, поиск траектории занял 49 мин. на ЭВМ с ЦП AMD Phenom 2 x4 2.1ГГц и 4Гб ОЗУ (при вычислении данного примера программой было занято около 6Гб).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
4. **Кувшинов Д.Р.** Алгоритм численного построения решений по Нэшу в позиционной дифференциальной игре двух лиц // Вест. Удмурт. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 81–90. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)

5. **Клейменов А.Ф., Кувшинов Д.Р., Осипов С.И.** Численное построение решений Нэша и Штакельберга в линейной неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 120–133.
6. Computational Geometry Algorithms Library. URL: http://www.cgal.org/.
7. **Chazelle B.** An optimal convex hull algorithm in any fixed dimension // Discrete Comput. Geom. 1993. Vol. 10. P. 377–409.
8. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
9. **Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А.** Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 128–134.
10. Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр / Е.С. Половинкин [и др.] // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 95–122.
11. **Шориков А.Ф.** Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 241 с.
12. **Шориков А.Ф.** Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования-уклонения в дискретных динамических системах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 2. С. 515–535.
13. **Камзолкин Д.В.** Методы решения некоторых классов задач оптимального управления и дифференциальных игр: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2005. 116 с.
14. **Зарх М.А., Иванов А.Г.** Построение функции цены в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 140–155.
15. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры, 2 // Докл. АН СССР. Т. 175, № 4. 1967. С. 764–766.
16. **Кувшинов Д.Р.** Численное построение решений по Нэшу в позиционной дифференциальной игре двух лиц с фазовым пространством размерности больше двух // Теория управления и математическое моделирование: тр. конф. Ижевск: Изд-во ИжГТУ, 2012. С. 33–35.
17. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
18. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.
19. **Hart P.E., Nilsson N.J., Raphael B.** A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths // IEEE Trans. Syst. Science and Cybernetics. 1968. Vol. 4, no. 2. P. 100–107.

Кувшинов Дмитрий Рустамович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: evetro.here@gmail.com

Поступила 25.05.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИРУЮЩИЕ ПОВОДЫРИ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

В работе обосновывается устойчивая к возмущениям процедура взаимного отслеживания движений исходного конфликтно-управляемого объекта, описываемого функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа, и моделирующего объекта-поводыря, описываемого обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: теория управления, дифференциальные игры, системы с запаздыванием, устойчивое отслеживание.

N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. Finite-dimensional modeling guides in time-delay systems.

We validate a disturbance-stable procedure for a mutual tracking of motions of a conflict-controlled object described by functional–differential equations of delay type and a guiding object, which models the former object and is described by ordinary differential equations.

Keywords: control theory, differential games, time-delay systems, stable tracking.

Введение

Статья касается вопросов управления движением динамических систем с запаздыванием в условиях помех или конфликта. Отметим, что динамические системы с запаздыванием (см. [1–5]) составляют одно из основных направлений исследований С.Н. Шиманова (см., например, [5–8]). В статье для этих, по сути бесконечномерных систем, исследуется процедура управления с конечномерным моделирующим поводырем.

Ранее в работах [9–12] были даны решения некоторых задач об устойчивости и об управлении в системах дифференциальных уравнений с запаздыванием, основанные на их аппроксимации обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обоснование указанной аппроксимации для случая линейных стационарных систем и постоянных запаздываний изложено в [9]. В работе [11] этот результат распространен на нелинейные нестационарные системы, а в [13] — на случай переменных запаздываний. Подобные аппроксимации, их обобщения и приложения к различным задачам рассматривались позднее в работах [8; 14–20]. В работе [21] было предложено использовать аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве вспомогательных моделей-поводырей [22; 23] для решения задач конфликтного управления движением систем с запаздыванием. Основную цель предлагаемой работы составляет детальное обоснование такой вспомогательной процедуры управления с конечномерным поводырем для достаточно общего класса функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа.

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”, при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), а также при поддержке РФФИ (12-01-00290-а, 12-01-31247-мол_а).

1. Предположения и обозначения

Исследуется динамическая система, которая описывается функционально-дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\dot{x}[t] = f^*\big(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]\big), \quad t \in [t_0, T], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}, \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$x_{t_0}[\vartheta] = x[t_0 + \vartheta] = z[\vartheta], \quad \vartheta \in [-h, 0]. \tag{1.2}$$

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент времени t; $\dot{x}[t] = \mathrm{d}x[t]/\mathrm{d}t$; $h = \mathrm{const} > 0$; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке времени $[t-h, t]$, причем $x_t[\vartheta] = x[t+\vartheta]$, $\vartheta \in [-h, 0]$; $u[t]$ — текущее управляющее воздействие; $v[t]$ — воздействие помехи; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — известные компакты конечномерных пространств. Для пространства непрерывных функций, действующих из $[-h, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, оснащенного равномерной нормой, примем обозначение $C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$. Предполагается, что начальная функция $z[\cdot]$ принадлежит некоторому компакту $Z \subset C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$.

Допустимыми считаются измеримые по Борелю реализации управления и помехи

$$u[t_0[\cdot]T) = \big\{u[t] \in \mathbb{U}, t_0 \le t < T\big\}, \quad v[t_0[\cdot]T) = \big\{v[t] \in \mathbb{V}, t_0 \le t < T\big\}.$$

Всюду ниже угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\|\cdot\|$ — для обозначения евклидовой нормы. Для $w[\cdot] \in C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$ введем следующие обозначения:

$$\big\|w[\cdot]\big\|_C = \max_{\vartheta \in [-h, 0]} \big\|w[\vartheta]\big\|,$$

$$\omega_{w[\cdot]}(\delta) = \sup\big\{\big\|w[t'] - w[t'']\big\| \colon t', t'' \in [-h, 0],\ |t' - t''| < \delta\big\}.$$

Будем говорить, что функция $\omega \colon \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ принадлежит классу Ω, если она является неубывающей и $\lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(\delta) = 0$.

В силу теоремы Асколи — Арцела (см., например, [24, с.108]) для компакта Z существуют число R_Z и функция $\omega_Z \in \Omega$ такие, что для любой начальной функции $z[\cdot] \in Z$ справедливы соотношения

$$\big\|z[\cdot]\big\|_C \le R_Z, \quad \omega_{z[\cdot]}(\delta) \le \omega_Z(\delta), \quad \delta > 0. \tag{1.3}$$

Пусть для правой части уравнения (1.1) выполняются следующие условия:

(У.1.1) Отображения $f^* \colon [t_0, T] \times C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big) \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывны.

(У.1.2) Существует такая константа $a > 0$, что для любых $t \in [t_0, T]$, $w[\cdot] \in C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ имеет место оценка

$$\big\|f^*\big(t, w[\cdot], u, v\big)\big\| \le a\big(1 + \big\|w[\cdot]\big\|_C\big).$$

Тогда, в частности, при любых допустимых реализациях $u[t_0[\cdot]T)$ и $v[t_0[\cdot]T)$ для любой начальной функции $z[\cdot] \in Z$ существует решение задачи (1.1), (1.2) — непрерывная функция $x[t_0 - h[\cdot]T] = \{x[t] \in \mathbb{R}^n,\ t_0 - h \le t \le T\}$, которая удовлетворяет условию (1.2), является абсолютно непрерывной на отрезке $[t_0, T]$ и, вместе с $u[t]$ и $v[t]$, почти всюду удовлетворяет уравнению (1.1). В силу условия (У.1.2) для этого решения будут выполняться следующие соотношения:

$$\big\|x[t]\big\| \le R_0 = (1 + R_Z)e^{a(T - t_0)} - 1, \quad t \in [t_0 - h, T], \tag{1.4}$$

$$\big\|x[t'] - x[t'']\big\| \le \omega_0(|t' - t''|) = \omega_Z(|t' - t''|) + a(1 + R_0)|t' - t''|, \quad t', t'' \in [t_0 - h, T]. \tag{1.5}$$

Следовательно, если определить компакты

$$P_0 = \Big\{x[\cdot] \in C\big([t_0 - h, T], \mathbb{R}^n\big) \colon \big\|x[t]\big\| \le R_0,\ \big\|x[t'] - x[t'']\big\| \le \omega_0(|t' - t''|),\ t, t', t'' \in [t_0 - h, T]\Big\},$$

$$D_{P_0} = \{x_t[\cdot] \in C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)\colon\ t \in [t_0,T],\ x[\cdot] \in P_0\}, \tag{1.6}$$

то P_0 будет содержать все решения $x[t_0-h[\cdot]T]$ задачи (1.1), (1.2), а D_{P_0} — все соответствующие этим решениям элементы запаздывания $x_t[\cdot] = \{x_t[\vartheta] = x[t+\vartheta],\ -h \le \vartheta \le 0\}$.

В постановке задачи предполагается, что отображение f^*, определяющее правую часть уравнения (1.1), в точности не известно, однако оно может быть сколь угодно точно аппроксимировано при помощи известного отображения f. Иными словами, для любого $\eta^* > 0$, существует такое $f\colon [t_0,T] \times C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big) \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$, что имеет место оценка

$$\big\|f^*\big(t,w[\cdot],u,v\big) - f\big(t,w[\cdot],u,v\big)\big\| < \eta^*, \quad t \in [t_0,T], \quad w[\cdot] \in D_{P_0}, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}, \tag{1.7}$$

и при этом для f выполняются условия (У.1.1), (У.1.2) (с той же константой $a > 0$), а также следующие условия:

(У.1.3) Для любого компактного множества $D \subset C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$ существует $\lambda\big(D\big) > 0$ такое, что для любых $t \in [t_0,T]$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $w_1[\cdot\,], w_2[\cdot\,] \in D$ справедливо

$$\big\|f\big(t,w_1[\cdot],u,v\big) - f\big(t,w_2[\cdot],u,v\big)\big\| \le \lambda\big(D\big)\big\|w_1[\cdot] - w_2[\cdot]\big\|_C.$$

(У.1.4) Для любых $t \in [t_0,T]$, $w[\cdot] \in C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$ и $s \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(t,w[\cdot],u,v\big),s\big\rangle = \max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(t,w[\cdot],u,v\big),s\big\rangle.$$

2. Аппроксимация элемента запаздывания

Пусть $y[\cdot] \in C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}^n\big)$, $m \in \mathbb{N}$ и $\Delta h = h/m$. Рассмотрим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}^{[1]} = (y[t] - y^{[1]})/\Delta h, \\ \dot{y}^{[2]} = (y^{[1]} - y^{[2]})/\Delta h, \\ \vdots \\ \dot{y}^{[m]} = (y^{[m-1]} - y^{[m]})/\Delta h \end{cases} \qquad t \in [t_0,T], \quad y^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

с начальным условием

$$y^{[i]}[t_0] = y[t_0 - i\Delta h], \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.2}$$

Задача (2.1), (2.2) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение

$$Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T] = \{Y^m_{y[\cdot]}[t] \in \mathbb{R}^{m\times n},\ t_0 \le t \le T\},$$

где

$$Y^m_{y[\cdot]}[t] = \big(y^{[1]}[t] = (y^{[1]}_1[t],\ldots,y^{[1]}_n[t]),\ldots,y^{[m]}[t] = (y^{[m]}_1[t],\ldots,y^{[m]}_n[t])\big).$$

Лемма 1. *При любых* $y[\cdot] \in C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}^n\big)$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *для решения* $Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T]$ *задачи* (2.1), (2.2) *справедливы неравенства*

$$\big\|y^{[i]}[t]\big\| \le \max_{\tau\in[t_0-h,t]}\big\|y[\tau]\big\|, \quad t \in [t_0,T], \quad i = \overline{1,m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим утверждение леммы в случае $i = 1$. В силу системы (2.1) для $y^{[1]}[\cdot]$ имеет место равенство

$$y^{[1]}[t] = y^{[1]}[t_0]e^{-(t-t_0)/\Delta h} + \int_{t_0}^{t} y[\tau]e^{-(t-\tau)/\Delta h}/\Delta h\,\mathrm{d}\tau,$$

из которого вытекают оценки

$$\big\|y^{[1]}[t]\big\| \le \big\|y^{[1]}[t_0]\big\|e^{-(t-t_0)/\Delta h} + \max_{\tau\in[t_0,t]}\big\|y[\tau]\big\|\int\limits_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)/\Delta h}/\Delta h\,\mathrm{d}\tau$$

$$\le \max_{\tau\in[t_0-h,t]}\big\|y[\tau]\big\|\left(e^{-(t-t_0)/\Delta h} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-(t-\tau)/\Delta h}/\Delta h\,\mathrm{d}\tau\right) = \max_{\tau\in[t_0-h,t]}\big\|y[\tau]\big\|.$$

Аналогичные рассуждения можно применить и в случае $i > 1$. Лемма доказана.

Если $n = 1$, то задача (2.1), (2.2) определяет операторы $I^*_{i,\Delta h}\colon C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}\big) \mapsto C\big([t_0,T],\mathbb{R}\big)$, $i = \overline{1,m}$, действующие по следующему правилу:

$$I^*_{i,\Delta h}\big(y[\cdot]\big) = y^{[i]}[\cdot].$$

В общем случае задача (2.1), (2.2) определяет операторы $I_{i,\Delta h}\colon C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}^n\big) \mapsto C\big([t_0,T],\mathbb{R}^n\big)$, $i = \overline{1,m}$, для которых справедливы равенства

$$I_{i,\Delta h}\Big(y[\cdot] = \big(y_1[\cdot],\ldots,y_n[\cdot]\big)\Big) = \Big(I^*_{i,\Delta h}\big(y_1[\cdot]\big),\ldots,I^*_{i,\Delta h}\big(y_n[\cdot]\big)\Big) = \big(y_1^{[i]}[\cdot],\ldots,y_n^{[i]}[\cdot]\big) = y^{[i]}[\cdot].$$

Укажем несколько свойств операторов $I^*_{i,\Delta h}$ и $I_{i,\Delta h}$.

(C.2.1) Эти операторы линейны:

$$I^*_{i,\Delta h}\big(\alpha y'[\cdot]+\beta y''[\cdot]\big) = \alpha I^*_{i,\Delta h}\big(y'[\cdot]\big)+\beta I^*_{i,\Delta h}\big(y''[\cdot]\big),\ y'[\cdot],y''[\cdot] \in C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}\big),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,m},$$

$$I_{i,\Delta h}\big(\alpha y'[\cdot]+\beta y''[\cdot]\big) = \alpha I_{i,\Delta h}\big(y'[\cdot]\big)+\beta I_{i,\Delta h}\big(y''[\cdot]\big),\ y'[\cdot],y''[\cdot] \in C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}^n\big),\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,m}.$$

(C.2.2) Операторы ограничены, $\big\|I^*_{i,\Delta h}\big\| = 1$, $\big\|I_{i,\Delta h}\big\| = 1$, причем нормы достигаются на постоянных функциях.

(C.2.3) Если $y'[\cdot],y''[\cdot] \in C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}\big)$ такие, что $y'[t] \le y''[t],\ t\in[t_0-h,T]$, то

$$I^*_{i,\Delta h}\big(y'[\cdot]\big)[t] \le I^*_{i,\Delta h}\big(y''[\cdot]\big)[t], \quad t\in[t_0,T], \quad i=\overline{1,m}.$$

(C.2.4) Имеет место соотношение

$$\big\|I_{i,\Delta h}\big(y[\cdot]\big)[t]\big\| \le nI^*_{i,\Delta h}\big(\big\|y[\cdot]\big\|\big)[t], \quad t\in[t_0,T], \quad i=\overline{1,m}.$$

(C.2.5) Пусть $y[\cdot]$ — скалярная дважды дифференцируемая на $[t_0-h,T]$ функция, модуль второй производной которой ограничен константой $M_2 \ge 0$. Тогда

$$\big|I^*_{i,\Delta h}\big(y[\cdot]\big)[t] - y[t-i\Delta h]\big| \le M_2 h\Delta h/2, \quad t\in[t_0,T], \quad i=\overline{1,m}.$$

Свойства (C.2.1), (C.2.3) и (C.2.4) можно непосредственно проверить исходя из определения операторов $I^*_{i,\Delta h}$ и $I_{i,\Delta h}$. Свойство (C.2.2) вытекает из рассуждений, приведенных в лемме 1. Свойство (C.2.5) доказано в работе [11]. Теорема 1 ниже является некоторым обобщением этого свойства на случай, когда $y[\cdot]$ — n-мерная непрерывная функция.

Пусть P — компактное подмножество $C\big([t_0-h,T],\mathbb{R}^n\big)$. Тогда существуют число R_P и функция $\omega_P\in\Omega$ такие, что для $y[\cdot]\in P$ справедливы оценки

$$\big\|y[t]\big\| \le R_P, \quad t\in[t_0-h,T], \tag{2.3}$$

$$\big\|y[t']-y[t'']\big\| \le \omega_P(|t'-t''|), \quad t',t''\in[t_0-h,T]. \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Для всякого компакта* $P \subset C\big([t_0 - h, T], \mathbb{R}^n\big)$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$*, что при любых* $m > M(\varepsilon)$ *и* $y[\cdot] \in P$ *для решения* $Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T]$ *задачи* (2.1), (2.2) *имеют место оценки*

$$\big\|y^{[i]}[t] - y[t - i\Delta h]\big\| \le \varepsilon, \quad t \in [t_0, T], \quad i = \overline{1, m}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводимые рассуждения следуют схеме, приведенной для доказательства подобных утверждений в [25, с. 8–11].

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\omega_P \in \Omega$, можно подобрать такое $\delta_* = \delta_*(\varepsilon) > 0$, что будет выполняться неравенство $n\,\omega_P(\delta_*) < \varepsilon/2$. Поскольку $\Delta h = h/m$, то найдется такое $M(\delta_*) \in \mathbb{N}$, что для всех $m > M(\delta_*)$ будет справедлива оценка $2R_P nh\Delta h/\delta_*^2 < \varepsilon/2$. Покажем, что найденное таким образом число $M(\varepsilon) = M(\delta_*(\varepsilon))$ будет удовлетворять утверждению теоремы.

Из (2.4) следует, что для всех $t', t'' \in [t_0 - h, T]$ таких, что $\big|t' - t''\big| < \delta_*$, выполняется неравенство $\big\|y[t'] - y[t'']\big\| \le \omega_P(\delta_*)$. Если же $\big|t' - t''\big| \ge \delta_*$, то в силу (2.3) имеем

$$\big\|y[t'] - y[t'']\big\| \le \big\|y[t']\big\| + \big\|y[t'']\big\| \le 2R_P \le 2R_P(t' - t'')^2/\delta_*^2.$$

Объединяя оба случая, получаем неравенство

$$\big\|y[t'] - y[t'']\big\| \le \omega_P(\delta_*) + 2R_P(t' - t'')^2/\delta_*^2, \quad t', t'' \in [t_0 - h, T]. \tag{2.5}$$

По определению оператора $I_{i,\Delta h}$ справедливо равенство $y^{[i]}[t] = I_{i,\Delta h}\big(y[\cdot]\big)[t]$. Для всякого зафиксированного $t \in [t_0, T]$, применяя оператор $I_{i,\Delta h}$ к постоянной функции $c[\cdot] \equiv y[t - i\Delta h]$, по свойству (C.2.2) приходим к равенству $y[t - i\Delta h] = I_{i,\Delta h}\big(y[t - i\Delta h]\big)[t]$. Из этих равенств, пользуясь свойством линейности (C.2.1), выводим

$$\big\|y^{[i]}[t] - y[t - i\Delta h]\big\| = \big\|I_{i,\Delta h}\big(y[\cdot] - y[t - i\Delta h]\big)[t]\big\|. \tag{2.6}$$

Положим

$$\gamma_i[r, t] = (r - t + i\Delta h)^2.$$

Пользуясь свойствами (C.2.1)—(C.2.4) и неравенством (2.5), получаем

$$\big\|I_{i,\Delta h}\big(y[\cdot] - y[t - i\Delta h]\big)[t]\big\| \le nI^*_{i,\Delta h}\big(\big\|y[\cdot] - y[t - i\Delta h]\big\|\big)[t]$$

$$\le n\omega_P(\delta_*) + (2R_P n/\delta_*^2) I^*_{i,\Delta h}\big(\gamma_i[\cdot, t]\big)[t]. \tag{2.7}$$

Функция $\gamma_i[r, t]$ дважды дифференцируема по r, ее вторая производная по r равна 2, следовательно, в силу (C.2.5) будет справедлива оценка

$$I^*_{i,\Delta h}\big(\gamma_i[\cdot, t]\big)[t] \le h\Delta h + \gamma_i[t - i\Delta h, t] = h\Delta h. \tag{2.8}$$

Объединяя соотношения (2.6)—(2.8), приходим к неравенству

$$\big\|y^{[i]}[t] - y[t - i\Delta h]\big\| \le n\omega_P(\delta_*) + 2R_P nh\Delta h/\delta_*^2.$$

По выбору чисел δ_* и $M(\delta_*)$ правая часть этого неравенства меньше ε. Теорема доказана.

Лемма 2. *Для любого компакта* $P \subset C\big([t_0 - h, T], \mathbb{R}^n\big)$ *найдется такая функция* $\omega'_P \in \Omega$*, что при любых* $m \in \mathbb{N}$ *и* $y[\cdot] \in P$ *для решения* $Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T]$ *задачи* (2.1), (2.2) *будут справедливы оценки*

$$\big\|y^{[i]}[t'] - y^{[i]}[t'']\big\| \le \omega'_P(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [t_0, T], \quad i = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Достаточно доказать равномерную непрерывность семейства $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{m} I_{i,\Delta h}(P)$, где $I_{i,\Delta h}(P)=\bigl\{y^{[i]}[\cdot]=I_{i,\Delta h}(y[\cdot])\bigm| y[\cdot]\in P\bigr\}$. Напомним, что $\Delta h=h/m$.

Возьмем $\varepsilon>0$. По теореме 1 для него найдется такое $M=M(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что для всех $m>M(\varepsilon)$ и $y[\cdot]\in P$ будут выполняться оценки

$$\bigl\|y^{[i]}[t]-y[t-i\Delta h]\bigr\|\le\varepsilon/4,\quad t\in[t_0,T],\quad i=\overline{1,m}. \tag{2.9}$$

Операторы $I_{i,\Delta h}$ линейны и ограниченны, следовательно, непрерывны. Поэтому для любых $m\in\mathbb{N}$ и $i=1,2,\dots,m$ множества $I_{i,\Delta h}(P)$ будут компактны, а стало быть, будет компактным и следующее объединение $\bigcup\limits_{m=1}^{M}\bigcup\limits_{i=1}^{m} I_{i,\Delta h}(P)$. Отсюда по теореме Асколи — Арцела заключаем, что найдется такая функция $\omega_M\in\Omega$, для которой при любых $m\le M$ и $y[\cdot]\in P$ для решения $Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T]$ будут выполняться неравенства

$$\bigl\|y^{[i]}[t']-y^{[i]}[t'']\bigr\|\le\omega_M(|t'-t''|),\quad t',t''\in[t_0,T],\quad i=\overline{1,m}. \tag{2.10}$$

Выберем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ так, чтобы выполнялись неравенства $\omega_M(\delta)\le\varepsilon$ и $\omega_P(\delta)\le\varepsilon/2$. Тогда для всех $t',t''\in[t_0,T]$: $|t'-t''|\le\delta$ в случае $m\le M$ в силу (2.10) имеем $\bigl\|y^{[i]}[t']-y^{[i]}[t'']\bigr\|\le\varepsilon$, а в случае $m>M$, пользуясь оценками (2.4),(2.9), получаем

$$\bigl\|y^{[i]}[t']-y^{[i]}[t'']\bigr\|\le\varepsilon/2+\bigl\|y[t'-i\Delta h]-y[t''-i\Delta h]\bigr\|\le\varepsilon/2+\omega_P(|t'-t''|)\le\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$\overline{Y}^{\,m}=\bigl(y^{[0]}=(y_1^{[0]},\dots,y_n^{[0]}),y^{[1]}=(y_1^{[1]},\dots,y_n^{[1]}),\dots,y^{[m]}=(y_1^{[m]},\dots,y_n^{[m]})\bigr)\in\mathbb{R}^{(m+1)\times n} \tag{2.11}$$

и рассмотрим оператор $S_m\colon\mathbb{R}^{(m+1)\times n}\mapsto C\bigl([-h,0],\mathbb{R}^n\bigr)$, действующий по правилу

$$S_m\bigl(\overline{Y}^{\,m}\bigr)[\vartheta]=(y^{[i]}-y^{[i+1]})(\vartheta/\Delta h+i+1)+y^{[i+1]},\quad \vartheta\in[-(i+1)\Delta h,-i\Delta h],\quad i=\overline{0,m-1}.$$

Фактически оператор S_m вектору (2.11) ставит в соответствие n-мерный линейный сплайн с равноотстоящими узлами $-i\Delta h$ и значениями в узлах равными $y^{[i]}$. Далее договоримся в обозначении оператора S_m опускать индекс m.

На решениях $Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T]$ задачи (2.1), (2.2) определим функцию

$$\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]=\bigl(y[t]=(y_1[t],\dots,y_n[t]),y^{[1]}[t]=(y_1^{[1]}[t],\dots,y_n^{[1]}[t]),\dots,y^{[m]}[t]=(y_1^{[m]}[t],\dots,y_n^{[m]}[t])\bigr).$$

Следующее утверждение является простым следствием теоремы 1.

Теорема 2. *Для всякого компакта $P\subset C\bigl([t_0-h,T],\mathbb{R}^n\bigr)$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $M(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что при любых $m>M(\varepsilon)$ и $y[\cdot]\in P$ для решения $Y^m_{y[\cdot]}[t_0[\cdot]T]$ задачи* (2.1), (2.2) *имеет место оценка*

$$\bigl\|y_t[\cdot]-S\bigl(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\bigr)[\cdot]\bigr\|_C\le\varepsilon,\quad t\in[t_0,T],$$

где $y_t[\cdot]=\bigl\{y_t[\vartheta]=y[t+\vartheta],\ -h\le\vartheta\le0\bigr\}$.

Рассмотрим множество

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\Bigl\{S\bigl(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\bigr)[\cdot]\colon\ y[\cdot]\in P,\ t\in[t_0,T]\Bigr\}. \tag{2.12}$$

Его замыкание в пространстве $C\bigl([-h,0],\mathbb{R}^n\bigr)$ обозначим через D_P^S.

Лемма 3. *Для любого компакта* $P \subset C([t_0-h,T],\mathbb{R}^n)$ *множество* D_P^S *компактно в* $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что функции, составляющие множество (2.12), равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Ограниченность вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\big\|S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\cdot]\big\|_C \le \max\Big\{\big\|y[t]\big\|;\ \max_{i=\overline{1,m}}\big\|y^{[i]}[t]\big\|\Big\} \le \max_{\tau\in[t_0-h,t]}\big\|y[\tau]\big\| \le R_P.$$

Здесь первое неравенство имеет место, так как максимум линейного сплайна достигается в одном из узлов, а следующие два — в силу леммы 1 и неравенства (2.3).

Докажем равностепенную непрерывность. Возьмем $\varepsilon>0$. По теореме 2 найдется натуральное $M=M(\varepsilon)$ такое, что при всех $m>M$ и $y[\cdot]\in P$ будет справедливо неравенство

$$\big\|y_t[\cdot]-S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\cdot]\big\|_C \le \varepsilon/4, \quad t\in[t_0,T]. \tag{2.13}$$

Число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ выберем так, чтобы $\omega_P(\delta)\le\varepsilon/2$ и $2R_PM\delta/h\le\varepsilon$. Тогда для любых $y[\cdot]\in P$, $t\in[t_0,T]$ и $\vartheta',\vartheta''\in[-h,0]$: $|\vartheta'-\vartheta''|\le\delta$ при $m\le M$ имеем

$$\big\|S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\vartheta']-S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\vartheta'']\big\| \le (2R_P/\Delta h)|\vartheta'-\vartheta''| \le (2R_PM\delta/h)\le\varepsilon,$$

а при $m>M$ в силу (2.13) получаем

$$\big\|S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\vartheta']-S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\vartheta'']\big\| \le \varepsilon/2+\big\|y_t[\vartheta']-y_t[\vartheta'']\big\| \le \varepsilon/2+\omega_P(\delta)\le\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$D_P=\big\{y_t[\cdot]\in C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big):\ t\in[t_0,T],\ y[\cdot]\in P\big\}, \quad \widehat{D}_P=D_P\cup D_P^S. \tag{2.14}$$

Тогда компакт $\widehat{D}_P$ будет содержать в себе все элементы запаздывания $y_t[\cdot]$ функций $y[\cdot]\in P$ и все соответствующие этим функциям сплайны $S\big(\overline{Y}^{\,m}_{y[\cdot]}[t]\big)[\cdot]$, $m\in\mathbb{N}$, которые только можно построить в силу системы (2.1), (2.2) при помощи отображения S. Лемма 3 доказана.

3. Моделирующая система-поводырь

Для $m\in\mathbb{N}$ на основе системы (1.1), (1.2) построим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot y^{[0]} = f\big(t,S\big(\overline{Y}^{\,m}\big)[\cdot],\tilde u[t],\tilde v[t]\big),\\ \dot y^{[1]} = \big(y^{[0]}-y^{[1]}\big)/\Delta h,\\ \dot y^{[2]} = \big(y^{[1]}-y^{[2]}\big)/\Delta h,\\ \vdots\\ \dot y^{[m]} = \big(y^{[m-1]}-y^{[m]}\big)/\Delta h \end{cases} \qquad t\in[t_0,T], \quad \tilde u[t]\in\mathbb{U}, \quad \tilde v[t]\in\mathbb{V}, \tag{3.1}$$

с фазовым вектором (2.11) и начальным условием

$$y^{[i]}[t_0]=z[-i\Delta h], \quad i=\overline{0,m}, \quad z[\cdot]\in Z. \tag{3.2}$$

Здесь f — отображение, аппроксимирующее правую часть уравнения (1.1) согласно (1.7). Напомним, что оно удовлетворяет условиям (У.1.1)–(У.1.3). Опираясь на эти условия, можно непосредственно проверить, что при любых измеримых по Борелю реализациях $\tilde u[t_0[\cdot]T)=\big\{\tilde u[t]\in\mathbb{U}, t_0\le t<T\big\}$ и $\tilde v[t_0[\cdot]T)=\big\{\tilde v[t]\in\mathbb{V}, t_0\le t<T\big\}$ в задаче (3.1), (3.2) существует

единственное решение $\overline{Y}^m[t_0[\cdot]T] = \{\overline{Y}^m[t],\ t \in [t_0, T]\}$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая начальному условию (3.2) и почти всюду системе уравнений (3.1).

Для удобства дальнейших рассуждений продолжим функцию $y^0[\cdot]$ на отрезок $[t_0 - h, t_0]$, полагая

$$y^{[0]}[t_0 + \vartheta] = y^{[0]}_{t_0}[\vartheta] = z[\vartheta], \quad \vartheta \in [-h, 0].$$

Теорема 3. *Пусть отображение* $f\colon [t_0, T] \times C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big) \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* (У.1.1)—(У.1.3). *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *что для всех* $m > M(\varepsilon)$ *и* $z[\cdot] \in Z$ *при любых допустимых реализациях* $\tilde{u}[t_0[\cdot]T)$ *и* $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$ *для решения* $\overline{Y}^m[t_0[\cdot]T]$ *задачи* (3.1), (3.2) *имеет место оценка*

$$\big\|y^{[0]}_t[\cdot] - S\big(\overline{Y}^m[t]\big)[\cdot]\big\|_C \le \varepsilon, \quad t \in [t_0, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $y^{[0]}[\cdot] \in P_0$, где компакт P_0 определен в (1.6). В силу системы (3.1), учитывая оценки (1.3) и условие (У.1.2), имеем

$$\big\|y^{[0]}[t]\big\| \le \big\|y^{[0]}[t_0]\big\| + \int\limits_{t_0}^{t} \big\|f\big(\tau, S\big(\overline{Y}^m[\tau]\big)[\cdot], \tilde{u}[\tau], \tilde{v}[\tau]\big)\big\|\, d\tau \le R_Z + \int\limits_{t_0}^{t} a\Big(1 + \big\|S\big(\overline{Y}^m[\tau]\big)[\cdot]\big\|_C\Big)\, d\tau,$$

откуда, принимая во внимание лемму 1 и то, что максимум линейного сплайна достигается в узле, получаем неравенство

$$\big\|y^{[0]}[t]\big\| \le R_Z + \int\limits_{t_0}^{t} a\Big(1 + \max_{\xi \in [t_0 - h, \tau]} \big\|y^{[0]}[\xi]\big\|\Big)\, d\tau.$$

Из того, что правая часть этого неравенства монотонна по t, заключаем

$$\max_{\xi \in [t_0 - h, t]} \big\|y^{[0]}[\xi]\big\| \le R_Z + \int\limits_{t_0}^{t} a\Big(1 + \max_{\xi \in [t_0 - h, \tau]} \big\|y^{[0]}[\xi]\big\|\Big)\, d\tau$$

и далее, пользуясь леммой Гроноулла — Беллмана [3, с. 43], приходим к оценке

$$\big\|y^{[0]}[t]\big\| \le (1 + R_Z)e^{a(T - t_0)} - 1 = R_0, \quad t \in [t_0 - h, T]. \tag{3.3}$$

Аналогичным образом с учетом оценки (3.3) выводим следующую цепочку неравенств:

$$\big\|y^{[0]}[t'] - y^{[0]}[t'']\big\| \le \left|\int\limits_{t'}^{t''} a\Big(1 + \max_{\xi \in [t_0 - h, \tau]} \big\|y^{[0]}[\xi]\big\|\Big)\, d\tau\right| \le a\big(1 + R_0\big)|t' - t''|, \quad t', t'' \in [t_0, T].$$

Отсюда и из (1.3) заключаем

$$\big\|y^{[0]}[t'] - y^{[0]}[t'']\big\| \le \omega_Z(|t' - t''|) + a(1 + R_0)|t' - t''| = \omega_0(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [t_0 - h, T]. \tag{3.4}$$

В согласии с (1.6) оценки (3.3), (3.4) доказывают включение $y^{[0]}[\cdot] \in P_0$, которое справедливо при любых допустимых реализациях $\tilde{u}[t_0[\cdot]T)$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$ и любых $m \in \mathbb{N}$, $z[\cdot] \in Z$. Таким образом, применяя теорему 2 при $P = P_0$, приходим к утверждению доказываемой теоремы. Теорема 3 доказана.

Отметим еще, что в силу включения $y^{[0]}[\cdot] \in P_0$ и леммы 3 в согласии с (1.6) и (2.14) найдется такой компакт $\widehat{D} = \widehat{D}_{P_0} \subset C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$, что для решений $x[t_0[\cdot]T]$ задачи (1.1), (1.2) и $\overline{Y}^m[t_0[\cdot]T]$ задачи (3.1), (3.2) будут выполняться включения

$$x_t[\cdot] \in \widehat{D}, \quad y^{[0]}_t[\cdot] \in \widehat{D}, \quad S\big(\overline{Y}^m[t]\big)[\cdot] \in \widehat{D}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad t \in [t_0, T]. \tag{3.5}$$

4. Взаимное прицеливание и теорема о близости

Опишем процедуры взаимного прицеливания между системами (1.1), (1.2) и (3.1), (3.2). Будем предполагать, что вместо точных значений $x[t]$ и $\overline{Y}^m[t] = \big(y^{[0]}[t], y^{[1]}[t], \ldots, y^{[m]}[t]\big)$ известны лишь их приближенные значения $x_*[t]$ и $\overline{Y}^m_*[t] = \big(y^{[0]}_*[t], y^{[1]}_*[t], \ldots, y^{[m]}_*[t]\big)$, так что

$$\big\|x[t] - x_*[t]\big\| \le \eta_*, \quad \big\|y^{[i]}[t] - y^{[i]}_*[t]\big\| \le \big\|\overline{Y}^m[t] - \overline{Y}^m_*[t]\big\| \le \eta_*, \quad i = \overline{0, m}, \quad t \in [t_0, T]. \tag{4.1}$$

Реализации $u[t_0[\cdot]T)$ и $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$ будем формировать по принципу обратной связи как кусочно-постоянные функции по шагам разбиения

$$\Delta_\delta = \big\{t_j \colon 0 < t_{j+1} - t_j < \delta,\ j = \overline{0, k-1},\ t_k = T\big\}, \tag{4.2}$$

полагая

$$u[t] = u^\circ_j, \quad \tilde{v}[t] = \tilde{v}^\circ_j, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, k-1}, \tag{4.3}$$

где

$$u^\circ_j \in \arg\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \big\langle f\big(t_j, x_{*\,t_j}[\cdot], u, v\big),\ x_*[t_j] - y^{[0]}_*[t_j]\big\rangle,$$

$$\tilde{v}^\circ_j \in \arg\max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \big\langle f\big(t_j, S\big(\overline{Y}^m_*[t_j]\big)[\cdot], u, v\big),\ x_*[t_j] - y^{[0]}_*[t_j]\big\rangle.$$

Теорема 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такое $\eta^* = \eta^*(\varepsilon) > 0$, что, каково бы ни было отображение f, удовлетворяющее оценке* (1.7) *и условиям* (У.1.1)—(У.1.4)*, найдутся такие $M = M(\varepsilon, f) \in \mathbb{N}$, $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ и $\eta_* = \eta_*(\varepsilon, f) > 0$, что для всех $m > M$ и $z[\cdot] \in Z$ при любых допустимых реализациях $\tilde{u}[t_0[\cdot]T)$, $v[t_0[\cdot]T)$ и реализациях $u[t_0[\cdot]T)$, $\tilde{v}[t_0[\cdot]T)$, формируемых по шагам разбиения* (4.2) *согласно правилу* (4.3)*, для соответствующего решения $x[t_0[\cdot]T]$ задачи* (1.1), (1.2) *и решения $\overline{Y}^m[t_0[\cdot]T]$ задачи* (3.1), (3.2) *будет справедлива оценка*

$$\big\|x[t] - y^{[0]}[t]\big\| \le \varepsilon, \quad t \in [t_0 - h, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$s[t] = x[t] - y^{[0]}[t], \quad s_*[t] = x_*[t] - y^{[0]}_*[t].$$

В силу оценок (1.4), (1.5), (3.3), (3.4) и (4.1) имеем

$$\big\|s[t]\big\| \le 2R_0, \quad t \in [t_0 - h, T], \tag{4.4}$$

$$\big\|s[t'] - s[t'']\big\| \le 2\omega_0(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [t_0 - h, T], \tag{4.5}$$

$$\big\|s[t] - s_*[t]\big\| \le 2\eta_*, \quad t \in [t_0 - h, T] \tag{4.6}$$

и как следствие

$$\big\|s_*[t]\big\| \le 2R_0 + 2\eta_*, \quad t \in [t_0 - h, T]. \tag{4.7}$$

Определим функцию

$$V[t] = \max_{\tau \in [t_0, t]} \big\|s[\tau]\big\|^2 = \max_{\tau \in [t_0, t]} \langle s[\tau], s[\tau]\rangle, \quad t \in [t_0, T].$$

Эта функция абсолютно непрерывна. Ее производная почти всюду удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}[t] \le \max\Big\{0; 2\langle \dot{s}[t], s[t]\rangle\Big\}. \tag{4.8}$$

Возьмем компакт $\widehat{D} \subset C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big)$, для которого выполняются включения (3.5), и определим число $\widehat{\lambda} = \lambda\big(\widehat{D}\big) > 0$ в соответствии с условием (У.1.3). Обозначим

$$\alpha = \widehat{\lambda} e^{-2\widehat{\lambda}(T - t_0)}. \tag{4.9}$$

Оценим скалярное произведение $\langle \dot{s}[t], s[t] \rangle$. Имеем

$$\langle \dot{s}[t], s[t] \rangle = \big\langle f^*\big(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t, S\big(\overline{Y}^m[t]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s[t] \big\rangle,$$

откуда, пользуясь оценками (1.7) и (4.4), полагая $\eta^* = \eta^*(\varepsilon) \le \alpha\varepsilon^2/(10R_0)$, приходим к неравенству

$$\langle \dot{s}[t], s[t] \rangle \le \alpha\varepsilon^2/5 + \big\langle f\big(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t, S\big(\overline{Y}^m[t]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s[t] \big\rangle. \tag{4.10}$$

По условию (У.1.1) отображение f непрерывно. Множество $\widehat{D}$ компактно в $C\big([-h,0], \mathbb{R}^n\big)$. Поэтому найдется такое число $\zeta = \zeta(\varepsilon, f) > 0$, что для всех $t', t'' \in [t_0, T]$, $w[\cdot] \in \widehat{D}$ и $w_*[\cdot] \in C\big([-h,0], \mathbb{R}^n\big)$ при условии $|t' - t''| \le \zeta$ и $\big\|w[\cdot] - w_*[\cdot]\big\|_C \le \zeta$ будет выполняться неравенство

$$\big\| f\big(t', w[\cdot], u, v\big) - f\big(t'', w_*[\cdot], u, v\big)\big\| \le \alpha\varepsilon^2/(40R_0), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{4.11}$$

В силу оценки (1.5) существует число $\delta_1 = \delta_1(\zeta) > 0$, $\delta_1 \le \zeta$, такое, что при $|t' - t''| \le \delta_1$ для решений $x[t_0[\cdot]T]$ задачи (1.1), (1.2) справедливо соотношение

$$\big\| x_{t'}[\cdot] - x_{t''}[\cdot] \big\|_C \le \omega_0(|t' - t''|) \le \zeta.$$

По лемме 2 существует число $\delta_2 = \delta_2(\zeta) > 0$, $\delta_2 \le \zeta$, такое, что при $|t' - t''| \le \delta_2$ для решений $\overline{Y}^m[t_0[\cdot]T]$ задачи (3.1), (3.2) имеют место неравенства

$$\big\| S\big(\overline{Y}^m[t']\big)[\cdot] - S\big(\overline{Y}^m[t'']\big)[\cdot] \big\|_C \le \max_{i=\overline{0,m}} \big\| y^{[i]}[t'] - y^{[i]}[t''] \big\| \le \omega'_{P_0}(|t' - t''|) \le \zeta.$$

Пусть константа $K > 0$ такова, что

$$\big\| f\big(t, w[\cdot], u, v\big) \big\| \le K, \quad t \in [t_0, T], \quad w[\cdot] \in \widehat{D}, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{4.12}$$

Опираясь на оценку (4.5), подберем число $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $|t' - t''| \le \delta_3$ выполнялись соотношения

$$\big\| s[t'] - s[t''] \big\| \le 2\omega_0(|t' - t''|) \le \alpha\varepsilon^2/(20K). \tag{4.13}$$

Положим $\delta = \delta(\varepsilon, f) = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда, прибавляя и вычитая в правой части неравенства (4.10) выражение $\big\langle f\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y}^m[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s[t] - s[t_j] \big\rangle$ и учитывая соотношения (4.2), (4.4), (4.11), (4.12) и (4.13), выводим оценку

$$\langle \dot{s}[t], s[t] \rangle \le 2\alpha\varepsilon^2/5 + \big\langle f\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y}^m[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s[t_j] \big\rangle,$$
$$t_j \le t < t_{j+1}, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{4.14}$$

Опираясь на оценки (4.6) и (4.7), можно подобрать такое $\eta_* = \eta_*(\varepsilon, f) > 0$, что

$$\big\| s[t_j] - s_*[t_j] \big\| \le 2\eta_* \le \alpha\varepsilon^2/(20K), \quad \big\| s_*[t_j] \big\| \le 2R_0 + 2\eta_* \le 4R_0. \tag{4.15}$$

При этом в силу соотношений (4.1), (4.11) можно считать, что

$$\big\| f\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) \big\| \le \alpha\varepsilon^2/(80R_0),$$

$$\big\| f\big(t_j, S\big(\overline{Y}^m[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y_*}^m[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v} \big\| \le \alpha\varepsilon^2/(80R_0).$$

Отсюда, прибавляя и вычитая в правой части оценки (4.14) сначала

$$\big\langle f\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y}^m[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s_*[t_j] \big\rangle,$$

а затем

$$\big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y_*}^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s_*[t_j]\big\rangle,$$

с учетом (4.12) получаем

$$\langle \dot{s}[t], s[t]\rangle \le 3\alpha\varepsilon^2/5 + \big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y}_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s_*[t_j]\big\rangle,$$
$$t_j \le t < t_{j+1}, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{4.16}$$

Обозначим

$$H(t, w[\cdot], s) = \min_{u\in U}\max_{v\in V}\langle f(t, w[\cdot], u, v), s\rangle, \quad t\in[t_0, T], \quad w[\cdot]\in C\big([-h, 0], \mathbb{R}^n\big), \quad s\in\mathbb{R}^n. \tag{4.17}$$

Найдется число $\xi = \xi(\varepsilon, f) > 0$ такое, что для всех $w[\cdot]\in\widehat{D}$, $w_*[\cdot]\in C\big([-h,0],\mathbb{R}^n\big)$ и $s_*\in\mathbb{R}^n$ при условии $\big\|w[\cdot] - w_*[\cdot]\big\|_C \le \xi$ и $\|s_*\| \le 4R_0$ будет выполняться неравенство

$$\big\|H(t, w[\cdot], s_*) - H(t, w_*[\cdot], s_*)\big\| \le \alpha\varepsilon^2/20, \quad t\in[t_0, T]. \tag{4.18}$$

В силу условия (У.1.3) и компактности $\widehat{D}$ для любых $w'[\cdot], w'[\cdot]\in\widehat{D}$ справедливо неравенство

$$\big\|H(t, w'[\cdot], s_*) - H(t, w''[\cdot], s_*)\big\| \le \widehat{\lambda}\|s_*\|\big\|w'[\cdot] - w''[\cdot]\big\|_C, \quad t\in[t_0, T], \quad s_*\in\mathbb{R}^n. \tag{4.19}$$

Кроме того, с учетом (4.12) для любых векторов $s, s_*\in\mathbb{R}^n$ имеет место оценка

$$\big\|H(t, w[\cdot], s_*) - H(t, w[\cdot], s)\big\| \le K\big\|s_* - s\big\|, \quad t\in[t_0, T], \quad w[\cdot]\in\widehat{D}. \tag{4.20}$$

Принимая во внимание соотношение (4.3) и условие (У.1.4), при $t\in[t_j, t_{j+1})$ выводим

$$\begin{aligned}
&\big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u[t], v[t]\big) - f\big(t_j, S\big(\overline{Y}_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], \tilde{u}[t], \tilde{v}[t]\big), s_*[t_j]\big\rangle\\
&\le \max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u_j^\circ, v\big), s_*[t_j]\big\rangle - \min_{u\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(t_j, S\big(\overline{Y}_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], u, \tilde{v}_j^\circ\big), s_*[t_j]\big\rangle\\
&= \min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big\langle f\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u, v\big), s_*[t_j]\big\rangle - \max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\big\langle f\big(t_j, S\big(Y_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], u, v\big), s_*[t_j]\big\rangle\\
&= H\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(Y_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s_*[t_j]\big).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Пользуясь (4.1), (4.12) и (4.15), при достаточно малых $\eta_* > 0$ в силу (4.18) имеем

$$\big\|H\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], s_*[t_j]\big)\big\| \le \alpha\varepsilon^2/20,$$

$$\big\|H\big(t_j, S\big(\overline{Y}_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(\overline{Y}^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s_*[t_j]\big)\big\| \le \alpha\varepsilon^2/20,$$

а в силу (4.20) получаем

$$\big\|H\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], s[t_j]\big)\big\| \le 2K\eta_* \le \alpha\varepsilon^2/20,$$

$$\big\|H\big(t_j, S\big(\overline{Y}^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(\overline{Y}^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s[t_j]\big)\big\| \le 2K\eta_* \le \alpha\varepsilon^2/20.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned}
&H\big(t_j, x_{*t_j}[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(Y_*^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s_*[t_j]\big)\\
&\le \alpha\varepsilon^2/10 + H\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], s_*[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(Y^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s_*[t_j]\big)\\
&\le \alpha\varepsilon^2/5 + H\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], s[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(Y^{\,m}[t_j]\big)[\cdot], s[t_j]\big).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

По теореме 3 найдется такое $M = M(\varepsilon, f) \in \mathbb{N}$, что для всех $m > M$ будет справедливо неравенство $\big\|y^{[0]}_{t_j}[\cdot] - S\big(\overline{Y}^{\,m}[t_j]\big)[\cdot]\big\|_C \leq \alpha\varepsilon^2/(10R_0\widehat{\lambda})$. Учитывая это неравенство вместе с (4.4) и (4.19), при $t \in [t_j, t_{j+1})$ получаем

$$\begin{aligned} H\big(t_j, x_{t_j}[\cdot], s[t_j]\big) - H\big(t_j, S\big(Y^m[t_j]\big)[\cdot], s[t_j]\big) &\leq \widehat{\lambda}\big\|s[t_j]\big\|\big\|x_{t_j}[\cdot] - S\big(Y^m[t_j]\big)[\cdot]\big\|_C \\ &\leq \widehat{\lambda}\big\|s_{t_j}[\cdot]\big\|_C^2 + \widehat{\lambda}\big\|s[t_j]\big\|\big\|y^{[0]}_{t_j}[\cdot] - S\big(Y^m[t_j]\big)[\cdot]\big\|_C \\ &\leq \widehat{\lambda}V[t] + 2R_0\widehat{\lambda}\big\|y^{[0]}_{t_j}[\cdot] - S\big(Y^m[t_j]\big)[\cdot]\big\| \leq \alpha\varepsilon^2/5 + \widehat{\lambda}V[t]. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Сопоставляя вместе соотношения (4.8), (4.16) и (4.21)–(4.23), заключаем

$$\dot{V}[t] \leq 2(\alpha\varepsilon^2 + \widehat{\lambda}V[t]) \text{ при п.в. } t \in [t_0, T].$$

Полученное неравенство, если принять во внимание лемму Грануола — Белмана и выбор (4.9) числа α, доказывает теорему 4.

5. Пример

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}[t] = 0.5x[t] - 7\int\limits_{t-1}^{t} x[\tau]e^{-0.3|x[\tau]|}\,d\tau + u[t] + v[t]x[t-1], \quad t \in [0, 9], \quad x[t] \in \mathbb{R}, \quad \big|u[t]\big| \leq 1, \quad \big|v[t]\big| \leq 1,$$

с начальным условием $x[\vartheta] = \vartheta\cos(12\vartheta), \quad \vartheta \in [-1, 0]$. Правая часть этого уравнения удовлетворяет условиям (У.1.1)—(У.1.4), например, при константах $a = 8.5$, $\lambda = 8.5$.

Для этой системы в соответствии с (3.1), (3.2) построим моделирующую систему-поводырь и по правилу (4.2), (4.3) реализуем процедуру взаимного прицеливания.

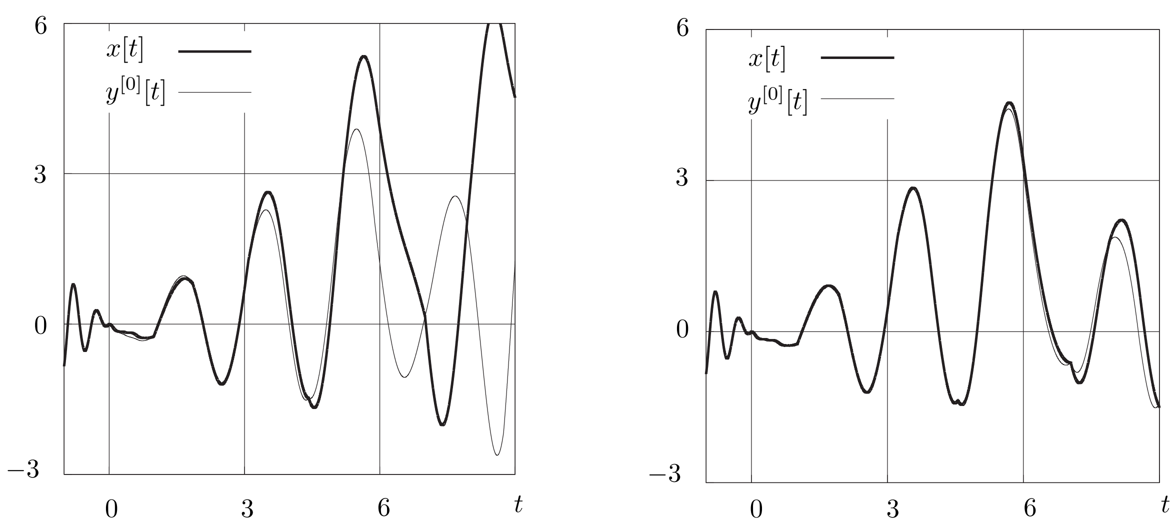


Рис. 1

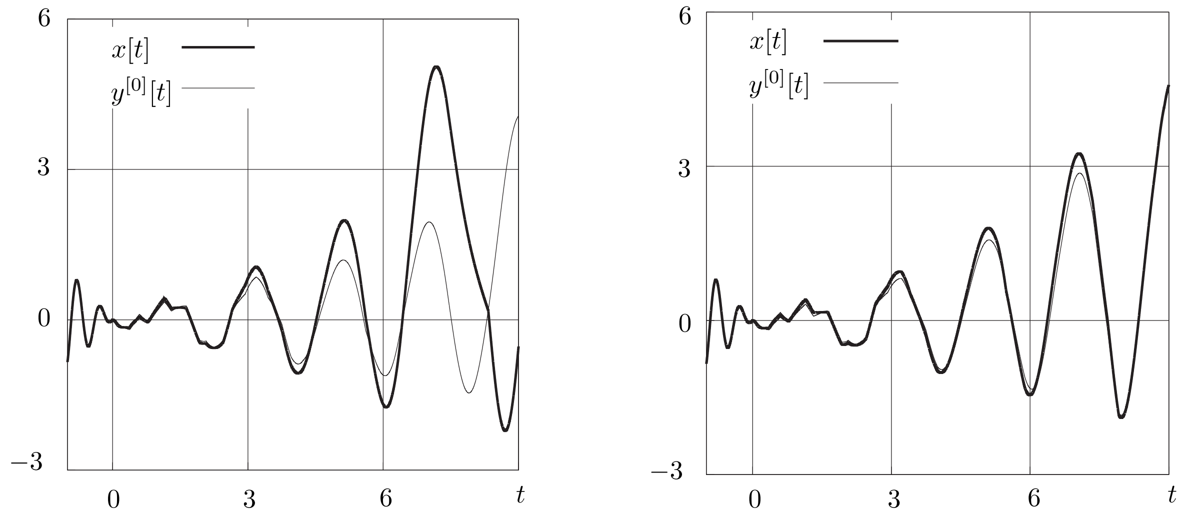


Рис. 2

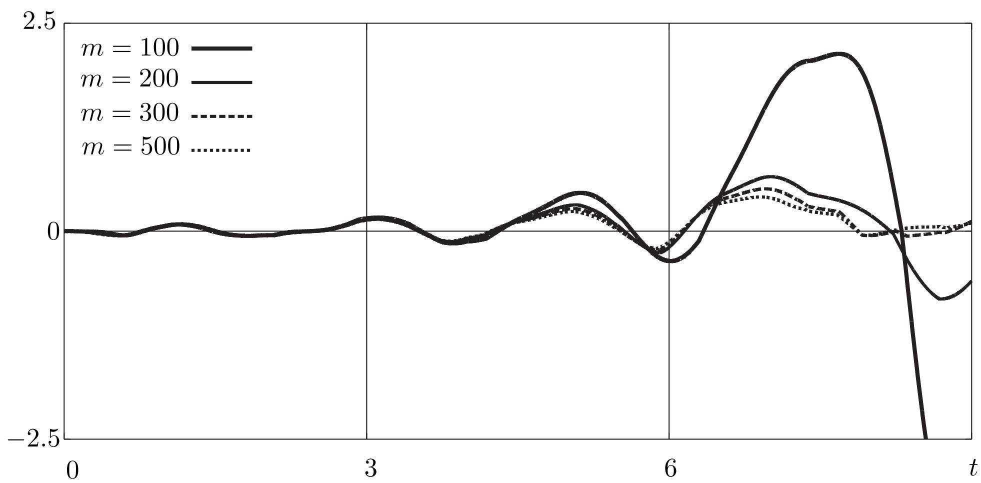


Рис. 3

На рис. 1 изображены результаты моделирования данной процедуры: слева — для параметров $\delta = 0.004$, $m = 50$, справа — для $\delta = 0.004$, $m = 500$. При этом значения параметров η^* и η_*, задающих уровень допустимых возмущений, были близки к нулю.

На рис. 2 изображены результаты моделирования этой процедуры с теми же значениями δ и m, но с уровнем допустимых возмущений $\eta^* = \eta_* = 0.2$, при этом сами возмущения формировались случайным образом.

На рис. 3 изображены графики разности $x[t] - y^{[0]}[t]$, полученные при моделировании процедуры при фиксированных $\delta = 0.004$, $\eta^* = \eta_* = 0.2$ и возрастающих значениях m.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
2. **Мышкис А.Д.** Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
3. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
4. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
5. **Мышкис А.Д., Шиманов С.Н., Эльсгольц Л.Э.** Колебания и устойчивость систем с запаздыванием // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев, 1963. С. 241–267.
6. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.

7. **Шиманов С.Н.** Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1983. 64 с.
8. **Долгий Ю.Ф., Шиманов С.Н.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием / УрГУ. Деп. в ВИНИТИ 27.05.1977, № 2078-77. Свердловск, 1977. 17 с.
9. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
10. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи об оптимальном управлении в системе с последействием // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 540–542.
11. **Репин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
12. **Салуквадце М.Е.** К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям // Автоматика и телемеханика, 1962. Т. 23, № 2. С. 1595–1601.
13. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. С. 2094–2107.
14. **Banks H.T., Burns J.A.** Hereditary control problems: Numerical methods based on averaging approximations // SIAM J. Control Optim. 1978. Vol. 16, P. 169–208.
15. **Banks H.T., Kappel F.** Spline approximations for functional differential equations. // J. Different. Equat. 1979. Vol. 34, № 3. P. 496–522.
16. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 2. С. 202–209.
17. **Максимов В.И.** Аппроксимация нелинейных дифференциально-разностных игр // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР: сб. ст. Вып. 30. Свердловск, 1979. С. 49–65 (Оптим. упр. в динам. системах.)
18. **Опарин Н.П.** Об аппроксимации систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения с отклоняющимися аргументами: сб. науч. тр. / Ун-т Дружбы народов им. П. Лумумбы. Вып. 11. М., 1979. С. 52–60.
19. **Kunisch K.** Approximation Schemes for Nonlinear Neutral Optimal Control Systems // J. Math. Anal. Appl. 1980. Vol. 82. P. 112–143.
20. **Долгий Ю.Ф., Сажина С.Д.** Оценка экспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием методом аппроксимирующих систем // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 12. С. 2046–2052.
21. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.
22. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
23. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
24. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
25. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 449 с.

Поступила 15.06.2012

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
программист
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: plaksin_anton@inbox.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977

О ПРИМЕНЕНИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ МОДЕЛЕЙ К ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДА В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В. И. Максимов

Обсуждается задача динамического восстановления неизвестных входных воздействий, действующих на векторное линейное дифференциальное уравнение с запаздыванием. Указывается регуляризирующий алгоритм, позволяющий синхронно с развитием процесса осуществлять восстановление этих воздействий. Алгоритм устойчив к информационным помехам и погрешностям вычислений. В основе предлагаемого алгоритма лежит метод вспомогательных позиционно-управляемых моделей.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, метод вспомогательных моделей.

V. I. Maksimov. On the application of finite-dimensional controlled models in the problem of input reconstruction in a linear delay system.

We discuss the problem of dynamic reconstruction of unknown inputs acting on a linear vector differential equation with delay. A regularizing algorithm is proposed for reconstructing these inputs simultaneously with the process. The algorithm is stable with respect to information noises and computational errors. It is based on the method of positionally controlled auxiliary models

Keywords: dynamic reconstruction, method of auxiliary models.

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается линейная динамическая система, описываемая векторным дифференциальным уравнением с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau) + B(t)u(t), \quad t \in T = [0, \vartheta], \tag{1.1}$$

$$x(s) = x_0(s) \in H = \mathbb{R}^n \times L_2([-\tau; 0]; \mathbb{R}^n),$$

где $\tau \in (0, +\infty)$ — запаздывание, $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $u \in \mathbb{R}^r$ — возмущение, $x_0(s)$, $s \in [-\tau, 0]$ — начальное состояние, $B(t)$ — $n \times r$-мерная непрерывно дифференцируемая матрица, $A(t)$ и $A_\tau(t)$ — непрерывные матрицы. Начальное состояние системы $x_0(s)$ задано. Возмущение — r-мерная входная вектор-функция, удовлетворяющая включению $u(t) \in P$, $t \in T$, неизвестно. Здесь $P \subset \mathbb{R}^r$ — выпуклый компакт. Такова вся априорная информация о действующем на систему (1.1) возмущении. Цель работы состоит в построении алгоритма реконструкции (восстановления) возмущения $u(\cdot)$. Входными данными алгоритма являются результаты неточного измерения фазового состояния системы $x(t)$. Выход алгоритма — некоторая функция $v(\cdot)$, играющая роль приближения $u(\cdot)$. При этом мы хотим построить динамический алгоритм реконструкции $u(\cdot)$. Такой алгоритм характеризуется следующими двумя особенностями: а) вычисление функции $u(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, осуществляется на основе результатов измерения состояния $x(\tau)$ в моменты времени, предшествующие моменту t; б) только после вычисления функции $u(\tau)$ на промежутке $0 \le \tau \le t$ возможно использование новой

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00175-а), программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” (проект 12-П-1-1019) и Урало-сибирского интердисциплинарного проекта (проект 12-С-1-1017).

информации о фазовом состоянии для вычисления $u(\tau)$ в следующие моменты времени (при $\tau > t$).

Обсуждаемая задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем. Подобные задачи исследовались ранее. Один из подходов к решению задач динамической реконструкции входа $u(\cdot)$ для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, был развит в работах [1; 2]. (Здесь мы указываем только обзорные монографии, в которых можно найти соответствующие ссылки.) Подход основан на сочетании методов теории гарантированного управления [3] и известного в теории некорректных задач метода сглаживающего функционала [4].

Уточним постановку задачи и опишем содержательно метод ее решения. На промежутке времени T реализуется некоторая траектория системы (1.1), т. е. решение $x(\cdot) = x(\cdot; x_0(s), u(\cdot))$ векторного дифференциального уравнения (1.1), зависящее от изменяющегося во времени входного воздействия $u(\cdot) \in P(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^r) \colon u(t) \in P$ при п.в. $t \in T\}$. Интервал T разбит на конечное число полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i \in [0 : m^2-1]$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{m^2} = \vartheta$. В моменты времени $\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m^2}$, измеряются (приближенно) реализующиеся состояния системы $x(\tau_i)$, т. е. находятся вектора $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ со свойствами

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_n \le h. \tag{1.2}$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — уровень информационной погрешности, символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$. Решение уравнения (1.1) — функция $x(\cdot)$ — неизвестно. Задача состоит в построении алгоритма восстановления (в темпе “реального” времени) входа $u(\cdot)$ на основе неточного измерения величин $x(\tau_i)$, $i \in [0 : m-1]$.

Для того, чтобы приближенно вычислять $u(\cdot)$, мы воспользуемся методом позиционного управления с моделью [1; 2]. В соответствии с этим методом задача восстановления неизвестного управления по результатам измерения величин ξ_i^h заменяется другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой. Таким образом, задача восстановления $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

(1) задаче выбора вспомогательной системы, называемой моделью, которая функционирует “синхронно” с реальной системой;

(2) задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

Для некоторых задач динамической реконструкции для систем с последействием описанная выше схема реализована в работах [5–11].

2. Алгоритм решения

Прежде, чем указать алгоритм решения задачи, проведем вспомогательные построения.

Как известно [12], решение $x(\cdot) = x(\cdot; x_0(s), u(\cdot))$ уравнения (1.1) находится по формуле Коши

$$x(t+s) = A_{0,t}x_0(s) + \int_0^t F(t+s,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau, \quad t \in T, \quad s \in [-\tau, 0], \tag{2.1}$$

где матрица $F(\vartheta, t)$ (“фундаментальная” матрица системы (1.1)) удовлетворяет условиям $F(t, t) = E$ (единичная матрица); при $t > \vartheta$: $F(\vartheta, t) = 0$, при $t < \vartheta$:

$$\frac{\partial F(\vartheta, t)}{\partial t} = -F(\vartheta, t)A(t) - F(\vartheta, t+\tau)A_\tau(t+\tau),$$

$A_{t_*,t^*} \colon H \to H$ — линейный непрерывный оператор вида

$$A_{t_*,t^*}x(s) = f(s, x) = F(t^* + s, t_*)x(0) \tag{2.2}$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0} F(t^*+s, t_*+\tau+\eta)A_\tau(t_*+\tau+\eta)x(\eta)\,d\eta \text{ при } \delta_* = t^*-t_* \geq \tau;$$

$$A_{t_*,t^*}x(s) = \begin{cases} x(s+\delta_*), & \text{если } s \in [-\tau, -\delta_*), \\ f(s,x), & \text{если } s \in [-\delta_*, 0] \end{cases}$$

при $\delta_* < \tau$. Оператор $D_{t_*,t^*}\colon H \to E_n$ зададим по формуле [12]:

$$D_{t_*,t^*}x(s) = y(0), \tag{2.3}$$

где $y(s) = A_{t_*,t^*}x(s)$.

В качестве модели (при фиксированном $h \in (0,1)$) возьмем систему обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $n \times m$ ($m = m_h$, $m_h \to \infty$ при $h \to 0$) следующего вида

$$\dot{y}_j(t) = \begin{cases} F(\tau_{jm}, t)B(t)v^h(t) & \text{при п.в. } t \in [0, \tau_{jm}] \\ 0 & \text{при п.в. } t \in (\tau_{jm}, \vartheta], \end{cases} \tag{2.4}$$
$$y_j(0) = 0, \quad j \in [1:m].$$

Подобная система использовалась в работе [13] в качестве поводыря при исследовании дифференциально-разностных игр (см. также [14], где для исследования нелинейных дифференциально-разностных игр использовался конечномерный поводырь).

Отметим некоторые свойства системы (2.4).

1. Функция $y_m(\cdot)$ является решением системы уравнений

$$\dot{y}_m(t) = F(\vartheta, t)B(t)v^h(t) \text{ при п.в. } t \in T, \quad y_m(0) = 0.$$

2. При $i \leq jm$ справедливо равенство

$$y_j(\tau_i) = \int\limits_0^{\tau_i} F(\tau_{jm}, t)B(t)v^h(t)\,dt.$$

В частности, при $i = jm$ имеем

$$y_j(\tau_i) = \int\limits_0^{\tau_i} F(\tau_{jm}, t)B(t)v^h(t)\,dt. \tag{2.5}$$

3. При $jm \geq i+1$ верны соотношения

$$y_j(\tau_{i+1}) - y_j(\tau_i) = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} F(\tau_{jm}, t)B(t)v^h(t)\,dt.$$

В свою очередь, при $jm \leq i$ $y_j(\tau_{i+1}) = y_j(\tau_i)$.

4. При п.в. $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ функция $y_j(\cdot)$ удовлетворяет соотношениям

$$\dot{y}_j(t) = \begin{cases} F(\tau_{jm}, t)B(t)v^h(t), & \text{если } j \geq i+1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Символом $u_*(\cdot)$ обозначим минимальное по $L_2(T;\mathbb{R}^r)$-норме возмущение из $P(\cdot)$, порождающее решение $x(\cdot)$ уравнения (1.1), т. е.

$$u_*(\cdot) = \arg\min_{u(\cdot)\in P(\cdot)}\{B(t)u(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t) - A_\tau(t)x(t-\tau) \text{ при п.в. } t \in T\}.$$

Нетрудно видеть, что такое возмущение существует и единственно.

Пусть $z(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t))$ означает решение системы

$$\dot{z}_j(t) = \begin{cases} F(\tau_{jm}, t)B(t)u_*(t) & \text{при п.в. } t \in [0, \tau_{jm}], \\ 0 & \text{при п.в. } t \in (\tau_{jm}, \vartheta], \end{cases} \tag{2.7}$$

$z_j(0) = 0$, $j \in [1:m]$, $m = m_h$, $\tau_{jm} = \tau_{h,jm_h} \in \Delta_h$.

Заметим, что верно равенство

$$\int\limits_0^t F(t,\tau)B(\tau)u_*(\tau)\,d\tau = x(t) - D_{0,t}x_0(s), \quad t \in T,$$

вытекающее из равенства (2.1). Из последнего равенства, учитывая (2.7), получаем

$$z_i(\tau_{im}) = x(\tau_{im}) - D_{0,\tau_{im}}x_0(s), \quad i \in [1:m]. \tag{2.8}$$

Итак, модель описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением, в то время как заданная система — уравнением с запаздыванием (см. (1.1)).

Фиксируем семейство разбиений Δ_h интервала T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h^2}, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \delta(h) = \vartheta/m_h^2, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h^2} = \vartheta.$$

Всякую кусочно-постоянную функцию $\xi^h(\cdot)\colon T \mapsto \mathbb{R}^n$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, удовлетворяющую ограничениям (1.2), будем называть *допустимым измерением точности* h. Совокупность всех допустимых измерений точности h обозначим символом $\Xi(x(\cdot), h)$.

Введем вспомогательную функцию $\alpha(h)\colon (0,1) \to (0,1)$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h, функцию $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m^2}$, $m = m_h$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [\tau_{km}, \tau_{(k+1)m}]$, $k \in [0:m-1]$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляется вектор

$$v_i^h = \arg\min\Big\{2\sum_{j=k+1}^{m}(y_j(\tau_i) - \tilde{z}_j(\tau_i))'F(\tau_{jm}, \tau_i)B(\tau_i)v + \alpha|v|_r^2 : v \in P\Big\}, \tag{2.9}$$

где

$$\tilde{z}_j(\tau_i) = D_{\tau_i,\tau_{jm}}\{\xi^h(\tau_i + s) - (A_{0,\tau_i}x_0(s))(s)\}, \quad \alpha = \alpha(h).$$

Здесь штрих означает транспонирование. Затем на вход модели (2.4) в течение промежутка δ_i подается управление $v^h(t) = v_i^h$. В результате под действием этого управления и некоторого неизвестного возмущения $u(t)$, $t \in \delta_i$, система (1.1) переходит из состояния $x(\tau_i)$ в состояние $x(\tau_{i+1})$, а модель (2.4) — из состояния $y(\tau_i)$ в состояние $y(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i+1)$-м шаге, аналогичные действия повторяются.

Как видно из приведенной ниже теоремы 1, описанный выше метод позиционного управления моделью (2.4) генерирует вход модели $v^h(\cdot)$, который сколь угодно точно аппроксимирует вход $u(\cdot)$ системы (1.1), если только величина h (погрешность наблюдения) достаточно мала.

Лемма 1. *Пусть справедливы соотношения*

$$\sup_{i\in[1:m]}\Big|\int\limits_0^{\tau_{im}} F(\tau_{im},\tau)B(\tau)u_*(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{\tau_{im}} F(\tau_{im},\tau)B(\tau)v^h(\tau)\,d\tau\Big|_n \to 0 \text{ при } h \to 0, \tag{2.10}$$

$$\int\limits_0^{\vartheta}|v^h(\tau)|_r^2\,d\tau \le \int\limits_0^{\vartheta}|u_*(\tau)|_r^2\,d\tau + \varrho(h), \tag{2.11}$$

где $m = m_h$, $\varrho(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда* $v^h(\cdot) \to u_*(\cdot)$ *в* $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ *при* $h \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится по стандартной схеме [1; 2] при этом используются равенства (2.5)–(2.9)

З а м е ч а н и е. Учитывая (2.4)–(2.6), легко видеть, что соотношение (2.10) можно переписать в следующем виде:

$$\sup_{i\in[0:m_h]} |z_i(\tau_{im}) - y_i(\tau_{im})|_n \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Введем величину

$$\varepsilon(t) = \nu(t) + \alpha \int\limits_0^t \{|v^h(\tau)|_r^2 - |u_*(\tau)|_r^2\}\, d\tau,$$

где $\nu(t) = \sum_{j=1}^m |y_j(t) - z_j(t)|_n^2$, $m = m_h$, $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ — решение системы (2.4), $z(t) = (z_1(t), \dots, z_m(t))$ — решение системы (2.7).

Лемма 2. *Пусть управление* $v^h(\cdot)$ *находится по формуле* (2.9). *Тогда равномерно по всем* $i \in [0 : m_h^2]$, *и* $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$ *верны неравенства*

$$\varepsilon(\tau_i) \le c_*(h + m_h^{-1}),$$

где $h \in (0, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим изменение величины $\varepsilon(t)$. Фиксируем число $k \in [0 : m-1]$. В силу (2.6) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [\tau_{km}, \tau_{k(m+1)}]$ справедливо равенство

$$\nu(t) \equiv \sum_{j=1}^m |y_j(t) - z_j(t)|_n^2 = \sum_{j=1}^k |y_j(\tau_i) - z_j(\tau_i)|_n^2 + \sum_{j=k+1}^m |y_j(t) - z_j(t)|_n^2.$$

Следовательно, при $i \in [km, k(m+1) - 1]$ верны оценки

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) = \sum_{j=1}^k |y_j(\tau_i) - z_j(\tau_i)|_n^2 + \sum_{j=k+1}^m |z_j(\tau_{i+1}) - y_j(\tau_{i+1})|_n^2 + \alpha \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \{|v^h(\tau)|_r^2 - |u_*(\tau)|_r^2\}\, d\tau$$

$$= \sum_{j=1}^k |y_j(\tau_i) - z_j(\tau_i)|_n^2 + \sum_{j=k+1}^m |z_j(\tau_i) - y_j(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} F(\tau_{jm}, t) B(t) \{u_*(t) - v^h(t)\} dt|_n^2$$

$$+ \alpha \int\limits_0^{\tau_{i+1}} \{|v^h(\tau)|_r^2 - |u_*(\tau)|_r^2\}\, d\tau$$

$$\le \sum_{j=1}^m |z_j(\tau_i) - y_j(\tau_i)|_n^2 + \alpha \int\limits_0^{\tau_i} \{|v^h(\tau)|_r^2 - |u_*(\tau)|_r^2\}\, d\tau + \gamma_{m,i}^{(k)} + \varrho_{m,i}^{(k)} = \varepsilon(\tau_i) + \gamma_{m,i}^{(k)} + \varrho_{m,i}^{(k)}, \quad (2.12)$$

где

$$\varrho_{m,i}^{(k)} = 2 \sum_{j=k+1}^m (y_j(\tau_i) - z_j(\tau_i))' \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} F(\tau_{jm}, t) B(t) \{v^h(t) - u_*(t)|\}\, dt$$

$$+ \alpha \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{|v^h(\tau)|_r^2 - |u_*(\tau)|_r^2\}\, d\tau, \quad \delta = \delta(h) = \vartheta/m^2, \quad m = m_h;$$

$$\gamma_{m,i}^{(k)} = \delta \sum_{j=k+1}^{m} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |F(\tau_{jm},t)B(t)\{u_*(t) - v^h(t)\}|_n^2\,dt.$$

Легко видеть, что верно неравенство

$$\gamma_{m,i}^{(k)} \le c_1 m\delta^2 \le c_2/m^3. \tag{2.13}$$

Оценим величины $\varrho_{m,i}^{(k)}$. В силу [12, леммы 2.3] при $\tau_j \ge \tau_i$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{\tau_i} F(\tau_j+s,\tau)B(\tau)u_*(\tau)\,d\tau = A_{\tau_i,\tau_j}\int\limits_0^{\tau_i} F(\tau_i+s,\tau)B(\tau)u_*(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда ввиду (2.1), (2.3), получаем при $jm \ge i$

$$z_j(\tau_i) = D_{\tau_i,\tau_{jm}}\int\limits_0^{\tau_i} F(\tau_i+s,\tau)B(\tau)u_*(\tau)\,d\tau = D_{\tau_i,\tau_{jm}}\{x(\tau_i+s) - (A_{0,\tau_i}x_0(s))(s)\}.$$

Нетрудно видеть, что для любых $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot),h)$

$$|x(\tau_i+s) - \xi^h(\tau_i+s)|_H \le c_3(\delta^{1/2}+h).$$

Следовательно в силу (2.3) и [15, леммы 1.1] имеем

$$\begin{aligned}|z_j(\tau_i) - \tilde z_j(\tau_i)|_n &\le \sup\big\{|D_{\tau_i,\tau_{jm}}x(\tau_i+s) - D_{\tau_i,\tau_{jm}}\xi^h(\tau_i+s)|_n : i, jm \in [0:m_h^2], i \le jm\big\}\\ &\le c_4(\delta^{1/2}+h), \quad i \le jm.\end{aligned} \tag{2.14}$$

В таком случае, учитывая (2.1) и (2.14), получаем

$$\begin{aligned}\varrho_{m,i}^{(k)} \le \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big\{2\sum_{j=k+1}^{m}(y_j(\tau_i) - \tilde z_j(\tau_i))'F(\tau_{jm},\tau_i)B(\tau_i)\{v^h(\tau) - u_*(\tau)\} + \alpha|v^h(\tau)|_r^2 - \alpha|u_*(\tau)|_r^2\Big\}\,d\tau\\ + c_5\delta(\delta^{1/2}+h) + c_6 m\delta\omega_B(\delta) \le c_7\delta(\delta^{1/2} + m\omega_B(\delta) + h),\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\omega_B(\delta) = \sup\{\|B(t_1) - B(t_2)\| \colon t_1, t_2 \in T, |t_1 - t_2| < \delta\}$, символ $\|B\|$ означает евклидову норму матрицы B. Ввиду непрерывной дифференцируемости $B(t)$, верно неравенство $\omega_B(\delta) \le c_8\delta$. Объединив (2.12), (2.13), (2.15), будем иметь при всех $i \in [km, k(m+1)-1]$ и всех $k \in [0:m-1]$

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \le \varepsilon(\tau_i) + c_9\frac{1}{m^2}\Big(h + \frac{1}{m}\Big).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Из леммы 2 вытекает

Следствие. *Справедливы неравенства*

$$\sup_{i\in[1:m_h]} |z_i(\tau_{im}) - y_i(\tau_{im})|_n^2 \le c^{(1)}(h + m_h^{-1}) + c^{(2)}\alpha(h), \tag{2.16}$$

$$\int\limits_0^{\vartheta} |v^h(\tau)|_r^2 d\tau \le \int\limits_0^{\vartheta} |u_*(\tau)|_r^2\,d\tau + c^{(3)}(h + m_h^{-1})\alpha^{-1}(h).$$

Заметим (см. (2.4), (2.7), (2.10)), что неравенство (2.16) можно переписать в виде

$$\sup_{i\in[1:m_h]}\Big|\int\limits_0^{\tau_{im}} F(\tau_{im},\tau)B(\tau)u_*(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^{\tau_{im}} F(\tau_{im},\tau)B(\tau)v^h(\tau)\,d\tau\Big|_n \le c^{(1)}(h + m_h^{-1}) + c^{(2)}\alpha(h).$$

В свою очередь, из леммы 1 (см. (2.10), (2.11)) и следствия вытекает

Теорема 1. *Пусть управление $v^h(\cdot)$ находится по формуле (2.9). Тогда равномерно по всем $h \in (0,1)$ и $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot),h)$ имеет место сходимость $v^h(\cdot) \to u_*(\cdot)$ в $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ при $h \to 0$, если $h\alpha^{-1}(h) \to 0$ при $h \to 0$.*

3. Оценка скорости сходимости алгоритма

Установим оценку скорости сходимости алгоритма. При ее обосновании нам понадобится

Лемма 3 [1]. *Пусть $u(\cdot) \in L_\infty([0,\vartheta];\mathbb{R}^r)$, $v(\cdot)$ — функция ограниченной вариации и*

$$\Big|\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau\Big|_r \le \varepsilon, \quad |v(t)|_r \le K \quad \forall t \in [0,\vartheta].$$

Тогда

$$\Big|\int\limits_0^t u'(\tau)v(\tau)\,d\tau\Big| \le \varepsilon(K + \mathrm{var}_{[0,\vartheta]}v(\cdot)) \quad \forall t \in [0,\vartheta].$$

Введем следующее условие.

У с л о в и е 1. При всех $t \in [0,\vartheta]$, $\nu \in [0,t]$ матрица $F(t,\nu)$ обратима. Матрица $F^{-1}(t,\nu)$ дифференцируема, причем

$$\sup\Big\{\|F^{-1}(t,\nu)\| + \|\frac{dF^{-1}(t,\nu)}{d\tau}\|\colon t \in [0,\vartheta], \nu \in [0,t]\Big\} \le d_* < +\infty.$$

Условие 1, например, выполнено для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t-1) \\ \dot{x}_2(t) = 0. \end{cases}$$

Матрица $F(\vartheta,t)$ для последней имеет вид

$$F(\vartheta,t) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma(\vartheta,t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma(\vartheta,t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \vartheta \le t+1 \\ \vartheta - t - 1 & \text{при } \vartheta > t+1. \end{cases}$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие 1, $n = r$, $B(t) = I$ (единичная матрица), тогда верно неравенство*

$$\sup_{t\in T}\Big|\int\limits_0^t \{u_*(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau\Big|_r \le C\big(\alpha + m^{-1} + h\big), \quad \alpha = \alpha(h), \quad m = m_h. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$\Phi_j(\tau) = \begin{cases} F(\tau_{jm},\tau) & \text{при } \tau \in [0,\tau_{jm}], \\ 0 & \text{при } \tau \ge \tau_{jm}. \end{cases}$$

Справедливо равенство (при $t \le \tau_{jm}$)

$$\int\limits_0^t \{u_*(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau = \int\limits_0^t \Phi_j^{-1}(\tau)\Phi_j(\tau)(u_*(\tau) - v^h(\tau))\,d\tau$$

$$= \Phi_j^{-1}(t)\int\limits_0^t \Phi_j(\tau)\{u_*(\tau) - v^h(\tau)\}\,d\tau - \int\limits_0^t \frac{d\Phi_j^{-1}(\tau)}{d\tau}\int\limits_0^\tau \Phi_j(s)\{u_*(s) - v^h(s)\}\,ds\,d\tau.$$

В таком случае в силу условия 1 при $t \le \tau_{jm}$

$$\Big|\int\limits_0^t (u_*(\tau) - v^h(\tau))\,d\tau\Big|_r \le \Big(\|\Phi_j^{-1}(t)\| + \int\limits_0^t \Big\|\frac{d\Phi_j^{-1}(\tau)}{d\tau}\Big\|\,d\tau\Big) \max_{\tau\in[0,t]}\Big|\int\limits_0^\tau \Phi_j(s)(u_*(s) - v^h(s))\,ds\Big|_r$$

$$\le d_1 \max_{\tau\in[0,t]}\Big|\int\limits_0^\tau \Phi_j(s)(u_*(s) - v^h(s))\,ds\Big|_r, \tag{3.2}$$

где d_1 не зависит от j. Учитывая равенства (2.5), а также вытекающие из (2.7) равенства

$$z_j(\tau_i) = \int\limits_0^{\tau_i} F(\tau_{jm},\tau)u_*(\tau)\,d\tau \quad \text{при} \quad jm \ge i,$$

в силу леммы 2 получим

$$\max_{i\in[0:jm]}\Big|\int\limits_0^{\tau_i} \Phi_j(s)(u_*(s) - v^h(s))\,ds\Big|_n \le c^{(1)}(h + m^{-1}) + c^{(2)}\alpha,$$

ибо при $i \in [0:jm]$

$$\int\limits_0^{\tau_i} \Phi_j(s)u_*(s)\,ds = z_j(\tau_i), \qquad \int\limits_0^{\tau_i} \Phi_j(s)v^h(s)\,ds = y_j(\tau_i).$$

Отсюда следует оценка

$$\max_{t\in[0,\tau_{jm}]}\Big|\int\limits_0^t \Phi_j(s)(u_*(s) - v^h(s))\,ds\Big|_n \le c^{(1)}(h + m^{-1}) + c^{(2)}\alpha + c^{(4)}m^{-2}. \tag{3.3}$$

Из (3.2), (3.3) выводим (3.1). Лемма доказана.

Заметим, что при выполнении условий леммы 4 $u_*(\cdot)$ совпадает с $u(\cdot)$ — истинным управлением, действующим на систему (1.1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 4 *и* $u_*(\cdot)$ — *функция ограниченной вариации. Тогда справедлива оценка скорости сходимости алгоритма*

$$|u_*(\cdot) - v^h(\cdot)|^2_{L_2([0,\vartheta];\mathbb{R}^r)} \le K\{\alpha(h) + (h + m_h^{-1})\alpha^{-1}(h)\}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись следствием, получаем

$$|u_*(\cdot) - v^h(\cdot)|^2_{L_2([0,\vartheta];\mathbb{R}^r)} \le 2|u_*(\cdot)|^2_{L_2([0,\vartheta];\mathbb{R}^r)} - 2\int\limits_0^\vartheta u_*'(\tau)v^h(\tau)\,d\tau$$

$$+ c^{(3)}(h + m_h^{-1})\alpha^{-1}(h) = 2\int\limits_0^\vartheta u_*'(\tau)(u_*(\tau) - v^h(\tau))\,d\tau + c^{(3)}(h + m_h^{-1})\alpha^{-1}(h). \tag{3.5}$$

В силу лемм 3, 4

$$\Big|\int\limits_0^\vartheta u_*'(\tau)(u_*(\tau) - v^h(\tau))\,d\tau\Big| \le C_1(\alpha(h) + m_h^{-1} + h). \tag{3.6}$$

Оценка (3.4) является следствием неравенств (3.5), (3.6). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. 292 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
5. **Максимов В.И.** Позиционное моделирование некоторых параметров дифференциально-функциональных систем // Некоторые методы позиционного и программного управления: сб. науч. тр. Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 84–106.
6. **Osipov Yu.S.** On reconstruction of a parameter of dynamical system // Proc. int. symp. "Functional–Differential Equations". Kyoto, 1990. P. 309–317.
7. **Максимов В.И.** Метод функций Ляпунова в задачах реконструкции входов систем с последействием // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 26. С. 78–95.
8. **Близорукова М.С.** О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикл. математика и информатика: сб. тр. фак-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2000. С. 105-115.
9. **Васильева Е.В.** Динамический метод невязки для дифференциального уравнения с памятью. Проблемы математической физики: сб. тр. факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова. М.: Диалог-МГУ, 1998. С. 68–74.
10. **Kadiyev A.M., Maksimov V.I.** Dynamical discrepancy method in an input reconstruction problem for a delay system // Funct. Differ. Equ. 2008. Vol. 15, no. 3–4. P. 219–237.
11. **Maksimov V., Pandolfi L.** On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag system // IMA J. Math. Control Inform. 2002. Vol. 19, no. 1-2. P. 173–184.
12. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 3–13.
13. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 2. С. 202–209.
14. **Максимов В.И.** Аппроксимация нелинейных дифференциально-разностных игр // Тр. Ин-та математики и механики: сб. ст. Вып. 30. Свердловск, 1979. С. 49–65.
15. **Кряжимский А.В.** Дифференциально-разностная игра уклонения от функциональной цели // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 4. С. 71–79.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 10.06.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ДЕФЕКТА СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ[1]

А. Г. Малёв

Изучается игровая задача о сближении с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Исследуется вопрос об оценке дефекта стабильности множества в пространстве позиций, слабо инвариантного относительно конечного набора унификационных дифференциальных включений.

Ключевые слова: игровая задача о сближении, стабильный мост, гамильтониан, дефект стабильности.

A. G. Malev. On the question of estimation of the stability defect in an approach game problem.

A game problem of the approach to a compact target set at a fixed termination time is studied. We investigate the question of estimating the stability defect of a set in the space of game positions, which is weakly invariant with respect to a finite set of unification differential inclusions.

Keywords: approach game problem, control, stable bridge, Hamiltonian, stability defect.

Введение

Рассматривается конфликтно управляемая система на конечном промежутке времени. Изучается игровая задача о сближении системы с компактным множеством в конечный момент времени [1; 2]. Основным предметом исследования является введенное ранее в работах [3–5] понятие дефекта стабильности множеств в пространстве позиций конфликтно управляемой системы. Это понятие было введено в целях расширения концепции стабильности и в связи с тем, что довольно часто в процессе конструирования стабильных мостов мы получаем множество, не обладающее, вообще говоря, свойством стабильности. Свойство стабильности есть свойство слабой инвариантности множества в пространстве позиций относительно некоторого набора дифференциальных включений, связанного с динамикой системы. Эти наборы могут быть различными, но выделяют при этом в пространстве позиций одни и те же множества — стабильные мосты. Для расширения концепции стабильности оказалось удобным применение унификационных определений стабильности, базирующихся на унификационных наборах [6; 7]. В частности, можно использовать унификационные определения стабильности в инфинитезимальной форме [8].

Отметим, что унификационные наборы дифференциальных включений, через которые выражены унификационные определения стабильности [6; 7] и которые используются в настоящей работе, являются бесконечными. Проверить реально, является ли то или иное множество в пространстве позиций стабильным мостом, для сколько-нибудь нетривиальных систем практически невозможно. Такую проверку можно осуществить для некоторых довольно простых конфликтно управляемых систем (т. е. систем, имеющих простой гамильтониан), благодаря тому, что унификационный набор можно подменить эквивалентным ему с точки зрения свойства стабильности конечным поднабором дифференциальных включений.

Для произвольных конфликтно управляемых систем с непростой динамикой становится актуальной следующая задача.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00427-а, 11-01-12088 офи-м-2011) и программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002).

Пусть выбран некоторый конечный поднабор из унификационного набора дифференциальных включений и, допустим, сконструировано множество в пространстве позиций, слабо инвариантное относительно этого поднабора. Требуется оценить, в какой мере это множество обладает свойством стабильности, т. е. является слабо инвариантным относительно всего унификационного набора. Иными словами, требуется дать оценку сверху дефекта стабильности этого множества.

Настоящая работа, посвященная выводу одной из таких оценок дефекта стабильности, продолжает исследования [1–12].

1. Постановка игровой задачи о сближении и стабильные мосты

Задана конфликтно управляемая система, поведение которой на промежутке времени $[t_0,\vartheta]$ $(t_0<\vartheta<\infty)$ описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u,v),\quad x(t_0)=x^0,\quad u\in P,\quad v\in Q. \tag{1.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u и v — соответственно управления первого и второго игроков, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Условие A. Функция $f(t,x,u,v)$ определена и непрерывна на $[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P\times Q$, и для любой ограниченной замкнутой области $D\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$ существует такая постоянная $L=L(D)\in(0,\infty)$, что

$$\big\|f\big(t,x^{(1)},u,v\big)-f\big(t,x^{(2)},u,v\big)\big\|\leqslant L\big\|x^{(1)}-x^{(2)}\big\|,\quad \big(t,x^{(i)},u,v\big)\in D\times P\times Q,\quad i=1,2.$$

Здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора f в евклидовом пространстве.

Условие B. Существует такая постоянная $\gamma\in(0,\infty)$, что

$$\|f(t,x,u,v)\|\leqslant\gamma(1+\|x\|),\quad (t,x,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\times P\times Q.$$

В игровой задаче о сближении первому игроку требуется обеспечить попадание на заданный компакт $M\subset\mathbb{R}^m$ фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1.1). Решение задачи о сближении требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока [2].

В задаче об уклонении, дуальной к задаче о сближении, второму игроку требуется обеспечить уклонение фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1.1) от некоторой ε-окрестности M_ε множества M. Решение задачи об уклонении требуется обеспечить в классе процедур управления с поводырем второго игрока, базирующихся на информации о позициях и управлениях первого игрока, [2].

Для дифференциальной игры сближения-уклонения, складывающейся из задач о сближениии и об уклонении, справедлива альтернатива [8]: существует такое замкнутое множество $W^0\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, что для всех исходных позиций $(t_*,x_*)\in W^0$ разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций $(t_*,x_*)\in\big([t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m\big)\setminus W^0$ разрешима задача об уклонении.

При решении игровой задачи о сближении множество W^0 играет определяющую роль. Разрешающая позиционная процедура управления первого игрока для исходных позиций $(t_*,x_*)\in W^0$ может быть реализована как позиционная процедура управления с поводырем, нацеливающая фазовый вектор $x(t)$ системы (1.1) на поводыря, идущего в множестве W^0.

Как известно, множество W^0 обладает одним очень важным свойством: W^0 есть максимальный u-стабильный мост [2]. Это свойство лежит в основе алгоритмов приближенного вычисления моста W^0 [2].

В ряде работ для приближенного вычисления моста W^0 используются алгоритмы, базирующиеся на унификационных конструкциях или их модификациях [11; 12].

Учитывая важность унификационных конструкций для определения дефекта стабильности, опишем свойство стабильности множеств, содержащихся в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, в терминах унификационного набора дифференциальных включений [6; 7].

Для описания этого набора введем в рассмотрение гамильтониан системы (1.1) и набор $\mathcal{L}$ многозначных отображений. Полагаем, что

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \quad (t, x, l) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

— гамильтониан системы (1.1), где $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение l и f из $\mathbb{R}^m$.

Принимая во внимание условие В и определение множества W^0 как множества разрешимости в задаче о сближении фазового вектора $x(\vartheta)$ с M, заключаем, что в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ можно указать такую достаточно большую ограниченную и замкнутую область D, которая содержит множество W^0 и все движения $x(t)$ системы (1.1), приходящие в некоторую заданную ε-окрестность множества M (т. е. $(t, x(t)) \in D$ при $t \in [t_0, \vartheta]$).

Начиная с этого момента, зафиксируем область D.

Выберем $R \in (0, \infty)$ настолько большим, что

$$r = \max_{(t,x,l) \in D \times S} |H(t, x, l)| < R. \tag{1.2}$$

Следуя [6; 7], полагаем при $(t, x, l) \in D \times S$

$$G = B(\mathbf{0}; R), \quad \Pi_l(t, x) = \left\{ f \in \mathbb{R}^m \colon \langle l, f \rangle \leqslant H(t, x, l) \right\}, \quad F_l(t, x) = \Pi_l(t, x) \cap G.$$

Здесь $B(\mathbf{0}; R)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в $\mathbf{0}$ радиуса R, $S = \left\{ l \in \mathbb{R}^m \colon \|l\| = 1 \right\}$.

Таким образом, множества $F_l(t, x)$ представляют собой шаровые сегменты в пространстве $\mathbb{R}^m$, не вырождающиеся ни при каких $(t, x, l) \in D \times S$, т. е. имеющие непустую внутренность.

Определим набор $\mathcal{L}$ как совокупность многозначных отображений $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$, определенных на D и отвечающих векторам $l \in S$. Очевидно, что этот набор несчетен.

Рассмотрим набор $\mathcal{N}$ дифференциальных включений на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F_l(t, x), \tag{1.3}$$

отвечающих отображениям из набора $\mathcal{L}$.

Пусть $(t_*, x_*) \in D$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $l \in S$.

Полагаем, что $X_l(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости дифференциальных включений (1.3), отвечающее моменту t^* и начальному условию $x(t_*) = x_*$. Множество $X_l(t^*, t_*, x_*)$ есть компактное множество в $\mathbb{R}^m$, которое может иметь очень сложную геометрию и, в частности, быть невыпуклым, неодносвязным и так далее.

Пусть W — непустое замкнутое множество в D.

О п р е д е л е н и е 1.1 [6; 7]. Множество W назовем u-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ, если

$$W(\vartheta) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \colon (\vartheta, x) \in W \right\} \subseteq M$$

и для любых $(t_*, x_*) \in W$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$, $l \in S$

$$W(t^*) \cap X_l(t^*, t_*, x_*) \neq \varnothing.$$

Как уже упоминалось выше, множество W^0 есть максимальный (по включению) u-стабильный мост [2].

Приведем также инфинитезимальную формулировку свойства u-стабильности, выраженную в терминах набора $\mathcal{L}$ [8]. Эту формулировку представим в виде теоремы.

Полагаем $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) = \Big\{d \in \mathbb{R}^m\colon d = \lim\limits_{k\to\infty}(t_k - t_*)^{-1}(w_k - x_*)$, где $\{(t_k, w_k)\}$ — последовательность в W, $t_k \downarrow t_*$ при $k \to \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} w_k = x_*\Big\}$. $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$ является производным множеством многозначного отображения $t \mapsto W(t) = \big\{x \in \mathbb{R}^m\colon (t, x) \in W\big\}$ в точке $(t_*, x_*) \in W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ (см. [8]).

Теорема 1 [8]. *Множество W является и-стабильным мостом в задаче о сближении с M в момент ϑ тогда и только тогда, когда*

1. $W(\vartheta) \subseteq M$;
2. $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad t_* \in [t_0, \vartheta), \quad (t_*, x_*, l) \in \partial W \times S$.

Инфинитезимальная формулировка стабильности представляет собой элемент внедрения конструкций производных в теорию дифференциальных игр. Как оказалось, она является весьма полезной при выявлении различных свойств стабильных мостов [9] и при формировании новых понятий и конструкций в теории дифференциальных игр [3–5].

2. Дефект стабильности множеств в пространстве позиций игры и оценка дефекта стабильности для некоторых множеств

В этом разделе приведем определение дефекта стабильности множества $W^* \subset D$ [3–5].

Предполагаем, что $W^* \subset D$ из разд. 1 удовлетворяет равенству $W^*(\vartheta) = M$ и обладает свойством непрерываемости: если $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и $W^*(t_*) \neq \varnothing$, то $W^*(t^*) \neq \varnothing$.

Более того, в усиление свойства непрерываемости множества W^* предполагаем, что выполнено

Условие C.

$$d\big(W^*(t_*), W^*(t^*)\big) \leqslant R(t^* - t_*), \quad t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta.$$

Здесь $d(W_1, W_2)$ — хаусдорфово расстояние между компактами W_1 и W_2 из $\mathbb{R}^m$.

Из условия C следует, что W^* удовлетворяет соотношению

$$\overrightarrow{D}W^*(t_*, x_*) \cap G \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0, \vartheta).$$

Условие C означает, что многозначное отображение $t \mapsto W^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, — липшицево с константой Липшица $R \in (0, \infty)$; это условие не является слишком ограничительным для множества W^*.

Сопоставим каждой точке $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho\big(\overrightarrow{D}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)\big).$$

Здесь $\rho(W_1, W_2) = \inf\big\{\|w_1 - w_2\| : (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2\big\}$.

Величину $\varepsilon(t_*, x_*)$, введенную в [3–5], назовем *дефектом стабильности множества W^* в точке* $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$. Величина $\varepsilon(t_*, x_*) \geqslant 0$ есть локальная характеристика степени нестабильности множества W^* в точке $(t_*, x_*) \in \partial W^*$. Она показывает, насколько сильно не согласованы динамика конфликтно управляемой системы (1.1) и эволюция множества W^* в точке (t_*, x_*) в смысле свойства стабильности. Большое значение величины $\varepsilon(t_*, x_*)$ означает их сильную несогласованность; равенство $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ означает наличие стабильности множества W^* в точке (t_*, x_*).

Отметим, что условие A вместе с неравенством (1.2) влекут непрерывность (в хаусдорфовой метрике) многозначного отображения $(t, x, l) \mapsto F_l(t, x)$ на компакте $D \times S$ и, следовательно, равномерную непрерывность отображения $(t,x,l) \mapsto F_l(t,x)$ на $D \times S$. Отсюда следует, что существует такая функция $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, при которой имеет место неравенство

$$d\big(F_l(t_*,x_*),F_l(t^*,x^*)\big) \leqslant \omega^*\big(|t_*-t^*|+\|x_*-x^*\|\big),$$
$$(t_*,x_*),\ (t^*,x^*) \in D, \quad l \in S.$$

Нетрудно также показать (см. [10]), что при некотором $\lambda = \lambda(L) \in (0,\infty)$ справедливо

$$d\big(F_l(t,x^{(1)}),F_l(t,x^{(2)})\big) \leqslant \lambda \left\|x^{(1)}-x^{(2)}\right\|, \quad l \in S, \quad (t,x^{(i)}) \in D, \quad i=1,2.$$

Это число $\lambda = \lambda(L)$ определяется в работе [10, с. 168]. Согласно этой работе в применении к нашим обозначениям можно положить $\lambda = \lambda(L) = \dfrac{RL}{\sqrt{R^2-r^2}}$.

Введем далее в рассмотрение компакт $\overrightarrow{D}^\nabla W^*(t_*,x_*) = \overrightarrow{D}W^*(t_*,x_*) \cap B(\mathbf{0};3R)$ в $\mathbb{R}^m$.

Справедливо равенство

$$\rho\big(\overrightarrow{D}^\nabla W^*(t_*,x_*),F_l(t_*,x_*)\big) = \rho\big(\overrightarrow{D}W^*(t_*,x_*),F_l(t_*,x_*)\big),$$
$$(t_*,x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0,\vartheta), \quad l \in S,$$

поэтому верно представление

$$\varepsilon(t_*,x_*) = \sup_{l \in S} \rho\big(\overrightarrow{D}^\nabla W^*(t_*,x_*),F_l(t_*,x_*)\big), \quad (t_*,x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0,\vartheta).$$

Заметим, что замена множества $\overrightarrow{D}W^*(t_*,x_*)$ компактом $\overrightarrow{D}^\nabla W^*(t_*,x_*)$ необходима нам для обоснования некоторых утверждений относительно дефекта стабильности.

Полагаем при $t_* \in [t_0,\vartheta)$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*,x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*,x_*).$$

Здесь $\Lambda(t_*) = \partial W^* \cap \Gamma_{t_*}$, $\Gamma_{t_*} = \big\{(t,x)\colon t=t_*\big\}$.

Величину $\varepsilon(t_*)$ на $[t_0,\vartheta)$ дополним значением $\varepsilon(t_*)=0$ при $t_*=\vartheta$.

Вместе с тем получаем неотрицательную функцию $\varepsilon(t)$ на $[t_0,\vartheta]$. Следуя работам [3–5], величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом стабильности множества* W^* *в момент* t_*, функцию $\varepsilon(t)$ на $[t_0,\vartheta]$, представляющую собой некоторую характеристику нестабильности множества W^*, назовем *спектром нестабильности множества* W^*. В [3–5] отмечалось, что $\varepsilon(t) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда W^* — u-стабильный мост. Следовательно, при $\varepsilon(t) \equiv 0$ на $[t_0,\vartheta]$ правило экстремального прицеливания на поводыря, идущего по W^* [3–5], гарантирует для точек $(t_*,x(t_*)) \in W^*$ попадание фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1.1) на M.

Итак, в случае тривиального спектра нестабильности $\varepsilon(t)$ множества W^* существует позиционная процедура управления с поводырем первого игрока, обеспечивающая включение $x(\vartheta) \in M$ при $(t_*,x(t_*)) \in W^*$. В [3–5] показано также, что при некоторых дополнительных условиях на W^* и при малом спектре нестабильности $\varepsilon(t)$ на $[t_0,\vartheta]$ существует позиционная процедура управления с поводырем первого игрока, обеспечивающая попадание фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1.1) (для точек $(t_*,x(t_*)) \in W^*$) в малую ε-окрестность M_ε множества M. При этом показано, что ε может быть выражено через $\varepsilon(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$. Поясним более подробно, о чем здесь идет речь.

В дополнение к условию C, наложенному на W^*, примем, что W^* и функция $\varepsilon(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$, удовлетворяют следующим условиям.

Условие D. Существует такая функция $\varphi^*(\delta) \geqslant 0$ на $(0,\vartheta-t_0)$ ($\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$), что

$$h\left(\overrightarrow{D}^\nabla W^*(t_*,x_*),\delta^{-1}\big(W^*(t_*+\delta)-x_*\big)\right) \leqslant \varphi^*(\delta),$$
$$(t_*,x_*) \in \partial W^*, \quad t_* \in [t_0,\vartheta), \quad \delta \in (0,\vartheta-t_*).$$

Здесь $\delta^{-1}\big(W^*(t_*+\delta)-x_*\big)=\big\{f\in\mathbb{R}^m\colon f=\delta^{-1}(w^{(\delta)}-x_*),\ w^{(\delta)}\in W^*(t_*+\delta)\big\}$, $h(W_1,W_2)$ — хаусдорфово отклонение компакта W_1 от компакта W_2 в $\mathbb{R}^m$.

Условие E. Функция $\varepsilon(t)$ измерима по Лебегу на $[t_0,\vartheta]$.

Введем множество $\mathcal{W}^*\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$: $\mathcal{W}^*(t)=W^*(t)+B(\mathbf{0};\varkappa(t))$, $t\in[t_0,\vartheta]$; здесь $\varkappa(t)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{t}-\tau)}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau$ — интеграл Лебега.

Множество $\mathcal{W}^*$ удовлетворяет начальному условию $\mathcal{W}^*(t_0)=W^*(t_0)$, и его сечения $\mathcal{W}^*(t)$ есть $\varkappa(t)$-окрестности в $\mathbb{R}^m$ сечений $W^*(t)$, где $\varkappa(t)$ монотонно возрастает с ростом t.

Теорема 2 [4, теорема 3.1]. *$\mathcal{W}^*$ — u-стабильный мост в задаче о сближении системы* (1.1) *в момент ϑ с множеством $M_{\varkappa(\vartheta)}$.*

Из теоремы 2 следует, что существует позиционная процедура управления с поводырем первого игрока, обеспечивающая попадание фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1.1) на $M_{\varkappa(\vartheta)}$ из точек $(t_*,x(t_*))\in W^*$. Число $\varepsilon_{W^*}=\varkappa(\vartheta)$ названо в [4; 5] *дефектом стабильности множества W^**.

После того как аккуратно определено понятие дефекта стабильности ε_{W^*}, можно рассматривать различные множества W^* на предмет вычисления или оценки дефекта ε_{W^*}. Если для какого-либо множества W^* в некоторой конкретной задаче о сближении дефект ε_{W^*} оказывается мал, то вместо задачи о сближении с M, сформулированной в разд. 1, не лишено смысла рассмотреть задачу о сближении с M в мягкой постановке — задачу о сближении с $M_{\varepsilon_{W^*}}$.

В игровых задачах о сближении с M, в которых конфликтно управляемая система (1.1) рассматривается на промежутке времени $[t_0,\vartheta]$, имеет смысл рассмотреть различные примечательные множества $W^*\subset[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^m$, удовлетворяющие равенству $W^*(\vartheta)=M$. Большой интерес представляет выяснение вопроса о том, в какой мере эти множества являются стабильными мостами в игровой задаче о сближении с M в момент ϑ. Такими примечательными множествами являются, например, множество программного поглощения в игровой задаче о сближении с M в момент ϑ и множество позиционного поглощения в игровой задаче о сближении с M к моменту ϑ [2]. Выяснение упомянутого вопроса сводится к вычислению для интересующих нас множеств W^* дефекта стабильности ε_{W^*} или его оценки сверху.

В настоящей работе мы рассмотрим одно из множеств $W^*\subset D$, для которого получим оценку сверху дефекта стабильности ε_{W^*}.

Считаем, что в наборе $\mathcal{L}$ многозначных отображений $(t,x)\mapsto F_l(t,x)$ (см. с. 207) выбран некоторый конечный поднабор $\mathcal{L}^*=\big\{(t,x)\mapsto F_{l_\rho}(t,x),\ \rho\in\overline{1,N}\big\}$.

Будем также считать, что в области D выделено максимальное (по включению) множество W^* ($W^*(\vartheta)=M$), слабо инвариантное относительно конечного набора $\mathcal{N}^*$ дифференциальных включений

$$\frac{dx}{dt}\in F_{l_\rho}(t,x),\quad \rho\in\overline{1,N},\quad t\in[t_0,\vartheta],\tag{2.1}$$

отвечающих отображениям из $\mathcal{L}^*$.

При конструировании максимальных u-стабильных мостов в задаче о сближении с M в момент ϑ так и бывает, что мы используем не весь набор $\mathcal{L}$, представляющий собой несчетное множество, а только какой-нибудь его конечный поднабор $\mathcal{L}^*$.

Ясно, что W^* — непустое замкнутое множество в D, удовлетворяющее наряду с равенством $W^*(\vartheta)=M$ также и включению $W^0\subseteq W^*$. В некоторых редких случаях может случиться так, что $W^0=W^*$. В подавляющем же большинстве случаев имеет место строгое включение $W^0\subset W^*$ и, следовательно, в этих случаях множество W^* не обладает свойством стабильности. Естественно, возникает вопрос о том, в какой мере W^* нестабильно.

Итак, наша задача заключается в получении оценки сверху дефекта стабильности множества W^*. Для получения этой оценки докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Существует такая константа* $L_H \in (0,\infty)$, *что гамильтониан системы* (1.1) *удовлетворяет неравенству*

$$|H(t,x,l^*) - H(t,x,l_*)| \leqslant L_H \,\|l^* - l_*\|\,, \quad (t,x) \in D, \quad l_*,\, l^* \in S.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные $(t,x) \in D$ и l^*, l_* из S.

Обозначим $\Psi(l,t,x,u) = \min\limits_{v\in Q}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle$, $(l,t,x,u) \in S \times D \times P$. Тогда по определению гамильтониана $H(t,x,l)$ системы (1.1) имеем равенства

$$\begin{aligned} H(t,x,l^*) &= \max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle l^*, f(t,x,u,v)\rangle = \max_{u\in P}\Psi(l^*,t,x,u),\\ H(t,x,l_*) &= \max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle l_*, f(t,x,u,v)\rangle = \max_{u\in P}\Psi(l_*,t,x,u). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Обозначим $v^*(u) = \arg\min\limits_{v\in Q}\langle l^*, f(t,x,u,v)\rangle$ при $u \in P$ и $u^* = \arg\max\limits_{u\in P}\Psi(l^*,t,x,u)$.

Аналогично определим $v_*(u) = \arg\min\limits_{v\in Q}\langle l_*, f(t,x,u,v)\rangle$ при $u\in P$ и $u_* = \arg\max\limits_{u\in P}\Psi(l_*,t,x,u)$.

Из соотношений (2.2) следуют равенства

$$\begin{aligned} H(t,x,l^*) &= \Psi(l^*,t,x,u^*) = \langle l^*, f(t,x,u^*,v^*(u^*))\rangle,\\ H(t,x,l_*) &= \Psi(l_*,t,x,u_*) = \langle l_*, f(t,x,u_*,v_*(u_*))\rangle. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из определения $v_*(u)$ имеем

$$\begin{aligned} \Psi(l^*,t,x,u) - \Psi(l_*,t,x,u) &= \min_{v\in Q}\langle l^*, f(t,x,u,v)\rangle - \min_{v\in Q}\langle l_*, f(t,x,u,v)\rangle\\ = \min_{v\in Q}\langle l^*, f(t,x,u,v)\rangle - \langle l_*, f(t,x,u,v_*(u))\rangle &\leqslant \langle l^*, f(t,x,u,v_*(u))\rangle - \langle l_*, f(t,x,u,v_*(u))\rangle\\ &\leqslant \|l^* - l_*\|\,\|f(t,x,u,v_*(u))\| \leqslant K\,\|l^* - l_*\|\,; \end{aligned} \tag{2.4}$$

здесь $K = \max\limits_{(t,x,u,v)\in D\times P\times Q}\big\|f(t,x,u,v)\big\|$.

Из (2.2)–(2.4) следует

$$\begin{aligned} H(t,x,l^*) - H(t,x,l_*) &= \Psi(l^*,t,x,u^*) - \max_{u\in P}\Psi(l_*,t,x,u)\\ &\leqslant \Psi(l^*,t,x,u^*) - \Psi(l_*,t,x,u^*) \leqslant K\|l^* - l_*\|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Проводя аналогичные рассуждения после переобозначения $l_* \longleftrightarrow l^*$, неравенство (2.5) запишем в виде

$$H(t,x,l_*) - H(t,x,l^*) \leqslant K\|l_* - l^*\|. \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5), (2.6) означают липшицевость гамильтониана $H(t,x,l)$ системы (1.1) по переменной l с константой Липшица $L_H = K$. Лемма 1 доказана. $\square$.

Далее приступим непосредственно к рассмотрению многозначного отображения $(t,x,l) \mapsto F_l(t,x)$, заданного на $D \times S$.

На с. 209 отмечалось, что многозначное отображение $(t,x,l) \mapsto F_l(t,x)$ равномерно непрерывно на $D \times S$ в хаусдорфовой метрике.

Покажем, что отображение $(t,x,l) \mapsto F_l(t,x)$ обладает к тому же свойством типа свойства липшицевости по переменной l на S равномерно относительно $(t,x) \in D$.

Рассмотрим шары $B(\mathbf{0};r)$ и $B(\mathbf{0};R)$ в $\mathbb{R}^m$ (рис. 1).

Рассмотрим два вектора l_* и l^* из S, $l_* \neq l^*$, и пусть l_* направлен вертикально вверх. Обозначим через A точку на сфере S, лежащую в пересечении сферы S и направления $\Lambda_{l_*} = \big\{\lambda l_* : \lambda \geqslant 0\big\}$. Проведем из A какую-либо касательную прямую Λ к шару $B(\mathbf{0};r)$. Обозначим через B точку касания прямой Λ и шара $B(\mathbf{0};r)$. В результате получим прямоугольный треугольник

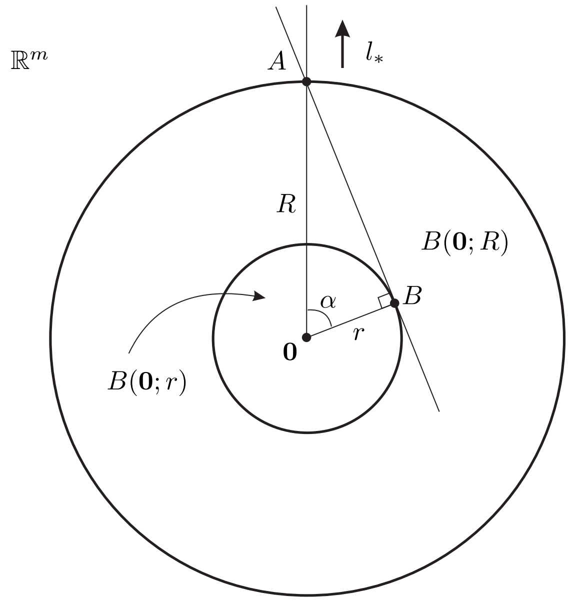


Рис. 1

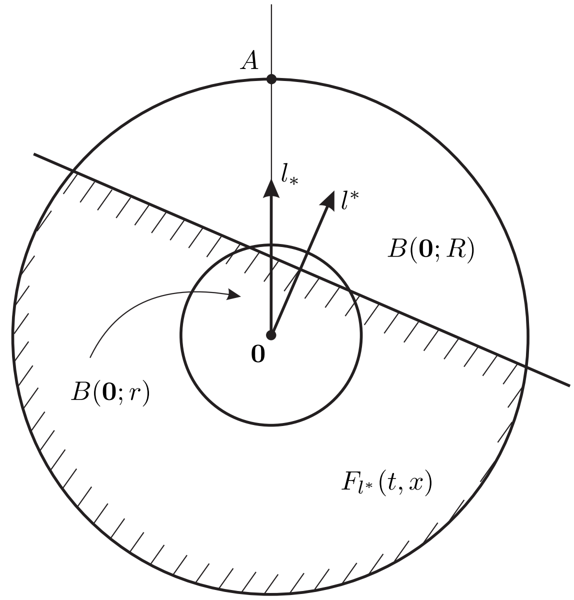


Рис. 2

$A\mathbf{0}B$ с прямым углом при вершине B. Пусть α — угол между гипотенузой $\mathbf{0}A$ и катетом $\mathbf{0}B$ треугольника $A\mathbf{0}B$. Очевидно, что $cos\alpha = r/R$ (см. рис. 1).

Выберем некоторое число $\xi \in (0,\alpha)$. Тогда получим, что для любого вектора $l^* \in S$ такого, что $\widehat{(l_*, l^*)} \leqslant \xi$, множество $F_{l^*}(t,x)$ не содержит точку A (рис. 2), где символ $\widehat{(a,b)}$ означает угол между векторами a и b из $\mathbb{R}^m$.

Этим обстоятельством мы воспользуемся при доказательстве следующего утверждения.

Лемма 2. *Существует такая константа* $L_F \in (0,\infty)$, *что*

$$d\big(F_{l_*}(t,x), F_{l^*}(t,x)\big) \leqslant L_F\|l_* - l^*\|, \quad (t,x) \in D, \quad l_*, l^* \in S, \quad \widehat{(l_*, l^*)} \leqslant \xi.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные l_* и l^* из S такие, что $\widehat{(l_*, l^*)} \leqslant \xi$.

Оценим сверху хаусдорфово отклонение $h\big(F_{l^*}(t,x), F_{l_*}(t,x)\big)$.

Согласно известному утверждению (см. [10; 11]) $h_{F_{l^*}(t,x)}(l_*) \geqslant h_{F_{l_*}(t,x)}(l_*) = H(t,x,l_*)$, где $h_F(l) = \max\limits_{f\in F}\langle l, f\rangle$ — опорная функция компакта F в $\mathbb{R}^m$.

Возможны два случая: a) $h_{F_{l^*}(t,x)}(l_*) = h_{F_{l_*}(t,x)}(l_*)$; b) $h_{F_{l^*}(t,x)}(l_*) > h_{F_{l_*}(t,x)}(l_*)$.

В случае a) имеем $F_{l^*}(t,x) \subset F_{l_*}(t,x)$, и поэтому $h\big(F_{l^*}(t,x), F_{l_*}(t,x)\big) = 0$.

Рассмотрим случай b). В этом случае существуют точки $f^* \in F_{l^*}(t,x) \setminus F_{l_*}(t,x)$.

Введем в рассмотрение "плоские" множества в $\mathbb{R}^m$

$$\Phi_{l_*}(t,x) = B(\mathbf{0};R) \cap \Gamma_{l_*}(t,x),\ \Phi_{l^*}(t,x) = B(\mathbf{0};R) \cap \Gamma_{l^*}(t,x),$$

где обозначено $\Gamma_l(t,x) = \big\{f \in \mathbb{R}^m \colon \langle l, f\rangle = H(t,x,l)\big\}$.

Из того факта, что векторы l_* и l^* выбраны удовлетворяющими неравенству $\widehat{(l_*, l^*)} \leqslant \xi$, следует

$$h\big(F_{l^*}(t,x), F_{l_*}(t,x)\big) = h\big(\Phi_{l^*}(t,x), \Phi_{l_*}(t,x)\big) > 0.$$

Кроме того, нетрудно показать, что максимум

$$h\big(\Phi_{l^*}(t,x), \Phi_{l_*}(t,x)\big) = \max_{f\in\Phi_{l^*}(t,x)} \rho(f, \Phi_{l_*}(t,x))$$

достигается в самой "высокой" точке множества $\Phi_{l^*}(t,x)$ — точке f^*, т. е. при $\langle l_*, f^*\rangle = h_{\Phi_{l^*}(t,x)}(l_*)$ (см. рис. 3).

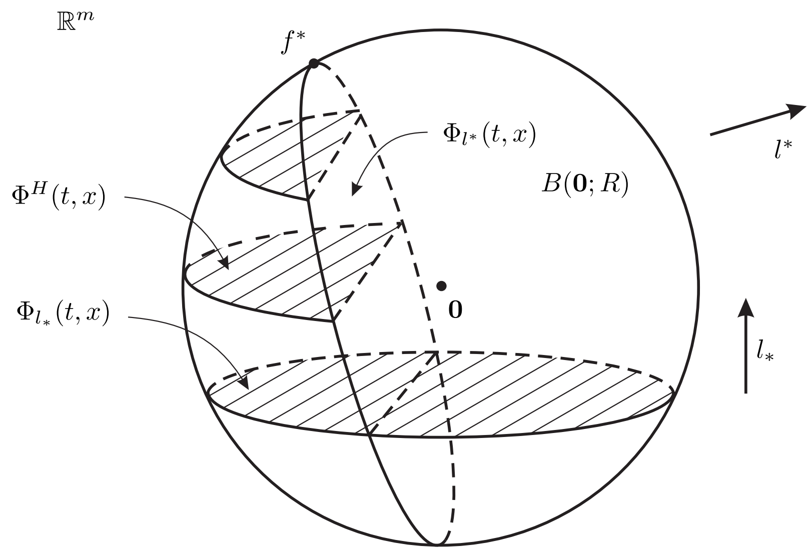


Рис. 3

В самом деле, полагаем $\hat{\Phi}_{l^*}(t,x) = \{f \in \mathbb{R}^m:\ f \in \Phi_{l^*}(t,x),\ \langle l_*, f\rangle > H(t,x,l_*)\}$ — та часть множества $\Phi_{l^*}(t,x)$, которая находится над $\Phi_{l_*}(t,x)$ (в направлении вектора l_*).

Множество $\hat{\Phi}_{l^*}(t,x)$ представимо в виде объединения "горизонтальных" стратов $\Phi^H(t,x) = \{f \in \mathbb{R}^m\colon f \in \hat{\Phi}_{l^*}(t,x),\ \langle l_*, f\rangle = H\}$, где $H(t,x,l_*) < H \leqslant H^* = \langle l_*, f^*\rangle$. Ясно, что более высокий страт удален (в хаусдорфовой метрике) от $\Phi_{l_*}(t,x)$ сильнее всех других стратов Φ^H и, значит,

$$h\big(\Phi_{l^*}(t,x), \Phi_{l_*}(t,x)\big) = \rho(f^*, \Phi_{l_*}(t,x)).$$

Самая "высокая" точка f^* множества $\Phi_{l^*}(t,x)$ принадлежит плоскости $\Pi = \{\alpha l_* + \beta l^*\colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1\} \subset \mathbb{R}^m$, и, кроме того, она лежит на границе шара $B(\mathbf{0};R)$ (см. рис. 4) и, стало быть, на границе круга $K(\mathbf{0};R) = B(\mathbf{0};R) \cap \Pi$ в плоскости Π радиуса R с центром в $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$.

Обозначим через f_* ближайшую на $\Phi_{l_*}(t,x)$ точку к точке f^*: $\|f^* - f_*\| = \rho(f^*, \Phi_{l_*}(t,x))$.

Справедливо равенство

$$\langle l_*, f_*\rangle - \langle l^*, f^*\rangle = H(t,x,l_*) - H(t,x,l^*). \tag{2.7}$$

Для левой части равенства (2.7) справедлива оценка

$$\big|\langle l_*, f_*\rangle - \langle l^*, f^*\rangle\big| = \big|\langle l_*, f_* - f^*\rangle + \langle l_* - l^*, f^*\rangle\big|$$
$$\geqslant |\langle l_*, f_* - f^*\rangle| - |\langle l_* - l^*, f^*\rangle| \geqslant |\langle l_*, f_* - f^*\rangle| - R\|l^* - l_*\|. \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.7), (2.8) получаем оценку

$$|\langle l_*, f_* - f^*\rangle| \leqslant \big|H(t,x,l_*) - H(t,x,l^*)\big| + R\|l^* - l_*\|.$$

Принимая во внимание липшицевость гамильтониана $H(t,x,l)$ по l (см. лемму 1), получаем неравенство

$$|\langle l_*, f_* - f^*\rangle| \leqslant (K+R)\|l^* - l_*\|. \tag{2.9}$$

Допустим теперь, что $(f_* - f^*) \parallel l_*$ (см. рис. 4). Тогда

$$\|f_* - f^*\| \leqslant (K+R)\|l^* - l_*\| \tag{2.10}$$

и, значит,

$$h\big(\Phi_{l^*}(t,x), \Phi_{l_*}(t,x)\big) \leqslant (K+R)\|l^* - l_*\|.$$

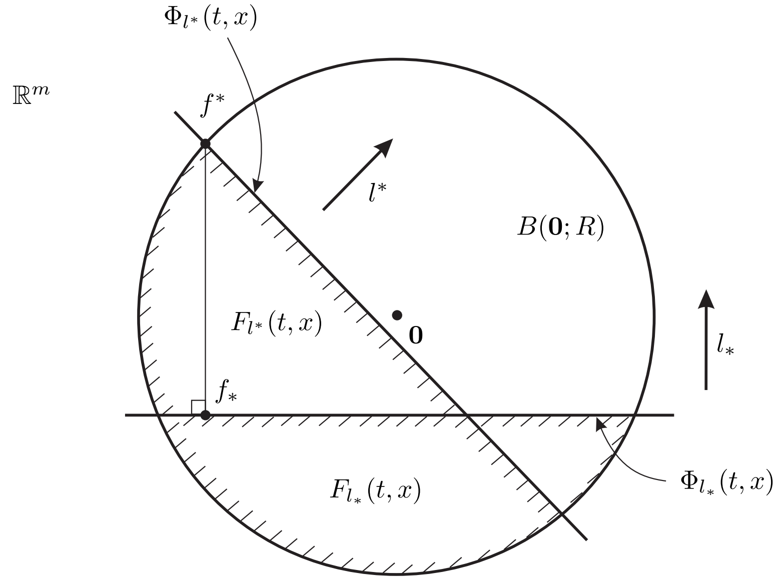


Рис. 4

Допустим теперь, что $(f_* - f^*) \nparallel l_*$. Тогда возьмем на гиперплоскости $\Gamma_{l_*}(t,x)$ точку $\tilde{f}$, ближайшую к f^*. Очевидно, что $\tilde{f} \notin B(\mathbf{0};R)$ (см. рис. 5). Обозначим через h_* ближайшую к $\mathbf{0}$ точку из $\Phi_{l_*}(t,x)$. Согласно определению гиперплоскости $\Gamma_{l_*}(t,x)$ имеем $h_* \parallel l_*$ и $\|h_*\| = |H(t,x,l_*)|$. Ясно, что точка h_* наряду с f^* и $\mathbf{0}$ лежит в плоскости Π.

Далее все рассуждения будем проводить в плоскости Π.

Точки $\tilde{f}$ и h_* лежат в плоскости Π; пусть f_* — ближайшая к $\tilde{f}$ точка в множестве $\Phi_{l_*}(t,x)$. Очевидно, что она — ближайшая к $\tilde{f}$ и в множестве $\Phi_{l_*}(t,x) \cap \Pi$.

Проведем через f_* касательную прямую Γ к окружности $\partial K(\mathbf{0};R)$. Прямая Γ пересечет отрезок $[\tilde{f}, f^*]$ в некоторой точке z. Такая точка действительно существует, ибо $\tilde{f}$ и f^* лежат в разных полуплоскостях в Π, порожденных прямой Γ (см. рис. 5).

Пусть α_* — угол между отрезками $[f_*, f^*]$ и $[f^*, \tilde{f}]$, β_* — угол между отрезками $[z, f_*]$ и $[z, \tilde{f}]$.

Принимая во внимание подобие треугольников $\triangle f_* z \tilde{f}$ и $\triangle f_* \mathbf{0} h_*$, а также неравенство (1.2), получаем соотношение

$$\cos\beta_* = \frac{\sqrt{R^2 - H(t,x,l_*)^2}}{R} \geqslant \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}.$$

Заметим, что по построению $\alpha_* < \beta_* < \pi/2$. Поэтому справедливо неравенство

$$\cos\alpha_* > \cos\beta_* \geqslant \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}. \tag{2.11}$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\bigl|\langle l_*, f^* - f_*\rangle\bigr| = \|l_*\| \cdot \|f_* - f^*\| \cos\alpha_* = \|f_* - f^*\| \cos\alpha_*. \tag{2.12}$$

Из соотношений (2.9), (2.11), (2.12) следует оценка

$$\|f_* - f^*\| \leqslant \frac{R(K+R)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \|l_* - l^*\|,$$

и, значит, верна в рассматриваемом случае оценка

$$h\bigl(F_{l^*}(t,x), F_{l_*}(t,x)\bigr) \leqslant \frac{R(K+R)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \|l_* - l^*\|. \tag{2.13}$$

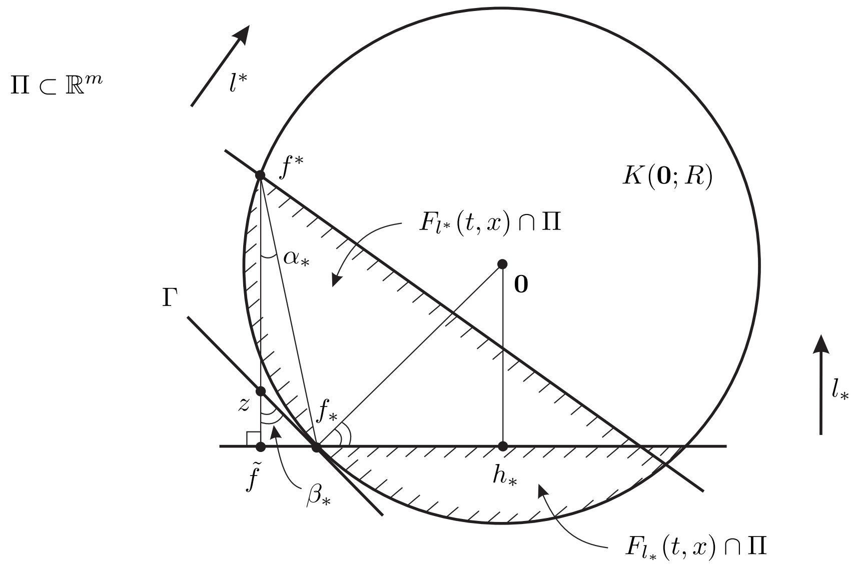


Рис. 5

Принимая во внимание оценки (2.10) и (2.13), получаем, что при l_* и l^* из S, удовлетворяющих неравенству $\widehat{(l_*, l^*)} \leqslant \xi$, в случае b) имеет место оценка (2.13).

Вместе с тем лемма 2 доказана; в ней можно положить $L_F = \dfrac{R(K+R)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \in (0, \infty)$. □

Сформулируем и докажем, опираясь на лемму 2, следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть конечный набор* $S^{(\delta)} = \{l_\rho \colon \rho \in \overline{1,N}\} \subset S$ *является* δ*-сетью в сфере* $S \subset \mathbb{R}^m$*, где* $0 < \delta \leqslant 2\sin(\xi/2)$*. Тогда дефект стабильности* ε_{W^*} *максимального слабо инвариантного множества* W^* $(W^*(\vartheta) = M)$ *относительно конечного набора* $\mathcal{N}^*$ *дифференциальных включений* (2.1) удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon_{W^*} \leqslant L_F \frac{\mathrm{e}^{\lambda(\vartheta - t_0)} - 1}{\lambda} \delta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $S^{(\delta)}$ — набор, указанный в условиях теоремы, и $\mathcal{N}^*$ — множество дифференциальных включений (2.1), отвечающее этому набору.

Пусть также W^* — множество, указанное в условиях теоремы. Поскольку W^* слабо инвариантно относительно дифференциальных включений из набора $\mathcal{N}^*$, то для любых $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и $(t_*, x_*) \in \partial W^*$ верно

$$\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*) \cap F_{l_\rho}(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad \rho \in \overline{1,N}.$$

Согласно определению набора $S^{(\delta)}$, для любого вектора $l_* \in S$ найдется вектор $l_{\rho_*} \in S^{(\delta)}$, удовлетворяющий неравенству $\|l_* - l_{\rho_*}\| \leqslant \delta$, а значит, и неравенству $\widehat{(l_*, l_{\rho_*})} \leqslant \xi$.

Тогда векторы l_* и l_{ρ_*} удовлетворяют, согласно лемме 2, неравенству

$$d\big(F_{l_*}(t_*, x_*), F_{l_{\rho_*}}(t_*, x_*)\big) \leqslant L_F \|l_* - l_{\rho_*}\| \leqslant L_F \delta. \tag{2.14}$$

Из неравенства (2.14) и соотношения $\overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*) \cap F_{l_{\rho_*}}(t_*, x_*) \neq \varnothing$ следует

$$\rho\big(F_{l_*}(t_*, x_*), \overrightarrow{D} W^*(t_*, x_*)\big) \leqslant L_F \delta$$

при любых $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и $l_* \in S$.

Отсюда вытекает неравенство

$$\varepsilon(t_*) \leqslant L_F \delta, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \tag{2.15}$$

Используя неравенство (2.15), оценим дефект стабильности $\varepsilon_{W^*} = \varkappa(\vartheta)$ множества W^*. Имеем
$$\varepsilon_{W^*} = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mathrm{e}^{\lambda(\vartheta-\tau)}\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau \leqslant \mathrm{L_F}\delta \int\limits_{\mathrm{t}_0}^{\vartheta} \mathrm{e}^{\lambda(\vartheta-\tau)}\mathrm{d}\tau = \mathrm{L_F}\frac{\mathrm{e}^{\lambda(\vartheta-\mathrm{t}_0)}-1}{\lambda}\delta.$$

Теорема 3 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Ушаков В.Н., Латушкин Я.А.** Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 178–194.
4. **Ушаков В.Н., Малёв А.Г.** К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
5. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** Об одном дополнении к свойству стабильности в дифференциальных играх // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова РАН. 2010. Т. 271. С. 299–318.
6. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
7. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
8. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game-theoretical problems of control // Probl. Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419.
9. О совпадении максимальных стабильных мостов в двух игровых задачах о сближении для стационарных управляемых систем / В.Н. Ушаков, Х.Г. Гусейнов, Я.А. Латушкин, П.Д. Лебедев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №. 3. С. 219–240.
10. **Ушаков В.Н.** Теория минимаксных дифференциальных игр (часть I): деп. рукопись / Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. 1980. № 4425-80. 187 с.
11. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Деп. в ВИНИТИ, № 2454-83. Свердловск, 1983. 61 с.
12. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.

Малёв Алексей Георгиевич
ведущий математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: MalevAG@mail.ru

Поступила 22.06.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2-СВЯЗАННОГО ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ

Н. Л. Манохина, Р. А. Шафиев

Для решения задачи 2-связанного псевдообращения предложен регуляризирующий алгоритм, основанный на решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Найдены условия стабилизации решения задачи Коши к нормальному решению рассматриваемой задачи в случае возмущения входных данных.

Ключевые слова: 2-связанное псевдорешение операторного уравнения в гильбертовом пространстве, нормальное 2-связанное псевдорешение, метод установления, задача 2-связанного псевдообращения.

N. L. Manokhina, R. A. Shafiev. Solution of a 2-constrained pseudo-inversion problem by a relaxation method.

A regularizing algorithm based on the solution of the Cauchy problem for a second-order linear differential equation in a Hilbert space is proposed for solving a 2-constrained pseudo-inversion problem. Conditions are found for the stabilization of a solution of the Cauchy problem to a normal solution of this problem in the case of perturbed input data.

Keywords: 2-constrained pseudo-solution to an operator equation in a Hilbert space, normal 2-constrained pseudo-solution, relaxation method, 2-constrained pseudo-inversion problem.

1. Введение

Предположим, что заданы линейные ограниченные операторы $A\colon X\to Y$, $B_i\colon X\to Z_i$ $(i=1,2)$, где X, Y, Z_i — гильбертовы пространства, и элементы $y\in Y$, $z_i\in Z_i$ $(i=1,2)$.

Составим последовательно множества

$$X_0=X,$$

$$X_i=\operatorname{Arg}\min_{x\in X_{i-1}}\|B_ix-z_i\|\quad (i=1,2),$$

$$X_A=\operatorname{Arg}\min_{x\in X_2}\|Ax-y\|.$$

Элементы множества X_A называются *двусвязанными псевдорешениями* базового уравнения $Ax=y$ при дополнительных линейных связях $B_1x=z_1$, $B_2x=z_2$. Элемент $x_*\in X_A$, наименее уклоняющийся от заданного элемента $x_0\in X$, называется *нормальным относительно x_0 двусвязанным псевдорешением*, а двусвязанное псевдорешение минимальной нормы, т. е. при $x_0=0$, называется *нормальным* и обозначается x^*. Задача нахождения нормальных двусвязанных псевдорешений называется *задачей двусвязанного псевдообращения*. Для простоты эту задачу будем называть *основной* задачей, а x_* и x^* соответственно *решением* и *нормальным решением* основной задачи. Основная задача относится к классу некорректных задач с априорной информацией (см. [1]), однако задачи с априорным множеством вида X_2 в [1] не рассмотрены.

Поставленная задача при $B_i=0$, $z_i=0$, $i=1,2$, переходит в задачу псевдообращения [2; 3], а при $B_2=0$, $z_2=0$ — в задачу связанного псевдообращения (см. [4] и под другими названиями [5–7]). Отметим, что рассмотрение общей задачи n-связанного псевдообращения [8; 9] при $n>2$ не требует привлечения новых идей и методов исследования. Затруднения носят технический характер.

Рассматриваемая абстрактная задача находит приложение, например, к некоторым задачам оптимального управления (см. [6–8; 10]).

Предположим, что входные данные задачи известны приближенно:

$$\|\tilde{A} - A\| \le l, \quad \|\tilde{B}_1 - B_1\| \le h_1, \quad \|\tilde{B}_2 - B_2\| \le h_2,$$

$$\|\tilde{y} - y\| \le \tau, \quad \|\tilde{z}_1 - z_1\| \le \delta_1, \quad \|\tilde{z}_2 - z_2\| \le \delta_2. \tag{1.1}$$

Введем семейства операторов и векторов

$$\tilde{\Gamma}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{r_1}\tilde{B}_1 \\ \sqrt{r_2}\tilde{B}_2 \\ \tilde{A} \end{bmatrix} X \to G, \quad \tilde{g}_r = \begin{bmatrix} \sqrt{r_1}\tilde{z}_1 \\ \sqrt{r_2}\tilde{z}_2 \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \in G,$$

где $r = (r_1, r_2) > 0$, т. е. $r_i > 0$, $i = 1, 2$, $G = Z_1 \times Z_2 \times Y$.

Для решения основной задачи предлагается следующий возмущенный регуляризующий алгоритм, называемый *методом установления*:

$$\begin{cases} \tilde{x_r}'(t) + \tilde{\Gamma_r}^*\tilde{\Gamma}_r\tilde{x_r}(t) = \tilde{\Gamma_r}^*\tilde{g_r}, \quad 0 < t < +\infty, \quad r = (r_1, r_2) > 0, \\ \tilde{x_r}(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Для нахождения нормального решения основной задачи начальное условие в (1.2) берется равным нулю, т. е. $\tilde{x_r}(0) = 0$.

Заметим, что этот метод можно рассматривать как теоретическую базу для построения итерационных методов, основанных на дискретизации задач Коши (1.2). Один из таких итерационных методов исследован в [10].

2. О решениях задачи и некоторых оценках

Обозначим через P_1, P, Q ортопроекторы соответственно на $N(B_1), N(B_1) \cap N(B_2)$ и $N(B_1) \cap N(B_2) \cap N(A)$, где $N(\cdot)$ — ядро соответствующего оператора.

Введем составные операторы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} : X \to G, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где $G = Z_1 \times Z_2 \times Y$. Как легко видеть, Q будет ортопроектором на $N(\Gamma)$, а P — на $N(B)$.

В [8; 9] установлено, что для разрешимости основной задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялись включения

$$z_1 \in D(B_1^+) = R(B_1) \oplus R(B_1)^\perp,$$

$$z_2 - B_2B_1^+z_1 \in D((B_2P_1)^+) = R(B_2P_1) \oplus R(B_2P_1)^\perp,$$

$$y - A[B_1^+z_1 + (B_2P_1)^+(z_2 - B_2B_1^+z_1)] \in D((AP)^+) = R(AP) \oplus R(AP)^\perp,$$

где индексом $+$ обозначен переход к псевдообратному оператору. В этом случае в ортогональном дополнении $N(\Gamma)^\perp$ существует единственное нормальное решение x^* основной задачи, а любое решение x_* имеет вид

$$x_* = x^* + Qu \colon u \in X$$

и удовлетворяет равенствам

$$B_1^*(B_1x_* - z_1) = 0, \quad P_1B_2^*(B_2x_* - z_2) = 0, \quad PA^*(Ax_* - y) = 0. \tag{2.1}$$

Ясно, что если все операторы B_1, B_2, A нормально разрешимы и их ядра имеют тривиальное пересечение, т. е. $N(\Gamma) = 0$, то задача 2-связанного псевдообращения имеет единственное решение x^* при любых правых частях z_1, z_2, y. Заметим, что задача 2-связанного псевдообращения даже при этих условиях остается неустойчивой относительно ошибок в операторах.

Для любого $x_0 \in X$ решение x_*, ближайшее к x_0, определяется равенством $x_* = x^* + Qx_0$ и характеризуется соотношением

$$x_* - x_0 \in N(\Gamma)^\perp. \tag{2.2}$$

Пусть X и G — два гильбертовых пространства и $U\colon X \to G$ — линейный ограниченный оператор. Тогда U^*U — ограниченный самосопряженный положительный оператор в X.

Исследование метода (1.2) основано на оценке норм функций от оператора вида U^*U, связанных с порождающей системой функций [3, с. 27]

$$f_t(\lambda) = \int\limits_0^t e^{-(t-s)\lambda} ds = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-t\lambda}). \tag{2.3}$$

Для оценки нормы оператора $\varphi(U^*U)$, где $\varphi(\lambda)$ — непрерывная при $\lambda \geq 0$ функция, воспользуемся неравенством $\|\varphi(U^*U)\| \leq \max_{\lambda\geq 0} |\varphi(\lambda)|$, которое вытекает из спектрального разложения оператора $\varphi(U^*U)$ [11, с. 232].

Из (2.3) непосредственно находим

$$\|I - U^*U f_t(U^*U)\| \leq 1, \quad \|f_t(U^*U)\| \leq t. \tag{2.4}$$

Для вывода оценок

$$\|f_t(U^*U)U^*\| \leq \theta t^{1/2}, \quad \theta \approx 0.6382, \quad \|[I - U^*U f_t(U^*U)]U^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}} \frac{1}{t^{1/2}} \tag{2.5}$$

используются аналогичные рассуждения.

В случае первой оценки рассматривается оператор $K = f_t(U^*U)U^*$.

Тогда

$$\|KK^*\| \leq \max_{\lambda > 0} \frac{(1 - e^{-t\lambda})^2}{\lambda} = \frac{(1 - e^{-x_1})^2}{x_1} \cdot t,$$

где x_1 — корень уравнения $1 + 2x - e^x = 0$ и $x_1 \approx 1.2605$. Далее, поскольку

$$\|KK^*\| = \sup_{\|g\|=1} (KK^*g, g) = \sup_{\|g\|=1} \|K^*g\|^2,$$

то $\|K\| = \sqrt{\|KK^*\|}$.

Отметим, что с помощью представления псевдообратного оператора (см. [8]) $U^+ = (P_{N(U)} + U^*U)^{-1}U^*$ можно построить любой из используемых в статье псевдообратных операторов.

3. Сходимость возмущенного метода

С помощью системы функций (2.3) метод установления (1.2) запишется в виде

$$\tilde{x}_r(t) = \big[I - \tilde{\Gamma}_r^* \tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^* \tilde{\Gamma}_r)\big] x_0 + f_t(\tilde{\Gamma}_r^* \tilde{\Gamma}_r) \tilde{\Gamma}_r^* \tilde{g}_r. \tag{3.1}$$

Лемма 1. *Для любого* $x \in N(\Gamma)^\perp$

$$\big[I - \tilde{\Gamma}_r^* \tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^* \tilde{\Gamma}_r)\big] x \to 0 \tag{3.2}$$

при $t \to +\infty,\ h_1, h_2, l \to 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу принципа равномерной ограниченности [11, с. 98] достаточно установить ограниченность семейства операторов из (3.2) и показать, что (3.2) имеет место на плотном в $N(\Gamma)^\perp$ множестве. Ограниченность

$$\|I - \tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\| \le 1 \tag{3.3}$$

при всех $t \ge 0$, $r > 0$ следует из первой оценки (2.4). Очевидно, плотным в $N(\Gamma)^\perp$ множеством является область значений $R(\Gamma^*)$.

Пусть $x \in R(\Gamma^*)$, тогда $\exists g \in G$, что $x = \Gamma^* g$, и

$$[I - \tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)]x = (I - \tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r))(\Gamma^* - \tilde{\Gamma}^*)g + (I - \tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r))\tilde{\Gamma}^* g.$$

Отсюда в силу (3.3), (2.5) и очевидного равенства

$$\tilde{\Gamma}^* = \tilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} I & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

имеем

$$\|[I - \tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)]x\| \le \|(\Gamma^* - \tilde{\Gamma}^*)g\| + \frac{1}{\sqrt{2et}} \left\| \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} I & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} g \right\|, \tag{3.4}$$

и лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого $x \in D(B_1^{*+})$ справедлива оценка*

$$\|f_t((\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)P_1^\perp x\| \le \Big(th_1 + \theta\sqrt{\frac{t}{r_1}}\Big)\|B_1^{*+}x\|. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $x \in D(B_1^{*+})$ имеем

$$P_1^\perp x = B_1^* B_1^{*+} x = (B_1^* - \tilde{B}_1^*)B_1^{*+}x + \frac{1}{\sqrt{r_1}}\tilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} B_1^{*+}x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

значит,

$$f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)P_1^\perp x = f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)(B_1^* - \tilde{B}_1^*)B_1^{*+}x + \frac{1}{\sqrt{r_1}} f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\tilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} B_1^{*+}x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оценивая это равенство с помощью (1.1), (2.4) и (2.5), получим (3.5), и лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого $x \in D(B^{*+})$ справедлива оценка*

$$\|f_t((\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)P^\perp x\| \le \Big(th_1 + th_2 + \theta\sqrt{\frac{t}{r_1}} + \theta\sqrt{\frac{t}{r_2}}\Big)\|B^{*+}x\|. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $x \in D(B^{*+})$ имеем

$$P^\perp x = B^* B^{*+} x = B_1^*(B^{*+})_1 x + B_2^*(B^{*+})_2 x, \quad \text{где} \quad B^{*+} = \begin{bmatrix} (B^{*+})_1 \\ (B^{*+})_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)P^{\perp}x = f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)((B_1^* - \tilde{B}_1^*)(B^{*+})_1 x + \frac{1}{\sqrt{r_1}} f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\tilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} (B^{*+})_1 x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)((B_2^* - \tilde{B}_2^*)(B^{*+})_2 x + \frac{1}{\sqrt{r_2}} f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\tilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} 0 \\ (B^{*+})_2 x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оценивая это равенство с помощью (1.1), (2.4) и (2.5), получим (3.6), и лемма 3 доказана.

Теперь сформулируем и докажем теорему об устойчивости регуляризованных решений (3.1).

Теорема. *Пусть основная задача разрешима и выполнены условия*

$$A^*(Ax^* - y) \in D(B^{*+}), \quad B_2^*(B_2 x^* - z_2) \in D(B_1^{*+}). \tag{3.7}$$

Если в методе (3.1) *параметры регуляризации* $t = t(\eta_1, \eta_2, \sigma)$, $r_1 = r_1(\eta_1, \eta_2, \sigma)$, $r_2 = r_2(\eta_1, \eta_2, \sigma)$, *где* $\eta_1 = \eta_1(h_1, \delta_1)$, $\eta_2 = \eta_2(h_2, \delta_2)$, $\sigma = \sigma(l, \tau)$, *выбирать так, что*

$$t \to +\infty, \quad r_1 \to +\infty, \quad r_2 \to +\infty, \quad \frac{r_2^2 t}{r_1} \to 0, \quad \frac{t}{r_2} \to 0,$$

$$r_1 t(\delta_1^2 + h_1) \to 0, \quad r_2 t(\delta_2^2 + h_2) \to 0, \quad t(\tau^2 + l) \to 0 \tag{3.8}$$

при $\eta_1 \to 0$, $\eta_2 \to 0$, $\sigma \to 0$, *то*

$$\tilde{x}_r(t) \to x_* \ \text{ при } \ \eta_1 \to 0, \quad \eta_2 \to 0, \quad \sigma \to 0, \tag{3.9}$$

где x_* — *ближайшее к* x_0 *решение основной задачи.*

Если начальная погрешность метода (3.1) *представима в виде*

$$x_0 - x_* = \Gamma^* g, \quad g = \begin{bmatrix} v \\ w \\ u \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

то имеем

$$\|\tilde{x}_r(t) - x_*\| \le (h_1\|v\| + h_2\|w\| + l\|u\|) + \frac{1}{\sqrt{2et}}\Big(\frac{1}{\sqrt{r_1}}\|v\| + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\|w\| + \|u\|\Big)$$

$$+ \theta\sqrt{tr_1}(\delta_1 + h_1\|x_*\|) + r_1 t h_1 \|P_{N(B_1^*)} z_1\| + \theta\sqrt{tr_2}(\delta_2 + h_2\|x_*\|)$$

$$+ r_2 t h_2 \|z_2 - B_2 x_*\| + r_2\Big(th_1 + \theta\sqrt{\frac{t}{r_1}}\Big)\|B_1^{*+}B_2^*(z_2 - B_2 x_*)\| + \theta\sqrt{t}(\tau + l\|x_*\|)$$

$$+ tl\|y - Ax_*\| + \Big(th_1 + th_2 + \theta\sqrt{\frac{t}{r_1}} + \theta\sqrt{\frac{t}{r_2}}\Big)\|B^{*+}A^*(y - Ax_*)\|. \tag{3.11}$$

Доказательство. Для погрешности приближения (3.1) имеем

$$\tilde{x}_r(t) - x_* = [I - \tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)](x_0 - x_*) + f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\tilde{\Gamma}_r^*(\tilde{g}_r - \tilde{\Gamma}_r x_*). \tag{3.12}$$

Так как в силу (2.2) $x_0 - x_* \in N(\Gamma)^{\perp}$, то согласно лемме 1 первое слагаемое в (3.12) стремится к 0 при выполнении условий (3.8).

Проведем оценку второго слагаемого в (3.12). Для этого запишем его в виде суммы

$$f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\tilde{\Gamma}_r^*(\tilde{g}_r - \tilde{\Gamma}_r x_*) = \sqrt{r_1} f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)\tilde{\Gamma}_r^* \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 - \tilde{B}_1 x_* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+\sqrt{r_2}f_t(\tilde\Gamma_r^*\tilde\Gamma_r)\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ \tilde z_2-\tilde B_2x_*\\ 0\end{bmatrix}+f_t(\tilde\Gamma_r^*\tilde\Gamma_r)\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \tilde y-\tilde Ax_*\end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Поскольку решения основной задачи характеризуются равенствами (2.1), то первое равенство (2.1) равносильно равенству $B_1x_*-z_1=P_{N(B_1^*)}z_1$. Поэтому

$$\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}\tilde z_1-\tilde B_1x_*\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}\tilde z_1-z_1-(\tilde B_1-B_1)x_*\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\sqrt{r_1}(\tilde B_1^*-B_1^*)P_{N(B_1^*)}z_1.$$

Подставив это равенство в первое слагаемое (3.13), в силу (1.1), (2.4), (2.5) получим оценку

$$\left\|\sqrt{r_1}f_t(\tilde\Gamma_r^*\tilde\Gamma_r)\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}\tilde z_1-\tilde B_1x_*\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\|\le\theta\sqrt{tr_1}(\delta_1+h_1\|x_*\|)+tr_1h_1\|P_{N(B_1^*)}z_1\|. \tag{3.14}$$

Второе равенство (2.1) равносильно равенству $B_2^*(z_2-B_2x_*)=P_1^\perp B_2^*(z_2-B_2x_*)$. Учитывая это, находим

$$\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ \tilde z_2-\tilde B_2x_*\\ 0\end{bmatrix}=\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ \tilde z_2-z_2-(\tilde B_2-B_2)x_*\\ 0\end{bmatrix}+\sqrt{r_2}(\tilde B_2^*-B_2^*)(z_2-B_2x_*)$$

$$+\sqrt{r_2}P_1^\perp B_2^*(z_2-B_2x_*).$$

Подставив установленное равенство во второе слагаемое (3.13), в силу (1.1), (2.4), (2.5) и леммы 2 получим оценку второго слагаемого в сумме (3.13)

$$\left\|\sqrt{r_2}f_t(\tilde\Gamma_r^*\tilde\Gamma_r)\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ \tilde z_2-\tilde B_2x_*\\ 0\end{bmatrix}\right\|\le\theta\sqrt{tr_2}(\delta_2+h_2\|x_*\|)$$

$$+tr_2h_2\|z_2-B_2x_*\|+r_2\Big(th_1+\theta\sqrt{\frac{t}{r_1}}\Big)\|B_1^{*+}B_2^*(z_2-B_2x_*)\|. \tag{3.15}$$

Третье равенство (2.1) равносильно равенству $A^*(y-Ax_*)=P^\perp A^*(y-Ax_*)$. Поэтому

$$\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \tilde y-\tilde Ax_*\end{bmatrix}=\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \tilde y-y-(\tilde A-A)x_*\end{bmatrix}+(\tilde A^*-A^*)(y-Ax_*)+P^\perp A^*(y-Ax_*).$$

Используя это равенство и лемму 3, оценим третье слагаемое в сумме (3.13)

$$\left\|f_r(\tilde\Gamma_r^*\tilde\Gamma_r)\tilde\Gamma_r^*\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \tilde y-\tilde Ax_*\end{bmatrix}\right\|\le\theta\sqrt{t}(\tau+l\|x_*\|)$$

$$+tl\|y-Ax_*\|+\Big(th_1+th_2+\theta\sqrt{\frac{t}{r_1}}+\theta\sqrt{\frac{t}{r_2}}\Big)\|B^{*+}A^*(y-Ax_*)\|. \tag{3.16}$$

Из (3.14)–(3.16) вытекает, что и второе слагаемое в (3.12) стремится к 0 при выполнении условий (3.8). Таким образом, сходимость (3.9) доказана.

Пусть начальная погрешность имеет вид (3.10). Подставляя $g = \begin{bmatrix} v \\ w \\ u \end{bmatrix}$ в оценку (3.4), находим

$$\|[I-\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r f_t(\tilde{\Gamma}_r^*\tilde{\Gamma}_r)](x_0-x_*)\| \le (h_1\|v\|+h_2\|w\|+l\|u\|)+\frac{1}{\sqrt{2et}}\Big(\frac{1}{\sqrt{r_1}}\|v\|+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\|w\|+\|u\|\Big). \quad (3.17)$$

Тогда согласно (3.12) оценка погрешности (3.11) вытекает из оценок (3.14)–(3.17), и теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если операторы Γ и B нормально разрешимы, то

1) в связи с тем, что $N(\Gamma)^\perp = R(\Gamma^*)$, требование (3.10) излишне;

2) для установления сходимости (3.9) условия (3.7) не используются;

3) условия (3.7) используются только для установления оценки погрешности, при этом сама оценка значительно лучше оценки (3.11).

Оценка (3.11) дает возможность априорного выбора параметров регуляризации t и r. Это можно сделать, например, следующим образом. Предположим, что приближенные операторы $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$ и правые части $\tilde{z}_1$, $\tilde{z}_2$ вычислены с большей точностью, чем оператор $\tilde{A}$ и правая часть $\tilde{y}$, а именно, справедливы соотношения

$$\frac{\delta_1+ch_1}{(\tau+cl)^{1+p}} = K_1, \quad \frac{\delta_2+ch_2}{(\tau+cl)^{1+p/3}} = K_2, \quad (3.18)$$

где $c \ge \|x_*\|$, а p — некоторое число, $2 < p \le 4$.

Оптимизируя в определенном смысле главную часть оценки (3.11) по t и r_2, получаем

$$t = C_1^{2/3}(\tau+cl)^{-2/3}, \quad r_1 = (\tau+cl)^{-p}, \quad r_2 = C_2^{2/3}(\tau+cl)^{-p/3}, \quad (3.19)$$

где

$$C_1 = 2^{-1}c\|u\|\big(\|P_{N(B_1^*)}z_1\|K_1 + C_2^{2/3}\|z_2-B_2x_*\|K_2+\|y-Ax_*\|\big)^{-1},$$

$$C_2 = \frac{\|B^{*+}A^*(y-Ax_*)\|}{2\|B_1^{*+}B_2^*(z_2-B_2x_*)\|}.$$

Отметим, что из условий (3.18) и выбора параметров в виде (3.19) следует выполнение предельных соотношений (3.8) и, значит, имеет место сходимость (3.9) метода установления. Кроме того, справедлива следующая оценка погрешности:

$$\overline{\lim_{\sigma(\tau,l)\to 0}}\frac{\|\tilde{x}_r(t)-x_*\|}{(\tau+lc)^{1/6-1/3}} \le C_1^{1/3}C_2^{-1/3}\|B^{*+}A^*(y-Ax_*)\|$$

$$+\,C_1^{1/3}C_2^{2/3}\|B_1^{*+}B_2^*(z_2-B_2x_*)\| + (\tau+cl)^{2/3-p/6}$$

$$\times\Big(C_1^{-1/3}\|u\|+c^{-1}C_1^{2/3}\|P_{N(B_1^*)}z_1\|K_1+c^{-1}C_1^{2/3}C_2^{2/3}\|z_2-B_2x_*\|K_2+c^{-1}C_1^{2/3}\|y-Ax_*\||\Big).$$

Из установленной оценки видно, что погрешность метода установления по порядку не выше, чем $(\tau+cl)^{1/3}$, причем наивысший порядок имеет место при $p=4$. Однако при этом ухудшается условие (3.18).

4. Приложение

Пусть

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = W(t)x(t)+V(t)u(t), \quad t_0 \le t \le t_2, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

— динамическая управляемая система, где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^\nu$, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^\mu$ — вектор-функции состояния и управления; $W(t)$, $V(t)$ — функциональные матрицы соответственно размеров $\nu \times \nu$, $\nu \times \mu$ на $[t_0, t_2]$, ограниченные функциями с интегрируемым квадратом, и пусть

$$J_i(u) = \big(x(t_i) - \varphi(t_i),\ x(t_i) - \varphi(t_i)\big), \quad i = 1, 2, \tag{4.2}$$

$$J_3(u) = \int\limits_{t_0}^{t_2} \big(x(t) - \varphi(t),\ Q(t)\big(x(t) - \varphi(t)\big)\big)_{\mathbb{R}^\nu} dt, \tag{4.3}$$

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_2} \big(u(t),\ R(t)u(t)\big)_{\mathbb{R}^\mu} dt \tag{4.4}$$

— функционалы платы, где $t_1 \in (t_0, t_2)$ — заданный момент времени, $Q(t)$ — положительная, а $R(t)$ — положительно-определенная симметрические, ограниченные на $[t_0,\ t_2]$ матрицы; $\varphi(t)$ — вектор-функция наблюдения.

Обозначим через H вещественное гильбертово пространство вектор-функций из $L_2(\mathbb{R}^\mu;$ $[t_0,\ t_2])$ со скалярным произведением $\langle u,\ v\rangle = \int_{t_0}^{t_2} \big(u(t),\ R(t)v(t)\big)_{\mathbb{R}^\mu} dt$, и пусть $H_1 = L_2(\mathbb{R}^\nu;$ $[t_0,\ t_2])$.

З а д а ч а. Найти управление $u^* \in H$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$J_1(u^*) \le J_1(u) \quad \forall\ u \in H;$$

$$J_2(u^*) \le J_2(u) \quad \forall\ u|\ \ J_1(u) = J_1(u^*);$$

$$J(u^*) + J_3(u^*) \le J(u) + J_3(u) \quad \forall\ u|\ \ J_i(u) = J_i(u^*), \quad i = 1, 2.$$

Эта задача в случае, когда $t_1 = t_2$, поставлена в [6]. Искомое управление u^* назовем оптимальным и покажем, что оно является нормальным 2-связанным псевдорешением соответствующей абстрактной задачи. Для этого функционалы платы (4.2)–(4.4) выразим через u явно. Для этого с помощью матрицы переноса запишем решение системы (4.1) в виде

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, s)V(s)u(s)ds.$$

Подставляя это выражение в функционалы, получим $J_i(u) = \|B_i u - z_i\|^2_{\mathbb{R}^\nu},\ i = 1, 2, \quad J(u) + J_3(u) = \|Au - y\|^2_{H \times H_1}$, где операторы $B_i\colon H \to \mathbb{R}^\nu,\ A\colon H \to H \times H_1$ определяются равенствами

$$B_i u = \int\limits_{t_0}^{t_2} d_i(s)\Phi(t_i, s)V(s)u(s)d, \quad d_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, t_i], \\ 0, & t \in (t_i, t_2], \end{cases}$$

$$(Au)(t) = \begin{bmatrix} R^{1/2}(t)u(t) \\ Q^{1/2}(t)\int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, s)V(s)u(s)ds \end{bmatrix},$$

$$z_i = \varphi(t_i) - \Phi(t_i, t_0)x_0, y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ Q^{1/2}(t)(\varphi(t) - \Phi(t, t_0)x_0) \end{bmatrix}.$$

Поскольку операторы $B_i, i = 1, 2$, и A нормально разрешимы, $N(A) = \{0\}$, а значит, $N(\Gamma) = \{0\}$, то соответствующая задача 2-связанного псевдообращения имеет единственное нормальное решение. Следовательно, задача управления имеет единственное решение $u^*(t)$ и для его нахождения применим метод установления

$$\begin{cases} \dfrac{dx(\xi)}{d\xi} + \Gamma_r^*\Gamma_r x_r(\xi) = \Gamma_r^* g_r, \quad 0 < \xi < +\infty, \\ x_r(0) = 0. \end{cases}$$

Или в развернутом виде:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}u_r(t,\xi) + u_r(t,\xi) + \sum_{k=1}^{2} r_k d_k(t) R^{-1}(t) V^*(t) \Phi^*(t_k,t) \int\limits_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k,s) V(s) u_r(s,\xi) ds$$
$$+R^{-1}(t)V^*(t) \int\limits_{t}^{t_2} \Phi^*(s,t) Q(s) \left(\int\limits_{t_0}^{s} \Phi(s,\tau) V(\tau) u_r(\tau,\xi) d\tau \right) ds$$
$$= \sum_{k=1}^{2} r_k d_k(t) R^{-1}(t) V^*(t) \Phi(t_k,t)(\varphi(t_k) - \Phi(t_k,t_0)x_0)$$
$$+R^{-1}(t)V^*(t) \int\limits_{t}^{t_2} \Phi^*(s,t) Q(s)(\varphi(s) - \Phi(s,t_0)x_0) ds,$$
$$u_r(t,0) = 0, \quad 0 \le \xi < +\infty, \quad t_0 \le t \le t_2.$$

В силу теоремы из разд. 3 решение $u_r(t,\xi)$ последней задачи Коши сходится к u^* в норме пространства H, т. е. $\|u_r(\xi) - u^*\| \to 0$ при $\xi \to +\infty$, $r_k \to +\infty$, $k = 1, 2$, $r_2^2\xi/r_1 \to 0$, $\xi/r_2 \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васин В.В., Агеев А.А.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ “Наука”, 1993. 261 с.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.** Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 184 с.
4. **Бондарь Е.А., Ястребова И.Ю.** Метод установления для задачи связанного псевдообращения с приближенными данными // Изв. Челяб. науч. центра. 2005. Вып. 1(27). С 1–6.
5. **Морозов В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 360 с.
6. **Minamide N., Nakamura K.** A restricted pseudoinverse and its application to constrained minima // SIAM J. Appl. Math. 1970. Vol. 19. P. 167–177.
7. **Groetsch C.W.** Regularization with linear equality constraints // Lect. Notes Math. 1986. No. 1225. P. 168–181.
8. **Шафиев Р.А.** Псевдообращение операторов и некоторые приложения. Баку: Элм, 1989. 152 с.
9. **Ястребова И.Ю.** Нормальное n-связанное псевдорешение уравнения и регулярные методы его вычисления. Деп. в ВИНИТИ № 3388-1399. Н. Новгород, 1999. 19 с.
10. **Уваров В.Е., Шафиев Р.А.** Итерационный метод регуляризации задачи 2-связного псевдообращения для операторного уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1735–1743.
11. **Садовничий В.А.** Теория операторов: уч. для вузов. 4-е изд. М.: Дрофа, 2001. 384 с.

Шафиев Рамиз Алиовсадович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила 20.06.2011

Манохина Наталия Леонидовна
аспирант
Нижегородский государственный педагогический университет
e-mail: manokhinanl@rambler.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Я. Т. Мегралиев

В работе исследована одна обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода. Для рассматриваемой обратной краевой задачи вводится определение классического решения. С помощью метода Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказывается существование и единственность решения системы интегральных уравнений. Далее доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: Обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Ya. T. Megraliev. On an inverse boundary value problem for a second-order elliptic equation with integral condition of the first kind.

An inverse boundary value problem for a second-order elliptic equation with integral condition of the first kind is investigated. A definition of classical solution is introduced for this problem. The Fourier method is used to reduce the problem to a system of integral equations. The method of contraction mappings is applied to prove the existence and uniqueness of a solution of the system of integral equations. Then, the existence and uniqueness of a classical solution of the initial problem is proved.

Keywords: inverse boundary value problem, elliptic equation, Fourier method, classical solution.

Введение

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2; 3], В.К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М. Денисова [5].

Обратные краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка исследовались в работах [6–10].

В [8] мы рассмотрели обратную краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка с локальными краевыми условиями, а в работе [9] в отличие от этой задачи исследовали обратную краевую задачу при наличии дополнительного интегрального условия. Далее, в [10] рассмотрена обратная краевая задача при наличии интегрального условия, которая сводится к самосопряженной задаче. В отличие от работ [8–10] в настоящей работе исследуется обратная краевая задача при наличии интегрального условия, которая сводится к несамосопряженной задаче.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $D_T = \{(x,t) \colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \le x \le 1), \tag{1.2}$$

$$u(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{1.3}$$

интегральным условием

$$\int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \le t \le T) \tag{1.4}$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{1.5}$$

где $f\,(x,t)\,,\varphi\,(x)\,,\psi\,(x)\,,h\,(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

О п р е д е л е н и е 1. Классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5) назовем пару $\{u\,(x,t)\,,a\,(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1.1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) все условия (1.1)–(1.5) удовлетворяются в обычном смысле.

Условие (1.4) является нелокальным интегральным условием первого рода, т. е. не содержит значений искомого решения в точках границы.

Наряду с обратной краевой задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u\,(x,t)\,,a\,(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^2(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$ из соотношений (1.1)–(1.3),

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \le t \le T), \tag{1.6}$$

$$h''(t) + u_{xx}(0,t) = a(t)h(t) + f(0,t) \quad (0 \le t \le T). \tag{1.7}$$

Аналогично [10, с. 28] можно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi\,(x)\,,\psi\,(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x,t)dx = 0$ $(0 \le t \le T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(T).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Каждое классическое решение* $\{u\,(x,t)\,,a\,(t)\}$ *задачи*(1.1)–(1.5) *является и решением задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7).

2. *Каждое решение* $\{u\,(x,t)\,,a\,(t)\}$ *задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *такое, что*

$$\frac{1}{2}T^2\,\|a(t)\|_{C[0,T]} < 1,$$

является классическим решением (1.1)–(1.5).

2. Сведения из теории спектральных задач и введение некоторых пространств

Известно [11–13], что последовательности функций

$$X_0(x) = 2\,(1-x)\,, \ldots, X_{2k-1}(x) = 4\,(1-x)\cos\lambda_k x, \quad X_{2k}(x) = 4\sin\lambda_k x, \ldots, \tag{2.1}$$

$$Y_0(x) = 1, \ldots, Y_{2k-1}(x) = \cos\lambda_k x, \quad Y_{2k}(x) = x\sin\lambda_k x, \ldots \tag{2.2}$$

образуют биортогональную систему и система (2.1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi \quad (k=1,2,\ldots)$. Тогда произвольная функция $g\,(x) \in L_2\,(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд

$$g\,(x) = g_0 X_0\,(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1} X_{2k-1}\,(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k} X_{2k}\,(x)\,,$$

где коэффициенты g_0, g_{2k-1}, g_{2k} вычисляются по формулам

$$g_0 = \int\limits_0^1 g\,(x)\,Y_0\,(x)\,dx, \quad g_{2k-1} = \int\limits_0^1 g\,(x)\,Y_{2k-1}\,(x)\,dx, \quad g_{2k} = \int\limits_0^1 g\,(x)\,Y_{2k}\,(x)\,dx.$$

В силу (2.2) имеем

$$Y_0'\,(x) = 0, \quad Y_{2k-1}'\,(x) = -\lambda_k \sin\lambda_k x, \quad Y_{2k}'\,(x) = \lambda_k x\cos\lambda_k x + \sin\lambda_k x,$$

$$Y_0^{(2i)}\,(x) = 0, \quad Y_{2k-1}^{(2i)}\,(x) = (-1)^i\,\lambda_k^{2i} Y_{2k-1}\,(x)\,,$$

$$Y_{2k}^{(2i)}\,(x) = (-1)^i\,\lambda_k^{2i} Y_{2k}\,(x) + 2i\,(-1)^{i+1}\,\lambda_k^{2i-1} Y_{2k-1}\,(x) \quad (i \geq 0,\ k=1,2,\ldots)\,. \tag{2.3}$$

Отсюда получаем

$$Y_k^{(2i)}\,(0) = Y_k^{(2i)}\,(1)\,, \quad Y_k^{(2i+1)}\,(0) = 0 \quad (k=1,2,\ldots). \tag{2.4}$$

Теперь предположим, что

$$g\,(x) \in C^{2i-1}\,[0,1]\,, \quad g^{(2i)}\,(x) \in L_2(0,1),$$

$$g^{(2s)}\,(1) = 0, \quad g^{(2s+1)}\,(0) = g^{(2s+1)}\,(1) \quad \left(i \geq 1,\ s = \overline{0, i-1}\right). \tag{2.5}$$

Далее, с учетом (2.4) и (2.5), интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^1 g^{(2i)}\,(x)\,Y_k\,(x)\,dx = \int\limits_0^1 g\,(x)\,Y_k^{(2i)}\,(x)\,dx \quad (k=1,2,\ldots). \tag{2.6}$$

Из (2.3) имеем

$$Y_{2k-1}(x) = \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}} Y_{2k-1}^{(2i)}(x),$$

$$Y_{2k}(x) = \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}} Y_{2k}^{(2i)}(x) + 2i\frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}} Y_{2k-1}^{(2i)}(x) \quad (i \geq 1,\ k=1,2,\ldots). \tag{2.7}$$

Тогда с учетом (2.6) и (2.7) находим

$$g_{2k-1} = \frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}} \int\limits_0^1 g^{(2i)}(x)\cos\lambda_k x dx, \tag{2.8}$$

$$g_{2k}=\frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i}}\int\limits_0^1(g^{(2i)}(x)x+2ig^{(2i-1)}(x))\sin\lambda_k xdx. \tag{2.9}$$

Отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i}g_{2k-1})^2\leq\frac{1}{2}\left\|g^{(2i)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i}g_{2k})^2\leq\frac{1}{2}\left\|g^{(2i)}(x)x+2ig^{(2i-1)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}. \tag{2.11}$$

Далее, пусть

$$g(x)\in C^{2i}[0,1],\quad g^{(2i+1)}(x)\in L_2(0,1),$$
$$g^{(2s)}(1)=0,\quad g^{(2s-1)}(0)=g^{(2s-1)}(1)\quad (i\geq 1,\ s=\overline{0,i}).$$

Тогда из (2.8) и (2.9) соответственно получаем

$$g_{2k-1}=\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1 g^{(2i+1)}(x)\sin\lambda_k xdx,$$

$$g_{2k}=\frac{(-1)^i}{\lambda_k^{2i+1}}\int\limits_0^1(g^{(2i+1)}(x)x+(2i+1)g^{(2i)}(x))\cos\lambda_k xdx.$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i+1}g_{2k-1})^2\leq\frac{1}{2}\left\|g^{(2i+1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i+1}g_{2k})^2\leq\frac{1}{2}\left\|g^{(2i+1)}(x)x+(2i+1)g^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}\quad (i\geq 1). \tag{2.13}$$

Теперь рассмотрим следующие пространства.

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{1/2}<\infty,$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=J_T(u).$$

Аналогично [10, с. 32] доказывается,что $B_{2,T}^3$ является банаховым пространством.

Функция $u(x,t)$ как элемент пространства $B_{2,T}^3$, в частности, обладает следующими свойствами:

$$u(x,t),u_x(x,t),u_{xx}(x,t)\in C(D_T),\quad u_{xxx}(x,t)\in C\left([0,T];\,L_2(0,1)\right);$$
$$u(1,t)=0,\quad u_x(0,t)=u_x(1,t),\quad u_{xx}(1,t)=0\quad (0\leq t\leq T).$$

2.Через E_T^3 обозначим пространство $B_{2,T}^3\times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t)=\{u(x.t),a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^3}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что E_T^3 является банаховым пространством.

3. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Так как система (2.1) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, то каждое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{3.1}$$

где

$$u_k(t)=\int\limits_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,\ldots), \tag{3.2}$$

причем $X_k(x)$ и $Y_k(x)$ определены соотношениями (2.1) и (2.2) соответственно.

Применяя метод разделения переменных для определения искомых функций $u_k(t)$ $(k = 0,1,\ldots)$, из (1.1) и (1.2) имеем

$$u_0''(t)=a_0(t)u_0(t)+f_0(t), \tag{3.3}$$

$$u_{2k-1}''(t)-\lambda_k^2u_{2k-1}(t)=a_0(t)u_{2k-1}(t)+f_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3.4}$$

$$u_{2k}''(t)-\lambda_k^2u_{2k}(t)=a_0(t)u_{2k}(t)+f_{2k}(t)-2\lambda_k u_{2k-1}(t) \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3.5}$$

$$u_k(0)=\varphi_k, \quad u_k'(T)=\psi_k \quad (k=0,1,\ldots), \tag{3.6}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t), \quad f_k(t)=\int\limits_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx,$$

$$\varphi_k=\int\limits_0^1\varphi(x)Y_k(x)dx, \quad \psi_k=\int\limits_0^1\psi(x)Y_k(x)dx \quad (k=0,1,\ldots).$$

Решая задачу (3.3)–(3.6), находим

$$u_0(t)=\varphi_0+\psi_0t+\int\limits_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau, \tag{3.7}$$

$$u_{2k-1}(t)=\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_kT)}\varphi_{2k-1}+\frac{sh(\lambda_kt)}{\lambda_kch(\lambda_kT)}\psi_{2k-1}$$
$$+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a)d\tau \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3.8}$$

$$u_{2k}(t)=\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_kT)}\varphi_{2k}+\frac{sh(\lambda_kt)}{\lambda_kch(\lambda_kT)}\psi_{2k}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a)d\tau$$
$$+\frac{1}{ch^2(\lambda_kT)}\Big\{\big[Tsh(\lambda_kt)+tch(\lambda_kT)sh(\lambda_k(T-t))\big]\varphi_{2k-1}+\big[Tsh(\lambda_kT)sh(\lambda_kt)$$
$$-tch(\lambda_kT)ch(\lambda_kt)+\frac{1}{2\lambda_k}ch(\lambda_kT)sh(\lambda_kt)\big]\frac{1}{\lambda_k}\psi_{2k-1}\Big\}$$

$$
-\,2\lambda_k \int\limits_0^T G_k(t,\tau)\Big(\int\limits_0^T G_k(\tau,\xi)F_{2k-1}(\xi;u,a)d\xi\Big)d\tau \quad (k=1,2,\ldots), \tag{3.9}
$$

где

$$
G_0(t,\tau)=\begin{cases} -t, & t\in[0,\tau],\\ -\tau, & t\in[\tau,T];\end{cases}
$$

$$
G_k\left(t,\tau\right)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2ch\left(\lambda_k T\right)}\left[sh\left(\lambda_k\left(T+t-\tau\right)\right)-sh\left(\lambda_k\left(T-\left(t+\tau\right)\right)\right)\right], & t\in\left[0,\tau\right],\\ \dfrac{1}{2ch\left(\lambda_k T\right)}\left[sh\left(T-\left(t+\tau\right)\right)-sh\left(\lambda_k\left(T-\left(t-\tau\right)\right)\right)\right], & t\in\left[0,\tau\right].\end{cases}
$$

После подстановки выражений из (3.7)–(3.9) в (3.1) для определения компоненты $u(x,t)$ решения $\{u\left(x,t\right),a\left(t\right)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) получаем

$$
u(x,t)=\varphi_0+t\psi_0+\int\limits_0^T G_0(t,\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau
$$

$$
+\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{2k-1}+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{2k-1}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a)d\tau\Bigg]X_{2k-1}(x)
$$

$$
+\Bigg[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\varphi_{2k}+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{2k}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k}(\tau;u,a)d\tau
$$

$$
-\frac{1}{ch^2(\lambda_k T)}\Bigg\{\Big[Tsh(\lambda_k t)+tch(\lambda_k T)sh(\lambda_k(T-t))\Big]\varphi_{2k-1}+\Big[Tsh(\lambda_k T)sh(\lambda_k t)
$$

$$
-\,tch(\lambda_k T)ch(\lambda_k t)+\frac{1}{2\lambda_k}ch(\lambda_k T)sh(\lambda_k t)\Big]\frac{1}{\lambda_k}\psi_{2k-1}\Bigg\}
$$

$$
-\,2\lambda_k\int\limits_0^T G_k(t,\tau)\Big(\int\limits_0^T G_k(\tau,\xi)F_{2k-1}(\xi;u,a)d\xi\Big)d\tau\Bigg]X_{2k}(x)\Bigg\}. \tag{3.10}
$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u\left(x,t\right),a\left(t\right)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), подставим выражение (3.10) в (1.7):

$$
a(t)=h^{-1}(t)\Bigg\{h''(t)-f(0,t)-4\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\Bigg[\Big(\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T)}\Big)\varphi_{2k-1}
$$

$$
+\frac{sh(\lambda_k t)}{\lambda_k ch(\lambda_k T)}\psi_{2k-1}+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_{2k-1}(\tau;u,a)d\tau)\Bigg]\Bigg\}. \tag{3.11}
$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) свелось к решению системы (3.10), (3.11) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Аналогично [9, с. 36] можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Если* $\{u\left(x,t\right),a\left(t\right)\}$ *— любое решение задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), *то функции* $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$, *определенные соотношением* (3.2), *удовлетворяют на* $[0,T]$ *счетной системе* (3.7)–(3.9).

З а м е ч а н и е. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) достаточно доказать единственность решения системы (3.10), (3.11).

Рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор $\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\}$, где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)X_k(x),\quad \Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_{2k-1}(t)$, $\tilde{u}_{2k}(t)$ $(k=1,2,\ldots)$ и $\tilde{a}_0(t)$ равны соответственно правым частям (3.7)–(3.9) и (3.11).

Теперь с помощью нетрудных преобразований находим

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_0|+T\,|\psi_0|+T\sqrt{T}\left(\int_0^t|f_0(\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}+T^2\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u_0(t)\|_{C[0,T]}\,, \tag{3.12}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|\tilde{u}_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{2k-1}|)^2\right)^{1/2}+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\psi_{2k-1}|)^2\right)^{1/2}$$
$$+2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{2k-1}(\tau)|)^2d\tau\right)^{1/2}+2T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}, \tag{3.13}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|\tilde{u}_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\le 2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{2k}|)^2\right)^{1/2}+2\sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\psi_{2_{2k}}|)^2\right)^{1/2}$$
$$+2\sqrt{2T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{2k}(\tau)|)^2d\tau\right)^{1/2}+2\sqrt{2}T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}$$
$$+4\sqrt{2}T\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{2k-1}|)^2\right)^{1/2}+2\sqrt{2}\,(1+2T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\psi_{2k-1}|)^2\right)^{1/2}$$
$$+4\sqrt{2T}T\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{2k-1}(\tau)|)^2d\tau\right)^{1/2}+4\sqrt{2}T^2\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}, \tag{3.14}$$

$$\|\breve{a}(t)\|_{C[0,T]}\le\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-f(0,t)\right\|_{C[0,T]}+4\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{2k-1}|)^2\right)^{1/2}\right.\right.$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|\psi_{2k-1}|)^2\right)^{1/2}+\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2\,|f_{2k-1}(\tau)|)^2d\tau\right)^{1/2}$$
$$\left.\left.+\frac{2}{\sqrt{6}}T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}\right]\right\}. \tag{3.15}$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям.

1. $\varphi(x)\in C^2[0,1],\quad \varphi'''(x)\in L_2(0,1),\quad \varphi(1)=\varphi''(1)=0,\quad \varphi'(0)=\varphi'(1).$

2. $\psi(x) \in C^1[0,1], \quad \psi''(x) \in L_2(0,1), \quad \psi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'(1).$

3. $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T), \quad f(1,t) = 0, \quad f_x(0,t) = f_x(1,t) \quad (0 \le t \le T).$

4. $h(t) \in C^2[0,T], \quad h(t) \ne 0 \quad (0 \le t \le T).$

Тогда из (3.12)–(3.15) с учетом (2.10)–(2.13) получаем

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} \le A_1(T) + B_1(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{3.16}$$

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} \le A_2(T) + B_2(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{3.17}$$

где

$$A_1(T) = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\,\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\sqrt{T}\,\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \big(\sqrt{2}+4T\big)\,\big\|\varphi'''(x)\big\|_{L_2(0,1)}$$

$$+\,4\,(1+T)\,\big\|\psi''(x)\big\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{2T}\big(1+2\sqrt{2}T\big)\,\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2\,\big\|\varphi'''(x)x + 3\varphi''(x)\big\|_{L_2(0,1)}$$

$$+\,2\,\big\|\psi''(x)x + 2\psi'(x)\big\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{T}\,\|f_{xx}(x,t)x + 2f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}\,,$$

$$B_1(T) = \big(1+4\sqrt{2}\big)T^2 + \big(1+\sqrt{2}\big)T,$$

$$A_2(T) = \big\|h^{-1}(t)\big\|_{C[0,T]}\Big\{\big\|h''(t) - f(0,t)\big\|_{C[0,T]}$$

$$+\,2\sqrt{2}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Bigg)^{1/2}\Big[\big\|\varphi'''(x)\big\|_{L_2(0,1)} + \big\|\psi''(x)\big\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{T}\,\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\Big]\Big\},$$

$$B_2(T) = 4\,\big\|h^{-1}(t)\big\|_{C[0,T]}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\Bigg)^{1/2} T.$$

Из неравенств (3.16), (3.17) заключаем

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^3_{2,T}} \le A(T) + B(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{3.18}$$

где $A(T) = A_1(T) + A_2(T),\ B(T) = B_1(T) + B_2(T)$.

Итак, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–4 *и*

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1. \tag{3.19}$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^3_T} \le R = A(T)+2)$ *пространства* E^3_T *единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве E^3_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{3.20}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i = 1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (3.10), (3.11).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E^3_T. Аналогично (3.18) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки

$$\|\Phi z\|_{E^3_T} \le A(T) + B(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{3.21}$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_s\|_{E^3_T} \le B(T)R\big(\,\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,\big). \tag{3.22}$$

Тогда из оценок (3.21) и (3.22) с учетом (3.19) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (3.20), т.е. $\{u, a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (3.10), (3.11).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (3.3)–(3.5), соответственно, имеем

$$\left\|u_0''(t)\right\|_{C[0,T]} \leq \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\|\|f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \left\|u_{2k-1}''(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \left\|\|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \left\|u_{2k}''(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{1/2} + \sqrt{6}\left\|\|u_{xx}(x,t))\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{2}\left\|\|a(t)(u_x(x,t)x + u(x,t)) + f_x(x,t)x + f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), причем в силу леммы 2 оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1,

$$\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0,$$

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(T),$$

$$\frac{1}{2}(A(T) + 2)T^2 < 1.$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) *имеет в шаре* $K = K_R(\|z\|_{E^3_T} \leq R = A(T) + 2)$ *пространства* E^3_T *единственное классическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.
2. **Лаврентьев М.М.** Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.
3. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 206 с.
5. **Денисов А.М.** Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 206 с.
6. **Соловьев В.В.** Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 5. С. 862–871.

7. **Соловьев В.В.** Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1106–1114.
8. **Мегралиев Я.Т.** Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка // Вест. Бакин. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. 2011. № 2. С. 31–39.
9. **Мегралиев Я.Т.** Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием // Вест. Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1. С. 32–40. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
10. **Мегралиев Я.Т.** О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка // Вест. Твер. гос. ун-та. 2011. № 23. С. 25–38. (Прикл. математика.)
11. **Калиев И.А., Сабитова М.М.** Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1(37). С. 89–97.
12. **Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.** О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
13. **Моисеев Е.И.** О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.

Мегралиев Яшар Торуш оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
Бакинский государственный университет
e-mail: yashar_aze@mail.ru

Поступила 11.09.2012

Том 19 № 1 2013

УДК 517.927.6

О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА НАГРУЗОК В МАШИНЕ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ ЗАГОТОВОК

Э. М. Мухамадиев, А. Н. Наимов, Н. Г. Баширов

В статье исследована разрешимость многоточечной нелинейной краевой задачи, возникающей при моделировании расчета нагрузок в машине непрерывного литья заготовок. Для нахождения решения краевой задачи, которое определяется кубическим сплайном, получена система нелинейных алгебраических уравнений. Для полученной системы алгебраических уравнений установлена ограниченность ее множества решений (априорная оценка), и с помощью аппарата векторных полей доказано существование решения.

Ключевые слова: многоточечная краевая задача, кубический сплайн, априорная оценка, векторное поле.

E. M. Mukhamadiev, A. N. Naimov, N. G. Bashirov. On the solvability of the multipoint boundary value problem of calculating the loads in a continuous casting machine.

The solvability of a multipoint nonlinear boundary value problem arising in a simulated calculation of the loads in a continuous casting machine is investigated. A solution of the boundary value problem is defined by a cubic spline. To find the solution, we deduce a system of nonlinear algebraic equations and prove that the set of solutions of this system is bounded (by an a priori estimate). We establish the existence of a solution by applying vector field techniques.

Keywords: multipoint boundary value problem, cubic spline, a priori estimate, vector field.

Введение

Статья посвящена исследованию следующей краевой задачи:

$$y_e^{IV}(x) = 0, \quad y_p'''(x) = \frac{1}{v}\left(\frac{p(x)}{g(x)}y_e''(x)\right)^5, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{0.1}$$

$$y_e^{''}(x_0+0) = 0, \quad y_e^{''}(x_n-0) = 0, \quad \frac{y_e^{''}(x_i-0)}{g(x_i-0)} = \frac{y_e^{''}(x_i+0)}{g(x_i+0)}, \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{0.2}$$

$$y_p(x_0) = y_0, \quad y_p'(x_0) = y_{p1}, \quad y_p''(x_0) = y_{p2}, \tag{0.3}$$

$$\begin{gathered} y_p(x_0) + y_e(x_0) + k_0\frac{y_e'''(x_0+0)}{g(x_0+0)} = y_0, \\ y_p(x_i) + y_e(x_i) + k_i\left(\frac{y_e'''(x_i+0)}{g(x_i+0)} - \frac{y_e'''(x_i-0)}{g(x_i-0)}\right) = y_i, \quad i = \overline{1,n-1}, \\ y_p(x_n) + y_e(x_n) - k_n\frac{y_e'''(x_n-0)}{g(x_n-0)} = y_n. \end{gathered} \tag{0.4}$$

Здесь заданными считаются натуральное число $n > 1$, положительные числа v, y_{p1}, y_{p2}, x_i, y_i, k_i, $i = \overline{0,n}$, где $x_{i-1} < x_i$, $i = \overline{1,n}$, функции $p(x)$, $g(x)$, которые непрерывны и положительны на каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i), $i = \overline{1,n}$, вплоть до их границ. Решением краевой задачи (0.1)–(0.4) называем пару функций $y_e(x)$, $y_p(x)$, определенных при $x \in [x_0,\ x_n]$, и таких, что

1) $y_e(x) \in C^1[x_0, x_n]$, $y_p(x) \in C^2[x_0, x_n]$, $y_e(x) \in C^4(x_{i-1}, x_i)$, $y_p(x) \in C^3(x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,n}$;

2) удовлетворяют системе уравнений (0.1) и краевым условиям (0.2)–(0.4).

Многоточечная краевая задача (0.1)–(0.4) получена и рассмотрена в работе [1, с. 189–233] для расчета нагрузок на ролики в машине непрерывного литья заготовок (МНЛЗ) при стационарной разливке металла. Пары чисел (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, представляют координаты роликов в выбранной системе координат OXY, k_i, $i = \overline{0,n}$, — коэффициенты податливости роликов, v — скорость движения металла, функции $p(x)$, $g(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ характеризуют сечение металла, $y_e(x)$, $y_p(x)$ — упругая и ползучая составляющие кривой, по которой движется металл. Значения функций $y_e(x)$, $y_p(x)$ непосредственно измерять невозможно. В краевой задаче (0.1)–(0.4) отражены свойства $y_e(x)$, $y_p(x)$, их связи и влияние на нагрузки роликов. Нагрузка на каждый i-й ролик определяется формулой [1, с. 192]

$$F_i = \frac{y_e'''(x_i - 0)}{g(x_i - 0)} - \frac{y_e'''(x_i + 0)}{g(x_i + 0)}.$$

В работе [1, с. 209–233] приводится численное решение краевой задачи (0.1)–(0.4) при конкретных численных значениях входящих данных v, y_{p1}, y_{p2}, x_i, y_i, k_i, $i = \overline{0,n}$, $p(x), g(x)$. При этом не рассматриваются такие вопросы, как сходимость численных решений и разрешимость краевой задачи. В настоящей работе мы исследуем вопрос о существовании решения краевой задачи (0.1)–(0.4). Решение краевой задачи (0.1)–(0.4) однозначно определяется функцией $y_e(x)$, являющейся кубическим сплайном с $(n+1)$ узлами [2, с. 13]. Для нахождения коэффициентов сплайна краевая задача сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений с $(2n-1)$ неизвестными числами. Для полученной системы алгебраических уравнений установлена ограниченность ее множества решений (априорная оценка), и с помощью аппарата векторных полей доказано существование решения [3, с. 11–44]. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Краевая задача* (0.1)–(0.4) *имеет хотя бы одно решение.*

На основе схемы доказательства данной теоремы в последующем можно разработать и обосновать численный метод решения краевой задачи (0.1)–(0.4).

1. Сведение к системе алгебраических уравнений

Вначале проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Любое решение $y_e(x)$ уравнения*

$$y_e^{IV}(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = \overline{1,n},$$

удовлетворяющее условиям $y_e(x) \in C^1[x_0, x_n]$, $y_e(x) \in C^4(x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1,n}$, представимо в виде

$$y_e(x) = B + A(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} (x - s) z(s) ds, \quad x \in [x_0,\ x_n], \tag{1.5}$$

где

$$z(x) = B_i + A_i(x - x_{i-1}) \quad \text{при} \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{1,n},$$

$$B = y_e(x_0), \quad A = y_e'(x_0), \quad B_i = y_e''(x_{i-1} + 0), \quad A_i = y_e'''(x_{i-1} + 0), \quad i = \overline{1,n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение

$$y_e^{IV}(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = \overline{1,n},$$

равносильно системе уравнений

$$y_e''(x) = z(x), \quad z''(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Из второго уравнения системы следует, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i), $i = \overline{1,n}$, функция $z(x)$ является линейной, и, следовательно, представима в виде $z(x) = B_i + A_i(x - x_{i-1})$, где $B_i = z(x_{i-1}+0) = y_e''(x_{i-1}+0)$, $A_i = z'(x_{i-1}+0) = y_e'''(x_{i-1}+0)$. Теперь, интегрируя первое уравнение системы на каждом интервале (x_{i-1}, x_i), $i = \overline{1,n}$, выводим

$$y_e'(x) = y_e'(x_{i-1}+0) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} z(s)ds, \quad x_{i-1} < x < x_i.$$

Функция $y_e'(x)$ непрерывна на промежутке $[x_0, x_n]$, поэтому имеем: при $x_0 \le x \le x_1$ справедливо равенство

$$y_e'(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} z(s)ds, \quad \text{где} \quad A = y_e'(x_0),$$

при $x_1 \le x \le x_2$ справедливы равенства

$$y_e'(x) = y_e'(x_1+0) + \int\limits_{x_1}^{x} z(s)ds = y_e'(x_1-0) + \int\limits_{x_1}^{x} z(s)ds = A + \int\limits_{x_0}^{x_1} z(s)ds + \int\limits_{x_1}^{x} z(s)ds = A + \int\limits_{x_0}^{x} z(s)ds,$$

далее при $x_{i-1} \le x \le x_i$, $i = 3, \ldots, n$, справедливы равенства

$$y_e'(x) = y_e'(x_{i-1}+0) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} z(s)ds = y_e'(x_{i-1}-0) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} z(s)ds$$

$$= A + \int\limits_{x_0}^{x_{i-1}} z(s)ds + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} z(s)ds = A + \int\limits_{x_0}^{x} z(s)ds.$$

Таким образом, при $x_0 \le x \le x_n$ имеет место равенство

$$y_e'(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} z(s)ds.$$

Интегрируя данное равенство от x_0 до x, получаем представление (1.5). Лемма 1 доказана.

Решение краевой задачи (0.1)–(0.4) однозначно определяется функцией $y_e(x)$, которая в силу леммы 1 представляет собой кубический сплайн с $(n+1)$ узлами [2, с. 13]. С целью нахождения коэффициентов A, B, B_i, A_i, $i = \overline{1,n}$, сплайна $y_e(x)$ краевую задачу сведем к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для этого в краевой задаче (0.1)–(0.4) вместо $y_e(x)$ подставим правую часть формулы (1.5).

Для функций $y_e(x)$, $y_p(x)$ имеем

$$y_e(x_i) = B + A(x_i - x_0) + \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)(B_m + A_m(s - x_{m-1}))ds, \quad i = \overline{1,n},$$

$$y_e''(x_0+0) = B_1, \quad y_e''(x_n-0) = B_n + A_n(x_n - x_{n-1}),$$

$$y_e''(x_i-0) = B_i + A_i(x_i - x_{i-1}), \quad y_e''(x_i+0) = B_{i+1}, \quad i = \overline{1,n-1},$$

$$y_e'''(x_0+0) = A_1, \quad y_e'''(x_i-0) = A_i, \quad y_e'''(x_i+0) = A_{i+1}, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad y_e'''(x_n-0) = A_n,$$

$$y_p(x) = y_0 + y_{p1}(x - x_0) + \frac{1}{2}y_{p2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2v}\int\limits_{x_0}^{x} (x - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)} z(s)\Big)^5 ds,$$

$$y_p(x_i) = y_0 + y_{p1}(x_i - x_0) + \frac{1}{2} y_{p2}(x_i - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{2v} \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big)\Big)^5 ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

Краевые условия (0.2), (0.4) принимают следующий вид:

$$B_1 = 0, \quad B_n + A_n(x_n - x_{n-1}) = 0, \quad B_{i+1} = \frac{g(x_i + 0)}{g(x_i - 0)}\big(B_i + A_i(x_i - x_{i-1})\big), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$B + k_0 \frac{A_1}{g(x_0 + 0)} = 0,$$

$$\frac{1}{2v} \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big)\Big)^5 ds + B + A(x_i - x_0)$$
$$+ \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big) ds + k_i \Big(\frac{A_{i+1}}{g(x_i + 0)} - \frac{A_i}{g(x_i - 0)}\Big) = u_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $u_i = y_i - y_0 - y_{p1}(x_i - x_0) - (y_{p2}/2)(x_i - x_0)^2$. Считаем, что $A_{n+1} = 0$, $g(x_n + 0) = g(x_n - 0)$. В последних уравнениях вместо B подставим $-k_0 A_1 / g(x_0 + 0)$, имеем

$$\frac{1}{2v} \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big)\Big)^5 ds - k_0 \frac{A_1}{g(x_0 + 0)} + A(x_i - x_0)$$
$$+ \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big) ds + k_i \Big(\frac{A_{i+1}}{g(x_i + 0)} - \frac{A_i}{g(x_i - 0)}\Big) = u_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оставляя неизвестное A в первом уравнении, исключим из остальных уравнений

$$\frac{1}{2v} \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_1 + A_1(s - x_0)\big)\Big)^5 ds - k_0 \frac{A_1}{g(x_0 + 0)} + A(x_1 - x_0)$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)\big(B_1 + A_1(s - x_0)\big) ds + k_1 \Big(\frac{A_2}{g(x_1 + 0)} - \frac{A_1}{g(x_1 - 0)}\Big) = u_1,$$

$$\frac{1}{2v} \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big)\Big)^5 ds - k_0 \frac{A_1}{g(x_0 + 0)}$$
$$+ \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big) ds + k_i \Big(\frac{A_{i+1}}{g(x_i + 0)} - \frac{A_i}{g(x_i - 0)}\Big)$$
$$= u_i + \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0} \Bigg[\frac{1}{2v} \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_1 + A_1(s - x_0)\big)\Big)^5 ds - k_0 \frac{A_1}{g(x_0 + 0)}$$
$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)(B_1 + A_1(s - x_0)) ds + k_1 \Big(\frac{A_2}{g(x_1 + 0)} - \frac{A_1}{g(x_1 - 0)}\Big) - u_1\Bigg], \quad i = \overline{2, n}. \tag{1.6}$$

Относительно неизвестных $A_1,\ B_2,\ A_2,\ldots,\ B_n,\ A_n$ получаем систему алгебраических уравнений, которая состоит из уравнений (1.6), где $A_{n+1}=0$, и уравнений

$$B_{i+1}=\frac{g(x_i+0)}{g(x_i-0)}\big(B_i+A_i(x_i-x_{i-1})\big),\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{1.7}$$

$$B_n+A_n(x_n-x_{n-1})=0, \tag{1.8}$$

где $B_1=0$. Таким образом, краевая задача (0.1)–(0.4) сводится к системе алгебраических уравнений (1.6)–(1.8) с $(2n-1)$ неизвестными числами $A_1,B_2,A_2,\ldots,B_n,A_n$.

2. Априорная оценка

Прежде чем исследовать разрешимость системы уравнений (1.6)–(1.8), докажем ограниченность ее множества решений.

Лемма 2 (об априорной оценке). *Существует $R>0$ такое, что для любого набора чисел $(A_1,B_2,A_2,\ldots,B_n,\ldots,A_n)$, являющегося решением системы уравнений* (1.6)–(1.8), *верна оценка*

$$\max\big(\,|A_1|,\ |B_2|,\ |A_2|,\ldots,\ |B_n|,\ |A_n|\,\big)<R. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что оценка (2.1) неверна. Тогда существует последовательность решений $(A_{1j},B_{2j},A_{2j},\ldots,B_{nj},A_{nj})$, $j=1,2,\ldots$ такая, что

$$\max\big(\,|A_{1j}|,\ |B_{2j}|,\ |A_{2j}|,\ldots,\ |B_{nj}|,\ |A_{nj}|\,\big)=R_j\ \to\ \infty\quad \text{при } j\to\infty.$$

Не теряя общности, можно считать, что при $j\to\infty$

$$\frac{A_{1j}}{R_j}\to A_{10},\quad \frac{B_{2j}}{R_j}\to B_{20},\ \ldots,\ \frac{A_{nj}}{R_j}\to A_{n0},$$

где

$$\max\big(\,|A_{10}|,\ |B_{20}|,\ |A_{20}|,\ldots,\ |B_{n0}|,\ |A_{n0}|\,\big)=1. \tag{2.2}$$

В уравнениях (1.6) вместо $A_1,\ B_2,\ A_2,\ldots,\ B_n,\ A_n$ подставим $A_{1j},\ B_{2j},\ A_{2j},\ldots,\ B_{nj},\ A_{nj}$, затем обе части уравнений поделим на R_j^5 и перейдем к пределу при $j\to\infty$. В результате получим следующие равенства:

$$\sum_{m=1}^{i}\int\limits_{x_{m-1}}^{x_m}(x_i-s)^2\Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_{m0}+A_{m0}(s-x_{m-1})\big)\Big)^5ds$$

$$=\frac{x_i-x_0}{x_1-x_0}\int\limits_{x_0}^{x_1}(x_1-s)^2\Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_{10}+A_{10}(s-x_0)\big)\Big)^5ds,\quad i=\overline{2,n}. \tag{2.3}$$

В уравнениях (1.7), (1.8), подставив $A_{1j},\ B_{2j},\ A_{2j},\ldots,\ B_{nj},\ A_{nj}$, поделив на R_j и перейдя к пределу при $j\to\infty$, выводим

$$B_{i+1\,0}=\frac{g(x_i+0)}{g(x_i-0)}(B_{i0}+A_{i0}(x_i-x_{i-1})),\quad i=\overline{1,n-1}, \tag{2.4}$$

$$B_{n0}+A_{n0}(x_n-x_{n-1})=0, \tag{2.5}$$

где $B_{10}=0$. Если $A_{10}=0$, то в силу (2.4) $B_{20}=0$, а в силу (2.3) $A_{20}=0$. Далее следует, что все остальные числа $B_{30},\ldots,A_{n0}$ также равны нулю. А это противоречит равенству (2.2).

Следовательно, $A_{10} \neq 0$. В силу однородности равенств (2.3)–(2.5), не теряя общности, можно считать, что $A_{10} = 1$.

Рассмотрим функции

$$z_0(x) = B_{i0} + A_{i0}(x - x_{i-1}), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{1, n},$$

$$f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} (x-s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)} z_0(s)\Big)^5 ds - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)} z_0(s)\Big)^5 ds, \quad x \in [x_1, x_n]\,.$$

Равенства (2.3)–(2.5) можно записать в следующем виде:

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0,$$

$$z_0(x_i + 0) = \frac{g(x_i + 0)}{g(x_i - 0)} z_0(x_i - 0), \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$z_0(x_n - 0) = 0. \tag{2.6}$$

Для функции $f(x)$ имеем

$$f'(x) = 2\int\limits_{x_0}^{x} (x-s)\Big(\frac{p(s)}{g(s)} z_0(s)\Big)^5 ds - \frac{1}{x_1 - x_0} \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)} z_0(s)\Big)^5 ds,$$

$$f'(x_1) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)\Big(2 - \frac{x_1 - s}{x_1 - x_0}\Big)\Big(\frac{p(s)}{g(s)}(s - x_0)\Big)^5 ds > 0\,,$$

$$f''(x) = 2\int\limits_{x_0}^{x} \Big(\frac{p(s)}{g(s)} z_0(s)\Big)^5 ds, \quad f''(x_1) = 2\int\limits_{x_0}^{x_1} \Big(\frac{p(s)}{g(s)}(s - x_0)\Big)^5 ds > 0,$$

$$f'''(x) = 2\Big(\frac{p(x)}{g(x)} z_0(x)\Big)^5, \quad f'''(x_1 + 0) = 2\Big(\frac{p(x_1+0)}{g(x_1+0)} \frac{g(x_1+0)}{g(x_1-0)}(x_1 - x_0)\Big)^5 > 0.$$

Из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует существование точки $\zeta_1 \in (x_1, x_2)$ такой, что $f'(\zeta_1) = 0$. В свою очередь, из неравенства $f'(x_1) > 0$ и равенства $f'(\zeta_1) = 0$ следует существование точки $\eta_1 \in (x_1, \zeta_1)$ такой, что $f''(\eta_1) = 0$. А из $f''(x_1) > 0$ и $f''(\eta_1) = 0$ следует существование точки $\xi_1 \in (x_1, \eta_1)$ такой, что $f'''(\xi_1) = 0$ и $f'''(x) > 0$ при $x \in [x_1, \xi_1)$. Функция $f'''(x)$ на промежутке (x_1, x_2) лишь один раз меняет знак, так как функции $p(x)$, $g(x)$ положительны, а функция $z_0(x)$ линейна. Поэтому $f'''(x) < 0$ при $x \in (\xi_1, x_2]$. Отсюда следует, что $f''(x) < 0$ при $x \in (\eta_1, x_2]$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (\zeta_1, x_2]$. Следовательно,

$$f(x_2) = 0, \quad f'(x_2) < 0, \quad f''(x_2) < 0, \quad f'''(x_2 + 0) = 2\Big(\frac{p(x_2+0)}{g(x_2+0)} z_0(x_2+0)\Big)^5$$

$$= 2\Big(\frac{p(x_2+0)}{g(x_2+0)} \frac{g(x_2+0)}{g(x_2-0)} z_0(x_2 - 0)\Big)^5 = \Big(\frac{p(x_2+0)}{p(x_2-0)}\Big)^5 f'''(x_2 - 0) < 0.$$

Аналогичным образом, рассматривая $f(x)$ на отрезках $[x_2, x_3]\,, \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, выводим

$$f'(x_3) > 0, \quad f''(x_3) > 0, \quad f'''(x_3 - 0) > 0,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(-1)^n f'(x_n) < 0, \quad (-1)^n f''(x_n) < 0, \quad (-1)^n f'''(x_n - 0) < 0.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $z_0(x_n - 0) \neq 0$, так как

$$f'''(x_n - 0) = 2\Big(\frac{p(x_n - 0)}{g(x_n - 0)} z_0(x_n - 0)\Big)^5.$$

А это противоречит равенству (2.6). Следовательно, наше предположение о неограниченности множества решений системы уравнений (1.6)–(1.8) неверно. Лемма 2 доказана.

3. Доказательство теоремы

Сперва приведем необходимые понятия и одно утверждение из теории конечномерных векторных полей [3, с. 11–44].

Пусть Ω — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Всякое непрерывное отображение $F\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, где $\bar{\Omega}$ — замыкание области Ω, называют непрерывным векторным полем или просто векторным полем на Ω. Два векторных поля $F_0, F_1\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ называют гомотопными на множестве $M \subset \bar{\Omega}$, если существует непрерывная по совокупности переменных $y \in M$, $0 \le \lambda \le 1$ вектор-функция $F(y,\lambda)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условиям: 1) $F(y,0) = F_0(y)$, $F(y,1) = F_1(y)$ при любом $y \in M$; 2) $F(y,\lambda) \ne 0$ при любых $y \in M$, $0 \le \lambda \le 1$.

Утверждение. *Пусть векторные поля F_0 и F_1, определенные в шаре $\{y \in \mathbb{R}^m\colon |y| \le r\}$, гомотопны на сфере $S_r = \{y \in \mathbb{R}^m\colon |y| = r\}$ и поле F_0 нечетно на S_r, т. е. $F_0(-y) = -F_0(y)$ при $y \in S_r$. Тогда система уравнений $F_1(y) = 0$ имеет хотя бы одно решение внутри сферы S_r.*

Данное утверждение следует из теорем, приведенных в книге [3, с. 20, 22, 44].

Используя утверждение, докажем, что система алгебраических уравнений (1.6)–(1.8) имеет хотя бы одно решение. Для этого введем соответствующие векторные поля.

Обозначим

$$C = (A_1,\ B_2,\ A_2, \ldots,\ B_n,\ A_n), \quad C \in \mathbb{R}^{2n-1},$$

$$\Phi(C,\lambda) = (\Phi_1(C,\lambda),\ \ldots,\ \Phi_{2n-1}(C,\lambda)) \quad \text{при} \quad C \in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad \lambda \in [0,\ 1],$$

где

$$\Phi_{i-1}(C,\lambda) = \frac{1}{2v} \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big)\Big)^5 ds - \lambda k_0 \frac{A_1}{g(x_0+0)}$$

$$+ \lambda \sum_{m=1}^{i} \int\limits_{x_{m-1}}^{x_m} (x_i - s)\big(B_m + A_m(s - x_{m-1})\big) ds + \lambda k_i \Big(\frac{A_{i+1}}{g(x_i+0)} - \frac{A_i}{g(x_i-0)}\Big)$$

$$- \lambda u_i - \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0} \Bigg[\frac{1}{2v} \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^2 \Big(\frac{p(s)}{g(s)}\big(B_1 + A_1(s - x_0)\big)\Big)^5 ds - \lambda k_0 \frac{A_1}{g(x_0+0)}$$

$$+ \lambda \int\limits_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)(B_1 + A_1(s - x_0)) ds + \lambda k_1 \Big(\frac{A_2}{g(x_1+0)} - \frac{A_1}{g(x_1-0)}\Big) - \lambda u_1\Bigg], \quad i = \overline{2,n},$$

где $A_{n+1} = 0$,

$$\Phi_{n+i-1}(C,\lambda) = B_{i+1} - \frac{g(x_i+0)}{g(x_i-0)}\big(B_i + A_i(x_i - x_{i-1})\big), \ \ i = \overline{1,n-1}, \ \text{ где } \ B_1 = 0,$$

$$\Phi_{2n-1}(C,\lambda) = B_n + A_n(x_n - x_{n-1}).$$

Тогда имеем семейство конечномерных векторных полей $\Phi(\cdot,\lambda)\colon \mathbb{R}^{2n-1} \mapsto \mathbb{R}^{2n-1}$, непрерывно зависящее от параметра $\lambda \in [0,\ 1]$. Очевидно, система уравнений $\Phi(C,\ 1) = 0$ есть система алгебраических уравнений (1.6)–(1.8).

Проверим, что существует число $R_0 > 0$ такое, что имеет место оценка

$$\Phi(C,\ \lambda) \ne 0 \quad \text{при} \quad |C| \ge R_0, \quad \lambda \in [0,\ 1], \tag{3.1}$$

где $|C| = \max(|A_1|, |B_2|, |A_2|, \ldots, |B_n|, |A_n|)$.

Оценка (3.1) доказывается точно так же, как оценка (2.1). Действительно, если (3.1) неверна, то существуют последовательности $\{C_j\}$, $\{\lambda_j\}$ такие, что $\Phi(C_j,\ \lambda_j) = 0$, $j = 1,\ 2,\ \ldots$, и $|C_j| \to \infty$ при $j \to \infty$. Равенства $\Phi_i(C_j,\ \lambda_j) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots$, поделим на $|C_j|^5$, а равенства $\Phi_i(C_j,\ \lambda_j) = 0$, $i = \overline{n,\ 2n-1}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots$, поделим на $|C_j|$, затем перейдем к пределу при $j \to \infty$. Тогда получим $\Phi(C_0, 0) = 0$ и $|C_0| = 1$. Но, с другой стороны, в ходе доказательства леммы 2 было установлено, что $\Phi(C,\ 0) \neq 0$ при $C \neq 0$; пришли к противоречию. Следовательно, оценка (3.1) верна.

Из оценки (3.1) вытекает, что векторные поля $\Phi(\cdot,\ 0)$ и $\Phi(\cdot,\ 1)$ гомотопны на сфере $|C| = R_0$. Легко проверить, что векторное поле $\Phi(\cdot,\ 0)$ нечетно на любой сфере $|C| = r$. Теперь, используя утверждение, выводим, что существует хотя бы одно решение системы уравнений $\Phi(C,\ 1) = 0$ внутри сферы $|C| = R_0$. Значит, система алгебраических уравнений (1.6)–(1.8) разрешима.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машины непрерывного литья заготовок. Теория и расчет / Л.В. Буланов [и др.]. Екатеринбург: Уральский центр ПР и рекламы "Марат", 2004. 349 с.
2. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
3. **Красносельский М.А., Забрейко П.П.** Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 510 с.

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Вологодский государственный технический университет
e-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Поступила 20.06.2012

Наимов Алижон Набиджанович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Вологодский государственный технический университет
e-mail: nan67@rambler.ru

Баширов Навак Гаслитдинович
канд. тех. наук, доцент
Вологодский государственный технический университет
e-mail: bashirova35@mail.ru

Том 19 № 1 2013

УДК 513.88+539.3

МЕТОД НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА В ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕЕДИНСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДИСКРЕТНЫХ ГРАДИЕНТНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

В. В. Стружанов, Н. В. Бурмашева

Предложен алгоритм применения метода Ньютона — Канторовича для нахождения решений, в том числе и неединственных, нелинейных уравнений равновесия дискретных механических систем, потенциальная функция которых является невыпуклой. Применение алгоритма проиллюстрировано на примере решения задачи об определении параметров равновесия механической системы, осуществляющей трехосное растяжение элементарного куба из нелинейного материала.

Ключевые слова: градиентная система, невыпуклая потенциальная функция, уравнения равновесия, неединственность решения, метод Ньютона — Канторовича.

V. V. Struzhanov, N. V. Burmasheva. Newton–Kantorovich method in the problem of finding nonunique solutions of equilibrium equations for discrete gradient mechanical systems.

An algorithm of Newton–Kantorovich method's application for finding solutions (including nonunique solutions) of nonlinear equilibrium equations in discrete mechanical systems with nonconvex potential function is suggested. The algorithm is applied for solving the problem of finding equilibrium parameters of the mechanical system that implements a triaxial stretching of an elementary cube made of a nonlinear material.

Keywords: gradient system, nonconvex potential function, equilibrium equation, nonunique solutions, Newton–Kantorovich method.

Введение

Ситуации, когда состояние некоторой системы (градиентной) определяются функцией типа потенциала $V(x_i, y_j)$, зависящей от конечного числа задаваемых параметров управления y_j и параметров состояния x_i, определяющих положение системы при заданных управлениях, являются очень распространенными [1; 2]. Они возникают, например, в механике, когда рассматриваемая система стремится к состоянию с минимальной энергией. Если потенциальная функция является невыпуклой, то уравнения равновесия таких систем могут иметь неединственное решение. Существуют такие совокупности параметров управления, которым отвечает несколько равновесных состояний системы.

Для определения неединственных решений нелинейных уравнений равновесия используется метод Ньютона — Канторовича. Известно [3; 4], что основной проблемой применения метода является выбор таких начальных приближений, начиная с которых метод сходится, причем число начальных приближений должно равняться числу решений. В данной работе для нахождения соответствующих начальных приближений используется представление уравнений равновесия как отображения пространства состояний в пространство управлений. Это однозначное отображение позволяет найти в пространстве управлений области, для точек которых уравнения равновесия имеют одинаковое число решений, и, кроме того, прообразы этих областей в пространстве состояний, в которых и следует искать начальные приближения для метода Ньютона — Канторовича. Приведен численный алгоритм определения необходимого числа начальных приближений в пространстве состояний. Алгоритм проиллюстрирован на примере вычисления параметров равновесий стержневой механической системы, осуществляющей трехосное растяжение элементарного куба из нелинейного разупрочняющегося материала.

[1]Работа выполнена по проекту совместных исследований УрО РАН и СО РАН (12-С-1-1024).

1. Уравнения равновесия как отображение пространства состояний в пространство управлений

Поведение градиентной системы определяется ее потенциальной функцией $V(x_i, y_j)$ [2]. Здесь y_j — параметры управления системой (задаваемые величины), x_i — параметры состояния (обобщенные координаты). В положениях равновесия эти параметры удовлетворяют системе уравнений $V_{,i} = 0$ (запятой обозначены частные производные по соответствующим параметрам).

Предположим, что уравнения равновесия $\nabla V = 0$ (∇ — оператор Гамильтона в n-мерном пространстве) представимы в виде системы

$$y_j = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Система (1.1) задает отображение $f\colon \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^n_y$ n-мерного евклидова пространства состояний $\mathbb{R}^n_x$ в n-мерное евклидово пространство управлений $\mathbb{R}^n_y$. Если производная f' отображения f, которая представляет собой матрицу Якоби преобразования (1.1) [5], является невырожденной матрицей в достаточно малой окрестности некоторой точки из пространства состояний, то равенства (1.1) определяют взаимнооднозначное соответствие этой окрестности и множества точек в пространстве управлений, образованных значениями функций (1.1), принимаемыми в этой окрестности.

Допустим, что в пространстве состояний имеются точки, в которых матрица Якоби системы (1.1) вырождена. Тогда дифференцируемое отображение f имеет особенности, связанные с неоднозначностью обратного отображения. Точки, где матрица Якоби вырождена, образуют в пространстве $\mathbb{R}^n_x$ многообразия критических точек отображения f [6]. Их образы в пространстве $\mathbb{R}^n_y$ составляют многообразия критических значений данного отображения. Согласно теореме Сарда [1] эти многообразия имеют меру нуль. Например, если $n = 2$, то многообразия критических точек и критических значений в силу непрерывности и дифференцируемости отображения f суть линии. При $n = 3$ это поверхности.

Многообразия критических точек отображения f разбивают пространство $\mathbb{R}^n_x$ на непересекающиеся открытые области, составляющие множество $\mathbf{\Psi} = \{\Psi^1, \Psi^2, \ldots\}$. Отображения этих областей в пространство $\mathbb{R}^n_y$ образуют множество $\mathbf{\Phi} = \{\Phi^1, \Phi^2, \ldots\}$. Так как отображение f имеет особенности, то области из $\mathbf{\Phi}$ пересекаются. Тогда каждый элемент $\Phi^s \in \mathbf{\Phi}$ есть объединение $\Phi^s = \bigcup_k \Phi^s_k$, где Φ^s_k — пересечения k элементов из множества $\mathbf{\Phi}$. Теперь, если точка $\mathbf{y}(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_y$ принадлежит некоторой области Φ^s_k, которая, естественно, имеет k прообразов в пространстве $\mathbb{R}^n_x$, то для нее система (1.1) имеет ровно k решений.

Отметим, что решения системы (1.1) — это критические точки потенциальной функции V. Вырожденные критические точки удовлетворяют уравнению $\det\nabla\nabla V = 0$. Здесь $\nabla\nabla V$ — матрица Гессе [2] потенциальной функции системы.

Очевидно, что матрица Гессе и матрица Якоби преобразования (1.1) вырождаются одновременно. Следовательно, проекции вырожденных критических точек функции V в пространство состояний совпадают с многообразием критических значений отображения f. Эти проекции образуют сепаратрису функции V [2].

Таким образом, определение областей Φ^s_k можно осуществить, используя матрицу Гессе $\nabla\nabla V$ функции V. Так как детерминант матрицы Гессе при заданных условиях есть функция только параметров состояния, то сначала находим в пространстве $\mathbb{R}^n_x$ точки, в которых матрица Гессе вырождается, а затем отображаем эти точки в пространство $\mathbb{R}^n_y$. В результате получаем сепаратрису функции V, разбивающую пространство $\mathbb{R}^n_y$ на области Φ^s_k.

2. Метод Ньютона — Канторовича

Для нахождения всех решений системы (1.1) при заданных параметрах управлений воспользуемся методом Ньютона — Канторовича [3; 4], итерационная схема которого выражается формулой

$$\mathbf{x}_{\alpha+1} = \mathbf{x}_\alpha - \left[f'(\mathbf{x}_\alpha)\right]^{-1} f(\mathbf{x}_\alpha) + \left[f'(\mathbf{x}_\alpha)\right]^{-1} \mathbf{y}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

где $f(\mathbf{x}_\alpha) = \mathbf{y}_\alpha$, $f'(\mathbf{x}_\alpha)$ — матрица Якоби, вычисленная в точке $\mathbf{x}_\alpha$.

Использование метода предполагает нахождение таких начальных приближений $\mathbf{x}_0$, начиная с которых итерации сходятся.

Алгоритм поиска начальных приближений заключается в следующем. Пусть точка $\mathbf{y} \in \Phi_k^s$ и, следовательно, система (1.1) имеют k решений. Используя сепаратрису, находим области $\Phi^{q_j} \subset \mathbf{\Phi}$ $(j = 1, \ldots, k)$, пересечение которых и образует область Φ_k^s. Затем выделим их прообразы в пространстве $\mathbb{R}_x^n$ (непересекающиеся области $\Psi^{q_j} \subset \mathbf{\Psi}$). Возьмем сначала область Ψ^{q_1} и построим в ней сетку узлов с достаточно малым шагом. Все узлы (точки $\mathbf{x}_m \in \Psi^{q_1}$) отображаем в пространство $\mathbb{R}_y^n$ и определяем $\min\limits_m \rho\,(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}_m))$, т. е. находим тот узел, отображение которого наиболее близко к точке $\mathbf{y}$ (ρ — расстояние между точками в пространстве $\mathbb{R}_y^n$). Этот узел берем за начальное приближение $\mathbf{x}_{01}$ в схеме (2.1). Далее, если $\rho\,(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}_{01})) > \rho\,(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}_1))$, где $\mathbf{x}_1$ — первое приближение, то, продолжая итерации, находим искомое первое решение системы (1.1). Если данное неравенство не выполняется, то уменьшаем шаг сетки узлов и затем снова реализуем описанную процедуру. При поиске решений в остальных областях Ψ^{q_j} поступаем аналогично.

На основании изложенного выше справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть*:

1) *градиентная механическая система находится в состоянии активного нагружения*;

2) *часть элементов системы выполнена из разупрочняющихся материалов, свойства которых на стадии разупрочнения описываются невыпуклыми потенциалами*;

3) *число параметров состояния системы равно числу задаваемых параметров управления* (*нагружения*);

4) *уравнения равновесия механической системы разрешимы относительно параметров управления, т. е. представляют собой дифференцируемое отображение f пространства состояний в пространство управлений.*

Тогда:

1) *матрица Якоби отображения f вырождена в некоторых точках пространства состояний*;

2) *многообразие точек вырожденности матрицы Якоби разбивает пространство состояний на непересекающиеся области $\mathbf{\Psi}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, отображения которых $\mathbf{\Phi}^\alpha$ образуют в пространстве управлений области пересечения*;

3) *уравнения равновесия имеют единственное решение, если параметры управления определяют точку, расположенную вне областей пересечения*;

4) *число решений уравнений равновесия для точки в пространстве управлений, расположенной в одной из областей пересечений, равно числу прообразов $\psi^\beta \in \mathbf{\Psi}^\beta$ $(\beta > 2)$, отображения которых образуют заданную область пересечения*;

5) *в каждом из прообразов $\mathbf{\Psi}^\beta$ существует так называемая область притяжения, выбор начального приближения из которой обеспечивает сходимость итерационной схемы метода Ньютона — Канторовича к одному из решений уравнений равновесия механической системы.*

В силу того что изложенный выше алгоритм нахождения начального приближения позволяет уже на первой итерации получить приближение, достаточно близкое к искомому решению, то возможно использовать модифицированный метод Ньютона — Канторовича [4]

$$\mathbf{x}_{\alpha+1} = \mathbf{x}_\alpha - \left[f'(\mathbf{x}_0)\right]^{-1} f(\mathbf{x}_\alpha) + \left[f'(\mathbf{x}_0)\right]^{-1} \mathbf{y}_\alpha,$$

где $f'(\mathbf{x}_0)$ — матрица Якоби системы (1.1), вычисленная в точке начального приближения $\mathbf{x}_0$.

3. Механическая система, реализующая трехосное растяжение элементарного куба

В качестве примера рассмотрим задачу об определении всех положений равновесия стержневой системы, реализующей трехосное растяжение элементарного куба из нелинейного материала, обладающего эффектом разупрочнения.

Кубический элемент 4 подвергается трехосному растяжению в системе, в которой растягивающие усилия на куб передаются через стержни 1,2,3, выполненные из линейно упругого материала (рис. 1). В недеформированном состоянии длина ребер куба равна единице (отсчетная конфигурация). Грани куба с одной стороны скреплены шарнирами с абсолютно жесткими стенками, с другой стороны с упругими стержнями 1,2,3 таким образом, чтобы в процессе трехосного растяжения куб мог принимать только форму прямоугольного параллелепипеда. Точкам свободных концов стержней 1,2,3 задаются монотонно возрастающие перемещения u_1, u_2, u_3 (мм) (жесткое нагружение). Жесткости упругих стержней при растяжении соответственно равны $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Нагружение системы происходит при постоянной температуре и столь медленно, что возможно пренебречь динамическими эффектами.

В ходе нагружения куб получает деформации $X_i = \varepsilon_i x_i$ $(0 \leqslant x_i \leqslant 1)$ [7], где X_i — эйлеровы декартовы координаты, ε_i — кратности удлинений вдоль осей OX_i $(i = 1, 2, 3)$. Отсюда тензор градиента деформаций равен $F = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, т. е. имеет только диагональные элементы (остальные равны нулю). Здесь $\mathbf{e}_i$ — ортонормированный векторный базис декартовых координат (лагранжевых), а $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ — тензорное произведение векторов [8].

Вектор поверхностной силы $\mathbf{t}$, действующей на материальную площадку, образы которой в отсчетной и актуальной (текущей) конфигурациях характеризуются соответственно нормалями $\mathbf{n}_o$ и $\mathbf{n}_a$ и площадями S_o и S_a, согласно определению тензора напряжений выражается через тензоры напряжений Пиолы T^o и Коши T^a следующим образом [9]:

$$\mathbf{t} = S_o \mathbf{n}_o \cdot T^o = S_a \mathbf{n}_a \cdot T^a. \tag{3.1}$$

Здесь точкой обозначено скалярное произведение.

В данном случае по граням куба действуют равномерно распределенные усилия интенсивностью q_i, и грани при деформировании не меняют ориентацию. Тогда с учетом равенства $S_o = 1$ из равенств (3.1) следует, что $\sigma_i = S_{ia} q_i$. Здесь S_{ia} — площади граней в актуальной конфигурации, σ_i — компоненты тензора Пиолы, q_i — компоненты тензора Коши. Отсюда тензор Пиолы $T^o = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$, т. е. только его диагональные элементы отличны от нуля.

Отметим, что величины σ_i представляют собой так называемые номинальные напряжения, определяемые по элементарной теории напряжений (отношение величины силы, перпендикулярной к материальной площадке, к ее первоначальной площади). Величины же ε_i можно

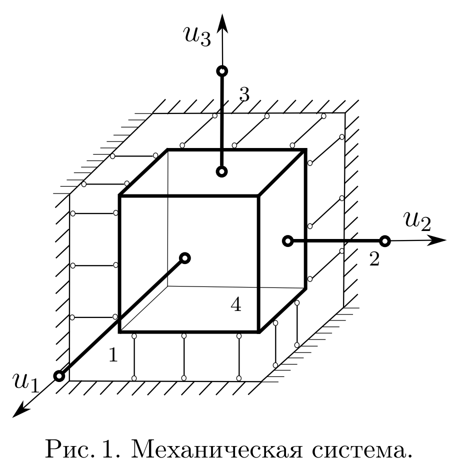


Рис. 1. Механическая система.

трактовать как деформации, также определяемые по элементарной теории (отношение удлинения отрезка к его первоначальной длине).

Рассмотрим теперь совокупность упорядоченных наборов из трех вещественных чисел $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, которые являются элементами трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}_e^3$ (пространства деформаций). В прямоугольной системе координат $O\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ эти числа представляют собой компоненты радиус-векторов точек трехмерного пространства. Если производить деформирование, то конец этого радиус-вектора будет перемещаться по некоторой непрерывной пространственной кривой κ. Кривую κ естественно называть *кривой деформирования* или *образом процесса деформирования в пространстве* $\mathbb{R}_e^3$.

Упорядоченные наборы вещественных чисел $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ являются элементами евклидова пространства напряжений $\mathbb{R}_p^3$. Посредством некоторого дифференцируемого отображения χ точкам из пространства $\mathbb{R}_e^3$ ставятся в соответствие точки пространства $\mathbb{R}_p^3$. Отображения точек кривой деформирования κ образуют кривую нагружения, причем эта кривая, вообще говоря, может не обладать свойством непрерывности.

Пусть объемная плотность упругой энергии $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ по отношению к отсчетной конфигурации связана с компонентами тензора Пиолы равенствами [9]

$$T_{ij}^0 = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad i = j = 1, 2, 3, \tag{3.2}$$

т. е. скалярная функция $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ является потенциалом напряжений. Следовательно, материал куба либо нелинейно упругий, либо находится в условиях активного деформирования, когда нелинейность, вызванная процессами диссипации, формально не отличима от нелинейной упругости [10] (различие устанавливается только типом разгрузки).

Итак, равенства (3.2) задают непрерывно-дифференцируемое отображение $\chi\colon \mathbb{R}_e^3 \to \mathbb{R}_p^3$, не зависящее от вида пути деформирования. Матрица Якоби $I = [c_{ij}]$ преобразования (3.2) имеет компоненты $c_{ij} = \dfrac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j} = \dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j}$. В точках пространства $\mathbb{R}_e^3$, где матрица I невырождена ($\operatorname{rank} I = 3$), отображение χ есть локальный гомеоморфизм (взаимнооднозначное и взаимнонепрерывное отображение) между окрестностью точки $\mathbf{e}$ в $\mathbb{R}_e^3$ и множеством точек $\sigma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ из $\mathbb{R}_p^3$, образованным значениями функций (3.2), принимаемыми в этой окрестности.

Если в некоторой точке $N \in \mathbb{R}_e^3$ матрица I вырождена ($\det I = 0$), то согласно теореме о неявной функции [11] решение уравнения $\chi(\mathbf{e}) = \boldsymbol{\sigma}$ в окрестности δ_N этой точки не является единственным для $\boldsymbol{\sigma} \in \chi(\delta_N)$, хотя отображение χ остается однозначным.

Отметим, что матрица Якоби отображения χ есть матрица Гессе потенциальной функции Π (матрица вторых производных). Если эта матрица положительно определена в некоторой точке пространства $\mathbb{R}_e^3$, то в этой точке функция Π локально выпукла вниз [11], и, следовательно, при таких деформациях материал куба абсолютно устойчив. Отрицательная определенность определяет функцию, локально выпуклую вверх (материал абсолютно неустойчив). Когда матрица Гессе знаконеопределена (седловая точка функции Π), то имеет место частичное разупрочнение, т. е. на одних путях догружения материал упрочняется (сохраняется устойчивость процесса его деформирования), на других разупрочняется (неустойчивость). Вырожденность матрицы Гессе определяет пограничную точку, разделяющую упрочнение и разупрочнение. Таким образом, можно говорить о невыпуклости потенциала Π, что и является причиной потери устойчивости деформирования всей системы. Отметим, что компоненты матрицы Гессе $c_{ij} = \Pi_{,ij}$ имеют смысл мгновенных (тангенциальных) модулей (жесткостей) материала.

В дальнейшем в расчетах будем использовать невыпуклый потенциал [12]

$$\Pi\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\right) = B\left\{1 - \exp\left(-\frac{1}{4B}\left[\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + \frac{E}{(1+\nu)}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)\right]\right)\right\}, \tag{3.3}$$

где $B = \text{const}$ — величина потенциала в момент разрушения (в дальнейшем для определен-

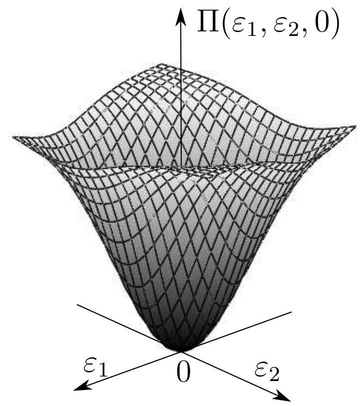


Рис. 2. Потенциал Π при $\varepsilon_3 = 0$.

ности полагаем $B = 1$кг/мм^2), $E = 2 \times 10^4$кг/мм^2 — модуль Юнга, $\nu = 0,3$ — коэффициент Пуассона. График этого потенциала при $\varepsilon_3 = 0$ изображен на рис. 2.

4. Уравнения равновесия механической системы и число их решений

При активном деформировании описанная выше механическая система градиентна и в случае жесткого нагружения описывается потенциальной функцией

$$W = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{2}(u_i - \varepsilon_i)^2 + \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

где первые три слагаемых — это энергия деформаций линейно упругих стержней, Π — невыпуклый потенциал (3.3). В дальнейшем при расчетах будем считать, что $\lambda_i = 500$ кг/мм. Здесь u_i — параметры управления, а ε_i — параметры состояния системы. Параметры всевозможных положений равновесия определяются из решения системы нелинейных уравнений

$$W,_i = \Pi,_i - \lambda_i(u_i - \varepsilon_i) = 0. \tag{4.1}$$

Данная механическая система относится к классу систем, уравнения равновесия которых могут быть разрешены относительно параметров управления. Имеем

$$\begin{aligned} u_i = f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) &= \frac{1}{\lambda_i}\Pi,_i + \varepsilon_i \\ &= \varepsilon_i + \frac{1}{2\lambda_i}\exp\biggl(-\frac{1}{4B}\Bigl[\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + \frac{E}{(1+\nu)}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)\Bigr]\biggr) \\ &\quad \times\biggl(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_i)\biggr). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Формулы (4.2) задают отображение $f\colon \mathbb{R}^3_e \to \mathbb{R}^3_u$ трехмерного евклидова пространства состояний (деформаций) в пространство управлений (перемещений). Это дифференцируемое отображение нелинейно и имеет особенности, связанные с невыпуклостью потенциала Π.

Детерминант матрицы Якоби отображения f равен $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \det H(W)$, т. е. критические точки отображения f совпадают с вырожденными критическими точками потенциальной функции W, где детерминант матрицы Гессе обращается в нуль. Из условия активного деформирования параметры состояния должны принадлежать множеству $\Gamma_e \subset \mathbb{R}^3_e, \Gamma_e = \{\mathbf{e}\colon \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \geq 0\}$.

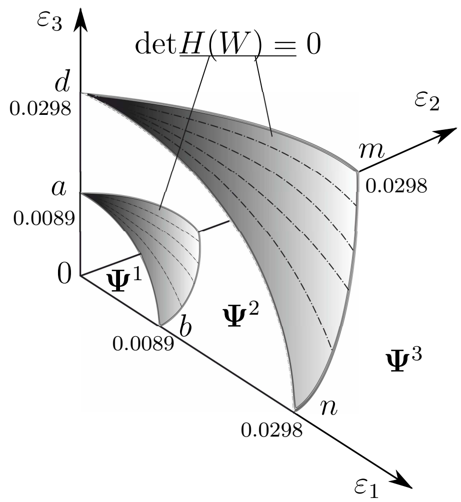


Рис. 3. Поверхности критических точек отображения f (вырожденных критических точек матрицы Гессе потенциальной функции системы).

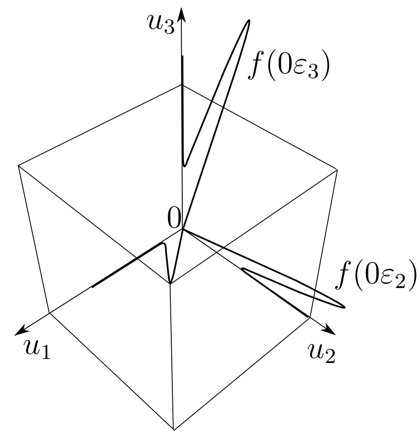


Рис. 4. Образы координатных осей пространства $\mathbb{R}^3_e$.

Критические точки отображения f в этом множестве составляют две поверхности abc и dmn (рис. 3).

Эти поверхности разбивают множество Γ_e на непересекающиеся области $\boldsymbol{\Psi}^1$ (область $0abc$), $\boldsymbol{\Psi}^2$ (область $abcdmn$) и $\boldsymbol{\Psi}^3$ (внешняя поверхность dmn) (рис. 3). Здесь буквами обозначаются характерные точки поверхностей критических точек отображения f.

Отобразим теперь множество $\Gamma_e = \boldsymbol{\Psi}^1 \cup \boldsymbol{\Psi}^2 \cup \boldsymbol{\Psi}^3$ в пространство управлений: $\Gamma_e \to^f D_u$. (Для лучшего понимания трансформации множества Γ_e при его отображении в $\mathbb{R}^3_u$ на рис. 4 показан образ координатных осей пространства $\mathbb{R}^3_e$, а на рис. 5 — образ одной из координатных плоскостей.) Качественный вид множества D_u изображен на рис. 6 (область 02178430). Область $\boldsymbol{\Psi}^1$ отображается на область $\boldsymbol{\Phi}^1$ (область 0560), область $\boldsymbol{\Psi}^2$ — на область $\boldsymbol{\Phi}^2$ (1564321), область $\boldsymbol{\Psi}^3$ — на область $\boldsymbol{\Phi}^3$ (1784321) (рис. 6). Поверхность acb отображается в поверхность (56), а поверхность dmn — в поверхность (1234) (рис. 6). Далее, используя вид D_u, находим, что $\boldsymbol{\Phi}^1 = \Phi^1_1(0230) \cup \Phi^1_3(25632), \boldsymbol{\Phi}^2 = \Phi^2_2(1523641) \cup \Phi^2_3(25632), \boldsymbol{\Phi}^3 = \Phi^3_1(15764871) \cup \Phi^3_2(1523641)$. Здесь $\Phi^1_3 = \Phi^2_3, \Phi^2_2 = \Phi^3_2$. Цифрами обозначены характерные точки областей в пространстве управлений (см. рис. 6). Теперь можно заключить, что прообраз области Φ^1_1 расположен в области $\boldsymbol{\Psi}^1$, область Φ^1_3 имеет три прообраза (по одному в каждой из областей $\boldsymbol{\Psi}^1, \boldsymbol{\Psi}^2, \boldsymbol{\Psi}^3$), область Φ^2_2 — два прообраза (в областях $\boldsymbol{\Psi}^2$ и $\boldsymbol{\Psi}^3$) и область Φ^3_1 — один прообраз в $\boldsymbol{\Psi}^3$. Следовательно, если брать управление, расположенное в некоторой области Φ^s_k (из перечисленных выше), то число решений уравнений (4.1) будет равно числу прообразов этих областей в пространстве $\mathbb{R}^3_e$.

Отметим, что для управлений, лежащих вне множества D_u, не существует решений системы (4.1) из множества Γ_e.

5. Реализация алгоритма выбора начальных приближений и расчет параметров равновесия методом Ньютона — Канторовича

Возьмем сначала точку $\mathbf{u} \in \Phi^1_1$ с координатами $(8.586 \times 10^{-4}, 10.555 \times 10^{-4}, 5.789 \times 10^{-4})$. Так как эта точка лежит в области Φ^1_1 с одним прообразом, расположенным в $\boldsymbol{\Psi}^1$, то ей отвечает единственное решение уравнений (4.1), и оно принадлежит области $\boldsymbol{\Psi}^1$. Это решение ищем, используя итерационную схему Ньютона — Канторовича, для которой выбор начального приближения $\boldsymbol{\varepsilon}_0(\varepsilon^0_1, \varepsilon^0_2, \varepsilon^0_3)$ осуществим следующим образом. Разобьем область Γ_e пространственной

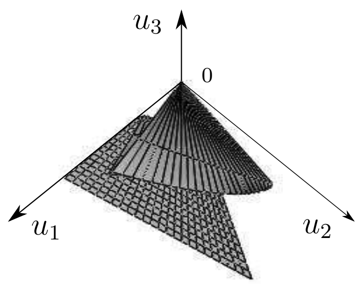


Рис. 5. Образ координатной плоскости $O\varepsilon_1\varepsilon_2$.

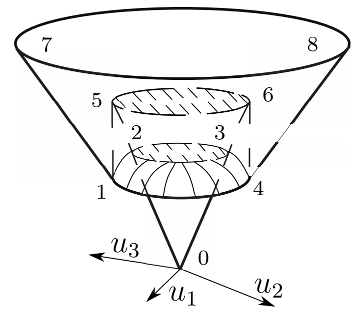


Рис. 6. Качественный вид множества D_u.

сеткой узлов с достаточно малым шагом (при решении использовали шаг разбиения $h = 0.002$). Затем отображаем узлы из области $\mathbf{\Psi}^1$ в пространство управлений посредством отображения f и выбираем среди образов этих узлов точку, ближайшую к точке $\mathbf{u}$. Это узел с координатами $(0, 0.008, 0)$. Его образ отстоит от точки $\mathbf{u}$ на расстоянии $\rho(\mathbf{u}, f(\varepsilon_0)) = 4.09266 \times 10^{-5}$. Применяя процедуру метода Ньютона — Канторовича для данного начального приближения, вычисляем первое приближение $\boldsymbol{\varepsilon}_1(1.6196 \times 10^{-4}, 8.1921 \times 10^{-3}, 2.5146 \times 10^{-4})$. Образ первого приближения отстоит от точки $\mathbf{u}$ на расстоянии $\rho(\mathbf{u}, f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)) = 3.199 \times 10^{-7}$. Таким образом, после первой итерации получили значение $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, образ которого находится ближе к точке $\mathbf{u}$, чем образ начального приближения $\boldsymbol{\varepsilon}_0$. Следовательно, дальнейшие итерации по схеме метода Ньютона — Канторовича будут давать образы, стремящиеся к точке $\mathbf{u}$. Пусть δ — точность численного решения. Если взять $\delta = 10^{-5}$, то заданная точность достигается уже на четвертой итерации. Имеем $\boldsymbol{\varepsilon}(1.7955 \times 10^{-4}, 8.4471 \times 10^{-3}, 2.7515 \times 10^{-4})$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что найденная точка в пространстве состояний удовлетворяет системе (4.1) с необходимой точностью.

Оценим теперь максимальный размер сетки, при котором изложенный выше алгоритм приводит к решению. Для этого будем последовательно увеличивать шаг разбиения до тех пор, пока первое приближение не даст расхождения метода, т. е. $\rho(\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)) > \rho(\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{\varepsilon}_0))$. Таким шагом разбиения является $h_* = 0.01$.

Отметим, что для сетки разбиения с достаточно малым шагом начальное приближение будет близко к искомому решению. В этом случае можно воспользоваться модифицированным методом Ньютона — Канторовича, который позволяет не пересчитывать матрицу Якоби на каждом итерационном шаге, а ограничиться лишь ее значением в точке начального приближения. При этом критический размер сетки не меняет своего значения, так как он определяется только первым приближением, которое в немодифицированном и модифицированном методах одинаково. Однако нахождение решения модифицированным методом требует большего числа итераций, нежели при использовании классического метода Ньютона — Канторовича. В данном случае потребовалось семь итераций для определения решения с заданной точностью. В результате получили $\boldsymbol{\varepsilon}(1.7825 \times 10^{-4}, 8.4422 \times 10^{-3}, 2.7349 \times 10^{-4})$.

Найдем теперь решения уравнения (4.1) для управления $\mathbf{u}(0.03, 0.037, 0.0054) \in \Phi_3^2$. Так как область Φ_3^2 имеет три прообраза в Γ_e, то система уравнений (4.1) имеет три решения (по одному из областей $\mathbf{\Psi}^1, \mathbf{\Psi}^2, \mathbf{\Psi}^3$ соответственно). Воспользуемся введенной ранее на множестве Γ_e пространственной сеткой. В каждой из областей $\mathbf{\Psi}^1, \mathbf{\Psi}^2, \mathbf{\Psi}^3$ по приведенному выше алгоритму находим три начальных приближения: $\boldsymbol{\varepsilon}_0^1(0, 0.002, 0) \in \mathbf{\Psi}^1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^2(0.01, 0.016, 0) \in \mathbf{\Psi}^2$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_0^3(0.034, 0.034, 0.06) \in \mathbf{\Psi}^3$. Затем для каждого начального приближения реализуем итерационную схему Ньютона — Канторовича. В результате с заданной точностью находим три решения: $\boldsymbol{\varepsilon}^1(8.4544 \times 10^{-4}, 12.7907 \times 10^{-4}, 1.03 \times 10^{-4})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^2(111.6341 \times 10^{-4}, 159.532 \times 10^{-4}, 0.201 \times 10^{-4})$, $\boldsymbol{\varepsilon}^3(299.368 \times 10^{-4}, 372.51 \times 10^{-4}, 5.3967 \times 10^{-4})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
2. **Гилмор Р.** Прикладная теория катастроф: в 2х кн. Кн.1. М.: Мир, 1984. 350 с.
3. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.] // М.: Наука, 1969. 456 с.
4. **Канторович Л.В., Акилов Г.Т.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.
5. **Колмогоров А.Н., Фомин С.П.** Элементы теории функций и функционального нализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
6. **Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.** Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. М.: Наука, 1982. 304 с.
7. **Шейдаков Д.Н.** Устойчивость прямоугольной плиты при двухосном растяжении // Прикл. механика и технич. физика. 2007. Т. 48, № 4. С. 94–103.
8. **Лурье А.И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
9. **Никитин А.В., Рыжак Е.И.** Об устойчивости и неустойчивости сжатого бруса, прижатого к гладкому основанию // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 42–58.
10. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
11. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
12. **Стружанов В.В., Просвиряков Е.Ю., Бурмашева Н.В.** Об одном методе построения единого потенциала // Вычисл. механика сплошн. сред. 2008. Т. 1, № 2. С. 96–107.

Стружанов Валерий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научный сотрудник
Институт машиноведения УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: stru@imach.uran.ru

Поступила 3.04.2012

Бурмашева Наталья Владимировна
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: nat_burm@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ[1]

Е. В. Табаринцева

В работе рассмотрена задача с обратным временем для полулинейного параболического уравнения. Получены двусторонние оценки норм значений нелинейного оператора через нормы значений соответствующего линейного оператора. На основании этого установлены двусторонние оценки модуля непрерывности для полулинейной обратной задачи через модуль непрерывности для соответствующей линейной задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, обратная задача, модуль непрерывности обратного оператора, оценка погрешности.

E. V. Tabarintseva. On an estimate for the modulus of continuity of a nonlinear inverse problem.

A reverse time problem is considered for a semilinear parabolic equation. Two-sided estimates are obtained for the norms of values of a nonlinear operator in terms of the norms of values of the corresponding linear operator. As a consequence, two-sided estimates are established for the modulus of continuity of a semilinear inverse problem in terms of the modulus of continuity of the corresponding linear problem.

Keywords: parabolic equation, inverse problem, modulus of continuity of the inverse operator, error estimate.

Введение

В статье рассматривается задача с обратным временем для полулинейного параболического уравнения. Для линейных некорректно поставленных задач в работах В.К. Иванова, В.Н. Страхова, их учеников и последователей (см., например, [2; 3; 6]) была создана теория и разработан аппарат для получения оценок погрешности методов приближенного решения на компактных множествах (классах корректности). В этой теории естественным образом вводятся понятия оптмального и оптимального по порядку метода приближенного решения. Соответствующие понятия были введены и для нелинейных некорректно поставленных задач (см., например, [9; 10]); различные методы решения нелинейных некорректно поставленных задач рассмотрены, например, в [1; 4; 7; 8; 11].

Для линейных некорректно поставленных задач техника вычисления погрешности оптимального метода регуляризации на классе корректности основана на связи между погрешностью метода и модулем непрерывности обратного оператора, который вычисляется для каждого конкретного оператора и каждого класса корректности M с помощью спектральной техники [3; 6]. Для нелинейных задач связь между погрешностью метода и модулем непрерывности обратного оператора также имеет место, однако, к сожалению, аппарат для вычисления модуля непрерывности на классах корректности в настоящее время не разработан.

В настоящей работе, насколько известно автору, впервые с использованием вольтерровости оператора задачи с обратным временем получены двусторонние оценки норм значений нелинейного оператора через нормы значений соответствующего линейного оператора. Это позволяет получить двусторонние оценки модуля непрерывности для полулинейной обратной задачи на классах корректности через модуль непрерывности соответствующей линейной задачи, техника вычисления которого известна.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00117).

1. Оценка модуля непрерывности для полулинейной обратной задачи

1.1. Прямая задача для параболического уравнения

Рассмотрим смешанную краевую задачу для полулинейного параболического уравнения, т. е. задачу вычисления функции $v(x,t) \in C([t_0;T];W_2^{2,0}[0;l]) \cap C^1((t_0;T);L_2[0;l])$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a(x)v + f(t, v(x,t)); \quad t \in (t_0;T), \quad x \in (0;l), \tag{1.1}$$

$$v(t_0, x) = \varphi(x) \quad (0 < x < l),$$

$$v(t,0) = v(t,l) = 0 \quad (0 < t_0 < t < T),$$

где $a(x) \in C^2[0;l]$, $\varphi(x) \in L_2[0;l]$ — заданные функции.

Здесь $f\colon [t_0;T] \times L_2[0;l] \to L_2[0;l]$ — отображение, удовлетворяющее условию Липшица по переменной v и условию Гельдера по переменной t:

$$\|f(v_1,t_1) - f(v_2,t_2)\|_{L_2[0;l]} \le L\|v_1 - v_2\|_{L_2[0;l]} + K|t_1 - t_2|^\alpha$$

при всех $t_1, t_2 \in [t_0;T]$, $v_1, v_2 \in L_2[0;l]$, где L, K — постоянные, не зависящие от t, $0 < \alpha < 1$.

Обозначим $X_n(x)$ собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

$$X_n'' + a(x)X(x) = \mu X, \quad X(0) = X(l) = 0,$$

соответствующие собственным значениям $\mu_n = -\lambda_n^2$, образующие полную ортонормированную систему в $L_2[0;l]$. Задача (1.1) равносильна интегральному уравнению

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t}\varphi_n X_n(x) + \int\limits_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} f_n(\tau, v(x,\tau))X_n(x)\right)d\tau, \tag{1.2}$$

где $f_n(t) = \int_0^l f(t, v(x,t))X_n(x)dx$; $\varphi_n(t, v(x,t)) = \int_0^l \varphi(x)X_n(x)dx$ (см., например, [5]).

Рассмотрим соответствующую задаче (1.1) смешанную краевую задачу для линейного параболического уравнения, т. е. задачу вычисления функции $u(x,t) \in C([t_0;T];W_2^{2,0}[0;l]) \cap C^1((t_0;T);L_2[0;l])$, удовлетворяющей условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u; \quad t \in (t_0;T), \quad x \in (0;l), \tag{1.3}$$

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \quad (0 < x < l),$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad (0 < t_0 < t < T).$$

Задача (1.3) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t}\varphi_n X_n(x), \tag{1.4}$$

где $\varphi_n = \int_0^l \varphi(x)X_n(x)dx$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по ортонормированной системе функций $X_n(x)$ (см., например, [5]). Через $\|\cdot\|$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_2[0;l]}$.

Лемма. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2[0;l]$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ *— соответствующие решения задачи* (1.3), $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ *— решения задачи* (1.1). *Тогда при каждом* $t \in [t_0;T]$ *выполняются неравенства*

$$e^{-LTe^{LT}}\|u_1 - u_2\| \le \|v_1 - v_2\| \le e^{LT}\|u_1 - u_2\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств (1.2) и (1.4) следует

$$v_1(x,t) - v_2(x,t)$$

$$= u_1(x,t) - u_2(x,t) + \int\limits_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \Big(f_n(\tau, v_1(x,\tau)) - f_n(\tau, v_2(x,\tau)) X_n(x) \Big) \right) d\tau, \tag{1.5}$$

откуда в силу условия Липшица следует неравенство

$$\|v_1(x,t) - v_2(x,t)\| \le \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\| + L \int\limits_{t_0}^t \|v_1(x,\tau) - v_2(x,\tau)\| d\tau. \tag{1.6}$$

Из (1.6) в силу леммы Гронуолла вытекает оценка

$$\|v_1(x,t) - v_2(x,t)\| \le e^{LT} \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|. \tag{1.7}$$

Из равенства (1.5) следует также

$$u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

$$= -(v_1(x,t) - v_2(x,t)) + \int\limits_0^t \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} \Big(f_n(\tau, v_1(x,\tau)) - f_n(\tau, v_2(x,\tau)) X_n(x) \Big) \right) d\tau,$$

откуда с учетом условия Липшица имеем

$$\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\| \le \|v_1(x,t) - v_2(x,t)\| + L \int\limits_{t_0}^t \|v_1(x,\tau) - v_2(x,\tau)\| d\tau. \tag{1.8}$$

Из неравенства (1.8) с учетом (1.7) получаем

$$\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\| \le \|v_1(x,t) - v_2(x,t)\| + Le^{LT} \int\limits_{t_0}^t \|u_1(x,\tau) - u_2(x,\tau)\| d\tau, \tag{1.9}$$

из неравенства (1.9) в силу леммы Гронуолла —

$$\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\| \le e^{LTe^{LT}} \|v_1(x,t) - v_2(x,t)\|. \tag{1.10}$$

Из неравенств (1.7) и (1.10) и следует утверждение леммы.

1.2. Обратная задача для параболического уравнения

Рассмотрим задачу с обратным временем для полулинейного параболического уравнения, т. е. задачу вычисления функции $\varphi(x) \in L_2[0;l]$ такой, что решение смешанной краевой задачи (1.1) удовлетворяет условию

$$v(x,T) = \chi(x), \tag{1.11}$$

где $\chi(x) \in L_2[0;l]$ — заданная функция, принадлежащая области значений прямой задачи, т. е. предполагается, что для точной функции $\chi(x)$ существует функция $\varphi(x) \in L_2[0;l]$, которая переводится прямой задачей в функцию $\chi(x)$.

Параллельно рассмотрим обратную задачу для соответствующего линейного уравнения. Обозначим через $\hat{\chi}(x)$ решение линейной прямой задачи (1.3) с начальным условием $u(0,x) = \varphi(x),\ 0 < x < l$, и рассмотрим обратную задачу со следующим условием:

$$u(x,T) = \hat{\chi}(x), \tag{1.12}$$

где $u(x,t)$ — решение смешанной краевой задачи (1.3) для линейного уравнения. Таким образом, наряду с нелинейной обратной задачей (1.1), (1.11) рассматривается обратная задача для линейного параболического уравнения, т. е. задача вычисления функции $\varphi(x) \in L_2[0;l]$ такой, что решение смешанной краевой задачи (1.3) удовлетворяет условию (1.12).

Пусть $M \subset L_2[0;l]$ — компактное множество. Предположим, что для заданной функции $\chi(x) \in L_2[0;l]$ существует точное решение $\varphi(x)$ нелинейной обратной задачи (1.1), (1.11), принадлежащее множеству M, но значения функции $\chi(x)$ нам не известны, а известны приближенные значения заданной функции, т. е. функция $\chi_\delta \in L_2[0;l]$ такая, что $\|\chi - \chi_\delta\| < \delta$. Требуется по исходным данным задачи определить приближенное решение φ_δ задачи с обратным временем и оценить его уклонение от точного решения. Это можно сделать, используя модуль непрерывности обратной полулинейной задачи.

Рассмотрим величины: $\omega(M,\delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| \colon \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\chi_1 - \chi_2\| \le \delta\}$ — модуль непрерывности для нелинейной обратной задачи, $\hat{\omega}(M,\delta) = \sup\{\|\varphi_1 - \varphi_2\| \colon \varphi_1, \varphi_2 \in M, \|\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\| \le \delta\}$ — модуль непрерывности для линейной обратной задачи.

Справедлива следующая

Теорема. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \delta < \delta_0$ выполняются неравенства*

$$\hat{\omega}(M, e^{-LT}\delta) \le \omega(M,\delta) \le \hat{\omega}(M, e^{LTe^{LT}}\delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in M$. Используя неравенства, полученные в лемме, оценим величину $\omega(M,\delta)$.

Оценим величину $\omega(M,\delta)$ сверху. Запишем неравенство (1.10) при $t = T$:

$$\|\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\| \le e^{LTe^{LT}} \|\chi_1 - \chi_2\|,$$

т. е. из условий $\varphi_1, \varphi_2 \in M$, $\|\chi_1 - \chi_2\| \le \delta$ вытекает $\|\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\| \le \delta_1$, где $\delta_1 = e^{LTe^{LT}}\delta$.

Следовательно, по определению модуля непрерывности имеем

$$\omega(M,\delta) \le \hat{\omega}(M, e^{LTe^{LT}}\delta).$$

Оценим величину $\omega(M,\delta)$ снизу. Запишем неравенство (1.7) при $t = T$:

$$\|\chi_1 - \chi_2\| \le e^{LT} \|\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\|.$$

Обозначим $\delta_2 = e^{-LT}\delta$. С учетом последнего неравенства из условий $\varphi_1, \varphi_2 \in M$ и $\|\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_2\| \le \delta_2$ вытекает $\|\chi_1 - \chi_2\| \le \delta$. Следовательно, по определению модуля непрерывности получаем

$$\omega(M,\delta) \ge \hat{\omega}(M, e^{-LT}\delta).$$

Теорема доказана.

2. Примеры

Приведем два примера, в которых оценивается $\omega(M,\delta)$.

П р и м е р 1. Рассмотрим множество M_1 — множество функций $\varphi(x) \in L_2[0;l]$ таких, что $\dfrac{\partial^{2k}\varphi}{\partial x^{2k}} \in L_2[0;l]$ $(k = 1, \dots, m)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(l) = 0$ $(k = 1, \dots, m-1)$; $\Big\|\dfrac{\partial^{2m}\varphi}{\partial x^{2m}}\Big\|_{L_2[0;l]} \le r$. Вычисляя модуль непрерывности для линейной обратной задачи (1.3), (1.12) по схеме, предложенной в [3; 6], находим

$$\hat{\omega}(M_1,\delta) = 2r\frac{(T - t_0)^m}{\ln^m(r/\delta)}.$$

Применяя теорему, получим следующую оценку модуля непрерывности для полулинейной задачи (1.1), (1.11) на множестве M_1:

$$\frac{2r(T-t_0)^m}{\left(\ln \frac{re^{LT}}{\delta}\right)^m} \le \omega(\delta, M_1) \le \frac{2r(T-t_0)^m}{\left(\ln \frac{r}{Le^{LT}\delta}\right)^m}.$$

П р и м е р 2. Пусть $0 < t_0 < T$. Множество M_2 задается с помощью линейной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u; \quad t \in (0;T), \quad x \in (0;l),$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad (0 < x < l),$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad (t_0 < t < T).$$

Обозначим $\varphi(x) = u(t_0, x)$. Рассмотрим множество функций

$$M_2 = \{\varphi(x) \in L_2[0;l] \colon \|u_0\| \le r\}.$$

Оценим модуль непрерывности для полулинейной обратной задачи (1.1), (1.11) на множестве M_2. Рассмотрим линейную задачу (1.3), (1.12). Из теоремы следует

$$\hat{\omega}(M_2, e^{-LT}\delta) \le \omega(M_2, \delta) \le \hat{\omega}(M_2, e^{LTe^{LT}}\delta).$$

Стандартные вычисления для линейной задачи (см., например, [2]) позволяют получить неравенства

$$2e^{-Lt_0e^{Lt_0}} r^{\frac{T-t_0}{T}} \delta^{\frac{t_0}{T}} \le \hat{\omega}(M_2, \delta) \le 2e^{Lt_0} r^{\frac{T-t_0}{T}} \delta^{\frac{t_0}{T}}.$$

Окончательно имеем

$$2e^{Lt_0(1-e^{Lt_0})} r^{\frac{T-t_0}{T}} \delta^{\frac{t_0}{T}} \le \omega(\delta, M_2) \le 2e^{Lt_0(1+e^{LT})} r^{\frac{T-t_0}{T}} \delta^{\frac{t_0}{T}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васин В.В., Агеев А.Л.** Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург.: Наука, 1993. 262 с.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректно поставленных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
3. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.
4. **Кокурин М.Ю.** Операторная регуляризация и исследование нелинейных монотонных задач. Йошкар-Ола: Изд. Марийского гос. ун-та, 1998. 292 с.
5. **Михлин С.Г.** Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 375 с.
6. **Страхов В.Н.** О решении линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 8. С. 1490–1495.
7. **Табаринцева Е.В.** Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 3. С. 259–271.
8. **Танана В.П., Табаринцева Е.В.** О методе приближения кусочно-непрерывных решений нелинейных обратных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 221–228.
9. **Танана В.П.** О сходимости регуляризованных решений нелинейных операторных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2003. Т. 6, № 3. С. 119–133.
10. **Танана В.П.** Оптимальные по порядку методы решения нелинейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1976. Т. 39, № 5. С. 503–507.
11. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.

Табаринцева Елена Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: eltab@rambler.ru

Поступила 12.12.2011

Том 19 № 1 2013

УДК 517.948

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ОШИБКОЙ В ОПЕРАТОРЕ[1]

В. П. Танана, А. Б. Бредихина

В данной статье исследован на оптимальность метод М.М. Лаврентьева для уравнений с приближенно заданным оператором. Получена точная оценка погрешности данного метода.

Ключевые слова: операторное уравнение, оптимальный метод, оценка погрешности.

V. P. Tanana, A. B. Bredikhina. On the optimality of a generalization of M.M. Lavrent'ev's method in the solution of equations with an error in the operator.

The optimality of M.M. Lavrent'ev's method for equations with approximately given operator is investigated. An exact estimate is obtained for the error of this method.

Keywords: operator equation, optimal method, error estimate.

Введение

В работе [1] была доказана оптимальность метода М.М. Лаврентьева [2] при решении линейных уравнений с точно заданным оператором и получена точная оценка погрешности этого метода. При этом было существенно использовано условие коммутируемости операторов A и B, где оператор A — оператор уравнения, а B — оператор, определяющий класс корректности.

В настоящей статье этот результат обобщен на уравнения с приближенно заданным оператором. Ввиду важности условия коммутативности при доказательстве оптимальности метода Лаврентьева оно распространено в данной работе на операторы $A,\ A_h$ и B, где A_h — приближенно заданный оператор уравнения.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathbb{B}[\mathbb{H}]$ — множество линейных ограниченных самосопряженных неотрицательно определенных операторов, отображающих пространство $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$, $\mathbb{B}_1[\mathbb{H}]$ — подмножество множества $\mathbb{B}[\mathbb{H}]$, состоящее из инъективных операторов, $\mathcal{A} \subset \mathbb{B}[\mathbb{H}]$.

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au = f; \quad u, f \in \mathbb{H}. \tag{1.1}$$

Предполагается, что при $f = f_0$ и при $A \in \mathcal{A}$ уравнение (1.1) имеет точное решение u_0, принадлежащее множеству $M_r^h = B_h\overline{S}_r$, где $B_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]$, а $\overline{S}_r = \{v\colon v \in \mathbb{H},\ \|v\| \le r\}$. Но точные значения f_0 правой части уравнения (1.1) (из–за ошибки измерения) и оператора A (из–за ошибки моделирования) нам неизвестны. Вместо них даны некоторые приближения $f_\delta \in \mathbb{H}$ и $A_h \in \mathcal{A} \cap \mathbb{B}_1[\mathbb{H}]$, а также уровни их погрешности $\delta \ge 0,\ h \ge 0$ такие, что $\|f_\delta - f_0\| \le \delta$, $\|A_h - A\| \le h$ и $AB_h = B_hA$, $A_hB_h = B_hA_h$.

Требуется, используя априорную информацию $A_h,\ h,\ \delta,\ M_r^h$, определить приближенное решение $u_{\delta h}$ уравнения (1.1) и оценить его уклонение от точного решения u_0 на множестве M_r^h.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта р_урал_а № 10-01-96000.

2. Основные понятия и обозначения

Класс операторов $\mathcal{A}$ определим следующим образом:

$$\mathcal{A} = \{A\colon A \in \mathbb{B}[\mathbb{H}], A_h - A = \varphi(A_h), \varphi \in \Phi\}, \tag{2.1}$$

где Φ — множество кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0, \|A_h\|]$.

Оператор $B_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]$ определим формулой

$$B_h = G_h(A_h),$$

где функция $G_h(\sigma) \in C[0, \|A_h\|] \cap C^1(0, \|A_h\|)$, $G_h(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает и $G'_h(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (0, \|A_h\|)$, а $G_h(0) = 0$.

Метод приближенного решения P_h уравнения (1.1) на множестве $M_r^h \times \mathcal{A}$ определим так же как в [3, с. 110], т.е. как линейный ограниченный оператор $P_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]$, который исходным данным $A_h,\ f_\delta$ задачи ставит в соответствие приближенное решение $u_{\delta h} = P_h[f_\delta] \in \mathbb{H}$.

Введем количественную характеристику точности метода при фиксированных $A_h \in \mathcal{A} \cap \mathbb{B}_1[H]$, $\delta \in (0, \delta_0]$ и $h \in (0, h_0]$:

$$\Delta_{\delta h}[P_h] = \sup_{u, A, f_\delta} \{\|u - P_h[f_\delta]\|\colon u \in M_r^h, A \in \mathcal{A}, \|A_h - A\| \le h, \|f_\delta - Au\| \le \delta\}.$$

Требуется, используя априорную информацию $M_r^h,\ \mathcal{A},\ A_h,\ \delta,\ h$, вычислить величину

$$\Delta_{\delta h}^{opt} = \inf\{\Delta_{\delta h}[P_h]\colon P_h \in \mathbb{B}[\mathbb{H}]\}.$$

3. Оценка снизу для величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$

Рассмотрим уравнение, связывающее параметры $\sigma,\ h$ и δ,

$$rG_h(\sigma) = rG_h(\sigma)\frac{h}{\sigma} + \frac{\delta}{\sigma}. \tag{3.1}$$

Из свойств функции $G_h(\sigma)$ следует, что при выполнении условия

$$\|A_h\| > h + \frac{\delta}{rG_h(\|A_h\|)} \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) имеет единственное решение $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\delta, h)$, принадлежащее интервалу $(0, \|A_h\|)$.

Заметим, что $\|A_h\|$ значительно больше h, а $\|f_\delta\|$ значительно больше, чем δ. Поэтому, при достаточно малых значениях δ и h условие (3.2) будет выполняться, и соответственно уравнение (3.1) будет иметь единственное решение.

Теорема 1 [4, теорема 1]. *Если выполнено условие* (3.2)*, то справедлива оценка*

$$\Delta_{\delta h}^{opt} \ge rG_h(\overline{\sigma}(\delta, h)),$$

где $\overline{\sigma}(\delta, h)$ *— решение уравнения* (3.1).

4. Оценка сверху для величины $\Delta_{\delta h}^{opt}$

Рассмотрим семейство операторов

$$T_\alpha^h = B_h[A_h B_h + \alpha E]^{-1}, \quad \alpha \in (0, \|A_h\|]. \tag{4.1}$$

За приближенное решение $u_{\delta h}^\alpha$ уравнения (1.1) примем элемент, определяемый формулой

$$u_{\delta h}^\alpha = T_\alpha^h f_\delta.$$

Лемма 1 [4, лемма 1]. *Для любого* $\alpha > 0$ *оператор* T_α^h*, определяемый формулой* (4.1), *ограничен и*

$$\|T_\alpha^h\| \le \max_{0\le\sigma\le\|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma)+\alpha}.$$

Лемма 2 [4, лемма 2]. *Для любых* $\alpha > 0$ *и* $r > 0$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{\|v\|\le r} \|T_\alpha^h A_h B_h v - B_h v\| \le r\alpha \max_{0\le\sigma\le\|A_h\|} \frac{G_h(\sigma)}{\sigma G_h(\sigma)+\alpha}.$$

Рассмотрим оценку $\Delta(T_\alpha^h)$ уклонения приближенного решения $u_{\delta h}^\alpha$ уравнения (1.1) от точного решения u_0 на классе M_r^h

$$\Delta(T_\alpha^h) = \sup_{u_0, A, f_\delta} \left\{ \|u_{\delta h}^\alpha - u_0\| \colon u_0 \in M_r^h,\ A \in \mathcal{A},\ \|Au_0 - f_\delta\| \le \delta,\ \|A - A_h\| \le h \right\}.$$

Введем обозначения:

$$\overline{\Delta}_1(\alpha) = \sup_{u_0} \left\{ \|T_\alpha^h A_h u_0 - u_0\| \colon u_0 \in M_r^h \right\}, \tag{4.2}$$

$$\overline{\Delta}_2(\alpha,\ h) = \sup_{u_0, A} \left\{ \|T_\alpha^h A_h u_0 - T_\alpha^h A u_0\| \colon u_0 \in M_r^h,\ \|A - A_h\| \le h \right\},$$

$$\overline{\Delta}_3(\alpha,\ \delta) = \sup_{u_0, A,\ f_\delta} \left\{ \|T_\alpha^h A u_0 - T_\alpha^h f_\delta\| \colon u_0 \in M_r^h,\ \|f_\delta - f_0\| \le \delta \right\}.$$

Тогда имеет место очевидное неравенство

$$\Delta(T_\alpha^h) \le \overline{\Delta}_1(\alpha) + \overline{\Delta}_2(\alpha,\ h) + \overline{\Delta}_3(\alpha,\ \delta).$$

Рассмотрим оценку $\overline{\Delta}_1(\alpha)$. Так как $u_0 = B_h v_0$ и $\|v_0\| \le r$, то согласно лемме 2

$$\|T_\alpha^h A_h u_0 - u_0\| = \|T_\alpha^h A_h B_h v_0 - B_h v_0\| \le r\alpha \|T_\alpha^h\|.$$

Таким образом, для оценки $\overline{\Delta}_1(\alpha)$, определенной формулой (4.2), справедливо равенство

$$\overline{\Delta}_1(\alpha) = r\alpha \|T_\alpha^h\|. \tag{4.3}$$

А из того, что

$$\|T_\alpha^h A_h u_0 - T_\alpha^h A u_0\| = \|T_\alpha^h (A_h - A) u_0\| \le h \|T_\alpha^h\| \cdot \|B_h v_0\|,$$

а $B_h = G_h(A_h)$, следует

$$\overline{\Delta}_2(\alpha,\ h) = rhG_h(\alpha)\|T_\alpha^h\|. \tag{4.4}$$

И, наконец,

$$\overline{\Delta}_3(\alpha,\ \delta) = \delta \|T_\alpha^h\|, \tag{4.5}$$

так как $\|T_\alpha^h A u_0 - T_\alpha^h f_\delta\| = \|T_\alpha^h (A u_0 - f_\delta)\| \le \delta \|T_\alpha^h\|$.

Учитывая равенства (4.3)–(4.5), получаем справедливость следующего утверждения.

Утверждение. *Справедливо неравенство*

$$\Delta(T_\alpha^h) \le (r\alpha + rhG_h(\alpha) + \delta)\|T_\alpha^h\|.$$

Теорема 2 [4, теорема 2]. *Пусть значение параметра $\overline{\sigma}(\delta,h)$ является решением уравнения* (3.1), *а*

$$\overline{\alpha}(\delta,h)=\frac{G_h^2(\overline{\sigma}(\delta,h))}{G_h'(\overline{\sigma}(\delta,h))}-hG_h(\overline{\sigma}(\delta,h)) \tag{4.6}$$

и

$$\overline{\alpha}(\delta,h)>0.$$

Тогда

$$\Delta(T^h_{\overline{\alpha}(\delta,h)})\le rG_h(\overline{\sigma}(\delta,h)).$$

О п р е д е л е н и е 1. Метод $\{T^{opt}_{\delta h}\colon 0<\delta\le\delta_0,\ 0<h\le h_0\}$ будем называть оптимальным на классе $M_r^h\times\mathcal{A}$, если для любых $\delta\in(0,\delta_0]$ и $h\in(0,h_0]$

$$\Delta_{\delta h}[T^{opt}_{\delta h}]=\Delta^{opt}_{\delta h}.$$

Из теорем 1 и 2 следует утверждение следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть класс операторов $\mathcal{A}$ определен формулой* (2.1), *а $\overline{T}_{\delta h}=T^h_{\overline{\alpha}(\delta,h)}$ определен формулами* (4.1) *и* (4.6) *при $0<\delta\le\delta_0$ и $0<h\le h_0$.*

Тогда метод $\{\overline{T}_{\delta h}\colon 0<\delta\le\delta_0, 0<h\le h_0\}$ оптимален на классе $M_r^h\times\mathcal{A}$ и для него справедлива оценка

$$\Delta_{\delta h}[\overline{T}_{\delta h}]=rG_h(\overline{\sigma}(\delta,h)),$$

где $\overline{\sigma}(\delta,h)$ определено уравнением (3.1).

5. Регуляризующее свойство алгоритма $\{T^h_{\overline{\alpha}(\delta,h)}\colon 0<\delta\le\delta_0, 0<h\le h_0\}$

Пусть A — точное значение оператора в уравнении (1.1) и $Sp(A)=[0,\|A\|]$, а

$$B=G(A), \tag{5.1}$$

где $G(\sigma)\in C[0,\|A\|]\cap C^1(0,\|A\|)$, для любого $\sigma\in(0,\|A\|]$ $G'(\sigma)>0$, а $G(0)=0$ и $G(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает.

Тогда, если для любого $h>0$ $\quad A_h\in\mathbb{B}_1[\mathbb{H}]$, $Sp(A_h)=[0,\|A_h\|]$

$$\|A_h-A\|\le h, \tag{5.2}$$

$$A=\Psi_h(A_h), \tag{5.3}$$

где $\Psi_h(\sigma)\in C[0,\|A_h\|]\cap C^1(0,\|A_h\|)$, для любого $\sigma\in(0,\|A_h\|]$ $\Psi_h'(\sigma)>0$, а $\Psi_h(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает, то для любых $h\in(0,h_0]$ и $\sigma\in[0,\|A_h\|]$

$$G_h(\sigma)=G[\Psi_h(\sigma)]. \tag{5.4}$$

Кроме того, для любого $h\in(0,h_0]$

$$B=G_h(A_h). \tag{5.5}$$

Теорема 4. *Пусть оператор B определен формулами* (5.5), *$G_h(\sigma)$ — формулой* (5.4), *а $\Psi_h(\sigma)$ — формулой* (5.3).

Тогда для любого $u_0\in M_r=B\overline{S}_r$ имеет место сходимость

$$u^{\overline{\alpha}(\delta,h)}_{\delta h}=T^h_{\overline{\alpha}(\delta,h)}f_\delta\to u_0 \quad \text{при} \ \ \delta \ \text{и} \ h\to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.4) следует, что для любого $h \in (0, h_0]$

$$G_h(\sigma) = G[\Psi_h(\sigma)]. \tag{5.6}$$

Тогда в силу (5.6), (5.3) и (5.1) для любого $\sigma \in (0, \|A_h\|]$ следует, что

$$G'_h(\sigma) = G'[\Psi'_h(\sigma)] > 0. \tag{5.7}$$

Кроме того

$$G_h(0) = G[\Psi_h(0)] = G(0) = 0 \tag{5.8}$$

и

$$G_h(\sigma)/\sigma = \frac{G[\Psi_h(\sigma)]}{\Psi_h(\sigma)} \, \frac{\Psi_h(\sigma)}{\sigma}. \tag{5.9}$$

Так как $\Psi_h(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает и $G(\lambda)/\lambda$ монотонно убывает, то из (5.9) следует, что $G_h(\sigma)/\sigma$ монотонно убывает.

Из (5.6)–(5.9) следует, что при достаточно малых значениях δ и h уравнение (3.1) имеет единственное решение $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\delta, h)$.

Теперь, если значение параметра $\overline{\alpha}(\delta, h)$ определим формулой (4.6), то

$$u_{\delta h}^{\overline{\alpha}(\delta,h)} = T^h_{\overline{\alpha}(\delta,h)} f_\delta, \tag{5.10}$$

и в силу (5.10), (3.2) на основании теоремы 2 имеет место оценка

$$\|u_{\delta h}^{\overline{\alpha}(\delta,h)} - u_0\| \le G_h(\overline{\sigma}(\delta, h)). \tag{5.11}$$

Из (3.1) следует, что

$$\overline{\sigma}(\delta, h) \to 0 \quad \text{при } \delta,\ h \to 0, \tag{5.12}$$

а из (5.2) и (5.3) вытекает, что существует $\sigma_0 > 0$ такое, что

$$\lim_{h \to 0} \max\{|\Psi_h(\sigma) - \sigma| \colon 0 \le \sigma \le \sigma_0\} = 0. \tag{5.13}$$

Из (5.12) и (5.13) получаем, что

$$\Psi_h(\overline{\sigma}(\delta, h)) \to 0 \quad \text{при } \delta,\ h \to 0, \tag{5.14}$$

а из (5.4) и (5.14) имеем, что

$$G_h(\overline{\sigma}(\delta, h)) = G[\Psi_h(\overline{\sigma}(\delta, h))] \to 0 \quad \text{при } \delta,\ h \to 0. \tag{5.15}$$

Из (5.11) и (5.15) следует, что

$$u_{\delta h}^{\overline{\alpha}(\delta,h)} \to u_0 \quad \text{при } \delta,\ h \to 0.$$

Тем самым теорема 4 доказана.

6. Иллюстративный пример

Для примера рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Au(t) = tu(t) = f(t), \quad 0 \le t \le 1. \tag{6.1}$$

$u(t)$ и $Au(t) \in L_2[0, 1]$.

Предположим, что точное решение $u_0 \in M_r = B\overline{S}_r$, где

$$Bv(t) = t\, v(t), \quad 0 \le t \le 1,$$

где $v(t)$ и $Bv(t) \in L_2[0,1]$.

Для любого $h \in [0, 1/2]$ определим оператор A_h

$$A_h u(t) = t(1+h)u(t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{6.2}$$

где $u(t),\ A_h u(t) \in L_2[0,1]$.

Из (6.1), (6.2) имеем, что $\forall h \in (0, 1/2)$

$$B = G_h(A_h),$$

где

$$G_h(\sigma) = \frac{\sigma}{1+h}, \quad 0 \le \sigma \le 1+h.$$

Из (4.1) следует, что

$$T^h_\alpha f_\delta = \frac{t}{1+h}[t^2+\alpha]^{-1} f_\delta. \tag{6.3}$$

При этом

$$\overline{\alpha}(\delta, h) = \frac{\overline{\sigma}(\overline{\sigma} - h)}{1+h}, \tag{6.4}$$

а

$$\overline{\sigma}(\delta, h) = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\delta}{r}(1+h)}. \tag{6.5}$$

Таким образом из (6.3)–(6.5) следует, что

$$\Delta[T^h_{\overline{\alpha}(\delta,h)}] = \frac{r}{1+h}\left[\frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{\delta}{r}(1+h)}\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tanana V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrentev method // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. Vol. 18, no. 8. P. 935–944.
2. **Лаврентьев М.М.** Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
3. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения // М. : Наука, 1978. 206 с.
4. **Бредихина А.Б.** Об оптимальности метода М.М. Лаврентьева при решении уравнений с ошибкой в операторе // Вестн. ЮУрГУ. 2011. Вып. 5. № 32(249). С. 18–22. (Математика. Физика. Механика.)

Танана Виталий Павлович
профессор, д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Поступила 26.03.2011

Бредихина Анна Борисовна
аспирант
Южно-Уральский государственный университет
e-mail: bredikhina-ann@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.977.1

ИНВАРИАНТНОСТЬ МНОЖЕСТВ ПРИ КОНСТРУИРОВАНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О СБЛИЖЕНИИ В ФИКСИРОВАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ[1]

В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков, Г. В. Паршиков

Изучается задача о сближении с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Исследуется вопрос о построении решений этой задачи.

Ключевые слова: управляемая система, игровая задача о сближении, множество достижимости, интегральная воронка, инвариантность, слабая инвариантность.

V. N. Ushakov, A. R. Matviichuk, A. V. Ushakov, G. V. Parshikov. The invariance of sets in the construction of solutions to a problem of approach at a fixed time.

The problem of approach to a compact target set at a fixed time is studied. The construction of its solutions is investigated.

Keywords: control system, game problem of approach, reachable set, integral funnel, invariance, weak invariance.

Введение

В работе рассматривается управляемая система на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством в фазовом пространстве в конечный момент времени [1–4]. Эта задача является одной из базовых в математической теории управления. К ней можно свести многие задачи оптимального времени с фиксированным моментом окончания, и с ней связана задача об оптимальном быстродействии управляемой системы.

Обсуждаются вопросы о применении свойств инвариантности и слабой инвариантности множеств при конструировании решений задачи о сближении. Проблематика этих вопросов тесно переплетена с задачами оценки множеств достижимости интегральных воронок управляемых систем и дифференциальных включений. Важность этих задач и поиска эффективных подходов к их решению обусловлена в первую очередь потребностями практики. Имеются несколько эффективных подходов к решению задачи об оценке множеств достижимости. Здесь отметим подход, основанный на применении эллипсоидальных оценок множеств достижимости [5–9], а также подход, в котором применяются полиэдральные аппроксимации [10; 11]. Одним из вариантов подхода, основанного на применении полиэдральных аппроксимаций, и весьма ценным является подход, использующий пиксельные аппроксимации (см., например, [12]). Пиксельные аппроксимационные конструкции хороши тем, что они просты и с ними удобно работать, например, легко строить объединения и пересечения пиксельных множеств. В пользу

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00427-а “Алгоритмы и динамические процедуры решения в дифференциальных играх и задачах управления”, 11-01-12088-офи-м-2011 “Методы позиционных дифференциальных игр в задачах техники, экономики и экологии” и 12-01-31300 мол_а “Разработка численных и аналитических методов для построения функции цены в задачах оптимального управления и дифференциальных играх”), гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ № НШ-5927.2012.1. и программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1002).

пиксельных конструкций говорит и то, что они широко применяются не только при разработке алгоритмов в математической теории управления, но и в других областях математики, например, в теории распознавания образов.

В работе [13] приведена одна достаточно общая схема конструирования аппроксимаций множеств достижимости управляемых систем и дифференциальных включений. В настоящей работе, являющейся продолжением и дополнением работы [13], изложен алгоритм решения задачи о сближении, базирующийся на использовании конструкций поводыря и копировании в управляемой системе управлений поводыря. Этот алгоритм предполагает дискретизацию промежутка времени и фазового пространства системы, вследствие чего он доставляет приближенное решение задачи о сближении.

В работе рассмотрена конкретная задача о сближении нелинейных управляемых систем, в процессе решения которых реализован упомянутый алгоритм.

Работа примыкает к исследованиям [1–20].

1. Управляемые системы и дифференциальные включения, инвариантные и слабо инвариантные множества

Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь u — вектор управляющих воздействий, удовлетворяющий включению

$$u \in P, \tag{1.2}$$

где P — компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$.

Предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет следующим условиям.

Условие A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна по совокупности переменных t, x, u, и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $L = L(D) \in [0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Условие B. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P. \tag{1.4}$$

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Полагаем $\mathcal{F}(t, x) = \{f(t, x, u); u \in P\}$, $F(t, x) = \mathrm{co}\mathcal{F}(t, x)$, $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $\mathrm{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$ векторов f.

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать дифференциальное включение (д.в.) на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x). \tag{1.5}$$

Напомним некоторые известные определения.

Решением уравнения (1.1) на $[t_0, \vartheta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется такая абсолютно непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ вектор-функция $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t))$$

почти всюду (п.в.) на $[t_0, \vartheta]$; здесь $u(t)$ — некоторое допустимое управление, т. е. такая измеримая по Лебегу вектор-функция на $[t_0, \vartheta]$, что $u(t) \in P$ на $[t_0, \vartheta]$.

Решением д.в. (1.5) на $[t_0, \vartheta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется такая абсолютно непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ вектор-функция $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, что

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t)) \quad \text{п.в. на} \ \ [t_0, \vartheta].$$

Пусть $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем множеством достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$ управляемой системы (1.1), отвечающим моменту t^*, множество всех таких $x^* \in \mathbb{R}^n$, что $x^* = x(t^*)$ для некоторого решения $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ уравнения (1.1).

Полагая $X_* \subset \mathbb{R}^n$, введем обозначение $X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости управляемой системы (1.1), отвечающее моменту t^* и начальному множеству X_*

О п р е д е л е н и е 1.2. Назовем интегральной воронкой управляемой системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$ с начальным условием $x(t_*) = x_*$ множество $X(t_*, x_*) = \bigcup\limits_{t^* \in [t_*, \vartheta]} \big(t^*, X(t^*, t_*, x_*)\big)$ в $[t_*, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $(t^*, X^*) = \big\{(t^*, x^*) \colon x^* \in X^*\big\}$.

Введем также обозначение $X(t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t_*, x_*)$ — интегральная воронка управляемой системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$, отвечающая начальной паре (t_*, X_*), $X_* \subset \mathbb{R}^n$.

Аналогично для д.в. (1.5) определяются множества достижимости $Y(t^*, t_*, x_*)$, $Y(t^*, t_*, X_*)$ и интегральные воронки $Y(t_*, x_*)$, $Y(t_*, X_*)$ на $[t_*, \vartheta]$.

Обозначим через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрическое пространство, элементы которого — компакты из $\mathbb{R}^n$, а метрика — хаусдорфова метрика $d(F_*, F^*) = \max\big\{h(F_*, F^*), h(F^*, F_*)\big\}$, где $h(F_*, F^*) = \max\limits_{f_* \in F_*} \rho(f_*, F^*)$, $\rho(f_*, F^*) = \min\limits_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$ — расстояние от точки f_* до множества F^*.

Пусть $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Из условий A и B, наложенных на правую часть системы (1.1) — вектор-функцию $f(t, x, u)$, следует, что $Y(t^*) = Y(t^*, t_*, X_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ при $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и, кроме того, отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto Y(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно в хаусдорфовой метрике.

Напомним теперь определения понятий инвариантности и слабой инвариантности множеств относительно управляемой системы и дифференциального включения.

Пусть задано непустое замкнутое множество Φ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Множество Φ называется инвариантным относительно системы (1.1) (д.в. (1.5)), если для любых $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $(t_*, x_*) \in \Phi$, справедливо $X(t_*, x_*) \subset \Phi$ $(Y(t_*, x_*) \subset \Phi)$.

Приведем эквивалентное определение инвариантного множества $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Множество Φ называется инвариантным относительно системы (1.1) (д.в. (1.5)), если для любых t_*, t^* $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$, $(t_*, x_*) \in \Phi$, справедливо $X(t^*, t_*, x_*) \subset \Phi(t^*)$ $\big(Y(t^*, t_*, x_*) \subset \Phi(t^*)\big)$; здесь $\Phi(t^*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n \colon (t^*, x^*) \in \Phi\}$.

Наряду с определением инвариантных множеств приведем определение слабо инвариантных множеств $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Множество Φ называется слабо инвариантным относительно системы (1.1) (д.в. (1.5)), если для любых $(t_*, x_*) \in \Phi$ существует решение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) (д.в. (1.5)) на $[t_*, \vartheta]$, удовлетворяющее включению $(t, x(t)) \in \Phi$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

Приведенные понятия инвариантных и слабо инвариантных множеств, как будет показано в последующих разделах, оказываются полезными при разработке алгоритмов приближенного построения интегральных воронок и решений задач управления, в том числе задачи о сближении.

2. Задача о сближении системы (1.1) с компактом в $\mathbb{R}^n$. Алгоритм решения задачи в частном случае

Сформулируем задачу о сближении системы (1.1) с компактным целевым множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$ в фиксированный момент времени ϑ. Рассмотрим систему (1.1) в предположении, что в дополнение к условиям A, B она удовлетворяет условию C выпуклости вектограммы скоростей (см. ниже). При этих условиях на систему (1.1) обсудим схему решения этой задачи, основанную на использовании слабо инвариантных множеств. Приведем алгоритм приближенного построения решений в этой задаче.

Пусть M — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Учитывая специфику задачи о сближении, будем называть решения системы (1.1) (д.в. (1.5)) движениями системы (1.1) (д.в. (1.5)).

З а д а ч а 2.1. Требуется найти допустимое управление $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$, системы (1.1) на промежутке $[t_0, \vartheta]$, которое удовлетворяет включению $x^*(\vartheta) \in M$.

Вообще говоря, не при любых значениях параметров (t_0, x_0), ϑ и M задача 2.1 разрешима. Допустим все же, что система (1.1) и эти параметры таковы, что задача 2.1 имеет решение. Зададим такое число $\gamma_0 \in (0, \infty)$, что $h(M, \{\mathbf{0}\}) < \gamma_0$; здесь $\mathbf{0}$ — нуль в $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение замкнутую и ограниченную область

$$\mathfrak{D} = \big\{(t,x)\colon t \in [t_0, \vartheta],\ x \in B\big(\mathbf{0}; \gamma(t)\big)\big\} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n;$$

здесь $\gamma(t) = \big(\gamma_0 + (t-t_0)\gamma\big)e^{\gamma(t-t_0)}$ при $t \in [t_0, \vartheta]$, и число γ определено в условии B, $B(\mathbf{0}; \gamma)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbf{0}$ и радиуса γ.

Область $\mathfrak{D}$ представляет собой интегральную воронку д.в. $\dfrac{dx}{dt} \in U(x) = B\big(\mathbf{0}; \gamma(1 + \|x\|)\big)$ на $[t_0, \vartheta]$ с начальным множеством $\mathfrak{D}(t_0) = B(\mathbf{0}; \gamma_0)$. Из определения $\mathfrak{D}$ следует, что при некотором малом $\varepsilon_* > 0$ имеет место $Y(t, t_0, M) + B(\mathbf{0}; \varepsilon_*) \subset \mathfrak{D}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

По области $\mathfrak{D}$ построим еще одну ограниченную и замкнутую область D в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ такую, что $\mathfrak{D}(\vartheta) = D(t_0)$ и $\mathfrak{D} \subset D$. А именно, полагаем $D = \big\{(t,x)\colon t \in [t_0, \vartheta],\ x \in B\big(\mathbf{0}; r(t)\big)\big\}$, где $r(t) = \big(r_0 + (t-t_0)\gamma e^{\gamma(t-t_0)}\big)$, $r_0 = \gamma(\vartheta)$.

Из определения D следует, что для любых $(t_*, x_*) \in D$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, и любого движения $x(t)$, $x(t_*) = x_*$, системы (1.1) или д.в. (1.5) верно $(t, x(t)) \in D$ на $[t_*, t^*]$.

Именно эту область вместе с константами $L = L(D)$ и $K = \max\{\|f\|\colon f \in F(t,x),\ (t,x) \in D\} < +\infty$ будем использовать в последующих рассуждениях.

Предположим, что наряду с условиями A и B выполняется следующее условие:

Условие C. $\mathcal{F}(t,x) = F(t,x)$ при $(t,x) \in D$.

Тогда, как известно, справедливо равенство $X(t^*, t_*, x_*) = Y(t^*, t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, и, значит, множества $X(t^*, t_*, x_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Полагаем $M^* = M \cap X(\vartheta, t_0, x_0)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Компакт M^* непуст, согласно нашему допущению о разрешимости задачи 2.1 при заданных (t_0, x_0), ϑ и M.

Предполагая, что умеем вычислять M^* и что M^* уже вычислено нами, выберем произвольную точку $x^*_\vartheta \in M^*$.

Точка x^*_ϑ — одна из тех точек в M, в которые может прийти движение системы (1.1) в момент ϑ, отправляясь из $x(t_0) = x_0$. В выделении таких точек, как видим, множество $X(\vartheta, t_0, x_0)$ играет значительную роль. В алгоритмах (приближенного) вычисления множеств достижимости системы (1.1) мы ограничиваемся вычислением границы этих множеств. Так, при вычислении множества $X(\vartheta, t_0, x_0)$ мы ограничиваемся вычислением его границы $\partial X(\vartheta, t_0, x_0)$. При этом мы не сохраняем в памяти для каждой точки $x^* \in \partial X(\vartheta, t_0, x_0)$ и тем более для каждой точки $x^* \in X(\vartheta, t_0, x_0)$ то управление $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, которое приводит систему (1.1) в эту точку x^* в момент ϑ. Это справедливо и для точки x^*_ϑ : мы не сохраняем в памяти то управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, которое породило движение $x^*(t)$ системы (1.1), приходящее в x^*_ϑ в момент ϑ.

В связи с этим возникает важный вопрос: “Как, зная точку $x^*_\vartheta \in M^*$, восстановить по ней допустимое управление $u^*(\cdot)$ на $[t_0, \vartheta]$, приводящее систему (1.1) в эту точку в момент ϑ?”

Для ответа на этот вопрос введем следующие конструкции, связанные с понятием множества достижимости.

Рассмотрим начальную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, промежуток $[t_0, \vartheta]$ и управление $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее некоторое движение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$. Справедливо равенство

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x_(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Наряду с “прямым” временем $t \in [t_0, \vartheta]$ введем так называемое “обратное” время $\tau \in [t_0, \vartheta]$:

$$\tau = t_0 + \vartheta - t, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Поставим в соответствие системе (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

управляемую систему в $\mathbb{R}^n$, отвечающую “обратному” времени τ:

$$\frac{dz}{d\tau} = f^0(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, \vartheta]; \tag{2.2}$$

здесь $f^0(\tau, z, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, v)$, $(\tau, z, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Любой паре моментов t_*, t^* $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ сопоставим пару моментов τ_*, τ^* $(t_0 \leqslant \tau^* < \tau_* \leqslant \vartheta)$ по формулам $\tau_* = t_0 + \vartheta - t_*$, $\tau^* = t_0 + \vartheta - t^*$.

Заметим, что движению $x(t)$ (2.1) системы (1.1), порожденному управлением $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, можно сопоставить движение $z(\tau)$ системы (2.2), удовлетворяющее соотношению

$$\frac{dz}{d\tau} = f^0\big(\tau, z(\tau), v(\tau)\big), \quad z(t_0) = x(\vartheta) \tag{2.3}$$

при почти всех $\tau \in [t_0, \vartheta]$;

здесь управление $v(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ определено равенством $v(\tau) = u(t)$, $\tau = t_0 + \vartheta - t$.

Можно сказать, что мы записали движение $x(t)$ системы (1.1) в терминах “обратного” времени τ как движение $z(\tau)$ системы (2.2).

Движения $x(t)$ и $z(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ связаны равенством

$$x(t) = z(\tau), \quad \tau = t_0 + \vartheta - t, \tag{2.4}$$

точно так же, как и порождающие их управления $u(t)$ и $v(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$.

Обратимся снова к точке $x^*_\vartheta \in M^*$. Рассмотрим интегральную воронку $Z = Z(t_0, z_0)$, $z_0 = x^*_\vartheta$, системы (2.2), представляющую собой замкнутое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Зададим множество W в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ условием $W(t) = Z(\tau)$, $t = t_0 + \vartheta - \tau$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, где через $W(t)$ и $Z(\tau)$ обозначены сечения множеств W и Z, соответственно.

Множество W замкнуто в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, поскольку Z — замкнуто. Кроме того, согласно определению W и свойству (2.4) двойственности движений систем (1.1) и (2.2) множество W есть множество разрешимости для системы (1.1) в задаче о сближении с точкой x^*_ϑ в момент ϑ. То есть W — множество всех (t_*, x_*), из которых возможно приведение движения $x(t)$ системы (1.1) в точку x^*_ϑ в момент ϑ.

По построению множества W выполняется включение $W \subset D$; кроме того, все движения $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, начинающиеся в W (т.е. $(t_*, x(t_*)) \in W$), удовлетворяют включению $(t, x(t)) \in D$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

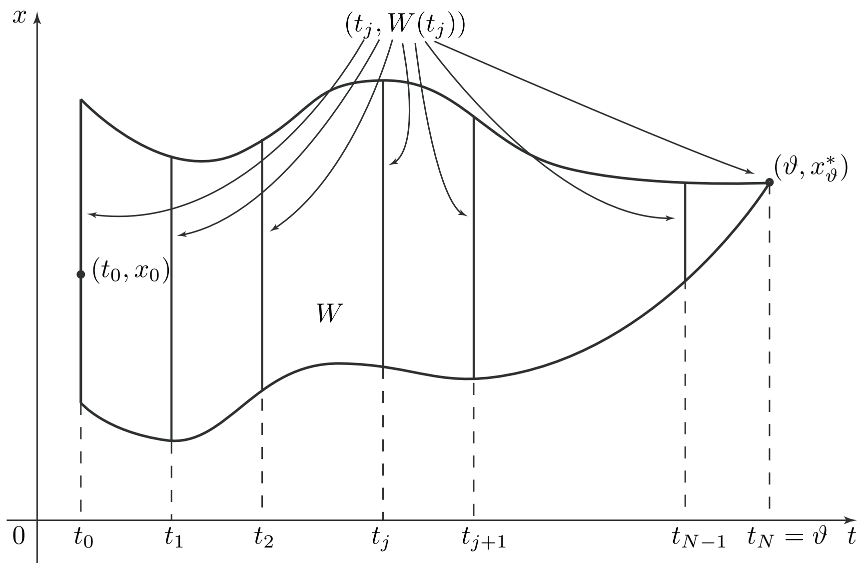


Рис. 1

Также по построению W и в силу выбора точки (t_0, x_0) имеем $(t_0, x_0) \in W$; при этом W слабо инвариантно относительно системы (1.1). Слабой инвариантностью множества W мы воспользуемся при конструировании управления на $[t_0, \vartheta]$, обеспечивающего приведение движения системы (1.1) из точки x_0 в x^*_ϑ в момент ϑ.

Зададим на оси τ некоторое разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с равными шагами $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$, $i = \overline{0, N-1}$, причем диаметр Δ полагаем малым.

Сначала вообразим себе следующую *идеальную модель* процесса. Двигаясь последовательно от множества $Z(\tau_0) = \{x^*_\vartheta\}$ малыми шагами $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = \overline{0, N-1}$, мы вычисляем *точно* сечения $Z(\tau_i)$ интегральной воронки Z системы (2.2). Этим сечениям $Z(\tau_i)$ в множестве разрешимости W задачи о сближении системы (1.1) с точкой x^*_ϑ соответствуют сечения $W(t_j)$, $j = N - i$, отвечающие разбиению $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ на оси t (рис. 1).

Допустим, что мы умеем вычислять *точно* не только множества $W(t_j)$, $j = N - i$, но и множества достижимости $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$, $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{0, N-1}$.

При этом допущении рассмотрим первый промежуток $[t_0, t_1]$ разбиения Γ. Так как $x^{(0)} = x_0 \in W(t_0)$ и W слабо инвариантно относительно системы (1.1), то

$$W(t_1) \cap X(t_1, t_0, x^{(0)}) \neq \varnothing,$$

и, значит, существует управление $u^*(t)$ на $[t_0, t_1)$, порождающее движение $x^*(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $x^{(1)} = x^*(t_1) \in W(t_1)$.

Далее, переходя ко второму промежутку $[t_1, t_2]$ разбиения Γ, получаем, что для точки $x^{(1)} \in W(t_1)$ выполняется

$$W(t_2) \cap X(t_2, t_1, x^{(1)}) \neq \varnothing,$$

и, значит, существует управление $u^*(t)$ на $[t_1, t_2)$, порождающее такое движение $x^*(t)$ системы (1.1) на $[t_1, t_2]$, что $x^{(2)} = x^*(t_2) \in W(t_2)$.

При переходе от промежутка $[t_j, t_{j+1}]$ к промежутку $[t_{j+1}, t_{j+2}]$, мы конструируем управление $u^*(t)$ на $[t_{j+1}, t_{j+2})$, порождающее движение $x^*(t)$ системы (1.1) на $[t_j, t_{j+1}]$, для которого $x^{(j+2)} = x^*(t_{j+2}) \in W(t_{j+2})$ (рис. 2) и т.д.

В итоге в рамках *идеальной модели* процесса, двигаясь малыми шагами $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, мы сконструировали управление $u^*(t)$ на всем промежутке $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$ системы (1.1), для которого $x^*(\vartheta) = x^*_\vartheta$.

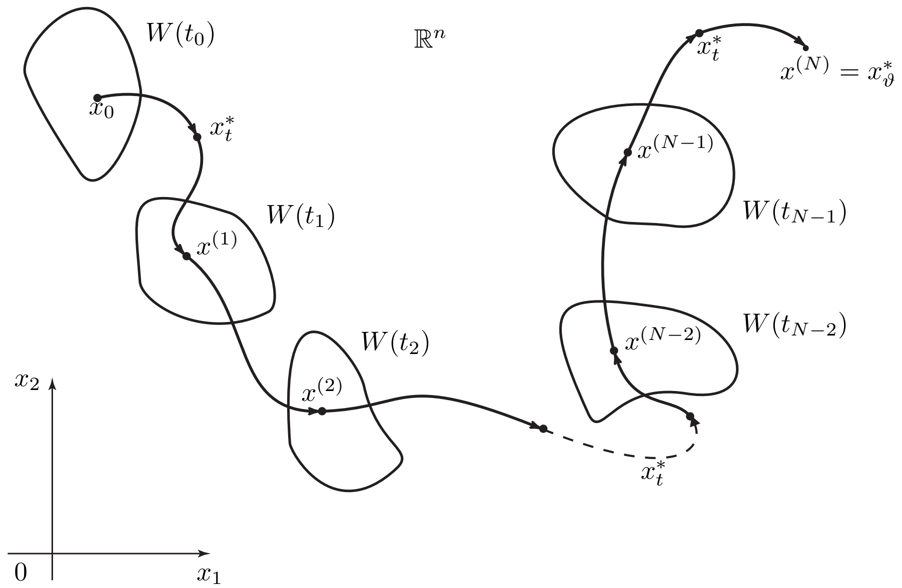


Рис. 2

Однако в реальности мы не в состоянии вычислять *точно* ни множества $W(t_j)$, ни множества $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ даже при тех Г, у которых t_j и t_{j+1} близки. Как правило, мы можем вычислять множества $W(t_j)$ и $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ лишь *приближенно*. Поэтому в *реальной модели* процесса это обстоятельство должно быть учтено в полной мере. Имея в виду это обстоятельство, будем предполагать, что множества $X(t^*, t_*, x_*)$ вычислены лишь *приближенно*. Предположение же о приближенном вычислении множества $W(t_j)$ приводит к существенному усложнению выкладок; мы публикуем эти усложненные выкладки в ближайшем номере журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”.

Итак, далее предполагаем, что умеем вычислять множества $W(t_j)$ *точно*, а множества $X(t^*, t_*, x_*)$ лишь *приближенно* как множества $\tilde{X}(t^*, t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F(t_*, x_*)$ $((t_*, x_*) \in D, t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ и, в частности, умеем лишь *приближенно* вычислять множества $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ как множества $\tilde{X}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) = x^{(j)} + \Delta F(t_j, x^{(j)})$.

Между множествами $X(t^*, t_*, x_*)$ и $\tilde{X}(t^*, t_*, x_*)$, как известно, налицо хорошая степень близости

$$\sup_{(t_*, x_*) \in D, t^* \in [t_*, \vartheta]} d\big(X(t^*, t_*, x_*), \tilde{X}(t^*, t_*, x_*)\big) \leqslant \omega(t^* - t_*),$$

где $\omega(\delta) = \delta\omega^*\big((1+K)\delta\big)$, $\delta > 0$; $\omega^*(\rho) = \max\big\{\|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\|, (t_*, x_*), (t^*, x^*) \in D,\ |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \rho,\ u \in P\big\}$, $\rho > 0$; число $K \in (0, \infty)$ определено на с. 267.

Из определения функции $\omega^*(\rho)$ следует, что $\omega^*(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$, и поэтому функция $\omega(\delta)$ есть также монотонная функция от $\delta > 0$, являющаяся величиной порядка малости по δ, более высокого, чем первый порядок при $\delta \downarrow 0$.

Приступим к описанию пошагового построения управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приводящего движение $x^*(t)$ системы (1.1) в точку x_ϑ^* в момент ϑ. Учитывая нашу возможность вычислять множества $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ лишь *приближенно*, мы сможем построить управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приводящее движение $x^*(t)$ в момент ϑ лишь в некоторую окрестность точки x_ϑ^*.

Рассмотрим, как и в случае *идеальной* модели, промежуток $[t_0, t_1]$. Так как W слабо инвариантно относительно системы (1.1) и $x_0 \in W(t_0)$, то

$$W(t_1) \cap X(t_1, t_0, x_0) \neq \varnothing$$

и, значит,

$$W(t_1)_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{X}(t_1, t_0, x_0) \neq \varnothing;$$

здесь Φ_ω — ω-окрестность множества Φ в $\mathbb{R}^n$.

Выберем некоторую точку $\tilde{x}^{(1)} \in W(t_1)_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{X}(t_1, t_0, x_0)$. Справедливо представление для точки

$$\tilde{x}^{(1)} = x_0 + \Delta f^0, \quad \text{где } f^{(0)} \in F(t_0, x_0).$$

Так как в рассматриваемом случае $F(t_0, x_0) = \mathcal{F}(t_0, x_0)$, то уравнение

$$f(t_0, x_0, u) = f^{(0)} \tag{2.5}$$

относительно u разрешимо в P, т. е. существует вектор $u^{(0)} \in P$, удовлетворяющий (2.5).

Будем считать, что мы умеем решать уравнение (2.5). Для некоторых классов систем (1.1) это действительно так. Например, для систем (1.1) вида $f(t, x, u) = f(t, x) + B(t, x)u$ уравнение (2.5) сводится к решению линейного уравнения относительно управления u

$$B(t_0, x_0)u = f^{(0)} - f(t_0, x_0),$$

где $B(t, x)$ — матрица-функция от t, x.

В случае, если $B(t, x)$ — неособая $n \times n$-матрица-функция при $(t, x) \in D$, будем иметь решение

$$u^{(0)} = B(t_0, x_0)^{-1}\big(f^{(0)} - f(t_0, x_0)\big),$$

при этом справедливо $u^{(0)} \in P$.

Поскольку сам вектор $f^{(0)}$ представим в виде

$$f^{(0)} = \Delta^{-1}(\tilde{x}^{(1)} - x_0),$$

то справедливо равенство

$$u^{(0)} = \Delta^{-1}B(t_0, x_0)^{-1}\big(\tilde{x}^{(1)} - x_0 - \Delta f(t_0, x_0)\big).$$

Итак, для системы (1.1) управление $u^{(0)} \in P$ определяем из уравнения (2.5), и в некоторых случаях удается выписать формулу для $u^{(0)}$. К сожалению, это возможно далеко не всегда.

Управление $u^*(t)$ на $[t_0, t_1)$ определяем равенством

$$u^*(t) = u^{(0)} \in P, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Далее переходим ко второму промежутку $[t_1, t_2]$ разбиения Γ. Для точки $\tilde{x}^{(1)} \in W(t_1)_{\omega(\Delta)}$ ищем ближайшую точку $x^{(1)}$ на $W(t_1)$. Справедливо неравенство $\|x^{(1)} - \tilde{x}^{(1)}\| \leqslant \omega(\Delta)$.

В силу слабой инвариантности W и $x^{(1)} \in W(t_1)$ имеем $W(t_2) \cap X(t_2, t_1, x^{(1)}) \neq \varnothing$. Из этого соотношения и неравенства $d(X(t_2, t_1, x^{(1)}), \tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)})) \leqslant \omega(\Delta)$ следует

$$W(t_2)_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)}) \neq \varnothing.$$

Выберем некоторую точку $\tilde{x}^{(2)} \in W(t_2)_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)})$. Так как $\tilde{x}^{(2)} \in \tilde{X}(t_2, t_1, x^{(1)})$, то $\tilde{x}^{(2)} = x^{(1)} + \Delta f^{(1)}$, где $f^{(1)} \in F(t_1, x^{(1)})$.

Из уравнения

$$f(t_1, x^{(1)}, u) = f^{(1)} \tag{2.6}$$

определяем вектор $u^{(1)} \in P$.

Уравнение (2.6) можно записать в виде

$$f(t_1, x^{(1)}, u) = \Delta^{-1}(\tilde{x}^{(2)} - x^{(1)}),$$

так что справедливо $\tilde{x}^{(2)} = x^{(1)} + \Delta f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})$.

Управление $u^*(t)$ на $[t_1, t_2)$ задаем равенством $u^*(t) = u^{(1)} \in P$.

Затем переходим к следующему промежутку $[t_2, t_3]$ разбиения Г. Для точки $\tilde{x}^{(2)}$ определяем точку $x^{(2)}$, ближайшую на $W(t_2)$. Выполняется неравенство $\|x^{(2)} - \tilde{x}^{(2)}\| \leqslant \omega(\Delta)$.

Учитывая слабую инвариантность множества W и $x^{(2)} \in W(t_2)$, получаем $W(t_3) \cap X(t_3, t_2, x^{(2)}) \neq \varnothing$. Выбираем некоторую точку $\tilde{x}^{(3)} \in W(t_3)_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{X}(t_3, t_2, x^{(2)})$.

Для точки $\tilde{x}^{(3)}$ справедливо представление $\tilde{x}^{(3)} = x^{(2)} + \Delta f^{(2)}$, где $f^{(2)} \in F(t_2, x^{(2)})$.

Из уравнения

$$f(t_2, x^{(2)}, u) = f^{(2)} \tag{2.7}$$

определяем вектор $u^{(2)} \in P$.

Так как $f^{(2)} = \Delta^{-1}(\tilde{x}^{(3)} - x^{(2)})$, то вектор $u^{(2)}$ удовлетворяет равенству $\tilde{x}^{(3)} = x^{(2)} + \Delta f(t_2, x^{(2)}, u^{(2)})$.

Управление $u^*(t)$ на $[t_2, t_3]$ определяем равенством $u^*(t) = u^{(2)} \in P$.

Затем переходим к следующему промежутку $[t_3, t_4]$. Так, продвигаясь вперед по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Г, построим кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$:

$$u^*(t) = u^{(j)} \in P \text{ при } t \in [t_j, t_{j+1}), j = \overline{0, N-1}.$$

Это управление порождает движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$, системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$.

Покажем, что при достаточно малых $\Delta > 0$ движение $x^*(t)$ мало отстоит в моменты t_j от множеств $W(t_j)$, т. е. мала величина $\rho(x^*(t_j), W(t_j))$ — расстояние от $x^*(t_j)$ до $W(t_j)$.

Для этого покажем, что во все моменты t_j мала величина $\rho_j = \|x^*(t_j) - x^{(j)}\|$; здесь $x^{(j)}$ — точка из $W(t_j)$, которая определяется аналогично точкам $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$.

Итак, сначала рассмотрим первый шаг $[t_0, t_1]$ и оценим сверху величину ρ_1. Справедливо равенство

$$x^*(t_1) - x^{(1)} = (x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)}) + (\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}). \tag{2.8}$$

Первое слагаемое в правой части (2.8) представимо в виде

$$x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)} = \left(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), u^{(0)})\,dt\right) - \Big(x_0 + \Delta f(t_0, x_0, u^{(0)})\Big)$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\Big)\,dt.$$

По построению области D все рассматриваемые нами позиции содержатся в $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, и, в частности, $(t, x^*(t)) \in D$ при $t \in [t_0, t_1]$. Принимая это во внимание, оценим величину

$$\|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\|, \quad t \in [t_0, t_1).$$

При $t \in [t_0, t_1)$ справедлива оценка

$$\|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\| \leqslant \omega^*\big(|t - t_0| + \|x^*(t) - x_0\|\big) \leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta\big), \tag{2.9}$$

откуда получаем (рис. 3)

$$\|x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)}\| = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\|\,dt \leqslant \omega(\Delta). \tag{2.10}$$

Из равенства (2.8), оценок $\|\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}\| \leqslant \omega(\Delta)$ и (2.10) следует

$$\rho_1 = \|x^*(t_1) - x^{(1)}\| \leqslant 2\omega(\Delta). \tag{2.11}$$

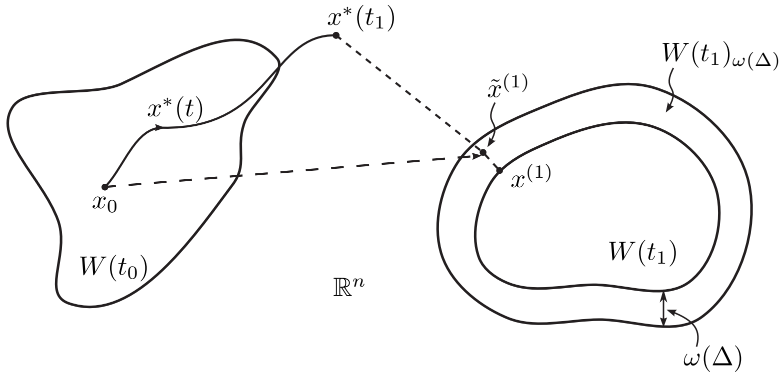


Рис. 3

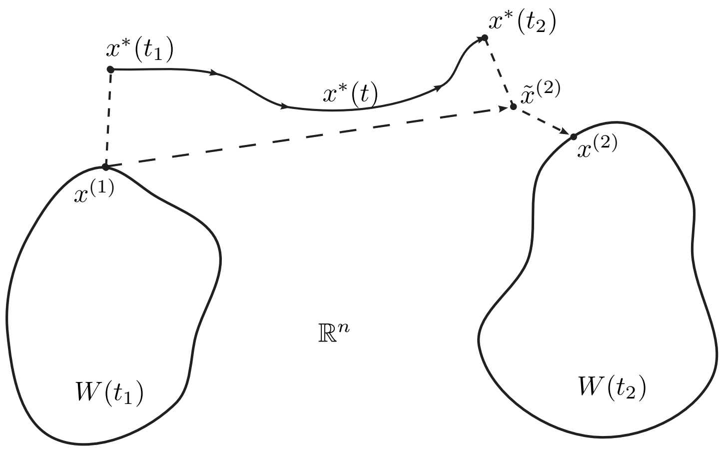


Рис. 4

Отсюда получаем оценку $\rho\big(x^*(t_1), W(t_1)\big) \leqslant 2\omega(\Delta)$.

На втором шаге $[t_1, t_2]$ оценим сверху величину ρ_2 (рис. 4). Имеем равенство

$$x^*(t_2) - x^{(2)} = (x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)}) + (\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}). \tag{2.12}$$

Первое слагаемое в правой части (2.12) имеет вид

$$x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)} = s^{(1)} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)}) \Big)\, dt,$$

где $s^{(1)} = x^*(t_1) - x^{(1)}$.

Справедливо неравенство

$$\|x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)}\| \leqslant \|s^{(1)}\| + \int\limits_{t_1}^{t_2} \big\| f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)}) \big\|\, dt. \tag{2.13}$$

Оценим сверху подынтегральное выражение в (2.13) при $t \in [t_1, t_2)$.

$$\begin{gathered} \|f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})\| \\ \leqslant \|f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^*(t_1), u^{(1)})\| + \|f(t_1, x^*(t_1), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})\| \\ \leqslant \omega^*((1+K)\Delta) + L\|s^{(1)}\|, \end{gathered} \tag{2.14}$$

где $L = L(D)$ — константа Липшица вектор-функции $f(t, x, u)$ в D (рис. 4).

Из неравенств (2.13) и (2.14) следует

$$\|x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)}\| \leqslant e^{L\Delta}\|s^{(1)}\| + \omega(\Delta). \tag{2.15}$$

Учитывая оценки (2.15) и $\|\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}\| \leqslant \omega(\Delta)$, получаем

$$\rho_2 = \|x^*(t_2) - x^{(2)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_1 + 2\omega(\Delta). \tag{2.16}$$

Отсюда следует оценка

$$\rho(x^*(t_2), W(t_2)) \leqslant e^{L\Delta}\rho_1 + 2\omega(\Delta). \tag{2.17}$$

Теперь переходим к следующему шагу $[t_2, t_3]$. На этом шаге оценим сверху величину ρ_3.

Справедливо равенство (рис. 5)

$$x^*(t_3) - x^{(3)} = \big(x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)}\big) + (\tilde{x}^{(3)} - x^{(3)}). \tag{2.18}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.18) имеет вид

$$x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)} = s^{(2)} + \int\limits_{t_2}^{t_3} \Big(f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, x^{(2)}, u^{(2)})\Big)\, dt,$$

где $s^{(2)} = x^*(t_2) - x^{(2)}$.

Учитывая при $t \in [t_2, t_3)$ оценку

$$\|f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, x^{(2)}, u^{(2)})\| \leqslant L\rho_2 + \omega^*((1+K)\Delta),$$

получаем

$$\|x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_2 + \omega(\Delta). \tag{2.19}$$

Учитывая оценки (2.19) и $\|\tilde{x}^{(3)} - x^{(3)}\| \leqslant \omega(\Delta)$, получаем

$$\rho_3 = \|x^*(t_3) - x^{(3)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_2 + 2\omega(\Delta). \tag{2.20}$$

Отсюда следует оценка

$$\rho\big(x^*(t_3), W(t_3)\big) \leqslant e^{L\Delta}\rho_2 + 2\omega(\Delta). \tag{2.21}$$

Далее переходим к следующему шагу $[t_3, t_4]$ разбиения Γ и так вплоть до последнего шага $[t_{N-1}, t_N]$. На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ верна оценка сверху величины ρ_{j+1} :

$$\rho_{j+1} \leqslant e^{L\Delta}\rho_j + 2\omega(\Delta), \tag{2.22}$$

где $j = \overline{1, N-1}$ (здесь дополнительно ввели $\rho_0 = 0$).

Из рекуррентной оценки (2.22) получаем, что все величины ρ_j малы при малых $\Delta > 0$, а также верна оценка

$$\rho_N \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} N\Delta 2\omega^*\big((1+K)\Delta\big),$$

из которой следует оценка

$$\rho\big(x^*(t_N), W(t_N)\big) \leqslant 2e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*\big((1+K)\Delta\big). \tag{2.23}$$

Принимая во внимание $W(t_N) = \{x^*_\vartheta\}$, получаем

$$\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \leqslant 2e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta). \tag{2.24}$$

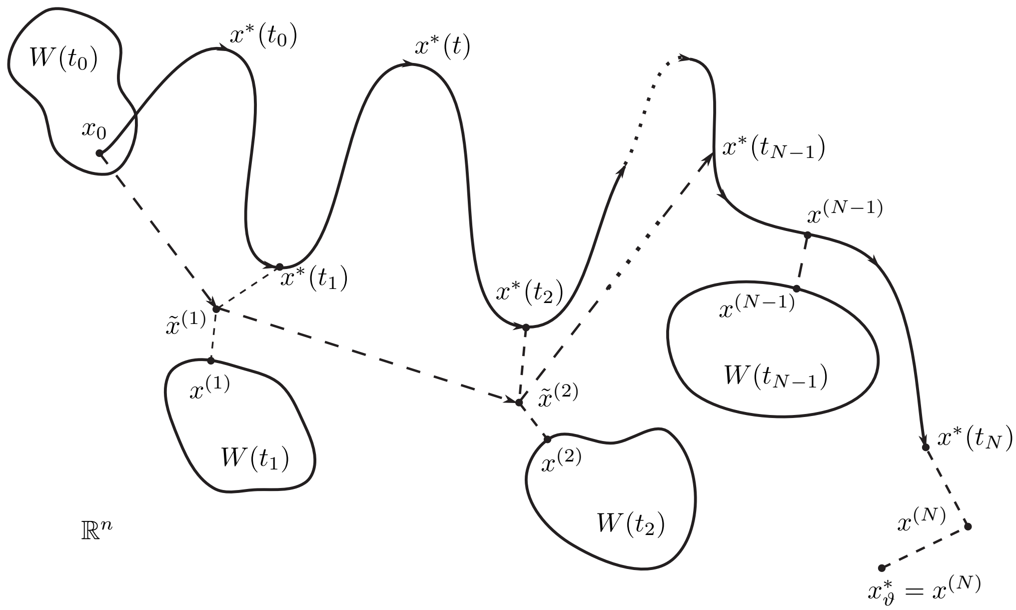


Рис. 5

Из оценки (2.24) следует, что при диаметре Δ разбиения Γ, стремящемся к нулю, правая часть оценки (2.24) стремится к нулю и, значит, $\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \to 0$. Следовательно, видим, что с измельчением диаметра Δ разбиения Γ кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, построенное по разбиению Γ, обеспечивает приведение движения $x^*(t)$ системы (1.1) в момент ϑ в сколь угодно малую окрестность точки x^*_ϑ.

На основе приведенных построений и выкладок сформируем следующее утверждение, представляющее один из основных результатов настоящей работы.

Теорема. *Пусть управляемая система* (1.1) *удовлетворяет условиям A, B, C, а начальная позиция* (t_0, x_0) *системы* (1.1) *такова, что* $M \cap X(\vartheta, t_0, x_0) \neq \varnothing$. *Пусть также* $x^*_\vartheta \in M \cap X(\vartheta, t_0, x_0)$ *и пусть* Γ *— конечное равномерное разбиение промежутка* $[t_0, \vartheta]$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *можно построить допустимое кусочно-постоянное управление* $u^*(t)$ *на* $[t_0, \vartheta]$, *отвечающее разбиению* Γ *и порождающее движение* $x^*(t)$, $x(t_0) = x_0$, *системы* (1.1), *которое удовлетворяет неравенству* $\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \leqslant \varepsilon$.

На рис. 5 представлено движение $x^*(t)$ системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$ и наборы точек $\tilde{x}^{(j)} \in W(t_j)_{\omega(\Delta)}$, $x^{(j)} \in W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$.

Набор $\{\tilde{x}^{(j)}\}$ точек $\tilde{x}^{(j)}$, содержащихся вблизи множеств $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, мы трактуем как своеобразного дискретного в $\mathbb{R}^n$ поводыря для движения $x^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ (рис. 5). Этот поводырь формировался по ходу дела по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, и параллельно с ним формировалось кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, которое сразу же использовалось при формировании движения $x^*(t)$ системы (1.1). Таким образом, управления в системе (1.1) формируются на основе копирования управления, порождающего движение поводыря. Этот поводырь $\{\tilde{x}^{(j)}, j = \overline{0, N}\}$, приходящий в момент $t_N = \vartheta$ в $\omega(\Delta)$-окрестность точки x^*_ϑ, притягивает и движение $x^*(t)$ системы (1.1) в момент ϑ в малую окрестность точки x^*_ϑ.

Итак, мы рассмотрели систему (1.1) в предположении, что для нее выполняется условие C. Была описана процедура управления системой (1.1), базирующаяся на копировании управления поводыря и обеспечивающая для начальных точек $x_0 \in W(t_0)$ сколь угодно точное наведение системы (1.1) в момент ϑ на целевое множество x^*_ϑ. Желаемая точность наведения системы (1.1) на x^*_ϑ обеспечивалась за счет измельчения шага разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$.

3. Задача о сближении системы (1.1) с компактом в $\mathbb{R}^n$. Алгоритм решения задачи в общем случае

В этом разделе мы рассматриваем систему (1.1) без предположения о выполнении условия C.

В рассматриваемом случае может оказаться, что множество достижимости $X(\vartheta, t_0, x_0)$ не замкнуто в $\mathbb{R}^n$, в то же время $M \cap X(\vartheta, t_0, x_0) = \varnothing$ и $M \cap Y(\vartheta, t_0, x_0) \neq \varnothing$. В сложившейся ситуации отсутствует управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, решающее задачу 2.1, однако существует управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, решающее задачу о сближении системы (1.1) с наперед заданной ε-окрестностью M_ε множества M $(\varepsilon > 0)$.

Учитывая это, будем формулировать задачу о сближении системы (1.1) с M как задачу о нахождении допустимого управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, обеспечивающего приведение движения $x^*(t)$ системы (1.1) в наперед заданную ε-окрестность M_ε множества M (т. е. $x^*(\vartheta) \in M_\varepsilon$).

Допустим, что д.в. (1.5), начальная позиция (t_0, x_0), целевое множество M и момент ϑ таковы, что $M^* = M \cap Y(\vartheta, t_0, x_0) \neq \varnothing$.

Как и в случае, когда выполнялось условие C, “прямому” времени $t \in [t_0, \vartheta]$ сопоставим “обратное” время $\tau \in [t_0, \vartheta]$ по формуле $\tau = t_0 + \vartheta - t$, а также сопоставим дифференциальному включению (1.5)

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x), \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

дифференциальное включение

$$\frac{dz}{dt} \in F^0(\tau, z), \quad \tau \in [t_0, \vartheta]; \tag{3.1}$$

здесь $F^0(\tau, z) = \mathrm{co}\{f^0(\tau, z, v)\colon v \in P\}$, $f^0(\tau, z, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, v)$, $(\tau, z, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Движения дифференциальных включений (1.5) и (3.1) двойственны: любому движению $x(t)$ д.в. (1.5) можно сопоставить движение $z(\tau)$ д.в. (3.1) с помощью равенства

$$z(\tau) = x(t), \quad \tau = t_0 + \vartheta - t, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Пусть x^*_ϑ — некоторая точка из M^*.

Так же как и в разд. 2, интегральной воронке $Z = Z(t_0, z_0,)$ $z_0 = x^*_\vartheta$, д.в. (3.1) сопоставим множество $W \subset D$ по формуле $W(t) = Z(\tau)$, $t = t_0 + \vartheta - \tau$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

Согласно определению W и свойству двойственности движений д.в. (1.5) и (3.1) получаем, что замкнутое множество W есть множество разрешимости для д.в. (1.5) в задаче о сближении движений этого д.в. с точкой x^*_ϑ в момент ϑ. А именно, W есть множество всех тех позиций $(t_*, x_*) \in D$, для каждой из которых существует движение $x^*(t)$, $x^*(t_*) = x_*$ д.в. (1.5) на $[t_*, \vartheta]$, удовлетворяющее равенству $x^*(\vartheta) = x^*_\vartheta$.

По построению W имеем, что W слабо инвариантно относительно д.в. (1.5) и $(t_0, x_0) \in W$. Так же, как и в случае, предполагающем выполнение условия C, воспользуемся здесь свойством слабой инвариантности множества W при конструировании управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, обеспечивающего приведение движения управляемой системы (1.1) из точки x_0 в наперед заданную ε-окрестность точки x^*_ϑ.

Опишем пошаговую процедуру управления с поводырем, реализующую управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$.

Задаем сначала разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ на оси t с равными шагами $\Delta_i = t_{i+1} - t_i = \Delta > 0$, где диаметр Δ разбиения Γ мал.

Рассмотрим это же самое разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ на оси τ.

Будем предполагать, что умеем вычислять множества $W(t_j) = Z(\tau_i)$, $j = \overline{0, N-1}$, $i = \overline{0, N}$, а множества $Y(t^*, t_*, x_*)$, $((t_*, x_*) \in D,\ t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta))$ можем вычислять лишь приближенно как множества $\tilde{Y}(t^*, t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F(t_*, x_*)$ и, в частности, умеем вычислять лишь приближенно множества $Y(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ как множества $\tilde{Y}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) = x^{(j)} + \Delta F(t_j, x^{(j)})$.

При этих допущениях приступим к непосредственному описанию пошаговой процедуры управления с поводырем.

Допустим, что, отправляясь в момент t_0 из начальной точки $x_0 \in W(t_0)$, мы довели построение движения $x^*(t)$ системы (1.1) при помощи пошаговой процедуры управления с поводырем вплоть до момента $t_j \in \Gamma$ $(t_j < \vartheta)$. Пусть в момент t_j система (1.1) находится в точке $x^*(t_j)$, имеется также точка $\tilde{x}^{(j)}$ поводыря, отвечающая моменту t_j, и ближайшая к ней точка $x^{(j)}$ на $W(t_j)$.

Так как W слабо инвариантно относительно д.в. (1.5) и $x^{(j)} \in W(t_j)$, то $W(t_{j+1}) \cap Y(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) \neq \varnothing$ и, кроме того, $d\big(Y(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}), \tilde{Y}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})\big) \leqslant \omega(\Delta)$.

Значит, справедливо соотношение $W(t_{j+1})_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{Y}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) \neq \varnothing$, из которого следует, что существует такой вектор $f^{(j)} \in F(t_j, x^{(j)})$, что $\tilde{x}^{(j+1)} = x^{(j)} + \Delta f^{(j)} \in W(t_{j+1})_{\omega(\Delta)}$.

Справедливо представление, согласно теореме Каратеодори ([16, с. 49–50]),

$$f^{(j)} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(t_j, x^{(j)}, u^{(k)}), \tag{3.2}$$

где $\alpha_k \geqslant 0$, $u^{(k)} \in P$, при $k = \overline{1, n+1}$ и $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$.

Заметим, что вектор $f^{(j)} \in F(t_j, x^{(j)})$ можно вычислить по такой схеме:

1. Вычисляем множество $W(t_{j+1})_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{Y}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$;
2. Выбираем точку $\tilde{x}^{(j)} \in W(t_{j+1})_{\omega(\Delta)} \cap \tilde{Y}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$;
3. Вычисляем вектор $f^{(j)}$ по формуле

$$f^{(j)} = \Delta^{-1}(\tilde{x}^{(j+1)} - x^{(j)}). \tag{3.3}$$

При заданном $f^{(j)}$ (3.3) рассматриваем (3.2) как уравнение относительно α_k, $u^{(k)}$, $k = \overline{1, n+1}$, удовлетворяющих к тому же условиям

$$\alpha_k \geqslant 0, \quad u^{(k)} \in P \text{ при } k = \overline{1, n+1} \text{ и } \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1.$$

Ясно, что для систем (1.1) общего вида это уравнение мы решить не в состоянии.

Допустим все же, что мы можем решить уравнение (3.2) приближенно, т. е. допустим, что удалось найти такие β_k, $v^{(k)}$, $k = \overline{1, n+1}$, которые удовлетворяют соотношениям $\beta_k \geqslant 0$, $v^{(k)} \in P$, $k = \overline{1, n+1}$ и $\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k = 1$, а вектор

$$\tilde{f}^{(j)} = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k f(t_j, x^{(j)}, v^{(k)}) \tag{3.4}$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{f}^{(j)} - f^{(j)}\| \leqslant æ^{(j)}, \tag{3.5}$$

где $æ^{(j)}$ — некоторая малая величина, выбор которой будет конкретизирован позже.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что $\beta_k > 0$, $k = \overline{1, n+1}$.

Введем числа $\Delta_k = \beta_k \Delta$, $k = \overline{1, n+1}$ и разбиение $\Gamma^{(j)} = \{t_1^{(j)} = t_j, t_2^{(j)}, \ldots, t_k^{(j)}, t_{k+1}^{(j)}, \ldots, t_{n+1}^{(j)}, t_{n+2}^{(j)} = t_{j+1}\}$ промежутка $[t_j, t_{j+1}]$; здесь $t_{k+1}^{(j)} = t_k^{(j)} + \Delta_k$, $k = \overline{1, n+1}$.

Введем также управление $u^*(t)$, $t \in [t_j, t_{j+1})$, постоянное на промежутках $[t_k^{(j)}, t_{k+1}^{(j)})$ разбиения $\Gamma^{(j)}$

$$u^*(t) = v^{(k)} \text{ при } t \in [t_k^{(j)}, t_{k+1}^{(j)}), \quad k = \overline{1, n+1}. \tag{3.6}$$

Пусть управление $u^*(t)$ (3.6) порождает движение $x^*(t)$ системы (1.1) на $[t_j, t_{j+1}]$. Для этого движения имеет место равенство

$$x^*(t_{j+1}) = x^*(t_j) + \int\limits_{t_j}^{t_j+1} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt.$$

Нас интересует, насколько далеко отстоят друг от друга точки $x^*(t_{j+1})$ и $\tilde{x}^{(j+1)}$. Для сравнения точек $x^*(t_{j+1})$ и $\tilde{x}^{(j+1)}$ выпишем разность

$$x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)} = \bigl(x^*(t_j) - x^{(j)}\bigr) + \Biggl(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt - \Delta f^{(j)}\Biggr)$$

$$= \bigl(x^*(t_j) - x^{(j)}\bigr) + \Biggl(\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, x^*(t), u^*(t))\, dt - \Delta \tilde{f}^{(j)}\Biggr) + \Delta h^{(j)}, \tag{3.7}$$

где обозначено $h^{(j)} = \tilde{f}^{(j)} - f^{(j)}$, так что $\|h^{(j)}\| = \|\tilde{f}^{(j)} - f^{(j)}\| \leqslant æ^{(j)}$.

Рассмотрим интеграл, входящий во вторые круглые скобки в правой части (3.7), и преобразуем его:

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f\bigl(t, x^*(t), u^*(t)\bigr)\, dt = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f\bigl(t_j, x^*(t_j), u^*(t)\bigr)\, dt + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigl(f\bigl(t, x^*(t), u^*(t)\bigr) - f\bigl(t_j, x^*(t_j), u^*(t)\bigr)\Bigr)\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_{t_k^{(j)}}^{t_{k+1}^{(j)}} f\bigl(t_j, x^*(t_j), u^*(t)\bigr)\, dt + I^{(j)}(\Delta),$$

где $I^{(j)}(\Delta) = \displaystyle\int_{t_j}^{t_{j+1}} \Bigl(f\bigl(t, x^*(t), u^*(t)\bigr) - f\bigl(t_j, x^*(t_j), u^*(t)\bigr)\Bigr)\, dt$.

Справедливы равенства

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f\bigl(t, x^*(t), u^*(t)\bigr)\, dt = \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^{(j)} f\bigl(t_j, x^*(t_j), v^{(k)}\bigr) + I^{(j)}(\Delta),$$

$$\Delta \tilde{f}^{(j)} = \Delta\Bigl(\sum_{k=1}^{n+1} \beta_k f(t_j, x^{(j)}, v^{(k)})\Bigr) = \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^{(j)} f(t_j, x^{(j)}, v^{(k)}).$$

Учитывая эти равенства, запишем разность $x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)}$

$$x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)} = \bigl(x^*(t_j) - x^{(j)}\bigr) + \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^{(j)} \Bigl(f\bigl(t_j, x^*(t_j), v^{(k)}\bigr) - f\bigl(t_j, x^{(j)}, v^{(k)}\bigr)\Bigr) + \Delta h^{(j)} + I^{(j)}(\Delta).$$

Введем, как и в разд. 2, обозначение $\rho_{j+1} = \|x^*(t_{j+1}) - x^{(j+1)}\|$. Для величины $x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)}$ из последнего представления вытекает оценка

$$\|x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)}\| \leqslant \|x^*(t_j) - x^{(j)}\| + \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_k^{(j)} \bigl\|f\bigl(t_j, x^*(t_j), v^{(k)}\bigr) - f(t_j, x^{(j)}, v^{(k)})\bigr\|$$

$$+ \Delta\|h^{(j)}\| + \|I^{(j)}(\Delta)\| \leqslant (1+\Delta L)\rho_j + \Delta æ^{(j)} + \omega(\Delta).$$

Положив $æ^{(j)} = \omega^*((1+K)\Delta)$, $j = \overline{0,N}$, получаем

$$\|x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_j + 2\omega(\Delta). \tag{3.8}$$

Учитывая оценки (3.8) и $\|\tilde{x}(t_{j+1}) - x^{(j+1)}\| \leqslant \omega(\Delta)$, получаем

$$\rho_{j+1} \leqslant \|x^*(t_{j+1}) - \tilde{x}^{(j+1)}\| + \|\tilde{x}(t_{j+1}) - x^{(j+1)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_j + 3\omega(\Delta); \tag{3.9}$$

здесь $x^{(j+1)}$ — ближайшая на $W(t_{j+1})$ точка к $\tilde{x}(t_{j+1})$.

Оценка (3.9) справедлива при любом $j = \overline{0, N-1}$. Из этой рекуррентной оценки следует

$$\rho_N \leqslant 3e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta). \tag{3.10}$$

Принимая во внимание $W(t_N) = \{x^*_\vartheta\}$, получаем из (3.10)

$$\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \leqslant 3e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta). \tag{3.11}$$

Из оценки (3.11) следует, что при диаметре Δ разбиения Γ, убывающем к нулю, правая часть оценки стремится к нулю, и, следовательно, $x^*(\vartheta) \to x^*_\vartheta$. Вместе с тем показано, что, выбрав $\varepsilon > 0$, мы можем так измельчить диаметр Δ разбиения Γ, что управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ в процедуре управления с поводырем, отвечающей этому разбиению, обеспечит для движения $x^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ неравенство $\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \leqslant \varepsilon$. Для этого достаточно выбрать Δ удовлетворяющим неравенству

$$\omega^*((1+K)\Delta) \leqslant e^{-L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)^{-1}\frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Итак, и в случае, когда система (1.1) не удовлетворяет условию C, мы описали подробно пошаговую процедуру управления с поводырем, которая реализует управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, решающее задачу о сближении системы (1.1) с точкой x^*_ϑ с наперед заданной точностью.

Теперь обратимся к исходной задаче о сближении — задаче 2.1. Эту задачу можно решать по схеме, аналогичной той, которая применялась при построении решения задачи о сближении системы (1.1) с точкой x^*_ϑ. Такую схему мы здесь вкратце опишем.

Будем предполагать, что на систему (1.1) наложены лишь условия A и B. При этом возможность решения задачи о сближении системы (1.1) с множеством M мы понимаем как возможность построения для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ допустимого управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающего движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$, системы (1.1), для которого $x^*(\vartheta) \in M_\varepsilon$.

В этом случае, следуя приведенным ранее схемам, сопоставим дифференциальному включению (1.5), отвечающему "прямому" времени t, дифференциальное включение (3.3), отвечающее "обратному" времени τ.

Обозначим символом $Z = Z(t_0, M)$ интегральную воронку д.в. (3.3) на $[t_0, \vartheta]$ с начальным множеством $Z(t_0) = M \subset \mathbb{R}^n$. Напомним, что $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Компактное множество $Z \subset D$ инвариантно относительно д.в. (3.3).

В "прямом" времени t множеству Z отвечает компактное множество $W \subset D$ — множество разрешимости задачи о сближении с M, определяемое равенством $W(t) = Z(\tau)$, $t = t_0 + \vartheta - \tau$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

Множество W слабо инвариантно относительно д.в. (1.5), т.е. для любых t_*, t^* ($t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$) и $(t_*, x_*) \in W$ имеет место

$$W(t^*) \cap X(t^*, t_*, x_*) \neq \varnothing.$$

Свойством слабой инвариантности множества W воспользуемся при построении разрешающего управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$.

Введем разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ на оси τ. Допустим, что, продвигаясь последовательно по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ, мы вычислили сечения $Z(\tau_i)$ интегральной воронки $Z = Z(t_0, M)$. В множестве W этим сечениям соответствуют сечения $W(t_j)$, $t_j = t_0 + \vartheta - \tau_i$ $i = \overline{0, N-1}$. Так как W слабо инвариантное относительно д.в. (1.5), то для любых точек $(t_j, x^{(j)}) \in W, j = \overline{0, N-1}$ имеет место

$$W(t^{j+1}) \cap X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) \neq \varnothing.$$

Как и в случае задачи о сближении системы (1.1) с точкой x^*_ϑ, последнее соотношение обеспечивает конструирование для точки $(t_0, x_0) \in W$ кусочно-постоянного управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приводящего движение $x^*(t)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) в наперед заданную ε-окрестность множества M в момент ϑ. Такое приведение обеспечивается при помощи выбора разбиения Γ с достаточно малым диаметром $\Delta > 0$.

Таким образом, для точек $(t_0, x_0) \in W$ мы можем добиться в принципе сколь угодно точного попадания движения системы (1.1) на целевое множество M за счет выбора разбиения Γ, обладающего достаточно малым диаметром Δ. Тем не менее ясно, что далеко не для всякого $\varepsilon > 0$ удастся на практике (с помощью существующих ЭВМ) реализовать соответствующее управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$. Так, для выбора $\Delta > 0$, удовлетворяющего неравенству (3.12), нам необходимо, во-первых, найти функцию $\omega^*(\delta)$, $\delta > 0$, и, во-вторых, выбрать Δ удовлетворяющим неравенству (3.12). Это Δ может оказаться из-за малости ε и числа $e^{-L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)^{-1}$ настолько малым, что повлечет за собой необходимость вычисления очень большого числа множеств $W(t_j)$. Структура множеств $W(t_j)$ может оказаться настолько сложной, а их число настолько большим, что возможности ЭВМ не позволят вычислить эти множества за приемлемое время.

4. Применение алгоритмов приближенного вычисления решений к конкретным задачам о сближении

В этом разделе рассмотрим конкретную задачу о сближении с целью в фазовом пространстве в фиксированный момент времени. Мы приведем здесь постановку задачи и графическое представление результатов приближенных вычислений ее решения. Особенностью этой задачи является то, что в ней используются трехмерные функции управления $u(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Пример. Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. Пусть задано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, поведение которого описывается уравнениями Эйлера

$$\left\{ \begin{array}{rcl} J_1\dot\omega_1 &=& (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1, \\ J_2\dot\omega_2 &=& (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2, \\ J_3\dot\omega_3 &=& (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3; \end{array} \right. \tag{4.1}$$

здесь ω_1, ω_2 и ω_3 — компоненты вектора угловой скорости вдоль главных осей; u_1, u_2 и u_3 — моменты, приложенные вокруг главных осей, рассматриваемые как компоненты управления $u \in \mathbb{R}^3$, воздействующего на твердое тело; J_1, J_2 и J_3 — главные моменты инерции.

Здесь рассмотрим конкретные уравнения, в которых $J_1 = 1$, $J_2 = 2$, $J_3 = 3$ и ограничение на управление u есть куб $P = \{u = (u_1, u_2, u_3)\colon \max\limits_{i=\overline{1,3}} |u_i| \leqslant 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Перейдя от переменных ω_1, ω_2, ω_3 в уравнении (4.1) к записи в переменных x_1, x_2 и x_3 и учитывая приведенные значения J_1, J_2, J_3, получим

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot x_1 &=& -x_2x_3 + u_1, \\ 2\dot x_2 &=& 2x_3x_1 + u_2, \\ 3\dot x_3 &=& -x_1x_2 + u_3; \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Считаем, что задано целевое множество $M = \{x_f\}$, где $x_f = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

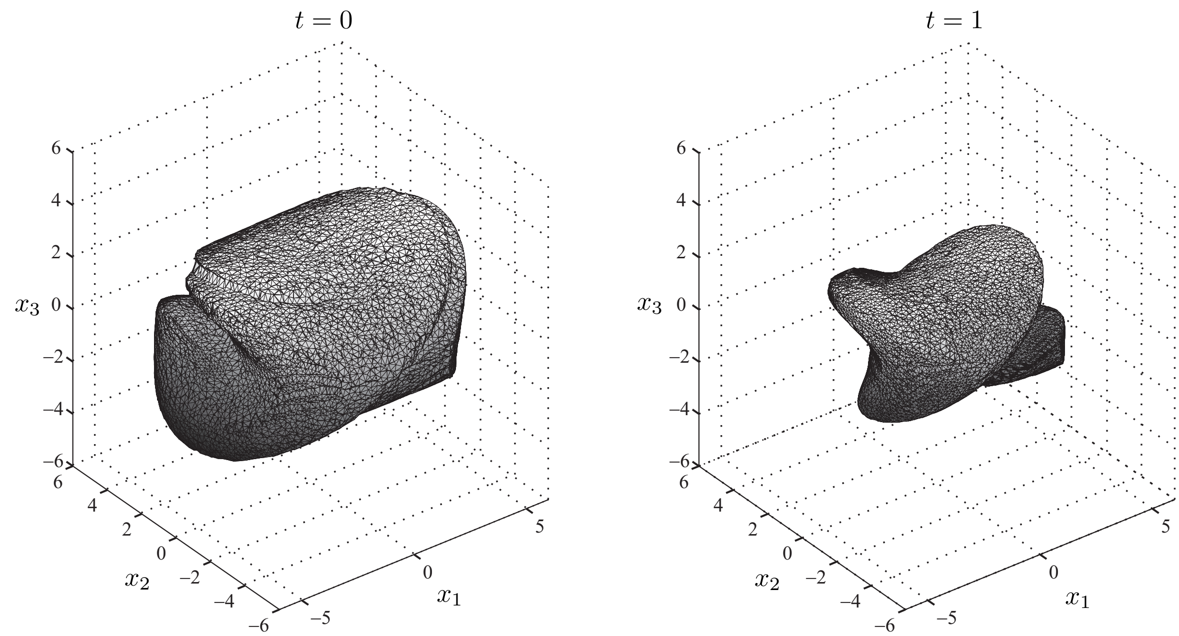


Рис. 6

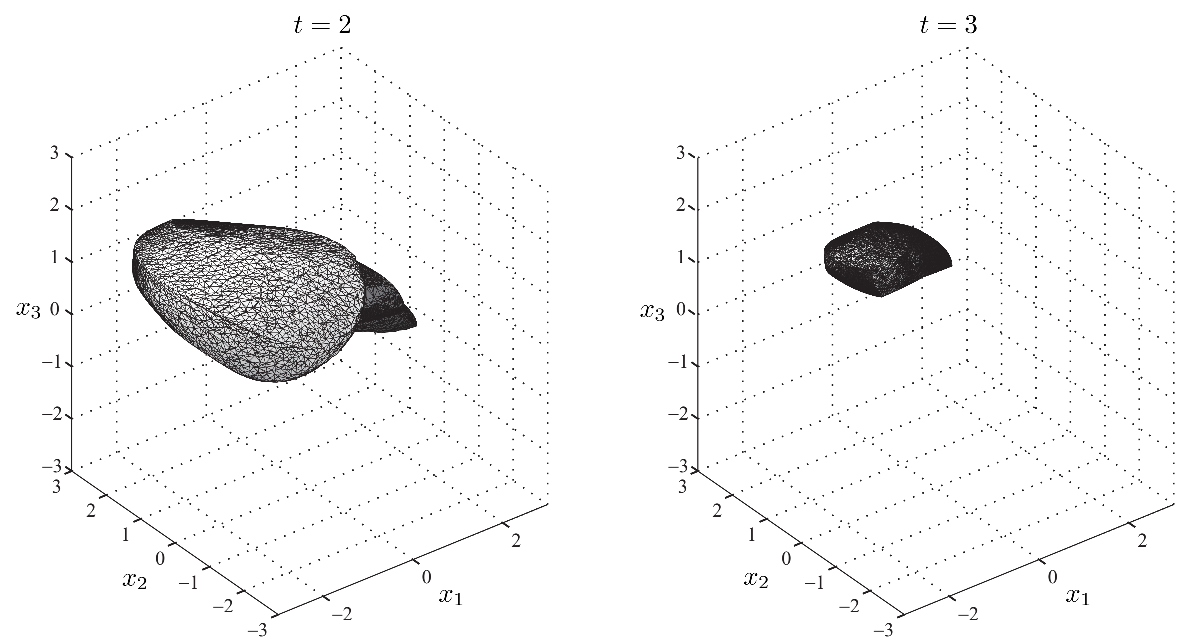


Рис. 7

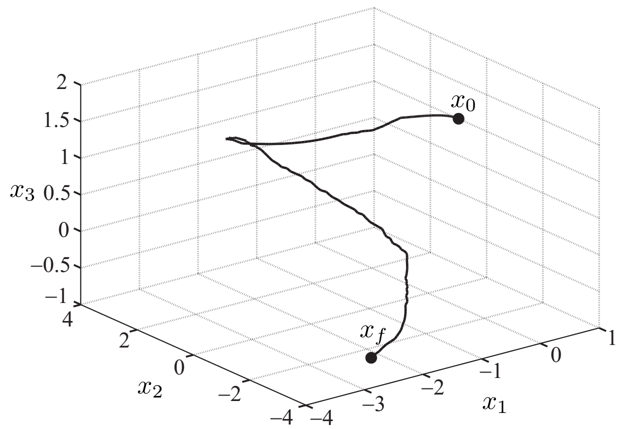


Рис. 8

Рис. 9

Задача состоит в том, чтобы для управляемой системы (4.2) выделить в пространстве $\mathbb{R}^3$ множество $W(t_0)$ начальных точек x_0, из которых возможно приведение управляемой системы (4.2) в момент $\vartheta = 5$ на целевое множество M, и для трех произвольных точек $x_0 \in W(t_0)$ выделить управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ и порожденные ими движения $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$, удовлетворяющие включению $x^*(\vartheta) \in M$, т. е. равенству $x^*(\vartheta) = x_f$.

Зададим конечное равномерное разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta] = [0, 4]$ с диаметром $\Delta = 0.02$. Пятясь во времени по моментам t_j разбиения Γ от целевого множества $W(\vartheta) = M$, вычислим последовательно аппроксимации $\tilde{W}(t_j)$, $j = \overline{N-1, 0}$, множеств $W(t_j)$ — сечений множества разрешимости W в этой задаче о сближении.

Аппроксимации $\tilde{W}(t_j)$ мы представляем как трехмерные полиэдры, составленные из трехмерных симплексов. Затем, выбрав какую-либо начальную точку $x_0 \in \tilde{W}(t_0)$, построим, последовательно продвигаясь по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ и порожденное им движение $x^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приходящее в момент ϑ в некоторую малую ε-окрестность M_ε множества M.

В этой задаче, по-видимому, из-за того, что правая часть нелинейна по фазовым переменным, ε-окрестность M_ε множества M оказывается не очень малой.

На рис. 6, 7 изображены аппроксимации $\tilde{W}(t_j)$, отвечающие моментам $t_0 = 0$, $t_{50} = 1$, $t_{100} = 2$, $t_{150} = 3$. Моменту $t_{200} = 4$ отвечает целевое множество $M = \{x_f\}$, $x_f = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, которое мы не изобразили. Последовательность рисунков соответствует “обратному” времени.

На рис. 8, 9 для начального условия в задаче о сближении — точки $(-2.1805, -2.5276, -0.9896)$, содержащейся в $\tilde{W}(t_0)$, построено движение твердого тела, приходящее на цель M, и порождающее его управление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Красовский Н.Н.** Лекции по теории управления. Вып. 4: Основная игровая задача наведения. Поглощение цели. Экстремальная стратегия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1970. 96 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх, I // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, №4. С. 738–741.
5. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhauser, 1997.
6. **Kurzhanski A.A., Varaiya P.** Ellipsoidal toolbox. 2005. URL: http://code.google.com/p/ellipsoids.
7. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
8. **Гусев М.И.** Оценки множества достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №4. С. 82–94.
9. **Филиппова Т.Ф.** Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №1. С. 223–232.
10. **Костоусова Е.К.** Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, №4. С. 134–145.
11. **Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Построение интегральных воронок дифференциальных включений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34, № 7. С. 965–977.
12. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппрооксимации областей достижимости управляемых систем // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 179–187.
13. **Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 4. С. 23–39. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
14. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
15. **Никольский М.С.** Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вестн. МГУ. 1987. №4. С. 31–34. (Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика.)
16. **Базара М., Шетти К.** Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
17. **Brokett R.W.** Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential Geometric Control Theory / Eds. R.W. Brokett [et al.]. Boston: Birkhauser, 1983. P. 181–191.
18. **Astolfi A., Rapaport A.** Robust stabilization of the angular velocity of a rapid body // Systems and control letters. 1998. Vol. 34. P. 257–264.
19. **Никольский М.С.** Об оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокетта // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 96, №11. С. 1501–1505.
20. **Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** Построение множества достижимости интегратора Брокетта // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 5. С. 707–724.

Поступила 15.09.2012

Ушаков Владимир Николаевич
член-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Матвийчук Александр Ростиславович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: matv@uran.ru

Ушаков Андрей Владимирович
мл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: aushakov.pk@gmail.com

Паршиков Григорий Викторович
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: grigory.parshikov@uran.ru

Том 19 № 1 2013

УДК 517.911.5

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ С ПОЗИЦИОННЫМИ РАЗРЫВНЫМИ И ИМПУЛЬСНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ[1]

И. А. Финогенко, Д. В. Пономарев

В работе изучаются скользящие и импульсно-скользящие режимы управляемых систем, представленных в форме дифференциальных включений. Методом эквивалентного управления получено дифференциальное включение, которому удовлетворяет предельный импульсно-скользящий режим. Получены условия, при которых этот режим является обычным скользящим режимом для некоторой системы с разрывными позиционными управлениями релейного типа. Рассмотрен пример.

Ключевые слова: дифференциальное включение, разрывное позиционное управление, скользящий режим, импульсно-скользящий режим.

I. A. Finogenko, D. V. Ponomariov. On differential inclusions with positional discontinuous and pulse controls.

The sliding and pulse sliding modes of the controlled systems submitted in the form of differential inclusions are studied. By the method of equivalent control the differential inclusion to which satisfies a limiting pulse sliding mode is obtained. Conditions while this mode is a usual sliding mode for some system with discontinuous positional controls of relay type are received. The example is considered.

Keywords: differential inclusion, discontinuous positional control, sliding mode, impulse sliding mode.

Введение

В работах [1; 2] для управляемого объекта

$$\dot{x} = f(t, x) + v(t) + u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (t \in I = [t_0, \theta]), \tag{0.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — состояние объекта, $v(\cdot)$ — возмущение, управляющее воздействие u определено как некоторый абстрактный оператор $u \leftarrow p(t, x)\delta_t$, сопоставляющий каждому текущему моменту времени t и состоянию объекта x импульс $p(t, x)\delta_t$. Здесь вектор-функция $p(t, x)$ — интенсивность импульса, δ_t — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени t. Выражение $p(t, x)\delta_t$ ("бегущий импульс", см. также [3, с. 215]) как обобщенная функция смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе (0.1) функционирует импульсное позиционное управление, подразумевающее дискретную реализацию "бегущего импульса" в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках $h\colon t_0 < t_1 <, \ldots, t_N = \theta$ разбиения отрезка I. Результатом такой последовательной коррекции является разрывная кривая $x^h(\cdot)$, называемая ломаной Эйлера, по определению совпадающая на промежутках $(t_k, t_{k+1}]$ с решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x) + v(t), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big).$$

Множество всех ломаных Эйлера является сетью, направленной по убыванию $d(h) = \max\{\Delta t_k : k = \overline{0, N-1}\}$.

Нас будет интересовать случай, когда в результате действия корректирующего импульса в момент времени t_k предельная справа точка $(t_k, x(t_k + 0))$ интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии

$$S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sigma^j(t, x) = 0,\ j = \overline{1, m}\}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований № 17 Президиума РАН, СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и РФФИ (проект 10-01-00132а).

Тогда сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а траектории $r(\cdot)$, предельные для равномерно сходящихся на промежутке $(t_0, \theta]$ последовательностей ломаных Эйлера, — идеальными (предельными) импульсно-скользящими режимами. При весьма общих предположениях оказывается, что начиная с момента $t_0 + 0$ выполняется $p(t, r(t)) = 0$ [1, лемма 2.1] (см. также разд. 1 данной статьи), а при некоторых дополнительных условиях выполняется также $(t, r(t)) \in S$, $t \in (t_0, \theta]$, что означает наличие для предельных режимов эффекта “скольжения” по многообразию S. В [1, теорема 2.1] методом эквивалентного управления [4] получено дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет любой идеальный импульсно-скользящий режим $r(\cdot)$.

Отметим, что процессы типа “скольжения” возникают во многих задачах теории управления, в том числе оптимального управления. Но в большей степени они (как и метод эквивалентного управления) являются атрибутом управляемых систем с разрывными позиционными управлениями (обратными связями) и теории разрывных систем в целом. Достаточно хорошо исследованы системы вида

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)\tilde{u}(t, x), \tag{0.2}$$

где $B(t, x)$ — матрица размерности $n \times m$, и векторное управление $\tilde{u}(t, x) = (\tilde{u}_1(t, x), \ldots, \tilde{u}_m(t, x))$, возникающее в результате решения задач синтеза, оказывается разрывным на поверхностях $S_j = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sigma^j(t, x) = 0\}$, $j = \overline{1, m}$. Если для решения $x(t)$ уравнения (0.2), определенного в каком-либо смысле методами теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [5], выполняется условие $(t, x(t)) \in S$, то в общепринятой терминологии это решение называется скользящим режимом. Он является основным режимом функционирования разрывной управляемой системы и позволяет решать такие задачи, как стабилизация, полная управляемость, слежение (движение по наперед заданной траектории). Этим вопросам посвящено огромное число работ.

Возникает естественный вопрос об описании идеального импульсно-скользящего режима дифференциальным уравнением вида (0.2) с разрывными управлениями. Данная работа в основном направлена на решение именно этого вопроса (разд. 3) в более общей постановке

$$\dot{x} \in F(t, x) + B(t, x)\tilde{u}(t, x), \tag{0.3}$$

где $F(t, x)$ — многозначная функция с выпуклыми компактными значениями. Требуется определить $n \times m$-матрицу $B(t, x)$ и найти такое управление $\tilde{u}(t, x)$, чтобы идеальный импульсно-скользящий режим системы

$$\dot{x} \in F(t, x) + u \tag{0.4}$$

являлся скользящим режимом системы (0.3) на множестве S и реализовывался на некотором эквивалентном управлении.

Относительно последнего в задаче (0.3) имеется особенность, заключающаяся в том, что эквивалентное управление возникает в виде многозначной функции (см. разд. 2). Поэтому в данной работе решение (в том числе и скользящий режим) для включения (0.3) понимается как пара функций $(x(t), \tilde{u}(t))$, где $x(t)$ — абсолютно непрерывная функция, $\tilde{u}(t)$ — измеримая функции, для которых почти всюду выполняется включение $\tilde{u}(t) \in \widetilde{U}(t, x(t))$ с некоторым допустимым в каждой точке (t, x) множеством управлений $\widetilde{U}(t, x)$.

Многозначность в правых частях включений (0.3), (0.4) может возникать различными путями. Например, если система находится под действием возмущений $v = v(t, x)$, точное значение которых в рамках заданных ограничений неизвестно. Или же, если функция $f(t, x)$ в системе (0.2) является разрывной по (t, x) и в точках разрыва доопределяется в смысле А.Ф. Филиппова [5]. Системы, в которых одновременно присутствуют многозначные возмущения или разрывные неуправляемые характеристики (например, сухое трение для механических систем) и разрывные обратные связи, ранее не изучались. Этим вопросам посвящен разд. 2 данной статьи.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Мы будем использовать некоторые обозначения и терминологию из [1; 2]. На отрезке числовой прямой $I = [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}$ зададим некоторое разбиение $h\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ и через $d(h)$ обозначим максимальное расстояние между двумя соседними узлами этого разбиения. Пусть $p\colon I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторая непрерывная функция и $x^h\colon I \to \mathbb{R}^n$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

(A1) $x^h(t)$ абсолютно непрерывна на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$;

(A2) $x^h(t_0) = x_0$, $x^h(t_k + 0) = x^h(t_k) + p\bigl(t_k, x^h(t_k)\bigr)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Множество всех разбиений h отрезка I обозначим через H. Последовательность функций $\{x^{h_i}(\cdot)\}$, $h_i \in H$, назовем конфинальной, если $d(h_i) \to 0$ при $i \to \infty$.

Из (A1) и (A2) следует, что имеет место равенство

$$x^h(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{x}^h(\lambda) d\lambda + \sum_{k=0}^{m_t} p\bigl(t_k, x^h(t_k)\bigr) \tag{1.1}$$

для всех $t \in J = (t_0, t_0 + T]$, где $\dot{x}^h(t)$ — производная функции $x^h(t)$, определенная почти всюду на I, m_t — номер узла разбиения h, ближайшего слева к точке $t \in J$ и не совпадающего с t, $m_{t_0} = 0$. Из (1.1) вытекает, что при условии $t_0 < \tau < t \le t_0 + T$ выполняется

$$x^h(t) - x^h(\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \dot{x}^h(\lambda) d\lambda + \sum_{k=m_\tau+1}^{m_t} p\bigl(t_k, x^h(t_k)\bigr). \tag{1.2}$$

В случае, когда промежуток $[\tau, t)$ не содержит узлов разбиения, сумма в правой части (1.2) равна 0.

Лемма 1. *Пусть функции $p(t, x)$ и $x^h(t)$ удовлетворяют следующим условиям:*

$$\|p(\tau, y) - p(t, x)\| \le L\bigl(|\tau - t| + \|y - x\|\bigr) \tag{1.3}$$

для всех $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$;

$$\|\dot{x}^h(t)\| \le C(t)\bigl(1 + \|x^h(t)\|\bigr) \tag{1.4}$$

для почти всех $t \in I$ и всех разбиений $h \in H$, где $C(t)$ — суммируемая по Лебегу функция;

$$p\bigl(t_k, x^h(t_k + 0)\bigr) = 0 \tag{1.5}$$

для всех $k = \overline{0, N-1}$ и всех разбиений $h \in H$. Тогда существует константа M такая, что для всех разбиений $h \in H$ и всех $t \in I$ выполняется

$$\|x^h(t)\| \le M. \tag{1.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $t \in [t_0, t_1]$ из неравенства (1.4) получаем

$$\|x^h(t)\| \le a + \int\limits_{t_0}^{t} C(\lambda)\|x^h(\lambda)\| d\lambda, \tag{1.7}$$

где $a = \|x_0\| + \|p(t_0, x_0)\| + \int_{t_0}^{t_1} C(\lambda) d\lambda$. Оценим значение функции $p\bigl(t, x^h(t)\bigr)$ для произвольного узла разбиения $t_k \ne t_0$. Из условий (1.5) и (1.3) вытекает

$$\|p\bigl(t_k, x^h(t_k)\bigr)\| = \|p\bigl(t_k, x(t_k)\bigr) - p\bigl(t_{k-1}, x^h(t_{k-1} + 0)\bigr)\| \le L\bigl((t_k - t_{k-1}) + \|x^h(t_k) - x^h(t_{k-1} + 0)\|\bigr).$$

Тогда с учетом (1.4) получаем следующую оценку:

$$\|p\big(t_k,x^h(t_k)\big)\|\le L\left((t_k-t_{k-1})+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\dot x^h(\lambda)\|d\lambda\right)\le L\left((t_k-t_{k-1})+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}C(\lambda)\big(1+\|x^h(\lambda)\|\big)d\lambda\right). \tag{1.8}$$

Воспользовавшись представлением (1.1) и неравенствами (1.8), (1.4), получаем

$$\|x^h(t)\|\le\|x_0\|+\|p(t_0,x_0)\|+\int\limits_{t_0}^{t}\|\dot x^h(\lambda)\|d\lambda+\sum_{k=1}^{m_t}\|p\big(t_k,x^h(t_k)\big)\|\le\|x_0\|+\|p(t_0,x_0)\|$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}C(\lambda)\big(1+\|x^h(\lambda)\|\big)d\lambda+L\sum_{k=1}^{m_t}\left((t_k-t_{k-1})+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}C(\lambda)\big(1+\|x^h(\lambda)\|\big)d\lambda\right)$$

$$\le b+(1+L)\int\limits_{t_0}^{t}C(\lambda)\|x^h(\lambda)\|d\lambda$$

для любого $t\in(t_1,t_1+T]$, где $b=\|x_0\|+\|p(t_0,x_0)\|+LT+(1+L)\int_{t_0}^{t_0+T}C(\lambda)d\lambda$. Объединяя последнее неравенство и неравенство (1.7) и используя теорему 1.1 из [6, с. 37], получаем оценку (1.6) с константой $M=be^{\int\limits_{t_0}^{t_0+T}C(\lambda)d\lambda}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполняются все условия леммы* 1. *Тогда из любой конфинальной последовательности функций* $\{x^{h_i}(t)\}$ *можно выделить подпоследовательность, равномерно на отрезке* I *сходящуюся к некоторой абсолютно непрерывной на промежутке* $J=(t_0,t_0+T]$ *функции, и любой равномерный на промежутке* J *предел* $r(t)$ *конфинальной последовательности функций удовлетворяет*

$$p\big(t,r(t)\big)=0,\ r(t_0+0)=x_0+p(t_0,x_0). \tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е 1. Доказательство этой леммы опирается на обобщение теоремы Арцела, которое установлено в лемме из [7, с. 309][2]. Отметим, что в работах [1; 2] доказательство теоремы 1 о выделении из конфинальной последовательности равномерно сходящейся подпоследовательности ссылается на это обобщение без каких-либо необходимых выкладок. Представленное ниже доказательство леммы 2 содержит проверку условий применимости леммы из [7, с. 309].

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Пусть τ,t — произвольные моменты времени такие, что $t_0<\tau<t\le t_0+T$ и $A(t)=\int\limits_{t_0}^{t}C(\lambda)d\lambda$. Из (1.4) и (1.2) вытекает

$$\|x^{h_i}(t)-x^{h_i}(\tau)\|\le\int\limits_{\tau}^{t}C(\lambda)\big(1+\|x^{h_i}(\lambda)\|\big)d\lambda+\sum_{k=m_\tau+1}^{m_t}\|p\big(t_k,x^{h_i}(t_k)\big)\|.$$

[2]Лемма [7, с. 309]. Пусть на отрезке $a\le t\le b$ задана последовательность точек t_1, t_2,... и бесконечное множество n-мерных вектор-функций, модули которых ограничены одним и тем же числом c. Пусть для любого $\varepsilon>0$ существуют такие $m(\varepsilon)$ и $\delta(\varepsilon)>0$, что на каждом интервале длины меньше $\delta(\varepsilon)$, не содержащем точек $t_1,t_2,\dots,t_{m(\varepsilon)}$, колебание каждой из данных функций меньше ε. Тогда из данного множества функций можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся к вектор-функции, непрерывной при $t\ne t_1$, t_2, ... и могущей иметь разрывы только первого рода при $t=t_1$, t_2, ...; величина разрыва в точках t_m, $m>m(\varepsilon)$, не превосходит ε (безразлично, определены или нет данные функции в точках t_m).

Тогда в силу оценок (1.8) и (1.6) получаем

$$\|x^{h_i}(t)-x^{h_i}(\tau)\| \le (1+M)(A(t)-A(\tau)) + L\sum_{k=m_\tau+1}^{m_t}\left((t_k-t_{k-1})+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} C(\lambda)\big(1+\|x^h(\lambda)\|\big)d\lambda\right)$$
$$\le (1+L)(1+M)(A(t)-A(\tau)) + L(t-\tau) + L(\tau-t_{\tau,h_i}) + L(1+M)(A(\tau)-A(t_{\tau,h_i}))$$
$$\le K(A(t)-A(\tau)) + L(t-\tau) + R(t,t_{\tau,h_i}), \tag{1.10}$$

где $K=(1+L)(1+M)$, $R(\tau,t_{\tau,h_i}) = L(\tau-t_{\tau,h_i})+L(1+M)(A(\tau)-A(t_{\tau,h_i}))$, t_{τ,h_i} — ближайший слева к точке τ узел разбиения h_i. В случае отсутствия узлов разбиения h_i на промежутке $[\tau,t)$ имеет место оценка

$$\|x^{h_i}(t)-x^{h_i}(\tau)\| \le \big(A(t)-A(\tau)\big)(1+M). \tag{1.11}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда в силу абсолютной непрерывности функции $A(t)$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $\tau,t\in J$, удовлетворяющих неравенству $|t-\tau|<\delta(\varepsilon)$, выполняется $K\big(A(t)-A(\tau)\big)+L(t-\tau)<\varepsilon/2$. Так как $\tau-t_{\tau,h_i}\le d(h_i)$, то с учетом конфинальности последовательности $\{x^{h_i}(\cdot)\}$ и абсолютной непрерывности функции $A(t)$ заключаем: существует такое натуральное $k(\varepsilon)$, что для любого натурального $i\ge k(\varepsilon)$ и для любого $t\in J$ имеет место неравенство $R(\tau,t_{\tau,h_i})<\varepsilon/2$. Таким образом из (1) вытекает, что при условии $i\ge k(\varepsilon)$ выполняется оценка

$$\|x^{h_i}(t)-x^{h_i}(\tau)\|<\varepsilon$$

для любых $\tau,t\in J$, удовлетворяющих неравенству $|t-\tau|<\delta(\varepsilon)$.

Через $\tilde h=\{t_j\}$ обозначим последовательность, содержащую совокупность всех узлов разбиений h_i, $i\in\mathbb{N}$, занумерованную в произвольном порядке. Так как множество функций $\{x^{h_i}(\cdot)\colon i\in\mathbb{N}, i<k(\varepsilon)\}$ из конфинальной последовательности $\{x^{h_i}(\cdot)\}$ конечно, то конечно и множество $G(\varepsilon)$ всех узлов разбиений отрезка I для этих функций, при этом $t_0\in G(\varepsilon)$. Тогда существует такое натуральное $m(\varepsilon)>0$, что $G(\varepsilon)\subset\{t_j\in\tilde h\colon j=\overline{1,m(\varepsilon)}\}$. Колебание произвольной функции $x^{h_i}(t)$, $i<k(\varepsilon)$, на интервале длины меньше $\delta(\varepsilon)$, не содержащем точек $t_1,\dots,t_{m(\varepsilon)}\in\tilde h$, определяется оценкой (1.11) и не превосходит ε.

Объединяя вышесказанное, заключаем, что колебание любой функции $x^h(\cdot)\in\{x^{h_i}(\cdot)\}$ на любом интервале длины меньше $\delta(\varepsilon)$, не содержащем точек $t_1,\dots,t_{m(\varepsilon)}\in\tilde h$, не превосходит ε. Это означает выполнение условий леммы (см. [7, с. 309]). Следовательно, существует подпоследовательность $\{x^{h_{i'}}(\cdot)\}\subset\{x^{h_i}(\cdot)\}$ функций, равномерно сходящаяся к некоторой функции $r(t)$.

Для того чтобы показать абсолютную непрерывность функции $r(t)$, перейдем к пределу при $i'\to+\infty$ в неравенстве (1). В результате получим $\|r(t)-r(\tau)\|\le K\big(A(t)-A(\tau)\big)+L(t-\tau)$ для любых $t_0<\tau<t\le t_0+T$. Из последнего неравенства с учетом абсолютной непрерывности функции $A(t)$ вытекает абсолютная непрерывность функции $r(t)$ на промежутке J.

Покажем выполнение равенств (1.9) для функции $r(t)$, которая является равномерным на J пределом конфинальной последовательности функций $x^{h_i}(t)$. С учетом (1.5) и (1.3) и обозначая через t_{m_t,h_i} ближайший слева к моменту времени t узел разбиения h_i, не совпадающий с t, имеем

$$\|p\big(t,r(t)\big)\| \le \|p\big(t,r(t)\big)-p\big(t,x^{h_i}(t)\big)+p\big(t,x^{h_i}(t)\big)\| \le \|p\big(t,r(t)\big)-p\big(t,x^{h_i}(t)\big)\|$$
$$+\|p\big(t_{m_t,h_i},x^{h_i}(t_{m_t,h_i}+0)\big)-p\big(t,x^{h_i}(t)\big)\| \le L\big[\|r(t)-x^{h_i}(t)\|+(t-t_{m_t,h_i})$$
$$+\|x^{h_i}(t_{m_t,h_i}+0)-x^{h_i}(t)\|\big] \le L\big[\|r(t)-x^{h_i}(t)\|+(t-t_{m_t,h_i})+(1+M)\big(A(t)-A(t_{m_t,h_i})\big)\big].$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{x^{h_i}(\cdot)\}$ на промежутке J правая часть последнего неравенства при $i\to+\infty$ стремится к нулю, и тем самым первое равенство в (1.9) установлено. Второе равенство вытекает из равномерной сходимости последовательности $\{x^{h_i}(\cdot)\}$ и условия (A2) при $k=0$. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 1 и 2 мы следовали схемам доказательств лемм 1.1, 1.2 и теоремы 1 из [1], но при этом не предполагали, что функции $x^h(t)$ являются ломаными Эйлера для какой-либо системы с позиционным импульсным управлением. Таким образом, утверждения лемм 1 и 2 являются общими свойствами импульсно-скользящих режимов.

2. Скользящие режимы дифференциального включения с разрывными нелинейностями

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} \in F(t,x) + u, \tag{2.1}$$

где u — управляющее воздействие, $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, относительно которого будем предполагать выполненными следующие условия:

(B1) При почти каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $F(t,x)$ полунепрерывно сверху по x. Это означает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(t,x,\varepsilon) > 0$ такое, что $F(t,x') \subset F^{\varepsilon}(t,x)$ для всех $x' \in W_\delta(x)$, где $F^\varepsilon(t,x)$ — ε-окрестность множества $F(t,x)$, $W_\delta(x)$ — δ-окрестность точки x.

(B2) Для любой непрерывной функции $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $t \to F(t,x(t))$ измеримо (свойство суперпозиционной измеримости).

(B3) Многозначное отображение $F(t,x)$ удовлетворяет условию подлинейного роста: для любых $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $w \in F(t,x)$ выполняется неравенство $\|w\| \le l(t)(1 + \|x\|)$, где $l(t)$ — суммируемая по Лебегу на конечных промежутках функция.

Поставим задачу поиска управления u и условий на него, при которых оно реализует движение по множеству $S = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sigma^i(t,x) = 0,\ i = \overline{1,m}\}$, $m \le n$, где $\sigma^i(t,x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Введем обозначения: $\sigma_t(t,x)$ — вектор-функция, каждая i-я координата которой является частной производной $\sigma^i(t,x)$ по t; $\sigma_x(t,x)$ — $m \times n$-матрица Якоби, каждая i-я строчка которой представляет собой градиент функции $\sigma^i(t,x)$ по переменной x. Будем искать управление в форме

$$u = B(t,x)\tilde{u},$$

где $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m)$, $B(t,x)$ — некоторая непрерывная $n \times m$-матрица, удовлетворяющая равенству

$$\sigma_x(t,x)B(t,x) = -E_m \tag{2.2}$$

для любой точки $(t,x) \in S$, E_m — единичная $m \times m$-матрица.

Для любых $(t,x) \notin S_i = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sigma^i(t,x) = 0\}$ определим функции

$$\tilde{u}_i(t,x) = H_i(t,x) \operatorname{sign} \sigma^i(t,x), \tag{2.3}$$

где $H_i(t,x) \ge 0$ — некоторые непрерывные функции, $i = \overline{1,m}$.

Полагая $\tilde{u}(t,x) = (\tilde{u}_1(t,x), \ldots, \tilde{u}_m(t,x))$, приходим к дифференциальному включению (2.1) с разрывной нелинейностью в правой части, которое запишется в виде

$$\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{u}(t,x). \tag{2.4}$$

Обозначим $\tilde{U}(t,x) = \big(\tilde{U}_1(t,x), \ldots, \tilde{U}_m(t,x)\big)$. Легко заметить, что многозначная функция $\tilde{U}(t,x)$ представляет собой простейшее выпуклое доопределение в смысле Филиппова [5, с. 39] разрывной функции $\tilde{u}(t,x)$. В соответствии с основными методами теории разрывных систем под решением задачи (2.4), определенном на отрезке $I = [t_0, t_0 + T]$, будем понимать решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{U}(t,x), \tag{2.5}$$

т. е. абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую (2.5) почти всюду на I.

Включение (2.5) может быть представлено в виде управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{u}, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}(t,x). \end{cases} \tag{2.6}$$

Решением для задачи (2.6), определенным на отрезке $I = [t_0, t_0 + T]$, называется пара $(x(t), \tilde{u}(t))$, состоящая из абсолютно непрерывной функции $x(t)$ (траектории) и измеримой функции $\tilde{u}(t)$ (управления), удовлетворяющих включениям (2.6) почти всюду на I.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения* (B1)–(B3)*, функции* $\sigma^i(t,x)$*,* $i = \overline{1,m}$*,* $m \le n$*, являются непрерывно дифференцируемыми, матрица* $B(t,x)$ *и функции* $H_i(t,x)$ *непрерывны. Тогда*:

1. *Для любых начальных условий* $x(t_0) = x_0$ *существует локальное решение включения* (2.5)*, определенное на некотором отрезке* $I = [t_0, t_0 + T]$.

2. *Для любого решения* $x(t)$ *включения* (2.5) *найдется измеримая функция* $\tilde{u}(t)$ *такая, что пара* $(x(t), \tilde{u}(t))$ *будет решением управляемой системы* (2.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение 1. Обозначим

$$\tilde{F}(t,x) = F(t,x) + B(t,x)\tilde{U}(t,x).$$

Так как в каждой фиксированной точке (t,x) множество $\tilde{U}(t,x) \subset \mathbb{R}^m$ выпуклое и компактное, $B(t,x)$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, то множество $U(t,x) = B(t,x)\tilde{U}(t,x)$ также выпуклое и компактное. Тогда и множество $\tilde{F}(t,x)$ выпуклое и компактное как сумма двух выпуклых и компактных множеств.

Ниже при доказательстве свойств (B'1)–(B'3) без оговорок используются некоторые хорошо известные свойства полунепрерывных сверху и измеримых многозначных отображений с компактными значениями, которые можно найти, например, в [8, гл. 1].

(B'1) В силу непрерывности функций $H_i(t,x)$, $i = \overline{1,m}$, и непрерывности матрицы $B(t,x)$ многозначное отображение $U(t,x)$ имеет замкнутый график и локально ограничено в окрестности каждой точки (t,x). Тогда многозначное отображение $U(t,x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке (t,x) по совокупности аргументов. Из условия (B1) вытекает, что многозначное отображение $\tilde{F}(t,x)$ полунепрерывно сверху по переменной x при почти каждом фиксированном t как алгебраическая сумма двух полунепрерывных сверху многозначных отображений.

(B'2) Будучи полунепрерывным сверху по переменной t, многозначное отображение $t \to U(t,x)$ измеримо при каждом фиксированном x. Тогда из условия (B2) вытекает, что многозначное отображение $t \to \tilde{F}(t,x)$ также измеримо, как алгебраическая сумма двух измеримых отображений, и поэтому имеет измеримый селектор при каждом фиксированном x.

(B'3) Из полунепрерывности сверху многозначного отображения $U(t,x)$ вытекает, что оно ограничено на любом компактном подмножестве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда из условия (B3) вытекает, что для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ существует суммируемая по Лебегу функция $\varphi(t)$ такая, что для всех $(t,x) \in \Omega$ выполняется неравенство $\|v\| \le \varphi(t)$. (Это свойство будем называть интегральной ограниченностью многозначного отображения $\tilde{F}(t,x)$.)

Из установленных выше свойств (B'1)–(B'3) многозначного отображения $\tilde{F}(t,x)$ вытекает (см. [8, теорема 3.2.4]), что для любых начальных данных (t_0, x_0) существует локальное решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, дифференциального включения (2.5), определенное на некотором отрезке $I = [t_0, t_0 + T]$.

Докажем утверждение 2. Пусть $x(t)$ — решение включения (2.5), определенное на I. Тогда для почти всех $t \in I$ выполняется включение $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + U(t, x(t))$. Из леммы Филиппова о неявной функции (см. [8, теорема 1.5.15] вытекает, что существует измеримая функция $g(t) \in U(t, x(t))$ такая, что $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + g(t)$ для почти всех $t \in I$. Еще раз воспользовавшись леммой Филиппова, заключаем, что существует измеримая функция $\tilde{u}(t) \in \tilde{U}(t, x(t))$ такая, что $g(t) = B(t, x(t))\tilde{u}(t)$ для почти всех $t \in I$. Тогда пара $(x(t), \tilde{u}(t))$ — решение управляемой системы (2.6), и утверждение 2 доказано.

Теорема доказана.

С учетом второго включения из (2.6) из теоремы 1 вытекает, что управляемая система (2.6) и дифференциальное включение (2.5) эквивалентны в том смысле, что любая траектория из пары $(x(t), \tilde{u}(t))$ является решением включения (2.5) и любое решение этого включения является траекторией системы (2.6).

Условия существования решения включения (2.4), удовлетворяющего условию $(t, x(t)) \in S$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, и управлений, на которых оно реализуется, будем искать, используя схему метода эквивалентного управления (см. [5, с. 44]). Такие решения будем называть скользящими режимами для включения (2.4). Вначале рассмотрим необходимые условия.

Для каждых $(t, x) \in S$ обозначим

$$\tilde{U}^{eq}(t, x) = \sigma_t(t, x) + \sigma_x(t, x)F(t, x),$$
$$\tilde{U}^{*eq}(t, x) = \tilde{U}^{eq}(t, x) \cap \tilde{U}(t, x).$$

Элементы $\tilde{u}^{*eq}(t, x)$ множества $\tilde{U}^{*eq}(t, x)$ будем называть эквивалентными управлениями, а отображение $(t, x) \to \tilde{U}^{*eq}(t, x)$ — многозначным эквивалентным управлением.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *и* $x(t)$ — *скользящий режим включения* (2.4), *определенный на отрезке* $I = [t_0, t_0 + T]$. *Тогда*

$$\tilde{U}^{*eq}\big(t, x(t)\big) \neq \varnothing \tag{2.7}$$

для почти всех $t \in I$, *и функция* $x(t)$ *является траекторией управляемой системы*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x) + B(t, x)\tilde{u}, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}^{*eq}(t, x). \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как функция $x(t)$ является решением включения (2.5), то в соответствии с теоремой 1 существует измеримая функция $\tilde{u}(t) \in \tilde{U}(t, x(t))$ такая, что для почти всех $t \in I$ выполняется включение $\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) + B(t, x(t))\tilde{u}(t)$. Тогда из условия $x(t) \in S$ для всех $t \in I$ получаем

$$0 = \sigma_t(t, x(t)) + \sigma_x(t, x(t))\dot{x}(t) \in \sigma_t(t, x(t)) + \sigma_x(t, x(t))F(t, x(t)) - \tilde{u}(t). \tag{2.9}$$

Из (2.9) вытекает, что $\tilde{u}(t) \in \tilde{U}^{eq}(t, x(t))$ для почти всех $t \in I$. Следовательно, выполняется условие (2.7) и $\tilde{u}(t) \in \tilde{U}^{*eq}(t, x(t))$ для почти всех $t \in I$. Таким образом, пара $(x(t), \tilde{u}(t))$ является решением управляемой системы (2.8). Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает, что любой скользящий режим включения (2.4) является траекторией $x(t)$ решения $(x(t), \tilde{u}(t))$ системы (2.8), реализованной на эквивалентном управлении, для которого $\tilde{u}(t) = \tilde{u}^{*eq}(t, x(t)) \in \tilde{U}^{*eq}(t, x(t))$. Отметим также, что при условии однозначности функции $F(t, x) = \{f(t, x)\}$ условие (2.7) равносильно неравенствам

$$|\sigma_t^i(t, x(t)) + \langle \nabla_x \sigma^i(t, x(t)), f(t, x(t)) \rangle| \le H_i(t, x(t)), \quad i = \overline{1, m},$$

и эквивалентные управления $\tilde{u}^{eq}(t, x)$ на множестве S однозначно определяются равенствами

$$\tilde{u}_i^{eq}(t, x) = \sigma_t^i(t, x) + \langle \nabla_x \sigma^i(t, x), f(t, x) \rangle, \quad i = \overline{1, m}.$$

Это согласуется с методом эквивалентного управления для дифференциальных уравнений с разрывными позиционными управлениями.

Достаточные условия существования скользящих режимов и устойчивости множества S исследуем при помощи функции

$$V(t, x) = \frac{1}{2}\langle \sigma(t, x), \sigma(t, x) \rangle. \tag{2.10}$$

Для любого $\delta > 0$ обозначим $W_\delta(t, x) = \{(t', x') \colon \|x' - x\| < \delta,\ |t - t'| < \delta\}$.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *и на множестве* S *выполняется равенство* (2.2). *Предположим, что для каждой точки* $(t,x) \in S$ *существуют* $\varepsilon > 0$ *и окрестность* $W_\delta(t,x)$ *этой точки такая, что для всех* $(t',x') \in W_\delta(t,x)$ *и для всех индексов* $i = \overline{1,m}$ *выполняется неравенство*

$$\max_{w \in F(t',x')} |\sigma_t^i(t,x) + \langle \nabla_x \sigma^i(t,x), w \rangle| < H_i(t,x) - \varepsilon. \tag{2.11}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Для любого решения* $x(t)$ *дифференциального включения* (2.4) *с начальными данными* $(t_0,x_0) \in S$ *выполняется* $(t,x(t)) \in S$ *для всех точек* $t \geq t_0$, *в которых это решение существует.*

2. *Для любых точек* $(t,x) \in S$ *выполняется*

$$\tilde{U}^{*eq}(t,x) = \tilde{U}^{eq}(t,x) \subset \operatorname{int} \tilde{U}(t,x), \tag{2.12}$$

где символ int *означает внутренность множества.*

3. *Для любых начальных данных* $(t_0,x_0) \in S$ *существует скользящий режим включения* (2.4), *определенный* (*как решение включения* (2.4)) *на правом максимальном промежутке существования, и любое решение* $x(t)$ *с начальными данными* $(t_0,x_0) \in S$ *является скользящим режимом тогда и только тогда, когда оно является траекторией управляемой системы* (2.8) *с теми же самыми начальными данными.*

4. *Множество* S *является устойчивым в следующем смысле: для любых* $(t_0,x_0) \in S$ *и* $\tau > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при условиях* $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$ *и* $|t_0 - \tilde{t}_0| < \delta$ *для любого решения дифференциального включения* (2.4) *с начальным условием* $x(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$ *выполняется* $(t,x(t)) \in S$ *для всех точек* $t \geq t_0 + \tau$, *в которых это решение существует.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $x(t)$ — решение включения (2.4) с начальной точкой $(t_0,x_0) \in S$, определенное на правом максимальном промежутке существования $[t_0,\omega)$. Обозначим через $\beta = \sup\{t' \in [t_0,\omega) \colon (t,x(t)) \in S, \forall t \in [t_0,t']\}$ и предположим, что $\beta < \omega$. Тогда $(\beta, x(\beta)) \in S$.

Введем обозначение $A(t,x) = \sigma_x(t,x)B(t,x) + E_m$. Элементы матрицы $A(t,x)$ являются непрерывными функциями в силу непрерывности матриц $\sigma_x(t,x)$ и $B(t,x)$ и с учетом (2.2) принимают нулевые значения на множестве S. Следовательно, вектор-функция $\alpha(t,x) = A(t,x)\tilde{u}(t,x)$ — бесконечно малая при $(t',x') \to (t,x)$ для каждой точки $(t,x) \in S$.

Производная функции, определенной равенством (2.10), на решении $x(t)$ запишется в виде

$$\dot{V}(t,x(t)) = \langle \sigma(t,x(t)), \sigma_t(t,x(t)) + \sigma_x(t,x(t))\dot{x}(t) \rangle$$

и, следовательно, является измеримой функцией. Учитывая равенство (2.2), получаем выражение для $\dot{V} = \dot{V}(t,x(t))$

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \sigma^i \big[\sigma_t^i + \langle \nabla_x \sigma^i, f(t) \rangle + \alpha_i - H_i \operatorname{sign} \sigma^i\big] = \sum_{i=1}^m |\sigma^i| \big[\operatorname{sign} \sigma^i \big(\sigma_t^i + \langle \nabla_x \sigma^i, f(t) \rangle + \alpha_i\big) - H_i\big], \tag{2.13}$$

где α_i — компоненты вектор-функции α и $f(t) \in F(t,x(t))$ — некоторая функция, существование которой вытекает из того, что производная $\dot{x}(t)$ удовлетворяет включению (2.5). Из бесконечной малости функций $\alpha_i(t,x)$ и неравенств (2.11) вытекает, что для каждой точки $(t,x) \in S$ существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $W_\delta(t,x)$ этой точки такие, что выполняются неравенства

$$|\sigma_t^i + \langle \nabla_x \sigma^i, w \rangle + \alpha_i| < H_i - \varepsilon, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.14}$$

для всех точек $(t',x') \in W_\delta(t,x)$ и для всех $w \in F(t',x')$.

Из определения числа β и непрерывности функции вытекает, что $(\beta, x(\beta)) \in S$, и поэтому в неравенстве (2.14) можно положить $t = \beta$ и $x = x(\beta)$. Тогда из (2.13) и (2.14) получаем, что найдется точка $\beta_1 \in (\beta, \omega)$ такая, что

$$\dot{V}(t, x(t)) < -\varepsilon\sqrt{V(t, x(t))} \tag{2.15}$$

для почти всех $t \in [\beta, \beta_1]$. Следовательно, функция $V(t, x(t))$ невозрастающая, а так как $V(\beta, x(\beta)) = 0$, то $V(t, x(t)) = 0$ для всех $t \in [\beta, \beta_1]$. Отсюда вытекает, что $(t, x(t)) \in S$ для всех $t \in [t_0, \beta_1]$, что противоречит определению числа β. Полученное противоречие показывает, что $(t, x(t)) \in S$ для всех $t \in [t_0, \omega)$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Утверждение 2 вытекает из неравенства (2.11) и определений множеств $\tilde{U}^{*eq}(t, x)$, $\tilde{U}^{eq}(t, x)$.

Докажем утверждение 3. Существование скользящего режима на правом максимальном промежутке существования следует из теоремы 1 и доказанного выше утверждения 1. Пусть теперь $x(t)$ — решение включения (2.4) с начальными данными $(t_0, x_0) \in S$, являющееся скользящим режимом. Тогда в силу теоремы 2 оно является траекторией управляемой системы (2.8). Обратно, если $x(t)$ — траектория системы (2.8) с начальными данными $(t_0, x_0) \in S$, то в силу (2.12) и теоремы 1 заключаем, что $x(t)$ — решение включения (2.4), а в силу утверждений данной теоремы оно является скользящим режимом.

Докажем утверждение 4. Пусть точка $(t_0, x_0) \in S$ и число $\tau > 0$ произвольны. Так как $V(t_0, x_0) = 0$ и функция $V(t, x)$ непрерывна, то выберем число $0 < \delta_1 < \tau/2$ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство (2.14) и

$$\sqrt{V(t, x)} < 2\varepsilon\tau \tag{2.16}$$

для всех $(t, x) \in W_{\delta_1}(t_0, x_0)$.

Используя свойство интегральной ограниченности правой части дифференциального включения (2.5), выберем число $0 < \delta_2 < \delta_1$ так, чтобы для любых $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in W_{\delta_2}(t_0, x_0)$ и для любого решения $x(t)$ с начальными условиями $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)$ выполнялось $(t, x(t)) \in W_{\delta_1}(t_0, x_0)$ для всех $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta_2]$. Тогда из (2.13) и (2.14) получаем, что этого решения выполняется неравенство (2.15) для почти всех $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \delta_2]$. Если $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \notin S$, то для $\nu < \delta_2$ такого, что $(t, x(t)) \notin S$ для всех $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \nu]$, из (2.15) вытекает

$$\sqrt{V(t, x(t))} < \sqrt{V(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0)} - 2\varepsilon(t - \tilde{t}_0) \tag{2.17}$$

для всех $t \in [\tilde{t}_0, \tilde{t}_0 + \nu]$. Тогда из неравенств (2.16) и (2.17) вытекает, что $V(\tilde{t}_0 + \nu_1, x(\tilde{t}_0 + \nu_1)) = 0$ для некоторого $0 < \nu_1 \leq \delta_2$. Учитывая выбор чисел δ_1 и δ_2, заключаем, что $\tilde{t}_0 + \nu_1 < t_0 + \tau$. Теперь утверждение 4 вытекает из утверждения 1 данной теоремы, примененного к решению с начальными данными $t_0 = \tilde{t}_0 + \nu_1$, $x_0 = x(\tilde{t}_0 + \nu_1)$. Теорема доказана.

3. Импульсно-скользящие режимы дифференциального включения

Будем рассматривать дифференциальное включение (2.1) в предположении, что u — управляющее воздействие, которое каждому текущему моменту времени t и состоянию x объекта ставит в соответствие импульс $p(t, x)\delta_t$, где δ_t — функция Дирака, сосредоточенная в моменте времени t, $p(t, x)$ — интенсивность импульса. Как уже отмечалось во введении, такие воздействия на систему называются позиционным импульсным управлением, которое “срабатывает” только в узлах разбиения $h\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ отрезка $I = [t_0, t_0 + T]$.

В результате таких воздействий на решения включения $\dot{x} \in F(t, x)$ возникают ломаные Эйлера $x^h(t)$, которые применительно к нашей ситуации на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$ совпадают с решениями задач Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big), \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{3.1}$$

где $x^h(t_0) = x_0$. Так как $x^h(t_k + 0) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big)$, $k = \overline{0, N-1}$, то функции $x^h(t)$ удовлетворяют условиям (A1), (A2) из разд. 1. Мы рассматриваем такие управления, которые после каждого корректирующего импульса приводят систему на некоторое многообразие $S = \{(t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \colon \sigma^i(t,x) = 0, i = \overline{1,m}\}$, $m \le n$. Для этой цели, как и в [1], мы предполагаем, что функция $p(t,x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\sigma\big(t, x + p(t,x)\big) = 0; \\ &p(t,x) = 0 \Longleftrightarrow \sigma(t,x) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Совокупность всех ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом. Функция $r(t)$, являющаяся равномерным на промежутке $(t_0, t_0 + T]$ пределом $r(t)$ последовательности ломаных Эйлера при $d(h) \to 0$ и доопределенная в точке t_0 равенством $r(t_0) = r(t_0 + 0)$ называется идеальным (или предельным) импульсно-скользящим режимом. Наша цель — показать, что идеальный импульсно-скользящий режим для включения (2.1) является обычным скользящим режимом для включения (2.8) с начальным условием $r(t_0) = x_0 + p(t_0, x_0)$.

Определим величину импульсного воздействия следующим образом:

$$p(t,x) = B(t,x)\sigma(t,x). \tag{3.3}$$

В этом разделе всюду предполагаем, что $B(t,x)$ — непрерывная матричная функция размерности $n \times m$ и $\sigma(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая векторная функция с матрицей Якоби $\sigma_x(t,x)$, имеющие ранг, равный m для всех $(t,x) \in S$. При этих предположениях из условий (3.2), (3.3) вытекает, что выполняется равенство (2.2) (см. [1, лемма 2.2]).

Сделаем ряд построений. Пусть $x^h(t)$ — ломаная Эйлера включения (2.1), соответствующая некоторому разбиению h отрезка I точками $t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t_0 + T$. Обозначим

$$Q^h(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]; \quad Q^h(t) = B\big(t_k, x^h(t_k)\big), \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{1, N-1};$$

$$p^h(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]; \quad p^h(t) = \sum_{i=1}^{m_t} p\big(t_i, x^h(t_i)\big), \quad t \in (t_1, t_0 + T], \tag{3.4}$$

где m_t — индекс узла разбиения h, ближайшего к точке t слева и не совпадающего с t.

Лемма 3. *Пусть для многозначного отображения $F(t,x)$ выполняются условия* (B1)–(B3) *и для функции $p(t,x)$, определенной равенством* (3.3) *выполняются условия* (3.2) *и неравенство* (1.3). *Тогда из любой конфинальной последовательности ломаных Эйлера $\{x^{h_i}(\cdot)\}$ включения* (2.1) *можно выделить подпоследовательность, равномерно на промежутке J сходящуюся к идеальному импульсно-скользящему режиму $r(t)$ так, что соответствующая подпоследовательность из последовательности функций $\{p^{h_i}(\cdot)\}$ будет равномерно на отрезке I сходиться к некоторой абсолютно непрерывной функции $y(t)$, производная которой удовлетворяет для почти всех $t \in I$ включению*

$$\dot y(t) \in B(t, r(t))\tilde U^{eq}(t, r(t)), \tag{3.5}$$

где $\tilde U^{eq}(t,r) = \sigma_t(t,r) + \sigma_r(t,r)F(t,r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование подпоследовательности из конфинальной последовательности $\{x^{h_i}(\cdot)\}$, равномерно на промежутке J сходящейся к идеальному импульсно-скользящему режиму $r(t)$, следует из леммы 2. Чтобы не вводить новых обозначений, будем полагать, что сама эта последовательность равномерно сходится. Обозначим $z^{h_i}(t) = \sigma_t\big(t, x^{h_i}(t)\big) + \sigma_x\big(t, x^{h_i}(t)\big)\dot x^{h_i}(t)$ для всех $t \in I$. Так как $\dot\sigma\big(t, x^{h_i}(t)\big) = z^{h_i}(t)$ для почти всех $t \in (t_{k-1}, t_k]$, то справедливо равенство

$$\sigma\big(t, x^{h_i}(t)\big) - \sigma\big(t_{k-1}, x^{h_i}(t_{k-1} + 0)\big) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t} z^{h_i}(s)ds \tag{3.6}$$

для всех $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, N_i}$, где $\dot{x}^{h_i}(t) \in F\big(t, x^{h_i}(t)\big)$ для почти всех $t \in (t_{k-1}, t_k]$.

Из (3.6) и (3.4) вытекает, что

$$p^{h_i}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} Q^{h_i}(s) z^{h_i}(s) ds - \int\limits_{t_{m_t h_i}}^{t} Q^{h_i}(s) z^{h_i}(s) ds \tag{3.7}$$

для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$. В силу леммы 1 последовательность ломаных Эйлера $x^{h_i}(t)$ ограничена. Тогда в силу непрерывности векторной функции $\sigma_t(t,x)$, матриц $\sigma_x(t,x)$ и $B(t,x)$ подинтегральные выражения в (3.7) являются ограниченными. Тогда при $d(h_i) \to 0$ второй интеграл из (3.7) равномерно по $t \in I$ стремится к нулю, а из последовательности функций $y^{h_i}(t)$, равных первым интегралам из (3.7), воспользовавшись теоремой Арцела, можно выделить равномерно сходящуюся к некоторой функции $y(t)$ подпоследовательность. Без ограничения общности, будем полагать, что сама последовательность этих функций сходится. При этом

$$\dot{y}^{h_i}(t) = Q^{h_i}(t) z^{h_i}(t) \in Q^{h_i}(t)\big(\sigma_t(t, x^{h_i}(t)) + \sigma_x(t, x^{h_i}(t)) F(t, x^{h_i}(t))\big) \tag{3.8}$$

для почти всех $t \in I$. В силу теоремы 1.3 из [9, с. 16] имеем

$$\dot{y}(t) \in \bigcap_{j \geq 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{i \geq j} \dot{y}^{h_i}(t) \tag{3.9}$$

для почти всех $t \in I$. Так как $t_{m_t h_i} \to t$, $x^{h_i}(t_{m_t}) \to r(t)$ и $Q^{h_i}(t) = B(t_{m_t h_i}, x^h(t_{m_t h_i}))$, то $Q^{h_i}(t) \to B(t, r(t))$ в каждой точке $t \in J$. Тогда из включений (3.9), (3.8) (учитывая выпуклость правой части (3.8)), из сходимости $x^{h_i}(t)$ к функции $r(t)$ и полунепрерывности сверху многозначного отображения $F(t,x)$ заключаем, что

$$\dot{y}(t) \in B(t, r(t))\big(\sigma_t(t, r(t)) + \sigma_x(t, r(t)) F(t, r(t))\big)$$

для почти всех $t \in I$. Из равенства (3.7) вытекает, что предел последовательности функций $p^{h_i}(t)$ равен $y(t)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются все предположения леммы 3. Тогда для включения* (2.1) *существует идеальный импульсно-скользящий режим, и любой идеальный импульсно-скользящий режим $r(t)$ является траекторией управляемой системы*

$$\begin{cases} \dot{r} \in F(t, r) + B(t, r)\tilde{u}, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}^{eq}(t, r) \end{cases}$$

с начальным условием $r(t_0 + 0) = x_0 + p(t_0, x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.1)–(3.3) вытекает, что для любой конфинальной последовательности ломаных Эйлера выполняется условие (1.5), и существование идеального импульсно-скользящего режима следует из леммы 2.

Пусть теперь $r(t)$ — идеальный импульсно-скользящий режим, и $x^{h_i}(t)$ — конфинальная последовательность ломаных Эйлера, равномерно на отрезке J сходящаяся к $r(t)$. В соответствии с равенством (1.1) получаем

$$x^{h_i}(t) = x_0 + p(t_0, x_0) + g^{h_i}(t) + p^{h_i}(t), \tag{3.10}$$

где $g^{h_i}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \dot{x}^{h_i}(s) ds$, а функция $p^{h_i}(t)$ определена равенством (3.4). Из теоремы Арцела вытекает, что из последовательности $\{g^{h_i}(\cdot)\}$ можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке I к функции $g(t)$ подпоследовательность. Из леммы 3 вытекает, что равномерно сходящуюся подпоследовательность можно выделить из последовательности $\{p^{h_i}(\cdot)\}$ так, что предельная функция $y(t)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет включению (3.5). Не ограничивая общности рассуждений, полагаем, что сами эти последовательности сходятся одновременно с последовательностью ломаных Эйлера. Поскольку $\dot{g}^{h_i}(t) \in F(t, x^{h_i}(t))$ для почти всех $t \in I$, то, воспользовавшись соотношением (3.9) применительно к функциям $g^{h_i}(t)$ так же, как в доказательстве леммы 3, заключаем, что

$$\dot{g}(t) \in F(t, r(t)). \tag{3.11}$$

Переходя к пределу в равенстве (3.10), получаем

$$r(t) = r(t_0) + g(t) + y(t). \tag{3.12}$$

Из включения (3.5) и леммы Филиппова о неявной функции вытекает, что существует измеримая функция $\tilde{u}(t) \in \tilde{U}^{eq}(t, r(t))$, такая, что

$$\dot{y}(t) = B(t, r(t))\tilde{u}(t) \tag{3.13}$$

для почти всех $t \in I$. Теперь утверждение теоремы следует из (3.11) – (3.13). Теорема доказана.

Теорема 4 обобщает теорему 2.1 из [1] на дифференциальные включения.

Теорема 5. *Пусть выполняются все предположения леммы 3 и, дополнительно, справедливы неравенства* (2.11). *Тогда любой идеальный импульсно-скользящий режим* $r(t)$ *включения* (2.1) *с позиционным импульсным управлением* $u \leftarrow p(t, x)\delta_t$ *является скользящим режимом этого же включения с разрывным позиционным управлением* $u = B(t, x)\tilde{u}(t, x)$ *и траекторией управляемой системы* (2.6) *при условии, что* $r(t_0) = x_0 + p(t_0, x_0)$, $\tilde{u}(t, x)$ *— функция, определенная равенствами* (3.3), *и* $B(t, x)$ *— матрица, фигурирующая в равенстве* (3.3).

Теорема 5 является следствием теорем 3 и 4.

4. Заключение

Задачи оптимального управления, которые приводят к понятию импульсного синтеза, задаваемого оператором $u \leftarrow p(t, x)\delta_t$, рассматривались в [1, гл. 2; 2]. При этом идеальный импульсно-скользящий режим совпадает с оптимальной траекторией, и позиционное импульсное управление, реализованное как последовательность корректирующих импульсов для конфинальной последовательности ломаных Эйлера, преследует цель получить движение управляемой системы (2.1) по множеству S. В рамках предположений теоремы 5 идеальный импульсно-скользящий режим включения (2.1) является скользящим режимом этого же включения с разрывными позиционными управлениями $u(t, x) = B(t, x)\tilde{u}(t, x)$ и реализуется как траектория включения (2.8). В этой ситуации цель достигается на первом же импульсном воздействии величины $p(t_0, x_0)$ из любого начального состояния $x(t_0) = x_0$. В силу утверждения 3 из теоремы 3 допускаются малые отклонения величины первого импульса.

Позиционное импульсное управление формирует последовательности ломаных Эйлера для любой управляемой системы, которая обеспечивает выполнение условий леммы 1. Разрывное управление (2.3) обладает универсальностью в том смысле, что сохраняет свою структуру для различных целевых множеств S, но его применимость для реализации скользящих режимов имеет ограничения. Использование этих двух типов управлений рассмотрим на простом примере.

Пример. Рассматривается линейный осциллятор с сухим трением. Тело единичной массы, рассматриваемое как материальная точка, движется по горизонтальной прямой Ox по действием упругой силы пружины с коэффициентом упругости k и точкой ненапряженного состояния $x = 0$. Предполагается, что на тело действует сила тяжести $P = mg$ и сила сухого трения Кулона $F^{fr}(\dot{x}) = -fP \operatorname{sign} \dot{x}$ при условии $\dot{x} \neq 0$; f — постоянный коэффициент трения.

Мы считаем, что при условии $\dot{x} = 0$ сила трения может принимать любые значения из отрезка $[-fP, fP]$, и полагаем $F^{fr}(0) = [-fP, fP]$. Это соответствует обычному доопределению функции $F^{fr}(\dot{x})$ по Филиппову. Цель управления — обеспечить экспоненциальное движение системы в положение $\dot{x} = 0$, $x = 0$. Уравнение движения системы запишем в виде:

$$\ddot{x} \in -kx + F^{fr} + u, \tag{4.1}$$

где u — некоторая управляющая сила.

Поведение системы (4.1) при условии $u = 0$ легко анализируется (см. [10, гл. III, § 3]). Ее траекториями являются полуэллипсы, расположенные выше и ниже оси Ox с центрами на концах отрезка $Z = \{(x, 0) \colon |x| \leq fP/k\}$ — "зоны застоя", состоящей из множества неизолированных положений равновесия. Амплитуда колебаний системы уменьшается в арифметической прогрессии, и через конечное время тело останавливается в состоянии, которое может оказаться любой точкой "зоны застоя".

Для достижения поставленной выше цели управления управляющая сила u должна, во-первых, преодолевать силу трения и, во-вторых, обеспечивать экспоненциально устойчивое движение системы в положение равновесия $(0,0)$ — середину отрезка Z. Решение первой задачи зависит от ограничения на ресурс управления, а второй — от выбора целевого множества, которое определим в виде $S = \{(\dot{x}, x) \colon \dot{x} + ax = 0\}$, где $a > 0$ — произвольный параметр.

Введем переменную $v = \dot{x}$, определим многозначное отображение $F = (F_1(v,x), F_2(v,x))$ равенствами: $F_1(v,x) = -kx + F^{fr}(v)$, $F_2(v,x) = v$ и запишем дифференциальное включение (4.1) в форме включения (2.1)

$$\begin{cases} \dot{v} \in F_1(v,x) + u_1, \\ \dot{x} = F_2 + u_2 \end{cases} \tag{4.2}$$

с управлением $u = (u_1, u_2)$ и множеством $S = \{(v,x) \colon \sigma(v,x) = 0\}$, $\sigma(v,x) = v + ax$.

Далее заключаем, что $u_1 = -\tilde{u} = -H \operatorname{sign}(v + ax)$, $u_2 = 0$ и

$$\tilde{U}(v,x) = \begin{cases} [-H, H], & \text{если } (v,x) \in S, \\ \tilde{u}(v,x), & \text{если } (v,x) \notin S. \end{cases}$$

Теперь включение (4.1) с управлением $u = -H \operatorname{sign}(\dot{x} + ax)$ запишется как управляемая система

$$\begin{cases} \dot{v} \in F_1(v,x) - \tilde{u}, \\ \dot{x} = F_2, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}(v,x) \end{cases} \tag{4.3}$$

вида (2.6).

Множество $\tilde{U}^{eq}(v,x)$ определяется из условий $0 = v + ax$, $0 \in F_1(v,x) + av$ и при $v \neq 0$ состоит из одного элемента $\tilde{u}^{eq} = kx + fP \operatorname{sign} v - av$, который (на множестве S) запишем также в виде равенств

$$\tilde{u}^{eq} = (k + a^2)x - fP \operatorname{sign} x = -(k/a + a)v + fP \operatorname{sign} v.$$

При условии $v = 0$ получаем $x = 0$ и $\tilde{U}^{eq}(0,0) = [-fP, fP]$.

В точке $(0,0)$ прямой $v + ax = 0$ имеем $\tilde{U}^{*eq}(0,0) = [-d, d]$, где $d = \min\{H, fP\}$, а оставшиеся точки этой прямой, в которых $\tilde{U}^{*eq}(v,x) \neq \varnothing$ (выполняется необходимое условие существования скользящего режима), принадлежат множеству точек фазовой плоскости (x, v), удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{fP - H}{k + a^2} \leq |x| \leq \frac{fP + H}{k + a^2}, \quad a\frac{fP - H}{k + a^2} \leq |v| \leq a\frac{fP + H}{k + a^2}.$$

Записывая уравнение движения осциллятора в виде

$$dv + (kx + fP\,\mathrm{sign}\,v + H\,\mathrm{sign}\,(v + ax))dx = 0 \tag{4.4}$$

и интегрируя его в точках непрерывности функций F^{fr} и $\tilde{u}$, находим, что траекториями системы являются дуги эллипсов, соответствующие различным знакам значений переменной v и функции $\sigma = v + ax$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{(kx + fP\,\mathrm{sign}\,v \, + H\,\mathrm{sign}\,(v + ax))^2}{2k} = C^2,$$

где C — произвольная константа. Прямые $v = 0$ и $v + ax = 0$ делят фазовую плоскость на четыре части. Расположение траекторий на ней симметрично относительно начала координат. Центры эллипсов расположены на оси Ox, а их смещение по этой оси в положительную или отрицательную стороны зависит от неравенств $H < fP$ и $H \geq fP$. Это делает наглядным аналитический анализ этих неравенств. (Фазовая плоскость системы (4.4) в областях непрерывности правой части на рис. 1–3 построена с использованием графической визуализации вычислительных экспериментов.)

Отрезок $Z = [-L, L]$ на рис. 1 — "зона застоя" ($L = (fP - H)/k$); отрезок с концами в точках $A = A(-\alpha, \alpha_1)$ и $B = B(-\beta, \beta_1)$ — траектория скользящего режима; $\alpha = (fP + H)/(k + a^2)$, $\beta = (fP - H)/(k + a^2)$, $\alpha_1 = a\alpha$, $\beta_1 = a\beta$.

На рис. 2 "зона застоя" отсутствует, система имеет единственное положение равновесия в точке $B = (0, 0)$) и на отрезке $\overline{AB}$ прямой S возникает устойчивый скользящий режим, который под действием эквивалентного управления экспоненциально стремится к началу координат.

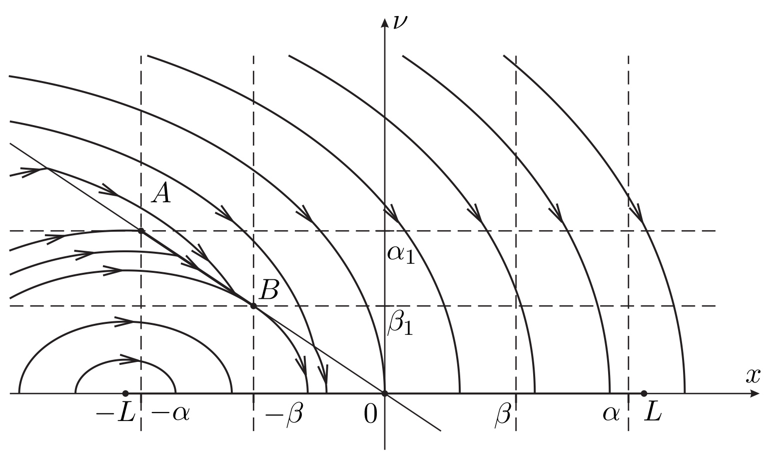


Рис. 1. Фазовая плоскость уравнения (4.4) в случае $fP > H$.

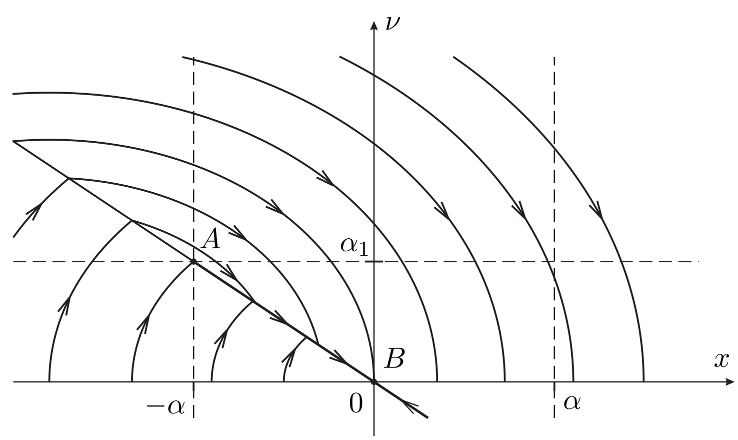


Рис. 2. Фазовая плоскость уравнения (4.4) в случае $fP \leq H$.

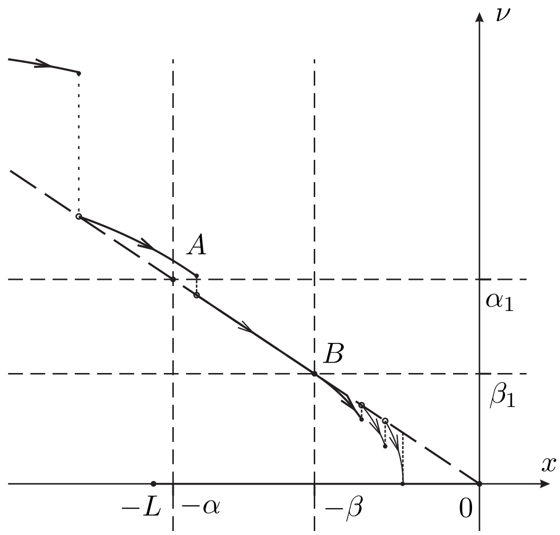


Рис. 3. Скользящий и импульсно-скользящий режимы при условии $fP > H$.

Рассмотрим движение системы (4.2) под действием импульсного позиционного управления $u \leftarrow p(v,x)\delta_t$. В этом случае $p_1(v,x) = -(v+ax)$, $p_2(v,x) = 0$ и импульсно-скользящий режим, реализованный как множество ломаных Эйлера, приводит систему на прямую $v+ax = 0$, меняя только переменную v (скорость движения). При попадании ломаной Эйлера при очередном корректирующем импульсе на отрезок $\overline{AB}$ (рис. 3) дальнейшее движение системы (4.2) до точки B может происходить как скользящий режим управляемой системы (4.3), после чего вновь должен начаться импульсно-скользящий режим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дрозденко С.Е.** Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск: Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.
2. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 790–799.
3. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 225 с.
4. **Уткин В.И.** Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
5. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные системы с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
6. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
7. **Филиппов А.Ф.** О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 3. С. 307–313.
8. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / В.В. Обуховский [и др.]. М.: КомКнига, 2005. 256 с.
9. **Толстоногов А.А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986. 296 с.
10. **Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.** Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

Финогенко Иван Анатольевич

Поступила 12.03.2012

д-р физ.-мат. наук
зав. лабораторией
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: fin@icc.ru

Пономарев Денис Викторович
аспирант
Иркутский гос. университет
e-mail: zmeigo.sc@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.928

О СОГЛАСОВАНИИ СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ[1]

О. Ю. Хачай

В статье для сингулярной начальной задачи с одним малым параметром, различные степени которого являются коэффициентами при старших производных системы обыкновенных дифференциальных уравнений, обосновывается возможность осуществить переход между любыми двумя смежными асимптотическими слоями в рамках метода согласования асимптотических разложений. Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, метод согласования, сингулярная задача Коши, система обыкновенных дифференциальных уравнений.

O. Yu. Khachai. On the matching of power–logarithmic asymptotic expansions of a solution to a singular Cauchy problem for a system of ordinary differential equations.

For a singular initial value problem with one small parameter, various powers of which are coefficients at higher derivatives in a system of ordinary differential equations, the possibility of passage between any two adjacent asymptotic layers within the method of matching asymptotic expansions is proved.

Keywords: asymptotic expansion, small parameter, matching method, singular Cauchy problem, system of ordinary differential equations.

Введение

Многие вопросы физики и других наук приводят к постановке математических задач с дифференциальными уравнениями, содержащими малые параметры. Часто требуется определить, насколько важно сохранить запись таких членов с малыми параметрами в составе уравнений, оценить неточность решения, возникающую в ситуации, когда малые параметры приравниваются к нулю. Во многих случаях, называемых регулярными, решение задачи при стремлении малого параметра к нулю равномерно переходит в предельное состояние — решение предельной задачи. Но есть большое количество важных, необходимых на практике задач (см., например, [1]), в которых предельная система уравнений не может удовлетворить всем произвольно выбранным начальным или краевым условиям. Равномерный переход решения в предельное состояние при этом тоже оказывается невозможным. Это происходит тогда, когда порядки некоторых или всех дифференциальных уравнений предельной системы меньше порядков соответствующих уравнений исходной системы, например когда малый параметр является коэффициентом при старшей производной в уравнении. Такие задачи представляют одну из ветвей сингулярных задач. Согласно методу двухмасштабного разложения, о котором подробно написано в монографии [1], для отыскания равномерного асимптотического приближения решения вокруг каждого из сингулярных многообразий (в случае задачи Коши для системы ОДУ сингулярное множество состоит только из начальной точки задачи) в более крупном масштабе рассматривается так называемый внутренний слой, остальная часть области в этом случае называется внешним слоем.

Для части сингулярных задач Коши, удовлетворяющих условию асимптотической устойчивости главного члена внешнего разложения вплоть до начальной точки, согласно монографии [2] имеет место ситуация, когда функции внутреннего асимптотического разложения не

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (пр. 11-01-00679, 12-01-00259, 12-01-00445) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” (при финансовой поддержке УрО РАН, пр. 12–П–1–1009).

имеют особенностей при больших значениях внутренней независимой переменной (так называемый регулярный пограничный слой).

В монографии [3] и работах [4;5] были рассмотрены иные ситуации: в них функция, стоящая в правой части одного из уравнений системы, в котором малый параметр был коэффициентом при производной, имела нуль второго или более высокого порядка по искомой функции. В результате при стандартном построении внешнего и внутреннего разложений коэффициенты обоих этих рядов приобретали особенности вблизи границ соответствующих слоев, порядок которых возрастал с увеличением номера коэффициента. Чтобы отметить эту дополнительную сингулярность, задачи с таким поведением коэффициентов принято называть бисингулярными. Для получения их асимптотических решений успешно применяется метод согласования асимптотических разложений [1;3].

В некоторых бисингулярных задачах для ОДУ оказывается, что область хорошего приближения решения внутренним разложением перекрывается такой областью, найденной для внешнего разложения, и несмотря на сингулярности коэффициентов удается провести согласование этих двух разложений (см., например, [3, с. 40–64]). Встречаются и такие бисингулярные задачи, для которых доказано отсутствие пересечения областей сохранения асимптотического характера рядов внешнего и внутреннего разложений, поэтому срастить эти два разложения напрямую невозможно (см., например, [3, с. 64–82; 4; 5]). Однако введение промежуточных слоев (в монографии [3, с. 64–82] и работе [4] — одного, в статье [5] — двух) позволяет провести согласование внутреннего и внешнего разложений посредством промежуточных.

В статье [4] рассматривается задача, промежуточное разложение которой содержит логарифмы малого параметра, но доказательство перехода от промежуточного разложения ко внешнему в работе не приводится. В задаче, рассмотренной в монографии [3, с. 74–82], представлено подробное доказательство согласованности всех трех разложений, и промежуточное разложение там содержит логарифмы малого параметра, но коэффициенты, стоящие при этих логарифмах, становятся экспоненциально малыми при переходе ко внешнему слою и исчезают вместе с логарифмами малого параметра из степенно-логарифмической асимптотики.

В данной статье доказывается возможность найти разложение в следующем слое, согласованное с уже построенным разложением в текущем слое в тех случаях, когда асимптотики решения имеют вид произвольных степенно-логарифмических рядов как по малому параметру, так и по независимой переменной. Накладываемые на коэффициенты рядов условия вытекают из предположения, что согласуемые разложения должны приближать в своих областях точное решение задачи, являющееся набором ограниченных функций.

1. Постановка задачи в целом

Пусть заданы система ОДУ, вообще говоря, нелинейных, и начальные условия:

$$\mathcal{A}_i(U_1 \dots, U_h) \equiv \varepsilon^{v_i} \frac{d}{dt} U_i(t,\varepsilon) - f_i\big(t, U_1(t,\varepsilon), \dots, U_h(t,\varepsilon)\big) = 0, \quad i = 1, \dots, h, \tag{1.1}$$

$$U_i(0,\varepsilon) = U_{i,0}, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ — малый параметр, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $f_i = f_i\big(t, U_1, \dots, U_h\big)$ — гладкие функции в некоторой области D изменения своих аргументов, показатели v_i малого параметра ε удовлетворяют условиям

$$v_i \in \mathbb{Q}, \quad v_i \geq 0, \quad \max\{v_1, \dots, v_h\} = 1; \tag{1.3}$$

во всем тексте работы индекс i предполагается пробегающим набор чисел $1, \dots, h$. Пусть дополнительно известно, что

$$U_{i,0} \neq 0, \quad \text{если} \quad v_i = 1; \quad \text{в остальных случаях} \quad U_{i,0} = 0. \tag{1.4}$$

Требуется построить асимптотическое разложение решения данной задачи, обеспечивающее равномерное по t из некоторого промежутка $[0, t_0]$ приближение решения при $\varepsilon \to 0$ с точностью до какой угодно степени ε. Значение $t_0 \in (0, \tilde{t}\,)$ выбирается так, чтобы отрезок $[0, t_0]$ был вложен в область определения коэффициентов асимптотического разложения в наиболее внешнем слое.

Задача (1.1), (1.2) является сингулярной, поскольку из условия (1.3) следует, что хотя бы в одном из уравнений системы (1.1) малый параметр является коэффициентом при производной. Применение к ней метода согласования асимптотических разложений будет заключаться в построении цепочки согласованных асимптотических разложений, хорошо приближающих точное решение задачи в соответствующих слоях, объединение которых включает упомянутый выше отрезок $[0, t_0]$, и в преобразовании этой цепочки в единое составное разложение, для которого будет доказана теорема о равномерном приближении решения на всем отрезке $[0, t_0]$.

Каждый асимптотический слой имеет характерный масштаб по независимой переменной, определяемый заменой $\eta_j = \varepsilon^{-\lambda_j} t$, разложение в j-м слое будем строить в виде рядов

$$\tilde{W}_{j;i}(\eta_j, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{\alpha_{j;i;0}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha_{j;i;1}\, m} \sum_{n=0}^{\beta_{j;i;1}\, m + \beta_{j;i;0}} (\ln \varepsilon)^n w_{j;i;m,n}(\eta_j) \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \tag{1.5}$$

используя обозначения $W_{j;i}(\eta_j, \varepsilon) \equiv U_i(\varepsilon^{\lambda_j} \eta_j, \varepsilon)$ для искомых функций и подразумевая выполненными следующие неравенства:

$$\alpha_{j;i;1} > 0, \quad \alpha_{j;i;0},\ \beta_{j;i;0} \text{ и } \beta_{j;i;1} \geq 0. \tag{1.6}$$

На предварительном этапе нужно построить цепочку масштабирующих показателей

$$1 = \lambda_1 > \ldots > \lambda_j > \lambda_{j+1} > \ldots > \lambda_L = 0 \tag{1.7}$$

таких, чтобы $\forall j \in \{1, \ldots, L-1\}$ соответствующие значениям λ_j и λ_{j+1} главные члены асимптотик коэффициентов $w_{j;i;m,n}(\eta_j)$ и $w_{j+1;i;m,n}(\eta_{j+1})$ рядов (1.5) были согласованы между собой при $\eta_j \to \infty$ и $\eta_{j+1} \to 0$ соответственно. В цепочке (2.7) наиболее внутреннему разложению отвечает $\lambda_1 = 1$ (см. также замечание 1), для самого внешнего слоя $\lambda_L = 0$.

2. Постановка задачи о переходе между асимптотическими слоями

Рассмотрим два произвольных смежных асимптотических слоя, соответствующих цепочке (1.7), определяемых заменами независимой переменной $\eta_j = \varepsilon^{-\lambda_j} t$ и $\eta_{j+1}\varepsilon^{-\lambda_{j+1}} t$, соответственно. Цель данной статьи — на основании степенно-логарифмического вида (1.5) формального асимптотического разложения, сокращенно, ФАР, $\tilde{W}_{j;i}(\eta_j, \varepsilon)$ решения задачи (1.1), (1.2), построенном по стандартной процедуре, в $j-$м асимптотическом слое, перейти к более внешнему смежному $(j+1)-$му слою. Для этого в $(j+1)-$м слое для будущего ФАР $\tilde{W}_{j+1;i}(\eta_{j+1}, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ имеющего вид (1.5), будет построен набор функций $\bar{w}_{j+1;i;p,q}(\eta_{j+1})$, обозначенных ниже как $\bar{z}_{i;p,q}(\xi)$, являющихся ФАР при $\eta_{j+1} \to 0$ уравнений соответствующей рекуррентной системы ОДУ. Функции $\bar{w}_{j+1;i;p,q}(\eta_{j+1})$ будут обладать тем важным свойством, что, во-первых, используя их, на практике обычно удается доказать существование и продолжимость на весь асимптотический слой точных решений этой рекуррентной системы ОДУ, для которых они являются настоящими асимптотическими разложениями, и во-вторых, ряд $\tilde{W}_{j+1;i}(\eta_{j+1}, \varepsilon)$ при подстановке в него полученных точных решений оказывается ФАР по $\varepsilon \to 0$ согласующимся с рядом $\tilde{W}_{j;i}(\eta_j, \varepsilon)$ (подробно о формальных рядах вообще и ФАР в частности и об условиях согласования см., например, [3, С. 9–10, 22]).

Будем предполагать, что искомое ФАР решения задачи (1.1), (1.2) обладает структурой ряда (1.5). Стандартная процедура, используемая, например, в монографии [3, с. 65], с помощью которой в каждом слое получается рекуррентная система ОДУ, состоит в следующем. Переменная η_j и ряды $\tilde{W}_{j;i}(\eta_j, \varepsilon)$ подставляются в исходную систему (1.1):

$$\varepsilon^{v_i - \lambda_j} \frac{d}{d\eta_j} \tilde{W}_{j;i}(\eta_j, \varepsilon) - f_i\big(\varepsilon^{\lambda_j} \eta_j, \tilde{W}_{j;1}(\eta_j, \varepsilon), \ldots, \tilde{W}_{j;h}(\eta_j, \varepsilon)\big) = 0. \tag{2.1}$$

Функция $f_i\bigl(t, U_1, \ldots, U_h\bigr)$ заменяется ее формальным рядом Тейлора $T_{f;i}$ в точке $\mathbf{Q}_j(\eta_j) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bigl(\varepsilon^{\lambda_j}\eta_j, \tilde{W}_{j;1}(\eta_j,\varepsilon), \ldots, \tilde{W}_{j;h}(\eta_j,\varepsilon)\bigr)$, существование и конечность которой вытекают из соотношений (1.6) и (1.7), и в таком виде подставляется в левую часть уравнения (2.1). В полученном дифференциальном выражении

$$\varepsilon^{v_i-\lambda_j}\frac{d}{d\eta_j}\tilde{W}_{j;i}(\eta_j,\varepsilon) - T_{f;i}\bigl(\varepsilon^{\lambda_j}\eta_j, \tilde{W}_{j;1}(\eta_j,\varepsilon), \ldots, \tilde{W}_{j;h}(\eta_j,\varepsilon)\bigr) \tag{2.2}$$

формально приводятся подобные и производится упорядочивание по степеням ε и $\ln\varepsilon$. Коэффициенты при этих степенях приравниваются к нулю (для соблюдения равенства нулю правой части уравнения (2.1)) — так получается искомая рекуррентная система ОДУ.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим случай $j = 1$, и пусть ряды вида (1.5) представляют внутреннее разложение и потому удовлетворяют начальному условию задачи (1.2), а коэффициенты этих рядов являются решениями описанной выше рекуррентной системы ОДУ. Условие $\lambda_1 \le 1$, входящее в цепочку неравенств (1.7), становится необходимым, если высказать следующее предположение, обычно реализуемое на практике. Предположим, что хотя бы для одного значения i, при котором $v_i = 1$, главный член ряда (1.5) удовлетворяет следующим ОДУ и начальному условию:

$$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ \ \varepsilon^{v_i-\lambda_j+\alpha_{j;i;0}}\frac{d}{d\eta_j}w_{j;i;0,0}(\eta_j) = f_i\bigl(\mathbf{Q}_j(\eta_j)\bigr), \tag{2.3}$$

$$\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ \ \varepsilon^{\alpha_{j;i;0}}w_{j;i;0,0}(\eta_j) = U_{i,0}\ne 0 \tag{2.4}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, причем хотя бы в одной точке изменения переменной η_j, лежащей во внутреннем слое, значение функции $f_i\bigl(\mathbf{Q}_j(\eta_j)\bigr)$ отлично от нуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий замечания следует, что показатель степени ε в левой части уравнения (2.3) должен быть равен нулю, поскольку правая часть этого уравнения и функция $w_{j;i;0,0}$ не зависят от ε. Аналогично из условий (1.4), (2.4) вытекает, что $\alpha_{j;i;0} = 0$, поэтому $\lambda_1 = v_i = 1$. Замечание доказано.

Поскольку везде ниже в данной статье будут рассматриваться λ_j и λ_{j+1} для одного фиксированного значения j, введем следующие обозначения без индекса j:

$$\begin{gathered}\lambda_1 = \lambda_j, \qquad \lambda_2 = \lambda_j + 1, \qquad \eta = \varepsilon^{-\lambda_1}t, \qquad \xi = \varepsilon^{-\lambda_2}t,\\ \tilde{W}_i(\eta,\varepsilon) \equiv \tilde{W}_{j;i}(\eta_j,\varepsilon), \quad \tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon) \equiv \tilde{W}_{j+1;i}(\eta_{j+1},\varepsilon),\end{gathered} \tag{2.5}$$

тогда выполняются соотношения

$$\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{\alpha_{i;0}}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{\alpha_{i;1}m}\sum_{n=0}^{\beta_{i;1}m+\beta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^n w_{i;m,n}(\eta)\ \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{2.6}$$

$$0 \le \lambda_2 < \lambda_1 \le 1. \tag{2.7}$$

Пусть набор функций $w_{i;m,n}(\eta)$ является решением найденной для коэффициентов ряда (2.6) рекуррентной системы ОДУ и подставлен в ряды (2.6). Рассмотрим частичные суммы таких рядов:

$$A_{a(i;M)}\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_{i;0}}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^{\alpha_{i;1}m}\sum_{n=0}^{\beta_{i;1}m+\beta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^n w_{i;m,n}(\eta), \tag{2.8}$$

здесь A_a обозначает оператор выделения частичной суммы, содержащей степени ε с показателями, не превосходящими значения a, которое принимается равным $a(i;M) = \alpha_{i;1}M + \alpha_{i;0}$. Заменим ряды (2.6) их частичными суммами (2.8) в дифференциальном выражении (2.2):

$$\varepsilon^{v_i-\lambda_1}\frac{d}{d\eta}A_{a(i;M)}\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon) - T_{f;i}\bigl(\varepsilon^{\lambda_1}\eta, A_{a(1;M)}\tilde{W}_1(\eta,\varepsilon), \ldots, A_{a(h;M)}\tilde{W}_h(\eta,\varepsilon)\bigr). \tag{2.9}$$

Поскольку функции $w_{i;m,n}(\eta)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям, то после упорядочивания выражения (2.9) по степеням ε и $\ln\varepsilon$ коэффициенты при некотором числе старших из этих степеней окажутся равными нулю. Предположим, что может быть выявлена взаимосвязь между аргументом M оператора $A_{a(i;M)}$ взятия конечной частичной суммы (2.8) и минимальным показателем P_i степени ε, при которой остаются ненулевые коэффициенты в выражении (2.9), причем эта взаимосвязь имеет вид неравенства:

$$P_i(M) \geq P_{i;1}M + P_{i;0}, \quad P_{i;1} > 0. \tag{2.10}$$

Пусть известны асимптотические разложения функций $w_{i;m,n}(\eta)$:

$$w_{i;m,n}(\eta) \overset{as}{=} \tilde{w}_{i;m,n}(\eta) \equiv \eta^{\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n+\gamma_{i;0}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-\gamma_{i;3}k} \sum_{l=0}^{\delta_{i;1}k+\delta_{i;0}} (\ln\eta)^l C_{i;m,n;k,l} \ \text{ при } \eta \to \infty, \tag{2.11}$$

допускающие почленное дифференцирование. Введем обозначения:

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad \tilde{\lambda} = \lambda_1\lambda^{-1} - 1 \geq 0, \quad \tilde{v}_{j;i} = \min\{0, v_i - \lambda_j\}.$$

Пусть коэффициенты $\alpha_{i;l}$, $\beta_{i;l}$, $\gamma_{i;l}$, $\delta_{i;l}$ при всех $i = 1\ldots h$ являются рациональными числами и удовлетворяют следующим условиям, среди которых находятся все условия (1.6):

$$\alpha_{i;1} > 0,\ \gamma_{i;1} > 0,\ \gamma_{i;2} > 0,\ \gamma_{i;3} > 0; \quad \alpha_{i;0},\ \beta_{i;0},\ \beta_{i;1},\ \delta_{i;0} \text{ и } \delta_{i;1} \geq 0, \tag{2.12}$$
$$\alpha_{i;1} - \lambda\gamma_{i;1} = 0, \tag{2.13}$$
$$\alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0} \geq 0, \tag{2.14}$$
$$\text{если } \beta_{i;0} > 0, \text{ то } \alpha_{i;0} > 0,\ \alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0} > 0, \tag{2.15}$$
$$\text{если } \delta_{i;0} > 0, \text{ то } \alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0} > 0. \tag{2.16}$$

Если $\beta_{i;0} = \beta_{i;1} = 0$, то в качестве $\gamma_{i;2}$ можно взять любое положительное число.

3. Процесс согласования асимптотических разложений

Везде в данной статье символом ν_i обозначается сколь угодно малая положительная константа. Ее вклад в показателе независимой переменной или малого параметра позволяет скомпенсировать стремление к бесконечности сомножителей вида степеней логарифмов независимой переменной или малого параметра, соответственно, в силу хорошо известного свойства:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \ \forall b > 0, \ \ \forall x_0 > 0 \ \text{ выполняются соотношения}$$
$$\Big((1+|\ln x|)^a = O(x^{-b}) \text{ при } x \in (0, x_0]\Big) \ \text{ и } \ \Big((1+|\ln x|)^a = O(x^b) \text{ при } x \in [x_0, +\infty)\Big). \tag{3.1}$$

В некоторых случаях будет особо указано, что в качестве ν_i можно взять ноль.

Обозначим через $\bar{W}_i(\eta, \varepsilon)$ формальные ряды, возникающие при подстановке асимптотик (2.11) в ряды (2.6):

$$\bar{W}_i(\eta,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_{i;0}} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{\alpha_{i;1}m} \sum_{n=0}^{\beta_{i;1}m+\beta_{i;0}} (\ln\varepsilon)^n \eta^{\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n+\gamma_{i;0}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-\gamma_{i;3}k} \sum_{l=0}^{\delta_{i;1}k+\delta_{i;0}} (\ln\eta)^l C_{i;m,n;k,l}. \tag{3.2}$$

Определение 1. Зададим на множестве всех пар рациональных чисел функцию $H(q_1, q_2)$ по следующему правилу: $\forall m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$, $\forall m_2, n_2 \in \mathbb{N}$ $H\big(\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}\big) = \frac{\text{НОД}(m_1n_2, m_2n_1)}{m_2n_2}$, где знаком НОД обозначается операция нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел. Обозначим $\mu_i = \lambda H(\gamma_{i;2}, \gamma_{i;3})$.

О п р е д е л е н и е 2. Следующим сочетанием символов: $A_{\varphi,\varepsilon}B^{0}_{\Psi,\xi}$ будем обозначать операцию выделения частичной суммы формального ряда, составленной из слагаемых вида $C\varepsilon^{A_1}(\ln\varepsilon)^{A_2}\xi^{B_1}(\ln\xi)^{B_2}$, показатели степеней в которых удовлетворяют неравенствам $A_1\le\varphi$ и $B_1\le\Psi$, причем величина Ψ может быть некоторой функцией от A_1 и A_2, аналогично, запись $A_{\varphi,\varepsilon}B^{\infty}_{\Psi,\eta}$ зададим неравенствами $A_1\le\varphi$ и $B_1\ge\Psi$.

Здесь A_1 и A_2 — «служебные» символы, обозначающие текущие значения показателей степеней ε и $\ln\varepsilon$ соответственно, при которых происходит отбор степеней η.

Обозначим частичные суммы рядов (3.2):

$$\bar W_{i;M,K}\equiv A_{\alpha_{i;1}M+\alpha_{i;0},\varepsilon}B^{\infty}_{\gamma_{i;0}+\gamma_{i;1}\alpha_{i;1}^{-1}(A_1-\alpha_{i;0})-\gamma_{i;2}A_2-\gamma_{i;3}K,\eta}\bar W_i(\eta,\varepsilon)$$
$$\equiv\varepsilon^{\alpha_{i;0}}\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^{\alpha_{i;1}m}\sum_{n=0}^{\beta_{i;1}m+\beta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^n\eta^{\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n+\gamma_{i;0}}\sum_{k=0}^{K}\eta^{-\gamma_{i;3}k}\sum_{l=0}^{\delta_{i;1}k+\delta_{i;0}}(\ln\eta)^lC_{i;m,n;k,l}. \tag{3.3}$$

Лемма 1. *Существует формальный ряд*

$$\bar Z_i(\xi,\varepsilon)\equiv\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}}\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^{\mu_ip}\sum_{q=0}^{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}p+\delta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^q\xi^{\gamma_{i;0}-\lambda^{-1}\mu_ip}\sum_{r=0}^{\infty}\xi^{\gamma_{i;1}r}\sum_{s=0}^{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}p+\delta_{i;0}-q}(\ln\xi)^sc_{i;p,q;r,s} \tag{3.4}$$

такой, что замена переменной $\eta=\varepsilon^{-\lambda}\xi$ в произвольной частичной сумме (3.3) *ряда* (3.2) *приводит к следующему результату:*

$$\bar W_{i;M,K}=\bar Z_{i;M,K}+\bar R_{i;M,K}(\xi,\varepsilon), \tag{3.5}$$

где

$$\bar Z_{i;M,K}\equiv A_{\alpha_{i;0}+\lambda(\gamma_{i,3}K-\gamma_{i;0}),\varepsilon}B^{0}_{\gamma_{i;1}M-\lambda^{-1}(A_1-\alpha_{i;0}),\xi}\bar Z_i(\xi,\varepsilon)$$
$$\equiv\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}}\sum_{p=0}^{\mu^{-1}\lambda\gamma_3K}\varepsilon^{\mu_ip}\sum_{q=0}^{\min\left\{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}p+\delta_{i;0},\ \beta_{i;1}M+\beta_{i;0}+\delta_{i;1}K+\delta_{i;0}\right\}}(\ln\varepsilon)^q\,\xi^{\gamma_0-\lambda^{-1}\mu p}$$
$$\times\sum_{r=0}^{M}\xi^{\gamma_{i;1}r}\sum_{s=0}^{\min\left\{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}p+\delta_{i;0}-q,\ \delta_{i;1}K+\delta_{i;0}\right\}}(\ln\xi)^sc_{i;p,q;r,s}. \tag{3.6}$$

Для остаточного члена $\bar R_{i;M,K}(\xi,\varepsilon)$ выполняется оценка

$$\bar R_{i;M,K}(\xi,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha_{i;0}+\lambda(\gamma_{i;3}K-\gamma_{i;0})}\xi^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}K}(\ln\varepsilon)^{\beta_{i;1}M+\beta_{i;0}+\delta_{i;1}K+\delta_{i;0}}(\ln\xi)^{\delta_{i;1}K+\delta_{i;0}}$$
$$\times O\big(\varepsilon^{\mu_i}\xi^{-\mu_i\lambda^{-1}}+\varepsilon^{\lambda\gamma_{i;2}(\beta_{i;1}M+\beta_{i;0})}\,\xi^{\gamma_{i;1}M-\gamma_{i;2}(\beta_{i;1}M+\beta_{i;0})}\big)\quad\textit{при } \xi<1. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы получается применением стандартных техник асимптотического анализа.

З а м е ч а н и е 2. Если $\beta_{i;1}=\beta_{i;0}=0$, то

$$\bar W_{i;M,K}=\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}}\sum_{p=0}^{K}\varepsilon^{\lambda\gamma_{i;3}p}\sum_{q=0}^{\delta_{i;1}p+\delta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^q\xi^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}p}\sum_{r=0}^{M}\xi^{\gamma_{i;1}r}\sum_{s=0}^{\delta_{i;1}p+\delta_{i;0}-q}(\ln\xi)^sc_{i;p,q;r,s}$$

и соотношение (3.5) с учетом обозначения (3.4) принимает вид

$$A_{\alpha_{i;0}+\lambda(\gamma_{i,3}K-\gamma_{i;0}),\,\xi}\,A_{\alpha_{i;1}M+\alpha_{i;0},\,\eta}\bar W_i(\eta,\varepsilon)$$
$$=A_{\alpha_{i;1}M+\alpha_{i;0},\,\eta}\,A_{\alpha_{i;0}+\lambda(\gamma_{i,3}K-\gamma_{i;0}),\,\xi}\bar Z_i(\xi,\varepsilon)\quad\text{при } \beta_{i;1}=\beta_{i;0}=0. \tag{3.8}$$

В общем случае тождество вида (3.8) не имеет места потому, что результирующая сумма (3.6) не является частью формального ряда $\bar{Z}_i(\xi,\varepsilon)$.

Используя сведения о пределах суммирования и шаге изменения показателя ε в формальном ряде (3.4), зададим эти параметры для ФАР $\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)$ вида (1.5), указанного в замене обозначений (2.5). Положим $\alpha_{j+1;i;0}=\alpha_{j;i;0}-\lambda\gamma_{j;i;0}, \alpha_{j+1;i;1}=\mu_i, \beta_{j+1;i;0}=\delta_{j;i;0}, \beta_{j+1;i;1}=\mu_i\delta_{j;i;1}(\lambda\gamma_{j;i;3})^{-1}$ и, таким образом, получим формальный ряд

$$\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)\equiv\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}}\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^{\mu_i p}\sum_{q=0}^{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}p+\delta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^q z_{i;p,q}(\xi), \tag{3.9}$$

с коэффициентами которого свяжем формальные ряды; в дальнейшем эти ряды должны стать асимптотиками функций $z_{i;p,q}(\xi)$ при $\xi\to 0$:

$$\bar{z}_{i;p,q}(\xi)=\xi^{\gamma_{i;0}-\lambda^{-1}\mu_i p}\sum_{r=0}^{\infty}\xi^{\gamma_{i;1}r}\sum_{s=0}^{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}p+\delta_{i;0}-q}(\ln\xi)^s c_{i;p,q;r,s}. \tag{3.10}$$

Если бы уже было известно, что ряды (3.10) являются асимптотиками функций $z_{i;p,q}(\xi)$, то в частном случае, когда $\beta_{i;1}=\beta_{i;0}=0$, равенство (3.8) представляло бы собой так называемое условие согласования асимптотических разложений [3, с. 19, 74]. Еще раз подчеркнем, что условие согласования на самом деле должно связывать настоящие ФАР $\tilde{W}_{j;i}(\eta_j,\varepsilon)$ и $\tilde{W}_{j+1;i}(\eta_{j+1},\varepsilon)$ вида (1.5) в двух смежных слоях следующим образом: коэффициенты $w_{j;i;m,n}(\eta_j)$ заменяются их асимптотиками при $\eta_j\to\infty$, коэффициенты $w_{j+1;i;m,n}(\eta_{j+1})$ заменяются их асимптотиками при $\eta_{j+1}\to 0$ и для полученных таким образом формальных рядов $\bar{W}_{j;i}(\eta_j,\varepsilon)$, $\bar{W}_{j+1;i}(\eta_{j+1},\varepsilon)$, соответственно, проверяется условие (3.8) с учетом замены обозначений (2.5). В нашем же случае о рядах $\bar{Z}_i(\xi,\varepsilon)\equiv\bar{W}_{j+1;i}(\eta_{j+1},\varepsilon)$ пока нельзя утверждать, что они получены подстановкой асимптотических разложений в ФАР задачи при $\varepsilon\to 0$ в слое с масштабной переменной ξ, но все же для формальных рядов $\bar{z}_{i;p,q}(\xi)$ ниже будет доказано, что они являются ФАР при $\xi\to 0$ уравнений рекуррентной системы ОДУ, определяющей коэффициенты ряда $\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)$, и этого на практике обычно бывает достаточно, чтобы доказать существование точных решений данной рекуррентной системы ОДУ, для которых $\bar{z}_{i;p,q}(\xi)$ являются асимптотическими рядами, и таким способом найти ФАР при $\varepsilon\to 0$, согласующееся с рядом $\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon)$. Кроме того, в общем случае тождество вида (3.8) не имеет места, поскольку результирующая сумма (3.6) перестает быть частичной суммой формального ряда $\bar{Z}_i(\xi,\varepsilon)$, но оценки для остаточного члена (3.7) оказывается достаточно, чтобы обосновать то, что полученное из таким образом согласованных разложений составное асимптотическое разложение равномерно при $t\in[0,t_0]$ приближает точное решение задачи (1.1), (1.2).

С помощью асимптотических разложений (2.11) коэффициентов ряда (2.6) при фиксированных значениях M и K несложно прийти к соотношению

$$\begin{aligned}&A_{\alpha_{i;1}M+\alpha_{i;0},\varepsilon}B^{\infty}_{\gamma_{i;0}+\gamma_{i;1}\alpha_{i;1}^{-1}(A_1-\alpha_{i;0})-\gamma_{i;2}A_2-\gamma_{i;3}K,\eta}\bar{W}_i(\eta,\varepsilon)\\&\quad=A_{\alpha_{i;1}M+\alpha_{i;0},\varepsilon}\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon)\,+\,O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\nu_i}\eta^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}(K+1)}\big)\end{aligned} \tag{3.11}$$

при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]$. В случае $\beta_{i;1}=\beta_{i;0}=\delta_{i;1}=\delta_{i;0}=0$ в формуле (3.11) можно положить $\nu_i=0$.

Получим теперь систему уравнений для функций $z_{i;p,q}(\xi)$ — коэффициентов рядов (3.9). Подстановка переменной $\xi=\varepsilon^{-\lambda_2}t$ и формальных рядов $\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)$ в исходную систему (1.1), приводит к системе уравнений

$$\varepsilon^{v_i-\lambda_2}\frac{d}{d\xi}\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)-f_i\big(\varepsilon^{\lambda_2}\xi,\tilde{Z}_1(\xi,\varepsilon),\dots,\tilde{Z}_h(\xi,\varepsilon)\big)=0. \tag{3.12}$$

Пусть функции $z_{i;p,q}(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений, полученной по стандартной схеме: функция $f_i\big(t, U_1, \ldots, U_h\big)$ заменяется ее формальным рядом Тейлора $T_{f;i}$ в точке $\mathbf{Q}_{j+1}(\xi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(\varepsilon^{\lambda_2}\xi, \tilde{Z}_1(\xi,\varepsilon), \ldots, \tilde{Z}_h(\xi,\varepsilon)\big)$ и в таком виде подставляется в левую часть уравнения (2.1). Пусть в полученном выражении $\varepsilon^{v_i-\lambda_2}\dfrac{d}{d\xi}\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon) - T_{f;i}\big(\varepsilon^{\lambda_2}\xi, \tilde{Z}_1(\xi,\varepsilon), \ldots, \tilde{Z}_h(\xi,\varepsilon)\big)$ формально приведены подобные и произведено упорядочивание по степеням ε и $\ln\varepsilon$:

$$\varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;0}}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;1}k}\sum_{n=0}^{\tilde{\beta}_{i;1}k+\tilde{\beta}_{i;0}}(\ln\varepsilon)^n\,G_{i;k,n}(\xi),$$

где $\tilde{\alpha}_{i;0}$, $\tilde{\alpha}_{i;1}$, $\tilde{\beta}_{i;0}$, $\tilde{\beta}_{i;1}$ — рациональные числа, причем $\tilde{\alpha}_{i;1} > 0$, $\tilde{\beta}_{i;0} \ge 0$, $\tilde{\beta}_{i;1} \ge 0$.

Предположим, что в выражение $G_{i;k,n}(\xi)$ могут входить функции $z_{i;p,q}(\xi)$ только с индексами p, удовлетворяющими условию $p \le k$, тогда систему уравнений

$$G_{i;k,n}(\xi) = 0 \tag{3.13}$$

можно будет рекуррентно решать относительно функций $z_{i;p,q}(\xi)$. Именно такая ситуация обычно имеет место на практике (например, в [3–5]), когда система уравнений $G_{i;k_0,n}(\xi) = 0$, $i = 1\ldots, h$, $n = 0, \ldots, \tilde{\beta}_{i;1}k_0 + \tilde{\beta}_{i;0}$ используется для нахождения функций $z_{i;k_0,q}(\xi)$, $q = 0, \ldots, \tilde{\beta}_{i;1}k_0 + \tilde{\beta}_{i;0}$. В этом случае уравнения вида (3.13), возникающие при подстановке всего формального ряда (3.9) или только его частичной суммы $A_{\alpha_{i;0}+\lambda(\gamma_{i,3}K-\gamma_{i;0}),\varepsilon}\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)$, не будут отличаться друг от друга, по крайней мере для $k \le K$.

Теорема 1. *Предположим, что*:

1) *ФАР системы уравнений* (2.1), *полученной из системы* (1.1) *подстановкой* $\eta = \varepsilon^{-\lambda_1}t$, *представляет собой ряды* (2.6), *чьи коэффициенты имеют асимптотические разложения* (2.11), *для которых выполнены условия* (2.10), (2.12)–(2.16);

2) *формальные ряды* (3.4) *получены переразложением формальных рядов* (3.2) *из переменной* η *в переменную* $\xi = \varepsilon^{-\lambda_2}t$;

3) *рекуррентная система уравнений* (3.13) *для нахождения функций* $z_{i;p,q}(\xi)$ — *коэффициентов рядов* (3.9) — *построена стандартным образом.*

Тогда невязки, возникающие при подстановке частичных сумм $B^0_{\gamma_{i;1}M-\gamma_{i;1}p+\gamma_{i;0},\xi}\bar{z}_{i;p,q}(\xi)$ *формальных рядов* (3.10) — *коэффициентов рядов* (3.4) — *в систему* (3.13) *вместо функций* $z_{i;p,q}(\xi)$, *будут удовлетворять оценке*

$$\bar{G}_{i;k,n}(\xi) = O\big(\xi^{h_k M}\big) \quad \text{при} \;\; \xi\in(0,\xi_1), \tag{3.14}$$

где ξ_1 *и* h_k — *некоторые положительные числа.*

Доказательство теоремы основывается на применении следующей леммы.

Лемма 2. *Пусть при любых значениях натуральных величин* S *и* p *выполнено равенство*

$$\sum_{k=0}^{S}\varepsilon^{\alpha_1 k+\alpha_0}\sum_{n=0}^{\beta_1 k+\beta_0}(\ln\varepsilon)^n\,G_{k,n,p}(\xi) = O\big(\xi^{\gamma_3 p+\gamma_2} + \varepsilon^{\delta_1 S+\delta_0}\xi^{-\gamma_1 S+\gamma_0}\big) \tag{3.15}$$

при всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *и* $\xi\in(\varepsilon^{\lambda},\xi_0)$, *где* $\xi_0 \le 1$. *Пусть справедлива исходная оценка*

$$G_{k,n,p}(\xi) = O\big(\xi^{\sigma_0-\sigma_1 k}\big), \;\; k = 0\ldots S, \quad \text{при}\; \xi\in(\varepsilon^{\lambda},\xi_0), \tag{3.16}$$

где $\alpha_1, \gamma_3, \delta_1$ *и* λ — *положительные,* β_0 *и* β_1 — *неотрицательные, а* $\alpha_0, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \delta_0, \sigma_0$ *и* σ_1 — *произвольные вещественные числа.* *Тогда*

$$\forall K\in\mathbb{N}\;\exists P\in\mathbb{N},\; \xi_1\in(0,\xi_0)\colon \forall k\le K\;\; \exists\nu_k>0\colon \forall p>P$$

$$\text{верна оценка}\;\; G_{k,n,p}(\xi) = O\big(\xi^{\nu_k p}\big) \;\text{при}\; \xi\in(0,\xi_1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве ξ_1 возьмем произвольное число из интервала $(0, \min\{1,\xi_0\})$ такое, что $\forall \xi \in (0,\xi_1)$ $\big((\ln\xi)^K \xi < 1\big)$, существование подобных чисел следует из (3.1). Фиксируем произвольное значение S, удовлетворяющее неравенствам: $S \geq K$, $S > \big(\alpha_1 K + a_0 + |\delta_0| + 1\big)\,(\delta_1)^{-1}$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} B = 2(\alpha_1 S + \alpha_0), \qquad C = \frac{1}{2}\min\{1,\alpha_1\}, \qquad \nu_k = \gamma_3\Big(\frac{C}{2B+C}\Big)^{k+1}, \\ M_{k;1} = C^{-1}\nu_k, \quad M_{k;2} = B^{-1}\min\{\gamma_3 - \nu_k, \nu_{k-1} - \nu_k\}, \qquad P_{-1} = 0, \end{gathered} \tag{3.17}$$

так как $\alpha_1 > 0$ по условию леммы, то B и C также являются положительными числами. Индукцией по $k = 0,\ldots,K$ докажем, что

$$\forall k \in \{0,\ldots,K\}\ \exists P_k \geq P_{k-1}\colon \forall p > P_k\ \ G_{k,n,p}(\xi) = O\big(\xi^{\nu_k p}\big) \text{ при } \xi \in (0,\xi_1). \tag{3.18}$$

Выделим в левой части соотношения (3.15) слагаемые, стоящие при $\varepsilon^{\alpha_1 k+\alpha_0}$, а все остальные слагаемые перенесем в правую часть и полученное равенство разделим на $\varepsilon^{\alpha_1 k+\alpha_0}$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\beta_1 k+\beta_0} (\ln\varepsilon)^n\, G_{k,n,p}(\xi) = \varepsilon^{-\alpha_1 k-\alpha_0}\bigg(&-\sum_{l=0}^{k-1}\varepsilon^{\alpha_1 l+\alpha_0}\sum_{n=0}^{\beta_1 l+\beta_0}(\ln\varepsilon)^n\, G_{l,n,p}(\xi) \\ &-\sum_{l=k+1}^{S}\varepsilon^{\alpha_1 l+\alpha_0}\sum_{n=0}^{\beta_1 l+\beta_0}(\ln\varepsilon)^n\, G_{l,n,p}(\xi) + O\big(\xi^{\gamma_3 p+\gamma_2} + \varepsilon^{\delta_1 S+\delta_0}\xi^{-\gamma_1 S+\gamma_0}\big)\bigg). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Осуществим проверку базы индукции (при $k = 0$) одновременно с доказательством шага индукции. Для этого в случае $k = 0$ докажем оценку (3.18) без использования каких-либо дополнительных предположений, а при $k \geq 1$ будем основываться на предположении индукции:

$$\forall l \in \{0,\ldots,k-1\}\ \exists P_l \geq P_{l-1}\colon \forall p > P_l\ \ G_{l,n,p}(\xi) = O\big(\xi^{\nu_l p}\big) \text{ при } \xi \in (0,\xi_1).$$

Оценка (3.15) выполняется для произвольных элементов множества $\{(\xi,\varepsilon)\colon 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ \varepsilon^\lambda < \xi < \xi_0\}$, в частности для точек графика некоторой функции $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$, определенной на интервале $\xi \in (0,\xi_0)$ и удовлетворяющей условию $(\varepsilon(\xi))^\lambda < \xi$. Подберем нужную функцию $\varepsilon(\xi)$ в виде $\varepsilon = \xi^{\mu_k p}$ с некоторой положительной постоянной μ_k; ограничимся рассмотрением значений $\xi \in (0,\xi_1)$. Заметим, что в этом случае, поскольку $\xi_1 < 1$, условие $\xi > \varepsilon^\lambda$ эквивалентно неравенству $1 < \mu_k\lambda p$, выполнение которого может быть достигнуто с помощью выбора достаточно большого значения параметра p. Подставим выражение $\varepsilon = \xi^{\mu_k p}$ и оценку (3.16) в соотношение (3.19) и, пользуясь при $k \geq 1$ предположением индукции, получим

$$\begin{aligned} \forall p > P_{k-1}\ \sum_{n=0}^{\beta_1 k+\beta_0}(\mu_k p\ln\xi)^n\, G_{k,n,p}(\xi) = \xi^{-(\alpha_1 k+\alpha_0)\mu_k p}\bigg(&\sum_{l=0}^{k-1}\xi^{(\alpha_1 l+\alpha_0)\mu_k p}\sum_{n=0}^{\beta_1 l+\beta_0}(\mu_k p\ln\xi)^n\, O\big(\xi^{\nu_l p}\big) \\ +\sum_{l=k+1}^{S}\xi^{(\alpha_1 l+\alpha_0)\mu_k p}\sum_{n=0}^{\beta_1 l+\beta_0}(\mu_k p\ln\xi)^n\, O\big(\xi^{\sigma_0-\sigma_1 l}\big) &+ O\big(\xi^{\gamma_3 p+\gamma_2} + \xi^{(\delta_1 S+\delta_0)\mu_k p-\gamma_1 S+\gamma_0}\big)\bigg) \end{aligned} \tag{3.20}$$

при $\xi \in (0,\xi_1)$. Для уравнения (3.20) запишем условие, что каждое из слагаемых в правой части равенства удовлетворяет ограничению $O\big(\xi^{\nu_k p}\big)$, в следующем виде:

$$\big(\gamma_3 - \nu_k - \mu_k(\alpha_1 k + \alpha_0)\big)p + \gamma_2 - 1 \geq 0, \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} \big(\mu_k(\delta_1 S + \delta_0 - \alpha_1 k - a_0) - \nu_k\big)p - \gamma_1 S + \gamma_0 - 1 \geq 0, \\ \big(\alpha_1\mu_k(l-k) - \nu_k\big)p - \sigma_1 l + \sigma_0 - 1 \geq 0, \quad l = k+1\ldots S, \\ \big(\alpha_1\mu_k(l-k) + \nu_l - \nu_k\big)p - 1 \geq 0, \quad l = 0\ldots k-1. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Вычитание единицы в конце левой части каждого из неравенств обеспечит учет асимптотического влияния сомножителей вида $(\ln\xi)^n$. При $k=0$ в правой части равенства (3.19) отсутствует первая двойная сумма и ограничение (3.22) исчезает вместе с ней.

Зададим конкретное значение величины P_k, используя обозначения (3.17):

$$P_k = \max\Big\{P_{k-1}, C(\nu_k\lambda)^{-1}, \frac{2+2|\gamma_2|}{\gamma_3-\nu_k}, \frac{C\big(\gamma_1 S+|\gamma_0|+1\big)}{\nu_k}, \frac{\sigma_1 S+|\sigma_0|+1}{\nu_k}, \frac{2}{\nu_{k-1}-\nu_k}\Big\}.$$

Из равенств (3.17) следует, что при таком P_k и произвольном $\mu_k\in[M_1,M_2]$ неравенства (3.21), (3.22) будут выполнены и, кроме того, будет верны соотношения $1<\mu_k\lambda p$, $P_k\geq P_{K-1}$.

Обозначим $m=[\beta_1 k+\beta_0]$; $\mu_k(i)$, $i=0,\ldots,m$, — некоторый набор точек отрезка $[M_1,M_2]$. Зафиксируем произвольное число $p>P_k$. Тогда из соотношения (3.20) вытекают оценки

$$\sum_{n=0}^{m}(\mu_k(i)p\ln\xi)^n\, G_{k,n,p}(\xi) = O\big(\xi^{\nu_k p}\big) \ \text{ при } \xi\in(0,\xi_1), \quad i=0,\ldots,m,$$

которые в матричной форме выглядят следующим образом:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{G}_{k,p}(\xi) = \Psi(\xi), \tag{3.23}$$

где $\mathbf{L}$ — матрица размерности $(m+1)\times(m+1)$ с элементами $L_{n,i} = (\mu_k(i)p\ln\xi)^n$, $i,n=0,\ldots,m$; $\mathbf{G}_{k,p}(\xi)$ и $\Psi(\xi)$ — матрицы-столбцы размерности $1\times(m+1)$, $||\Psi(\xi)|| = O\big(\xi^{\nu_k p}\big)$.

Выберем значения $\mu_k(i)$ таким образом, чтобы матрица $\mathbf{L}$ оказалась невырожденной и оценим норму обратной матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ (в качестве нормы возьмем норму матриц, согласованную нормой max для векторов).

Определитель матрицы $\mathbf{L}$ обозначим $\det\mathbf{L}$, тогда

$$\det\mathbf{L} = \det\mathbf{A}_m(\ln\xi)^{\frac{1}{2}m(m+1)}, \tag{3.24}$$

где $a_i=\mu_k(i)p$, матрица $\mathbf{A}_m$ состоит из элементов $(a_i)^n$, $\ i,n=0,\ldots,m$, не зависящих от ξ.

Докажем, что какое бы ни было целое число $m\geq 0$, обязательно найдутся числа $a_i=\mu_k(i)p$, где $\mu_k(i)\in[M_1,M_2]$, такие, что $\det\mathbf{A}_m\neq 0$. При $m=0$ матрица $\mathbf{A}_m$ состоит из одного элемента, равного 1, следовательно, $\det\mathbf{A}_0\neq 0$. Предположим, что для $0\leq m=m_0-1$ нашлись такие m чисел a_i из отрезка $[pM_1,pM_2]$ и выполняется доказываемое неравенство $\det\mathbf{A}_m\neq 0$, тогда убедимся в его справедливости для $m=m_0$ при добавлении к уже выбранным числам $\{a_i,\ i=0,\ldots,m-1\}$ еще одного числа a_m. Разложим определитель $\det\mathbf{A}_m$ по последнему столбцу:

$$\det\mathbf{A}_m = (a_m)^m\det\mathbf{A_{m-1}} + C_1\,(a_m)^{m-1} + \ldots + C_{m-1}\,a_m + C_m. \tag{3.25}$$

Предположим от противного, что при любом выборе числа a_m из промежутка $[pM_1,pM_2]$ определитель $\det\mathbf{A}_m=0$. Тогда многочлен, стоящий в правой части равенства (3.25), имеет более m корней, значит, по известной теореме алгебры все коэффициенты этого многочлена нулевые, но по предположению индукции коэффициент $\det\mathbf{A}_{m-1}$, стоящий при a_m^m, отличен от нуля. Это противоречие и доказывает, что нужное число a_m найдется.

Произведем оценку матрицы $\mathbf{L^{-1}} = \big(\det\mathbf{L}\big)^{-1}\ \tilde{\mathbf{L}}$, где матрица $\tilde{\mathbf{L}}$ составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы $\mathbf{L}$. Каждый элемент матрицы $\tilde{\mathbf{L}}$, а значит, и ее норма могут быть оценены выражением $O\big((\ln\xi)^{\frac{1}{2}n(n+1)}\big)$, поэтому согласно равенству (3.24) $\big\|\mathbf{L}^{-1}\big\| = \Big|\big(\det\mathbf{L}\big)^{-1}\Big|\ \|\tilde{\mathbf{L}}\| = O(1)$. Из соотношения (3.23) получим $\|\mathbf{G}_{k,p}(\xi)\|\leq\big\|\mathbf{L}^{-1}\big\|\ \|\Psi(\xi)\| = O\big(\xi^{\nu_k p}\big)$ и, таким образом, $G_{k,i,p}(\xi)=O\big(\xi^{\nu_k p}\big)$ при $\xi\in(0,\xi_1)$. Следовательно, утверждения базы и шага индукции доказано и доказательство леммы завершено.

Вернемся к доказательству теоремы 1.

1. Рассмотрим невязку, возникающую при подстановке в уравнение (2.1) других функций вместо функций $\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon)$. Для величины $R_{i;M}(\eta,\varepsilon) \equiv \mathcal{A}_i(A_{a(1;M)}\tilde{W}_1,\ldots,A_{a(h;M)}\tilde{W}_h)$

$$\exists\varepsilon_0>0\colon \forall M\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ \forall i\in 1,\ldots,h \ \text{ выполняется равенство}$$

$$R_{i;M}(\eta,\varepsilon)=\varepsilon^{P_i(M)-\nu_i}\,O\big(\eta^{P_i(M)\lambda^{-1}+\lambda_1\lambda^{-1}-1}\big) \quad \text{при } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),\quad \eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]. \tag{3.26}$$

Действительно, разложив функцию $f_i\big(t,U_1,\ldots,U_h\big)$ по формуле Тейлора в точке $\mathbf{Q}_j(\eta)$ вплоть до производных порядка N, увидим, что функцию $R_{i;M}(\eta,\varepsilon)$ можно записать в виде суммы:

$$R_{i;M}(\eta,\varepsilon)=R_{W';i;M}(\eta,\varepsilon)+r_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)+\rho_{i;M,N}(\eta,\varepsilon), \tag{3.27}$$

где $r_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)$ — часть полинома Тейлора $T_{f;i}\big(\varepsilon^{\lambda_1}\eta, A_{a(1;M)}\tilde{W}_1(\eta,\varepsilon),\ldots,A_{a(h;M)}\tilde{W}_h(\eta,\varepsilon)\big)$, в котором остались только слагаемые, содержащие степени ε, показатели которых превышают $P_i(M)$; $R_{W';i;M}(\eta,\varepsilon)$ — часть выражения $\varepsilon^{v_i-\lambda_1}\dfrac{d}{d\eta}A_{a(i;M)}\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon)$ с такими же ограничениями; $\rho_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)$ — соответствующий $T_{f;i}$ остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа.

Представим частичную сумму (2.8) в виде линейной комбинации произведений

$$\Omega_l=\varepsilon^{\alpha_{i(l);1}\,m(l)+\alpha_{i(l);0}}(\ln\varepsilon)^{n(l)}\omega_l(\eta), \tag{3.28}$$

здесь символом $\omega_l(\eta)$ для краткости обозначена функция $w_{i(l);\,m(l),\,n(l)}(\eta)$. Докажем, что произведение (3.28) ограничено при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ и $\eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]$. С помощью асимптотики (2.11) несложно получить оценку

$$\omega_l(\eta)=O\big(\eta^{\gamma_{i(l);0}+\gamma_{i(l);1}m(l)}(\ln\eta)^{\delta_{i(l);0}}\big) \quad \text{при } \eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]. \tag{3.29}$$

Для упрощения и краткости записи временно опустим индекс l, зафиксировав произвольное его значение. Будем записывать оценки при $\eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]$. Подставим в формулу (3.28) оценку (3.29):

$$\Omega=\varepsilon^{\alpha_{i;1}\,m+\alpha_{i;0}}(\ln\varepsilon)^nO\big(\eta^{\gamma_{i;0}+\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n}(1+|\ln\eta|)^{\delta_{i;0}}\big). \tag{3.30}$$

Сначала рассмотрим часть этого произведения: $\tilde{\Omega}=\varepsilon^{\alpha_{i;1}\,m}(\ln\varepsilon)^{n-\beta_{i;0}}\eta^{\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n}$ — и докажем, что $\tilde{\Omega}=O(1)$ при $\eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]$. Заметим, что из вида асимптотики (2.6) следует, что $0\le(n-\beta_{i;0})\le\beta_{i;1}m$. Рассмотрим различные варианты значений индексов m и n.

Если $m=0$ то произведение $\tilde{\Omega}=\eta^{-\gamma_{i;2}\beta_{i;0}}=O(1)$.

Если $m>0$ тогда: если $n=0$, то в силу неравенства $\gamma_{i;1}>0$ и равенства (2.13) получим $\tilde{\Omega}=O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;1}\,m}\eta^{\gamma_{i;1}m}\big)=O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;1}\,m}\varepsilon^{-\lambda\gamma_{i;1}m}\big)=O(1)$; если $n>0$, то, введя обозначения $a=\max\{0,\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n\}<\gamma_{i;1}m$, получим $\eta^{\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n}=O\big(\eta^a\big)=O\big(\varepsilon^{-\lambda a}\big)$; снова применим (2.13), чтобы получить взаимосвязь $\alpha_{i;1}m-\lambda a>\alpha_{i;1}m-\lambda\gamma_{i;1}m=0,$ из которой вытекает оценка $\varepsilon^{\alpha_{i;1}\,m}\eta^{\gamma_{i;1}m-\gamma_{i;2}n}=O\big(\varepsilon^b\big)$, где $b=\alpha_{i;1}m-\lambda a>0$, и с помощью (3.1) приходим к тому, что $\tilde{\Omega}=O\big(\varepsilon^b(\ln\varepsilon)^{n-\beta_{i;0}}\big)=O(1)$.

Теперь докажем ограниченность оставшейся части произведения (3.30):

$\bar{\Omega}=O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}}(\ln\varepsilon)^{\beta_{i;0}}\eta^{\gamma_{i;0}}(1+|\ln\eta|)^{\delta_{i;0}}\big)$. Заметим, что

$$\varepsilon^{\alpha_{i;0}}\eta^{\gamma_{i;0}}=\begin{cases}O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}}\big), & \text{если } \gamma_{i;0}\le 0,\\ O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}}\big), & \text{если } \gamma_{i;0}>0\end{cases} \ \text{при } \eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]. \tag{3.31}$$

Рассмотрим по отдельности различные варианты значений коэффициентов.

В случае $\delta_{i;0}>0$ согласно (2.16) верно неравенство $\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}>0$. Если при этом $\alpha_{i;0}=0$, то из неравенства $\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}>0$ следует, что $\gamma_{i;0}<0$, поэтому согласно условиям (2.12) и (2.15), из которых следует, что $\beta_{i;0}=0$, получим $\bar{\Omega}=O\big(\eta^{-|\gamma_{i;0}|}(1+|\ln\eta|)^{\delta_{i;0}}\big)=O(1)$. Если

$\alpha_{i;0} > 0$, то в оценке (3.31) независимо от знака $\gamma_{i;0}$ получится $O(\varepsilon^a)$, где $a > 0$. Поэтому, используя (3.1), имеем $\bar\Omega = O\big(\varepsilon^a(1+|\ln\varepsilon|)^{\beta_{i;0}+\delta_{i;0}}\big) = O(1)$.

В случае $\delta_{i;0} = 0$, если $\beta_{i;0} = 0$, то с помощью соотношений (3.31), (2.12) и (2.14) можно записать: $\bar\Omega = O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}}\eta^{\gamma_{i;0}}\big) = O(1)$. Если $\beta_{i;0} > 0$, то в соответствии с условием (2.15) выполняются неравенства $\alpha_{i;0} > 0$, $\alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0} > 0$. Если к условиям $\delta_{i;0} = 0$ и $\beta_{i;0} > 0$ добавляется $\gamma_{i;0} \le 0$, то $\bar\Omega = O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}}\eta^{\gamma_{i;0}}(\ln\varepsilon)^{\beta_{i;0}}\big) = O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}}(\ln\varepsilon)^{\beta_{i;0}}\big) = O(1)$. Если же $\gamma_{i;0} > 0$, то благодаря неравенству $\alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0} > 0$ и оценке (3.31) получим соотношение: $\bar\Omega = O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}}\eta^{\gamma_{i;0}}(\ln\varepsilon)^{\beta_{i;0}}\big) = O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\lambda\gamma_{i;0}}(\ln\varepsilon)^{\beta_{i;0}}\big) = O(1)$.

Таким образом, при любых значениях коэффициентов, удовлетворяющих условиям (2.12)–(2.16), величина Ω_l, а вместе с ней и вектор-функция $\mathbf{Q}_j(\eta)$ и все частичные суммы $A_{a(i;M)}\tilde W_i(\eta,\varepsilon)$ являются ограниченными на промежутке $\eta \in [1,\varepsilon^{-\lambda}]$. А тогда и функция $f_i(t, W_1, \dots, W_h)$, и ее производные, входящие как коэффициенты в полином Тейлора $T_{f;i}$ и функцию $r_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)$, будут ограничены вдоль кривой $\mathbf{Q}_j(\eta)$ и производные порядка $N+1$, вычисленные в соответствующей средней точке, которые фигурируют в записи функции $\rho_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)$, также будут ограниченными.

Функция $r_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)$ представляет собой линейные комбинации с ограниченными коэффициентами произведений вида

$$\prod_{l=1}^{s_1}\varepsilon^{\lambda_1 q(l)}\eta^{q(l)}\prod_{l=1}^{s_2}\varepsilon^{\alpha_{i(l);1}\,m(l)+\alpha_{i(l);0}}\,(\ln\varepsilon)^{n(l)}\,O\big(\omega_l(\eta)\big),\quad s_1+s_2\le N,\quad \text{все } q(l)\ge 1. \tag{3.32}$$

Причем для каждого из произведений (3.32) справедлива оценка

$$\varepsilon^{P_i(M)}\,O\big(\varepsilon^A(\ln\varepsilon)^B\eta^C(\ln\eta)^D\big), \tag{3.33}$$

$$\text{где }\ A = \lambda_1\sum_{l=1}^{s_1}q(l)\ + \sum_{l=1}^{s_2}(\alpha_{i(l);1}\,m(l)+\alpha_{i(l);0})\ -\ P_i(M) > 0, \tag{3.34}$$

$$B \le B_{\max} = (N+1)\max_{i=1\dots h}(\beta_{i;1}\,M+\beta_{i;0}),$$

$$C = \sum_{l=1}^{s_1}q(l)\ + \lambda^{-1}\sum_{l=1}^{s_2}(\alpha_{i(l);1}\,m(l)+\alpha_{i(l);0}), \tag{3.35}$$

$$D \le D_{\max} = (N+1)\max_{i=1\dots h}(\delta_{i;1}\,K+\delta_{i;0}). \tag{3.36}$$

При записи выражения (3.35) были использованы соотношения (2.13) и (2.14), из которых следует, что $\lambda\gamma_{i(l);1}\,m(l)+\lambda\gamma_{i(l);0} \le \alpha_{i(l);1}\,m(l)+\alpha_{i(l);0}$. С помощью соотношений (3.34), (3.35) и условия $\eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]$, из которого следует $\varepsilon \le \eta^{-\lambda^{-1}}$, запишем, что $\varepsilon^A\eta^C \le \eta^E$, где

$$\begin{aligned}E &= -A\lambda^{-1} + \sum_{l=1}^{s_1}q(l) + \Big(A - \lambda_1\sum_{l=1}^{s_1}q(l)\ + P_i(M)\Big)\lambda^{-1}\\ &= P_i(M)\lambda^{-1} + \big(1-\lambda_1\lambda^{-1}\big)\sum_{l=1}^{s_1}q(l) \le P_i(M)\lambda^{-1},\end{aligned}$$

поскольку $0 < \lambda \le \lambda_1-\lambda_2 \le \lambda_1$ и все $q(l)\ge 1$. С помощью (3.1) запишем оценку $(\ln\varepsilon)^{B_{\max}+D_{\max}}\times \varepsilon^{\nu_i} = O(1)$ при $\eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]$, а тогда из (3.33)–(3.36) получим

$$r_{i;M,N}(\eta,\varepsilon) = \varepsilon^{P_i(M)-\nu_i}\,O\big(\eta^{P_i(M)\lambda^{-1}}\big)\ \text{при } \eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]. \tag{3.37}$$

Аналогично $\rho_{i;M,N}(\eta,\varepsilon)$ представляет собой линейную комбинацию с ограниченными коэффициентами произведений вида (3.32), только на этот раз $s_1+s_2 = N+1$, кроме того, для показателей степеней ε во втором произведении выражения (3.32) выполняется неравенство

$$\alpha_{i(l);1}\,m(l)+\alpha_{i(l);0} \ge \sigma_{i(l)}, \tag{3.38}$$

$$\text{где } 0 < \sigma_i = \begin{cases}\alpha_{i;0}, & \text{если } \alpha_{i;0} > 0,\\ \alpha_{i;1}+\alpha_{i;0}, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{3.39}$$

Для степени ε, которая обязательно накопится в таком произведении вида (3.32), в силу неравенств (3.38), (3.39) и $q(l) \geq 1$ можно выписать оценку снизу:

$$A = \lambda_1 \sum_{l=1}^{s_1} q(l) + \sum_{l=1}^{s_2} (\alpha_{i(l);1}\, m(l) + \alpha_{i(l);0}) \geq \lambda_1 s_1 + \sum_{l=1}^{s_2} \sigma_{i(l);0} \geq (s_1 + s_2) G,$$

где $G = \min\{\lambda_1, \sigma_1, \dots \sigma_h\} > 0$. Поэтому, если выбрать N, удовлетворяющее условию $N + 1 \geq \max\{0, P_i(M)\} G^{-1}$, то получим, что для каждого из произведений, стоящих в линейной комбинации, составляющей функцию $\rho_{i;M,N}(\eta, \varepsilon)$,справедлива совершенно такая же оценка (3.33)–(3.36), как для $r_{i;M,N}(\eta, \varepsilon)$. Поэтому теми же самыми рассуждениями можно прийти к выводу, аналогичному соотношению (3.37), что $\rho_{i;M,N}(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{P_i(M) - \nu_i}\, O\big(\eta^{P_i(M)\lambda^{-1}}\big)$ при $\eta \in [1, \varepsilon^{-\lambda}]$.

Подобным образом проанализируем функцию $R_{W';i;M}(\eta, \varepsilon)$, входящую в состав формулы (3.27). Она является линейной комбинацией с числовыми коэффициентами произведений вида $\varepsilon^{\alpha_{i;1}\, m + \alpha_{i;0} + v_i - \lambda_1} (\ln \varepsilon)^n \dfrac{d}{d\eta} w_{i;\, m,\, n}(\eta)$. Точно так же, как это было сделано выше для выражений (3.32), для этих произведений можно записать оценку: $\varepsilon^{P_i(M)}\, O\big(\varepsilon^A (\ln \varepsilon)^B \eta^C (\ln \eta)^D\big)$, где $A = \alpha_{i;1}\, m + \alpha_{i;0} + v_i - \lambda_1 - P_i(M) > 0$, $C = \lambda^{-1}(\alpha_{i;1}\, m + \alpha_{i;0}) - 1$, $B \leq \beta_{i;1}\, M + \beta_{i;0}$, $D \leq \delta_{i;1}\, M + \delta_{i;0}$. Вновь оценим $\varepsilon^A \eta^C$ как $O(\eta^E)$, где $E = -\lambda^{-1} A + C = -\lambda^{-1} A + \lambda^{-1}(A - v_i + \lambda_1 + P_i(M) - 1) \leq \lambda^{-1} P_i(M) \tilde{\lambda}$, так как $\tilde{\lambda} = \lambda_1 \lambda^{-1} - 1 + \lambda_1 \lambda^{-1} - 1$, $-v_i \leq 0$. Таким образом, $R_{W';i;M}(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{P_i(M) - \nu_i}\, O\big(\eta^{P_i(M)\lambda^{-1}}\big)$ при $\eta \in [1, \varepsilon^{-\lambda}]$, а тогда и для всей невязки (3.27) выполняется утверждение (3.26).

2. Пусть $\Psi_i = \Psi_i(\eta, \varepsilon)$ — произвольная функция, ограниченная и дифференцируемая по η на множестве $\big\{(\eta, \varepsilon) \colon \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \eta \in [1, \varepsilon^{-\lambda}]\big\}$.

Тогда для величины $R_{i;M;Q;\Psi}(\eta, \varepsilon) \equiv \mathcal{A}_i(A_{a(1;M)} \tilde{W}_1 + \Psi_1, \dots, A_{a(h;M)} \tilde{W}_h + \Psi_h)$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \colon \forall M \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \ \forall i \in 1, \dots, h \ \text{ выполняется равенство}$$

$$R_{i;M;Q;\Psi}(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{P_i(M) - \nu_i}\, O\big(\eta^{P_i(M)\lambda^{-1} + \tilde{\lambda}}\big) + \varepsilon^{v_i - \lambda_1} \frac{d}{d\eta} \Psi_i + \sum_{l=1}^{h} O(\Psi_l) \ \text{при}\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \eta \in [1, \varepsilon^{-\lambda}]. \tag{3.40}$$

В самом деле, если оценить по формуле Лагранжа приращение Δf_i функции $f_i\big(t, U_1, \dots, U_h\big)$ при изменении ее аргументов от точки $\big(\varepsilon^{\lambda_1}\eta, A_{a(1;M)} \tilde{W}_1(\eta, \varepsilon), \dots, A_{a(h;M)} \tilde{W}_h(\eta, \varepsilon)\big)$ к точке $\big(\varepsilon^{\lambda_1}\eta, A_{a(1;M)} \tilde{W}_1(\eta, \varepsilon) + \Psi_1, \dots, A_{a(h;M)} \tilde{W}_h(\eta, \varepsilon) + \Psi_h\big)$, получим $\Delta f_i = \sum_{l=1}^{h} \dfrac{\partial f_i}{\partial U_l}(\boldsymbol{\theta})\ \Psi_l$, где $\boldsymbol{\theta}$ принадлежит отрезку, соединяющему эти точки. Поскольку, как уже было отмечено выше, все функции $A_{a(i;M)} \tilde{W}_i(\eta, \varepsilon)$ являются ограниченными и добавки Ψ_i по условию тоже ограничены, то $\Delta f_i = \sum_{l=1}^{h} O(\Psi_l)$, поэтому при подстановке функций $A_{a(i;M)} \tilde{W}_i(\eta, \varepsilon)$ с добавками результат изменится на величину $\varepsilon^{v_i - \lambda_1} \dfrac{d}{d\eta} \Psi_i + \sum_{l=1}^{h} O(\Psi_l)$, что и доказывает свойство (3.40).

Отметим, что в случае, когда масштаб λ_1 соответствует самому внутреннему асимптотическому слою, можно продолжить оценку (3.26) на отрезок $[0, \varepsilon^{-\lambda}]$, заменив в ее правой части переменную η функцией $\tau(\eta) = \max\{1, \eta\}$. Если функции $\Psi_i(\eta, \varepsilon)$ продолжимы на этот отрезок, то после замены в первом слагаемом переменной η на $\tau(\eta)$ оценка (3.40) тоже будет верна на всем промежутке $[0, \varepsilon^{-\lambda}]$. Кроме того, в случае $\beta_{i;1} = \beta_{i;0}$ в оценках (3.26), (3.40) можно положить $\nu_i = 0$.

3. Для остаточного члена $R_{i;M;Q;\Psi}(\eta, \varepsilon)$, возникающего в формуле (3.40), верно равенство

$$R_{i;M;Q;\Psi}(\eta, \varepsilon) = \varepsilon^{P_i(M) - \nu_i}\, O\big(\eta^{P_i(M)\lambda^{-1} + \tilde{\lambda}}\big) + O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0} - \nu_i} \eta^{\gamma_{i;0} - \gamma_{i;3} K}\big) \ \text{при}\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \eta \in [1, \varepsilon^{-\lambda}], \tag{3.41}$$

если положить $\Psi_i = A_{\alpha_{i;1} M + \alpha_{i;0}, \varepsilon} \tilde{W}_i(\eta, \varepsilon) - A_{\alpha_{i;0} + \lambda(\gamma_{i,3} K - \gamma_{i;0}), \varepsilon} B^0_{\gamma_{i;1} M - \lambda^{-1}(A_1 - \alpha_{i;0}), \xi} \bar{Z}_i(\xi, \varepsilon)$.

Действительно, используя равенства (3.5) и (3.11), получим

$$\Psi_i = \bar{R}_{i;M,K}(\xi,\varepsilon) + O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\nu_i}\eta^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}(K+1)}\big) \quad \text{при } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \quad \eta\in[1,\varepsilon^{-\lambda}]. \tag{3.42}$$

Перейдем в оценке (3.7) к переменной $\eta=\varepsilon^{-\lambda}\xi$. Из неравенства (2.7) и того, что $t\le t_0$, следует, что $\varepsilon\eta\le t_0$, поэтому с помощью высказывания (3.1) оценим возникающие степени $\ln\varepsilon$ и $\ln\eta$, как $\varepsilon^{-\nu_i}$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\eta\in[1,\varepsilon^{-1}t_0]$, и придем к такому представлению

$$\bar{R}_{i;M,K}(\xi,\varepsilon) = O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\nu_i}\eta^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}K}\big) \quad \text{при } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \quad \eta\in[1,\varepsilon^{-1}], \tag{3.43}$$

подставляя которое в равенство (3.42) приходим к выводу, что для величины Ψ_i справедлива такая же оценка, т.е. выражение, стоящее в правой части соотношения (3.43). По свойству конечных сумм и в силу дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют члены ряда (2.6), получим, что для $\dfrac{d}{d\eta}\Psi_i$ тоже справедлива эта оценка. Тогда на основании равенства (3.40) получим оценку (3.41).

4. Если в частичной сумме ряда (3.9) функции $z_{i;p,q}(\xi)$ заменим частичными суммами их формальных асимптотических разложений (3.10) и в виде выражений (3.6) подставим в левую часть уравнения (3.12) вместо рядов $\tilde{Z}_i(\xi,\varepsilon)$, то получим в равенстве (3.12) невязку, удовлетворяющую оценке (3.41). Преобразуем получившееся равенство следующим образом. Разложим функцию $f_i\big(t,U_1,\dots,U_h\big)$ по формуле Тейлора в точке $\mathbf{Q}_{j+1}(\xi)$ вплоть до производных порядка $N\ge K$. Выделим в сумме производных функций $\bar{Z}_{i;M;K}$ и в полиноме Тейлора $r_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon)$ те слагаемые, в которых показатели степеней ε не превышают $\tilde{\alpha}_{i;0}+K\tilde{\alpha}_{i;1}$. Оставшиеся слагаемые этих выражений, а также остаточный член формулы Тейлора $\rho_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon)$ перенесем в правую часть равенства, к уже имеющемуся там невязочному члену с оценкой (3.41). В итоге получим соотношение

$$\varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;0}}\sum_{k=0}^{K}\varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;1}k}\sum_{n=0}^{\frac{\mu_i}{\lambda}\frac{\delta_{i;1}}{\gamma_{i;3}}k+\delta_{i;0}}(\ln\varepsilon)^n\,\bar{G}_{i;k,n}(\xi) = \bar{R}_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon), \tag{3.44}$$

$$\text{где}\quad \bar{R}_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon) = R_{Z';i;M,K}(\xi,\varepsilon) + \tilde{r}_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon) + \rho_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon) + R_{i;M;Q;\Psi}(\varepsilon^{-\lambda}\xi,\varepsilon), \tag{3.45}$$

здесь $\tilde{r}_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon)$ и $R_{Z';i;M,K}(\xi,\varepsilon)$ — суммы, всех тех слагаемых полинома $r_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon)$ и выражения $\dfrac{d}{d\xi}\bar{Z}_{i;M;K}$, соответственно, в которых показатели степеней ε больше $\tilde{\alpha}_{i;0}+\tilde{\alpha}_{i;1}K$.

5. Для величины $\bar{R}_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon)$, определяемой равенством (3.45), справедливо свойство

$$\exists\varepsilon_0>0\colon \forall\vartheta\in(0,\lambda)\ \ \forall K\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ \ \forall i\in 1,\dots,h \ \text{ выполняется равенство}$$

$$\bar{R}_{i;M,K,N}(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{-\nu_i-\lambda\tilde{\lambda}}O\big(\xi^{\tilde{\gamma}_{i;3}M+\tilde{\gamma}_{i;2}} + \varepsilon^{\tilde{\delta}_{i;1}K+\tilde{\delta}_{i;0}}\xi^{-\tilde{\gamma}_{i;1}K+\tilde{\gamma}_{i;0}}\big) \text{ при } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0),\ \xi\in[\varepsilon^{\vartheta},1], \tag{3.46}$$

если положить

$$\begin{aligned}
&\tilde{\gamma}_{i;3}=\lambda^{-1}P_{i;1}, && \tilde{\gamma}_{i;2}=\lambda^{-1}P_{i;0}+\tilde{\lambda}, && p=M,\\
&\tilde{\gamma}_{i;1}=\max\{\lambda^{-1}\tilde{\alpha}_{i;1},\,\gamma_{i;3}\}, && \tilde{\gamma}_{i;0}=\min\{-\lambda^{-1}(\tilde{\alpha}_{i;0}+\lambda_2)-1,\gamma_{i;0}\}, &&\\
&\tilde{\delta}_{i;1}=\max\{\tilde{\alpha}_{i;1},\,\lambda\gamma_{i;3}\}, && \tilde{\delta}_{i;0}=\lambda\tilde{\lambda}+\min\{\tilde{\alpha}_{i;0},\alpha_{i;0}+\tilde{v}_{j;i}-\lambda\gamma_{i;0}\}. &&
\end{aligned} \tag{3.47}$$

В самом деле, если перейти в соотношении (3.41) к переменной ξ и учесть формулу (2.10), то

$$\begin{aligned}
R_{i;M;Q;\Psi}(\varepsilon^{-\lambda}\xi,\varepsilon) &= O\big(\varepsilon^{-\nu_i-\lambda\tilde{\lambda}}\xi^{(P_{i;1}M+P_{i;0})\lambda^{-1}+\tilde{\lambda}}\big)\\
&+ O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}+\tilde{v}_{j;i}-\nu_i-\lambda(\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}K)}\xi^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}K}\big) \text{ при } \xi\in[\varepsilon^{\lambda},1].
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Рассмотрим частичную сумму (3.6), которую можно представить в виде линейной комбинации следующих произведений:

$$\Omega_l(\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{\mu_{i(l)}p(l)+\alpha_{i(l);0}-\lambda\gamma_{i(l);0}}\,(\ln\varepsilon)^{q(l)}\,\zeta_l(\xi), \tag{3.49}$$

здесь символом $\zeta_l(\xi)$ обозначена частичная сумма $B^0_{\gamma_{i(l);0}-\lambda^{-1}\mu_{i(l)}p(l)+\gamma_{i(l);1}M}\ \bar{z}_{i(l);\,p(l),\,q(l)}(\xi)$ ряда (3.10).

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые позволили доказать свойство (3.26), несложно доказать ограниченность при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\xi \in [\varepsilon^{\vartheta}, 1]$ произведения (3.49). Поэтому на промежутке $\xi \in [\varepsilon^{\vartheta}, 1]$ вектор-функция $\mathbf{Q}_{j+1}(\xi)$, все производные, входящие в состав полинома Тейлора $r_{i;M,K,N}(\xi, \varepsilon)$, и остаточный член $\rho_{i;M,K,N}(\xi, \varepsilon)$ являются ограниченными. Рассматривая полином $\tilde{r}_{i;M,K,N}(\xi, \varepsilon)$, являющийся линейной комбинацией произведений вида

$$\prod_{l=1}^{s_1} \varepsilon^{\lambda_2 \sigma(l)} \xi^{\sigma(l)} \prod_{l=1}^{s_2} \varepsilon^{\mu_{i(l)}p(l)+\alpha_{i(l);0}-\lambda\gamma_{i(l);0}} (\ln \varepsilon)^{q(l)} \ \ \zeta_l(\xi), \quad s_1 + s_2 \le N, \quad \text{все } \sigma(l) \ge 1, \quad (3.50)$$

по аналогии с $r_{i;M,N}(\eta, \varepsilon)$ получим оценку

$$\tilde{r}_{i;M,K,N}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;0}+\tilde{\alpha}_{i;1}K-\nu_i}\, O\big(\xi^{-\lambda^{-1}(\tilde{\alpha}_{i;0}+\tilde{\alpha}_{i;1}K)}\big) \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \ \xi \in [\varepsilon^{\vartheta}, 1]. \quad (3.51)$$

Функция $\rho_{i;M,N}(\xi, \varepsilon)$ также представляет собой линейную комбинацию с ограниченными коэффициентами произведений вида (3.50), только на этот раз $s_1 + s_2 = N + 1$, кроме того, для показателей степеней ε во втором произведении выражения (3.50) выполняется неравенство

$$\mu_{i(l)}p(l) + \alpha_{i(l);0} - \lambda\gamma_{i(l);0} \ge m_{i(l)}, \quad (3.52)$$

$$\text{где } 0 < m_i = \begin{cases} \alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0}, & \text{если } \alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0} > 0, \\ \mu_i + \alpha_{i;0} - \lambda\gamma_{i;0}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.53)$$

Для степени ε, которая накопится в таком произведении, в силу неравенств (3.52) и $\sigma(l) \ge 1$ можно записать оценку снизу:

$$A = \lambda_2 \sum_{l=1}^{s_1} \sigma(l) \ + \sum_{l=1}^{s_2} (\mu_{i(l)}p(l) + \alpha_{i(l);0} - \lambda\gamma_{i(l);0}) \ge \lambda_2 s_1 + \sum_{l=1}^{s_2} m_{i(l);0} \ge (s_1 + s_2)G,$$

где $G = \min\{\lambda_2, m_1, \dots m_h\} > 0$ и числа m_i определены формулой (3.53). Поэтому, если выбрать N, удовлетворяющее условию $N + 1 \ge (\tilde{\alpha}_{i;0} + \tilde{\alpha}_{i;1}K)G^{-1}$, то можно прийти к выводу, аналогичному соотношению (3.51), что

$$\rho_{i;M,K,N}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;0}+\tilde{\alpha}_{i;1}K-\nu_i}\, O\big(\xi^{-\lambda^{-1}(\tilde{\alpha}_{i;0}+\tilde{\alpha}_{i;1}K)}\big) \quad \text{при } \xi \in [\varepsilon^{\vartheta}, 1]. \quad (3.54)$$

Поступив похожим образом с функцией $R_{Z';i;M,K}(\xi, \varepsilon)$, входящей в состав формулы (3.45), получим в итоге

$$R_{Z';i;M,K}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;1}K+\tilde{\alpha}_{i;0}-\nu_i}\, O\big(\xi^{-\lambda^{-1}(\tilde{\alpha}_{i;1}K+\tilde{\alpha}_{i;0}+\lambda_2)-1}\big) \quad \text{при } \xi \in [\varepsilon^{\vartheta}, 1]. \quad (3.55)$$

Подставив оценки (3.55), (3.51), (3.54) и (3.48) в формулу (3.45), получим равенство

$$\begin{aligned} \bar{R}_{i;M,K,N}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^{\tilde{\alpha}_{i;1}K+\tilde{\alpha}_{i;0}-\nu_i}\, O\big(\xi^{-\lambda^{-1}(\tilde{\alpha}_{i;1}K+\tilde{\alpha}_{i;0}+\lambda_2)-1}\big) + O\big(\varepsilon^{-\nu_i-\lambda\tilde{\lambda}} \xi^{(P_{i;1}M+P_{i;0})\lambda^{-1}+\tilde{\lambda}}\big) \\ + O\big(\varepsilon^{\alpha_{i;0}-\nu_i-\lambda(\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}K)} \xi^{\gamma_{i;0}-\gamma_{i;3}K}\big), \end{aligned}$$

применив к которому обозначения (3.47), придем к требуемой оценке (3.46).

6. Вновь применив рассуждения, подобные тем, с помощью которых доказано свойство (3.26), придем к выводу, что для функций $G_{i;k,n}(\xi)$, являющихся коэффициентами в равенстве (3.44), справедлива оценка

$$G_{i;k,n}(\xi) = O\big(\xi^{-\lambda^{-1}(\tilde{\alpha}_{i;1}K+\tilde{\alpha}_{i;0}+\lambda_2)-1-\nu_i}\big). \quad (3.56)$$

7. Подставим оценку (3.46) в равенство (3.44), умноженное на $\varepsilon^{\nu_i+\lambda\tilde{\lambda}}$, и применим к результату подстановки Лемму 2, принимая $p = M$ и $s = K$ и используя соотношение (3.56), тогда сразу получим оценку (3.14).

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Поскольку рост значения M, определяющего верхний предел суммирования в частичной сумме (3.3) ряда (2.6), в принципе ничем не ограничен, то оценка (3.14) позволяет получить для функции $G_{i;k,n}(\xi)$ сколь угодно высокий порядок малости при $\xi \to 0$.

В некоторых случаях ФАР системы уравнений (2.1) не удается записать в виде единой системы рядов, удовлетворяющих условиям (2.12)–(2.16). Оказывается, заключение теоремы 1 остается верным в том случае, когда условия (2.12)–(2.16) выполняются не для самих рядов (2.11), а для некоторых их составляющих.

Теорема 2. *Пусть частичные суммы рядов* (2.6) *могут быть разложены на составляющие*

$$A_{a(i;M)}\tilde{W}_i(\eta,\varepsilon) = \sum_{p=1}^{s} A_{a(i;M)}\tilde{W}_{i;p}(\eta,\varepsilon) = \sum_{p=1}^{s} \varepsilon^{\alpha_{i;p;0}} \sum_{m=0}^{M_p} \varepsilon^{\alpha_{i;p;1}\,m} \sum_{n=0}^{\beta_{i;p;1}\,m+\beta_{i;p;0}} (\ln\varepsilon)^n w_{i;p;m,n}(\eta),$$

причем каждая из функций $w_{i;p;m,n}(\eta)$ *имеет асимптотическое разложение вида* (2.11)

$$\tilde{w}_{i;p;m,n}(\eta) \equiv \eta^{\gamma_{i;p;1}m-\gamma_{i;p;2}n+\gamma_{i;p;0}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta^{-\gamma_{i;p;3}k} \sum_{l=0}^{\delta_{i;p;1}k+\delta_{i;p;0}} (\ln\eta)^l C_{i;p;m,n;k,l} \quad \text{при } \eta\to\infty. \tag{3.57}$$

Пусть при каждом фиксированном значении $p=1,\ldots,s$ *коэффициенты построенных по аналогии с рядами* (3.2) *формальных рядов* $\bar{W}_{i,p}(\eta,\varepsilon)$ *удовлетворяют всем условиям* (2.12)–(2.16). *Пусть при подстановке рядов* (2.6) *в систему уравнений системы уравнений* (2.1) *выполняется условие* (2.10). *Тогда заключение теоремы* 1 *будет верно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (2.12)–(2.16) используются при доказательстве теоремы 1 только для того, чтобы обосновать ограниченность частичной суммы ряда и получить оценку произвольного члена возникающей линейной комбинации. В обоих этих случаях доказательство можно без каких-либо изменений провести отдельно для каждого из рядов $\tilde{W}_{i;p}(\eta,\varepsilon)$, определяемых формулой (3.57), и затем объединить результаты для получения общей оценки. Теорема 2 доказана.

Автор благодарен А.М. Ильину за постановку задачи и внимание к работе, А.Р. Данилину за обсуждение результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ван-Дайк М.** Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
2. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
3. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
4. **Ильин А.М., Леонычев Ю.А., Хачай О.Ю.** Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой// Мат. сб. 2010. Т. 22, № 1. С. 81–102.
5. **Ильин А.М., Хачай О.Ю.** Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. РАН. 2012. Т. 445, № 3. С. 256–258.

Хачай Олег Юрьевич
ассистент
Уральский федеральный университет
e-mail: khachay@yandex.ru

Поступила 10.09.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

УДК 517.957+517.988+519.833.2+519.837

ОБ ε-РАВНОВЕСИИ В БЕСКОАЛИЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ ИГРАХ СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ[1]

А. В. Чернов

Работа посвящена исследованию бескоалиционных вольтерровых функционально-операторных игр со многими участниками. Под функционально-операторными играми понимаются игры, связанные с управляемыми функционально-операторными уравнениями. Указанные игры представляют собой единообразную форму описания широкого класса дифференциальных игр, связанных с эволюционными уравнениями в частных производных. Вводится понятие абстрактного множества достижимости для функционально-операторных уравнений, а также доказывается его предкомпактность при сделанных предположениях. На ее основе доказывается существование ε-равновесия по Нэшу в смысле определяемых на базе вольтерровости кусочно-программных стратегий в играх исследуемого типа. В качестве примера сведения управляемой распределенной системы к изучаемому функционально-операторному уравнению и проверки сделанных предположений рассматривается смешанная задача для полулинейного волнового уравнения. Кроме того, приводится пример соответствующей игровой постановки.

Ключевые слова: функционально-операторная игра со многими участниками, кусочно-программные стратегии, ε-равновесие.

A. V. Chernov. On ε-equilibrium in noncooperative functional operator n-person games.

The paper is devoted to the investigation of noncooperative Volterra functional operator n-person games. Functional operator games are understood as games associated with controlled functional operator equations. Such games provide a uniform description for a wide class of differential games associated with evolutionary partial differential equations. We introduce the concept of abstract reachable set for functional operator equations and prove its precompactness under certain assumptions. The precompactness is used to prove the existence of a Nash ε-equilibrium in the sense of piecewise program strategies defined by means of the Volterra property in the games under consideration. As an example of the reduction of a controlled distributed-parameter system to a functional operator equation of the considered type, a mixed-value problem for a semilinear wave equation is considered, and the proposed hypotheses are verified for this equation. An example of a corresponding game statement is given.

Keywords: functional operator n-person game, piecewise program strategies, ε-equilibrium.

Введение

На сегодняшний день существует обширная литература, посвященная изучению различных вопросов теории дифференциальных игр, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями. В частности, в [1] была предложена общая схема исследования позиционных дифференциальных игр со многими участниками и векторными критериями в бескоалиционной, иерархической и кооперативной постановках (там же см. соответствующую библиографию). Что касается распределенных управляемых систем, то относящиеся к ним игровые задачи даже для случая двух игроков изучены, на наш взгляд, пока еще недостаточно. Среди известных результатов по этой теме укажем, например, работы [2–8]. Игры многих лиц, связанные с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, по-видимому, практически не исследовались.

В работе [8] был предложен метод сведения дифференциальных игр для нелинейных распределенных систем к так называемым функционально-операторным играм, а также описано

[1]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011), а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (проект НК-13П(9)).

применение этого метода для доказательства существования ситуации ε-равновесия (в кусочно-программных стратегиях) в антагонистическом случае. Там же см. примеры сведения дифференциальных игр, связанных с управляемыми распределенными системами, к функционально-операторным играм. См. также примеры в разд. 5, 6.

Данная работа посвящена получению достаточных условий существования ε-равновесия по Нэшу в кусочно-программных стратегиях в бескоалиционных функционально-операторных играх со многими участниками. В качестве вспомогательного утверждения доказывается результат о предкомпактности[2] множества достижимости функционально-операторного уравнения в лебеговом пространстве, представляющий, по мнению автора, самостоятельный интерес. Перейдем к конкретным формулировкам.

Пусть $n, m, \ell, s \in \mathbb{N}$ — заданные числа, $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое (измеримость здесь и далее понимается в смысле Лебега) ограниченное множество, Σ — σ-алгебра измеримых подмножеств множества Π, mes — мера Лебега на Σ, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\Pi)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(\Pi)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\Pi)$ некоторые лебеговы пространства функций, определенных на Π, (точнее, по пространству с мерой[3] $(\Pi, \Sigma, \mathrm{mes})$) с индексами суммируемости из $[1; +\infty)$. Модуль вектора понимаем как сумму модулей компонент. Все векторные неравенства трактуются покомпонентно; неравенства между функциями — в смысле п.в. Норму в пространстве $\mathcal{Z}^m$ понимаем как $\|.\|_{\mathcal{Z}^m} = \big\| |.| \big\|_{\mathcal{Z}}$. Аналогичным образом понимается норма в пространствах $\mathcal{X}^\ell$, $\mathcal{U}^s$ и т. п. Определим класс $\mathbb{F}(\ell, s, m; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z})$ всех функций $f(t, x, u)\colon \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, измеримых по $t \in \Pi$, непрерывных по $\{x, u\} \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и таких, что для всех $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$ суперпозиция $f\big(., x(.), u(.)\big) \in \mathcal{Z}^m$.

Предположим теперь, что для каждого $j = \overline{1, \nu}$ заданы: множество $\mathcal{D}_j \subset \mathcal{U}^s$, *линейный ограниченный оператор* (ЛОО) $A\{j\}\colon \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$, элемент $\theta\{j\} \in \mathcal{X}^\ell$ и функция $f\{j\}(t, x, u)\colon \Pi \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условию

F) $f\{j\} \in \mathbb{F}(\ell, s, m; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z})$.

Здесь значок $\{j\}$ мы используем как обозначение индекса.

Рассмотрим функционально-операторные уравнения, управляемые (по отдельности) различными ν игроками:

$$x\{j\} = \theta\{j\} + A\{j\}\big[f\{j\}(., x\{j\}, u\{j\})\big], \quad x\{j\} \in \mathcal{X}^\ell, \tag{0.1}$$

где $u\{j\} \in \mathcal{D}_j$ — управление. Как было показано в [8–12], к уравнению (0.1) с помощью *метода обращения главной части* дифференциального уравнения может быть сведен довольно широкий класс управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ). Это обстоятельство позволяет использовать данное уравнение как инструмент исследования различных вопросов теории управляемых распределенных систем, в частности, глобальной разрешимости [10; 11], сходимости численных методов оптимизации [13], существования ситуации ε-равновесия в дифференциальных играх, связанных с уравнениями в частных производных [8], оценки приращения решения [9], управляемости [12] и т. д.

Будем считать выполненными следующие априорные предположения.

H) Для каждого $j \in \overline{1, \nu}$ и $u\{j\} \in \mathcal{D}_j$ уравнение (0.1) имеет, и притом единственное, решение $x\{j\} = x\{j\}[u\{j\}] \in \mathcal{X}^\ell$. Более того, существуют функции $x_* \in \mathcal{X}$, $u_* \in \mathcal{U}$ такие, что $|x\{j\}[u\{j\}]| \leq x_*$, $|u\{j\}| \leq u_*$ для всех $u\{j\} \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1, \nu}$.

З а м е ч а н и е 1. Достаточные условия выполнения предположений **H**) можно найти в [10; 11; 14]; см. также [15].

Далее будем использовать обозначения: $\Omega = \mathcal{D}_1 \times \ldots \times \mathcal{D}_\nu$,

$$\vec{u} = \big\{u\{1\}, \ldots, u\{\nu\}\big\}, \quad \vec{x}[\vec{u}] = \big\{x\{1\}[u\{1\}], \ldots, x\{\nu\}[u\{\nu\}]\big\}.$$

[2]Здесь и на протяжении всей статьи предкомпактность и компактность понимаются в смысле сильной топологии.

[3]В дальнейшем вместо $L_p(\Pi, \Sigma, \mathrm{mes})$ будем писать $L_p(\Pi)$, $p \in [1; +\infty]$.

Пусть задан набор функций

$$\Phi_j(t,y)\colon \Pi\times\mathbb{R}^{\ell\nu}\to\mathbb{R},\quad j=\overline{1,\nu},$$

измеримых по $t\in\Pi$, непрерывных по $y\in\mathbb{R}^{\ell\nu}$ и удовлетворяющих условию

G) для всех $y\in\mathcal{X}^{\ell\nu}$ суперпозиция $\Phi_j\big(.,y(.)\big)$ принадлежит пространству $L_1(\Pi)$, $j=\overline{1,\nu}$.

Условия **H**) позволяют определить набор функционалов вида

$$J_j[\vec u]=\int\limits_{\Pi}\Phi_j\big(t,\vec x[\vec u](t)\big)\,dt,\quad j=\overline{1,\nu},\quad \vec u\in\Omega.$$

Целью игры для j-го игрока является максимизация своего выигрыша, заданного функционалом $J_j[\vec u]$, посредством управления $u\{j\}\in\mathcal{D}_j$, $j=\overline{1,\nu}$. При этом будем предполагать, что игроки используют кусочно-программные стратегии (см. далее). Сформулированную игру будем именовать игрой Γ.

1. Формулировка основного результата

Определим класс $\mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$ всех ЛОО $A\colon\mathcal{Z}^m\to\mathcal{X}^\ell$ таких, что для любого $r>0$ и множества

$$M_r=\big\{z\in L_\infty^m(\Pi)\colon \|z\|_{L_\infty^m(\Pi)}\le r\big\}$$

множество AM_r предкомпактно[4] в пространстве $\mathcal{X}^\ell(\Pi)$.

В дополнение к сформулированным выше будем считать выполненным следующее предположение:

A) $A\{j\}\in\mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$ для всех $j=\overline{1,\nu}$.

З а м е ч а н и е 2. Фактически, речь идет о компактности сужения оператора $A\{j\}$ на пространство $L_\infty^m(\Pi)$. В соответствии с [16, теорема XI.3.2, с. 427] интегральный оператор

$$A[z](t)=\int\limits_{\Pi}K(t,\xi)\,z(\xi)\,d\xi,$$

рассматриваемый как оператор $L_p(\Pi)\to L_q(\Pi)$, $p,q\in[1;+\infty]$, является компактным, если его ядро $K(t,\xi)$ суммируемо на множестве $\Pi\times\Pi$ со степенью r', где $r=\min\{p,q'\}$, а штрих означает сопряженный индекс. Следовательно, для интегрального оператора условие принадлежности классу $\mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$ будет выполнено, в частности, если ядро $K(t,\xi)$ суммируемо со степенью q.

З а м е ч а н и е 3. Пусть Q_Π — оператор продолжения нулем функции, заданной на множестве Π, на все пространство $\mathbb{R}^n$. Пользуясь критерием предкомпактности в пространстве $L_q(\Pi)$ (см., например, [17, § 10.5, теорема Рисса, с. 273–274]), условие принадлежности ЛОО $A\colon\mathcal{Z}^m\to\mathcal{X}^\ell$ классу $\mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$ в случае $\mathcal{X}=L_q(\Pi)$, $q\in[1;+\infty)$, можно переписать в виде

$$\sup_{z\in M_r}\sup_{|\tau|\le\delta}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|Q_\Pi A[z](t)-Q_\Pi A[z](t-\tau)\Big|^q\,dt\to+0\quad\text{при}\quad\delta\to+0.$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $A:\mathcal{Z}^m\to\mathcal{X}^\ell$ — ЛОО, P_H — оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества $H\in\Sigma$. Систему $\mathcal{B}(A)=\big\{H\in\Sigma\colon P_HAP_H=P_HA\big\}$ будем, следуя [18], называть системой *вольтерровых множеств* оператора A.

[4]т. е. вполне ограничено, что равносильно его относительной компактности.

Для всякого $H \in \mathcal{B}(A\{j\})$ мы можем получить H-локальный аналог уравнения (0.1), подействовав на него оператором P_H, и решение этого локального аналога искать в пространстве $P_H\mathcal{X}^\ell$. Указанное решение будем понимать как *H-локальное решение* уравнения (0.1). При этом П-локальное решение естественно назвать *глобальным решением* уравнения (0.1). Очевидно, что если уравнение (0.1) имеет глобальное решение $x\{j\} = x\{j\}[u\{j\}] \in \mathcal{X}^\ell$, то для всякого $H \in \mathcal{B}(A\{j\})$ оно имеет H-локальное решение $P_H x\{j\}[u\{j\}]$.

Определение 2. Пусть $A : \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — ЛОО. Подсистему

$$\mathcal{T} = \big\{\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\big\} \subset \mathcal{B}(A)$$

системы вольтерровых множеств оператора A будем, следуя [19], называть *вольтерровой цепочкой* этого оператора.

Далее всюду будем предполагать, что игроки подчиняются следующей иерархии: на каждом шаге (о понятии шага в функционально-операторной игре см. ниже) игроку ν известен как свой выбор, так и выбор остальных игроков на всех предыдущих шагах и на данном шаге; игроку j — свой выбор и выбор игроков $i = \overline{1, j-1}$ на данном шаге, а также свой выбор и выбор всех остальных игроков на всех предыдущих шагах, $j = \overline{1, \nu - 1}$. Уравнение (0.1) для каждого $j = \overline{1, \nu}$ предполагается известным всем игрокам (игра с полной информацией).

Далее мы введем понятие шага в игре, а также определим кусочно-программные стратегии, которые используются в данной игре. Обозначим $\mathcal{B}_0 = \bigcap_{j=1}^{\nu} \mathcal{B}(A\{j\})$. Будем считать, что система $\mathcal{B}_0$ нетривиальна (содержит не только $\varnothing$ и П) и достаточно богата.

Всякую вольтеррову цепочку $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \mathcal{B}_0$ будем называть *вольтерровой цепочкой в игре* Г. При этом систему множеств $\mathcal{T}^{(-)} = \big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} \colon i = \overline{1, k}\big\}$ будем называть *вольтерровым разбиением множества* П *в данной игре.* Далее мы будем исследовать подыгру игры Г, в которой цепочка $\mathcal{T}$ фиксирована.

Для вольтеррова разбиения $\mathcal{T}^{(-)} = \big\{h_i = H_i \setminus H_{i-1} \colon i = \overline{1, k}\big\}$, состоящего из k элементов, уравнение (0.1) распадается в систему k уравнений вида

$$\begin{cases} x_i\{j\} = \theta_i\{j\}[x_1\{j\}, \ldots, x_{i-1}\{j\}] + P_i A\{j\} P_i\big[f\{j\}(., x_i\{j\}, u_i\{j\})\big], \quad x_i\{j\} \in P_i\mathcal{X}^\ell, \\ i = \overline{1, k}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где приняты обозначения

$$P_i = P_{h_i},\ \theta_i\{j\} = P_i\theta\{j\} + \sum_{r=1}^{i-1} P_i A\{j\} P_r\big[f\{j\}(., x_r\{j\}, u_r\{j\})\big],\ u_i\{j\} = P_i u\{j\} \in P_i\mathcal{D}_j,\ i = \overline{1, k}.$$

В свою очередь, систему (1.1) можно решать последовательно от первого уравнения к k-му: зная решение первого уравнения $x_1\{j\}$, находим решение второго уравнения $x_2\{j\}$; зная решения $x_1\{j\}, x_2\{j\}$ первых двух уравнений, находим решение третьего уравнения $x_3\{j\}$ и т.д. Каждое i-е уравнение системы (1.1) будем называть i-м шаговым уравнением j-го игрока, $i = \overline{1, k}$. Соответственно этому, при заданном вольтерровом разбиении $\mathcal{T}^{(-)}$ множества П *ходом j-го игрока на i-м шаге* будем называть выбор управления $u_i\{j\} \in P_i\mathcal{D}_j$ и отыскание соответствующего решения $x_i\{j\} \in P_i\mathcal{X}^\ell$ i-го шагового уравнения данного игрока, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$. В силу предположений **H**) решение каждого шагового уравнения у каждого из игроков существует и единственно. С k-м шагом игра завершается, по найденным $u_i\{j\}$ и $x_i\{j\}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, \nu}$, находятся соответственно реализовавшиеся управления $u\{j\} = \sum_{i=1}^{k} u_i\{j\}$ и отвечающие им решения $x\{j\} = x\{j\}[u\{j\}] = \sum_{i=1}^{k} x_i\{j\}$ уравнения (0.1), а по ним, в свою очередь, определяются выигрыши игроков $J_j[\vec{u}]$, $j = \overline{1, \nu}$. Определенную таким образом игру будем обозначать $\Gamma_{\mathcal{T}}$.

Следующее понятие мы вводим в некотором смысле по аналогии с кусочно-программной стратегией в дифференциальной игре, связанной с обыкновенными дифференциальными уравнениями, из [20, гл. V]. Но есть и отличие: в [20, гл. V] было только два игрока, и они управляли двумя разными уравнениями, а определяемые стратегии учитывали возможность независимого выбора игроками вольтеррова разбиения. Мы же считаем здесь вольтеррово разбиение фиксированным.

Кусочно-программной стратегией j-го игрока в нашей игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будем называть отображение, ставящее в соответствие каждому $h_i \in \mathcal{T}^{(-)}$ и наборам $\{u_\kappa\{j\} \in P_\kappa \mathcal{D}_j : \kappa = \overline{1, i-1}$, $j = \overline{1,\nu}\}$, а также (с учетом дискриминации предыдущих игроков) набору $u_i\{\kappa\} \in P_i\mathcal{D}_\kappa$, $\kappa = \overline{1, j-1}$, управление $u_i\{j\} \in P_i\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$.

Множество всех кусочно-программных стратегий j-го игрока обозначим $\Sigma_{\mathcal{T}}^{(j)}$, $j = \overline{1,\nu}$. Управления $u\{j\} = \sum_{i=1}^k u_i\{j\} \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$, реализовавшиеся в результате выбора набора стратегий $\sigma = \{\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(\nu)}\} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)} \times \ldots \times \Sigma_{\mathcal{T}}^{(\nu)}$, будем обозначать $u^\sigma\{j\}$; $u^\sigma = \{u^\sigma\{1\}, \ldots, u^\sigma\{\nu\}\}$, а соответствующее им решение уравнения (0.1), построенное описанным выше движением по цепочке, — $x^\sigma\{j\}$. Тогда выигрыш j-го игрока в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$ будет определяться как

$$K_j[\sigma] = J_j[u^\sigma], \quad j = \overline{1,\nu}.$$

Напомним (см., например, [20]), что для любого $\varepsilon > 0$ набор (чистых) стратегий

$$\sigma_\varepsilon = \{\sigma_\varepsilon^{(1)}, \ldots, \sigma_\varepsilon^{(\nu)}\} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(1)} \times \ldots \times \Sigma_{\mathcal{T}}^{(\nu)}$$

называется *ε-оптимальным* в игре $\Gamma_{\mathcal{T}}$, если

$$K_j\big[\sigma_\varepsilon\big] \geq K_j\big[\sigma^{(j)} = \xi^{(j)}, \sigma^{(i)} = \sigma_\varepsilon^{(i)},\, i \neq j\big] - \varepsilon \quad \forall\, \xi^{(j)} \in \Sigma_{\mathcal{T}}^{(j)}, \quad j = \overline{1,\nu}.$$

Если такой набор σ_ε существует, то говорят, что игра имеет ситуацию ε-равновесия.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *При сделанных предположениях для любого $\varepsilon > 0$ игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ имеет ситуацию ε-равновесия.*

Доказательство теоремы 1 (см. далее разд. 3) будет основано на одном важном свойстве оператора $F\{j\}[x,u] = A\{j\}\big[f\{j\}\big(.,x(.),u(.)\big)\big]$, $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$, $j = \overline{1,\nu}$, которое устанавливается в разд. 2. Речь идет о предкомпактности образа каждого поточечно ограниченного по модулю (функцией в соответствующем пространстве) множества при отображении, осуществляемом указанным оператором (см. разд. 2).

2. О псевдокомпактности обобщенного оператора Гаммерштейна

Всюду в этом разделе для определенности будем считать, что $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_\omega(\Pi)$, $p, q, \omega \in [1; +\infty)$. Пусть $A \colon \mathcal{Z}^m \to \mathcal{X}^\ell$ — ЛОО, $f \in \mathbb{F}(\ell, s, m; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z})$. Оператор $F : \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{U}^s \to \mathcal{X}^\ell$, определяемый формулой $F[x,u] = A\big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\big]$, будем называть *обобщенным оператором Гаммерштейна* — ср. с [21, §I.3, п.5]. Зафиксируем неотрицательные функции $x_* \in \mathcal{X}$, $u_* \in \mathcal{U}$, и определим семейство

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}[x_*, u_*] = \big\{(x; u) \in \mathcal{X}^\ell \times \mathcal{U}^s \colon |x| \leq x_*,\, |u| \leq u_*\big\}.$$

Будем называть оператор F *псевдокомпактным*, если он всякое такое семейство отображает в предкомпактное множество.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathbb{F}(\ell, s, m; \mathcal{X}, \mathcal{U}, \mathcal{Z})$, $A \in \mathbb{A}(m, \ell; \mathcal{Z}, \mathcal{X})$. Тогда обобщенный оператор Гаммерштейна F псевдокомпактен.*

З а м е ч а н и е 4. Непосредственно из сделанных нами предположений, условия **A**) и теоремы 2 получаем, что оператор $F\{j\}[x,u] = A\{j\}\big[f\{j\}\big(.,x(.),u(.)\big)\big]$, $x \in \mathcal{X}^\ell$, $u \in \mathcal{U}^s$, псевдокомпактен для всех $j = \overline{1,\nu}$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $\mathcal{S}(\Pi)$ — пространство измеримых п.в. конечных функций на Π, $l \in \mathbb{N}$ — заданное число; $a(.), b(.) \in \mathcal{S}^l(\Pi)$ — измеримые на Π l-вектор-функции, $a(t) \le b(t)$ для п.в. $t \in \Pi$; $M[a;b] \equiv \big\{y \in \mathcal{S}^l(\Pi) : y(t) \in [a(t);b(t)]\big\}$.

Лемма 1. *Пусть функция $\Phi(t,y)\colon \Pi\times\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ измерима по $t \in \Pi$ и непрерывна по $y \in \mathbb{R}^l$. Тогда функция $\varphi(t) \equiv \max\limits_{y\in[a(t);b(t)]} \Phi(t,y)$ измерима на Π, и существует $\theta(.) \in M[a;b]$ такая, что для п.в. $t \in \Pi$ справедливо равенство $\Phi\big(t,\theta(t)\big) = \varphi(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 следует, например, непосредственно из [22, предложение Д1.2, с. 326, и теорема Д1.4, с. 327].

Следующее утверждение используется в [21, с. 51] без обоснования как известный факт. Насколько известно автору, в литературе приводится лишь доказательство для линейных операторов — см., в частности, [16, § IX.2, теорема 3, с. 322]. Тем не менее указанное доказательство практически дословно (с очевидными изменениями) переносится на нелинейный случай.

Лемма 2. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $\big\{F_\kappa\big\}_{\kappa\in\mathbb{N}}$ — последовательность операторов $X \to Y$, $F\colon X \to Y$ — заданный оператор, $M \subset X$ — заданное множество. Тогда если $\sup\limits_{x\in M} \|F_\kappa[x] - F[x]\|_Y \to 0$ при $\kappa \to \infty$ и множество $F_\kappa M$ предкомпактно в Y для всех $\kappa \in \mathbb{N}$, то множество FM предкомпактно в Y.*

Лемма 3. *Пусть $A \in \mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$. Тогда оператор A псевдокомпактен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_* \in L_p(\Pi)$ — заданная неотрицательная функция. Определим множество $M = \big\{z \in L_p^m(\Pi)\colon |z| \le z_*\big\}$. Докажем, что оператор A переводит множество M в предкомпактное. Для любого $\kappa \in \mathbb{N}$ определим оператор $T_\kappa\colon L_p^m(\Pi) \to L_\infty^m(\Pi)$ с помощью формулы:

$$T_\kappa[z](t) = \begin{cases} z(t), & \text{если} \quad |z(t)| \le \kappa, \\ 0, & \text{если} \quad |z(t)| > \kappa. \end{cases}$$

Соответственно, определим последовательность нелинейных операторов $A_\kappa\colon L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ с помощью формулы $A_\kappa[z] = AT_\kappa[z]$. Докажем, что

$$\sup_{z\in M}\big\|A_\kappa[z] - A[z]\big\|_{L_q^\ell(\Pi)} \to 0 \quad \text{при} \quad \kappa \to \infty.$$

Выберем произвольно $\overline{z} \in M$. Для каждого $\kappa \in \mathbb{N}$ обозначим $\Pi_\kappa = \Pi_\kappa[\overline{z}] = \big\{t \in \Pi\colon |\overline{z}(t)| \ge \kappa\big\}$. Очевидно, что

$$\int\limits_{\Pi_\kappa} |\overline{z}(t)|^p\,dt \ge \kappa^p \cdot \operatorname{mes}\Pi_\kappa.$$

Следовательно,

$$\operatorname{mes}\Pi_\kappa \le \frac{1}{\kappa^p}\int\limits_{\Pi_\kappa} |\overline{z}(t)|^p\,dt \le \frac{1}{\kappa^p}\int\limits_{\Pi} |z_*(t)|^p\,dt = \Big(\frac{\|z_*\|_{L_p(\Pi)}}{\kappa}\Big)^p \to +0$$

при $\kappa \to \infty$. Таким образом, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла Лебега, можем утверждать, что существует последовательность $\sigma_\kappa \to +0$ при $\kappa \to \infty$ такая, что

$$\|A\| \cdot \sup_{z\in M} \|z_*\|_{L_p(\Pi_\kappa[z])} \le \sigma_\kappa \quad \forall \kappa \in \mathbb{N}.$$

Оценим норму

$$\big\|A_\kappa[\overline{z}]-A[\overline{z}]\big\|_{L^\ell_q(\Pi)}\le\|A\|\cdot\big\|T_\kappa[\overline{z}]-\overline{z}\big\|_{L^m_p(\Pi)}=\|A\|\cdot\big\||\overline{z}|\big\|_{L_p(\Pi_\kappa)}\le\|A\|\cdot\|z_*\|_{L_p(\Pi_\kappa)}\le\sigma_\kappa$$

для всех $\overline{z}\in M$, $\kappa\in\mathbb{N}$. Согласно лемме 2 остается лишь показать, что множество $A_\kappa M$ предкомпактно для любого $\kappa\in\mathbb{N}$. Но поскольку

$$T_\kappa[z]\in M_\kappa=\big\{z\in L^m_\infty(\Pi)\colon |z|\le\kappa\big\}\quad\forall z\in M,$$

то последнее следует из определения класса $\mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Для п.в. $t\in\Pi$ обозначим

$$z_*(t)=\max\big\{\big|f(t,x,u)\big|\colon (x;u)\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^s,\ |x|\le x_*(t),\ |u|\le u_*(t)\big\}.$$

Согласно лемме 1 функция $z_*(t)$ измерима на множестве Π, и более того, существуют измеримые вектор-функции $\overline{x}\in\mathcal{S}^\ell(\Pi)$, $\overline{u}\in\mathcal{S}^s(\Pi)$, такие, что $|\overline{x}|\le x_*$, $|\overline{u}|\le u_*$, $\big|f\big(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)\big)\big|=z_*(t)$. Поскольку $x_*\in L_q(\Pi)$, $u_*\in L_\omega(\Pi)$, то в силу идеальности указанных банаховых пространств, $\overline{x}\in L^\ell_q(\Pi)$, $\overline{u}\in L^s_\omega(\Pi)$. Тогда по определению класса $\mathbb{F}(\ell,s,m;\mathcal{X},\mathcal{U},\mathcal{Z})$, $z_*\in L_p(\Pi)$. И по доказанному,

$$f\big(.,x(.),u(.)\big)\in M_*=\big\{z\in L^m_p(\Pi)\colon |z|\le z_*\big\}\quad\forall\,(x;u)\in\mathcal{N}[x_*,u_*].$$

Пользуясь леммой 3, заключаем, что множество $F\mathcal{N}[x_*,u_*]$ предкомпактно. □

3. Доказательство основного результата

Нам понадобится одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть функция $g(t,x)\colon\Pi\times\mathbb{R}^\mu\to\mathbb{R}$ такова, что $g\big(.,x_1(.),\ldots,x_\mu(.)\big)\in Z$ для всех $x_j\in X_j$, $j=\overline{1,\mu}$, где $X_j=X_j(\Pi)$, $j=\overline{1,\mu}$, $Z=Z(\Pi)$ — лебеговы пространства с индексами суммируемости из $[1;+\infty)$; $X=X_1\times\ldots\times X_\mu$. Тогда оператор $G\colon X\to Z$, определяемый формулой $G[x]=g\big(.,x(.)\big)$, является непрерывным и ограниченным.*

Для $\mu=1$ лемма 4 доказана в [21, § I.2, теорема 2.1, с. 31; теорема 2.2, с. 35]. Однако из анализа доказательства [21, § I.2, теорема 2.1, с. 31; теорема 2.2, с. 35] следует, что справедливо указанное обобщение.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Обозначим

$$\Xi_j\equiv\big\{\xi\in\mathcal{X}^\ell\colon \exists\,u\in\mathcal{D}_j\ \text{такое, что}\ x\{j\}[u]=\xi\big\},\quad j=\overline{1,\nu},$$

— *абстрактное множество достижимости уравнения* (0.1). Аналогичным образом, примем

$$\Xi_{ij}=\Xi_{ij}\big[x_1\{j\},\ldots,x_{i-1}\{j\}\big]$$

— абстрактное множество достижимости i-го шагового уравнения j-го игрока. В силу предположения **H**) и замечания 4 из разд. 2, все эти множества предкомпактны в пространстве $\mathcal{X}^\ell$. Непосредственно из леммы 4 и условия **G**) получаем, что функционалы

$$I_j[x_1,\ldots,x_\nu]=\int\limits_\Pi\Phi_j\big(t,x_1(t),\ldots,x_\nu(t)\big)\,dt,\quad j=\overline{1,\nu},\quad x_j\in\Xi_j,\quad j=\overline{1,\nu},$$

ограничены и непрерывны, а следовательно, и равномерно непрерывны на компакте $\Upsilon=\overline{\Xi}_1\times\ldots\times\overline{\Xi}_\nu$. Исходная игра $\Gamma_{\mathcal{T}}$ сводится к игре, в которой игроки вместо выбора шаговых управлений выбирают элементы из множеств достижимости

$$\Xi_{ij}\big[x_1\{j\},\ldots,x_{i-1}\{j\}\big],\quad x_{i-1}\{j\}\in\Xi_{i-1,j}\big[x_1\{j\},\ldots,x_{i-2}\{j\}\big],$$

и т. д. Эту новую игру будем обозначать $\Gamma'_{\mathcal{T}}$.

Выберем произвольно число $\varepsilon > 0$, а также некоторое число $\delta > 0$. Зафиксируем произвольно номер $j \in \overline{1,\nu}$. В силу предположения **H**) и замечания 4 из разд. 2 множество $\overline{\Xi}_{1j}$ компактно в $\mathcal{X}^\ell$, следовательно, в нем существует конечная δ-сеть Ξ_{1j}^δ. Из непрерывности функционала I_j следует, что замена множества $\overline{\Xi}_{1j}$ множеством Ξ_{1j}^δ приведет к сколь угодно малому изменению значения функционала I_j при всех достаточно малых δ. То же самое можно сказать и относительно замены каждого из множеств $\overline{\Xi}_{2j}[\xi]$ при $\xi \in \Xi_{1j}^\delta$ конечной δ-сетью $\Xi_{2j}^\delta[\xi]$. Продолжая эти построения по индукции, можем каждое из множеств $\overline{\Xi}_{ij}$ заменить конечной δ-сетью при некотором (одном и том же) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы для каждого значения функционала $I_j[x]$ при $x \in \Upsilon$ нашелся элемент y из редуцированного множества, построенного по описанной выше схеме, такой, что $|I_j[x] - I_j[y]| < \varepsilon$ для всех $j = \overline{1,\nu}$. Таким образом, с погрешностью ε игру $\Gamma'_{\mathcal{T}}$ можно заменить новой позиционной игрой $\Gamma^\varepsilon_{\mathcal{T}}$ с конечным числом шагов и конечным числом альтернатив на каждом шаге у каждого игрока. Согласно теореме Куна (см., например, [23, теорема 13.1, с. 150]), в такой игре существует ситуация равновесия по Нэшу, причем оптимальные стратегии игроков могут быть найдены по алгоритму Куна. Отсюда очевидным образом следует справедливость теоремы 1. $\square$

4. Об одной модификации основного результата

Пусть $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_p(\Pi)$, $\mathcal{U} = L_\omega(\Pi)$, $\overline{p} \in (p;+\infty)$. Предположим, что условие **F**) выполняется в следующей усиленной форме:

F$'$) $f\{j\} \in \mathbb{F}(\ell, s, m; L_q, L_\omega, L_{\overline{p}})$.

Покажем, что в этом случае утверждение теоремы 1 останется справедливым, если ослабить предположение **H**) следующим образом:

H$'$) Для каждого $j \in \overline{1,\nu}$, $u\{j\} \in \mathcal{D}_j$ уравнение (0.1) имеет, и притом единственное, решение $x\{j\} = x\{j\}[u\{j\}] \in \mathcal{X}^\ell$. Более того, существует константа $\gamma > 0$ такая, что $\|x\{j\}[u\{j\}]\|_{L_q^\ell(\Pi)} \leq \gamma$, $\|u\{j\}\|_{L_\omega^s(\Pi)} \leq \gamma$ для всех $u\{j\} \in \mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,\nu}$.

Из анализа доказательства теоремы 1 ясно, что изменения коснутся лишь ссылки на замечание 4 из разд. 2. С помощью формулы $\mathcal{F}_j[u] = f\{j\}\big(.,x\{j\}[u](.),u(.)\big)$ определим оператор $\mathcal{F}_j : \mathcal{D}_j \to L_{\overline{p}}^m(\Pi)$. Фактически, нам достаточно доказать, что множество $\Xi_j = \theta\{j\} + A\{j\}\mathcal{F}_j[\mathcal{D}_j]$ предкомпактно в $L_q^\ell(\Pi)$.

Заметим, прежде всего, что в соответствии с предположением **H**$'$) и леммой 4, множество $\mathcal{F}_j[\mathcal{D}_j]$ ограничено в пространстве $L_{\overline{p}}^m(\Pi)$. Поэтому предкомпактность множества Ξ_j проистекает непосредственно из следующей леммы и условия **A**).

Лемма 5. *Пусть $A \in \mathbb{A}(m, \ell; L_p, L_q)$. Тогда оператор A отображает любое множество, ограниченное в пространстве $L_{\overline{p}}^m(\Pi)$, в предкомпактное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любое число $r > 0$ и определим множество $M = \big\{z \in L_{\overline{p}}^m(\Pi) \colon \|z\|_{L_{\overline{p}}^m(\Pi)} \leq r\big\}$. Докажем, что оператор A переводит множество M в предкомпактное. Для любого $\kappa \in \mathbb{N}$ определим оператор $T_\kappa \colon L_p^m(\Pi) \to L_\infty^m(\Pi)$ с помощью формулы

$$T_\kappa[z](t) = \begin{cases} z(t), & \text{если} \quad |z(t)| \leq \kappa, \\ 0, & \text{если} \quad |z(t)| > \kappa. \end{cases}$$

Соответственно, определим последовательность нелинейных операторов $A_\kappa \colon L_p^m(\Pi) \to L_q^\ell(\Pi)$ с помощью формулы $A_\kappa[z] = AT_\kappa[z]$. Докажем, что

$$\sup_{z \in M} \Big\| A_\kappa[z] - A[z] \Big\|_{L_q^\ell(\Pi)} \to 0 \quad \text{при} \quad \kappa \to \infty.$$

Выберем произвольно $\overline{z} \in M$. Для каждого $\kappa \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\Pi_\kappa = \Pi_\kappa[\overline{z}] = \big\{t \in \Pi\colon |\overline{z}(t)| \geq \kappa\big\}.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\Pi_\kappa} |\overline{z}(t)|^{\overline{p}}\,dt \geq \kappa^{\overline{p}} \cdot \operatorname{mes}\Pi_\kappa.$$

Следовательно,

$$\operatorname{mes}\Pi_\kappa \leq \frac{1}{\kappa^{\overline{p}}} \int\limits_{\Pi_\kappa} |\overline{z}(t)|^{\overline{p}}\,dt \leq \frac{1}{\kappa^{\overline{p}}} \int\limits_{\Pi} |\overline{z}(t)|^{\overline{p}}\,dt = \Big(\frac{\|\overline{z}\|_{L^m_{\overline{p}}(\Pi)}}{\kappa}\Big)^{\overline{p}} \leq \Big(\frac{r}{\kappa}\Big)^{\overline{p}} \to +0$$

при $\kappa \to \infty$. Оценим норму

$$\big\|A_\kappa[\overline{z}] - A[\overline{z}]\big\|_{L^\ell_q(\Pi)} \leq \|A\| \cdot \big\|T_\kappa[\overline{z}] - \overline{z}\big\|_{L^m_p(\Pi)} = \|A\| \cdot \big\|\overline{z}\big\|_{L^m_p(\Pi_\kappa)}.$$

Рассмотрим

$$\big\|\overline{z}\big\|^p_{L^m_p(\Pi_\kappa)} = \int\limits_{\Pi_\kappa} |\overline{z}(t)|^p\,dt.$$

Заметим, что $|\overline{z}|^p \in L_\alpha(\Pi)$, где $\alpha = (\overline{p}/p) > 1$. Найдем число β из условия

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} + \frac{p}{\overline{p}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \beta = \frac{\overline{p}}{\overline{p} - p} > 1.$$

Согласно неравенству Гельдера получаем

$$\Big\|\overline{z}\Big\|^p_{L^m_p(\Pi_\kappa)} \leq \Bigg(\int\limits_{\Pi_\kappa} dt\Bigg)^{1/\beta} \Bigg(\int\limits_{\Pi_\kappa} |\overline{z}|^{\overline{p}}\,dt\Bigg)^{1/\alpha} \leq \big(\operatorname{mes}\Pi_\kappa\big)^{1/\beta} \big\|\overline{z}\big\|^p_{L^m_{\overline{p}}(\Pi_\kappa)},$$

откуда

$$\big\|\overline{z}\big\|^p_{L^m_p(\Pi_\kappa)} \leq \Big(\frac{r}{\kappa}\Big)^{\overline{p}-p} \cdot r^p = \Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^{\overline{p}-p} \cdot r^{\overline{p}} \to +0$$

при $\kappa \to \infty$. Из полученных оценок ясно, что существует последовательность $\sigma_\kappa \to +0$ при $\kappa \to \infty$ такая, что

$$\sup_{z \in M} \Big\|A_\kappa[z] - A[z]\Big\|_{L^\ell_q(\Pi)} \leq \sigma_\kappa \quad \forall\, \kappa \in \mathbb{N}.$$

Согласно лемме 2, остается лишь показать, что множество $A_\kappa M$ предкомпактно для любого $\kappa \in \mathbb{N}$. Но поскольку

$$T_\kappa[z] \in M_\kappa = \big\{z \in L^m_\infty(\Pi)\colon |z| \leq \kappa\big\} \quad \forall z \in M,$$

то последнее следует из определения класса $A \in \mathbb{A}(m,\ell;L_p,L_q)$. $\square$

5. Пример: сведение смешанной задачи для волнового уравнения к функционально-операторному уравнению

Приведем пример сведения управляемой распределенной системы к уравнению вида (0.1), а также проверки сделанных предположений. Однако прежде всего напомним определения используемых далее функциональных пространств (предполагая, что определение пространства С.Л. Соболева $W^1_2(\Pi)$ известно читателю).

Пусть числа $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ — произвольно фиксированы, $Q \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (звездная относительно шаровой подобласти) переменных $\widehat{t} \equiv \{t_2, \ldots, t_n\}$; $\Pi = [0,T] \times Q$ — заданный цилиндр в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $t = \{t_1, \widehat{t}\}$; $S \equiv (0,T] \times \partial Q$ — боковая поверхность цилиндра Π. Следуя [24, гл. 1, §§ 3,4], будем использовать обозначения:

$\dot{D}(Q) \subset W_2^1(Q)$ — совокупность всех непрерывно дифференцируемых в Q функций, равных нулю вблизи границы ∂Q;

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ — замыкание класса $\dot{D}(Q)$ в норме $W_2^1(Q)$;

$\dot{D}_1(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$ — совокупность всех непрерывно дифференцируемых в Π функций, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности S;

$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi)$ — замыкание класса $\dot{D}_1(\Pi)$ в норме $W_2^1(\Pi)$;

$\dot{D}_2(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$ — совокупность всех функций из $\dot{D}_1(\Pi)$, каждая из которых обращается в нуль при $t_0 \in [T-\delta, T]$, для некоторого $\delta \in (0,T]$;

$\overset{\circ}{D}_2(\Pi)$ — замыкание класса $\dot{D}_2(\Pi)$ в норме пространства $W_2^1(\Pi)$.

Пусть $n = 2$, $Q = (0, T_2)$; $c > 0$ — заданное число. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения

$$x''_{t_1t_1}(t) - c^2 x''_{t_2t_2}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \tag{5.1}$$

$$t \in \Pi = (0,T_1] \times (0,T_2);$$

$$\begin{cases} x(0,t_2) = \omega_1(t_2), \quad x'_{t_1}(0,t_2) = \omega_2(t_2), \quad t_2 \in (0,T_2); \\ x(t_1,0) = x(t_1,T_2) = 0, \quad t_1 \in (0,T_1]. \end{cases} \tag{5.2}$$

Будем предполагать, что $\omega_1(.) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,T_2)$ и $\omega_2(.) \in L_2(0,T_2)$, а функция $f(.)$ удовлетворяет условию **F**) при $\mathcal{X} = L_q(\Pi)$, $\mathcal{Z} = L_2(\Pi)$, $\ell = m = s = 1$, $q \in (2, \infty)$.

Рассмотрим для $z \in L_2(\Pi)$ вспомогательное уравнение

$$x''_{t_1t_1}(t) - c^2 x''_{t_2t_2}(t) = z(t), \quad t \in \Pi, \tag{5.3}$$

в совокупности с начально-краевыми условиями (5.2). Решение задачи (5.3), (5.2) понимаем как обобщенное в смысле [24, § 3.1, с. 126], см. также [10].

Справедливо следующее утверждение [24, теорема 5.2.5, с. 150].

Лемма 6. *Для любых функций $z \in L_2(\Pi)$, $\omega \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,T_2) \times L_2(0,T_2)$ существует единственное обобщенное решение $x \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi)$ задачи* (5.3), (5.2)*. Для этого решения справедливо энергетическое неравенство*

$$\|x\|_{W_2^1(\Pi)} \le K \cdot \big\{\|\omega\|_{W_2^1(0,T_2)\times L_2(0,T_2)} + \|z\|_{L_2(\Pi)}\big\}.$$

Поскольку $\mathrm{Ker} I[., \varphi]$ — линейное множество для любого $\varphi \in \overset{\circ}{D}_2(\Pi)$, то из леммы 6 следует, что всякое решение задачи (5.3), (5.2) представляется в виде $x = \Theta[\omega] + A[z]$, где $\Theta : \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,T_2) \times L_2(0,T_2) \to \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi)$, $A \colon L_2(\Pi) \to \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi)$ — ЛОО. А именно, $\Theta[\omega]$ — это решение задачи (5.3), (5.2) при $z = 0$, $A[z]$ — решение задачи (5.3), (5.2) при $\omega = 0$. Соответственно, исходная задача становится эквивалентной операторному уравнению:

$$x = \theta + A\big[f(., x, u)\big], \quad x \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi), \tag{5.4}$$

где $\theta = \Theta[\omega]$ (начальные данные ω считаем фиксированными). Кроме того, принятое нами понятие обобщенного решения задачи (5.1), (5.2) оказывается корректным, поскольку накладываемые нами условия на правую часть уравнения согласованы со свойствами операторов A и Θ, вытекающими из леммы 6. Заметим, что $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi) \subset W_2^1(\Pi)$. В силу теоремы вложения

С.Л.Соболева [24, теорема 1.3.10, с.35] пространство $W_2^1(\Pi)$ ограниченно вложено в $L_\kappa(\Pi)$ при любом $1 \le \kappa < q_n = 2n/(n-2)$, $n \ge 2$. В нашем случае $n = 2$, следовательно, $q_n = \infty$. Таким образом, в силу выбора q имеем ограниченное вложение: $W_2^1(\Pi) \subset L_q(\Pi)$, и уравнение (5.4) эквивалентно уравнению

$$x = \theta + A\big[f(.,x,u)\big], \quad x \in L_q(\Pi), \tag{5.5}$$

причем норма $\|A[z]\|_{L_q(\Pi)} \le M \cdot \|A[z]\|_{W_2^1(\Pi)}$, и согласно лемме 6 норма $\|A[z]\|_{W_2^1(\Pi)} \le K \times \|z\|_{L_2(\Pi)}$ для всех $z \in L_2(\Pi)$. Поэтому можно рассматривать оператор A как ЛОО $L_2(\Pi) \to L_q(\Pi)$. Уравнение (5.5) является уравнением вида (0.1) при указанном выборе пространств.

Достаточные условия выполнения предположения **H**) для уравнения (5.5) были установлены ранее (можно трактовать их как специальные условия относительно функции f), см. [10]. Далее считаем, что они выполнены. Там же было показано, что всякая система множеств вида

$$\mathcal{T} = \big\{\varnothing \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi\big\}, \quad H_i = \big\{t \in \Pi \colon t_1 \in [0;\tau_i]\big\}, \quad i = \overline{1,k},$$

где $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = T_1$, является вольтерровой цепочкой оператора A. Таким образом, для того, чтобы можно было пользоваться доказанными в статье результатами в отношении игр, связанных с распределенными системами вида (5.1), (5.2), остается лишь удостовериться в принадлежности оператора A классу $\mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$ (см. условие **A**)).

Можно показать, что $A[z]$, т. е. решение задачи (5.3), (5.2) при $\omega = 0$, $z \in L_2(\Pi)$ так же, как и в классическом случае, определяется формулой Даламбера

$$A[z](t) = \frac{1}{2\,c}\int\limits_{\Delta(t)} \hat z(\xi)d\xi, \quad t \in \Pi,$$

где $\Delta(t) = \big\{\xi \in \mathbb{R}^2 \colon \xi_1 \in [0;t_1],\, \xi_2 \in [t_2 - c(t_1-\xi_1); t_2 + c(t_1-\xi_1)]\big\}$ — попадающая в полосу $[0;t_1]\times\mathbb{R}$ часть характеристического конуса волнового уравнения (5.3) с вершиной t, а $\hat z(\xi)$ — четное с периодом $2T_2$ по переменной ξ_2 периодическое продолжение на всю полосу $[0,T_1]\times\mathbb{R}$ функции $z(\xi)$, заданной на множестве Π. Далее будем считать, что после этого оно продолжается нулем на все пространство $\mathbb{R}^2$.

Выберем произвольно $r > 0$. Очевидно, что для всех $z \in M_r = \{z \in L_\infty(\Pi) \colon \|z\|_{L_\infty(\Pi)} \le r\}$ периодические продолжения сохраняют оценку $|\hat z| \le r$. Поэтому для $t \in \Pi \cap (\Pi + \tau)$ имеем

$$\left|\chi_\Pi(t-\tau)\int\limits_{\Delta(t-\tau)} \hat z(\xi)\,d\xi - \chi_\Pi(t)\int\limits_{\Delta(t)} \hat z(\xi)\,d\xi\right| \le r\int\limits_{\Delta(t,\tau)} d\xi = r\,\mathrm{mes}\,\Delta(t,\tau),$$

где $\Delta(t,\tau) \equiv \Delta(t) \vartriangle \Delta(t-\tau)$. Для $t \notin \Pi \cup (\Pi+\tau)$ очевидно, что

$$\left|\chi_\Pi(t-\tau)\int\limits_{\Delta(t-\tau)} \hat z(\xi)\,d\xi - \chi_\Pi(t)\int\limits_{\Delta(t)} \hat z(\xi)\,d\xi\right| = 0.$$

Для $t \in (\Pi+\tau)\setminus\Pi$ имеем

$$\left|\chi_\Pi(t-\tau)\int\limits_{\Delta(t-\tau)} \hat z(\xi)\,d\xi - \chi_\Pi(t)\int\limits_{\Delta(t)} \hat z(\xi)\,d\xi\right| \le r\left|\chi_\Pi(t-\tau)\int\limits_{\Delta(t-\tau)} d\xi - \chi_\Pi(t)\int\limits_{\Delta(t)} d\xi\right|,$$

так как $\chi_\Pi(t) = 0$. Для $t \in \Pi\setminus(\Pi+\tau)$ оценка аналогична.

Заметим, что $\mathrm{mes}\,\Pi \vartriangle (\Pi+\tau)$, $\mathrm{mes}\,\Delta(t,\tau) \to 0$ при $|\tau| \to +0$ равномерно по $t \in \Pi$. Отсюда и из замечания 3 ясно, что $A \in \mathbb{A}(m,\ell;\mathcal{Z},\mathcal{X})$.

Отметим, что поскольку в определение оператора $A[z]$ входит не просто функция z, а ее периодическое продолжение, то оператор $F[x,u] = A\Big[f\big(.,x(.),u(.)\big)\Big]$ не является классическим оператором Гаммерштейна.

6. Пример игровой постановки

Поскольку все наши предположения относительно уравнения (5.5) как уравнения вида (0.1) выполняются, теорема 1 позволяет доказать существование ситуации ε-равновесия, например, в следующей игре.

Предположим, уравнение (5.1) управляется первым игроком. И кроме того, имеется еще два волновых уравнения

$$y''_{t_1t_1}(t) - c^2 y''_{t_2t_2}(t) = g\big(t, y(t), v(t)\big),$$
$$z''_{t_1t_1}(t) - c^2 z''_{t_2t_2}(t) = d\big(t, z(t), w(t)\big),$$

удовлетворяющих аналогичным предположениям и управляемых соответственно вторым и третьим игроком при начально-краевых условиях вида (5.2). Пусть $\sigma > 0$ — некоторое малое число. Первый, второй и третий игрок стремятся максимизировать соответственно первый, второй и третий из функционалов:

$$J_1[u,v,w] = \int\limits_{T_1-\sigma}^{T_1} dt_1 \int\limits_0^{T_2} \big[(x[u]-y[v])^2 + (x[u]-z[w])^2\big]\, dt_2\,,$$

$$J_2[u,v,w] = \int\limits_0^{T_1} dt_1 \int\limits_0^{T_2} \big[(y[v]-x[u])^2 + (y[v]-z[w])^2\big]\, dt_2\,,$$

$$J_3[u,v,w] = -\int\limits_{T_1-\sigma}^{T_1} dt_1 \int\limits_0^{T_2} \big[(z[w]-x[u])^2 + (z[w]-y[v])^2\big]\, dt_2\,,$$

$u \in \mathcal{D}_1$, $v \in \mathcal{D}_2$, $w \in \mathcal{D}_3$, где $\mathcal{D}_j$, $j = \overline{1,3}$, — поточечно ограниченные множества в пространстве $\mathcal{U}$. Эту игру можно интерпретировать следующим образом. Имеются три струны одинаковой длины с закрепленными концами. Первый игрок стремится на малом промежутке, примыкающем к финальному моменту времени T_1, привести свою струну в состояние, как можно более далекое от состояний второй и третьей струны. Второй игрок преследует аналогичную цель, но не в финальном смысле, а в смысле распределения по всему промежутку времени. Третий игрок стремится на малом промежутке, примыкающем к финальному моменту времени, привести свою струну в состояние, по возможности близкое к состояниям первой и второй струны. То, что вольтеррова цепочка фиксирована, означает, что весь промежуток времени разбит на некоторые фиксированные участки. На каждом из них решение принимает сначала первый игрок, затем — второй, и наконец, третий игрок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клейменов А.Ф.** Универсальное решение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре с векторными критериями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 97–105.
2. **Lions J.-L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. Vol. 30, no. 1. P. 1–68.
3. **Черноусько Ф.Л.** Граничные управления в системах с распределенными параметрами // Прикл. математика и механика. 1992. Т. 56, № 5. С. 810–826.
4. **Васильев Ф.П.** О двойственности в линейных задачах управления и наблюдения // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 11. С. 1893–1900.
5. **Il'in V.A., Tikhomirov V.V.** The wave equation with a boundary control at both endpoints and the complete vibration damping problem // Differ. Equations. 1999. Vol. 35, no. 5. P. 697–708.
6. **Соколов С.В.** О решении задачи дифференциальной игры для распределенных динамических систем // Проблемы управления и информатики. 2004. Т. 157, № 1. С. 71–77.

7. **Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М.** О некоторых игровых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1114–1121.
8. **Чернов А.В.** О вольтерровых функционально-операторных играх на заданном множестве // Мат. теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, вып. 1. С. 91–117.
9. **Чернов А.В.** О поточечной оценке разности решений управляемого функционально-операторного уравнения в лебеговых пространствах // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 2. С. 288–302.
10. **Чернов А.В.** Об одном мажорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2011, № 3. С. 95–107.
11. **Чернов А.В.** О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 3. С. 62–73.
12. **Чернов А.В.** О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1400–1414.
13. **Чернов А.В.** О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1616–1629.
14. **Чернов А.В.** О тотальном сохранении глобальной разрешимости функционально-операторных уравнений // Вест. Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 3. С. 130–137.
15. **Чернов А.В.** О вольтерровом обобщении метода монотонизации для нелинейных функционально-операторных уравнений // Вест. Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 2. С. 84–99. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
16. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
17. **Федоров В.М.** Курс функционального анализа. Спб.: Лань, 2005. 352 с.
18. **Сумин В.И., Чернов А.В.** Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1402–1411.
19. **Сумин В.И.** Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 3–21.
20. **Петросян Л.А, Зенкевич Н.А., Семина Е.А.** Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. 304 с.
21. **Красносельский М.А.** Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956. 392 с.
22. **Мордухович Б.Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
23. **Васин А.А., Морозов В.В.** Введение в теорию игр с приложениями к экономике. М.: Изд-во МГУ, 2003. 278 с.
24. **Ладыженская О.А.** Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: ГИТТЛ, 1953. 280 с.

Чернов Андрей Владимирович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Нижегородский государственный университет
e-mail: chavnn@mail.ru

Поступила 27.02.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 1 2013

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 15.02.13. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 38, 6. Уч.-изд. л. 31. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226