РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 18, № 4 2012

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 18 № 4 2012

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 18, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012. 340 с.

ISSN 0134–4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.977

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ НА КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ[1]

Р. Р. Акопян

Для классов аналитических в кольце (круге) функций изучаются несколько экстремальных задач, связанных с оператором аналитического продолжения: наилучшее приближение оператора, оптимальное восстановление оператора по заданным с ошибкой граничным значениям функции на окружности, наилучшее приближение одного класса функций другим.

Ключевые слова: приближение операторов, аналитические функции.

R. R. Akopyan. Best approximation for the analytic continuation operator on the class of analytic functions in a ring.

For classes of functions analytic in a ring (a disk), we study several extremal problems related to the analytic continuation operator: the best approximation of an operator, an optimal reconstruction of an operator from boundary values of a function on the circle given with an error, and the best approximation of one class of functions by another class.

Keywords: approximation of operators, analytic functions.

Настоящая работа посвящена изучению взаимосвязанных экстремальных задач на классе аналитических в кольце (и, как следствие, в круге) функций — наилучшего приближения оператора аналитического продолжения линейными ограниченными операторами, оптимального восстановления оператора аналитического продолжения (аналитической функции) по заданным с погрешностью граничным значениям функции на окружности, и является продолжением работы автора [1], в которой аналогичные задачи были решены на классе функций, аналитических в полосе. Кроме того, обсуждается двойственно связанная задача наилучшего приближения одного класса аналитических функций другим — результаты статьи Л.В.Тайкова [8].

1. Задачи наилучшего приближения и оптимального восстановления оператора аналитического продолжения

Пусть r, ρ, R — числа, удовлетворяющие неравенству $0 < r < \rho < R$. Введем следующие обозначения:

$$y := \ln \rho - \ln r, \quad Y := \ln R - \ln r;$$

$$\alpha := \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r} = \frac{Y - y}{Y}, \quad \beta := \frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r} = \frac{y}{Y}.$$

Определенные параметры удовлетворяют соотношениям $0 < y < Y, \quad \alpha + \beta = 1$.

В качестве области G будет выступать либо $C_{r,R} := \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z| < R\}$ — кольцо с центром в нуле, с внутренним и внешним радиусами r и R соответственно, либо $D_R := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ — круг с центром в нуле и радиусом R.

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

Для произвольного числа $\varrho > 0$ и функции f, след которой на окружности радиуса ϱ — функции $\phi_\varrho(t) := f(\varrho e^{it})$ из $L^p(0, 2\pi)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим через $I^p_\varrho(f)$ величину, определенную равенством

$$I^p_\varrho(f) := \|\phi_\varrho\|_{L^p(0,2\pi)} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\varrho e^{ix})|^p\, dx\right)^{1/p}, & \text{в случае } 1 \le p < \infty; \\ \operatorname{ess\,sup}\left\{|f(\varrho e^{ix})| \colon x \in [0, 2\pi]\right\}, & \text{в случае } p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $H^p(C_{r,R})$ — пространство Харди функций f, аналитических в кольце $C_{r,R}$, след которых на каждой окружности радиуса ϱ, $r < \varrho < R$, принадлежит пространству $L^p(0, 2\pi)$ и для которых

$$\sup\{I^p_\varrho(f) \colon r < \varrho < R\} < +\infty.$$

Будем полагать, что для каждой функции $f \in H^p(C_{r,R})$ задана пара функций ϕ_r и ϕ_R из $L^p(0, 2\pi)$, являющихся почти всюду на границах кольца некасательными пределами функции f, т. е. почти всюду определяемых равенствами

$$\phi_r(t) = \lim_{\varrho \to r+0} f(\varrho e^{it}), \quad \phi_R(t) = \lim_{\varrho \to R-0} f(\varrho e^{it});$$

в дальнейшем для граничных значений будем также использовать обозначения

$$f(re^{it}) := \phi_r(x), \quad f(Re^{it}) := \phi_R(x).$$

Кроме того, для функций f из пространства $H^p(C_{r,R})$ будем использовать представление в виде сходящегося в кольце $C_{r,R}$ степенного ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k\, z^k. \tag{1.1}$$

Классическое пространство Харди $H^p(D_R)$ функций, аналитических в круге D_R, является подпространством $H^p(C_{r,R})$ и состоит из функций f, след которых на каждой окружности радиуса ϱ, $0 < \varrho < R$, из $L^p(0, 2\pi)$ и для которых $\sup\{I^p_\varrho(f) \colon 0 < \varrho < R\} < +\infty$. Соответственно представление (1.1) функций пространства Харди $H^p(D_R)$ есть ряд Тейлора, т. е. $f_k = 0$, $k < 0$.

В пространстве Харди $H^p(G)$ выделим класс $Q^p_R(N)$, $N > 0$, (Q^p_R, в случае $N = 1$) функций f, чьи граничные значения на окружности радиуса R удовлетворяют неравенству $I^p_R(f) \le N$.

Задача о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства появилась в исследованиях С.Б. Стечкина в 1965 г. [6]. В его работе [7] 1967 г. была дана постановка задачи, приведены первые принципиальные результаты, дано решение задачи для операторов дифференцирования малого порядка. Последующие годы эта задача интенсивно изучалась в работах С.Б. Стечкина, В.В. Арестова, В.И. Бердышева, В.Н. Габушина, Ю.Н. Субботина, Л.В. Тайкова, А.П. Буслаева, В.Ф. Бабенко, В.Г. Тимофеева, О.А. Тимошина и многих других. К настоящему времени в задаче Стечкина получены следующие результаты. Выяснена взаимосвязь этой задачи с другими экстремальными задачами. Установлены количественные соотношения между модулем непрерывности линейного неограниченного оператора на классе элементов пространства, наилучшим приближением такого оператора и ошибкой оптимального восстановления значений оператора на элементах класса, заданных с известной погрешностью. Получены двойственные соотношения между первыми двумя задачами и, соответственно, наилучшим и наилучшим линейным приближениями одного класса другим. Получен ряд общих теорем существования и характеризации экстремального приближающего оператора. Хорошо изучено приближение функционалов. Дано решение задачи для конкретных операторов в классических функциональных пространствах. При этом наиболее полно исследовано наилучшее приближение операторов дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций $(0 \le k < n)$ в пространствах L^p на числовой оси и полуоси. Подробную информацию об исследованиях задачи Стечкина и взаимосвязанных с ней экстремальных задач можно найти в обзорной работе В.В. Арестова [2].

В настоящей статье рассматривается конкретная задача, а именно задача наилучшего приближения оператора аналитического продолжения функции с окружности с центром в нуле и радиусом r на окружность большего радиуса ρ линейными ограниченными операторами на классе Q_R^p функций, аналитических в области G. Точная постановка задачи такова.

З а д а ч а 1. Пусть $\mathcal{L}^p(N)$ — множество линейных ограниченных операторов в $L^p(0,2\pi)$, норма которых $\|T\| = \|T\|_{L^p(0,2\pi)\mapsto L^p(0,2\pi)}$ не превосходит числа $N \ge 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|\phi_\rho - T\phi_r\|_{L^p(0,2\pi)} \colon f \in Q_R^p\right\}$$

является уклонением оператора $T \in \mathcal{L}^p(N)$ от оператора аналитического продолжения на классе Q_R^p. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf\left\{U(T) \colon T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1.2}$$

есть наилучшее приближение оператора аналитического продолжения множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}^p(N)$ на классе Q_R^p. Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении экстремального оператора, на котором в (1.2) достигается нижняя грань.

Задача 1 тесно взаимосвязана с рядом экстремальных задач. Одной из них является следующая задача вычисления модуля непрерывности оператора аналитического продолжения на классе.

З а д а ч а 2. Функцию вещественного переменного $\delta \in [0,\infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{I_\rho^p(f) \colon f \in Q_R^p,\ I_r^p(f) \le \delta\right\}, \tag{1.3}$$

будем называть модулем непрерывности оператора аналитического продолжения на классе Q_R^p. Задача состоит в вычислении величины $\omega(\delta)$ и нахождении экстремальной функции, на которой в (1.3) достигается верхняя грань.

Через $\Omega(\lambda,\mu)$ обозначим вещественнозначную функцию двух неотрицательных переменных λ,μ, определяемую равенством

$$\Omega(\lambda,\mu) = \sup\left\{I_\rho^p(f) \colon I_r^p(f) \le \lambda,\ I_R^p(f) \le \mu\right\}. \tag{1.4}$$

Задачи о вычислении величин (1.3) и (1.4) эквивалентны. Действительно, из их определений следуют равенства

$$\omega(\delta) = \Omega(\delta,1),\ \delta \ge 0; \quad \Omega(\lambda,\mu) = \mu\,\omega(\lambda/\mu), \quad \lambda \ge 0, \quad \mu > 0.$$

Также из определения (1.4) следует, что для функций пространства $H^p(G)$ справедливо точное неравенство

$$I_\rho^p(f) \le \Omega(I_r^p(f), I_R^p(f)).$$

Для функций, аналитических в кольце, хорошо известно как “теорема Адамара о трех кругах” (см., например, [5, отд.3, гл.6, §3]) следующее неравенство:

$$\ln I_\rho^p(f) \le \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}\,\ln I_r^p(f) + \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}\,\ln I_R^p(f).$$

Иными словами, для произвольной фиксированной функции f из пространства $H^p(G)$ функция $\mathcal{I}(\eta) := \ln I_\rho^p(f)$, $\eta = \ln\rho$, является выпуклой на отрезке $[\ln r, \ln R]$.

Потенциируя последнее неравенство и подставляя выражения α и β через r, ρ и R, получим эквивалентное неравенство
$$I_\rho^p(f) \le I_r^p(f)^\alpha \, I_R^p(f)^\beta; \tag{1.5}$$
таким образом, справедливо неравенство $\Omega(\lambda,\mu) \le \lambda^\alpha \mu^\beta$ и, следовательно, $\omega(\delta) \le \delta^\alpha$.

Используя последовательность функций $g_n(z) = R^{-n} z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ($n \ge 0$ при $G = D_R$), нетрудно получить оценку снизу модуля непрерывности (1.3)
$$\omega(\delta) \ge v(\delta),$$
$$v(\delta) := \max\left\{R^{-\nu}\rho^\nu \colon \nu \in \mathbb{Z}, R^{-\nu} r^\nu \le \delta\right\} = R^{-n}\rho^n, \quad n = \left[\frac{\ln\delta}{\ln r - \ln R}\right],$$
где $[a]$ обозначает целую часть числа a. На функциях g_n неравенство (1.5) обращается в равенство и, следовательно, оценки модуля непрерывности сверху и снизу в точках $\delta_n = R^{-n} r^n$ совпадают, т. е. имеют место равенства
$$\omega(\delta_n) = \delta_n^\alpha. \tag{1.6}$$

Задачи восстановления значений оператора на элементах класса, принадлежащего области определения оператора, по информации об элементах класса, заданных с известной погрешностью, возникают в различных разделах математики и хорошо изучены. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества $\mathcal{R}$ операторов. В качестве $\mathcal{R}$, как правило, берется одно из следующих множеств отображений: множество $\mathcal{O}$ всех однозначных отображений, множество $\mathcal{B}$ ограниченных операторов или множество $\mathcal{L}$ линейных операторов. Различным задачам оптимального восстановления на классах аналитических функций посвящена монография [4].

Задачи 1 и 2 тесно взаимосвязаны со следующей задачей оптимального восстановления аналитической функции по граничным значениям (на одной из граничных окружностей), заданным с ошибкой.

З а д а ч а 3. Для числа $\delta \ge 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}$ определим величину
$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{\|\phi_\rho - T\psi\|_{L^p(0,2\pi)} \colon f \in Q_R^p,\ \psi \in L^p(0,2\pi),\ \|\phi_r - \psi\|_{L^p(0,2\pi)} \le \delta\right\}.$$
Тогда
$$\mathcal{E}_\mathcal{R}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta) \colon T \in \mathcal{R}\right\} \tag{1.7}$$
есть величина наилучшего (оптимального) восстановления оператора аналитического продолжения (аналитической функции) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q_R^p по их значениям на окружности с центром в нуле и радиусом r, заданных с ошибкой δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_\mathcal{R}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления — оператора, на котором в (1.7) достигается нижняя грань.

Введем обозначения
$$\Delta(N) := \sup\left\{\omega(\delta) - N\delta :\ \delta \ge 0\right\}, \quad N > 0; \tag{1.8}$$
$$l(\delta) := \inf\left\{E(N) + N\delta :\ N > 0\right\}, \quad \delta \ge 0. \tag{1.9}$$
Следующее утверждение, связывающее величины (1.2) и (1.3), является частным случаем теоремы С.Б. Стечкина [7].

Теорема A. *Имеют место неравенства*
$$E(N) \ge \Delta(N), \quad N > 0; \tag{1.10}$$
$$\omega(\delta) \le l(\delta), \quad \delta \ge 0. \tag{1.11}$$

В следующей теореме приведено уточнение неравенства (1.11), и она является частным случаем общего утверждения, связывающего задачу о модуле непрерывности оператора и задачу Стечкина с задачами оптимального восстановления (см. [2]).

Теорема B. *Имеют место неравенства*

$$\omega(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) \le l(\delta), \quad \delta \ge 0. \tag{1.12}$$

2. Предварительные замечания и утверждения

В работе автора [1] на классах функций, аналитических в полосе $\Pi_Y := \{z\colon 0 < \Im z < Y\}$, были решены задачи, аналогичные задачам 1–3. Точнее, на классе функций, аналитических в полосе Π_Y, с ограниченной единицей L^p-нормой граничных значений на прямой $\mathbb{R}+iY$, для оператора аналитического продолжения функции с вещественной оси на параллельную прямую $\mathbb{R}+iy,\ 0<y<Y$ были решены задачи о модуле непрерывности оператора, наилучшего приближения оператора линейными ограниченными операторами, оптимального восстановления оператора по граничным значениям функции на вещественной оси $\mathbb{R}$, заданных с погрешностью. А именно, в работе [1] было доказано, что для аналогов величин (1.2)–(1.4) и (1.7) при произвольных значениях $0<y<Y,\ N>0,\ \delta\ge 0$ и $1\le p\le\infty$ справедливы равенства

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}, \quad \omega(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \delta^{\alpha}, \quad \Omega(\lambda,\mu) = \lambda^{\alpha}\,\mu^{\beta}.$$

Наиболее интересной для нас сейчас является конструкция экстремального оператора в работе [1]. Рассмотрим функцию $K_{a,b}$, $a>0, b>0$, определенную на вещественной оси формулой

$$K_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} at}{\operatorname{sh}(a+b)t}, & t\ne 0;\\[2mm] \dfrac{a}{a+b}, & t=0. \end{cases}$$

Функция $K_{a,b}$ при произвольных положительных значениях параметров a и b является положительной, четной, непрерывной на вещественной оси и удовлетворяет равенству

$$K_{b,a}(t) = \Big(1 - e^{-bt}K_{a,b}(t)\Big)\,e^{-at}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Кроме того, для преобразования Фурье $\widehat{K_{a,b}}$ функции $K_{a,b}$, определяемого равенством

$$\widehat{K_{a,b}}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} K_{a,b}(t)\,e^{itz}\,dt,$$

справедливо [1, лемма 1] равенство

$$\widehat{K_{a,b}}(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{a+b}\;\frac{\sin\dfrac{a\pi}{a+b}}{\operatorname{ch}\dfrac{z\pi}{a+b}+\cos\dfrac{a\pi}{a+b}}\,.$$

Важным в дальнейшем является факт, что для произвольных значений параметров $a,b>0$ функция $\widehat{K_{a,b}}$ положительна на всей вещественной оси.

Экстремальным в [1] оператором является оператор (свертки) $A_\sigma = A_\sigma[y,Y]$, определяемый на пространстве $L^p(\mathbb{R})$ формулой

$$(A_\sigma f)\,(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{A}_\sigma\,(x-t)\;f(t)\,dt,$$

с ядром
$$\text{A}_\sigma(x) = e^{-y\sigma+i\sigma x}\,\widehat{K_{a,b}}(x) \ \text{ при } \ a = Y-y = \alpha Y, \quad b = y = \beta Y,$$
где вещественный параметр σ связан с параметрами задач равенствами $N = \alpha\, e^{-y\sigma}$, $\delta = e^{\sigma Y}$. Кроме того, отметим, что разность $f - A_\sigma f$ представима в виде свертки следа функции f на прямой $\mathbb{R}+iY$
$$f(x+iy) - (A_\sigma f)(x+iy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \text{U}_\sigma(x-t) f(t+iY)\,dt$$
с функцией U_σ, определенной формулой $\text{U}_\sigma(x) = e^{\sigma(Y-y)+i\sigma x}\widehat{K_{b,a}}(x)$.

Определим функцию $\Lambda = \Lambda_{a,b}$ следующей формулой:
$$\Lambda(x) := 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{K_{a,b}}(x+2k\pi). \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Для произвольных $a, b > 0$ функция $\Lambda = \Lambda_{a,b}$ положительна. При значениях параметров*
$$a = \ln R - \ln\rho, \quad b = \ln\rho - \ln r$$
справедливо равенство
$$\Lambda_{a,b}(x) = \lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \,\cos kt, \tag{2.2}$$
$$\lambda_0 = \alpha = \frac{\ln R - \ln\rho}{\ln R - \ln r}, \quad \lambda_k = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k \frac{1-\rho^{2k}R^{-2k}}{1-r^{2k}R^{-2k}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно из представления (2.1) и свойств функции $\widehat{K_{a,b}}$ следует, что функция Λ является 2π–периодической, четной, гладкой, положительной.

Вычислим коэффициенты λ_k в представлении (2.2) функции Λ или, что то же самое, в виде ряда Фурье
$$\Lambda_{a,b}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k\, e^{ikx}, \quad \lambda_k = \lambda_{-k}$$
при заданных значениях параметров a и b. Для произвольного целого k имеем
$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Lambda_{a,b}(x)\, e^{-ikx}\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{K_{a,b}}(x+2j\pi)\, e^{-ikx}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K_{a,b}}(x)\, e^{-ikx}\,dx = K_{a,b}(k).$$
Подставляя в явный вид значения функции $K_{a,b}(k)$ параметры $a = \ln R - \ln\rho$, $b = \ln\rho - \ln r$, получим представление (2.2). Лемма доказана.

Для произвольных $n \in \mathbb{Z}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$ на пространстве $L^p(0,2\pi)$ определим операторы (свертки) $\mathrm{T}_{n,\gamma} = \mathrm{T}_{n,\gamma}[r,\rho,R]$ и $\mathrm{U}_{n,\gamma} = \mathrm{T}_{n,\gamma}[r,\rho,R]$ формулами
$$\left(\mathrm{T}_{n,\gamma}\phi_r\right)(x) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \text{T}_{n,\gamma}\,(x-t)\ \phi_r(t)\,dt, \tag{2.3}$$
$$\left(\mathrm{U}_{n,\gamma}\phi_R\right)(x) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \text{U}_{n,\gamma}\,(x-t)\ \phi_R(t)\,dt,$$
в которых ядра определены равенствами
$$\text{T}_{n,\gamma}(x) = \rho^n r^{-n}\, e^{inx}\ \left[\gamma + \Lambda_{a,b}(x)\right], \quad \text{U}_{n,\gamma}(x) = \rho^n R^{-n}\, e^{inx}\ \left[-\gamma + \Lambda_{b,a}(x)\right] \tag{2.4}$$

при $a = \ln R - \ln\rho,\ b = \ln\rho - \ln r$.

Для функций f из пространства Харди $H^p(C_{r,R})$ с представлением (1.1) в виде ряда Лорана операторы $\mathrm{T}_{n,\gamma}$ и $\mathrm{U}_{n,\gamma}$ по лемме 1 можно выписать следующим образом:

$$(\mathrm{T}_{n,\gamma}\phi_r)(x) = \gamma\,\rho^n r^{-n}\, f_n\, e^{inx} + \rho^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{k-n} f_k\, r^{k-n}\, e^{ikx}, \tag{2.5}$$

где коэффициенты $\lambda_k = K_{a,b}(k)$ определены равенствами (2.2);

$$(\mathrm{U}_{n,\gamma}\phi_R)(x) = -\gamma\,\rho^n r^{-n}\, f_n\, e^{inx} + \rho^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{k-n} f_k\, R^{k-n}\, e^{ikx}, \tag{2.6}$$

где коэффициенты $\mu_k = K_{b,a}(k)$ определены равенствами

$$\mu_0 = \beta = \frac{\ln\rho - \ln r}{\ln R - \ln r}, \quad \mu_k = \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \frac{1 - r^{2k}\rho^{-2k}}{1 - r^{2k}R^{-2k}}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Лемма 2. *Для функций $f \in H^p(C_{r,R})$ и произвольного числа γ справедливо равенство*

$$(\mathrm{T}_{n,\gamma}\phi_r)(x) + (\mathrm{U}_{n,\gamma}\phi_R)(x) = \phi_\rho(x).$$

Доказательство. Используя представления операторов (2.5) и (2.6), для произвольной функции $f \in H^p(C_{r,R})$ имеем

$$(\mathrm{T}_{n,\gamma}\phi_r)(x) + (\mathrm{U}_{n,\gamma}\phi_R)(x) = \rho^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[r^{k-n}\lambda_{k-n} + R^{k-n}\mu_{k-n}\right] f_k\, e^{ikx}. \tag{2.7}$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках, применяя свойство функции $K_{a,b}$,:

$$\begin{aligned} r^{k-n}\lambda_{k-n} + R^{k-n}\mu_{k-n} &= \rho^{k-n}\left[r^{k-n}\rho^{-(k-n)}\lambda_{k-n} + R^{k-n}\rho^{-(k-n)}\mu_{k-n}\right] \\ &= \rho^{k-n}\left[e^{-b(k-n)}K_{a,b}(k-n) + e^{a(k-n)}K_{b,a}(k-n)\right] = \rho^{k-n}. \end{aligned}$$

Результат подставим в (2.7):

$$(\mathrm{T}_{n,\gamma}\phi_r)(x) + (\mathrm{U}_{n,\gamma}\phi_R)(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \rho^k e^{ikx} = \phi_\rho(x).$$

Лемма доказана.

Введем обозначение $\gamma_{a,b} = \min\{\Lambda_{a,b}(x)\colon x \in [0, 2\pi]\}$.

Для нас важно, что согласно лемме 1 для произвольных значений параметров $a, b > 0$ функция $\Lambda_{a,b}$ и, следовательно, $\gamma_{a,b}$ строго больше нуля. Поэтому для любых $a, b > 0$ отрезок $[-\gamma_{a,b}, \gamma_{b,a}]$ содержит нуль и имеет положительную меру.

Лемма 3. *Для норм операторов $\mathrm{T}_{n,\gamma} = \mathrm{T}_{n,\gamma}[r,\rho,R]$ и $\mathrm{U}_{n,\gamma} = \mathrm{U}_{n,\gamma}[r,\rho,R]$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $\gamma \in [-\gamma_{a,b}, \gamma_{b,a}]$ справедливы равенства*

$$\|\mathrm{T}_{n,\gamma}\| = \rho^n r^{-n}(\alpha + \gamma), \quad \|\mathrm{U}_{n,\gamma}\| = \rho^n R^{-n}(\beta - \gamma).$$

Доказательство. Из неотрицательности функции $\gamma + \Lambda_{a,b}(x)$ следует оценка

$$\|\mathrm{T}_{n,\gamma}\| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\rho^n r^{-n}\, e^{inx}\,[\gamma + \Lambda_{a,b}(x)]\right| dx = \rho^n r^{-n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\gamma + \Lambda_{a,b}(x)]\,dx = \rho^n r^{-n}[\gamma + \lambda_0].$$

Норма оператора достигается на функции $\phi_r^*(x) = e^{inx}$, которая является следом на окружности с центром в нуле и радиусом r функции $g_n(z) = r^{-n}z^n \in H^p(C_{r,R})$ (в случае $n \ge 0$, $g_n \in H^p(D_R)$).

Аналогично проводится оценка нормы оператора $\mathrm{U}_{n,\gamma}$.

3. Задача приближения одного класса аналитических функций другим

Операторы, аналогичные введенным $\mathrm{T}_{n,\gamma} = \mathrm{T}_{n,\gamma}[r,\rho,R]$ и $\mathrm{U}_{n,\gamma} = \mathrm{U}_{n,\gamma}[r,\rho,R]$, возникали в работе Л.В.Тайкова 1971 г. [8], в которой рассматривалась задача приближения класса Харди функций, аналитических в круге, другим классом Харди функций, аналитических в круге большего радиуса. Приведем точную постановку задачи.

З а д а ч а 4. Для числа $N > 0$ и функции $f \in Q^p_\rho$ величина

$$e(f, Q^p_R(N)) = \inf\left\{I^p_r(f - F)\colon F \in Q^p_R(N)\right\}$$

является наилучшим приближением функции f классом $Q^p_R(N)$. Соответственно, величина

$$E_N = E(Q^p_\rho, Q^p_R(N)) = \sup\left\{e(f, Q^p_R(N))\colon f \in Q^p_\rho\right\} \tag{3.1}$$

есть наилучшее приближение класса Q^p_ρ классом $Q^p_R(N)$.

В работе [8] задача 4 исследовалась для случая приближения класса Харди функций, аналитических в круге D_1, классом Харди функций, аналитических в круге D_R, $R > 1$, при $\rho = 1$, что не снижает общности утверждений. Результаты статьи [8] сформулированы в следующей теореме.

Теорема C (Л.В. Тайков). *Для произвольных* $1 \le p \le +\infty$, $0 < r < 1 < R$ *справедливо*

$$E_N \asymp N^{\ln r/\ln R} \quad \text{при} \quad N \to +\infty.$$

В случае $R = r^{-1}$, *если* $N = \lambda r^{-n}$, *где* n– *целое неотрицательное число и* λ *удовлетворяет неравенству*

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} r^k}{1 + r^{2k}} \le \lambda \le 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k r^k}{1 + r^{2k}},$$

то

$$E_N = (1 - \lambda) r^n.$$

В данной работе результаты теоремы C будут несколько обобщены. Мы рассмотрим задачу 4 для классов функций, аналитических в кольцах $C_{r,\rho}$, $C_{r,R}$, и снимем ограничение на соотношения между радиусами r, ρ и R.

Отметим, что задачи наилучшего и наилучшего линейного приближения класса Харди $Q^{p'}_{\rho'}$ функций, аналитических в круге $D_{\rho'}$, классом Харди $Q^{p'}_{R'}(N)$ функций, аналитических в круге $D_{R'}$, двойственно взаимосвязаны с задачами 2 и 1 для классов Харди, аналитических в круге функций соответственно. Подробную информацию о двойственности задач можно найти в [2, §7], о двойственности пространств Харди H^p — в [3, VII]. В настоящей работе соображения двойственности использоваться не будут.

4. Основные результаты

Все результаты данного раздела формулируются и доказываются для классов аналитических в кольце функций. В случае, когда параметр n является целым неотрицательным, аналогичные утверждения и доказательства справедливы и для классов функций, аналитических в круге.

Теорема 1. *Пусть числа* r, ρ, R *удовлетворяют неравенству* $0 < r < \rho < R$. *Тогда при произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *если положительное число* N *представимо в виде*

$$N = \rho^n r^{-n}(\alpha + \gamma),$$

где n— целое число и $\gamma \in [-\gamma_{a,b}, \gamma_{b,a}]$, то для величины (1.2) *справедливо равенство*

$$E(N) = (\beta - \gamma)\,(\alpha + \gamma)^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом экстремальным в задаче (1.2) *оператором является оператор* $\mathrm{T}_{n,\gamma} = \mathrm{T}_{n,\gamma}[r, \rho, R]$, *определенный равенствами* (2.3), (2.4).

Теорема 2. *Пусть числа r, ρ, R удовлетворяют неравенству $0 < r < \rho < R$. Тогда при произвольных p, $1 \le p \le \infty$, и целых n для величин* (1.3) *и* (1.7) *в случае $\delta = \delta_n = R^{-n} r^n$ справедливы равенства*

$$\omega(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_n) = \delta_n^{\alpha}.$$

При этом оптимальным методом восстановления в задаче (1.7) *является линейный ограниченный оператор* $\mathrm{T}_{n,\gamma} = \mathrm{T}_{n,\gamma}[r, \rho, R]$, *определенный равенствами* (2.3), (2.4) *при любом* $\gamma \in [-\gamma_{a,b}, \gamma_{b,a}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1 и 2. В качестве значений параметров N и δ будем использовать величины

$$N = \|\mathrm{T}_{n,\gamma}\| = \rho^n r^{-n}(\alpha + \gamma), \quad \delta_n = R^{-n} r^n \ \text{ при } \ n \in \mathbb{Z}, \quad \gamma \in [-\gamma_{a,b}, \gamma_{b,a}].$$

Объединяя вместе равенство (1.6), неравенство (1.10) теоремы A, определения (1.2), (1.8) и утверждения лемм 2 и 3, получим цепочку соотношений

$$(\beta - \gamma)\,(\alpha + \gamma)^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta} = \omega(\delta_n) - N\delta_n \le \Delta(N) \le E(N)$$

$$\le \sup\{\|\phi_\rho - \mathrm{T}_{n,\gamma}\phi_r\|_{L^p(0,2\pi)} \colon f \in Q_R^p\} = \|\mathrm{U}_{n,\gamma}\| = (\beta - \gamma)\,(\alpha + \gamma)^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta},$$

откуда вытекает равенство

$$E(N) = (\beta - \gamma)\,(\alpha + \gamma)^{\alpha/\beta}\, N^{-\alpha/\beta}. \tag{4.1}$$

Объединяя вместе равенство (1.6), неравенства (1.12) теоремы B, определение (1.9) и равенство (4.1), получим цепочку соотношений

$$\delta_n^{\alpha} = \omega(\delta_n) \le \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) \le \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_n) \le l(\delta_n) \le E(N) + N\delta_n = \delta_n^{\alpha},$$

откуда вытекает равенство

$$\omega(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta_n) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta_n) = \delta_n^{\alpha}.$$

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Определим операторы (свертки) $\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma}$ и $\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\gamma}$ в пространстве $L^p(0, 2\pi)$ формулами

$$(\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma}\phi_\rho)(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{u}_{-n,\gamma}\,(t - x)\ \phi_\rho(t)\, dt, \tag{4.2}$$

$$(\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\gamma}\phi_\rho)(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{t}_{-n,\gamma}\,(t - x)\ \phi_\rho(t)\, dt.$$

Нетрудно понять, повторив рассуждения леммы 3, что для норм операторов имеют место равенства

$$\|\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma}\| = \rho^{-n} R^n\,(\beta - \gamma)\,, \quad \|\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\gamma}\| = \rho^{-n} r^n\,(\alpha + \gamma)\,.$$

Теорема 3. *Пусть числа* r, ρ, R *удовлетворяют неравенству* $0 < r < \rho < R$. *Тогда при произвольных* p, $1 \le p \le \infty$, *если положительное число* N *представимо в виде*

$$N = \rho^{-n} R^n (\beta - \gamma),$$

где n*— целое число и* $\gamma \in [-\gamma_{a,b}, \gamma_{b,a}]$, *то для величины* (3.1) *справедливо равенство*

$$E_N = (\alpha + \gamma)\,(\beta - \gamma)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

При этом линейный метод $\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma} = \widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma}[r, \rho, R]$, *определенный равенством* (4.2), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 проводится по схеме статьи [8]. Пусть теперь в качестве значения параметра N выступает величина

$$N = \|\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma}\| = \rho^{-n} R^n (\beta - \gamma).$$

Для получения оценки сверху наилучшего линейного приближения воспользуемся методом, который функции $f \in Q^p_\rho$ ставит в соответствие функцию $F \in Q^p_R(N)$, определяемую равенством

$$F(R\, e^{ix}) = (\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma} \phi_\rho)(x). \tag{4.3}$$

Действительно, из представления функции F в виде ряда Лорана

$$F(R\, e^{ix}) = -\gamma f_n R^n e^{inx} + R^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{k-n}\, f_k\, \rho^{k-n}\, e^{ikx} \tag{4.4}$$

следует, что если f аналитична в кольце $C_{r,\rho}$, то F аналитична в кольце $C_{r,R}$. При этом из определения (4.3) следует оценка

$$\|F(Re^{ix})\|_{L^p(0,2\pi)} \le \|\widetilde{\mathrm{U}}_{n,\gamma}\|\, \|\phi_\rho\|_{L^p(0,2\pi)} \le N,$$

откуда $F \in Q^p_R(N)$.

Используя представление (4.4), для произвольной f имеем

$$\phi_r(x) - F(re^{ix}) = \gamma f_n r^n e^{inx} + r^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big[r^{k-n} - \mu_{k-n}\,(r\rho R^{-1})^{k-n}\big]\, f_k\, e^{ikx}. \tag{4.5}$$

Преобразуем выражения в квадратных скобках, применяя свойство функции $K_{a,b}$:

$$r^{k-n} - \mu_{k-n}\,(r\rho R^{-1})^{k-n} = \rho^{k-n}\big[1 - R^{-(k-n)} r^{k-n} \mu_{k-n}\big]$$
$$= \rho^{k-n}\big[1 - e^{-(a+b)(k-n)} K_{b,a}(k-n)\big] = \rho^{k-n}\, K_{a,b}(k-n) = \rho^{k-n} \lambda_{k-n}.$$

Результат подставляем в (4.5):

$$\phi_r(x) - F(re^{ix}) = \gamma f_n r^n e^{inx} + r^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_{k-n}\, f_k\, \rho^{k-n}\, e^{ikx} = (\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\gamma} \phi_\rho)(x),$$

откуда получаем оценку уклонения на окружности радиуса r:

$$I^p_r(f - F) = \|\phi_r(x) - F(re^{ix})\|_{L^p(0,2\pi)} \le \|\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\gamma}\|\, \|\phi_\rho\|_{L^p(0,2\pi)}.$$

И, следовательно, имеем оценку сверху наилучшего (линейного) приближения класса классом:

$$E_N \le \sup\big\{I^p_r(f - F)\colon f \in Q^p_\rho\big\} = \|\widetilde{\mathrm{T}}_{n,\gamma}\| = (\alpha + \gamma)\,(\beta - \gamma)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

Оценка снизу следует из равенства (см. [9]) для наилучшего приближения функции $g_n(z) = \rho^{-n}\, z^n \in Q^p_\rho$:

$$\inf\big\{I^p_r(g_n - F)\colon F \in Q^p_R(N)\big\} = (\alpha + \gamma)\,(\beta - \gamma)^{\beta/\alpha}\, N^{-\beta/\alpha}.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 46–54.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6(312). С. 89–124.
3. **Koosis P.** Introduction to H_p Spaces. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 287 c.
4. **Osipenko K.Yu.** Optimal recovery of analytic functions. Huntington: NJVA Science Publ. Inc., 2000. 229 p.
5. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 398 с.
6. **Стечкин С.Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. Vol. 26, no. 3-4. P. 225–230.
7. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
8. **Тайков Л.В.** Аналитическое продолжение функций с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 61–64.
9. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Озёрский технологический ин-т НИЯУ МИФИ
Уральский федеральный университет
e-mail: R.Akopyan@oti.ru

Поступила 04.07.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.968.23+519.642.7

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА

Р. А. Алиев, А. Ф. Амрахова

Предложен и обоснован конструктивный метод решения линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. В разработанном конструктивном методе сингулярный оператор аппроксимируется операторами, сохраняющими основные свойства этого оператора, что дает возможность получать более точные оценки с точки зрения скорости сходимости, нежели ранее применявшиеся методы. Кроме того, этот метод требует меньших вычислительных затрат, поскольку позволяет найти приближенные решения явным образом (а не в отдельных точках), при этом коэффициенты соответствующих систем линейных алгебраических уравнений легко вычисляются.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, ядро Гильберта, конструктивный метод, аппроксимация сингулярного интеграла, наилучшее среднеквадратичное приближение.

R. A. Aliev, A. F. Amrakhova. A constructive method for the solution of integral equations with Hilbert kernel.

We propose and prove a constructive method for the solution of linear singular integral equations with Hilbert kernel. In this method, in contrast to the methods applied earlier, the singular operator is approximated by operators that preserve the main properties of this operator, which makes it possible to obtain estimates that are more exact from the point of view of convergence rate. In addition, this method requires less computations because it allows one to find approximate solutions explicitly (not only at isolated points) and the coefficients of the corresponding systems of algebraic equations are easily calculated.

Keywords: singular integral equation, Hilbert kernel, constructive method, approximation of a singular integral, best mean-square approximation.

Пусть $L_2 = L_2([0;2\pi))$ — пространство квадратично-суммируемых 2π-периодических функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим в L_2 сингулярный интегральный оператор (СИО)

$$(H\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (K\varphi)(t),$$

где

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}\varphi(\tau)d\tau, \quad (\mathcal{K}\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$a(t), b(t), K(t,\tau)$ — известные 2π-периодические непрерывные функции, причем $a^2(t)+b^2(t) \neq 0$ для всех $t \in [0;2\pi)$.

Конструктивные методы решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ)

$$(H\varphi)(t) = f(t),$$

теория которых изложена в монографиях [1–3], нашли широкое применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике и других прикладных областях [3; 4], и их построению посвящен целый ряд работ [3; 5–12].

В разработанном нами конструктивном методе сингулярная часть оператора H аппроксимируется операторами, сохраняющими основные свойства сингулярного оператора (см. теорему 1), что дает возможность получать более точные оценки с точки зрения скорости сходимости в сравнении с ранее применявшимися методами. Кроме того, этот метод требует меньше вычислительных затрат, поскольку позволяет найти приближенные решения явным образом (а не в отдельных точках), при этом коэффициенты соответствующих систем линейных алгебраических уравнений (с.л.а.у.) легко вычисляются.

В настоящей работе оператор H аппроксимируется последовательностью операторов вида

$$(H_n\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(n)}(t)\varphi\Big(t + \frac{\pi k}{n}\Big),$$

где $\alpha_k^{(n)}(t) - 2\pi$ — периодические непрерывные функции, выраженные через заданные функции, $k = \overline{0, 2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, и доказывается, что последовательность операторов $\{H_n\}$ сильно сходится к оператору H в L_2, из обратимости оператора H следует обратимость операторов H_n (при достаточно больших n) и последовательность операторов $\left\{H_n^{-1}\right\}$ сильно сходится к оператору H^{-1} при $n \to \infty$. Отметим, что в этом методе нахождение обратного оператора H_n^{-1} равносильно рассмотрению уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(n)}(t)\varphi\Big(t + \frac{\pi k}{n}\Big) = f(t)$$

в точках $t + \pi m/n$, $m = \overline{0, 2n-1}$, поскольку решение полученной при этом с.л.а.у.

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(n)}\Big(t + \frac{\pi m}{n}\Big)\varphi\Big(t + \frac{\pi(k+m)}{n}\Big) = f\Big(t + \frac{\pi m}{n}\Big), \quad m = \overline{0, 2n-1},$$

относительно $\Big(\varphi(t), \varphi\Big(t + \dfrac{\pi}{n}\Big), \ldots, \varphi\Big(t + \dfrac{(2n-1)\pi}{n}\Big)\Big)$ приводит к нахождению функции $\varphi(t)$.

Для СИУ с ядром Коши подобный метод разработан и обоснован в [13].

1. Аппроксимация сингулярного интеграла с ядром Гильберта

Известно ([14, гл. IV, §1; 3, гл. I, §1.5]), что оператор

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}\varphi(\tau)d\tau$$

действует в L_2, операторная норма $\|S\|_{L_2 \to L_2} = 1$ и для любого $\varphi \in L_2$

$$(S^2\varphi)(t) = -\varphi(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим в L_2 последовательность операторов

$$(S_n\varphi)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}\Big(-\frac{\pi(2k+1)}{2n}\Big)\varphi\Big(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\Big), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Нетрудно убедиться, что если

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mt + b_m \sin mt\right),$$

то

$$(S_n\varphi)(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^{(n)} (a_m \sin mt - b_m \cos mt),$$

где $\lambda_m^{(n)} = 1$ при $m = \overline{1, n-1}, \lambda_n^{(n)} = \lambda_{2n}^{(n)} = 0, \lambda_m^{(n)} = -1$ при $m = \overline{n+1, 2n-1}$ и $\lambda_{m+2n}^{(n)} = \lambda_m^{(n)}$ при $m \in Z$.

Отсюда следует

Теорема 1. *Операторы S_n действуют в $L_2, \|S_n\|_{L_2 \to L_2} = 1$, $(S_nP)(t) = (SP)(t)$ для любого тригонометрического полинома $P(t)$ порядка не выше $n-1$ и*

$$(S_n^2\varphi)(t) = -\varphi(t) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\Big(t + \frac{2\pi k}{n}\Big) \quad \forall\varphi \in L_2.$$

Обозначим $E_n^{(2)}(\varphi) = \inf\limits_{P\in T_n} \|\varphi - P\|_{L_2}$, где T_n-множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше $n \in Z_+$.

Теорема 2. *Последовательность операторов $\{S_n\}$ сильно сходится к оператору S в L_2, при этом для любого $\varphi \in L_2$ справедлива оценка*

$$\|S\varphi - S_n\varphi\|_{L_2} \le 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_{n-1}(\varphi; t)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции $\varphi \in L_2$. В силу теоремы 1 имеем

$$(S\varphi - S_n\varphi)(t) = S(\varphi - P_{n-1}(\varphi;\cdot))(t) - S_n(\varphi - P_{n-1}(\varphi;\cdot))(t),$$

откуда следует неравенство

$$\|S\varphi - S_n\varphi\|_{L_2} \le \big(\|S\|_{L_2\to L_2} + \|S_n\|_{L_2\to L_2}\big)\|\varphi - P_{n-1}(\varphi;\cdot)\|_{L_2} = 2E_{n-1}^{(2)}(\varphi).$$

Теорема 2 доказана.

Рассмотрим регулярный интегральный оператор

$$(\mathcal{K}\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

где ядро $K(t,\tau)$ — 2π-периодическая непрерывная функция, и последовательность операторов

$$\big(\mathcal{K}_n\varphi\big)(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} K\Big(t, t + \frac{\pi k}{n}\Big)\varphi\Big(t + \frac{\pi k}{n}\Big).$$

Пусть

$$\|K\|_\infty = \max_{t,\tau\in[0,2\pi]} |K(t,\tau)|, \quad E_n(K) = \inf\|K - \Phi_n\|_\infty,$$

где $\Phi_n(t,\tau) = \dfrac{\alpha_0(t)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k(t)\cos k\tau + \beta_k(t)\sin k\tau)$ и infimum берется по всем тригонометрическим полиномам $\alpha_k(t), k = \overline{0,n}, \beta_k(t) = \overline{1,n}$, порядка не выше n.

Теорема 3. *Последовательность операторов $\{\mathcal{K}_n\}$ сильно сходится к оператору $\mathcal{K}$ в L_2, при этом для любого $\varphi \in L_2$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{K}\varphi - \mathcal{K}_n\varphi\|_{L_2} \le 2\|K\|_\infty E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + 2E_{n-1}(K)\big\{E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + \|\varphi\|_{L_2}\big\}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $P_{n-1}(\varphi;t)$ и

$$\Phi_{n-1}(K;t,\tau)=\frac{\alpha_0^{(0)}(t)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha_k^{(0)}(t)\cos k\tau+\beta_k^{(0)}(t)\sin k\tau\right)$$

— полиномы наилучшего приближения функций φ и K. Учитывая, что для любого полинома $r_{2n-2}(t)$ порядка не выше $2n-2$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_{2n-2}(t)dt=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} r_{2n-2}\Big(t+\frac{\pi k}{n}\Big),$$

имеем

$$(\mathcal{K}\varphi)(t)-(\mathcal{K}_n\varphi)(t)=(\mathcal{K}-\mathcal{K}_n)(\varphi-P_{n-1}(\varphi;\cdot))(t)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[K(t,\tau)-\Phi_{n-1}(K;t,\tau)\right]P_{n-1}(\varphi;\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\Big[K\Big(t,t+\frac{\pi k}{n}\Big)-\Phi_{n-1}\Big(K;t,t+\frac{\pi k}{n}\Big)\Big]P_{n-1}\Big(\varphi;t+\frac{\pi k}{n}\Big).$$

Отсюда, с учетом неравенств $\|\mathcal{K}\|_{L_2\to L_2}\le\|K\|_\infty$, $\|\mathcal{K}_n\|_{L_2\to L_2}\le\|K\|_\infty$, следует оценка (1.2). Теорема 3 доказана.

2. Построение и обоснование конструктивного метода решения СИУ

Нам понадобятся следующие утверждения из теории проекционных методов [15].

Пусть A — линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве $X, \{A_n\}$ — последовательность линейных непрерывных операторов в X.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что к обратимому оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, если существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что операторы A_n обратимы при $n\ge n_0$ и для любого $y\in X$ решения $x_n\in X$ уравнений $A_nx_n=y,\ n\ge n_0$, сходятся по норме пространства X к решению уравнения $Ax=y$.

Предложение 1. *Пусть последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сильно сходится к обратимому оператору $A(A_n\xrightarrow{s}A)$. К оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда существует такое $n_0\in\mathbb{N}$, что последовательность $\{A_n\}_{n\ge n_0}$ равномерно обратима.*

Предложение 2. *Пусть к обратимому оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда для любой системы $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейных непрерывных операторов в пространстве X, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty}\|B_n\|=0$, к оператору A применим приближенный метод по системе операторов $\{A_n+B_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Рассмотрим в L_2 последовательности операторов

$$\mathcal{K}_n^{(1)}\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}K\Big(t,\frac{\pi k}{n}\Big)\int_{\pi k/n}^{\pi(k+1)/n}\varphi(\tau)d\tau$$

и

$$\mathcal{K}_n^{(2)}\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\varphi\Big(t+\frac{\pi k}{n}\Big)\int_0^{\pi/n}K\Big(\sigma+\frac{\pi m}{n},\frac{\pi(k+m)}{n}\Big)d\sigma,$$

где $m = \left[\dfrac{nt}{\pi}\right]$ –целая часть числа $\dfrac{nt}{\pi}$.

Из неравенства

$$\left\|\mathcal{K} - \mathcal{K}_n^{(1)}\right\|_{L_2 \to L_2} \le \max_{\substack{t\in[0;2\pi],\\ |\tau_1-\tau_2|\le\pi/n}} \left|K\left(t,\tau_1\right) - K\left(t,\tau_2\right)\right|$$

следует равномерная сходимость операторов $\left\{\mathcal{K}_n^{(1)}\right\}$ к оператору $\mathcal{K}$, а из неравенства

$$\left\|\mathcal{K}_n - \mathcal{K}_n^{(2)}\right\|_{L_2 \to L_2} \le \max_{\substack{|\tau_1-\tau_2|\le\pi/n,\\ |t_1-t_2|\le\pi/n}} \left|K\left(t_1,\tau_1\right) - K\left(t_2,\tau_2\right)\right| \tag{2.1}$$

и теоремы 3 следует сильная сходимость операторов $\left\{\mathcal{K}_n^{(2)}\right\}$ к оператору $\mathcal{K}$.

Лемма 1. *Если существует обратный оператор $(I+\mathcal{K})^{-1}$, то при больших значениях n операторы $(I+\mathcal{K}_n)$ также обратимы и последовательность операторов $\left\{(I+\mathcal{K}_n)^{-1}\right\}$ сильно сходится к $(I+\mathcal{K})^{-1}$.*

Доказательство. Пусть существует обратный оператор $(I + K)^{-1}$. Поскольку последовательность операторов $\left\{\mathcal{K}_n^{(1)}\right\}$ равномерно сходится к оператору $\mathcal{K}$, то при больших значениях $n\,(\ge n_0)$ операторы $I + \mathcal{K}_n^{(1)}$ равномерно обратимы.

Для функции $f \in L_2$ рассмотрим уравнение

$$\left(I + \mathcal{K}_n^{(2)}\right)\varphi_n(t) = f(t). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) в точках $t + \pi k/n, k = \overline{-m, 2n-m-1}$, где $m = \left[\dfrac{nt}{\pi}\right]$, можно записать в виде

$$\Phi_n G_n = F_n, \tag{2.3}$$

где

$$\Phi_n = \Big(\varphi_n\Big(t - \frac{\pi m}{n}\Big), \varphi_n\Big(t - \frac{\pi(m-1)}{n}\Big), \ldots, \varphi_n\Big(t + \frac{\pi(2n-m-1)}{n}\Big)\Big),$$

$$G_n = \begin{pmatrix} 1+g_{0\ 0} & g_{0\ 1} & \cdots & g_{0\ 2n-1} \\ g_{1\ 0} & 1+g_{1\ 1} & \cdots & g_{1\ 2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{2n-1\ 0} & g_{2n-1\ 1} & \cdots & g_{2n-1\ 2n-1} \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/n} K\Big(\sigma + \frac{\pi j}{n}, \frac{\pi i}{n}\Big)d\sigma,$$

$$F_n = \Big(f\Big(t - \frac{\pi m}{n}\Big), f\Big(t - \frac{\pi(m-1)}{n}\Big), \ldots, f\Big(t + \frac{\pi(2n-m-1)}{n}\Big)\Big).$$

Докажем, что $\det G_n \ne 0$ начиная с некоторого номера n_0. Для этого покажем, что уравнение

$$\left(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}\right) G_n = \left(d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1}\right) \tag{2.4}$$

разрешимо при любой правой части. Для любого вектора $(d_0, d_1, ..., d_{2n-1})$ рассмотрим функцию

$$f^{(0)}(t) = \frac{n}{\pi} d_m \ \text{ при } \ t \in \Big[\frac{\pi m}{n}, \frac{\pi(m+1)}{n}\Big), \quad m = \overline{0, 2n-1}.$$

Так как $f^{(0)} \in L_2$, то уравнение

$$(I + \mathcal{K}_n^{(1)})\varphi_n^{(0)}(t) = f^{(0)}(t) \tag{2.5}$$

однозначно разрешимо относительно $\varphi_n^{(0)}$ в L_2 начиная с некоторого номера n_0. Интегрируя (2.5) по отрезкам $[\pi k/n; \pi(k+1)/n]$, $k=\overline{0,2n-1}$, получим

$$\left(\int\limits_0^{\pi/n} \varphi_n^{(0)}(\tau)d\tau, \ldots, \int\limits_{(2n-1)\pi/n}^{2\pi} \varphi_n^{(0)}(\tau)d\tau\right) G_n = (d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1}), \tag{2.6}$$

т. е. уравнение (2.4) разрешимо при любой правой части и, следовательно, $\det G_n \neq 0$. Тогда уравнение (2.3), а также уравнение (2.2) разрешимо при любом $f \in L_2$. Теперь докажем равномерную обратимость операторов $\left(I+\mathcal{K}_n^{(2)}\right)$. Пусть $\varphi_n(t)$ — решение уравнения (2.2). В силу (2.3) имеем $\Phi_n = F_n G_n^{-1}$.

Пусть $\left(G_n^{-1}\right)^{(k)}$ — $(k+1)$-й столбец матрицы $G_n^{-1}, k=\overline{0,2n-1}$. Тогда для почти всех $t \in [0; 2\pi]$

$$\varphi_n(t) = \left(f\Big(t-\frac{\pi m}{n}\Big), f\Big(t-\frac{\pi(m-1)}{n}\Big), \ldots, f\Big(t+\frac{\pi(2n-m-1)}{n}\Big)\right)\left(G_n^{-1}\right)^{(k)},$$

$$t \in \Big[\frac{\pi m}{n}; \frac{\pi(m+1)}{n}\Big), \quad m=\overline{0,2n-1},$$

и поэтому

$$\|\varphi_n\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \sum_{k=0}^{2n-1} \left|\left(f(t), f\Big(t+\frac{\pi}{n}\Big), \ldots, f\Big(t+\frac{\pi(2n-1)}{n}\Big)\right)\left(G_n^{-1}\right)^{(k)}\right|^2 dt. \tag{2.7}$$

Из (2.6) следует, что для любого вектора $(d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1})$

$$(d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1})\left(G_n^{-1}\right)^{(k)} = \int\limits_{\pi k/n}^{\pi(k+1)/n} \varphi_n^{(0)}(\tau)d\tau, \quad k=\overline{0,2n-1}, \tag{2.8}$$

где $\varphi_n^{(0)}(t) = \left(I+\mathcal{K}_n^{(1)}\right)^{-1} f^{(0)}(t)$.

Так как семейство операторов $\left\{\left(I+\mathcal{K}_n^{(1)}\right)^{-1}\right\}$ равномерно ограничено, т. е. существует постоянная $M_0 < +\infty$ такая, что для любого $n \geq n_0$ $\left\|\left(I+\mathcal{K}_n^{(1)}\right)^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2} \leq M_0$, то

$$\left\|\varphi_n^{(0)}\right\|_{L_2} = \left\|\left(I+\mathcal{K}_n^{(1)}\right)^{-1} f^{(0)}\right\|_{L_2} \leq M_0 \left\|f^{(0)}\right\|_{L_2} = M_0\left(\frac{n}{2\pi^2}\sum_{k=0}^{2n-1} d_k^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, в силу равенства (2.8) получаем

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\left|(d_0, d_1, \ldots, d_{2n-1})\left(G_n^{-1}\right)^{(k)}\right|^2 = \sum_{k=0}^{2n-1}\left|\int\limits_{\pi k/n}^{\pi(k+1)/n} \varphi_n^{(0)}(\tau)d\tau\right|^2 \leq \frac{2\pi^2}{n}\left\|\varphi_n^{(0)}\right\|_{L_2}^2 \leq M_0^2 \sum_{k=0}^{2n-1} d_k^2.$$

Отсюда и из равенства (2.7) вытекает, что

$$\left\|\left(I+\mathcal{K}_n^{(2)}\right)^{-1} f\right\|_{L_2}^2 = \|\varphi_n\|_{L_2}^2 \leq \frac{1}{2\pi} M_0^2 \int\limits_0^{\pi/n} \sum_{k=0}^{2n-1}\left|f\Big(t+\frac{\pi k}{n}\Big)\right|^2 dt = M_0^2\,\|f\|_{L_2}^2.$$

Следовательно, для любого $n \geq n_0$ справедливо неравенство $\left\|\left(I+\mathcal{K}_n^{(2)}\right)^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2} \leq M_0$.

А это означает, что последовательность $\left\{I+\mathcal{K}_n^{(2)}\right\}_{n\geq n_0}$ равномерно обратима. Тогда согласно предложению 1 к оператору $(I+\mathcal{K})$ применим приближенный метод по системе операторов $\left\{I+\mathcal{K}_n^{(2)}\right\}$. Отсюда, учитывая неравенство (2.1), в силу предложения 2 получим, что к оператору $(I+\mathcal{K})$ применим приближенный метод также по системе операторов $\left\{I+\mathcal{K}_n\right\}$. Лемма 1 доказана.

Обозначим через W множество последовательностей ограниченных линейных операторов $\{B_n\}$, действующих в L_2 и имеющих вид

$$(B_n\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}\beta_k^{(n)}(t)\varphi\Big(t+\frac{\pi k}{n}\Big),$$

где $\beta_k^{(n)}$ — такие непрерывные 2π-периодические функции, $k=\overline{0,2n-1}$, что $B_n\xrightarrow{s}B$ и B — линейный ограниченный оператор в L_2, а через W_0 — множество последовательностей $\{M_n\}\in W$, удовлетворяющих следующему условию:

если существует обратный оператор $(I+BM)^{-1}$, то для любой последовательности $\{B_n\}\in W, B_n\xrightarrow{s}B$, к оператору $I+BM$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I+B_nM_n\}$, где $M_n\xrightarrow{s}M$.

Лемма 2. *Последовательность операторов* $\{\mathcal{K}_n\}\in W_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем последовательность $\{B_n\}\in W, B_n\xrightarrow{s}B$. Известно [16], что из сильной сходимости последовательности линейных ограниченных операторов следует равномерная сходимость на любом компактном множестве. Поэтому операторы $B_n\mathcal{K}$ равномерно сходятся к оператору $B\mathcal{K}$. Учитывая, что операторы $\mathcal{K}_n^{(1)}$ равномерно сходятся к оператору $\mathcal{K}$ и последовательность $\left\{\left\|B_n\right\|_{L_2\to L_2}\right\}$ ограничена, получим, что операторы $B_n\mathcal{K}_n^{(1)}$ также равномерно сходятся к оператору $B\mathcal{K}$.

Далее, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 1, получаем равномерную обратимость операторов $I+B_n\mathcal{K}_n^{(2)}$. Отсюда и из соотношения

$$\left\|B_n\big(\mathcal{K}_n^{(2)}-\mathcal{K}_n\big)\right\|_{L_2\to L_2}\to 0\quad(n\to\infty),$$

в силу предложений 1 и 2 получим, что к оператору $(I+B\mathcal{K})$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I+B_n\mathcal{K}_n\}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если для любого* $m\in\mathbb{N}$ *последовательность операторов* $\{M_{n,m}\}\in W_0$, $\{M_n\}\in W$ *и*

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|M_{n,m}-M_n\|_{L_2\to L_2}=0,$$

то $\{M_n\}\in W_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству [13, лемма 2.6].

Обозначим через W' множество последовательностей $\{D_n\}\in W$, имеющих вид

$$(D_n\varphi)(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^{(n)}(t)\varphi\Big(t+\frac{2\pi k}{n}\Big),$$

где $\alpha_k^{(n)}(t)$—непрерывные $2\pi-$периодические функции, $k=\overline{0,n-1}$, а через W_0' — множество последовательностей $\{C_n\}\in W'$, удовлетворяющих следующему условию:

если существует обратный оператор $(I+DC)^{-1}$, то для любой последовательности $\{D_n\}\in W', D_n\xrightarrow{s}D$, к оператору $I+DC$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I+D_nC_n\}$, где $C_n\xrightarrow{s}C$.

Аналогично лемме 2 доказывается, что $\mathcal{K}_n^{(even)} \xrightarrow{s} \mathcal{K}$ и $\{\mathcal{K}_n^{(even)}\} \in W_0'$, где

$$\big(\mathcal{K}_n^{(even)}\varphi\big)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} K\Big(t, t + \frac{2\pi k}{n}\Big)\varphi\Big(t + \frac{2\pi k}{n}\Big).$$

Положим

$$\big(\mathcal{K}_n^{(odd)}\varphi\big)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} K\Big(t, t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\Big)\varphi\Big(t + \frac{\pi(2k+1)}{n}\Big).$$

Лемма 4. *Последовательность операторов $\{\mathcal{K}_n^{(odd)}\}$ сильно сходится к оператору $\mathcal{K}$. Кроме того, если существуют обратные операторы $\big(I \pm \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^{-1}$, то к оператору $\big(I + \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)$ применим приближенный метод по системе операторов $\{I + \mathcal{K}_n^{(odd)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\}$, где*

$$\Big(\widetilde{\mathcal{K}}\varphi\Big)(t) = \int_0^{2\pi} \widetilde{K}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$\widetilde{K}(t,\tau)$ — 2π-периодическая непрерывная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения

$$\big(\mathcal{K}_n^{(odd)}\varphi\big)(t) = 2\big(\mathcal{K}_n\varphi\big)(t) - \big(\mathcal{K}_n^{(even)}\varphi\big)(t)$$

следует, что $\mathcal{K}_n^{(odd)} \xrightarrow{s} \mathcal{K}$. Так как $\{\mathcal{K}_n^{(even)} - \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\} \in W_0'$ и существует обратный оператор $\big(I - \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^{-1}$, то при больших значениях $n(\geq n_0)$ операторы $\big(I - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)$ также обратимы и $\big(I - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)^{-1} \xrightarrow{s} \big(I - \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^{-1}$. Тогда

$$I + 2\big(I - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)^{-1}\mathcal{K}_n \xrightarrow{s} \big(I - \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^{-1}\big(I + \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big).$$

С другой стороны, поскольку оператор $\big(I - \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^{-1}\big(I + \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)$ обратим, $\{\mathcal{K}_n\} \in W_0$, $\{2\big(I - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)^{-1}\} \in W$, то из соотношения

$$I + \mathcal{K}_n^{(odd)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)} = I + 2\mathcal{K}_n - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}$$

$$= \big(I - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)\big(I + 2\big(I - \mathcal{K}_n^{(even)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)^{-1}\mathcal{K}_n\big)$$

получим, что операторы $I + \mathcal{K}_n^{(odd)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}$ также обратимы при $n \geq n_0$ и $\big(I + \mathcal{K}_n^{(odd)} + \widetilde{\mathcal{K}}_n^{(even)}\big)^{-1} \xrightarrow{s} \big(I - \mathcal{K} + \widetilde{\mathcal{K}}\big)^{-1}$. Лемма 4 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся следующие операторы:

$$(\Gamma\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t-\tau}{2}\,[a_0(\tau) - a_0(t)]\,\varphi(\tau)d\tau,$$

$$(\Gamma_n\varphi)(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} \operatorname{ctg}\Big(-\frac{\pi k}{2n}\Big)\Big[a_0\Big(t + \frac{\pi k}{n}\Big) - a_0(t)\Big]\varphi\Big(t + \frac{\pi k}{n}\Big),$$

где $a_0(t)$ — непрерывная 2π-периодическая функция.

Очевидно, что в случае, когда $a_0(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $\{\Gamma_n\} \in W_0$. Докажем, что $\{\Gamma_n\} \in W_0$ также и в случае, когда $a_0(t)$ — непрерывная функция.

Рассмотрим последовательность операторов ($n = 1, 2, ...$)

$$\big(\widetilde{S}_n\varphi\big)(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1} \operatorname{ctg}\Big(-\frac{\pi k}{2n}\Big)\varphi\Big(t+\frac{\pi k}{n}\Big).$$

Если

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos mt + b_m \sin mt\right),$$

то

$$\big(\widetilde{S}_n\varphi\big)(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{\lambda}_m^{(n)}\left(a_m \sin mt - b_m \cos mt\right),$$

где $\widetilde{\lambda}_m^{(n)} = (n-m)/n$ при $m = \overline{1, 2n-1}$, $\tilde{\lambda}_{2n}^{(n)} = 0$ и $\widetilde{\lambda}_{m+2n}^{(n)} = \widetilde{\lambda}_m^{(n)}$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\big\|\widetilde{S}_n\big\|_{L_2\to L_2} \leq 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и аналогично теореме 1 доказывается, что $\widetilde{S}_n \xrightarrow{s} S$.

Для любой непрерывной 2π-периодической функции $a_0(t)$ существует последовательность непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций $\{a_m(t)\}$ таких, что

$$\lim_{m\to\infty}\|a_m - a_0\|_\infty = 0.$$

Рассмотрим последовательность операторов $\left(\Gamma_{n,m}\varphi\right)(t) = \big(\widetilde{S}_n a_m\varphi\big)(t) - a_m(t)\big(\widetilde{S}_n\varphi\big)(t)$. Так как $\{\Gamma_{n,m}\} \in W_0$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_n \|\Gamma_{n,m} - \Gamma_n\|_{L_2\to L_2} = 0$, то согласно лемме 3 получим, что $\{\Gamma_n\} \in W_0$.

Для последовательности операторов

$$\big(\Gamma_n^{(even)}\varphi\big)(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\operatorname{ctg}\Big(-\frac{\pi k}{n}\Big)\Big[a_0\Big(t+\frac{2\pi k}{n}\Big) - a_0(t)\Big]\varphi\Big(t+\frac{2\pi k}{n}\Big)$$

аналогично доказывается, что $\big\{\Gamma_n^{(even)}\big\} \in W_0'$.

Обозначим $\big(\Gamma_n^{(odd)}\varphi\big)(t) = -a_0\big(S_n\varphi\big)(t) + S_n\left(a_0\varphi\right)(t)$.

Теорема 4. *К обратимому полному* СИО

$$\left(H\varphi\right)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\left(S\varphi\right)(t) + \left(\mathcal{K}\varphi\right)(t),$$

где $a(t), b(t), K(t,\tau)$ *—* 2π*-периодические непрерывные функции,* $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in [0, 2\pi)$, *применим приближенный метод по системе операторов*

$$\left(H_n\varphi\right)(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\left(S_n\varphi\right)(t) + \left(\mathcal{K}_n\varphi\right)(t),$$

т. е. операторы H_n *также обратимы при больших значениях* n *и* $H_n^{-1} \xrightarrow{s} H^{-1}$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\left\|H_n^{-1}f - H^{-1}f\right\|_{L_2} \leq \mathrm{const}\Big\{\left[\|b\|_\infty + \|K\|_\infty\right]E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + E_{n-1}(K)\big[E_{n-1}^{(2)}(\varphi) + \|\varphi\|_{L_2}\big]\Big\}, \qquad (2.9)$$

где $\varphi = H^{-1}f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим обратимый СИО

$$\left(H^0\varphi\right)(t) = a_0(t)\varphi(t) + \left(S\varphi\right)(t) + b_0(t)\left(J\varphi\right)(t),$$

где $a_0(t), b_0(t)$ — 2π-периодические непрерывные функции, $a_0^2(t)+1\neq 0$ для всех $t\in[0;2\pi)$, $(J\varphi)(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)d\tau$. Обозначим

$$\left(\overline{H^0}\varphi\right)(t)=a_0(t)\varphi(t)-(S\varphi)(t)+b_0(t)(J\varphi)(t).$$

Тогда

$$\left(H^0\overline{H^0}\varphi\right)(t)=\left(a_0^2(t)+1\right)\varphi(t)+(\Gamma\varphi)(t)+S\left(b_0(t)(J\varphi)(t)\right)$$
$$+\left(1+a_0(t)b_0(t)\right)J\varphi(t)+b_0(t)J\left(a_0(t)\varphi(t)\right)+b_0(t)(Jb_0)(t)(J\varphi)(t),$$
$$\left(\overline{H^0}H\varphi\right)(t)=\left(a_0^2(t)+1\right)\varphi(t)-(\Gamma\varphi)(t)-S\left(b_0(t)(J\varphi)(t)\right)$$
$$+\left(1+a_0(t)b_0(t)\right)J\varphi(t)+b_0(t)J\left(a_0(t)\varphi(t)\right)+b_0(t)(Jb_0)(t)(J\varphi)(t).$$

Отсюда получим, что операторы

$$I\pm\frac{1}{a_0^2+1}\left(\Gamma+S(b_0)J\right)+\frac{1}{a_0^2+1}\left(\left(1+a_0b_0\right)J+b_0J\left(a_0\right)+b_0(Jb_0)J\right) \tag{2.10}$$

также обратимы, где $J\left(\underline{a_0)\,\varphi}(t)=J\left(a_0(t)\varphi(t)\right)$.

Для операторов H^0 и $\overline{H^0}$ построим приближенные методы по системе операторов

$$\left(H_n^0\varphi\right)(t)=a_0(t)\varphi(t)+\left(S_n\varphi\right)(t)+b_0(t)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)$$

и

$$\left(\overline{H_n^0}\varphi\right)(t)=a_0(t)\varphi(t)-\left(S_n\varphi\right)(t)+b_0(t)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)$$

соответственно, где $\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\Big(t+\frac{2\pi k}{n}\Big)$. Тогда

$$\left(H_n^0\overline{H_n^0}\varphi\right)(t)=\left(a_0^2(t)+1\right)\varphi(t)+\left(\Gamma_n^{(odd)}\varphi\right)(t)+S_n\left(b_0(t)\right)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)$$
$$+\left(1+a_0(t)b_0(t)\right)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)$$
$$+b_0(t)J_n^{(even)}\left(a_0(t)\varphi(t)\right)+b_0(t)\left(J_n^{(even)}b_0\right)(t)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t), \tag{2.11}$$
$$\left(\overline{H_n^0}H_n^0\varphi\right)(t)=\left(a_0^2(t)+1\right)\varphi(t)-\left(\Gamma_n^{(odd)}\varphi\right)(t)-S_n\left(b_0(t)\right)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)$$
$$+\left(1+a_0(t)b_0(t)\right)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t)$$
$$+b_0(t)J_n^{(even)}\left(a_0(t)\varphi(t)\right)+b_0(t)\left(J_n^{(even)}b_0\right)(t)\left(J_n^{(even)}\varphi\right)(t). \tag{2.12}$$

Из обратимости операторов (2.10), аналогично лемме 4, доказывается, что к операторам (2.10) применим приближенный метод по системам операторов

$$I\pm\frac{1}{a_0^2+1}\left(\Gamma_n^{(odd)}+S_n(b_0)J_n^{(even)}\right)$$

$$+\frac{1}{a_0^2+1}\left(\left(1+a_0b_0\right)J_n^{(even)}+b_0J_n^{(even)}\left(a_0\cdot\right)+b_0J_n^{(even)}(b_0)J_n^{(even)}\right).$$

Поэтому из соотношений (2.11), (2.12) следует, что существуют левые и правые обратные оператора H_n^0 и, следовательно, операторы H_n^0 обратимы при больших значениях $n(\geq n_0)$ и последовательность операторов $\left(H_n^0\right)^{-1}$ сильно сходится к оператору $\left(H^0\right)^{-1}$.

Теперь рассмотрим обратимый характеристический СИО

$$(h\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)+b(t)(S\varphi)(t),$$

где $a(t), b(t)$ — непрерывные 2π-периодические функции и $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$ для всех $t\in[0;2\pi)$. Для этого оператора построим приближенный метод по системе операторов $(h_n\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)+b(t)(S_n\varphi)(t)$. В силу теоремы 1 имеем

$$h_n(I+\alpha S_n)\varphi(t)=[a(t)-\alpha b(t)]\varphi(t)+[b(t)+\alpha a(t)](S_n\varphi)(t)+\alpha b(t)\big(J_n^{(even)}\varphi\big)(t),$$

где $\alpha\in\mathbb{C}-$любое комплексное число.

Так как $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$, то $r_0=\min\limits_{t\in[0;2\pi)}|b(t)+ia(t)|>0$. Обозначим

$$\alpha_0=\Big(\frac{r_0}{2\left\|a\right\|_\infty+1}+1\Big)i.$$

Тогда для любого $t\in[0;2\pi)$ выполняется неравенство

$$|b(t)+\alpha_0 a(t)|\geq|b(t)+ia(t)|-|(\alpha_0-i)\,a(t)|\geq r_0-\frac{r_0}{2\left\|a\right\|_\infty+1}|a(t)|\geq\frac{r_0}{2}>0$$

и, следовательно,

$$h\,(I+\alpha_0 S)\,\varphi(t)=[b(t)+\alpha_0 a(t)]\Big\{\frac{a(t)-\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}+(S\varphi)(t)+\frac{\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}\,(J\varphi)\,(t)\Big\},\tag{2.13}$$

$$h_n\,(I+\alpha_0 S_n)\,\varphi(t)=[b(t)+\alpha_0 a(t)]$$
$$\times\Big\{\frac{a(t)-\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}+(S_n\varphi)(t)+\frac{\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}\Big(J_n^{(even)}\varphi\Big)(t)\Big\},\tag{2.14}$$

$$h^*\,(I-\alpha_0 S)\,\varphi(t)=[b(t)+\alpha_0 a(t)]\Big\{\frac{a(t)-\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}-(S\varphi)(t)+\frac{\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}\,(J\varphi)\,(t)\Big\},\tag{2.15}$$

$$h_n^*\,(I-\alpha_0 S_n)\,\varphi(t)=[b(t)+\alpha_0 a(t)]$$
$$\times\Big\{\frac{a(t)-\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}-(S_n\varphi)(t)+\frac{\alpha_0 b(t)}{b(t)+\alpha_0 a(t)}\big(J_n^{(even)}\varphi\big)(t)\Big\},\tag{2.16}$$

где $(h^*\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)-b(t)(S\varphi)(t),\ \ (h_n^*\varphi)(t)=a(t)\varphi(t)-b(t)(S_n\varphi)(t).$

Так как операторы h,h^* и $(I\pm\alpha_0 S)$ обратимы, то из (2.13) и (2.15) следует, что операторы

$$\frac{a-\alpha_0 b}{b+\alpha_0 a}\pm S+\frac{\alpha_0 b}{b+\alpha_0 a}J$$

также обратимы. Тогда к оператору

$$\frac{a-\alpha_0 b}{b+\alpha_0 a}+S+\frac{\alpha_0 b}{b+\alpha_0 a}J$$

применим приближенный метод по системе операторов

$$\Big\{\frac{a-\alpha_0 b}{b+\alpha_0 a}+S_n+\frac{\alpha_0 b}{b+\alpha_0 a}J_n^{(even)}\Big\}.$$

А из соотношений (2.14) и (2.16) следует, что операторы h_n также обратимы и $h_n^{-1}\xrightarrow{s}h^{-1}$.

В случае полного СИО имеют место соотношения

$$H=aI+bS+\mathcal{K}=(aI+bS)\left[I+(aI+bS)^{-1}\mathcal{K}\right],\tag{2.17}$$

$$H_n=aI+bS_n+\mathcal{K}_n=(aI+bS_n)\left[I+(aI+bS_n)^{-1}\mathcal{K}_n\right].\tag{2.18}$$

Из (2.17) получаем, что оператор $I+(aI+bS)^{-1}\mathcal{K}$ обратим. Значит, согласно лемме 2 к этому оператору применим приближенный метод по системе операторов $\left\{I+(aI+bS_n)^{-1}\mathcal{K}_n\right\}$. Тогда из (2.18) следует, что операторы H_n также обратимы и $H_n^{-1}\xrightarrow{s}H^{-1}$.

Оценка (2.9) имеет место в силу [15, замечание 2.1 гл. 2] и теорем 2, 3. Теорема 4 доказана.

Авторы выражают благодарность Н.А. Ильясову за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 513 с.
2. **Гахов Ф.Д.** Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. **Лифанов И.К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
4. **Партон В.З., Перлин П.И.** Интегральные уравнения теории упругости. М., 1977. 312 с.
5. **Иванов В.В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968. 287 с.
6. **Габдулхаев Б.Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Из-во Казан. ун-та. 1980. 231 с.
7. **Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.
8. **Афендикова Н.Г., Лифанов И.К., Матвеев А.Ф.** О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 8. С. 1392–1402.
9. **Шешко М.А.** Прямой метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, № 12. С. 1077–1080.
10. **Бабаев А.А., Мусаев Б.И.** Приближенное решение полного линейного сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 5. С. 693-709.
11. **Габдулхаев Б.Г.** Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Математика. 2004. № 7. С. 12–24.
12. **Ермолаева Л.Б.** Решение сингулярных интегральных уравнений методом осциллирующих функций // Изв. вузов. Математика. 2009. № 12. С. 28–35.
13. **Алиев Р.А.** Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений // Мат. заметки. 2006. Т. 79, вып. 6. С. 803–824.
14. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т.I. М.: Мир, 1965. 615 с.
15. **Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.** Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.
16. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложение функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. 432 с.

Поступила 17.05.2012

Алиев Рашид Авязага
канд. физ.-мат. наук, доцент
Бакинский государственный университет,
e-mail: aliyevrashid@hotmail.ru

Амрахова Айнур Физули
аспирант
Бакинский государственный университет
1919-bdy@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518

О ПОРЯДКЕ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДВОЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ $\varphi(L)$[1]

Н. Ю. Антонов

Получены оценки порядка роста произвольных последовательностей прямоугольных частичных сумм двойных тригонометрических рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)$, промежуточных между $L\log^+ L_{[0,2\pi)^2}$ и $L(\log^+ L)^2_{[0,2\pi)^2}$.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, оценки порядка роста.

N. Yu. Antonov. On the growth order of sequences of double rectangular Fourier sums for functions from the classes $\varphi(L)$.

We obtain estimates for the growth order of arbitrary sequences of rectangular partial sums of double trigonometric Fourier series for functions from the classes $\varphi(L)$, which are intermediate between $L\log^+ L_{[0,2\pi)^2}$ and $L(\log^+ L)^2_{[0,2\pi)^2}$.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, growth order estimates.

Пусть $d \in \{1,2\}$, $\mathbb{T}^d = [-\pi,\pi)^d$ — d-мерный тор, $\varphi\colon\ [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определенных на $\mathbb{T}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t} < \infty.$$

Для $f \in L(\mathbb{T})$ через $S_n(f,x)$ будем обозначать значение n-й частичной суммы (одномерного) тригонометрического ряда Фурье функции f в точке $x \in \mathbb{T}$.

Пусть $f \in L(\mathbb{T}^2)$, $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^2$, $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y) \in \mathbb{T}^2$,

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2} a_{(k,l)} e^{i(kx+ly)} \tag{1}$$

— двойной тригонометрический ряд Фурье функции f. Пусть (m,n) — двумерный вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Обозначим через $S_{m,n}(f,x,y)$ значение (m,n)-й прямоугольной частичной суммы ряда (1) в точке $(x,y) \in \mathbb{T}^2$:

$$S_{m,n}(f,x,y) = \sum_{(k,l)\colon\, |k|\leqslant m,\, |l|\leqslant n} a_{(k,l)} e^{i(kx+ly)}.$$

Будем обозначать через $\log u$ логарифм по основанию 2: $\log u = \log_2 u$; $\log^+ u = \log u$ при $u \geqslant 2$ и $\log^+ u = 1$ при $0 \leqslant u < 2$.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/5), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

В случае $d = 1$ хорошо известно [1], что для произвольной функции $f \in L(\mathbb{T})$ для почти всех $x \in \mathbb{T}$ справедлива оценка
$$S_n(f, x) = o(\log n). \tag{2}$$
К. И. Осколков [2] обобщил соотношение (2) на случай произвольной подпоследовательности последовательности сумм Фурье: для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любой функции $f \in L(\mathbb{T})$
$$S_{n_k}(f, x) = o(\log k) \quad \text{п.в.} \tag{3}$$

В случае $d = 2$ Г. А. Карагулян [3] получил следующий аналог оценки (3): для любых последовательностей натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для каждой функции $f \in L\log^+ L(\mathbb{T}^2)$
$$S_{m_k,n_k}(f, x, y) = o(\log^2 k) \quad \text{п.в.} \tag{4}$$
В работе [4] автором показано, что если $f \in L(\log^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$, то справедлив аналог оценки (4) с $\log k$ вместо $\log^2 k$ в правой части.

В настоящей работе получена оценка скорости роста произвольных последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье функций из классов $\varphi(L)$, промежуточных между классами $L\log^+ L(\mathbb{T}^2)$ и $L(\log^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$. Доказана следующая

Теорема. *Пусть $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольные последовательности натуральных чисел. Предположим, что функция $\psi\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такая, что*
1) *$\psi(u)$ не убывает на $[0, +\infty)$;*
2) *функция $\log u/\psi(u)$ не убывает на $[u_0, +\infty)$ для некоторого $u_0 \geqslant 2$.*
Тогда для любой функции f из класса $L(\log^+ L)\psi(L)(\mathbb{T}^2)$ справедлива оценка
$$S_{m_k,n_k}(f, x, y) = o\Big(\frac{\log^2 k}{\psi(k)}\Big) \quad \text{п.в.}$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция $\psi\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел. Тогда существуют константы $C > 0$ и $A \geqslant \max\{4, u_0\}$ такие, что для характеристической функции χ_F произвольного измеримого множества $F \subset \mathbb{T}$ и для любого z из интервала $(0, 1/A)$ справедливо неравенство*
$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant A}\Big(|S_{n_k}(\chi_F, x)|\frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\} \leqslant C\,\frac{1}{z}\,\psi\Big(\frac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F. \tag{5}$$

Сформулированное утверждение является обобщением леммы 1.4 из нашей работы [5].

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. Из оценки (3) и одной теоремы Стейна [6, теорема 1] о пределе последовательностей операторов следует неравенство
$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant 2}\frac{|S_{n_k}(f, x)|}{\log k} > y\Big\} \leqslant \frac{C_1}{y}\int\limits_{\mathbb{T}}|f(t)|dt,$$
где $y > 0$, $f \in L(\mathbb{T})$, C_1 — константа. Это неравенство при $f(x) = \chi_F(x)$ принимает вид
$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant 2}\frac{|S_{n_k}(\chi_F, x)|}{\log k} > y\Big\} \leqslant \frac{C_1}{y}\operatorname{mes}F, \quad y > 0. \tag{6}$$
Воспользуемся также следующей оценкой П.Шелина [7]: для характеристической функции χ_F произвольного измеримого множества $F \subset \mathbb{T}$ и любого $0 < y < 1/2$
$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{n\geqslant 0}|S_n(\chi_F, x)| > y\Big\} \leqslant C_2\,\frac{1}{y}\,\log\Big(\frac{1}{y}\Big)\operatorname{mes}F.$$

Отсюда сразу вытекает оценка

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant 1}|S_{n_k}(\chi_F,x)| > y\Big\} \leqslant C_2\,\frac{1}{y}\,\log\Big(\frac{1}{y}\Big)\operatorname{mes}F, \quad 0<y<1/2. \tag{7}$$

Если функция $\psi(u)$ ограничена на $[0,+\infty)$, то из неравенства (6) следует неравенство (5), т. е. утверждение леммы в данном случае имеет место. Если функция $\log u/\psi(u)$ ограничена на $[2,+\infty)$, то неравенство (5) следует из неравенства (7), т. е. в этом случае утверждение леммы также имеет место.

Рассмотрим теперь случай, когда функции $\psi(u)$ и $\log u/\psi(u)$ неограничены. Возьмем число $A \geqslant \max\{4,u_0\}$ таким большим, чтобы $\psi(A)\geqslant 4$ и $\log A/\psi(A)\geqslant 1$. Заметим, что в силу условия 2) теоремы для $0<z\leqslant 1/A$

$$\frac{\log\dfrac{1}{z}}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)} \geqslant \frac{\log A}{\psi(A)} \geqslant 1. \tag{8}$$

Далее для произвольных фиксированных $F\subset\mathbb{T}$ и $z\in(0,1/A)$ имеем

$$\Big\{x\in\mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant A}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\}$$

$$\subset \Big\{x\in\mathbb{T}\colon \max_{A\leqslant k\leqslant 1/z}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\} \cup \Big\{x\in\mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant 1/z}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{mes}\Big\{x\in\mathbb{T}\colon \sup\limits_{k\geqslant A}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\dfrac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\}}{\dfrac{1}{z}\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F} \leqslant \frac{\operatorname{mes}\Big\{x\in\mathbb{T}\colon \max\limits_{A\leqslant k\leqslant 1/z}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\dfrac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\}}{\dfrac{1}{z}\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F}$$

$$+\frac{\operatorname{mes}\Big\{x\in\mathbb{T}\colon \sup\limits_{k\geqslant 1/z}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\dfrac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\}}{\dfrac{1}{z}\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F}. \tag{9}$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части (9).

1. Пусть точка $x\in\mathbb{T}$ такая, что

$$\max_{A\leqslant k\leqslant 1/z}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\,\frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z.$$

Тогда, учитывая условие 1) теоремы, имеем

$$\sup_{k\geqslant 2}\frac{|S_{n_k}(\chi_F,x)|}{\log k} \geqslant \max_{A\leqslant k\leqslant 1/z}\frac{|S_{n_k}(\chi_F,x)|}{\log k} \geqslant \max_{A\leqslant k\leqslant 1/z}\left(\frac{|S_{n_k}(\chi_F,x)|}{\log k}\,\frac{\psi(k)}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}\right) > \frac{z}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)},$$

откуда

$$\Big\{x\in\mathbb{T}\colon \max_{A\leqslant k\leqslant 1/z}\Big(|S_{n_k}(\chi_F,x)|\frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\} \subset \left\{x\in\mathbb{T}\colon \sup_{k\geqslant 2}\Big(\frac{|S_{n_k}(\chi_F,x)|}{\log k}\Big) > \frac{z}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}\right\}.$$

Используя последнее вложение и (6) при $y = z/\psi(1/z)$, получаем

$$\frac{\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \max\limits_{A \leqslant k \leqslant 1/z} \Big(|S_{n_k}(\chi_F, x)| \dfrac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\}}{\dfrac{1}{z}\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F} \leqslant \frac{\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup\limits_{k \geqslant 2} \Big(\dfrac{|S_{n_k}(\chi_F, x)|}{\log k}\Big) > y\Big\}}{\dfrac{1}{y}\operatorname{mes}F} \leqslant C_1. \tag{10}$$

2. Пусть точка $x \in \mathbb{T}$ такая, что

$$\sup_{k \geqslant 1/z} \Big(|S_{n_k}(\chi_F, x)| \frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z.$$

Тогда, учитывая условие 2) теоремы, имеем

$$\sup_{k \geqslant 1} |S_{n_k}(\chi_F, x)| \geqslant \sup_{k \geqslant 1/z} \left(|S_{n_k}(\chi_F, x)| \frac{\psi(k)}{\log k} \frac{\log\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}\right) > \frac{z \log\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}.$$

Отсюда

$$\left\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k \geqslant 1/z} \Big(|S_{n_k}(\chi_F, x)| \frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\right\} \subset \left\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k \geqslant 1} |S_{n_k}(\chi_F, x)| > \frac{z \log\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}\right\}.$$

Используя это вложение, обозначив $y = z\log(1/z)/\psi(1/z)$, получаем

$$\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k \geqslant 1/z} \Big(|S_{n_k}(\chi_F, x)| \frac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\} \leqslant \operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup_{k \geqslant 1} |S_{n_k}(\chi_F, x)| > y\Big\}. \tag{11}$$

Далее

$$\frac{1}{z}\psi\Big(\frac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F = \frac{1}{y}\log\Big(\frac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F. \tag{12}$$

В силу (8)

$$y = z\,\frac{\log\Big(\dfrac{1}{z}\Big)}{\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)} \geqslant z,$$

поэтому $\log(1/z) \geqslant \log(1/y)$. Отсюда и из (12) получаем

$$\frac{1}{z}\,\psi\Big(\frac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F \geqslant \frac{1}{y}\,\log\Big(\frac{1}{y}\Big)\operatorname{mes}F. \tag{13}$$

Так как $0 < z < 1/A \leqslant 1/4$, то $\psi(1/z) \geqslant \psi(A) \geqslant 4$, откуда $y = z\log(1/z)/\psi(1/z) \leqslant z\log(1/z)/4 < 1/2$; таким образом, $y \in (0, 1/2)$ и значит к рассматриваемому y можно применить оценку (7). Используя неравенства (11) и (13), а затем (7), заключаем

$$\frac{\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup\limits_{k \geqslant 1/z} \Big(|S_{n_k}(\chi_F, x)| \dfrac{\psi(k)}{\log k}\Big) > z\Big\}}{\dfrac{1}{z}\psi\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\operatorname{mes}F} \leqslant \frac{\operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{T}\colon \sup\limits_{k \geqslant 2} |S_{n_k}(\chi_F, x)| > y\Big\}}{\dfrac{1}{y}\log\Big(\dfrac{1}{y}\Big)\operatorname{mes}F} \leqslant C_2. \tag{14}$$

Объединяя (9), (10) и (14), убеждаемся в справедливости леммы при $C = C_1 + C_2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть непрерывная функция* $\psi\colon [0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *теоремы, функция* f *принадлежит классу* $L(\log^+ L)\psi(L)(\mathbb{T})$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— произвольная последовательность натуральных чисел, константа* A *— из формулировки леммы* 1. *Тогда мажоранта*

$$\sup_{k\geqslant A}\frac{|S_{n_k}(f,x)|\psi(k)}{\log k}$$

интегрируема и

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\sup_{k\geqslant A}\frac{|S_{n_k}(f,x)|\psi(k)}{\log k}dx\leqslant K\int\limits_{\mathbb{T}}|f(x)|\,\log^+|f(x)|\,\psi\left(|f(x)|\right)dx+K,$$

где $K=K(\psi)>0$ *— некоторая константа, зависящая только от* ψ.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Пусть $N\geqslant A$ — натуральное число. Обозначим для краткости

$$M(f,x)=M_{N,\psi}(f,x)=\max_{A\leqslant k\leqslant N}\frac{|S_{n_k}(f,x)|\psi(k)}{\log k}.$$

Для того чтобы доказать лемму, в силу теоремы Фату достаточно доказать справедливость неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{T}}M(f,x)dx\leqslant K\int\limits_{\mathbb{T}}|f(x)|\,\log^+|f(x)|\,\psi\left(|f(x)|\right)dx+K, \tag{15}$$

где константа $K=K(\psi)>0$ не зависит от N.

Выберем натуральное число j_0 так, чтобы $2^{j_0-1}>A$. Без ограничения общности можно полагать, что $f(x)\geqslant 2^{j_0-1}$ для всех $x\in\mathbb{T}$, так как в противном случае можно воспользоваться представлением

$$f(x)=\Big(\frac{|f(x)|+f(x)}{2}+2^{j_0-1}\Big)-\Big(\frac{|f(x)|-f(x)}{2}+2^{j_0-1}\Big),$$

в котором каждая из функций, стоящих в скобках в правой части, удовлетворяет требуемому условию. Пусть $j\in\mathbb{N}$, $j\geqslant j_0$. Положим

$$f_j(x)=\begin{cases}f(x), & 2^{j-1}\leqslant f(x)<2^j,\\ 0, & f(x)\notin[2^{j-1},2^j\,).\end{cases}$$

Ясно, что $f(x)=\sum_{j=j_0}^{\infty}f_j(x)$. Для каждой функции f_j найдется (см., например, [5, лемма 1]) множество F_j, содержащееся в носителе функции f_j и такое, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}}f_j(x)dx=2^j\,\mathrm{mes}F_j \tag{16}$$

и

$$M(f_j,x)\leqslant 2^jM(\chi_{F_j},x)+\frac{1}{2^j},\quad x\in\mathbb{T}.$$

Из последнего неравенства, положив

$$E_j=\left\{x\in\mathbb{T}\colon M(\chi_{F_j},x)>4^{-j+1}\right\},\quad H_j=\left\{x\in\mathbb{T}\colon M(\chi_{F_j},x)\leqslant 4^{-j+1}\right\},$$

имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}}M(f,x)dx\leqslant\sum_{j=j_0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{T}}M(f_j,x)dx\leqslant\sum_{j=j_0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(2^jM(\chi_{F_j},x)+\frac{1}{2^j}\Big)dx$$

$$\leqslant \pi + \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j \int\limits_{H_j} M(\chi_{F_j}, x)dx + \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j \int\limits_{E_j} M(\chi_{F_j}, x)dx. \tag{17}$$

В силу определения множеств H_j

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j \int\limits_{H_j} M(\chi_{F_j}, x)dx \leqslant \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j \left(4^{-j+1}\mathrm{mes}H_j\right) \leqslant 2\pi \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{2-j} \leqslant 2\pi. \tag{18}$$

Оценим вторую сумму в правой части (17). Обозначим $\mu_j(y) = \mathrm{mes}\left\{x \in \mathbb{T}\colon M(\chi_{F_j}, x) > y\right\}$. Согласно оценке (5), для $0 < y \leqslant 1/A$ и $j \geqslant j_0$

$$\mu_j(y) \leqslant \frac{C}{y}\psi\Big(\frac{1}{y}\Big)\,\mathrm{mes}F_j. \tag{19}$$

В случае, когда $y \geqslant 1/A$, можно воспользоваться оценкой (см. [8, основной результат])

$$\mu_j(y) \leqslant \frac{C}{y^2}\,\mathrm{mes}F_j. \tag{20}$$

Из (19), (20) и равенства

$$\int\limits_{E_j} M(\chi_{F_j}, x)dx = -\int\limits_{4^{-j+1}}^{\infty} y\ d\mu_j(y) = -y\ \mu_j(y)\Big|_{4^{-j+1}}^{\infty} + \int\limits_{4^{-j+1}}^{\infty} \mu_j(y)\ dy$$

имеем

$$\int\limits_{E_j} M(\chi_{F_j}, x)dx \leqslant C\psi\left(4^{j-1}\right)\mathrm{mes}F_j + \int\limits_{4^{-j+1}}^{1/A} \mu_j(y)\ dy + \int\limits_{1/A}^{\infty} \mu_j(y)\ dy$$

$$\leqslant C\ \psi\left(4^{j-1}\right)\mathrm{mes}F_j + C\ \mathrm{mes}F_j \int\limits_{4^{-j+1}}^{1/A} \frac{1}{y}\psi\Big(\frac{1}{y}\Big)\ dy + C\ \mathrm{mes}F_j \int\limits_{1/A}^{\infty} \frac{1}{y^2}\ dy$$

$$\leqslant \bar{C}\log\left(4^{j-1}\right)\psi\left(4^{j-1}\right)\mathrm{mes}F_j = 2\bar{C}\log\left(2^{j-1}\right)\psi\left(4^{j-1}\right)\mathrm{mes}F_j, \tag{21}$$

где $\bar{C} = C\left(1 + (\log e)^{-1} + A\right)$. Из условия 2) теоремы следует, что

$$\psi\left(4^{j-1}\right) \leqslant \frac{\log\left(4^{j-1}\right)\psi\left(2^{j-1}\right)}{\log\left(2^{j-1}\right)} = 2\psi\left(2^{j-1}\right). \tag{22}$$

Используя (21), (22), (16) и определение функции f_j, имеем

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j \int\limits_{E_j} M(\chi_{F_j}, x)dx \leqslant 4\bar{C} \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^j \log\left(2^{j-1}\right)\psi\left(2^{j-1}\right)\mathrm{mes}F_j$$

$$= 4\bar{C} \sum_{j=j_0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} f_j(x)\log\left(2^{j-1}\right)\psi\left(2^{j-1}\right)\ dx$$

$$\leqslant 4\bar{C} \sum_{j=j_0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} f_j(x)\log\left(f_j(x)\right)\psi\left(f_j(x)\right)\ dx = 4\bar{C}\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)\log\left(f(x)\right)\psi\left(f(x)\right)\ dx. \tag{23}$$

Объединяя (17), (18) и (23), получаем (15) с константой $K = \max\{4\bar{C}, 3\pi\}$. Лемма 2 доказана.

Лемма А [2, доказательство теоремы 1]. *Пусть* $g \in L(\mathbb{T})$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *последовательность измеримых на периоде* $\mathbb{T}$ *функций таких, что* $|g_k(x)| \leqslant |g(x)|$,

$$\widetilde{g}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} g_k(u)du, \quad k \in \mathbb{N},$$

— функции, тригонометрически сопряженные к функциям g_k. *Тогда функция*

$$G(x) = G(\{g_k\}, x) = \sup_{k \geqslant 2} \frac{|\widetilde{g}_k(x)|}{\log k}$$

конечна для почти всех $x \in \mathbb{T}$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы. Пусть $f \in L(\log^+ L)\psi(L)(\mathbb{T}^2)$. Обозначим через $D_k(t)$ ядро Дирихле

$$D_k(t) = \frac{\sin\left(k + \dfrac{1}{2}\right)t}{2 \sin \dfrac{t}{2}}.$$

Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{T}$ имеем

$$S_{m,n}(f, x, y) = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{T}\,\mathbb{T}} D_m(u-x) D_n(v-y) f(u,v)du\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin\left(m + \dfrac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \dfrac{u-x}{2}} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv \right) du.$$

Отсюда, используя тригонометрическое тождество

$$\frac{\sin\left(m + \dfrac{1}{2}\right)(u-x)}{2 \sin \dfrac{u-x}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} (\sin mu \, \cos mx - \cos mu \, \sin mx) + \frac{1}{2} \cos m(u-x),$$

получаем

$$S_{m,n}(f, x, y) = \cos mx \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} \, \sin mu \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv \right) du$$

$$- \sin mx \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} \, \cos mu \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv \right) du$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \cos m(u-x) \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv \right) du$$

$$= \cos mx \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} \, \sin mu \, S_n(f(u,\cdot), y)du$$

$$- \sin mx \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} \, \cos mu \, S_n(f(u,\cdot), y)du + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \cos m(u-x) \, S_n(f(u,\cdot), y)du, \qquad (24)$$

где внешние интегралы понимаются в смысле главного значения, т. е. как предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла по множеству $\mathbb{T}\backslash(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, а $S_n(f(u,\cdot),y)$ есть значение в точке y n-й частичной суммы (однократного) ряда Фурье функции $f(u,\cdot)$ как функции одного переменного при фиксированном u.

Пусть $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольные последовательности натуральных чисел. Из (24) для произвольной точки $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ следует, что для A из леммы 1

$$\sup_{k\geqslant A}\frac{|S_{m_k,n_k}(f,x,y)|\psi(k)}{\log^2 k}\leqslant\sup_{k\geqslant A}\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\sin m_k u\,S_{n_k}(f(u,\cdot),y)du\right|\psi(k)}{\log^2 k}$$

$$+\sup_{k\geqslant A}\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\cos m_k u\,S_{n_k}(f(u,\cdot),y)du\right|\psi(k)}{\log^2 k}+\sup_{k\geqslant A}\frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}|S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|du\,\psi(k)}{\log^2 k}. \tag{25}$$

Покажем, что каждое из трех слагаемых в правой части (25) конечно для почти всех $(x,y)\in\mathbb{T}^2$.

Рассмотрим первое слагаемое. Представим его в виде

$$\sup_{k\geqslant A}\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\;\frac{\sin m_k u\,S_{n_k}(f(u,\cdot),y)\;\psi(k)}{\log k}\,du\right|}{\log k}.$$

Обозначим

$$F_k(u,y)=\frac{\sin m_k u\,S_{n_k}(f(u,\cdot),y)\;\psi(k)}{\log k},\qquad F(u,y)=\sup_{k\geqslant A}\left|\frac{S_{n_k}(f(u,\cdot),y)\;\psi(k)}{\log k}\right|.$$

Зафиксируем $u\in\mathbb{T}$. Используя лемму 2, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}}F(u,y)dy=\int\limits_{\mathbb{T}}\sup_{k\geqslant A}\left|\frac{S_{n_k}(f(u,\cdot),y)\;\psi(k)}{\log k}\right|dy\leqslant K\int\limits_{\mathbb{T}}|f(u,y)|\left(\log^+|f(u,y)|\right)\psi(|f(u,y)|)dy+K. \tag{26}$$

Проинтегрируем (26) по $u\in\mathbb{T}$. Получим

$$\iint\limits_{\mathbb{T}^2}F(u,y)dy\,du\leqslant K\iint\limits_{\mathbb{T}^2}|f(u,y)|\left(\log^+|f(u,y)|\right)\psi(|f(u,y)|)dy\,du+2\pi K. \tag{27}$$

Согласно условиям нашей теоремы правая часть (27) конечна. Отсюда, используя теорему Фубини, получаем, что для почти всех $y\in\mathbb{T}$

$$\int\limits_{\mathbb{T}}F(u,y)du<+\infty. \tag{28}$$

Зафиксируем точку $y\in\mathbb{T}$, удовлетворяющую условию (28). Применяя лемму А к функциям $g_k=F_k(\cdot,y)$, $k\geqslant A$, и $g=F(\cdot,y)$, получаем

$$G(\{F_k(\cdot,y)\},x)=\sup_{k\geqslant A}\frac{|\widetilde{F}_k(x,y)|}{\log k}=\sup_{k\geqslant A}\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\sin m_k u\,S_{n_k}(f(u,\cdot),y)du\right|\psi(k)}{\log^2 k}<\infty\quad\text{п.в.}$$

Отсюда, учитывая, что (28) выполняется для почти всех $y\in\mathbb{T}$, заключаем, что первое слагаемое в правой части (25) конечно для почти всех $(x,y)\in\mathbb{T}^2$. Конечность почти всюду второго слагаемого в правой части (25) доказывается аналогично.

Рассмотрим третье слагаемое. Используя неравенство

$$\sup_{k\geqslant A}\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}|S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|du\,\psi(k)}{\log^2 k}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\sup_{k\geqslant A}\left|\frac{S_{n_k}(f(u,\cdot),y)\ \psi(k)}{\log k}\right|du$$

и (28), получаем, что при почти всех y независимо от x третье слагаемое в правой части (25) конечно почти всюду.

Таким образом, все три слагаемые в правой части (25) конечны почти всюду. Следовательно, левая часть (25) также конечна при почти всех $(x,y)\in\mathbb{T}^2$, или

$$S_{m_k,n_k}(f,x,y)=O\Big(\frac{\log^2 k}{\psi(k)}\Big)\quad \text{п.в.} \tag{29}$$

Нам осталось показать, что O-большое в последней оценке можно заменить на o-малое. В случае, когда функция $\log u/\psi(u)$ ограничена, классы $L(\log^+ L)\psi(L)(\mathbb{T}^2)$ и $L(\log^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$ совпадают, и этот случай был рассмотрен нами ранее [4, с. 35–36]. А если функция $\log u/\psi(u)$ неограничена, то в силу условия 2) теоремы $\psi(u)=o(\log u)$ при $u\to\infty$. В этом случае для каждой функции $f\in L(\log^+ L)\psi(L)(\mathbb{T}^2)$ найдется удовлетворяющая условиям 1) и 2) теоремы функция $\bar\psi\colon[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такая, что $\bar\psi(u)=o(\log u)$ при $u\to+\infty$, $\psi(u)=o\big(\bar\psi(u)\big)$ при $u\to+\infty$ и $f\in L(\log^+ L)\bar\psi(L)(\mathbb{T}^2)$. Тогда, применяя (29) к функциям f и $\bar\psi$, получим

$$S_{m_k,n_k}(f,x,y)=O\Big(\frac{\log^2 k}{\bar\psi(k)}\Big)=o\Big(\frac{\log^2 k}{\psi(k)}\Big)\quad \text{п.в.}$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hardy G.H.** On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 12. P. 365–372.
2. **Осколков К.И.** Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.
3. **Карагулян Г.А.** Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 3. С. 55–74.
4. **Антонов Н.Ю.** О скорости роста произвольных последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 31–37.
5. **Antonov N.Yu.** Conditions for the finiteness of majorants for sequences of operators and convergence of Fourier series // Proc. Steklov Inst. Math. 2001. Suppl. 1. P. S1–S19.
6. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.
7. **Sjölin P.** An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series // Arkiv för Mat. 1969. Vol. 7. P .551–570.
8. **Hunt R.A.** On the convergence of Fourier series // Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues: Proc. Conf. Carbondale: SIU Press, 1968. P. 235–255.

Антонов Николай Юрьевич
Поступила 05.07.2012
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518+517.983

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА КЛАССЕ ДВАЖДЫ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(0,\infty)$[1]

В. В. Арестов, М. А. Филатова

В работе приведена оценка сверху, близкая к оценке снизу, величины наилучшего приближения оператора дифференцирования (первого порядка) линейными ограниченными операторами на классе дважды дифференцируемых функций в пространстве $L_2(0,\infty)$, улучшающая известные ранее оценки. Для обоснования оценки сверху рассмотрено конкретное семейство операторов; в этом семействе выбран оператор, дающий наименьшую оценку величины наилучшего приближения.

Ключевые слова: задача Стечкина, оператор дифференцирования, полуось.

V. V. Arestov, M. A. Filatova. On the approximation of the differentiation operator by linear bounded operators on the class of twice differentiable functions in the space $L_2(0,\infty)$.

We give an upper bound for the error of the best approximation of the (first-order) differentiation operator by linear bounded operators on the class of twice differentiable functions in the space $L_2(0,\infty)$. This upper bound is close to a known lower bound and improves the previous upper bounds. To prove the upper estimate, we consider a specific family of operators; in this family, we choose an operator that provides the least bound for the error of the best approximation.

Keywords: Stechkin's problem, differential operator, half-line.

1. Постановка и обсуждение задачи. В данной работе рассматривается задача о наилучшем приближении оператора дифференцирования (первого порядка) линейными ограниченными операторами на классе дважды дифференцируемых функций в пространстве $L_2 = L_2(0,\infty)$ вещественнозначных, измеримых на полуоси $(0,\infty)$ функций f, квадрат которых суммируем, наделенном нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L_2(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $W_2^2 = W_2^2(0,\infty)$ есть пространство функций $f \in L_2(0,\infty)$, определенных, непрерывно дифференцируемых на $[0,\infty)$, производная f' которых локально абсолютно непрерывна на полуоси $[0,\infty)$, а вторая производная принадлежит пространству $L_2(0,\infty)$. Обозначим через $Q_2^2 = Q_2^2(0,\infty)$ класс функций $f \in W_2^2(0,\infty)$, обладающих свойством $\|f''\| \le 1$. Пусть, далее, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_2(0,\infty)$ есть множество линейных ограниченных операторов в пространстве $L_2(0,\infty)$, а $\mathscr{B}(N)$ — множество операторов $S \in \mathscr{B}$, норма которых ограничена числом $N > 0$: $\|S\|_{L_2\to L_2} \le N$. Для оператора $S \in \mathscr{B}$ величина

$$U(S) = \sup\left\{\left\|f' - Sf\right\| : f \in Q_2^2(0,\infty)\right\} \tag{1}$$

является уклонением оператора S от оператора дифференцирования на классе Q_2^2 в пространстве $L_2(0,\infty)$. Задача состоит в исследовании величины

$$E(N) = \inf\{U(S) \colon S \in \mathscr{B}(N)\} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

наилучшего приближения в пространстве $L_2(0,\infty)$ на классе Q_2^2 оператора дифференцирования множеством $\mathscr{B}(N)$ линейных ограниченных операторов, нормы которых ограничены числом $N>0$.

Задача (2) является частным случаем более общей задачи о наилучшем приближении неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на некотором классе элементов, возникшей в работе С. Б. Стечкина [1] в 1967 г. Задаче Стечкина к настоящему времени посвящено большое число исследований, см. обзорные работы [2; 3] и монографию [4]. Наиболее полно она изучена для оператора дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций в пространствах $L_s(I)$, $1\le s\le\infty$, на числовой оси $I=(-\infty;\infty)$ и полуоси $I=[0,\infty)$ при $0\le k<n$. Опишем эту задачу более точно. Предположим, что $1\le r,\, q,\, p\le\infty$. Для $n\ge 1$ обозначим через $W_{r,p}^n=W_{r,p}^n(I)$ пространство функций $f\in L_r(I)$, которые $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемы на I, более того, производная $f^{(n-1)}$ порядка $(n-1)$ локально абсолютно непрерывна на I, а производная $f^{(n)}$ порядка n принадлежит пространству $L_p(I)$. Во множестве $W_{r,p}^n(I)$ выделим класс $Q_{r,p}^n=Q_{r,p}^n(I)=\{f\in W_{r,p}^n\colon \|f^{(n)}\|_{L_p(I)}\le 1\}$. Для линейного ограниченного оператора S из $L_r(I)$ в $L_q(I)$ величина

$$U(S)=\sup\left\{\left\|f^{(k)}-Sf\right\|_{L_q(I)}\colon f\in Q_{r,p}^n\right\}$$

является уклонением оператора S от оператора дифференцирования порядка k на классе $Q_{r,p}^n$. Задача состоит в исследовании величины

$$E(N)=E(N;\,k,n;\,r,q,p;\,I)=\inf\left\{U(S)\colon \|S\|_{L_r(I)\to L_q(I)}\le N\right\} \tag{3}$$

наилучшего приближения в пространстве $L_q(I)$ на классе $Q_{r,p}^n$ оператора дифференцирования $f^{(k)}$ множеством линейных ограниченных операторов из $L_r(I)$ в $L_q(I)$, нормы которых ограничены числом $N>0$. Из соображений однородности легко получить [1] зависимость величины (3) от N, а именно если выполнено условие $k+1/r-1/q>0$ (которое исключает лишь некоторые вырожденные значения параметров), то

$$E(N)=N^{-\gamma}E(1),\qquad \gamma=\frac{n-k+1/q-1/p}{k+1/r-1/q}. \tag{4}$$

Эту задачу изучали С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков, В. Н. Габушин, В. И. Бердышев, А. П. Буслаев, В. В. Арестов и др. К настоящему времени известно решение задачи (3) в ряде конкретных случаев, выяснены некоторые общие свойства задачи и экстремального оператора, найдена ее связь с другими экстремальными задачами теории функций и операторов. Описание полученных здесь результатов и библиографию можно найти в [2–4].

Как заметил С. Б. Стечкин [1], задача (3) связана с точными мультипликативными неравенствами между нормами производных дифференцируемых функций (неравенствами Колмогорова)

$$\|f^{(k)}\|_{L_q}\le K\|f\|_{L_p}^{\alpha}\|f^{(n)}\|_{L_r}^{\beta},\qquad f\in W_{p,r}^n(I), \tag{5}$$

$$\alpha=\frac{n-k-1/r+1/q}{n-1/r+1/p},\qquad \beta=1-\alpha. \tag{6}$$

Неравенства (5) впервые появились в работе Г. Г. Харди и Дж. Е. Литтльвуда 1912 г. [5]; они показали, что в равномерной норме на оси (т. е. в $C(-\infty,\infty)$) при всех k, n $(1\le k<n)$ имеет место неравенство (5) с некоторой конечной константой. Первые точные неравенства были получены Ландау [6] и Адамаром [7] при $n=2$. А. Н. Колмогоров [8] в 1939 г. нашел точную константу в неравенстве (5) при $p=q=r=\infty$ (в равномерной норме) на оси $S=(-\infty,\infty)$ для всех k, n $(1\le k<n)$; в связи с этим результатом неравенства (5) часто называют неравенствами Колмогорова. С.-Надь [9] получил неравенство (5) с наилучшей константой в случае

$n=1,\ p\ge 1,\ q>r>0$. Достаточно полный обзор результатов, относящихся к неравенству (5), можно найти в [2–4]. Как показал В. Н. Габушин, неравенство (5) с конечной константой имеет место в том случае, если [10]

$$\frac{n-k}{p}+\frac{k}{r}\ge\frac{n}{q}, \tag{7}$$

величина же (3) конечна в том и только том случае, если [11] (другое доказательство см. в [12])

$$q\ge r,\qquad q\ge p\,; \tag{8}$$

отметим, что условие (8) является более ограничительным в сравнении с (7). Будем считать, что K есть наилучшая (наименьшая возможная) константа в (5). Следующее утверждение является конкретизацией более общего утверждения С. Б. Стечкина [1] (см. детали в [2, § 4, формула (4.6)]).

Лемма 1. *Если $k+1/r-1/q>0$, то величина $E(N)$ и наилучшая константа K в (5), (6) связаны неравенством*

$$E(N)\ge\beta\alpha^{\frac{\alpha}{\beta}}K^{\frac{1}{\beta}}N^{-\frac{\alpha}{\beta}},\qquad N>0. \tag{9}$$

В большинстве случаев точного решения задачи (3) использовалась следующая схема. Неравенство (9) дает оценку снизу величины $E(N)$ через наилучшую константу в неравенстве (5), оценку снизу которой, в свою очередь, дает конкретная функция $f^*\in W^n_{p,r}(I)$. Оценку сверху величины (3) доставляет конкретный оператор $S^*\colon E(\|S^*\|)\le U(S^*)$. Если функция f^* и оператор S^* подобраны так, что оценки сверху и снизу совпали, то получаем решение задачи (3), а также значение наилучшей константы K в неравенстве (5), если она не была известна ранее. При этом f^* будет экстремальной функцией в неравенстве (5), а S^* — экстремальным оператором в задаче (3). Методов построения экстремальной функции f^* в неравенстве (5) и, тем более, экстремального оператора S^* в задаче (3) нет. Ситуация усугубляется еще и тем, что неравенство (9) может быть строгим, даже если $E(N)$ и K конечны [12; 13]. В том случае, когда неравенство (9) обращается в равенство, говорят, что задача (3) и неравенство (5) согласованы.

Ю. Н. Субботин и Л. В. Тайков [14] решили задачу (3) в пространстве $L_2(I)$ на числовой оси $I=(-\infty,+\infty)$ для произвольных k и n, $0<k<n$. Соответствующее точное неравенство (5) было известно ранее [15]. В этом случае задача Стечкина (3) и неравенство (5) оказались согласованными. В пространстве $L_2(0,\infty)$ на полуоси даже в случае $k=1$, $n=2$ точное решение задачи (3), т. е. решение задачи (2), неизвестно.

Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Полиа [15, гл. VII, § 7.8] доказали, что на множестве $W^2_2(0,\infty)$ имеет место точное неравенство

$$\|f'\|^2\le 2\,\|f\|\cdot\|f''\|,\qquad f\in W^2_2(0,\infty). \tag{10}$$

Этот результат породил ряд глубоких исследований; отметим работы Като [16], Эверитта с коллегами (см. работу [17] и приведенную в ней библиографию), Квонга, Зеттла [18], Н. П. Купцова [19], А. П. Буслаева [20] и др. Обзоры результатов, относящихся к неравенству (5) и близким проблемам, имеются в [18] и [2].

Задачу (2) изучали А. Л. Рублев [21], Е. Е. Бердышева [22] и авторы данной статьи [23]. Поскольку неравенство (10) является точным, то в силу (9) для величины (2) имеет место оценка снизу

$$E(N)\ge\frac{1}{2N}. \tag{11}$$

В работах [21–23] были построены конкретные операторы, с помощью которых получены оценки сверху величины $E(N)$, достаточно близкие к оценке снизу (11). А. Л. Рублев [21] показал, что

$$E(N)\le\frac{\Upsilon_1}{N},\qquad \Upsilon_1=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=0.62996\ldots\,. \tag{12}$$

Этот результат был им получен с помощью конкретного оператора S, построенного следующим образом. Для функции $f \in L_2(0,\infty)$ на полуоси $[0,\infty)$ рассматривается дифференциальная задача

$$y''' + y = f, \tag{13}$$

$$y \in L_2(0,\infty), \qquad y''(0) = 0. \tag{14}$$

Оператор S определяется формулой

$$Sf = y'. \tag{15}$$

Е. Е. Бердышева [22] усилила оценку (12), доказав, что

$$E(N) \le \frac{\Upsilon_2}{N}, \qquad \Upsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577350\ldots\,. \tag{16}$$

Для обоснования оценки (16) Е. Е. Бердышева воспользовалась следующим оператором $B\colon L_2 \to L_2$. Для функций $f \in L_2(0,\infty)$ рассматривается задача

$$y^{(4)} + y = f, \tag{17}$$

$$y \in L_2[0,\infty), \qquad y''(0) = y'''(0) = 0. \tag{18}$$

Оператор B определяется формулой $Bf = y'$, где y есть решение задачи (17)–(18). На протяжении 15 лет оценка (16) Е. Е. Бердышевой оставалась лучшей. Существовала гипотеза, что, возможно, в (16) имеет место равенство. Однако недавно авторы данной работы уточнили результат Е. Е. Бердышевой. А именно было доказано [23], что справедливо неравенство

$$E(N) \le \frac{\Upsilon_3}{N}, \qquad \Upsilon_3 = \frac{4}{7} = 0.571428\ldots\,.$$

Этот результат обоснован с помощью конкретного оператора F, построенного следующим образом. Для функции $f \in L_2(0,\infty)$ рассматривается задача

$$y^{(4)} - 2y'' + y = f, \tag{19}$$

$$y \in L_2(0,\infty), \qquad y''(0) = y'''(0) = 0. \tag{20}$$

Оператор F определяется равенством

$$Ff = y' - y''', \qquad f \in L_2(0,\infty). \tag{21}$$

В данной работе приводится оценка сверху величины наилучшего приближения, улучшающая предшествующие оценки, а именно будет доказано следующее утверждение.

Теорема. *Величина наилучшего приближения в задаче* (2) *удовлетворяет неравенству*

$$E(N) \le \frac{\Upsilon}{N}, \qquad \Upsilon = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = 0.529133\ldots\,. \tag{22}$$

Доказательство теоремы осуществляется с помощью следующим образом построенного оператора. Для функции $f \in L_2(0,\infty)$ рассматривается задача

$$y''' - ay'' - ay' + y = f, \qquad a > 0, \tag{23}$$

$$y \in L_2(0,\infty), \tag{24}$$

$$y''(0) = 0. \tag{25}$$

Нетрудно убедиться (см. лемму 2 ниже), что для любой функции $f \in L_2(0,\infty)$ эта задача имеет единственное решение $y \in L_2(0,\infty)$. Аппроксимирующий оператор T_a определяется равенством

$$T_a f = y' - ay'', \qquad f \in L_2(0,\infty). \tag{26}$$

Отметим, что при $a=0$ оператор (26) есть оператор А. Л. Рублева (13)–(15).

Ниже в лемме 5 будет доказано, что при значении

$$a=a^*=\frac{1}{5}(2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2)=0.48694463076625442285412437771\ldots \tag{27}$$

параметра a оператор (26) дает оценку (22). В дальнейшем символом T^* будет обозначен оператор (23)–(26) со значением (27) параметра a.

Конструкция всех четырех аппроксимирующих операторов основана на идее, содержащейся в одном из доказательств неравенства (10) в монографии [15, гл. VII, § 7.8].

2. Исследование оператора (23)–(26)**.** В двух последующих разделах изучаются свойства оператора T_a в пространстве $L_2(0,\infty)$. В частности, доказано, что при значении (27) параметра a этот оператор ограничен, вычисляются его норма и величина уклонения (1). Для обоснования применяются методы Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуда, Г. Полиа [15, гл. VII, § 7.8], которые в дальнейшем развивались А. П. Буслаевым [20]. В работах [21–23] применялись те же соображения. В этом разделе будет использоваться обозначение $W_2^n=W_{2,2}^n[0,\infty)$.

Лемма 2. *При $a>0$ для любой функции $f\in L_2(0,\infty)$ задача* (23)–(25) *имеет в $L_2(0,\infty)$ единственное решение y и формулой* (26) *определен линейный оператор в пространстве $L_2(0,\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Общее решение уравнения (23) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y'''-ay''-ay'+y=0 \tag{28}$$

и частного решения неоднородного уравнения (23).

Найдем сначала общее решение однородного уравнения (28), принадлежащее $L_2(0,\infty)$. Для уравнения (28) составим характеристическое уравнение

$$u^3-au^2-au+1=0. \tag{29}$$

Уравнение (29) имеет следующие корни:

$$u_1=-1,\qquad u_2=\frac{1}{2}\Big(a+1+\sqrt{a^2+2a-3}\Big),\qquad u_3=\frac{1}{2}\left(a+1-\sqrt{a^2+2a-3}\right).$$

Для положительных значений параметра a корни $u_2,\ u_3$ имеют положительные вещественные части, поэтому этим корням в фундаментальной системе решений однородного уравнения (29) отвечают функции, не принадлежащие классу $L_2(0,\infty)$. Следовательно, решением однородного уравнения (28), принадлежащим $L_2(0,\infty)$, будет функция $y(x)=Ce^{-x}$, где C — произвольная вещественная константа.

Найдем теперь частное решение неоднородного уравнения (23) в классе W_2^3. Для этого продолжим f на всю числовую ось, положив $f(x)=0,\ x<0$, и применим оператор Фурье (см. детали, например, в [24, гл. 1])

$$\hat{g}(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-2\pi itx}dx$$

к уравнению (23) уже на всей числовой прямой. Получим для $\hat{y}$ уравнение

$$(2\pi it)^3\hat{y}(t)-a(2\pi it)^2\hat{y}(t)-a(2\pi it)\hat{y}(t)+\hat{y}(t)=\hat{f}(t),$$

из которого найдем

$$\hat{y}(t)=\frac{\hat{f}(t)}{1-2a\pi it+4a\pi^2t^2-8\pi^3it^3}\,.$$

Знаменатель этого выражения есть многочлен, не обращающийся в ноль на вещественной оси, поэтому функция $\hat{y}$ принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Следовательно, функция

$$y_p(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(t)}{1 - 2a\pi it + 4a\pi^2t^2 - 8\pi^3it^3}\, e^{2\pi ixt}dt$$

также принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$ и является частным решением неоднородного уравнения (23). Функция f вещественнозначная и коэффициенты уравнения (23) вещественные, поэтому вещественная часть $y_{p,r} = \mathrm{Re}\,(y_p)$ функции y_p является частным решением уравнения (23).

Итак, решение задачи (23), (24) имеет вид

$$y(x) = Ce^{-x} + y_{p,r}(x).$$

Граничные условия (25), очевидно, можно удовлетворить за счет выбора константы C. Итак, доказано, что задача (23)–(25) имеет единственное решение. Очевидно, оператор T_a, определенный формулой (26), является линейным. Лемма 2 доказана. $\square$

В дальнейших рассуждениях несколько раз возникнет необходимость рассмотрения квадратичного функционала вида

$$H(y) = \int\limits_0^{\infty} \left(y''' + \mathcal{A}y'' + \mathcal{B}y' + y\right)^2 dx \tag{30}$$

с вещественными коэффициентами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ на пространстве W_2^3; в (30) и ниже в интегралах для сокращения записи аргумент подынтегральной функции опущен. Следующее простое, техническое утверждение содержит необходимое представление функционала (30).

Лемма 3. *Для функционала* (30) *имеет место представление*

$$H(y) = \int\limits_0^{\infty} \left((y''')^2 + (\mathcal{A}^2 - 2\mathcal{B})(y'')^2 + (\mathcal{B}^2 - 2\mathcal{A})(y')^2 + y^2\right) dx + h(y), \qquad y \in W_2^3, \tag{31}$$

в котором

$$h(y) = -\mathcal{A}(y''(0))^2 + (1 - \mathcal{A}\mathcal{B})(y'(0))^2 - \mathcal{B}y^2(0) - 2\mathcal{B}y''(0)y'(0) - 2\mathcal{A}y'(0)y(0) - 2y''(0)y(0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возведем в квадрат подынтегральное выражение в (30); в результате получим

$$H(y) = \int\limits_0^{\infty} \left((y''')^2 + \mathcal{A}^2(y'')^2 + \mathcal{B}^2(y')^2 + y^2\right) dx + \gamma(y), \tag{32}$$

$$\gamma(y) = 2\int\limits_0^{\infty} \left(y'''y + \mathcal{B}y'''y' + \mathcal{A}y'''y'' + \mathcal{A}y''y + \mathcal{A}\mathcal{B}y''y' + \mathcal{B}y'y\right) dx. \tag{33}$$

Преобразуем каждый из интегралов в (33). Как частный случай (5), (6), при $n \ge 1$, $0 \le k \le n-1$ на множестве W_2^n имеет место неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty} \le K\|f\|_{L_2}^{\alpha}\|f^{(n)}\|_{L_2}^{\beta}, \qquad f \in W_2^n, \tag{34}$$

$$\alpha = \frac{n - k - 1/2}{n}, \qquad \beta = 1 - \alpha;$$

константа K в этом неравенстве конечна, поскольку выполняется условие Габушина (7). Для функции $f\in W_2^n$ и параметра $t>0$ рассмотрим на полуоси $[0,\infty)$ функцию $f_t(x)=f(x+t)$, $x\in[0,\infty)$. Функция f_t принадлежит множеству W_2^n и потому удовлетворяет неравенству (34). Следовательно, справедливо неравенство

$$|f^{(k)}(t)|\le K\|f\|^{\alpha}_{L_2(t,\infty)}\|f^{(n)}\|^{\beta}_{L_2(t,\infty)}. \tag{35}$$

Если $f\in L_2(0,\infty)$, то $\|f\|_{L_2(t,\infty)}\to 0$ при $t\to+\infty$. Кроме того, $\alpha>0$. Поэтому из неравенства (35) вытекает, что если $f\in W_2^n$, то $f^{(k)}(t)\to 0$ при $t\to\infty$ для $0\le k<n$. Это свойство сейчас будет использовано при $n=3,\ k=0,1,2$.

Каждый из интегралов в (33) возьмем по частям соответствующее число раз. Как только что было отмечено, все подстановки на бесконечности будут равны нулю. Имеем

$$\int_0^\infty y'''y\,dx=\int_0^\infty y\,dy''=yy''\Big|_0^\infty-\int_0^\infty y'y''dx=yy''\Big|_0^\infty-\int_0^\infty y'dy'=-y(0)y''(0)+\frac12(y'(0))^2,$$

$$\int_0^\infty y'''y'dx=\int_0^\infty y'dy''=y'y''\Big|_0^\infty-\int_0^\infty y''y''dx=-y'(0)y''(0)-\int_0^\infty (y'')^2dx,$$

$$\int_0^\infty y'''y''dx=\int_0^\infty y''dy''=-\frac12(y''(0))^2,$$

$$\int_0^\infty y''y\,dx=\int_0^\infty y\,dy'=yy'\Big|_0^\infty-\int_0^\infty y'y'dx=-y(0)y'(0)-\int_0^\infty (y')^2dx,$$

$$\int_0^\infty y''y'dx=\int_0^\infty y'dy'=-\frac12(y'(0))^2, \tag{36}$$

$$\int_0^\infty y'y\,dx=\int_0^\infty y\,dy=-\frac12(y(0))^2.$$

Подставляя полученные соотношения в (33) и (32), получаем для функционала (30) представление (31). Лемма 3 доказана. □

Исследуем свойство ограниченности оператора T_a и конечности величины уклонения $U(T_a)$. Как уже было сказано выше, для этого воспользуемся методом Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуда, Г. Полиа [15, гл. VII, § 7.8], примененным А. П. Буслаевым [20]. При исследовании оператора T_a и уклонения $U(T_a)$ возникнет система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A^2-2B=a^2+2a-a^2\lambda^2,\\ B^2-2A=a^2+2a-\lambda^2,\\ (AB-a^2-a\lambda^2)(a+B)-(a+A)^2=0. \end{cases} \tag{37}$$

Важное значение имеют решения этой системы, обладающие свойствами

$$a>0,\qquad \lambda>0,\qquad A>0,\qquad B>0,\qquad AB>1. \tag{38}$$

Лемма 4. *Если для параметра $a>0$ существуют λ, A, B, удовлетворяющие системе (37) и условию (38), то оператор T_a ограничен в $L_2(0,\infty)$, для него величина уклонения $U(T_a)$ конечна и, более того,*

$$\|T_a\|=U(T_a)=\frac{1}{\lambda}. \tag{39}$$

Доказательство. Зафиксируем значение параметра $a > 0$. Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_0^\infty \left((y''' - ay'' - ay' + y)^2 - \lambda^2 (y' - ay'')^2\right) dx = \|f\|^2_{L_2(0,\infty)} - \lambda^2 \|T_a f\|^2_{L_2(0,\infty)} \qquad (40)$$

на множестве функций $y \in W_2^3$ таких, что $y''(0) = 0$. Нас интересуют значения $\lambda > 0$, при которых этот функционал неотрицателен. Для каждого такого λ справедлива оценка

$$\|T_a\| \le \frac{1}{\lambda}.$$

Наибольшее значение λ, при котором функционал (40) неотрицательный, даст наилучшую оценку нормы оператора T_a.

Преобразуем функционал (40). Так же, как при доказательстве леммы 3, в частности, применяя (36), находим

$$\int_0^\infty (y' - ay'')^2 dx = \int_0^\infty \left((y')^2 - 2ay'y'' + a^2 (y'')^2\right) dx = \int_0^\infty \left((y')^2 + a^2 (y'')^2\right) dx + a(y'(0))^2. \qquad (41)$$

Функционал

$$J_0(y) = \int_0^\infty (y''' - ay'' - ay' + y)^2 dx$$

имеет вид (30). В силу леммы 3 для этого функционала имеет место представление

$$J_0(y) = \int_0^\infty \left((y''')^2 + (a^2 + 2a)(y'')^2 + (a^2 + 2a)(y')^2 + y^2\right) dx + j_0(y), \qquad y \in W_2^3, \qquad (42)$$

$$j_0(y) = a(y''(0))^2 + (1 - a^2)(y'(0))^2 + ay^2(0) + 2ay''(0)y'(0) + 2ay'(0)y(0) - 2y''(0)y(0).$$

Объединяя соотношения (42) и (41), получаем для функционала (40) на множестве W_2^3 представление

$$J(y) = \int_0^\infty \left((y''')^2 + (a^2 + 2a - a^2\lambda^2)(y'')^2 + (a^2 + 2a - \lambda^2)(y')^2 + y^2\right) dx + j(y), \qquad (43)$$

$$j(y) = a(y''(0))^2 + (1 - a^2 - a\lambda^2)(y'(0))^2 + ay^2(0) + 2ay''(0)y'(0) + 2ay'(0)y(0) - 2y''(0)y(0).$$

При выполнении же условия $y''(0) = 0$ имеем

$$j(y) = (1 - a^2 - a\lambda^2)(y'(0))^2 + 2ay'(0)y(0) + ay^2(0).$$

Наряду с (40) рассмотрим неотрицательный функционал

$$K(y) = \int_0^\infty \left(y''' + Ay'' + By' + y\right)^2 dx \qquad (44)$$

с неопределенными пока коэффициентами A, B. В силу леммы 3 на множестве функций $y \in W_2^3$ со свойством $y''(0) = 0$ для функционала (44) имеет место представление

$$K(y) = \int_0^\infty \left((y''')^2 + (A^2 - 2B)(y'')^2 + (B^2 - 2A)(y')^2 + y^2\right) dx + k(y),$$

$$k(y) = (1-AB)(y'(0))^2 - B(y(0))^2 - 2Ay'(0)y(0).$$

Свяжем коэффициенты A, B функционала (44) с коэффициентами функционала (40) соотношениями

$$\begin{cases} A^2-2B &= a^2+2a-a^2\lambda^2,\\ B^2-2A &= a^2+2a-\lambda^2. \end{cases}$$

При выполнении этих соотношений имеет место равенство

$$J(y) = K(y) + L(y), \tag{45}$$

в котором

$$L(y) = J(y)-K(y) = j(y)-k(y) = (AB-a^2-a\lambda^2)(y'(0))^2+2(a+A)y'(0)y(0)+(a+B)(y(0))^2. \tag{46}$$

В силу (45) для того чтобы функционал $J(y)$ был неотрицательным, достаточно, чтобы квадратичная форма $L(y)$ переменных $y'(0)$ и $y(0)$ была неотрицательно определенной. Это свойство обеспечивают условия

$$(AB-a^2-a\lambda^2)(a+B)-(a+A)^2 = 0, \qquad a+B>0,$$

поскольку, как нетрудно проверить, при выполнении этих условий форма (46) является полным квадратом

$$L(y) = (p\,y'(0)+q\,y(0))^2, \qquad p=\sqrt{AB-a^2-a\lambda^2}, \qquad q = (\operatorname{sign}(a+A))\sqrt{a+B}, \tag{47}$$

линейной формы переменных $y'(0)$, $y(0)$.

Итак, относительно переменных A, B и λ получаем систему (37), из всех вещественных решений которой следует выбрать то, которое удовлетворяет неравенству

$$a+B>0. \tag{48}$$

Предположим, что параметры A, B, λ удовлетворяют системе (37) и ограничению (48). Кроме того, предположим, что для однородного линейного дифференциального уравнения

$$y'''+Ay''+By'+y=0 \tag{49}$$

все корни его характеристического многочлена

$$u^3+Au^2+Bu+1 \tag{50}$$

имеют отрицательные вещественные части, т. е. многочлен является устойчивым (см., например, [25, гл. 2, § 9]). Отметим, что многочлен (50) устойчивый в том и только в том случае, если $A,B>0$ и $AB>1$ (см. [25, гл. 2, § 9, теорема 6]). Трем корням многочлена (50) соответствуют согласно классической теории (см., например, [25, гл. 2]) три вещественных (линейно независимых) решения уравнения (49). Множество всех решений уравнения (49) есть линейная оболочка этих трех решений. Нетрудно понять, что существует решение $y_a \not\equiv 0$ уравнения (49), удовлетворяющее условиям

$$p\,y_a'(0)+q\,y_a(0)=0, \qquad y_a''(0)=0.$$

Любое решение уравнения (49), и в частности решение y_a, лежит в $L_2(0,\infty)$. На функции y_a оба слагаемых в правой части (45) равны нулю, а значит и $J(y_a)=0$. В силу (40) отсюда следует, что построенный оператор T_a ограничен, его норма имеет значение $\|T_a\| = 1/\lambda$ и достигается на функции $f_a = y_a'''-ay_a''-ay_a'+y_a$.

Изучим теперь задачу вычисления уклонения

$$U(T_a) = \sup\Big\{\big\|f' - T_a f\big\|_{L_2(0,\infty)} : f \in W_2^2(0,\infty),\ \|f''\| \le 1\Big\}.$$

Поскольку $f = y''' - ay'' - ay' + y,\ T_a f = y' - ay''$, то

$$f' - T_a f = y^{(4)} - ay''', \qquad f'' = y^{(5)} - ay^{(4)} - ay''' + y''.$$

Следовательно,

$$U(T_a) = \sup\left\{\frac{\|y^{(4)} - ay'''\|}{\|y^{(5)} - ay^{(4)} - ay''' + y''\|} : y \in W_2^5,\ y^{(5)} - ay^{(4)} - ay''' + y'' \not\equiv 0,\ y''(0) = 0\right\}. \quad (51)$$

Наряду с $U(T_a)$ рассмотрим величину

$$\widetilde{U}(T_a) = \sup\left\{\frac{\|z'' - az'\|}{\|z''' - az'' - az' + z\|} : z \in W_2^3,\ z''' - az'' - az' + z \not\equiv 0,\ z(0) = 0\right\}, \qquad (52)$$

которая получена из (51) заменой $z = y''$ и расширением класса функций z. Величины (51) и (52) связаны соотношением $U(T_a) \le \widetilde{U}(T_a)$.

Величине (52) можно дать следующую интерпретацию. Для функции $g \in L_2(0,\infty)$ рассмотрим задачу

$$z''' - az'' - az' + z = g, \qquad a > 0, \qquad (53)$$

$$z \in L_2(0,\infty), \qquad (54)$$

$$z(0) = 0. \qquad (55)$$

Так же, как это было сделано в лемме 3 для задачи (23)–(25), можно доказывать, что для любой функции $g \in L_2(0,\infty)$ задача (53)–(55) имеет единственное решение $z \in L_2(0,\infty)$. Равенством

$$\Delta_a g = z'' - az', \qquad g \in L_2(0,\infty), \qquad (56)$$

определен линейный оператор Δ_a в пространстве $L_2(0,\infty)$. Величина (52) есть норма оператора (56) в $L_2(0,\infty)$.

Исследование оператора Δ_a полностью аналогично проведенному только что исследованию оператора T_a. На множестве решений задачи (53)–(55) определим функционал

$$\mathscr{I}(z) = \int_0^\infty \big((z''' - az'' - az' + z)^2 - \lambda^2(z'' - az')^2\big)\,dx = \|g\|^2_{L_2(0,\infty)} - \lambda^2\|\Delta_a\, g\|^2_{L_2(0,\infty)}. \qquad (57)$$

Преобразуем его по аналогии с тем, как это было сделано для функционала (40). Имеем

$$\int_0^\infty (z'' - az')^2 dx = \int_0^\infty \big((z'')^2 - 2az''z' + a^2(z')^2\big)\,dx = \int_0^\infty \big((z'')^2 + a^2(z')^2\big)\,dx + a(z'(0))^2. \qquad (58)$$

Из (42) и (58) следует соотношение

$$\mathscr{I}(z) = \int_0^\infty \big((z''')^2 + (a^2 + 2a - \lambda^2)(z'')^2 + (a^2 + 2a - a^2\lambda^2)(z')^2 + z^2\big)\,dx + \jmath(z), \qquad (59)$$

$$\jmath(z) = a(z''(0))^2 + (1 - a^2 - a\lambda^2)(z'(0))^2 + az^2(0) + 2az''(0)z'(0) + 2az'(0)z(0) - 2z''(0)z(0),$$

аналогичное представлению (43) функционала (40). При выполнении условия $z(0)=0$ граничный функционал принимает вид

$$\jmath(z) = (1-a^2-a\lambda^2)(z'(0))^2 + 2az''(0)z'(0) + a(z''(0))^2.$$

Рассмотрим неотрицательный функционал

$$\mathscr{K}(z) = \int\limits_0^\infty \big(z''' + Bz'' + Az' + z\big)^2\,dx. \tag{60}$$

В силу леммы 3 для этого функционала на W_2^3 имеет место соотношение

$$\mathscr{K}(z) = \int\limits_0^\infty \big((z''')^2 + (B^2-2A)(z'')^2 + (A^2-2B)(z')^2 + z^2\big)\,dx + \kappa(z), \qquad z\in W_2^3,$$

в котором

$$\kappa(z) = -B(z''(0))^2 + (1-BA)(z'(0))^2 - Az^2(0) - 2Az''(0)z'(0) - 2Bz'(0)z(0) - 2z''(0)z(0).$$

При выполнении условия $z(0)=0$ последний функционал принимает вид

$$\kappa(z) = (1-BA)(z'(0))^2 - 2Az''(0)z'(0) - B(z''(0))^2.$$

Предположим, что параметры функционалов (57) и (60) связаны условиями (37). В этом случае на множестве функций $z\in W_2^3$ со свойством $z(0)=0$ для функционала (59) имеет место равенство

$$\mathscr{J}(z) = \mathscr{K}(z) + \mathscr{L}(z),$$

в котором

$$\mathscr{L}(z) = \jmath(z) - \kappa(z) = (AB-a^2-a\lambda^2)(z'(0))^2 + 2(A+a)z''(0)z'(0) + (B+a)(z''(0))^2.$$

В предположении $a+B>0$ последнее выражение является полным квадратом $\mathscr{L}(z) = (p\,z'(0)+q\,z''(0))^2$ линейной формы переменных $z'(0)$, $z''(0)$, коэффициенты которой определены в (47). Следовательно, при выполнении условий (37) и (48) функционал (57) будет неотрицательным, и потому имеет место оценка $\|\Delta_a\|\le 1/\lambda$.

Допустим, что $A>0,\ B>0,\ AB>1$. При этом предположении существует решение $z_a\in W_2^3,\ z_a\not\equiv 0$, уравнения

$$z''' + By'' + Ay' + y = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$p\,z_a'(0) + q\,z_a''(0) = 0, \qquad z_a(0) = 0.$$

В этом случае $\|\Delta_a\| = 1/\lambda$ и норма оператора Δ_a достигается на функции $g = z_a''' - az_a'' - az_a' + z_a$. Функция z_a имеет экспоненциальное убывание на бесконечности. Существует функция $Y_a\in W_2^5$ такая, что $Y_a'' = z_a$. Следовательно,

$$U(T_a) = \widetilde{U}(T_a) = \|\Delta_a\| = \frac{1}{\lambda}.$$

Итак, если система (37) имеет решение со свойством (38), то оператор T_a ограничен в $L_2(0,\infty)$, для него величина уклонения $U(T_a)$ конечна и, более того, имеют место равенства (39). Лемма 4 доказана. □

3. Аппроксимационные свойства оператора T_{a^*}. В этом разделе обсуждаются свойства оператора T_a при значении (27) параметра a. Помимо того, приведены соображения, с помощью которых было выделено именно это значение параметра.

Лемма 5. *При значении (27) параметра a оператор $T^* = T_{a^*}$ ограничен в $L_2(0,\infty)$, причем для его нормы и величины уклонения (1) справедливы соотношения*

$$\|T^*\|_{L_2\to L_2} = U(T^*) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}. \tag{61}$$

Доказательство. Значения переменных

$$\begin{cases} A = \frac{1}{5}(\sqrt[3]{4} + 8\sqrt[3]{2} - 1) = 2.133353890225436958577878099\ldots, \\ B = \frac{1}{5}\left(\frac{11}{2}\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 2\right) = 1.894156947186044789273434081\ldots, \\ a = \frac{1}{5}(2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2) = 0.486944630766254422854124377\!1\ldots, \\ \lambda^2 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} = 1.889881574842309747150815910\ldots \end{cases} \tag{62}$$

образуют решение системы (37). В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (62) в (37).

Решение (62) обладает и свойством (38). В силу леммы 4 для оператора T^* справедливо соотношение (39), которое в данном случае совпадает с (61). Лемма 5 доказана. □

Приведем соображения, с помощью которых было найдено решение (62) системы (37). Введем обозначение $\mu = \lambda^2$; система (37) примет вид

$$\begin{cases} A^2 - 2B = a^2 + 2a - \mu a^2, \\ B^2 - 2A = a^2 + 2a - \mu, \\ (AB - a^2 - a\mu)(a + B) - (a + A)^2 = 0. \end{cases} \tag{63}$$

Это есть система трех алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными.

Необходимость решения систем алгебраических уравнений от нескольких неизвестных с целыми (или рациональными) коэффициентами возникает в различных задачах. В частности, один из авторов данной работы и его ученики при исследовании задачи Дельсарта, связанной с проблемой контактного числа евклидова пространства, пришли к необходимости аналитического решения системы большого числа алгебраических уравнений с большим числом неизвестных, см. работы [26–28]. В работах [26; 27] решение соответствующих систем было осуществлено с помощью пакета символьных вычислений Maple методом последовательного исключения переменных. Для исключения каждого переменного применялось деление с остатком. Н. А. Куклин [28] в продолжение этих исследований для решения больших систем алгебраических уравнений применил метод нахождения базиса Гребнера, опять же в пакете Maple. Базис Гребнера системы есть новая система алгебраических же уравнений, эквивалентная исходной, имеющая более простой и удобный для решения вид. Если число m уравнений исходной системы не превосходит числа n неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то в большинстве случаев базис Гребнера системы имеет вид

$$\begin{cases} \nu_1 x_1 + P_1(x_m, \ldots, x_n) = 0, \\ \nu_2 x_2 + P_2(x_m, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \nu_{m-1} x_{m-1} + P_{m-1}(x_m, \ldots, x_n) = 0, \\ \nu_m x_m + P_m(x_m, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{64}$$

где $\{\nu_k\}_{k=1}^m$ — целые коэффициенты, $\{P_k\}_{k=1}^m$ — многочлены от переменных $x_m, \ldots, x_n$. Относительно системы (64) будем говорить, что она получена из исходной системы исключением переменных $x_1,\dots,x_{m-1}$. В частности, если $m=n$, т.е. число уравнений и число неизвестных совпадают, то левая часть последнего уравнения системы (64) будет многочленом от одного переменного x_m. Решение исходной системы свелось к нахождению корней этого многочлена; первые $m-1$ уравнения системы (64) содержат простое выражение неизвестных $x_1,\dots,x_{m-1}$ через x_m. Некоторые детали, историю и состояние исследований с использованием базиса Гребнера (теорию и алгоритм построения) можно найти в [28].

Исследование системы (63) условно разобьем на три шага. На первых двух шагах возникают системы алгебраических уравнений. Для этих систем Н. А. Куклин с помощью пакета Maple построил базисы Гребнера. Он же решил с помощью Maple уравнение (67), возникшее на втором этапе. Авторы выражают Н. А. Куклину искреннюю признательность за участие.

Шаг 1. Исключим из системы (63) переменные A и B. В результате получим одно алгебраическое уравнение, связывающее переменные a и μ:

$$a^4\mu^2+8\,a^4\mu-8\,a^3\mu^2-8\,a^3\mu+8\,a^2\mu^2-32\,a^3+16\,a^2\mu-8\,a\mu^2+4\,\mu^3+48\,a^2-16\,a\mu-16=0. \quad (65)$$

Шаг 2. Нас интересует решение (a,μ) этого уравнения с наибольшим μ при положительном a. Продифференцируем уравнение (65) по a, считая μ (неявной) функцией переменного a, и в получившемся выражении положим $\mu'=0$. В результате получим уравнение

$$4\,a^3\mu^2+32\,a^3\mu-24\,a^2\mu^2-24\,a^2\mu+16\,a\mu^2-96\,a^2+32\,a\mu-8\,\mu^2+96\,a-16\,\mu=0. \quad (66)$$

Уравнения (65) и (66) образуют систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Исключая из этой системы переменное μ, приходим к одному уравнению относительно переменного a:

$$\left(5\,a^3+6\,a^2-2\right)(a-1)\left(a^5-5\,a^4+4\,a^3+6\,a^2-4\,a-4\right)=0. \quad (67)$$

Шаг 3. Многочлен (67) имеет три вещественных корня и лишь один из них,

$$a=\frac{1}{5}(2\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-2)=0.48694463076625442285412437771\ldots,$$

приводит к решению (62) системы (63) (или, то же самое, системы (37)), удовлетворяющему условиям (38).

На этом обсуждение решения (62) системы (37) закончено.

4. Окончание доказательства теоремы. Из леммы 5 следует, что

$$E\,(\Lambda)\le\Lambda,\qquad \Lambda=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}.$$

Это есть частный случай неравенства (22) при $N=\Lambda$. Переход к произвольному значению $N>0$ осуществляется хорошо известным способом, содержащимся в работе [1], с помощью которого, в частности, доказано соотношение (4). Пусть S есть линейный ограниченный оператор в пространстве $L_2(0,\infty)$, для которого конечна величина уклонения (1). По оператору S при $h>0$ построим оператор S_h по следующему правилу. Функции $f\in L_2$ и параметру $h>0$ сопоставим функцию

$$f_h(x)=\frac{1}{h}f(hx),\qquad x\in(0,\infty).$$

Зададим теперь оператор S_h формулой

$$(S_hf)(x)=(Sf_h)\left(\frac{x}{h}\right),\qquad f\in L_2. \quad (68)$$

Нетрудно проверить [1], что справедливы следующие два соотношения:

$$\|S_h\|=\frac{\|S\|}{h},\qquad U(S_h)=hU(S).$$

В частности, для оператора $S = T^*$, определенного соотношениями (23)–(27), формулой (68) сопоставляется оператор T_h^*, обладающий свойствами

$$\|T_h^*\| = h^{-1}\Lambda, \qquad U(T_h^*) = h\Lambda.$$

По $N > 0$ выберем параметр $h = h(N) > 0$ так, чтобы

$$\|T_h^*\| = h^{-1}\Lambda = N,$$

т. е. возьмем $h = h(N) = N^{-1}\Lambda$. В результате получаем оценку

$$U(N) \le U(T_{h(N)}^*) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3N}.$$

Тем самым теорема доказана. □

5. Аппроксимационные свойства оператора T_a при $a \ne a^*$. Оператор $T^* = T_{a^*}$ дает наименьшую оценку величины наилучшего приближения среди операторов T_a. Для того чтобы обосновать это утверждение, покажем, что при любом фиксированном значении $\mu > 3/\sqrt[3]{4}$ уравнение (65) не имеет вещественных решений a; для этого воспользуемся теоремой Штурма (см., например, [29, гл. 11, § 79]). Приведем коротко соответствующие рассуждения.

Выражение, стоящее в левой части (65), будем считать многочленом переменного a при фиксированном значении μ:

$$P(a) = (\mu^2 + 8\,\mu)\,a^4 - 8\,(\mu^2 + \mu + 4)\,a^3 + 8\,(\mu^2 + 2\,\mu + 6)\,a^2 - 8\,(\mu^2 + 2\,\mu)\,a + 4\,\mu - 16.$$

Рассмотрим ряд Штурма $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ многочлена P. Это есть семейство многочленов, построенных следующим образом: $P_0 = P,\ P_1 = P'$, а каждый из трех оставшихся многочленов $P_k,\ k = 2, 3, 4$, есть, взятый с обратным знаком, остаток от деления многочлена P_{k-2} на P_{k-1}. Нас интересует разность количества перемен знака многочленов ряда Штурма в $+\infty$ и $-\infty$.

Имеем

$$P_1(a) = P'(a) = 4\,(\mu^2 + 8\,\mu)a^3 - 24\,(\mu^2 + \mu + 4)\,a^2 + 16\,(\mu^2 + 2\,\mu + 6)\,a - 8\,(\mu^2 + 2\,\mu).$$

При $\mu > 3/\sqrt[3]{4}$ старшие коэффициенты многочленов P_0 и P_1 положительные; следовательно, $P_0(-\infty) = P_0(+\infty) = +\infty$, $P_1(-\infty) = -\infty$, $P_1(+\infty) = +\infty$. Многочлен P_2 (остаток от деления многочлена P_0 на многочлен P_1, умноженный на -1) есть многочлен второй степени, для которого выполняется соотношение

$$P_2(a)\,\frac{(\mu^2 + 8\,\mu)}{2} = 2\,(2\,\mu^4 - 4\,\mu^3 + 5\,\mu^2 - 24\,\mu + 48)\,a^2 - (\mu^4 - 18\,\mu^3 + 56\,\mu + 96)\,a$$
$$- 2\,(\mu^5 + 7\,\mu^4 - 3\,\mu^3 - 10\,\mu^2 - 40\,\mu).$$

Многочлен $Q(\mu) = 2\,\mu^4 - 4\,\mu^3 + 5\,\mu^2 - 24\,\mu + 48$ переменного μ не имеет вещественных корней, он принимает лишь положительные значения, поэтому $P_2(-\infty) = P_2(+\infty) = +\infty$.

Многочлен P_3 (остаток от деления многочлена P_1 на P_2, умноженный на -1) имеет первую степень и, более того,

$$P_3(a)\,\frac{4\,Q^2(\mu)}{(\mu^2 + 8\,\mu)} =$$
$$-\,(8\mu^9 + 81\mu^8 - 144\mu^7 + 180\mu^6 - 880\mu^5 - 816\mu^4 + 1024\mu^3 + 2560\mu^2 + 12288\mu - 18432)\,a$$
$$+\,2\,(23\,\mu^9 - 21\,\mu^8 + 221\,\mu^7 - 652\,\mu^6 + 76\,\mu^5 - 2048\,\mu^4 + 4784\,\mu^3 + 320\,\mu^2 + 3840\mu - 9216).$$

Все три вещественных корня многочлена

$$R(\mu) = 8\,\mu^9 + 81\,\mu^8 - 144\,\mu^7 + 180\,\mu^6 - 880\,\mu^5 - 816\,\mu^4 + 1024\,\mu^3 + 2560\,\mu^2 + 12288\,\mu - 18432$$

меньше 1.5 и, тем более, меньше $3/\sqrt[3]{4}$. Поэтому если $\mu > 3/\sqrt[3]{4}$, то $R(\mu) > 0$ и, следовательно, $P_3(-\infty) = +\infty$, $P_3(+\infty) = -\infty$.

Последний член ряда Штурма P_4 (остаток от деления многочлена P_2 на P_3, умноженный на -1) есть константа по переменному a такая, что

$$P_4(a) \cdot R^2(\mu) =$$

$$(4\,\mu^3 - 27)\,8\mu^2(-2\mu^9 + 36\mu^8 - 109\mu^7 + 216\mu^6 - 820\mu^5 + 2032\mu^4 - 2416\mu^3 + 4096\mu^2 - 8448\mu + 6144)^2.$$

Очевидно, что эта величина положительная при любом $\mu > 3/\sqrt[3]{4}$.

Итак, ряд Штурма многочлена $P(a)$ имеет две перемены знака на $-\infty$ и две перемены знака на $+\infty$. Следовательно, по теореме Штурма [29, гл. 11, § 79] при $\mu > 3/\sqrt[3]{4}$ многочлен $P(a)$ не имеет вещественных корней. Таким образом, ни при каком значении параметра a система (37) не может иметь вещественных решений, для которых $\mu > 3/\sqrt[3]{4}$.

Заметим еще, что при $a = 1$ оператор T_1 дает оценку величины (2), которая была ранее получена авторами [23] с помощью оператора (19)–(21).

Авторы признательны Е. Е. Бердышевой за полезное обсуждение задачи и результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 6. С. 137–148.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
3. **Арестов В.В., Габушин В.Н.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–68.
4. Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
5. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. (2). 1912. Vol. 11. P. 411–478.
6. **Landau E.** Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. (2). 1913. Vol. 13. P. 43–49.
7. **Hadamard J.** Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // S. R. des Séances Soc. Math. France. 1914. Vol. 41. P. 68–72.
8. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263.
9. **Sz.-Nagy B.** Über Integralungleichungen zwischen einer Function und ihrer Ableitung // Acta Sci. Math. 1941. Vol. 10. P. 64–74.
10. **Габушин В.Н.** Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 3. С. 291–298.
11. **Габушин В.Н.** О наилучшем приближении оператора дифференцирования в метрике L_p // Мат. заметки. 1972. Т. 12, вып. 5. С. 531–538.
12. **Арестов В.В.** Приближение операторов, инвариантных относительно сдвига // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 43–70.
13. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН СССР. 1992. Т. 198. С. 3–20.
14. **Субботин Ю.Н., Тайков Л.В.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 2. С. 157–164.
15. **Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
16. **Kato T.** On an Inequality of Hardy, Littlewood, and Pólya // Advances in Math. 1971. Vol. 7, № 3. P. 217–218.
17. **Everitt W.D., Zettl A.** On a class of integral inequalities // J. London Math. Soc. 1978. Vol. 17. P. 291–303.

18. **Kwong M.K., Zettl A.** Norm inequalities for derivatives and differences. Lecture Notes in Math, 1536. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 150 p.
19. **Купцов Н.П.** Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 94–117.
20. **Буслаев А.П.** Об одной экстремальной задаче, связанной с неравенствами для производных // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. 1978. № 3. С. 67–77.
21. **Рублев А.Л.** О приближении оператора дифференцирования на классе дважды дифференцируемых функций в пространстве $L_2(0,\infty)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 162–170.
22. **Berdysheva E.E.** On the best approximation of the differentiation operator in $L_2(0,\infty)$ // East J. Approx. 1996. Vol. 2, № 3. P. 281–287.
23. **Арестов В.В., Филатова М.А.** Среднеквадратическое приближение оператора дифференцирования на полуоси // Материалы междунар. науч. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. С. 10–13.
24. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
25. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1961. 312 с.
26. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
27. **Штром Д.В.** Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 2. С. 162–189.
28. **Куклин Н.А.** Метод Дельсарта в задаче о контактных числах пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 224–239.
29. **Ван дер Варден Б.Л.** Алгебра. М.: Наука. 1976. 648 с.

Поступила 20.06.2012

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vitalii.Arestov@usu.ru

Филатова Мария Александровна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Maria.Filatova@usu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.5

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ[1]

А. Г. Бабенко, Н. В. Долматова, Ю. В. Крякин

Найдены наилучшие интегральные приближения B-сплайнов тригонометрическими полиномами. Получено точное неравенство типа Джексона со специальным модулем непрерывности.

Ключевые слова: интегральные приближения индивидуальных функций тригонометрическими полиномами, прямые теоремы теории приближений.

A. G. Babenko, N. V. Dolmatova, Yu. V. Kryakin. Jackson's exact inequality with a special module of continuity.

Best integral approximations of B-splines by trigonometric polynomials are found. An exact inequality of Jackson type with a special module of continuity is found.

Keywords: integral approximations of individual functions by trigonometric polynomials, direct theorems of approximation theory.

1. Введение

Пусть Q означает отрезок $[-1/2, 1/2]$, или период $\mathbb{T} = [-1/2, 1/2) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Через $C(Q)$ обозначим пространство непрерывных функций $f\colon Q \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \max\{|f(x)|\colon x \in Q\}$. Условимся под полиномами, приближающими функцию $f \in C(Q)$, понимать алгебраические полиномы, если Q — отрезок, или тригонометрические полиномы, если Q — период.

Теорема Вейерштрасса. Одна из центральных теорем теории приближений доказана Вейерштрассом [34] в 1885 г.: *всякую непрерывную на Q функцию можно в равномерной метрике с произвольной точностью приблизить полиномами.*

Доказательство Вейерштрасса основано на промежуточном приближении непрерывной функции сверткой с ядром Гаусса $\phi_\sigma(t) := \sigma^{-1}\phi(t/\sigma),\ \phi(t) := (2\pi)^{-1/2}\exp(-t^2/2)$.

Важность и простота теоремы Вейерштрасса привели к появлению большого числа различных доказательств этой теоремы, причем эти доказательства были предложены крупными математиками того времени. Например, можно сразу приближать с помощью линейных полиномиальных операторов, не используя промежуточное приближение. Так делали Фейер [24] (свертка с квадратом ядра Дирихле, или приближение средними арифметическими $(C, 1)$ ряда Фурье), Ландау [27] (свертка с $(1-t^2)^n$) — для алгебраического приближения и Валле Пуссен [32] (свертка с $\cos^{2n}(t/2)$) — для тригонометрического приближения.

Лебег [28] вписывал в кривую ломаную, а затем приближал ее, что сводилось к приближению функции $|t|$. Его подход позднее был алгебраизирован Стоуном [31]: если даны две функции 1, t, то можно рассмотреть алгебру, которую порождают эти функции и найти условия, при которых элементы этой алгебры приближают $|t|$.

Ранний этап развития теории аппроксимации ясно описан Валле Пуссеном [33]; представляют интерес вопросы, поднятые им, в частности вопрос о величине алгебраического приближения на $[-1, 1]$ функции $|t|$. Работы Джексона [26] и Бернштейна [3; 16], связанные с вопросами Валле Пуссена, заложили основы современной теории аппроксимации. В данной

[1]Исследования поддержаны РФФИ (проект 11-01-00462) и УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 12-С-1-1018.

статье рассматривается вариант теоремы Джексона со специальным модулем непрерывности, основанным на усреднении второй разности с единичным весом.

Теоремы Джексона и Бернштейна. Теорема Джексона [26] является уточнением теоремы Вейерштрасса и утверждает, что скорость приближения непрерывной функции полиномами зависит от гладкости непрерывной функции. Гладкость исходной функции измерялась модулем непрерывности — дискретным аналогом производной (первая теорема Джексона) и комбинацией дискретной (модуль непрерывности) и обычной (производная) гладкостей (вторая теорема Джексона). Первая теорема Джексона утверждает следующее.

Теорема (Джексон [26]). *Если функция $f \in C(Q)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|^a, \quad 0 < a \le 1,$$

то ее можно приблизить полиномами степени не выше $n-1$ с точностью AM/n^a, где A — некоторая конечная абсолютная константа.

Эта теорема носит название прямой теоремы теории приближений. Бернштейн доказал обратное. Сформулируем соответствующее утверждение для периодического случая (непериодический случай существенно отличается от периодического (см. [9, гл. 6, § 3, (155), (156); 5, гл. 6, § 1, с. 244, гл. 7]).

Теорема (Бернштейн [3; 16; 17]). *Если для некоторых $0 < a \le 1$, $r \in \mathbb{Z}_+$ функцию f, заданную на $\mathbb{T}$, можно равномерно приблизить тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ с точностью порядка n^{-a-r}, то f имеет непрерывную производную $f^{(r)}$ порядка r, причем $f^{(r)}$ удовлетворяет условию Липшица порядка $a-\varepsilon$ при сколь угодно малом $\varepsilon \in (0, a)$.*

Теорема Берштейна носит название обратной теоремы теории приближений. В дальнейшем это направление развили Валле Пуссен, Зигмунд, Салем, братья Тиманы, Стечкин, Дзядык и другие математики (см. замечание 6 к гл. 5 на с. 243 монографии [5]).

Важным и редко цитируемым является замечание Стеклова [12] о доказательстве теоремы Вейерштрасса, состоящее в использовании в качестве промежуточного приближения свертки с нормированной в L характеристической функцией интервала $(-h/2, h/2)$. По существу его замечание годится и для доказательства теоремы Джексона. Применение как самих идей Стеклова, так и их развитий, предложенных Фаваром и другими математиками, является ключевым в данной работе.

Приведем теорему Джексона в случае малых гладкостей для приближения произвольной непрерывной 1-периодической функции $f \in C(\mathbb{T})$ подпространством T_{n-1} тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, в которой используется стандартное обозначение модуля непрерывности $\omega_1(f, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \colon |x - y| < \delta\}$ функции f.

Теорема (Джексон [26]). *Для произвольной функции $f \in C(\mathbb{T})$ при любом положительном фиксированном $\alpha > 0$ выполняется неравенство*

$$\inf_{\tau \in T_{n-1}} \|f - \tau\| \le \mathcal{J}\, \omega_1(f, \alpha/(2n)) \tag{1.1}$$

с константой $\mathcal{J} = \mathcal{J}_n(\alpha)$, не зависящей от f и ограниченной по n.

Точная константа $\mathcal{J} = \mathcal{J}_n(\alpha)$ в неравенстве (1.1) называется *константой Джексона.* Она была предметом серьезного внимания специалистов. Отметим один из наиболее ярких результатов; а именно, асимптотически точный результат Корнейчука [7; 8]:

$$\bigl(1 - 1/(2n)\bigr)(1 + k)/2 \le \mathcal{J}_n(1/k) < (1 + k)/2, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Доказательство неравенств (1.2) вызвало немалый интерес и имело ряд следствий в смежных областях математики (например, вычисление первого K-функционала Петре [30]).

Значительно проще был позже получен следующий результат для точной константы $\mathcal{J}_{n,2}$ в неравенстве Джексона:

$$\inf_{\tau \in T_{n-1}} \|f - \tau\| \le \mathcal{J}_{n,2}\, \omega_2(f, 1/(4n)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in C(\mathbb{T}), \tag{1.3}$$

со вторым модулем непрерывности $\omega_2(f,\delta) = \sup\{|f(x) - 2f((x+y)/2) + f(y)| : |x-y| < 2\delta\}$:

$$1 - 1/(2n) \le \mathcal{J}_{n,2} \le 1. \tag{1.4}$$

Оценки сверху и снизу величины $\mathcal{J}_{n,2}$ получили соответственно Жук и Шалаев (см. [6, гл. 8, § 3, теорема 3 и комментарий к гл. 8, § 3]). Идея построения последовательности функций, дающей оценку снизу в (1.4), принадлежит Корнейчуку; его идеи позволяют также получить оптимальное неравенство Джексона в абстрактных ситуациях (см. [4]).

Нахождение точной константы $\mathcal{J}_{n,k}(\alpha)$ в неравенстве Джексона — Стечкина

$$\inf_{\tau\in T_{n-1}} \|f-\tau\| \le \mathcal{J}_{n,k}(\alpha) \sup_{|x-y|<\alpha/(2n)} \Big|\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j} f(x + j(y-x)/k)\Big|, \quad f \in C(\mathbb{T}), \tag{1.5}$$

при фиксированных значениях параметров $\alpha > 0,\ n, k \in \mathbb{N}$, является интересной, нерешенной задачей. В частности, представляет определенный интерес минимальное значение α для которого $\mathcal{J}_{n,k}(\alpha) \le 1,\ k \ge 3$. Результаты работы [25] могут служить основанием для попыток получить точные результаты для различных значений параметров α, k.

То, что во второй половине прошлого века удалось получить достаточно законченные результаты для тригонометрического приближения, во многом обусловлено работами Фавара [21–23]. Приведем его ключевой результат, в формулировке которого используется обозначение D^r оператора дифференцирования порядка r.

Теорема (Фавар [21]). *Для гладких функций, ортогональных пространству T_{n-1}, имеет место точная оценка*

$$\|f\| \le \mathcal{K}_r (2\pi n)^{-r} \|D^r f\|, \qquad \mathcal{K}_r := 4\pi^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (4j+1)^{-r-1}. \tag{1.6}$$

Таким образом, уже 75 лет назад был дан намек на то, что теоремы теории аппроксимации — это, в сущности, теоремы об оценке норм производных в подпространствах T_n и $T_{n-1}^{\perp}$; другими словами, это неравенство Бернштейна в T_n:

$$\|D^r \tau\| \le (2\pi n)^r \|\tau\|$$

и неравенство Фавара (1.6) в $T_{n-1}^{\perp}$.

Наш основной результат заключается в точной оценке тригонометрических приближений непрерывной функции в терминах второй разности. А именно справедливо утверждение, в котором используются следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_n(\alpha) = \sec(\alpha^{-1}) + \operatorname{tg}(\alpha^{-1}), \qquad \alpha > 2/\pi;$$

$$W_2(f,\chi_h) := \|f - f*\chi_h\|, \qquad E_{n-1}(f) := \inf_{\tau\in T_{n-1}} \|f-\tau\|, \qquad f \in C(\mathbb{T}).$$

Теорема. *Пусть $n \in \mathbb{N},\ h = \alpha(2n)^{-1},\ \alpha > 2/\pi$. Тогда выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f) \le \mathcal{F}_n(\alpha)\, W_2(f, \chi_{\alpha/(2n)}), \qquad f \in C(\mathbb{T}). \tag{1.7}$$

Неравенство (1.7) *является неулучшаемым при $\alpha = 2\nu + 1,\ \nu = 0, 1, \dots$*

Этот результат в случае $\alpha = 1$ был анонсирован в [2].

Прежде чем коротко описать, на основе каких модификаций идей Стеклова — Фавара получена оценка (1.7), сделаем два предварительных замечания.

З а м е ч а н и е 1. Так как

$$W_2(f,\chi_h) = \|f - f*\chi_h\| = \Big\|h^{-1}\int_0^{h/2} \big[f(\cdot - t) - 2f(\cdot) + f(\cdot + t)\big]\,dt\Big\|,$$

то

$$W_2(f,\chi_h) \le \frac{1}{2}\,\omega_2(f,h/2)$$

и (1.7) влечет оценку сверху для $\mathcal{J}_{n,2}$, правда, несколько большую, чем в (1.4).

З а м е ч а н и е 2. С другой стороны, точные неравенства (1.3) и (1.7) можно рассматривать как обобщение точного неравенства (1.6) при $r=2$. Но переход от (1.3) к (1.6) ведет к большей потере константы в полученном при переходе неравенстве. Пусть гладкая функция f принадлежит $T_{n-1}^{\perp}$. Тогда (1.3) дает

$$\|f\| \le \omega_2(f,1/(2n)) \le (4n)^{-2}\|D^2 f\|,$$

что в 2 раза хуже, нежели в неравенстве Фавара, так как $\mathcal{K}_2=\pi^2/8$. С другой стороны, более тонкая характеристика W_2 позволяет сократить дисбаланс констант в оценках для функции из C и C^2. На основании (1.7) мы получаем

$$\|f\| \le \mathcal{F}_n(1)\,2n\Big\|\int\limits_0^{1/(4n)}\big[f(\cdot-t)-2f(\cdot)+f(\cdot+t)\big]\,dt\Big\| \le \mathcal{F}(1)\,2n\,\|D^2f\|\int\limits_0^{1/(4n)} t^2\,dt$$

$$\le 3^{-1}\mathcal{F}(1)\,2^{-5}n^{-2}\|D^2 f\|,$$

что только в $\mathcal{F}(1)/3=1.136\ldots$ раз хуже точной оценки Фавара.

Метод получения основного результата. Как было отмечено ранее метод является развитием методов Стеклова и Фавара. Основная идея Стеклова заключалась в использовании представления

$$f=f-f*\chi_h+f*\chi_h,$$

или в промежуточном приближении функции так называемыми средними Стеклова. Надо отметить, что этот прием Стеклова повсеместно применяется не только в задачах аппроксимации, но и в задачах, связанных с оценками норм операторов, а также в задачах математической физики и уравнениях с частными производными. Прием, который мы используем, восходит к К. Нейману [29] и связан с решениями интегральных уравнений. В более современной редакции его можно найти в книге Шварца [13]. А именно напишем [14] разложение

$$f=f-f*\chi_h+\chi_h*(f-f*\chi_h)+\chi_h^2*(f-f*\chi_h)+\ldots \tag{1.8}$$

Это, в нашей задаче, аналог разложения Эйлера — Маклорена и имеет место при тех же предположениях, что и периодический вариант формулы Эйлера — Маклорена, а именно при $f\in T_0^{\perp}$. Написанное разложение есть ни что иное, как продолжение разложения Стеклова по сверточным степеням характеристической функции. Далее мы поступим как Фавар, и в случае $f\in T_{n-1}^{\perp}$ приблизим B-сплайны χ_h^j (сверточные степени функции χ_h порядка $j=1,2,3,\ldots$) тригонометрическими полиномами в интегральной метрике. И получим разностный аналог неравенства Фавара:

$$\|f\| \le \inf_{\tau_j\in T_{n-1}}\Big\|1+\sum_{j=1}^{\infty}(\chi_h^j-\tau_j)\Big\|_{L(\mathbb{T})}W_2(f,h).$$

Нахождение наилучших интегральных приближений B-сплайнов представляет собой нетривиальную задачу, и удовлетворительно на сегодняшний день, насколько нам известно, она решена (для всех параметров h) только для характеристической функции. Причем возникают два принципиальных случая, связанных с величиной носителя характеристической функции χ_h. В случае дискретных значений $h=(2j-1)/2n,\ j\in\mathbb{N},$ удается относительно просто получить точный результат, чему и посвящена настоящая работа. Случай произвольного h важен в силу ряда причин. Кроме очевидно возможного улучшения потерь в константах при переходе к неравенству Фавара в данной задаче, нам думается, это представляет интерес как классическая математическая задача. Вероятно получение точного результата в этом случае позволит уменьшить потери в константах при переходе к неравенству Фавара. Кроме того, вопрос интересен сам по себе как естественная математическая задача.

Мы уже имеем опыт работы с такого рода проблемами и выяснили достаточно глубокую связь возникающих вопросов с исследованиями Чебышева, Золотарева, Маркова, Бернштейна, Геронимуса и Пейерсторфера (см. [1], где можно найти историю вопроса и ссылки на исследования указанных математиков).

Точность неравенства (1.7) в случае $\alpha = 1$ доставляет сумма сплайнов Эйлера

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{sign}(c_n) * \chi_{1/2n}^{j}, \quad c_n(x) := \cos 2\pi n x,$$

что еще раз подчеркивает смысл разложения (1.8): это разложение, вообще говоря, конечной и интегрируемой функции по разностям “увеличивающейся гладкости”. Первый шаг, сделанный Стекловым, —

$$f = f - f * \chi_h + f * \chi_h$$

— осуществляет переход от непрерывной функции к функции класса C^1, что достаточно для прозрачных доказательств теорем Вейерштрасса и Джексона. То, что делает разложение Неймана, можно назвать итеративным разложением пространства (допустим C) в башню гладких пространств; на первом шаге мы переходим от пространства C к пространству C^1, контролируя “расстояние перехода” разностью $f - f * \chi_h$. Далее процесс продолжает таким же образом отсекать негладкие части. Абсолютную, а не асимптотическую, как ранее, точность оценки доставляет функция, как раз и составленная из суммы представителей различных вложенных классов функций. Причем, этот пример показывает, что в экстремальной конструкции естественно использовать $\operatorname{sign}(c_n)$: всюду определенные, ограниченные функции, так называемые сигнатуры, функции, ортогональные пространству T_{n-1}.

Организация данной работы. Во втором разделе приводятся необходимые определения и вспомогательные утверждения. Составляющие важную техническую часть доказательства основного результата оценки наилучших приближений периодизированных B-сплайнов приведены в разд. 3. Основные результаты работы изложены в четвертом разделе. Заключительный, пятый, раздел посвящен замечаниям и обсуждению открытых вопросов.

2. Обозначения и вспомогательные факты

Обозначим через $\mathbb{Q}$ тор $\mathbb{T} = [-1/2, 1/2) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ или ось $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, а через $L(\mathbb{Q})$ — пространство интегрируемых функций $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_1 := \|f\|_{L(\mathbb{Q})} = \int_{\mathbb{Q}} |f(t)|\, dt.$$

Под $C(\mathbb{T})$ будем понимать пространство непрерывных 1-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max\left\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{T}\right\}.$$

В данной работе мы занимаемся аппроксимацией вещественных, непрерывных периодических функций $f \in C(\mathbb{T})$ вещественными тригонометрическими полиномами степени $\le n-1$:

$$\tau(x) := \sum_{j=-n+1}^{n-1} \alpha_j e^j(x), \quad \alpha_j = \overline{\alpha}_{-j}, \quad e(x) := \exp(2\pi i x), \quad i^2 = -1.$$

Подпространство таких полиномов будем обозначать символом T_{n-1}. Обозначение $*$ будем использовать для свертки в $L(\mathbb{R})$:

$$(f{*}g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$$

и, несколько отступая от обозначений во введении, через $\circledast$ будем обозначать *периодическую свертку* в $L(\mathbb{T})$:

$$(f{\circledast}g)(x) := \int\limits_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,dt.$$

Через $\chi_h(x),\ h>0,$ обозначим характеристическую функцию интервала $(-h/2,h/2)$, нормированную в $L(\mathbb{R})$:

$$\chi_h(x) := \begin{cases} 1/h, & x\in(-h/2,h/2),\\ 0, & x\notin(-h/2,h/2), \end{cases} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_h(t)\,dt = 1. \tag{2.1}$$

Будем использовать хорошо известный метод периодизации (см. [11, с. 280, (2.1)]), превращающий функцию $f\in L(\mathbb{R})$ в 1-периодическую функцию $\widetilde{f}$ из $L(\mathbb{T})$ посредством формулы

$$\widetilde{f}(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x+j),$$

которая обладает свойством (см. доказательство теоремы 2.4 в [11, гл. 7, разд. 2])

$$\|\widetilde{f}\|_{L(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L(\mathbb{R})}, \quad f\in L(\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Отметим, что для неотрицательной на $\mathbb{R}$ функции $f\in L(\mathbb{R})$ в (2.2) имеет место равенство:

$$\|\widetilde{f}\|_{L(\mathbb{T})} = \|f\|_{L(\mathbb{R})}, \quad f\in L(\mathbb{R}), \quad f\ge 0. \tag{2.3}$$

Для 1-периодической функции

$$\widetilde{\chi}_h(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_h(x+j)$$

ввиду (2.1), (2.3) имеем $\|\widetilde{\chi}_h\|_{L(\mathbb{T})}=1$. Приведем разложение $\widetilde{\chi}_h$ в ряд Фурье:

$$\widetilde{\chi}_h(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(jh)\, e^j(x) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{sinc}(jh) c_j(x), \quad c_j(x) := \big(e^j(x)+e^{-j}(x)\big)/2; \tag{2.4}$$

здесь

$$\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad \text{для} \quad x\ne 0, \qquad \operatorname{sinc}(0) := 1.$$

Следуя Шварцу [13, гл. 3, § 2, (III, 2; 96)], положим

$$\begin{aligned} f^{1*}(x) &:= \ f(x), \quad f^{k*}(x) := \big(f * f^{(k-1)*}\big)(x) \quad \text{при} \quad k=2,3,\ldots, \quad f\in L(\mathbb{R});\\ g^{1\circledast}(x) &:= \ g(x), \quad g^{k\circledast}(x) := \big(g{\circledast}g^{(k-1)\circledast}\big)(x) \quad \text{при} \quad k=2,3,\ldots, \quad g\in L(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Возведение в сверточную степень обычной характеристической функции дает кардинальный B-сплайн χ_h^{k*} (см. [19, Part 5, Sec. 2]). Существенное значение в этой работе имеют интегральные приближения сверточных степеней $\widetilde{\chi}_h^{k\circledast}$, или периодизированных B-сплайнов:

$$\widetilde{\chi}_h^{k\circledast}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^k(jh) e^j(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_h^{k*}(x+j). \tag{2.5}$$

Первое равенство в (2.5) следует из определения сверточных степеней, разложения (2.4) и стандартного свойства свертки:

$$\widehat{(f \circledast g)}_j = \widehat{f}_j\, \widehat{g}_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \text{где} \quad \widehat{f}_j := \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(t) e^{-j}(t)\, dt, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad f \in L(\mathbb{T}).$$

Последнее равенство в (2.5) является хорошо известным фактом (см. [11, с. 280–282]). Отметим, что ввиду (2.3), (2.5) для $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$

$$\|\chi_h^{k*}\|_{L(\mathbb{R})} = \|\widetilde{\chi}_h^{k\circledast}\|_{L(\mathbb{T})} = 1.$$

Нетрудно проверить, что оператор дифференцирования k-го порядка переводит свертку с k-м периодизированным B-сплайном в k-ю центральную разность:

$$D^k (f \circledast \chi_h^{k\circledast})(x) = h^{-k} \Delta_h^k f(x), \tag{2.6}$$

$$\Delta_h^k f(x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(x + kh/2 - jh) = \Delta_h^1 \Delta_h^{k-1} f(x), \quad k \ge 1, \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x).$$

Проверку можно осуществить на основе следующих, легко получаемых, равенств:

$$D^1 e^j(x) = (2\pi j i)\, e^j(x), \quad h^{-1} \Delta_h^1 e^j(x) = (2\pi j i \operatorname{sinc}(jh))\, e^j(x).$$

Смысл этих равенств в том, что явно выписаны собственные функции и собственные значения операторов D и Δ. Поэтому действуя степенями этих операторов на разложение в ряд Фурье функции f, мы без труда убедимся в справедливости равенства (2.6). Ясно, однако, что можно получить это равенство и непосредственно без использования анализа Фурье. В частности оно верно и для свертки с дельта-функцией. Этот момент (а именно некая гибкость и простота в методах доказательств) возможно, будет полезен в обобщениях.

Так как

$$\sup_x |\Delta_h^k f(x)| = \|\Delta_h^k f\| \le \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \|f\| \le 2^k \|f\|,$$

то

$$\|D^k (f \circledast \chi_h^{k\circledast})\| \le (h/2)^{-k} \|f\|. \tag{2.7}$$

Далее, обозначим через $T_{n-1}^{\perp}$ подпространство вещественных функций $f \in L_\infty = L_\infty(\mathbb{T})$, ортогональных T_{n-1} относительно “скалярного произведения”

$$(f, g) = \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(t) g(t)\, dt = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) g(t)\, dt.$$

Хорошо известно, что наилучшее приближение в $L = L(\mathbb{T})$ тригонометрическими многочленами из T_{n-1} может быть вычислено так (см. [10]):

$$E_{n-1}(f)_1 := \inf_{\tau \in T_{n-1}} \|f - \tau\|_1 = \sup_{g \in T_{n-1}^{\perp},\ \|g\| \le 1} \int\limits_{\mathbb{T}} g(t) f(t)\, du. \tag{2.8}$$

Одним из основных инструментов теории аппроксимации является классическое неравенство Фавара [23]

$$\|g\| \le \mathcal{K}_k (2\pi n)^{-k} \|D^k g\|, \quad g \in T_{n-1}^{\perp}, \quad \mathcal{K}_k := 4\pi^{-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (4j+1)^{-k-1}. \tag{2.9}$$

Важные в теории аппроксимации константы Фавара $\mathcal{K}_k$ обладают следующими свойствами (более подробно о свойствах $\mathcal{K}_k$ см. в [20]):

$$1 = \mathcal{K}_0 < \mathcal{K}_2 = \pi^2/8 < \cdots < 4/\pi < \cdots < \mathcal{K}_3 = \pi^3/24 < \mathcal{K}_1 = \pi/2.$$

3. L-приближение периодизированных B-сплайнов

Введем обозначение

$$F_k := (2/\pi)^k \mathcal{K}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий простой и фундаментальный факт.

Теорема 1. *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}$, $h(\alpha) = \alpha/(2n)$, $\alpha > 0$. *Тогда*

$$E_{n-1}\left(\widetilde{\chi}_{h(\alpha)}^{k\circledast}\right)_1 \le F_k \alpha^{-k}. \tag{3.1}$$

В частности, для $k = 1, 2, 3$ *имеем*

$$E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{h(\alpha)})_1 \le \frac{1}{\alpha}, \quad E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{h(\alpha)}^{2\circledast})_1 \le \frac{1}{2\alpha^2}, \quad E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{h(\alpha)}^{3\circledast})_1 \le \frac{1}{3\alpha^3}.$$

Неравенства (3.1) *превращаются в равенства при* $\alpha = 2j+1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Оценка сверху является следствием неравенств Фавара (2.9) и теоремы Никольского (2.8). В самом деле, оценка производной свертки с B-сплайном (2.7) и неравенство (2.9) дают:

$$\|g \circledast\ \widetilde{\chi}_h^{k\circledast}\| \le \mathcal{K}_k (2\pi n)^{-k} \|D^k (g \circledast \widetilde{\chi}_h^{k\circledast})\| \le \mathcal{K}_k (\pi n h)^{-k} \|g\|, \quad g \in T_{n-1}^{\perp}.$$

Поэтому на основании тождества (2.8) и четности $\widetilde{\chi}_h^{k\circledast}$ получаем

$$E_{n-1}(\widetilde{\chi}_h^{k\circledast})_1 = \sup_{g \in T_{n-1}^{\perp},\ \|g\| \le 1} \int_{\mathbb{T}} g(u) \widetilde{\chi}_h^{k\circledast}(-u)\, du = \sup_{g \in T_{n-1}^{\perp},\ \|g\| \le 1} |(\widetilde{\chi}_h^{k\circledast} * g)(0)| \le \mathcal{K}_k (\pi n h)^{-k},$$

что совпадает с (3.1).

Докажем теперь точность полученной оценки для $\alpha = 2j+1$. Как и ранее, мы будем использовать обозначение $c_y(x) := \cos(2\pi x y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Пусть k — нечетное. Покажем, что функция $\pm\,\mathrm{sign}\,(c_n) \in T_{n-1}^{\perp}$, $n \in \mathbb{N}$, превращает неравенство (3.1) в равенство. Для $h_j = (2j+1)/(2n)$, $j = 0, \ldots, n-1$, имеем

$$E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{h_j}^{k\circledast})_1 \ge (-1)^j \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\chi}_{h_j}^{k\circledast}(u) \mathrm{sign}\, c_n(u)\, du = (-1)^j \int_{\mathbb{R}} \chi_{h_j}^{k*}(u) \mathrm{sign}\, c_n(u)\, du. \tag{3.2}$$

Делая замену переменной, можно переписать последнее равенство в (3.2) так:

$$(-1)^j \int_{\mathbb{R}} \chi_{h_j}^{k*}(u) \mathrm{sign}\, c_n(u)\, du = (-1)^j \int_{\mathbb{R}} \chi_{2j+1}^{k*}(u) \mathrm{sign}\, c_{1/2}(u)\, du.$$

Отметим, что $\mathrm{sign}\,(c_{1/2}(x)) \equiv \mathcal{E}_0(x)$, где $\mathcal{E}_0$ — нулевой сплайн Эйлера (см. [19, с. 148–151]). Сплайны Эйлера $\mathcal{E}_k$ определяются реккурентно с помощью формул

$$\mathcal{E}_{j+1}(x) = \gamma_j \int_{\mathbb{T}} \mathcal{E}_j(x+u)\, du, \quad \gamma_j^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{E}_j(u)\, du,$$

и обладают следующими свойствами:

$$\mathcal{E}_j(x+2) = \mathcal{E}_j(x), \quad \mathcal{E}_j(x+1) = -\mathcal{E}_j(x), \quad \int_{-1}^{1} \mathcal{E}_j(u+x)\, du = 0,$$

$$\mathcal{E}_j(-x) = \mathcal{E}_j(x), \quad \|\mathcal{E}_j\| = 1, \quad \mathcal{E}_j(\nu) = (-1)^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

$$D^k\mathcal{E}_m(x) = \frac{\mathcal{K}_{m-k}}{\mathcal{K}_k}\pi^k \begin{cases} (-1)^{k/2}\mathcal{E}_{m-k}(x) & \text{при четном } k, \\ (-1)^{(k-1)/2}\mathcal{E}_{m-k}(x+1/2) & \text{при нечетном } k. \end{cases} \tag{3.4}$$

Сначала используем (3.4):

$$(-1)^j \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{2j+1}^{k*}(u) \operatorname{sign} c_{1/2}(u)\,du = \frac{(-1)^j\mathcal{K}_k}{\pi^k}\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{2j+1}^{k*}(u)\; D^k\mathcal{E}_k(u-k/2)\,du.$$

Затем проинтегрируем по частям, понимая производную характеристической функции в смысле теории распределений:

$$\frac{(-1)^j\mathcal{K}_k}{\pi^k}\int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{2j+1}^{k*}(u)\; D^k\mathcal{E}_k(u-k/2)\,du = \frac{(-1)^{j+1}\mathcal{K}_k}{\pi^k}\int\limits_{\mathbb{R}} D^k\chi_{2j+1}^{k*}(u)\; \mathcal{E}_k(u-k/2)\,du.$$

Далее, используя формализм обобщенных функций, а именно формулу

$$D^k\chi_{2j+1}^{k*}(u) = (2j+1)^{-k}\Delta_{2j+1}^k\delta(u),$$

и учитывая свойства сплайнов Эйлера (3.3), окончательно получим

$$\frac{(-1)^{j+1}\mathcal{K}_k}{\pi^k}\int\limits_{\mathbb{R}} D^k\chi_{2j+1}^{k*}(u)\; \mathcal{E}_k(u-k/2)\,du = \frac{(-1)^{j+1}\mathcal{K}_k}{\pi^k(2j+1)^k}\int\limits_{\mathbb{R}} \Delta_{2j+1}^k\delta(u)\; \mathcal{E}_k(u-k/2)\,du$$

$$= \frac{(-1)^j\mathcal{K}_k}{\pi^k}(2j+1)^{-k}\Delta_{2j+1}^k\mathcal{E}_k(-k/2) = \frac{(-1)^j\mathcal{K}_k}{\pi^k}(2j+1)^{-k}2^k(-1)^j = (2j+1)^{-k}F_k.$$

Доказательство для четных k аналогичное. □

З а м е ч а н и е 3. Точность теоремы при нечетных α можно показать и другим способом. Как и ранее, будем пользоваться следующим свойством:

$$\operatorname{sign} c_n = \mathcal{E}_0(2nt) = \mathcal{E}_{0,2n}(t) = \pm\frac{\mathcal{K}_k}{(2\pi n)^k}D^k\mathcal{E}_{k,2n}(t+k/2).$$

Тогда

$$E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{h_j}^{k\circledast})_1 = \sup_{\|g\|\le 1, g\in T_{n-1}^\perp} |(\widetilde{\chi}_{h_j}^{k\circledast} \circledast g)(0)| \ge \|\widetilde{\chi}_{h_j}^{k\circledast} \circledast \operatorname{sign} c_n\| = \frac{\mathcal{K}_k}{(2\pi n)^k}\|D^k(\widetilde{\chi}_{h_j}^{k\circledast} \circledast \mathcal{E}_{k,2n})\|$$

$$= \frac{\mathcal{K}_k}{(2\pi n h_j)^k}\|\Delta_{h_j}^k\mathcal{E}_{k,2n}\| = \frac{\mathcal{K}_k}{\pi^k(2j+1)^k}2^k\|\mathcal{E}_{k,2n}\| = \frac{2^k\mathcal{K}_k}{\pi^k(2j+1)^k} = (2j+1)^{-k}F_k.$$

4. Точный вариант теоремы Джексона в $C(\mathbb{T})$

Основной результат нашей работы базируется на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $f \in T_0^\perp$ *и* $h > 0$. *Тогда*

$$f = f - f\circledast\widetilde{\chi}_h + f\circledast\widetilde{\chi}_h - f\circledast\widetilde{\chi}_h^{2\circledast} + \dots = \sum_{j=0}^\infty (f - f\circledast\widetilde{\chi}_h)\circledast\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} = (f - f\circledast\widetilde{\chi}_h)\circledast\sum_{j=0}^\infty \left(\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1\right), \tag{4.1}$$

причем сходимость рядов равномерная. Здесь и далее под $\widetilde{\chi}_h^{0\circledast}$ *понимается* δ*-функция Дирака.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная сходимость рядов (4.1) следует из того, что при любых $h > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$f = \sum_{j=0}^{m-1} (f - f \circledast \widetilde{\chi}_h) \circledast \widetilde{\chi}_h^{j\circledast} + f \circledast \widetilde{\chi}_h^{m\circledast}, \qquad \lim_{m\to\infty} \|f \circledast \widetilde{\chi}_h^{m\circledast}\| = 0. \tag{4.2}$$

Первое равенство в (4.2) очевидно, а последнее вытекает из того, что $f \in T_0^{\perp}$ и

$$\lim_{m\to\infty} \|\widetilde{\chi}_h^{m\circledast} - 1\| = 0. \tag{4.3}$$

В свою очередь, соотношение (4.3) следует из разложения в ряд Фурье функции $\widetilde{\chi}_h^{m\circledast}(x)$:

$$\widetilde{\chi}_h^{m\circledast}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{sinc}^m(jh) c_j(x), \quad c_j(x) := \cos(2\pi j x),$$

и неравенств

$$|\operatorname{sinc}(x)| < 1, \qquad |\operatorname{sinc}(x)| < (\pi x)^{-1}, \qquad x > 0.$$

В самом деле, используя монотонность функции sinc на $(0, 1)$, получаем

$$\left\|\widetilde{\chi}_h^{m\circledast} - 1\right\| \le \left\| \sum_{j=1}^{[h^{-1}]} \right\| + \left\| \sum_{j=[h^{-1}]+1}^{\infty} \right\| \le |\operatorname{sinc}^m(h)[h^{-1}]| + (\pi h)^{-m} \sum_{j=[h^{-1}]+1}^{\infty} j^{-m}$$

$$< h^{-1}(\operatorname{sinc}^m(h) + \pi^{-m}), \qquad h > 0, \qquad m \ge 2,$$

и ряд $\left(\sum_{j=1}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1)\right)$ сходится равномерно. $\square$

Принципиальным результатом данной работы является следующий разностный аналог классического неравенства Фавара в случае второй производной.

Теорема 2. *Пусть* $f \in T_{n-1}^{\perp}$, $n \ge 1$ *и* $h > 0$. *Тогда*

$$\|f\| \le E_{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1)\Big)_1 W_2(f, \chi_h),$$

где

$$W_2(f, \chi_h) = \|f - f * \chi_h\|_{C(\mathbb{R})} = \|f - f \circledast \widetilde{\chi}_h\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (4.2) и свойства свертки

$$\|f \circledast g\| \le \|f\| \|g\|_1.$$

В самом деле, используя условие $f \in T_{n-1}^{\perp}$, для произвольного $\tau \in T_{n-1}$ имеем

$$\|f\| = \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1) - \tau \Big) \circledast (f - f \circledast \widetilde{\chi}_h) \Big\| \le E_{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1)\Big)_1 W_2(f, \chi_h). \qquad \square$$

Так как сверточное умножение на полином снова дает полином, как следствие предыдущей теоремы получается

Теорема 3. *Пусть* $f \in C(\mathbb{T})$ *и* $h > 0$. *Тогда*

$$E_{n-1}(f) := \inf_{\tau \in T_{n-1}} \|f - \tau\| \le E_{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1)\Big)_1 W_2(f, \widetilde{\chi}_h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно предположить, что функция f принадлежит $T_0^{\perp}$. Выбирая в качестве $\tau_* \in T_{n-1}$ полином

$$\tau_* = \tau^* \circledast (f - f \circledast \widetilde{\chi}_h), \quad \text{где} \quad \Big\| \sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1) - \tau^* \Big\|_1 = \inf_{\tau \in T_{n-1}} \Big\| \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{(} \chi_h^{j\circledast} - 1) - \tau \Big\|_1,$$

получаем

$$E_{n-1}(f) \le \|f - \tau_*\| = \Big\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1) - \tau^* \Big) \circledast (f - f \circledast \widetilde{\chi}_h) \Big\| \le E_{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} (\widetilde{\chi}_h^{j\circledast} - 1) \Big)_1 W_2(f, \chi_h). \qquad \square$$

Выбор $h = \alpha/(2n)$ и использование точных неравенств теоремы 1 позволяет получить следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $h = \alpha(2n)^{-1}$, $\alpha > 2/\pi$. *Тогда справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f) \le \big(\operatorname{tg}(\alpha^{-1}) + \sec(\alpha^{-1}) \big) W_2(f, \chi_{\alpha/(2n)}), \qquad f \in C(\mathbb{T}). \tag{4.4}$$

Неравенство (4.4) *неулучшаемо при* $\alpha = 2\nu + 1$, $\nu = 0, 1, \ldots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применение теорем 1, 3 и известного разложения (см. [20, формулы (6), (9)])

$$\operatorname{tg}(x) + \sec(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j x^j, \quad |x| < \pi/2,$$

дает

$$E_{n-1}(f) \le \Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{\alpha/(2n)}^{j\circledast})_1 \Big) W_2(f, \chi_{\alpha/(2n)}) \le \Big(\sum_{j=0}^{\infty} F_j \alpha^{-j} \Big) W_2(f, \chi_{1/(2n)})$$
$$\le (\operatorname{tg}\alpha^{-1} + \sec\alpha^{-1}) W_2(f, \chi_{\alpha/(2n)}).$$

Для того чтобы доказать точность неравенства (4.4) при $\alpha = 1$, рассмотрим ненормированные сплайны Эйлера

$$\varepsilon_j := \operatorname{sign} c_{1/2} * \chi_1^{j*}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.5}$$

и составим сумму

$$\phi_n(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j(2nx). \tag{4.6}$$

Функция $\phi_n \in T_{n-1}^{\perp}$ и

$$E_{n-1}(\phi_n) = \|\phi_n\| = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j(0) = \sum_{j=0}^{\infty} (\operatorname{sign} c_n \circledast \widetilde{\chi}_{1/(2n)}^{j\circledast})(0) = \sum_{j=0}^{\infty} E_{n-1}(\widetilde{\chi}_{1/(2n)}^{j\circledast})_1 = \sum_{j=0}^{\infty} F_j = \operatorname{tg} 1 + \sec 1.$$

С другой стороны,

$$W_2(\phi_n, \chi_{1/(2n)}) = \|\phi_n - \phi_n \circledast \widetilde{\chi}_{1/(2n)}\| = \|\varepsilon_0\| = 1.$$

Поэтому мы имеем в (4.4) равенство. Однако функция ϕ_n, что типично в конструкциях примеров для теоремы Джексона, разрывна. Чтобы показать неулучшаемость оценки теоремы 4 для непрерывных функций, достаточно заменить в (4.5), (4.6) $\operatorname{sign} c_{1/2} = \varepsilon_0$ на $\varepsilon_0 \circledast \chi_\varepsilon$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Точность при значениях $\alpha = 2\nu + 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$ доказывается аналогично.

5. Замечания, возможные обобщения, открытые вопросы

Точность оценок при других значениях носителя h. Мы получили простые, сильные и точные результаты о наилучшем приближении $E_{n-1}(f)$ тригонометрическими многочленами непрерывной на периоде функции f только при определенных значениях шага "модуля непрерывности" $W_2(f,\chi_h)$, а именно при $h=(2j+1)/(2n)$, $j=0,1,2,\ldots$ Особый практический и теоретический интерес представляют точные оценкци для параметра h в окрестности точки $1/(2n)$. Нам кажется, что методы настоящей работы с небольшой модификацией позволят получить точные результаты и в этом случае. Теоретический интерес представляет модификация подхода, в случае когда канонический набор нулей косинусов не будет давать наилучших приближений. Также возникает вопрос о правильном выборе параметра h. Считаем, что оптимальным значением параметра h будет то значение, которое лучше согласуется с точными оценками Фавара. Ясно, что можно добиться идеального согласования, устремив h к нулю, однако вопрос относится к выбору h, сравнимому с $1/(2n)$.

Как было отмечено во введении, наша оценка дает мультипликативную потерю, равную $1.136\ldots$ А можно ли, выбирая шаг, сделать эту потерю меньше и какова эта минимальная потеря в терминах $W_2(f,\chi_h)$? То, что можно ненамного улучшить указанную потерю, видно сразу, даже используя неточные простые оценки теоремы 1. Для этого достаточно использовать неточное неравенство:

$$E_{n-1}(f)\le(\operatorname{tg}\alpha^{-1}+\sec\alpha^{-1})\,W_2(f,\chi_{\alpha/(2n)}).$$

Выбирая в этом неравенстве α близким к 0.97 и используя аргументацию из введения, нетрудно подсчитать, что мультипликативная потеря не будет превосходить

$$3^{-1}\min\left\{\alpha^2(\operatorname{tg}\alpha^{-1}+\sec\alpha^{-1})\right\}\le 1.1336,$$

что незначительно лучше результата при $\alpha=1$.

Можно было бы попробовать изменить и характеристику, меряющую гладкость. Величина

$$W_2(f,\chi_h^{2*})$$

и даже более общая характеристика W_{2k} использовалась в работе [25] в связи с изучением асимптотики по k констант Джексона — Стечкина. Такие характеристики, как и специальные модули непрерывности данной работы, являются важными частными случаями модулей непрерывности Бомана — Шапиро [18]. Дополнительная гладкость (сверточный квадрат характеристической функции) была введена для того, чтобы обеспечить ограниченность по k норм оператора усредненной разности.

Ясно, что можно применить предложенный нами подход и для получения точных оценок в терминах $W_2(f,\chi_h^{2*})$. Например, так как сворачивание будет происходить с квадратом характеристической функции, то наш главный результат будет выглядеть таким образом:

$$E_{n-1}(f)\le\sec(\alpha^{-1})\,W_2(f,\chi_{\alpha/(2n)}^{2*}). \tag{5.1}$$

Точность выписанного неравенства для $\alpha=1$ доказывается так же, как в данной работе. Однако потери при переходе к дифференциальным оценкам тут выше. В частности, для $\alpha=1$ мы получим мультипликативную потерю порядка 1.2339 и вряд ли ее можно будет значительно уменьшить. Возможно, однако, что получить полные результаты для характеристики $W_2(f,\chi_{\alpha/(2n)}^{2*})$ будет несколько легче. В частности, именно эта характеристика оказалось эффективной для обобщения теоремы Джексона на модули гладкости высокого порядка.

Модуль непрерывности $W_2(f,\chi_h)$ и K-функционал. В этом пункте проведем сравнение $W_2(f,\chi_h)$ с K-функционалом

$$K_2(f,h):=\inf_{g\in C^2}\{\|f-g\|+h^2\|D^2g\|\},\quad h\ge 0.$$

Более подробно о K-функционалах можно прочитать в [19].

Вначале сделаем необходимые замечания.

З а м е ч а н и е 4. Для модуля непрерывности $W_2(f,\chi_h)$ справедливо следующее неравенство:

$$W_2(f,\chi_h) = \|f - f \circledast \widetilde{\chi}_h\| \le \|f\| + \|f\|\|\widetilde{\chi}_h\|_1 = 2\|f\|, \tag{5.2}$$

а для второго классического модуля $\omega_2(f,h)$ непрерывности:

$$\omega_2(f,h) = \sup_{|t|<h} \|f(\cdot + t) - 2f(\cdot) + f(\cdot - t)\| \le 4\|f\|.$$

З а м е ч а н и е 5. Существенно, что для модуля $W_2(f,\chi_h)$ справедлива оценка

$$W_2(f,\chi_h) = \Big\| \frac{1}{h} \int\limits_0^{h/2} f(\cdot - t) - 2f(\cdot) + f(\cdot + t)dt \Big\| \le \frac{1}{h}\|D^2 f\| \int\limits_0^{h/2} t^2 dt = \frac{h^2}{24}\,\|D^2 f\|, \tag{5.3}$$

которая лучше подобной оценки для классического модуля

$$\omega_2(f,h) \le h^2\|D^2 f\|.$$

Нам понадобится следующий аналог неравенства Бернштейна — Никольского — Стечкина.

Лемма 2. *Пусть* $\tau \in T_n,\ k,n \in \mathbb{N},\ h \in (0,1/n]$. *Тогда*

$$\|D^2\tau\| \le \frac{(2\pi n)^2}{W_2(e^n,\chi_h)} W_2(\tau,\chi_h). \tag{5.4}$$

Очевидно, что данное неравенство неулучшаемо. Для $\tau(x) = e^n(x) = \exp(2\pi n x)$ имеем равенство. Более того, как будет показано ниже, при $0 < h < 2/(\pi n)$ из него следует классическое неулучшаемое неравенство Бернштейна для второй производной:

$$\|D^2\tau\| \le (2\pi n)^2\|\tau\|. \tag{5.5}$$

Доказательство леммы 2 опирается на следующую лемму о мультипликаторах (см., например, [15, с. 361]).

Лемма A. *Пусть* $g(x)$ — *неотрицательная, четная, выпуклая на* $[-n,n]$ *функция. Тогда для произвольного полинома* $\tau(x) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{\tau}_j e^j(x) \in T_n$ *имеем*

$$\Big\| \sum_{j=-n}^{n} g(j)\widehat{\tau}_j\, e^j \Big\| \le g(n)\|\tau\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Пусть

$$\tau(x) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{\tau}_j e^j(x), \qquad D^2\tau(x) = \sum_{j=-n}^{n} (2\pi i j)^2 \widehat{\tau}_j e^j(x).$$

Отметим, что

$$(\tau - \tau \circledast \widetilde{\chi}_h)(x) = \sum_{j=-n,\, j\ne 0}^{n} \big(1 - \operatorname{sinc}(jh)\big)\widehat{\tau}_j e^j(x).$$

Запишем $D^2\tau(x)$ в следующем виде:

$$D^2\tau(x) = \sum_{j=-n,\, j\ne 0}^{n} (2\pi i j)^2 \big(1 - \operatorname{sinc}(jh)\big)^{-1} \big(1 - \operatorname{sinc}(jh)\big)\widehat{\tau}_j e^j(x).$$

Рассмотрим функцию

$$g(t)=\frac{(2\pi t)^2}{1-\operatorname{sinc}(th)}=\frac{4}{h^2}\frac{(\pi ht)^3}{\pi ht-\sin\pi ht},\quad h\in(0,1/n],\quad t\in(0,n].$$

Заметим, что

$$\Big(\frac{x^3}{x-\sin x}\Big)''_{xx}=\frac{x\varphi(x)}{(x-\sin x)^2},$$

где

$$\varphi(x):=3+\frac{7}{2}x^2+2x^2\cos x+(-6x-x^3)\sin x+(-3+x^2/2)\cos 2x-3x\sin 2x>0,\quad x\in(0,\pi].$$

Используя разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Тейлора в точке $x=0$, получим

$$\varphi(x)>\frac{x^8}{360}\Big(1+\frac{x^2}{140}-\frac{29x^4}{5040}\Big)>0,\quad x\in(0,\pi].$$

Следовательно,

$$D^2g(t)>0,\quad h\in(0,1/n],\quad t\in(0,n].$$

Значит, функция $g(t)$ удовлетворяет условиям леммы A и мы получаем неравенство (5.4):

$$\|D^2\tau\|\le(2\pi n)^2\,(1-\operatorname{sinc}(nh))^{-1}\,\Big\|\sum_{j=-n,\,j\ne0}^{n}\big(1-\operatorname{sinc}(jh)\big)\widehat{\tau}_je^j(x)\Big\|$$

$$=\frac{(2\pi n)^2}{1-\operatorname{sinc}(nh)}\,W_2(\tau,\chi_h)=\frac{(2\pi n)^2}{W_2(e^n,\chi_h)}W_2(\tau,\chi_h).$$

Таким же образом лемма A влечет неравенство (5.5). Достаточно убедиться в том, что

$$\|W_2(\tau,\chi_h)\|\le\|W_2(e^n,\chi_h)\|\,\|\tau\|.$$

Последнее неравенство следует из выпуклости функции $g(x)=1-\sin(x)/x$ на интервале $(0,2)$. Этот факт легко проверяется. Лемма 2 доказана. $\square$

Теперь покажем, как доказанные результаты могут быть использованы для доказательства эквивалентности специального модуля непрерывности и K-функционала Петре.

Теорема 5. *Пусть $h\in(0,1]$. Тогда*

$$\frac14K_2(f,h/(4\sqrt6))\le W_2(f,\chi_h)\le 4K_2(f,h/(4\sqrt6)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (5.2) и (5.3) следует, что

$$W_2(f,h)\le\inf_{g\in C^2}\{W_2(f-g,h)+W_2(g,h)\}\le\inf_{g\in C^2}\Big\{2\|f-g\|+\frac{h^2}{24}\|D^2g\|\Big\}\le 4K_2(f,h/(4\sqrt6)).$$

Перейдем к оценке снизу. Пусть $\tau\in T_{n-1}$ является многочленом наилучшего равномерного приближения для f. Из определения K-функционала вытекает, что

$$K_2(f,h/(4\sqrt6))\le\|f-\tau\|+\frac{h^2}{96}\|D^2\tau\|.$$

Применим (4.4) с $\mathcal{F}(\alpha):=\sec(1/\alpha)+\operatorname{tg}(1/\alpha)$ и (5.4):

$$\|f-\tau\|+\frac{h^2}{96}\|D^2\tau\|\le\mathcal{F}(\alpha)W_2(f,h)+\frac{h^2(\pi n)^2}{24(1-\operatorname{sinc}(nh))}W_2(\tau,h),\quad h=\alpha(2n)^{-1},\quad \alpha>2/\pi.$$

Заметим, что
$$W_2(\tau,h)\le W_2(f-\tau,h)+W_2(f,h),$$
и вновь применим (4.4). Получим
$$\mathcal{F}(\alpha)W_2(f,h)+\frac{h^2(\pi n)^2}{24(1-\operatorname{sinc}(nh))}W_2(\tau,h)\le\Big(\mathcal{F}(\alpha)+\frac{(\pi\alpha/2)^2\big(2\mathcal{F}(\alpha)+1\big)}{24(1-\operatorname{sinc}(\alpha/2))}\Big)W_2(f,h).$$
Нетрудно убедиться в том, что
$$\mathcal{F}(\alpha)+\frac{(\pi\alpha/2)^2\big(2\mathcal{F}(\alpha)+1\big)}{24(1-\operatorname{sinc}(\alpha/2))}<4,\quad \alpha\in(\alpha_0,2\alpha_0],\quad \alpha_0=1.36.$$
Осталось заметить, что для произвольного $h\in(0,1]$ можно выбрать n так, чтобы $h=\alpha/(2n)$ и $\alpha\in(\alpha_0,2\alpha_0]$. Теорема 5 доказана. □

Отметим, что классический второй модуль непрерывности $\omega_2(f,h)$ эквивалентен $K_2(f,h/2)$:
$$\frac{2}{3}K_2(f,h/2)\le\frac{1}{2}\omega_2(f,h)\le 2K_2(f,h/2).$$
Доказательство левого неравенства (с множителем 2/3) можно получить таким образом: для функции $g=f*\chi_h^{2*}$ имеем
$$K_2(f,h/2)\le\|f-g\|+(h^2/4)\,\|D^2g\|=\|f-f*\chi_h^{2*}\|+(h^2/4)\,\|D^2(f*\chi_h^{2*})\|$$
$$\le(1/2)\omega_2(f,h)+(1/4)\omega_2(f,h)=(3/4)\omega_2(f,h).$$

Выписанная оценка и теорема 5 позволяют произвести сравнение характеристик W_2 и ω_2:
$$W_2(f,\chi_h)\le 4\ K_2(f,h/(4\sqrt{6}))\le 3\ \omega_2(f,h/(2\sqrt{6}))\le 12\ K_2(f,h/(4\sqrt{6}))\le 48\ W_2(f,\chi_h).$$

Таким образом,
$$\frac{1}{6}\,W_2(f,\chi_h)\le\frac{1}{2}\,\omega_2(f,h/(2\sqrt{6}))\le 8\,W_2(f,\chi_h)\le 24\,\omega_2(f,h/(2\sqrt{6})).$$

Модуль непрерывности $W_{2k}(f,\chi_h^{2*})$ и теорема Джексона — Стечкина. Теоремой Джексона — Стечкина является утверждение об ограниченности по n точной константы $\mathcal{J}_{n,k}(\alpha)$ в неравенстве (1.5). Принципиальные результаты для оценок констант $\mathcal{J}_{n,k}(\alpha)$ получены в работе [25]. Упрощеннный вариант доказательства основного результата [25] с лучшими оценками констант выглядит так же, как и в случае $k=1$ (см. подробности в [14]). Рассмотрим оператор
$$W_{2k}(f,\chi_h^{2*}):=\binom{2k}{k}^{-1}\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}}\Delta_t^{2k}f(\cdot)\,\chi_h^{2*}(t)\,dt\Big\|=\|f-f*\Lambda_{k,h}\|,$$
где
$$\Lambda_{k,h}(x)=2\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}a_j\phi_{jh}(x),\quad a_j:=\frac{\binom{2k}{k-j}}{\binom{2k}{k}},\quad \phi_{jh}(x)=\frac{1}{jh}\Big(1-\frac{|x|}{jh}\Big)_+,\quad u_+:=\max\{u,\,0\}.$$
Запишем разложение Неймана тождественного оператора по периодизированным сверточным степеням $\Lambda_{k,h}$:
$$f=f-f\circledast\widetilde{\Lambda}_{k,h}+f\circledast\widetilde{\Lambda}_{k,h}-f\circledast\widetilde{\Lambda}_{k,h}^{2\circledast}+\cdots$$
Оценки с помощью неравенства Фавара (2.9) наилучших приближений
$$E_{n-1}(\widetilde{\Lambda}_{k,\alpha/(2n)})_1\le\mathcal{K}_{2k}(\mu_k/\alpha)^{2k},\tag{5.6}$$

$$1 > \mu_k^2 := \frac{8}{\pi^2} \sum_{1\le j=2\nu+1\le k} \frac{a_j}{j^2}$$

из работы [25, лемма 4.2] позволяют получить неравенство

$$E_{n-1}(f) \le \sec(\mu_k\pi/(2\alpha))\, W_{2k}(f, \chi^{2*}_{\alpha/(2n)}), \quad \alpha \ge 1.$$

В работе [25] отмечено, что при $h = 1/(2n)$ неравенство (5.6) превращается в равенство, поэтому очевидная модификация конструкции примера (4.5), (4.6) для нижней оценки предыдущего раздела дает точный результат; в том случае, когда удается найти наилучшие интегральные приближения функции $\widetilde{\Lambda}_{k,\alpha/(2n)}$, в частности для аргумента $h = 1/(2n)$, мы имеем точное неравенство

$$E_{n-1}(f) \le \sec(\mu_k\pi/2)\, W_{2k}(f, \chi^{2*}_{1/(2n)}),$$

которое для $k = 1$ совпадает с приведенным выше неравенством (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала и неравенство Джексона в $C(\mathbb{T})$ // Тр. Ин-та математики и механики. 2009. Т. 15, № 1. С. 59–65.
3. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1912. Т. 13. С. 49–194.
4. **Горбачев Д.В.** Неравенство Джексона с константой 1 в пространстве непрерывных функций // Изв. ТулГУ. 2001. Т. 7, вып. 1. С. 77–81. (Математика. Механика. Информатика.)
5. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
6. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: ЛГУ, 1982. 366 с.
7. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.
8. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
9. **Натансон И.П.** Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. 688 с.
10. **Никольский С.М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
11. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974. 336 с.
12. **Стеклов В.А.** Основные задачи математической физики: избр. тр. 2-е изд. М.: Наука, 1983. 432 с.
13. **Шварц Л.** Математические методы для физических наук: пер. с фр. М.: Мир, 1965. 412 с.
14. **Babenko A.G., Kryakin Yu.V.** On $T^{\perp}_{2n-1}$ spaces // arXiv:0812.2744v1 [math.CA] 15 Dec 2008. 13 p. (URL: http://arxiv.org/abs/0812.2744v1).
15. **Bellinsky E.S., Trigub R.M.** Fourier analysis and approximation of functions. Dordrecht: Kluwer academic Publishers, 2004. 585 p.
16. **Bernstein S.N.** Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes de degré donné // Mem. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg. 1912. Vol. 4. P. 1–103.
17. **Bernstein S.N.** Sur les recherches récentes relatives à la meilleure des fonctions continues par les polynômes // Proc. of 5th Inter. Math. Congress. 1912. Vol. 1. P. 256–266.
18. **Boman J., Shapiro H.** Comparison theorems for a generalized modulus of continuity // Arkiv för Matematik. 1971. Vol. 9. P. 91–116.
19. **DeVore R.A., Lorentz G. G.** Constructive approximation. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1993. 449 p. (Grundlehren math. Wiss.; 303).
20. **Elkies N.** On the sums $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(4k+1)^{-n}$ // Amer. Math. Monthly. 2003. Vol. 110, no. 7. P. 561–573.
21. **Favard J.** Sur l'pproximation des fonctions périodiques par des polynomes trigonométriques // Comptes rendus Acad. Sci. Paris. 1936. Vol. 203. P. 1122–1124.

22. **Favard J.** Application de la formule summatoire d'Euler à la démostration de quelques propriétés extrémales des intégrales des fonctions périodiques et presque–périodiques // Matematisk Tidskrift København B. H. 1936. Vol. 4. P. 81–94.
23. **Favard J.** Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaies clasess de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bul. Sci. Math. 1937. Vol. 61. P. 209–224, 243–256.
24. **Fejér L.** Sur les fonctions bornées et intégrables // Comptes Rendus Hebdomadaries, Seances de l'Academie de Sciences, Paris. 1900. Vol. 131. P. 984–987.
25. **Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A.** On the exact constant in Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. Vol. 29. P. 157–179.
26. **Jackson D.** Über die Genauigkeit der Annäherunger stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. Preisschrift und Dissertation. Universitat Göttingen, 1911.
27. **Landau E.** Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1908. Vol. 25. P. 337–345.
28. **Lebesgue H.** Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sciences Math. 1898. Vol. 22. P. 278–287.
29. **Neumann C.** Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche potential. Leipzig: Teubner, 1877.
30. **Peetre J.** Exact interpolation theorems for Lipschitz continuous functions // Ricerche Mat. 1969. Vol. 18. P. 239–259.
31. **Stone M.H.** Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. Vol. 41. P. 375–481.
32. **Vallée Poussin C. de la .** Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier // Bulletin de l'Academie Royale de Belgique. 1908. Vol. 3. P. 193–254.
33. **Vallée Poussin C. de la .** On the approximation of functions of a real variable and on quasi–analytic functions // The Rice Institute Pamphlet. 1925. Vol. 3. P. 105–123.
34. **Weierstrass K.** Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen // Der Sitzungsberichte der Königl. Akademie der Wissennschaften. 1885. S. 633–639, 789–805.

Поступила 09.02.2012

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Kryakin, Yuriy
dr hab.
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Dolmatova, Nadezhda
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: nad.dolmatova@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ РАВНОСХОДИМОСТИ СЕГЁ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ — ЯКОБИ[1]

В. М. Бадков

Пусть $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормальная система тригонометрических полиномов Якоби, полученная при ортогонализации последовательности $1, \sin\tau,\ \cos\tau,\ \sin 2\tau,\ \cos 2\tau, \ldots$ методом Шмидта на отрезке $[0, 2\pi]$ с весом $\varphi^{\alpha,\beta}(\tau) := (1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2}$; $s_n^{\alpha,\beta}(F;\theta) := \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi^{\alpha,\beta}; F)\Phi_k^{\alpha,\beta}(\theta)$ — n-я сумма Фурье функции F по системе $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$; $s_n(F;\theta) = s_{2n}^{-1/2,-1/2}(F;\theta)$ — обычная сумма Фурье. Доказано, что если $\alpha, \beta > -1$, $A := \min\{\alpha + 1/2, \alpha/2 + 1/4\}$, $B := \min\{\beta + 1/2, \beta/2 + 1/4\}$, $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, F измерима и $F(\tau)(1-\cos\tau)^A(1+\cos\tau)^B \in L^1$, то $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$ и сумма $s_{2n}^{\alpha,\beta}(F;\theta)$ равносходится при $n \to \infty$ с каждой из последовательностей $s_n(F\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}};\theta)/\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)}$ и $s_n(F\varphi^{\alpha,\beta};\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)$ равномерно на отрезках $[-\pi+\varepsilon, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Для четной функции F соответствующие результаты ранее получили Г. Сегё и Е. А. Плещёва.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы Якоби, суммы Фурье, равносходимость.

V. M. Badkov. Trigonometric analogs of the Szegő equiconvergence theorem for Fourier–Jacobi series.

Let $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ be an orthonormal system of trigonometric Jacobi polynomials obtained by orthogonalizing the sequence $1, \sin\tau,\ \cos\tau,\ \sin 2\tau,\ \cos 2\tau, \ldots$ by Schmidt method on $[0, 2\pi]$ with a weight $\varphi^{\alpha,\beta}(\tau) := (1 - \cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2}$; $s_n^{\alpha,\beta}(F;\theta) := \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi^{\alpha,\beta}; F)\Phi_k^{\alpha,\beta}(\theta)$ is n-th Fourier sum of function F in system $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$; $s_n(F;\theta) = s_{2n}^{-1/2,-1/2}(F;\theta)$ is usual Fourier sum. It is prooved that if $\alpha, \beta > -1$, $A := \min\{\alpha + 1/2, \alpha/2+1/4\}$, $B := \min\{\beta+1/2, \beta/2+1/4\}$, F is measurable, $F(\tau)(1-\cos\tau)^A(1+\cos\tau)^B \in L^1$ and $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ then $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$ and the sum $s_{2n}^{\alpha,\beta}(F;\theta)$ equiconverges with each of sequences $s_n(F\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}};\theta)/\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)}$ and $s_n(F\varphi^{\alpha,\beta};\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)$ uniformly on intervals $[-\pi+\varepsilon, -\varepsilon]$ and $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. For even function F similar results were obtained by G. Szegö and Ye. A. Pleshchyova.

Keywords: trigonometric Jacobi polynomials, Fourier sums, equiconvergens.

1. Введение

Всюду ниже $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Через L^r обозначается пространство 2π-периодических функций, при $1 \le r < \infty$ суммируемых в r-й степени, а при $r = \infty$ — существенно ограниченных. Аналогично определяется $L^r[a, b]$.

Весом называют суммируемую неотрицательную и не эквивалентную нулю функцию. Если φ — 2π-периодический вес, то через L^r_φ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций F, для которых $|F(\tau)|^r\varphi(\tau) \in L^1$.

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(t)$. Известно, что условие $fp \in L^1[-1, 1]$ является необходимым и достаточным для существования ряда Фурье функции f по системе $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$. Рассмотрим n-ю частную сумму этого ряда (n-ю сумму Фурье функции f по системе $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$):

$$S_n^{(p)}(f; x) := \sum_{k=0}^{n} c_k^{(p)}(f) p_k(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+,\ \ x \in [-1, 1]), \tag{1.1}$$

где

$$c_k^{(p)}(f) := \int_{-1}^{1} f(t) p_k(t) p(t) dt. \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), а также при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462).

В случае веса Якоби $p(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ $(\alpha, \beta > -1)$ для величин $p_n(t)$, (1.1) и (1.2) употребляем обозначения $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$, $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ и $c_k^{\alpha,\beta}(f)$.

Определение 1. Говорят, что последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ равносходятся в точке x (равносходятся равномерно по $x \in E$), если разность $f_n(x) - g_n(x)$ при $n \to \infty$ сходится нулю в точке x (сходится к нулю равномерно по $x \in E$).

Г. Сегё [1, глава IX] для ряда Фурье — Якоби установил следующую теорему равносходимости: *если $\alpha, \beta > -1$ и выполняется условие*

$$f(t)(1-t)^{\min\{\alpha, \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\}}(1+t)^{\min\{\beta, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}\}} \in L^1[-1,1],$$

то последовательности $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ и

$$(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}((1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1+t)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}f(t);x)$$

при $n \to \infty$ равномерно равносходятся на каждом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

В [1] эта теорема приведена в несколько иной, но равносильной форме. В [2] установлено, что *в условиях теоремы Сегё при $n \to \infty$ равносходятся равномерно на* $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ *также* $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ *и* $(1-x)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\beta-\frac{1}{2}}S_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}((1-t)^{\alpha+\frac{1}{2}}(1+t)^{\beta+\frac{1}{2}}f(t);x)$.

Рассмотрим вопрос о тригонометрических аналогах сформулированных теорем. Тригонометрические ортогональные полиномы появились в [3]. В [4–6] (наряду с другими вопросами) изучалась равносходимость с обычными суммами Фурье функции F ее сумм Фурье по тригонометрическим полиномам, ортогональным на отрезке $[0, 2\pi]$ с весом φ, при тех или иных предположениях о F и φ. В частности, от F требовалось в [4] и [5], чтобы $F \in L^{\infty}$, а в [6] — чтобы $F\varphi \in L^1$, но вес φ был строго положительным и модуль непрерывности его производной удовлетворял интегральному условию Дини. Таким образом, вопрос о тригонометрических аналогах теорем Г. Сегё и Е. А. Плещевой до настоящего времени оставался открытым.

Пусть $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормальная система тригонометрических полиномов Якоби, полученная при ортогонализации последовательности $1, \sin\tau$, $\cos\tau$, $\sin 2\tau$, $\cos 2\tau, \ldots$ методом Шмидта на отрезке $[0, 2\pi]$ с весом

$$\varphi^{\alpha,\beta}(\tau) := (1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2} \ \ (\alpha, \beta > -1;\ \tau \in \mathbb{R}).$$

Рассмотрим соответствующую последовательность сумм Фурье

$$s_n^{\alpha,\beta}(F;\theta) := \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi^{\alpha,\beta}; F)\Phi_k^{\alpha,\beta}(\theta) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+;\ \theta \in \mathbb{R}),$$

где $c_k(\varphi^{\alpha,\beta}; F)$ — k-й коэффициент Фурье функции F по системе $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$. При этом $s_n(F;\theta) = s_{2n}^{-1/2,-1/2}(F;\theta)$ — обычная сумма Фурье.

Основными результатами настоящей статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha, \beta > -1$, F измерима и удовлетворяет условию*

$$A^{\alpha,\beta}(F) := \int_0^{2\pi} |F(\tau)|(1-\cos\tau)^{A}(1+\cos\tau)^{B}\,d\tau < \infty, \tag{1.3}$$

где

$$A := \min\{\alpha + 1/2, \alpha/2 + 1/4\}, \qquad B := \min\{\beta + 1/2, \beta/2 + 1/4\}. \tag{1.4}$$

Тогда $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$ и последовательности $s_{2n}^{\alpha,\beta}(F;\theta)$ и $s_n(F\varphi^{\alpha,\beta};\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)$ при $n \to \infty$ равносходятся равномерно на множестве $U_{\varepsilon} := [-\pi+\varepsilon, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, где ε — любое фиксированное число из интервала $(0, \pi/2)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при* $n \to \infty$ *равномерно по* $\theta \in U_\varepsilon$ *равносходятся также последовательности* $s_{2n}^{\alpha,\beta}(F;\theta)$ *и* $s_n(F\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}};\theta)/\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)}$.

З а м е ч а н и е. Легко показать, что для четной функции $F(\tau) = f(\cos\tau)$ теорема 2 превращается в теорему Г. Сеге, а теорема 1 — в теорему Е.А. Плещевой.

При доказательстве своей теоремы Г. Сегё исследовал асимптотические свойства ядра

$$K_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta,\cos\tau) := \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(\cos\theta)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(\cos\tau) \tag{1.5}$$

с помощью асимптотической формулы Дарбу для многочленов Якоби. В наших построениях используется менее точная информация о поведении ортогональных функций, а потому рассуждения применимы в более общей ситуации.

Пусть $\{u_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — системы функций, ортонормированные на $[a,b]$ с весом $u(t)$ и $v(t)$ соответственно, полученные при ортогонализации методом Шмидта одной и той же линейно независимой в L_u^2 и L_v^2 последовательности $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, причем $x_k \in L^\infty[a,b]$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. Предполагая выполненным условие $fu \in L^1[a,b]$, рассмотрим суммы Фурье

$$S_{u,n}(f;x) := \sum_{k=0}^{n} c_{u,k}(f)u_k(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}_+), \tag{1.6}$$

где

$$c_{u,k}(f) := \int_a^b f(t)u_k(t)u(t)\,dt \qquad (k \in \mathbb{Z}_+). \tag{1.7}$$

Аналогичный смысл имеют обозначения $S_{v,n}(f;x)$ и $c_{v,k}(f)$.

Главную роль в наших построениях играет формула

$$S_{u,n}(f;x) - \frac{v(x)}{u(x)}S_{v,n}\left(\frac{u}{v}f;x\right) = \frac{v(x)}{u(x)}\sum_{k=0}^{n} c_{u,k}(f)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_{u,k}(v_\nu)v_\nu(x), \tag{1.8}$$

доказательство которой (при определенных ограничениях на $\{u_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$) приведено в разд. 2. Заметим, что в [7–9] использовалось другое разложение

$$S_{u,n}(f;x) - S_{q,n}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_{u,k}(v_\nu)c_{v,\nu}(f), \tag{1.9}$$

полученное при иных ограничениях на f и системы $\{u_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Так как в (1.8) и (1.9) входят одни и те же коэффициенты $c_{u,k}(v_\nu)$, то информацию об их свойствах, полученную ранее при исследовании поведения левой части (1.9), можно использовать и при исследовании поведения левой части (1.8).

2. Доказательство формулы (1.8)

Доказательству формулы (1.8) посвящена следующая

Лемма 1. *Пусть* $\{u_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{v_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ *и* $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — *определенные выше последовательности, причем* $x_k \in L^\infty[a,b]$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. *Если* $fu \in L^1[a,b]$ *и для каждого* $k = 0,1,\dots,n$ *функция* $u_k(t)u(t)/v(t)$ *разлагается в сходящийся к* $u_k(x)u(x)/v(x)$ *ряд*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{v,\nu}(u_k u/v)v_\nu(x) \tag{2.1}$$

при некотором $t = x \in [a,b]$, *для которого* $0 < u(x)/v(x) < \infty$, *то при таком* x *имеет место равенство* (1.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ряд (2.1) сходится к $u_k(x)u(x)/v(x)$ при $k = 0, 1, ..., n$, то

$$\frac{u(x)}{v(x)}\sum_{k=0}^{n} u_k(x)u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{v,\nu}(u_k u/v)v_\nu(x). \tag{2.2}$$

С учетом очевидного равенства $c_{v,\nu}(u_k u/v) = c_{u,k}(v_\nu)$ вместо (2.2) можно написать

$$\frac{u(x)}{v(x)}\sum_{k=0}^{n} u_k(x)u_k(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{u,k}(v_\nu)v_\nu(x). \tag{2.3}$$

Ядро $v_0(x)v_0(t) + \cdots + v_n(x)v_n(t)$ является полиномом от t порядка n по системе $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$. Поэтому его n-я сумма Фурье по системе $\{u_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ с ним совпадает, т. е.

$$\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu(x)v_\nu(t) = \int_a^b \sum_{\nu=0}^{n} v_\nu(x)v_\nu(s)\sum_{k=0}^{n} u_k(t)u_k(s)u(s)\,ds$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u_k(t)\sum_{\nu=0}^{n} v_\nu(x)\int_a^b v_\nu(s)u_k(s)u(s)ds = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)\sum_{\nu=0}^{n} c_{u,k}(v_\nu)v_\nu(x). \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует, что

$$\frac{u(x)}{v(x)}\sum_{k=0}^{n} u_k(x)u_k(t) - \sum_{\nu=0}^{n} v_\nu(x)v_\nu(t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(t)\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_{u,k}(v_\nu)v_\nu(x). \tag{2.5}$$

Так как $u_k(t),\ v_\nu(t) \in L^\infty[a,b]$ $(k, \nu \in \mathbb{Z}_+)$, а $f(t)u(t) \in L^1[a,b]$, то, умножив обе части (2.5) на $f(t)u(t)$ и проинтегрировав по отрезку $a \le t \le b$, в соответствии с (1.6) и (1.7) получим формулу, которая выводится из равенства (1.8) при умножении обеих частей (1.8) на $u(x)/v(x)$. Лемма 1 доказана.

3. Вид формулы (1.8) для тригонометрических полиномов Якоби

Лемма 2. *Если $\{\Phi_k(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормальная система тригонометрических полиномов, полученная при ортогонализации последовательности* $1, \sin\tau, \cos\tau, \sin 2\tau, \cos 2\tau, \ldots$ *методом Шмидта на отрезке* $[a, a+2\pi]$ *при каком-либо* $a \in \mathbb{R}$ *с четным весом* $\varphi(\tau)$, *то имеют место формулы*

$$\Phi_{2k}(\tau) = \sqrt{\pi}p_k(\cos\tau)\ \ (k \in \mathbb{Z}_+), \qquad \Phi_{2k-1}(\tau) = \sqrt{\pi}q_{k-1}(\cos\tau)\sin\tau\ \ (k \in \mathbb{N}), \tag{3.1}$$

где $\{p_k(t)_{k=0}^{\infty}\}$ *и* $\{q_k(t)_{k=0}^{\infty}\}$ *— системы алгебраических многочленов, ортонормальные на отрезке* $[-1,1]$ *с весами* $p(t)$ *и* $q(t) = (1-t^2)p(t)$ *соответственно, а* $\varphi(\tau) = p(\cos\tau)|\sin\tau|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, при $k, m \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$\delta_{k,m} = \int_{-1}^{1} p_k(t)p_m(t)p(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sqrt{\pi}p_k(\cos\tau)][\sqrt{\pi}p_m(\cos\tau)]\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{3.2}$$

Аналогично при при $k, m \in \mathbb{N}$ находим, что

$$\delta_{k,m} = \int_{-1}^{1} q_{k-1}(t)q_{m-1}(t)q(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sqrt{\pi}q_{k-1}(\cos\tau)\sin\tau][\sqrt{\pi}q_{m-1}(\cos\tau)\sin\tau]\varphi(\tau). \tag{3.3}$$

Кроме того, при любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \mathbb{N}$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\sqrt{\pi}p_k(\cos\tau)][\sqrt{\pi}q_{m-1}(\cos\tau)\sin\tau]\varphi(\tau) = 0 \tag{3.4}$$

в силу четности $p_k(\cos\tau)$ и $\varphi(\tau)$ и нечетности $q_{m-1}(\cos\tau)\sin\tau$. Поскольку старшие коэффициенты полиномов $p_k(\cos\tau)$ и $q_{m-1}(\cos\tau)\sin\tau$ положительны, то из (3.2)–(3.4) следует (3.1) при $a = -\pi$. В силу 2π-периодичности веса $\varphi(\tau)$ и полиномов (3.1) из ортонормальности системы (3.1) на отрезке $[a, a+2\pi]$ при каком-нибудь вещественном a следует ортонормальность этой системы при любых $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha \geq \gamma > -1$, $\beta \geq \delta > -1$, $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$. *Тогда справедливо разложение*

$$B_n^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(F;\theta) := s_{2n}^{\alpha,\beta}(F;\theta) - [\varphi^{\gamma,\delta}(\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)]s_{2n}^{\gamma,\delta}(F\varphi^{\alpha,\beta}/\varphi^{\gamma,\delta};\theta)$$

$$= \sqrt{\pi}[\varphi^{\gamma,\delta}(\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)]\bigg\{\sum_{k=0}^{n}c_{2k}(\varphi^{\alpha,\beta};F)\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\delta})\widehat{P}_\nu^{\gamma,\delta}(\cos\theta)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}c_{2k-1}(\varphi^{\alpha,\beta};F)\sum_{k=n+1}^{\infty}c_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}(\widehat{P}_{\nu-1}^{\gamma+1,\delta+1})\widehat{P}_{\nu-1}^{\gamma+1,\delta+1}(\cos\theta)\sin\theta\bigg\}. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае систем $\{\Phi_k^{\alpha,\beta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\Phi_k^{\gamma,\delta}(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ при выполнении условия $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$ согласно (1.8) имеет место разложение

$$B_n^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(F;\theta) = \frac{\varphi^{\gamma,\delta}(\theta)}{\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)}\sum_{k=0}^{2n}c_k(\varphi^{\alpha,\beta};F)\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}c_k(\varphi^{\alpha,\beta};\Phi_\nu^{\gamma,\delta})\Phi_\nu^{\gamma,\delta}(\theta) \qquad (\theta/\pi \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}). \tag{3.6}$$

По лемме 2 в силу четности весов $\varphi^{\alpha,\beta}(\tau)$ и $\varphi^{\gamma,\delta}(\tau)$ справедливы формулы

$$\Phi_{2k}^{\alpha,\beta}(\tau) = \sqrt{\pi}\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(\cos\tau),\ \ \Phi_{2k+1}^{\alpha,\beta}(\tau) = \sqrt{\pi}\widehat{P}_k^{\alpha+1,\beta+1}(\cos\tau)\sin\tau \qquad (k \in \mathbb{Z}_+), \tag{3.7}$$

$$\Psi_{2\nu}^{\gamma,\delta}(\tau) = \sqrt{\pi}\widehat{P}_\nu^{\gamma,\delta}(\cos\tau),\ \ \Psi_{2\nu+1}^{\gamma,\delta}(\tau) = \sqrt{\pi}\widehat{P}_\nu^{\gamma+1,\delta+1}(\cos\tau)\sin\tau \qquad (k \in \mathbb{Z}_+),$$

из которых следуют равенства

$$c_k(\varphi^{\alpha,\beta};\Phi_\nu^{\gamma,\delta}) = 0 \ \text{ при } \ k \not\equiv \nu \pmod 2, \tag{3.8}$$

$$c_{2k}(\varphi^{\alpha,\beta};\Phi_{2\nu}^{\gamma,\delta}) = c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\delta}) \qquad (0 \leq k \leq n;\ \nu \geq n+1), \tag{3.9}$$

$$c_{2k-1}(\varphi^{\alpha,\beta};\Phi_{2\nu-1}^{\gamma,\delta}) = c_k^{\alpha+1,\beta+1}(\widehat{P}_\nu^{\gamma+1,\delta+1}) \qquad (1 \leq k \leq n;\ \nu \geq n+1). \tag{3.10}$$

Из (3.6) и (3.8)–(3.10) следует (3.5).

4. Оценки коэффициентов $c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\delta})$

Лемма 4 [10]. *Пусть* $k,\nu \in \mathbb{Z}_+$; $\nu \geq k$; $\alpha,\beta,\gamma > -1$; $(\alpha-\gamma) \notin \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \frac{2^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}u_\nu^{\beta,\gamma}\ v_k^{\alpha,\beta}\ w_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma}, \tag{4.1}$$

где

$$u_\nu^{\beta,\gamma} := \left\{(2\nu+\gamma+\beta+1)\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)\Gamma(\nu+\gamma+1)}\right\}^{1/2}, \tag{4.2}$$

$$v_k^{\alpha,\beta} := \left\{(2k+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\beta+1)}\right\}^{1/2}, \tag{4.3}$$

$$w_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma} := \frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+k+\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(\nu-k+\gamma-\alpha)}{\Gamma(\nu-k+1)}, \tag{4.4}$$

$\Gamma(z)$ — Γ-*гамма функция Эйлера.*

Из леммы 4 вытекает

Лемма 5. *Пусть* $\alpha,\beta,\gamma > -1$; $\alpha > \gamma$; $\alpha \geq -1/2$. *Тогда*

$$|c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})| \leq C_1(\alpha,\beta,\gamma)(\nu-k+1)^{\gamma-\alpha-1} \qquad (k,\nu \in \mathbb{Z}_+;\ \nu \geq k). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\alpha-\gamma) \notin \mathbb{N}$. Тогда, пользуясь соотношением

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)} = n^{\alpha-\beta}\big[1 + \frac{1}{2n}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1) + O(n^{-2})\big] \qquad (n \to \infty) \tag{4.6}$$

(см. [11, формула 1.18(4)]), на основании (4.1)–(4.4) получаем оценку

$$|c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})| \leq C_2(\alpha,\beta,\gamma)(\nu+1)^{1/2-\gamma}(k+1)^{\alpha+1/2}(\nu+k+1)^{\gamma-\alpha-1}(\nu-k+1)^{\gamma-\alpha-1}. \tag{4.7}$$

Поскольку $0 \leq k \leq \nu$, то $\nu+1 \leq k+\nu+1 < 2(\nu+1)$. Поэтому из (4.7) следует, что

$$|c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})| \leq C_3(\alpha,\beta,\gamma)(\nu+1)^{-1/2-\alpha}(k+1)^{\alpha+1/2}(\nu-k+1)^{\gamma-\alpha-1}. \tag{4.8}$$

Так как $\alpha \geq -1/2$, то из (4.8) вытекает (4.5) при $(\alpha-\gamma) \notin \mathbb{N}$.

Если $\alpha-\gamma = m \in \mathbb{N}$ и $k < \nu - m$, то

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = c_k^{\gamma+m,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}) = \int_{-1}^{1} \big[(1-t)^m \widehat{P}_k^{\gamma+m,\beta}(t)\big]\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(t)(1-t)^\gamma(1+t)^\beta dt = 0, \tag{4.9}$$

поскольку многочлен $\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(t)$ ортогонален с весом $(1-t)^\gamma(1+t)^\beta$ многочленам меньшей степени. В силу (4.9) неравенство (4.5) выполняется и при $\alpha-\gamma = m \in \mathbb{N}$. Лемма 5 доказана.

В случае $\gamma < \alpha < \gamma+1$ при оценке правой части (3.5) нам придется пользоваться преобразованием Абеля. При этом появится разность

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})/\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1) - c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta})/\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta}(1). \tag{4.10}$$

Следующая лемма дает оценку сверху модуля разности (4.10).

Лемма 6. *В условиях леммы* 5 *при* $k,\nu \in \mathbb{Z}_+$ *и* $\nu \geq k$ *выполняется неравенство*

$$\left|\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)} - \frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta}(1)}\right| \leq C_4(\alpha,\beta,\gamma)\frac{(\nu-k+1)^{\gamma-\alpha-2}}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}. \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь равенством

$$\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1) = \left\{\frac{2\nu+\gamma+\beta+1}{2^{\gamma+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}\right\}^{1/2} \binom{\nu+\gamma}{\nu} \qquad (\nu \in \mathbb{Z}_+) \tag{4.12}$$

(см. [1, формула (4.3.4)]), формулами (4.1)–(4.4), а также соотношением $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (см. [1, первая из формул (4.21.7)]), приходим к равенству

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})/\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1) - c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta})/\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta}(1) = [1 - L_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma}]c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})/\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1), \tag{4.13}$$

где

$$L^{\alpha,\beta,\gamma}_{\nu,k} := \frac{u^{\beta,\gamma}_{\nu+1}}{u^{\beta,\gamma}_{\nu}} \cdot \frac{w^{\beta,\gamma}_{\nu+1,k}}{w^{\beta,\gamma}_{\nu,k}} \left[\frac{2\nu+\gamma+\beta+1}{2\nu+\gamma+\beta+3} \cdot \frac{(\nu+\gamma+1)(\nu+\beta+1)}{(\nu+1)(\nu+\gamma+\beta+1)}\right]^{1/2} \frac{\nu+1}{\nu+\gamma+1}. \tag{4.14}$$

На основании (4.2) и (4.4)

$$\frac{u^{\beta,\gamma}_{\nu+1}}{u^{\beta,\gamma}_{\nu}} \cdot \frac{w^{\beta,\gamma}_{\nu+1,k}}{w^{\beta,\gamma}_{\nu,k}} = \left[\frac{(2\nu+\gamma+\beta+3)(\nu+1)(\nu+\beta+1)}{(2\nu+\gamma+\beta+1)(\nu+\gamma+\beta+1)(\nu+\gamma+1)}\right]^{1/2}$$

$$\times \frac{(\nu+k+\gamma+\beta+1)(\nu-k+\gamma-\alpha)}{(\nu+k+\alpha+\beta+2)(\nu-k+1)} \tag{4.15}$$

Из (4.14) и (4.15) следует, что $1-L^{\alpha,\beta,\gamma}_{\nu,k} \le C_5(\alpha,\beta,\gamma)(\nu-k+1)^{-1}$, а потому из (4.13) и леммы 5 следует (4.11). Лемма 6 доказана.

5. Вспомогательное неравенство

В этом разделе доказывается вспомогательное неравенство

$$|B^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}_n(F;\theta)| \le C_6(\alpha,\beta)A^{\alpha,\beta}(F) \qquad (\alpha,\beta > -1;\ \theta \in U_\varepsilon), \tag{5.1}$$

где $B^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_n(F;\theta)$ определено в (3.5), $A^{\alpha,\beta}(F)$ — в (1.3), $U_\varepsilon := [-\pi+\varepsilon,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,\pi-\varepsilon]$, ε — любое фиксированное число из интервала $(0,\pi/2)$. Отдельные этапы доказательства оформляются в виде лемм. Сначала оценим величину $B^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}_n(F;\theta)$ при $\delta=\beta$.

Лемма 7. *Пусть $\alpha,\beta,\gamma > -1$, $\alpha > \gamma$, $\alpha \ge -1/2$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, F измерима и удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$ и найдется константа $C_7 = C_7(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)$ такая, что выполняется неравенство*

$$|B^{\alpha,\beta,\gamma,\beta}_n(F;\theta)| \le C_7 A^{\alpha,\beta}(F) \qquad (\theta \in U_\varepsilon,\ \ n \in \mathbb{Z}_+). \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для измеримой функции F включение $F\varphi^{\alpha,\beta} \in L^1$ является простым следствием соотношений (1.3) и (1.4). В (3.5) положим $\delta=\beta$. Тогда получим, что

$$B^{\alpha,\beta,\gamma,\beta}_n(F;\theta) := s^{\alpha,\beta}_{2n}(F;\theta) - [\varphi^{\gamma,\beta}(\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)] s^{\gamma,\beta}_{2n}(F\varphi^{\alpha,\beta}/\varphi^{\gamma,\beta};\theta)$$

$$= \sqrt{\pi}[\varphi^{\gamma,\beta}(\theta)/\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)]\Big\{\sum_{k=0}^{n} c_{2k}(\varphi^{\alpha,\beta};F) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c^{\alpha,\beta}_k(\widehat{P}^{\gamma,\beta}_\nu)\widehat{P}^{\gamma,\beta}_\nu(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}(\varphi^{\alpha,\beta};F) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c^{\alpha+1,\beta+1}_{k-1}(\widehat{P}^{\gamma+1,\beta+1}_{\nu-1})\widehat{P}^{\gamma+1,\beta+1}_{\nu-1}(\cos\theta)\sin\theta\Big\}. \tag{5.3}$$

Оценим коэффициенты $c_{2k}(\varphi^{\alpha,\beta};F)$ и $c_{2k-1}(\varphi^{\alpha,\beta};F)$, входящие а правую часть (5.3). Для этого воспользуемся неравенством [12]

$$|\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n-1}(t)| \le C_8(\alpha,\beta)(\sqrt{1-t}+1/n)^{-\alpha-1/2}(\sqrt{1+t}+1/n)^{-\beta-1/2}, \tag{5.4}$$

в котором $-1 \le t \le 1$, $\alpha,\beta > -1$ и $n \in \mathbb{N}$. Формула (5.4) есть простое следствие известных оценок (см. [1, формулы (7.32.5)]). Пользуясь (5.4), (1.3) и (1.4) убеждаемся в том, что

$$|c_k(\varphi^{\alpha,\beta};F)| \le C_9(\alpha,\beta)A^{\alpha,\beta}(F) \qquad (\alpha,\beta > -1;\ \ k \in \mathbb{Z}_+). \tag{5.5}$$

На основании (5.3) и (5.5) при $\theta \in U_\varepsilon$ справедлива оценка

$$|B_n^{\alpha,\beta,\gamma,\beta}(F;\theta)| \le C_{10}(\alpha,\beta,\varepsilon)A^{\alpha,\beta}(F)\left\{\sum_{k=0}^{n}|\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta)| + \sum_{k=0}^{n-1}|\sigma_{n-1,k}^{\alpha+1,\beta+1,\gamma+1}(\theta)\sin\theta|\right\} \tag{5.6}$$

где

$$\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta) := \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(\cos\theta). \tag{5.7}$$

Предположим, что $\alpha > \gamma + 1$. Тогда в силу (5.7), (5.4) и (4.5)

$$|\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta)| \le C_{11}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(\nu-k+1)^{\gamma-\alpha-1} \le C_{12}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)(n-k+1)^{\gamma-\alpha}. \tag{5.8}$$

Из (5.6) и ((5.8) вытекает справедливость неравенства (5.1) при $\alpha > \gamma + 1$.

Если $\alpha = \gamma + 1$, то в силу свойства (4.9) равенство (5.3) принимает вид

$$B_n^{\gamma+1,\beta,\gamma,\beta}(F;\theta) = \sqrt{\pi}(1-\cos\theta)^{-1}\Big\{c_{2n}(\varphi^{\gamma+1,\beta};F)c_n^{\gamma+1,\beta}(\widehat{P}_{n+1}^{\gamma,\beta})\widehat{P}_{n+1}^{\gamma,\beta}(\cos\theta)$$

$$+ c_{2n-1}(\varphi^{\gamma+1,\beta};F)c_{n-1}^{\gamma+2,\beta+1}(\widehat{P}_n^{\gamma+1,\beta+1})\widehat{P}_n^{\gamma+1,\beta+1}(\cos\theta)\sin\theta\Big\} \qquad (0<\theta<2\pi). \tag{5.9}$$

Из (5.9), (4.5), (5.5) и (5.4), следует справедливость (5.1) при $\alpha = \gamma + 1$.

Наконец, пусть $\gamma < \alpha < \gamma+1$. В этом случае из оценки (5.8) для величины (5.7) не следует ограниченность выражения в фигурных скобках в правой части (5.6). Поэтому уточним (5.8). Для этого правую часть (5.7), прежде чем оценивать, пользуясь (1.5), представим в виде

$$\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}[K_\nu^{(\gamma,\beta)}(\cos\theta,1) - K_{\nu-1}^{(\gamma,\beta)}(\cos\theta,1)]. \tag{5.10}$$

Известно (см. [1, формула (4.5.3)]), что

$$K_\nu^{(\gamma,\beta)}(x,1) = 2^{-\gamma-\beta-1}\frac{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+2)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}P_\nu^{(\gamma+1,\beta)}(x). \tag{5.11}$$

Соотношение (5.11) можно переписать в виде

$$K_\nu^{(\gamma,\beta)}(x,1) = 2^{-\gamma-\beta-1}\frac{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+2)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}\{h_\nu^{(\gamma+1,\beta)}\}^{1/2}\,\widehat{P}_\nu^{\gamma+1,\beta}(x), \tag{5.12}$$

где

$$h_n^{(\alpha,\beta)} := \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \tag{5.13}$$

В силу (4.6) из (4.12), (5.12) и (5.13) вытекает справедливость оценок

$$\left|\frac{K_\nu^{(\gamma,\beta)}(x,1)}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}\right| \le C_{13}(\beta,\gamma,\varepsilon), \qquad \left|\frac{K_{\nu+1}(\gamma,\beta)(x,1)}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}\right| \le C_{14}(\beta,\gamma,\varepsilon) \qquad (|x|\le\varepsilon). \tag{5.14}$$

Из (4.5), (4.12), (5.16) и (4.6) следует абсолютная сходимость в интервале $(-1,1)$ рядов

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}K_\nu^{(\gamma,\beta)}(x,1) \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}K_{\nu-1}^{(\gamma,\beta)}(x,1).$$

Поэтому из (5.10) следует, что

$$\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}K_\nu^{(\gamma,\beta)}(\cos\theta,1)-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}K_{\nu-1}^{(\gamma,\beta)}(\cos\theta,1). \tag{5.15}$$

Заменяя ν на $\nu+1$ во второй сумме из правой части (5.15), получаем, что

$$\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta)=-\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{n+1}^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_{n+1}^{\gamma,\beta}(1)}K_n^{(\gamma,\beta)}(\cos\theta,1)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left[\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_\nu^{\gamma,\beta}(1)}-\frac{c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta})}{\widehat{P}_{\nu+1}^{\gamma,\beta}(1)}\right]K_\nu^{(\gamma,\beta)}(\cos\theta,1). \tag{5.16}$$

В силу (5.14), (4.5) и (4.11) из (5.16) при $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ вытекает неравенство

$$|\sigma_{n,k}^{\alpha,\beta,\gamma}(\theta)|\le C_{15}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1}\qquad(n\in\mathbb{N},\ \ \theta\in U_\varepsilon), \tag{5.17}$$

уточняющее (5.8). Аналогично при $\gamma<\alpha<\gamma+1$ доказывается оценка

$$|\sigma_{n-1,k}^{\alpha+1,\beta+1,\gamma+1}(\theta)|\le C_{16}(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)(n-k+1)^{\gamma-\alpha-1}\qquad(n\in\mathbb{N},\ \ \theta\in U_\varepsilon). \tag{5.18}$$

Из (5.6), (5.17) и (5.18) легко следует оценка (5.1) при $\gamma<\alpha<\gamma+1$. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* $-1<\alpha<-1/2$, $\beta>-1$, F *измерима и удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда* $F\varphi^{\alpha,\beta}\in L^1$ *и найдется константа* $C_{17}=C_{17}(\alpha,\beta,\varepsilon)$ *такая, что*

$$|B_n^{\alpha,\beta,-1/2,\beta}(F;\theta)|\le C_{17}A^{\alpha,\beta}(F)\qquad(\theta\in U_\varepsilon,\ \ n\in\mathbb{Z}_+), \tag{5.19}$$

где $0<\varepsilon<\pi/2$, $A^{\alpha,\beta}(F)$ *определяется формулой* (1.3), *а* $U_\varepsilon:=[-\pi+\varepsilon,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция F измерима на $[0,2\pi]$ и $A^{\alpha,\beta}(F)<\infty$. Тогда, поскольку $-1<\alpha<-1/2$, то, полагая $G(\tau):=F(\tau)(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}$, имеем равенство $A^{-1/2,\beta}(G)=A^{\alpha,\beta}(F)$. Поэтому при замене в лемме 7 α,γ,F на $-1/2,\alpha,G$ соответственно вместо (5.2) получаем неравенство

$$|B_n^{-1/2,\beta,\alpha,\beta}(G;\theta)|\le C_7(-1/2,\beta,\alpha,\varepsilon)A^{\alpha,\beta}(F). \tag{5.20}$$

Умножив обе части (5.20) на $(1-\cos\theta)^{-\alpha-1/2}$ и выразив G через F, выводим (5.19).

С помощью лемм 7 и 8 доказывается

Лемма 9. *Пусть* $\alpha,\beta>-1$, *функция* F *измерима и удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда* $F\varphi^{\alpha,\beta}\in L^1$, *имеет место оценка* (5.19) *и найдется константа* $C_{18}=C_{18}(\alpha,\beta,\varepsilon)$ *такая, что*

$$|B_n^{\alpha,\beta,\alpha,-1/2}(F;\theta)|\le C_{18}A^{\alpha,\beta}(F)\qquad(\theta\in U_\varepsilon,\ \ n\in\mathbb{Z}_+), \tag{5.21}$$

где $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ *и* $U_\varepsilon:=[-\pi+\varepsilon,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\alpha=-1/2$, $\beta>-1$ левая часть неравенства (5.19) равна нулю, в силу чего оно является очевидным. При $-1<\alpha<-1/2$, $\beta>-1$ (5.19) доказано в лемме 5.2. Полагая в лемме 7 $\gamma=-1/2$, убеждаемся в справедливости (5.19) при $\alpha>-1/2$, $\beta>-1$.

Из (5.19) можно вывести (5.21). В самом деле, из тождества $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)=(-1)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(-t)$ (см. [1, формула (4.1.3)]) и соотношений (3.7) следуют равенства

$$\Phi_{2k}^{\alpha,\beta}(\pi-\tau)=(-1)^k\Phi_{2k}^{\beta,\alpha}(\tau)\ (k\in\mathbf{Z}_+),\quad \Phi_{2k-1}^{\alpha,\beta}(\pi-\tau)=(-1)^{k-1}\Phi_{2k-1}^{\beta,\alpha}(\tau)\qquad(k\in\mathbb{N}),$$

с помощью которых нетрудно установить, что

$$s_{2n}^{\alpha,\beta}(F(\tau);\pi-\theta)=s_{2n}^{\beta,\alpha}(F(\pi-\tau);\theta). \tag{5.22}$$

Используя (5.22) и (3.5), находим, что

$$B_n^{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(F(\tau);\pi-\theta)=B_n^{\beta,\alpha,\delta,\gamma}(F(\pi-\tau);\theta). \tag{5.23}$$

Нетрудно также проверить, что

$$A^{\alpha,\beta}(F(\tau))=A^{\beta,\alpha}(F(\pi-\tau)). \tag{5.24}$$

Из (5.19), (5.23) и (5.24) следует справедливость (5.21).

Лемма 10. *Пусть* $\alpha,\beta>-1$, F *измерима, удовлетворяет условию* (1.3) *и* $\varepsilon\in(0,\pi/2)$. *Тогда* $F\varphi^{\alpha,\beta}\in L^1$ *и справедливо неравенство* (5.1).

Доказательство. Воспользуемся представлением

$$B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(F;\theta)=B_n^{\alpha,\beta,-1/2,\beta}(F;\theta)+W_n^{\alpha,\beta}(F;\theta), \tag{5.25}$$

где

$$W_n^{\alpha,\beta}(F;\theta):=(1-\cos\theta)^{-\alpha-1/2}B_n^{-1/2,\beta,-1/2,-1/2}(F(\tau)(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2};\theta). \tag{5.26}$$

В силу лемм 8 и 9 для первого слагаемого в правой части (5.25) выполняется неравенство (5.19). Учитывая (5.26) и (5.21) (при $\alpha=-1/2$), получаем, что

$$|W_n^{\alpha,\beta}(F;\theta)|\le C_{19}(\alpha,\beta,\varepsilon)A^{-1/2,\beta}(F(\tau)(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2})$$

$$=C_{19}(\alpha,\beta,\varepsilon)\int\limits_0^{2\pi}|F(\tau)|(1-\cos\tau)^A(1+\cos\tau)^B(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2-A}\,d\tau. \tag{5.27}$$

Поскольку $\alpha+1/1-A=\max\{0,\alpha/2+1/4\}$, то последний интеграл не превосходит величины $\max\{2,2^{\alpha/2+1/4}\}A_n^{\alpha,\beta}(F)$. Поэтому из (5.25), (5.21) и (5.27) следует справедливость неравенства (5.1).

6. Доказательство теоремы 1

Нам надо доказать, что если $\alpha,\beta>-1$, функция F измерима и удовлетворяет условию (1.3), то $F\varphi^{\alpha,\beta}\in L^1$ и последовательность $B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(F;\theta)$ (см. (3.5)) стремится к нулю при $n\to\infty$ равномерно по $\theta\in U_\varepsilon:=[-\pi+\varepsilon,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$ при фиксированном $\varepsilon\in(0,\pi/2)$.

При доказательстве леммы 7 мы уже заметили, что для измеримой функции F включение $F\varphi^{\alpha,\beta}\in L^1$ является простым следствием соотношений (1.3) и (1.4).

Зададим число $\eta>0$. Известно (см. Г. Сегё [1, гл. I, разд. 1.5]), что тригонометрическая система замкнута в весовых пространствах L^r_φ $(1\le r\le\infty)$. Поэтому при достаточно большом $m\in\mathbb{N}$ найдется тригонометрический полином t_m порядка не выше m, для которого

$$A^{\alpha,\beta}(F-t_m)\le\eta. \tag{6.1}$$

Зафиксируем m и при $n>m$ воспользуемся равенством

$$B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(F;\theta)=B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(F-t_m;\theta)+B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(t_m;\theta). \tag{6.2}$$

Исходя из леммы 10 и оценки (6.1) получаем при $\theta\in U_\varepsilon$ неравенства

$$|B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(F-t_m;\theta)|\le C_{20}(\alpha,\beta,\varepsilon)A^{\alpha,\beta}(F-t_m)\le C_{20}(\alpha,\beta,\varepsilon)\eta A^{\alpha,\beta}(F-t_m). \tag{6.3}$$

Так как $s_{2n}^{\alpha,\beta}(t_m;\theta)=t_m(\theta)$, то второе слагаемое в правой части (6.2) в силу (3.5) имеет вид

$$B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(t_m;\theta)=t_m(\theta)-[\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)]^{-1}s_n(t_m\varphi^{\alpha,\beta};\theta). \tag{6.4}$$

Поскольку функция $F_m(\tau) := t_m(\tau)\varphi^{\alpha,\beta}(\tau)$ дифференцируема в интервалах $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$, то согласно принципу локализации Римана (см. [13, гл. I]) при $n \to \infty$ сумма $s_n(F_m; \theta)$ сходится к $F_m(\theta)$ равномерно на U_ε. Отсюда в силу (6.4) следует, что при достаточно больших n выполняется неравенство

$$|B_n^{\alpha,\beta,-1/2,-1/2}(t_m;\theta)| \le \eta \qquad (\theta \in U_\varepsilon). \tag{6.5}$$

Из (6.3) и (6.5) следует справедливость теоремы 1.

7. Доказательство теоремы 2

Пользуясь теоремой 1, докажем теорему 2. Для этого разность

$$b_n^{\alpha,\beta}(F;\theta) := [\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)]^{-1} s_n(F\varphi^{\alpha,\beta};\theta) - s_n(F\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}};\theta)/\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)} \tag{7.1}$$

представим в виде

$$b_n^{\alpha,\beta}(F;\theta) = \frac{1}{\pi\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)} \int_{-\pi}^{\pi} F(\tau) D_n(\tau-\theta) d_n^{\alpha,\beta}(\theta,\tau)\, d\tau, \tag{7.2}$$

где $D_n(\tau) := [\sin(n+1/2)\tau]/[2\sin(\tau/2)]$ — ядро Дирихле,

$$d_n^{\alpha,\beta}(\theta,\tau) := \sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\tau)}\Big[\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\tau)} - \sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)}\Big].$$

Предполагая, что $\varepsilon \in (0, \pi/2)$, разобьем отрезок интегрирования в (7.2) $[-\pi, \pi]$ на части $e_1 := [-\pi, -\pi+\varepsilon/2]$, $e_2 := [-\pi+\varepsilon/2, -\varepsilon/2]$, $e_3 := [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, $e_4 := [\varepsilon/2, \pi-\varepsilon/2]$, $e_5 := [\pi-\varepsilon/2, \pi]$.

Пусть $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$. Тогда при $\tau \in E := [-\pi,\pi] \setminus e_4$ получаем неравенство $|\sin[(\tau-\theta/2)]| \ge C_{21}(\varepsilon)$, в соответствии с которым $|D_n(\tau-\theta)| \le C_{22}(\varepsilon)$. При этом $|d_n^{\alpha,\beta}(\theta,\tau)| \le \varphi^{\alpha,\beta}(\tau) + C_{23}(\varepsilon)\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\tau)}$. Поэтому

$$\frac{1}{\pi\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)} \int_E |F(\tau) D_n(\tau-\theta) d_n^{\alpha,\beta}(\theta,\tau)|\, d\tau \le C_{24}(\varepsilon) A^{\alpha,\beta}(F). \tag{7.3}$$

На отрезке e_4 функция $\sqrt{\varphi^{\alpha,\beta}(\tau)}$ имеет непрерывную производную, а потому удовлетворяет условию Липшица (с константой, зависящей от ε). Поэтому при $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$

$$\frac{1}{\pi\varphi^{\alpha,\beta}(\theta)} \int_{e_4} |F(\tau) D_n(\tau-\theta) d_n^{\alpha,\beta}(\theta,\tau)|\, d\tau \le C_{25}(\varepsilon) A^{\alpha,\beta}(F). \tag{7.4}$$

Из (7.1), (7.3) и (7.4) следует справедливость при $\theta \in [\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ оценки

$$|b_n^{\alpha,\beta}(F;\theta)| \le C_{26}(\varepsilon) A^{\alpha,\beta}(F). \tag{7.5}$$

Если положить $E = [-\pi,\pi] \setminus e_2$, то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, убедимся в справедливости оценки (7.5) и при $\theta \in [-\pi+\varepsilon, -\varepsilon]$, а поскольку U_ε есть объединение отрезков $[-\pi+\varepsilon, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$, то и при $\theta \in E_\varepsilon$.

Теперь применим рассуждения с использованием полинома t_m, подобные приведенным в предыдущем разделе. В результате убедимся в том, что в условиях теоремы 2 величина $b_n^{\alpha,\beta}(F;\theta)$ при $n \to \infty$ стремится к нулю равномерно по $\theta \in E_\varepsilon$. Отсюда в силу (7.1) и теоремы 1 следует справедливость теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
2. **Плещёва Е.А.** Теоремы равносходимости для рядов Фурье — Якоби // Современные методы краевых задач: материалы Воронеж. весен. мат. шк. “Понтрягинские чтения – XV”. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. С. 169.
3. **Jackson D.** Orthogonal trigonometric sums // Ann. Math. II S. 1933. Vol. 34. P. 799–814.
4. **Szegö G.** On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials // Magy. tud. akad. Mat. kut. intéz. közl. 1963 (1964). K. 8, № 3. Old. 255–273.
5. **Бадков В.М.** Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 20–62.
6. **Бадков В.М.** Равносходимость с обычным рядом Фурье суммируемой функции ее ряда Фурье по тригонометрическим ортогональным полиномам // Приближение функций. Теоретические и прикладные аспекты: сб. ст. М.: МИЭТ, 2003. С. 69–75.
7. **Бадков В.М.** Приближение функций частными суммами ряда Фурье по обобщенным многочленам Якоби // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 6. С. 671–682.
8. **Бадков В.М.** Равносходимость рядов Фурье по ортогональным многочленам // Мат. заметки. 1969. Т. 5, вып. 3. С. 285–295.
9. **Badkov V.M.** Equiconvergence of fourier sums in orthogonal polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Vol. 10, no. 1. P. S101–S127.
10. **Бадков В.М.** Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. 132 с.
11. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
12. **Бадков В.М.** Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 6. С. 1263–1283.
13. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961. 936 с.

Бадков Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Поступила 10.05.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.51

ОЦЕНКИ СВЕРХУ ВЕЛИЧИНЫ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ В КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ СИЕ — КЛАФА — ТОЧЕРА[1]

Н. В. Байдакова

В работе для треугольника T получены оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных функции $f \in W^4M$ производными кусочно многочленной функции P_3, определяющей составной конечный элемент Сие — Клафа — Точера. В найденных оценках погрешности уменьшено отрицательное влияние наименьшего угла α треугольника T на величину погрешности аппроксимации производных по сравнению с наиболее часто используемыми классическими оценками для элементов, не являющихся составными. Несмотря на то что, вопреки ожиданиям, поведение полученных оценок сверху относительно угла α оказалось схожим с найденными Ю.Н.Субботиным оценками для многочлена пятой степени $\widetilde{P}_5$, определяющего "чисто многочленный" (не составной) конечный элемент, элемент Сие — Клафа — Точера может иметь преимущество перед обеспечивающим ту же гладкость многочленом $\widetilde{P}_5$, поскольку для определения P_3 в ходе реализации метода конечных элементов требуется найти 12 свободных параметров, а для определения $\widetilde{P}_5$ нужен 21 параметр.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов, аппроксимация.

N. V. Baidakova. Upper estimates for the error of approximation of derivatives in a finite element of Hsieh–Clough–Tocher type.

For a triangle T, we obtain upper estimates for the error of approximation of derivatives of a function $f \in W^4M$ by derivatives of a piecewise polynomial function P_3 that defines a composite Hsieh–Clough–Tocher element. In the obtained error estimates, the negative influence of the smallest angle α of the triangle T on the error of approximation of derivatives is decreased as compared to most often used classical estimates for noncomposite elements. Contrary to expectations, the behavior of the obtained upper estimates with respect to the angle α turned out to be similar to the estimates for the fifth-order polynomial $\widetilde{P}_5$ defining a "purely polynomial" (noncomposite) finite element that were found by Yu.N. Subbotin. However, the Hsieh–Clough–Tocher element may have an advantage over the polynomial $\widetilde{P}_5$, which provides the same smoothness, because the implementation of the finite element method for finding P_3 requires 12 free parameters, whereas the implementation of this method for finding $\widetilde{P}_5$ requires 21 parameters.

Keywords: multidimensional interpolation, finite element method, approximation.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — триангулированная область плоскости; W^4M — множество функций, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка 4 включительно, у которых все производные порядка 4 ограничены по модулю константой M.

Рассмотрим произвольный треугольник T из триангуляции области Ω. Обозначим через a_1, a_2, a_3 вершины T; через n_i $(1 \le i \le 3)$ — единичные нормали к сторонам $[a_{i+1}, a_{i+2}]$ (здесь и далее индексы берутся по модулю 3); через b_1, b_2, b_3 – середины сторон $[a_2, a_3]$, $[a_1, a_3]$, $[a_1, a_2]$ соответственно; через α, β, θ — углы при вершинах a_1, a_2, a_3. Будем считать, что $0 < \alpha \le \beta \le \theta$. Пусть T является частным случаем треугольника Сие — Клафа — Точера, т. е. порождает составной конечный элемент, который строится следующим образом. Треугольник T разбивается на три треугольника T_i с вершинами a_0, a_{i+1}, a_{i+2}, $1 \le i \le 3$, где точка a_0 является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника T (мы будем рассматривать именно такую точку a_0, тогда как в общем случае при построении треугольника Сие — Клафа — Точера

[1]Работа выполнена в рамках программы Отделения математических наук РАН "Современные проблемы теоретической математики" при поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00347).

точка a_0 может быть любой точкой внутри T). В качестве аппроксиманта функции f на T используется гладкая (т. е. из класса $C^1(T)$) кусочно полиномиальная функция P_3, которая на каждом T_i, $1 \le i \le 3$, является многочленом третьей степени (по совокупности переменных) $P_{3,i}$, для задания которого требуется 10 параметров. Для определения P_3, таким образом, требуется 30 условий. Требование “$P_3 \in C^1(T)$” дает 18 условий: например, это могут быть условия непрерывности функции P_3 и ее производных первого порядка по двум несовпадающим направлениям в точке a_0 (всего 6 условий) и в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий), а также условие непрерывности нормальных производных при переходе через середины сторон $[a_0, a_i]$ (3 условия). Кроме того, мы требуем, чтобы функция P_3 интерполировала значения функции f и ее производных первого порядка по двум различным направлениям в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий) и производные первого порядка по направлениям n_1, n_2, n_3 в точках b_1, b_2, b_3 соответственно (3 условия). Доказательство существования такого конечного элемента (а также описание воспроизведенного здесь способа его построения) можно найти в [1]. Отметим, что если все элементы на рассматриваемой триангуляции являются треугольниками Сие—Клафа—Точера, то результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω будет гладкой, т. е. из класса $C^1(\Omega)$.

Пусть далее d_{ij} обозначает длину стороны $[a_i, a_j]$; τ_{ij} — единичный вектор, направленный от a_i к a_j. Через H будем обозначать диаметр треугольника T (очевидно, что $H = d_{12}$), через $D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}$ — производную порядка s по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Под нормой везде будем понимать норму в L_∞. Для определенности будем считать, что если нормаль n_i приложена к середине b_i стороны $[a_{i+1}, a_{i+2}]$, то она направлена внутрь треугольника T (пересечение T и соответствующего направленного отрезка не пусто). Данное предположение не ограничивает общности результатов. Договоримся писать, что для любых величин φ_1 и φ_2 (будь то функции некоторых переменных или константы) имеет место отношение $\varphi_1 \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} \varphi_2$, если существует число $C > 0$, не зависящее от функции f и геометрических характеристик треугольника, такое что $\varphi_1 \overset{(\ge)}{\le} C\varphi_2$.

Известно, что оценки аппроксимации производных функции f производными классических (“чисто многочленных”) интерполянтов на произвольном треугольнике T обычно зависят от геометрических характеристик данного треугольника, в связи с чем на триангуляцию области Ω, как правило, накладываются определенные требования. Часто используемым ограничением на триангуляцию является так называемое “условие наименьшего угла” — ограничение снизу величин наименьших углов треугольников. Это связано с тем, что во многих известных оценках сверху величин погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционных кусочно-полиномиальных функций в знаменателях присутствуют синусы наименьших углов треугольников, составляющих разбиение исходной области Ω. В качестве примера можно указать полученные в 1970-х гг. оценки Женишека [2], Брамбла и Зламала [3], а также достаточно универсальные и часто применяемые на практике оценки сходимости Сьярле и Равьяра [4] для широкого класса многомерных областей (отметим, что в большинстве указанных здесь и ниже работ речь идет не только о полученных авторами оценках, но и о выборе ими способов интерполяции). В более поздние годы было показано, что влияние наименьшего угла можно ослабить (см. [5–16]). В частности, в [8] для функции $f \in W^6M$ и многочлена 5-й степени $\widetilde{P}_5$, задаваемого на T, интерполирующего определенным образом функцию f и обеспечивающего гладкость C^1 результирующей кусочно-полиномиальной функции на Ω, представлены оценки

$$\left\| D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}\big(f - \widetilde{P}_5\big) \right\| \lesssim MH^{6-s}\big(1/\sin\beta\big)^{\max\{1,s-2\}}\big(1/\sin\alpha\big)^{\min\{s-1,2\}}, \tag{1.1}$$

$$s = 1, \ldots, 5.$$

В данной работе мы получим оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных функции $f \in W^4M$ производными кусочно многочленной функции P_3, введенной выше, на треугольнике T. Предложение рассмотреть данную задачу было выдвинуто

Ю.Н.Субботиным в процессе обсуждения результатов из [17], где было показано, что для ряда способов построения классических (не составных) конечных элементов, в том числе традиционных, при требовании гладкости итоговой кусочно полиномиальной функции на Ω негативное влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для ряда производных порядка 2 и выше. Несмотря на то что, вопреки ожиданиям, поведение полученных оценок сверху относительно угла α оказалось схожим с (1.1), элемент Сие — Клафа — Точера может иметь преимущество перед обеспечивающим ту же гладкость многочленом $\widetilde{P}_5$, поскольку для определения P_3 в ходе реализации метода конечных элементов требуется определить 12 свободных параметров (остальные 18 расходуются на обеспечение требуемой гладкости внутри элемента), а для определения $\widetilde{P}_5$ нужно найти 21 параметр. Отметим, что в [1] имеются оценки величины погрешности аппроксимации производных функции f для регулярного (с отделенным от нуля наименьшим углом) треугольника Сие — Клафа — Точера, в которых в силу регулярности нет зависимости от углов треугольника.

2. Вспомогательные результаты

Везде далее будем учитывать следующие соотношения:

$$1 \lesssim \sin(\theta/2) \lesssim 1, \tag{2.1}$$

$$\sin\beta \lesssim \sin(\beta/2) \lesssim \sin\beta, \tag{2.2}$$

$$\sin\alpha \lesssim \sin(\alpha/2) \lesssim \sin\alpha, \tag{2.3}$$

$$\sin\beta \lesssim \sin\theta \lesssim \sin\beta, \tag{2.4}$$

$$\sin\theta \lesssim \cos(\theta/2) \lesssim \sin\theta \tag{2.5}$$

(последнее соотношение выполняется в силу (2.1) и того, что $\cos(\theta/2) = \sin\theta/(2\sin(\theta/2))$). Рассмотрим матрицу

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^3\frac{\theta}{2} & 3\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} & -\sin^3\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\theta & -\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ \sin^3\frac{\beta}{2} & 0 & 0 & -3\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} & -\sin^3\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\beta & \sin\beta\sin^2\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} & 0 & \sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\det A \gtrsim \sin\alpha\sin^7\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\det A$. Вынесем из первой и второй строк множители $\sin^2(\theta/2)$, из третьей и четвертой — множители $\sin^2(\beta/2)$, из пятой — множитель $\sin\beta\sin(\alpha/2)$. Тогда

$$\det A = \sin^4\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} \begin{vmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & 3\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta+4\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\frac{\beta}{2} & 0 & 0 & -3\cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta+4\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки получившегося определителя умножим на $2\cos(\theta/2)$, элементы третьей — на $2\cos(\beta/2)$. Соответственно изменим множитель перед определителем, результатом чего будет равенство

$$\det A = \frac{\sin^4\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\begin{vmatrix} \sin\theta & 6\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta+4\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & 0 & -6\cos^2\frac{\beta}{2} & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta+4\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из элементов первой строки вычтем соответствующие элементы второй строки, к элементам третьей строки прибавим элементы четвертой:

$$\det A = \frac{\sin^4\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\begin{vmatrix} \sin\theta & 2\cos^2\frac{\theta}{2}-\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta+4\cos^2\frac{\theta}{2} & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & 0 & \cos\beta-2\cos^2\frac{\beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta+4\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по пятому и третьему столбцам и учтем соотношения (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) и равенство $2\cos^2(\theta/2)-\cos\theta = -(\cos\beta - 2\cos^2(\beta/2)) = 1:$

$$\det A = -\frac{\sin^4\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin^2\beta\sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\begin{vmatrix} \sin\theta & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin^4\frac{\theta}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin^2\beta\sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}}{4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}(\sin\beta+\sin\theta) \gtrsim \sin\alpha\sin^7\beta.$$

Лемма 1 доказана. □

Обозначим через A_{ij} алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Лемма 2. *Для любых* $j=\overline{1,5}$ *имеют место соотношения*

$$|A_{ij}| \lesssim \begin{cases} \sin\alpha\sin^{7+\delta(j)}\beta, & \text{если } \ i=1, \\ \sin\alpha\sin^{6+\delta(j)}\beta, & \text{если } \ i=2, \\ \sin\alpha\sin^{4+\delta(j)}\beta, & \text{если } \ i=3,4, \\ \sin^{5+\delta(j)}\beta, & \text{если } \ i=5, \end{cases} \tag{2.6}$$

где

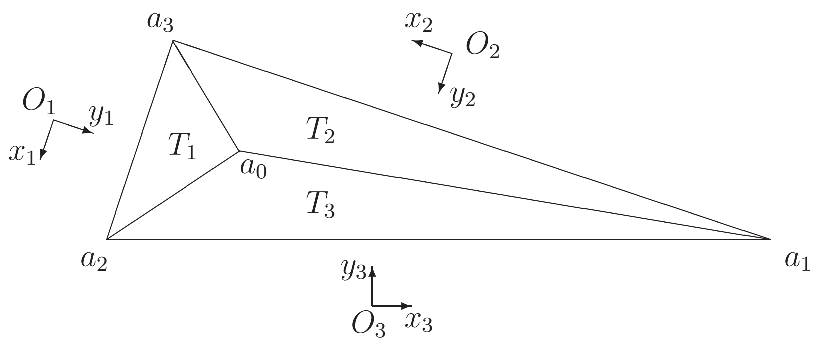
$$\delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{если } \ j \ \text{ четно}, \\ 0, & \text{если } \ j \ \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем элемент a_{12} матрицы A в виде $(3/2)\sin(\theta/2)\sin\theta$. Рассмотрим для примера A_{23} и A_{45}.

Разложим минор, соответствующий A_{23}, по последней строке:

$$A_{23} = -\sin\alpha\sin\beta\begin{vmatrix} \sin^3\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ \sin^3\frac{\beta}{2} & -3\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} & -\sin^3\beta \\ 0 & \sin^2\beta+\cos\beta\sin^2\beta & \sin\beta\sin^2\frac{\beta}{2} \end{vmatrix}$$

$$-\sin\alpha\sin\beta\begin{vmatrix} \sin^3\frac{\theta}{2} & \frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta & 0 \\ \sin^3\frac{\beta}{2} & 0 & \sin^3\frac{\beta}{2} \\ 0 & 0 & \sin\beta\sin^2\frac{\beta}{2} \end{vmatrix}.$$



Элемент Сие — Клафа — Точера T.

Вычисляя и оценивая полученные определители, приходим к неравенству

$$|A_{23}| \lesssim \sin\alpha\sin^6\beta + \sin\alpha\sin^8\beta \lesssim \sin\alpha\sin^6\beta.$$

Минор, соответствующий A_{45}, разложим по первому столбцу:

$$A_{45} = -\sin^3\frac{\theta}{2}\begin{vmatrix} \cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\theta & -\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & -3\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} \\ -\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} & 0 & \sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

$$-\sin^3\frac{\beta}{2}\begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta & -\sin^3\frac{\theta}{2} & 0 \\ \cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\theta & -\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta & 0 \\ -\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} & 0 & \sin\beta\sin\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix}.$$

Вычисляя и оценивая определители, получаем неравенство

$$|A_{45}| \lesssim \sin\alpha\sin^4\beta.$$

Для прочих i, j оценки (2.6) получаются аналогично. Лемма 2 доказана. □

3. Основная теорема

Теорема формулируется для функции $f \in W^4M(T)$ и кусочного многочлена P_3, определение которого дано во введении.

Теорема. *Для $s = \overline{0,4}$ и любых единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$ имеют место следующие оценки:*

$$\left\|D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f-P_3)\right\| \lesssim \begin{cases} MH^4, & \text{если} \quad s=0, \\ MH^3\sin^{-1}\beta, & \text{если} \quad s=1, \\ MH^{4-s}\sin^{-(s-1)}\beta\sin^{-1}\alpha, & \text{если} \quad s=2,3. \end{cases} \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через $P_{3,i}$, $1 \le i \le 3$, многочлены, являющиеся сужением P_3 на T_i. На каждом треугольнике T_i, $1 \le i \le 3$, введем прямоугольную систему координат $O_ix_iy_i$ таким образом, чтобы оси O_1x_1, O_2x_2, O_3x_3, O_1y_1, O_2y_2, O_3y_3, были сонаправлены с векторами $\tau_{32}, \tau_{13}, \tau_{21}$, n_1, n_2, n_3 соответственно (см. рисунок).

Положение точек O_i, $1 \le i \le 3$, не имеет значения. Для удобства обозначений совместим O_1 и O_2 с a_3, O_3 — с a_2. Пусть

$$e_i(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) - P_{3,i}(x_i, y_i).$$

Далее нам потребуются координаты некоторых векторов τ_{jk} в системах координат $O_ix_iy_i$; эти данные см. в таблице.

Координаты векторов τ_{ij}

$O_1x_1y_1$	$O_2x_2y_2$	$O_3x_3y_3$
$\tau_{30}=\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$	$\tau_{30}=\left(-\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$	$\tau_{20}=\left(\cos\frac{\beta}{2},\ \sin\frac{\beta}{2}\right)$
$\tau_{32}=(1,\ 0)$	$\tau_{32}=(-\cos\theta,\ \sin\theta)$	$\tau_{32}=(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$
$\tau_{20}=\left(-\cos\frac{\beta}{2},\ \sin\frac{\beta}{2}\right)$	$\tau_{10}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$	$\tau_{10}=\left(-\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Согласно определению рассматриваемого элемента Сие—Клафа—Точера каждый многочлен $P_{3,i}$, $1\le i\le 3$, удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

$$P_{3,i}(a_j)=f(a_j),\quad \frac{\partial P_{3,i}(a_j)}{\partial x_i}=\frac{\partial f(a_j)}{\partial x_i},\quad \frac{\partial P_{3,i}(a_j)}{\partial y_i}=\frac{\partial f(a_j)}{\partial y_i},\quad j=i+1,i+2; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial P_{3,i}\left(b_i\right)}{\partial y_i}=\frac{\partial f\left(b_i\right)}{\partial y_i}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим треугольник T_i и соответствующую систему координат $O_ix_iy_i$ ($1\le i\le 3$). Поскольку для любого $\xi=(\cos\vartheta,\sin\vartheta)$, где ϑ — угол между вектором ξ и осью O_ix_i, имеет место $D_\xi=(\partial/\partial x_i)\cos\vartheta+(\partial/\partial y_i)\sin\vartheta$, для доказательства (3.1) достаточно для каждого $e_i(x_i,y_i)$ получить оценки производных по переменным x_i, y_i.

Используя на каждом T_i для e_i формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши в системе координат $O_ix_iy_i$, получим разложение

$$\frac{\partial^n e_i(x_i,y_i)}{\partial x_i^{n-s}\partial y_i^s}=\sum_{j=s}^{3-n+s}\frac{1}{(j-s)!}y_i^{j-s}\sum_{k=0}^{3-n+s-j}\frac{\partial^{n-s+j+k}e_i(0,0)}{\partial x_i^{n-s+k}\partial y_i^j}\,\frac{x_i^k}{k!}$$

$$+\sum_{j=s}^{3-n+s}\frac{1}{(j-s)!}y_i^{j-s}\int\limits_0^{x_i}\frac{(x_i-v)^{3-n+s-j}}{(3-n+s-j)!}\,\frac{\partial^4 f(v,0)}{\partial v^{4-j}\partial y_i^j}\,dv+\int\limits_0^{y_i}\frac{(y_i-t)^{3-n}}{(3-n)!}\,\frac{\partial^4 f(x_i,t)}{\partial x_i^{n-s}\partial t^{4-n+s}}\,dt. \tag{3.4}$$

Чтобы доказать (3.1), достаточно оценить $\partial^{j+k}e_i(0,0)/\left(\partial x_i^j\partial y_i^k\right)$, $1\le i\le 3$, $0\le j+k\le 3$. Договоримся далее обозначать $\partial^{j+k}e_i(0,0)/\left(\partial x_i^j\partial y_i^k\right)$ через $e_i^{(jk)}$.

Лемма 3. *Для любых $j=\overline{0,2}$ и $1\le i\le 3$ имеют место оценки*

$$\left|\frac{\partial^2 e_i(0,0)}{\partial x_i^{2-j}\partial y_i^j}\right|\lesssim\frac{MH^2}{\sin^j\beta}. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом i и $j=0,1$ справедливость формулы (3.5) вытекает из условий интерполяции (3.2) и (3.3). Более того, из условий (3.2) и (3.3) получаем оценки

$$\left|e_i^{(jk)}\right|\lesssim Md_{(i+1)(i+2)}^{4-(j+k)},\quad 1\le i\le 3,\quad k=0,1,\quad 0\le j+k\le 3. \tag{3.6}$$

Остается доказать (3.5) для $j=2$.

Условие $P_3\in C^1(T)$ в сочетании с тем, что

$$\frac{\partial^2 e_1(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}}=\frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}}+\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}\partial x_1}d_{23}+R_1,$$

где $|R_1| \lesssim M d_{23}^2$ (применяется формула Тейлора на отрезке a_3a_2), приводит к равенствам

$$\frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{30}} = \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{30}}\,,$$

$$\frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}\partial x_1} d_{23} + R_1 = \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}}\,,$$

$$\frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial\tau_{30}^2} = \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial\tau_{30}^2}\,.$$

Представляя производные функций e_i по направлениям τ_{jk} через производные по переменным x_i, y_i, получим систему уравнений относительно величин $e_i^{(02)}$:

$$e_1^{(20)}\cos\frac{\theta}{2} + e_1^{(11)}\sin\frac{\theta}{2} = e_2^{(20)}\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + e_2^{(11)}\Big(-\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} - \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\Big) + e_2^{(02)}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}, \quad (3.7)$$

$$\begin{gathered}
-e_1^{(20)}\cos\frac{\beta}{2} + e_1^{(11)}\sin\frac{\beta}{2} - e_1^{(30)}\cos\frac{\beta}{2}d_{23} + e_1^{(21)}\sin\frac{\beta}{2}d_{23} + R_1 \\
= -e_3^{(20)}\cos\beta\cos\frac{\beta}{2} + e_3^{(11)}\Big(-\sin\beta\cos\frac{\beta}{2} - \cos\beta\sin\frac{\beta}{2}\Big) - e_3^{(02)}\sin\beta\sin\frac{\beta}{2},
\end{gathered} \quad (3.8)$$

$$e_1^{(20)}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2e_1^{(11)}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + e_1^{(02)}\sin^2\frac{\theta}{2} = e_2^{(20)}\cos^2\frac{\theta}{2} - 2e_2^{(11)}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + e_2^{(02)}\sin^2\frac{\theta}{2}. \quad (3.9)$$

Из (3.7), (3.6), (2.1), (2.4) получаем оценку

$$\big|e_2^{(02)}\big| \lesssim \frac{MH^2}{\sin\beta}\,, \quad (3.10)$$

из (3.8), (3.6), (2.2) — оценку

$$\big|e_3^{(02)}\big| \lesssim \frac{MH^2}{\sin^2\beta}\,,$$

из (3.9), (3.6), (3.10), (2.1) — оценку

$$\big|e_1^{(02)}\big| \lesssim \frac{MH^2}{\sin\beta}\,.$$

Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Для любых* $j = \overline{0,3}$ *и* $1 \le i \le 3$ *имеют место оценки*

$$\left|\frac{\partial^3 e_i(0,0)}{\partial x_i^{3-j}\partial y_i^j}\right| \lesssim \begin{cases} MH, & \text{если} \quad j = 0,1, \\ \dfrac{MH}{\sin\alpha\sin^{j-1}\beta}\,, & \text{если} \quad j = 2,3. \end{cases} \quad (3.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $j = 0,1$ оценки (3.11) уже были доказаны в (3.6).

Условие $P_3 \in C^1(T)$ и разложения по формуле Тейлора

$$\frac{\partial^2 e_1(a_2)}{\partial\tau_{20}^2} = \frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial\tau_{20}^2} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{20}^2\partial x_1}\, d_{23} + R_2,$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_2)}{\partial\tau_{20}^3} = \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{20}^3} + R_3,$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}^2} = \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}^2} + R_4,$$

$$\frac{\partial^2 e_2(a_1)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}} = \frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}} - \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}\partial x_2}\ d_{13} + R_5,$$
$$\frac{\partial^2 e_3(a_1)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}} = \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}} + \frac{\partial^3 e_2(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}\partial x_3}\ d_{12} + R_6,$$

где $|R_2| \lesssim Md_{23}^2$; $|R_3| \lesssim Md_{23}$; $|R_4| \lesssim Md_{23}$; $|R_5| \lesssim Md_{13}^2$; $|R_6| \lesssim Md_{12}^2$, дают совокупность следующих условий:

$$\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{30}^3} = \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial\tau_{30}^3},$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{30}^2} = \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{30}^2},$$

$$\frac{\partial^2 e_1(a_3)}{\partial\tau_{20}^2} + \frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{20}^2\partial x_1}\ d_{23} + R_2 = \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial\tau_{20}^2},$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{20}^3} + R_3 = \frac{\partial^3 e_3(a_2)}{\partial\tau_{20}^3},$$

$$\frac{\partial^3 e_1(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}^2} + R_4 = \frac{\partial^3 e_3(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{20}^2},$$

$$\frac{\partial^2 e_2(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}} - \frac{\partial^3 e_2(a_3)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}\partial x_2}\ d_{13} + R_5 = \frac{\partial^2 e_3(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}} + \frac{\partial^3 e_2(a_2)}{\partial\tau_{32}\partial\tau_{10}\partial x_3}\ d_{12} + R_6.$$

Представляя производные функций e_i по направлениям τ_{jk} через производные по переменным x_i, y_i, получим систему уравнений относительно производных $e_i^{(pq)}$, $q = 2, 3$, $p = 3 - q$:

$$e_1^{(30)} \cos^3\frac{\theta}{2} + 3e_1^{(21)} \cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + 3e_1^{(12)} \cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + e_1^{(03)}\sin^3\frac{\theta}{2}$$
$$= -e_2^{(30)} \cos^3\frac{\theta}{2} + 3e_2^{(21)} \cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - 3e_2^{(12)} \cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + e_2^{(03)}\sin^3\frac{\theta}{2}, \tag{3.12}$$

$$e_1^{(30)} \cos^2\frac{\theta}{2} + 2e_1^{(21)} \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + e_1^{(12)}\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$= -e_2^{(30)}\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2} + e_2^{(21)}\Big(\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\Big)$$
$$+ e_2^{(12)}\Big(-\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\Big) + e_2^{(03)}\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{3.13}$$

$$e_1^{(20)}\cos^2\frac{\beta}{2} - 2e_1^{(11)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + e_1^{(02)}\sin^2\frac{\beta}{2} + e_1^{(30)}\cos^2\frac{\beta}{2}d_{23} - 2e_1^{(21)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}d_{23}$$
$$+ e_1^{(12)}\sin^2\frac{\beta}{2}d_{23} + R_2 = e_3^{(20)}\cos^2\frac{\beta}{2} + 2e_3^{(11)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + e_3^{(02)}\sin^2\frac{\beta}{2}, \tag{3.14}$$

$$-e_1^{(30)}\cos^3\frac{\beta}{2} + 3e_1^{(21)}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} - 3e_1^{(12)}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + e_1^{(03)}\sin^3\frac{\beta}{2} + R_3$$
$$= e_3^{(30)}\cos^3\frac{\beta}{2} + 3e_3^{(21)}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 3e_3^{(12)}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + e_3^{(03)}\sin^3\frac{\beta}{2}, \tag{3.15}$$

$$e_1^{(30)}\cos^2\frac{\beta}{2} - 2e_1^{(21)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} + e_1^{(12)}\sin^2\frac{\beta}{2} + R_4$$
$$= -e_3^{(30)}\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2} + e_3^{(21)}\Big(-\sin\beta\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\Big)$$
$$+ e_3^{(12)}\Big(-2\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \cos\beta\sin^2\frac{\beta}{2}\Big) - e_3^{(03)}\sin\beta\sin^2\frac{\beta}{2}, \tag{3.16}$$

$$-e_2^{(20)}\cos\theta\cos\frac{\alpha}{2}+e_2^{(11)}\Big(-\cos\theta\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\theta\cos\frac{\alpha}{2}\Big)+e_2^{(02)}\sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}+e_2^{(30)}\cos\theta\cos\frac{\alpha}{2}d_{13}$$
$$+e_2^{(21)}\Big(\cos\theta\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\theta\cos\frac{\alpha}{2}\Big)d_{13}-e_2^{(12)}\sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}d_{13}+R_5$$
$$=e_3^{(20)}\cos\beta\cos\frac{\alpha}{2}+e_3^{(11)}\Big(-\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}\Big)-e_3^{(02)}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}+e_3^{(30)}\cos\beta\cos\frac{\alpha}{2}d_{12}$$
$$+e_3^{(21)}\Big(-\cos\beta\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\beta\cos\frac{\alpha}{2}\Big)d_{12}-e_3^{(12)}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}d_{12}+R_6. \qquad (3.17)$$

Из (3.14) получаем оценку

$$\Big|e_1^{(12)}\sin^2\frac{\beta}{2}d_{23}\Big|\le\Big|e_3^{(20)}\cos^2\frac{\beta}{2}\Big|+2\Big|e_3^{(11)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\Big|+\Big|e_3^{(02)}\sin^2\frac{\beta}{2}\Big|+\Big|e_1^{(20)}\cos^2\frac{\beta}{2}\Big|$$
$$+2\Big|e_1^{(11)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\Big|+\Big|e_1^{(02)}\sin^2\frac{\beta}{2}\Big|+\Big|e_1^{(30)}\cos^2\frac{\beta}{2}d_{23}\Big|+2\Big|e_1^{(21)}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}d_{23}\Big|+\big|R_2\big|. \qquad (3.18)$$

Оценивая слагаемые правой части неравенства (3.18) с помощью (3.5), (3.6) (каждое слагаемое с точностью до знака “$\lesssim$” не превосходит величины MH^2) и принимая во внимание то, что $H^2\left(\sin^2\frac{\beta}{2}d_{23}\right)^{-1}\lesssim H^2\left(\sin^2\beta d_{23}\right)^{-1}\lesssim H\left(\sin\alpha\sin\beta\right)^{-1}$, получаем

$$\Big|e_1^{(12)}\Big|\lesssim\frac{MH}{\sin\alpha\sin\beta}. \qquad (3.19)$$

В уравнениях (3.12), (3.13), (3.15)–(3.17) остаются 5 величин, которые требуется оценить: $e_1^{(03)}$, $e_2^{(12)}$, $e_2^{(03)}$, $e_3^{(12)}$, $e_3^{(03)}$. Прочие слагаемые в данных уравнениях оцениваются с помощью (3.5), (3.6), (3.19). Таким образом, учитывая, что

$$H\lesssim d_{12}\lesssim H,\quad H\lesssim d_{13}\lesssim H,$$

а также применяя равенство $d_{13}\sin\theta=d_{12}\sin\beta$ (теорема синусов) в (3.17), приходим к системе уравнений

$$e_1^{(03)}\sin^3\frac{\theta}{2}+3e_2^{(12)}\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}-e_2^{(03)}\sin^3\frac{\theta}{2}=E_1,$$
$$e_2^{(12)}\Big(\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\Big)-e_2^{(03)}\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=E_2,$$
$$e_1^{(03)}\sin^3\frac{\beta}{2}-3e_3^{(12)}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}-e_3^{(03)}\sin^3\frac{\beta}{2}=E_3,$$
$$e_3^{(12)}\Big(2\sin\beta\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\cos\beta\sin^2\frac{\beta}{2}\Big)+e_3^{(03)}\sin\beta\sin^2\frac{\beta}{2}=E_4,$$
$$-e_2^{(12)}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}+e_3^{(12)}\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}=E_5,$$

где

$$\Big|E_i\Big|\lesssim\begin{cases} MH/\sin\alpha, & \text{если}\quad i=1,\\ MH/(\sin\alpha\sin\beta), & \text{если}\quad i=2,\\ MH\sin\beta/\sin\alpha, & \text{если}\quad i=3,4,\\ MH, & \text{если}\quad i=5.\end{cases} \qquad (3.20)$$

Основной матрицей этой системы является матрица A, для которой $\det A\gtrsim\sin\alpha\sin^7\beta$ (см. лемму 1). Решая систему методом Крамера и оценивая полученные решения с учетом леммы 2 и (3.20), завершаем доказательство оценок (3.11). Лемма 4 доказана. $\square$

Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться разложением (3.4) с учетом условий (3.2), (3.3) и оценок (3.5) и (3.11). Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
2. **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. 1970. Vol. 15. P. 283–296.
3. **Bramble J.H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. 1970. Vol. 24, no. 112. P. 809–820.
4. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol 46, no. 3. P. 177–199.
5. **Субботин Ю.Н.** Многомерная кусочно полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / под ред. А.Ю. Кузнецова. Новосибирск: ВЦН, 1981. С. 148–153.
6. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.
7. **Субботин Ю.Н.** Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 88–100.
8. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.
9. **Latypova N.V.** Error estimates for approximation by polynomials of degree $4k + 3$ on the triangle // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 1. P. S190–S213.
10. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m + 1$ on the triangle // Russ. J. of numerical analysis and mathematical modelling. 1999. Vol 14, no. 2. P. 87–107.
11. **Subbotin Yu.N.** A new cubic element in the FEM // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 2. P. S176–S187.
12. **Baidakova N.V.** A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 2. P. S49–S55.
13. **Ženišek A.** Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. Vol. 64, no. 211. P. 929–941.
14. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. 2003. С. 3–10. (Математика.)
15. **Куприянова Ю.В.** Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т.48, № 2. С. 206-211.
16. **Матвеева Ю.В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. 2007. Т. 7, вып. 1. (Математика. Механика. Информатика.) С. 23–27.
17. **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. Ин-та математики и механики. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97.

Байдакова Наталия Васильевна Поступила 25.04.2012

канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: baidakova@imm.uran.ru

Том 18 № 4 2012

УДК 517.5

ОБ АНТИПРОКСИМИНАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ГРОТЕНДИКА[1]

В. С. Балаганский

В работе при некоторых ограничениях на пространство Гротендика доказывается наличие в нем замкнутого выпуклого ограниченного антипроксиминального множества для некоторых пространств Линденштраусса. Факт, ранее автором установленный для классического пространства $C(Q)$, доказывается в этой работе для некоторых пространств Линденштраусса.

Ключевые слова: антипроксиминальное множество, пространства Гротендика.

V. S. Balaganskii. On antiproximinal sets in Grothendieck spaces.

Under some constraints on a Grothendieck space, we prove that this space contains a closed convex bounded antiproximinal set for some Lindenstrauss spaces. A fact that was proved earlier by the author for a classical space $C(Q)$ is now proved for some Lindenstrauss spaces.

Keywords: antiproximinal set, Grothendieck spaces.

Подмножество $A \neq X$, $A \neq \varnothing$, банахова пространства X называется антипроксиминальным, если для любой точки $x \in X \backslash A$ в множестве A нет ближайшей точки.

О выпуклых замкнутых ограниченных антипроксиминальных множествах см. обзорную статью [1] и приведенную там литературу. О пространствах Гротендика см. [2]. Выпуклые замкнутые ограниченные антипроксиминальные множества построены в пространствах Гротендика только частного вида, например $C_0(T)$ (см. также теорему Б). В настоящей работе при некоторых ограничениях на пространство Гротендика построен пример выпуклого замкнутого ограниченного антипроксиминального множества.

В работе применяются следующие обозначения: $X \subset Y$ — вещественные банаховы пространства; Y^* — пространство, сопряженное к Y; $\mathcal{F}(X)$ — класс замкнутых непустых множеств из X,

$$V_X(z,r) = \{x \in X\colon \|x-z\| \le r\}, \quad V_Y(z,r) = \{y \in Y\colon \|y-z\| \le r\}, \quad S(X) = \{x \in X\colon \|x\| = 1\},$$

для $M \in \mathcal{F}(X)$ и $A \subset Y^*$ $\mathrm{int}_Z M$ — внутренность M относительно банахова пространства Z, $\partial M = \overline{M} \backslash \mathrm{int}_Z M$ — граница M в Z,

$$\Sigma(M) = \{f \in Y^*\colon \exists x \in M \;\; f(x) = \sup\{f(z)\colon z \in M\}\},$$

$$M^\pi = \{f \in Y^*\colon \sup\{f(z)\colon z \in M\} \le 1\}, \qquad A_\pi = \{x \in X\colon \sup\{f(x)\colon f \in A\} \le 1\}.$$

Для подпространства $L \subset X$ через $L^\perp$ будем обозначать аннулятор $\{f \in Y^*\colon \forall x \in L \;\; f(x) = 0\}$.

Пространство $C(Q)$ определено для топологического пространства Q и состоит из всех определенных на Q ограниченных непрерывных функций. Нормой пространства служит $\|f\| = \sup|f(t)|$. Для $y \in C(Q)$ обозначим $\mathrm{crit}\, y = \{t \in Q\colon |y(t)| = \|y\|\}$, $\mathrm{supp}\, y = \{q \in Q\colon \; y(q) \neq 0\}$. Для $\mu \in C^*(Q)$ обозначим $S(\mu) = \{t \in Q\colon |\mu|(G) > 0$ для любого открытого $G \ni t\}$, $S^+(\mu) = S(\mu^+)$, $S^-(\mu) = S(\mu^-)$, где $\mu^+ - \mu^- = \mu$, $\mu^+ + \mu^- = |\mu| = \mathrm{var}\,\mu$, $U(\mu)$ — объединение атомов меры μ, $U^+(\mu)$ — объединение атомов меры μ^+, $U^-(\mu)$ — объединение атомов меры μ^-.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00347).

Далее во всей работе будут выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \mathbf{Z} \subseteq Q_1 \subseteq Q \ \text{— бикомпакты;} \\ \sigma \ \text{— гомеоморфизм } Q_1 \text{ на } Q_1; \\ \forall q \in Q_1 \ \ \sigma(\sigma(q)) = q; \\ \lambda \ \text{— вещественная функция,} \\ \text{определенная и непрерывная на } Q_1 \backslash \mathbf{Z}; \\ \sup\{|\lambda(q)|\colon q \in Q_1\backslash \mathbf{Z}\} < \infty. \end{cases} \qquad (*)$$

З а м е ч а н и е 1. В условии $(*)$ допускаются случаи когда $\mathbf{Z} = \varnothing$, $\mathbf{Z} = Q_1$, $\varnothing = \mathbf{Z} = Q_1$, $Q_1 = Q$.

Мы будем рассматривать подпространства Гротендика частного вида.

Через $\Gamma_{\sigma,\lambda} = \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ будем обозначать подпространство пространства $C(Q)$, которое определяется следующими двумя условиями:

(a) для любого $x \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$ справедливо равенство $x(\sigma(q)) = \lambda(q) \cdot x(q)$ для всех $q \in Q_1\backslash\mathbf{Z}$;

(b) $\mathbf{Z}(\Gamma_{\sigma,\lambda}) = \{q \in Q\colon \forall f \in \Gamma_{\sigma,\lambda} \ \ f(q) = 0\} = \mathbf{Z}$.

З а м е ч а н и е 2. Класс пространств $\Gamma_{\sigma,\lambda}$ включает пространства $C(Q)$, подпространства четных и нечетных функций пространства $C[-1,1]$.

В дальнейшем считаем, без потери общности, что для любой меры $\mu \in (\Gamma_{\sigma,\lambda})^*$ справедливо равенство $U(\mu) \cap \mathbf{Z}(\Gamma_{\sigma,\lambda}) = \varnothing$.

$V_{\sigma,\lambda}(x,r) = \{y \in \Gamma_{\sigma,\lambda}\colon yx \le r\}$, $V_{\sigma,\lambda} = \{y \in \Gamma_{\sigma,\lambda} : \|y\| \le 1\}$, $\mathbf{F} = \{q \in Q_1\colon \sigma(q) = q\}$.

О п р е д е л е н и е 1. Для множества $A \subset C(Q)^*$ через $U(A)$ будем обозначать объединение атомов мер из A (атомами в случае бикомпакта считаются отдельные точки).

Теорема А (см., например, [3, с. 38, 40]). *Пусть Q — бикомпакт, тогда для $X = C(Q)$ справедливо $\Sigma(V_X(0,1)) = \{\mu \in X^*\colon S^+(\mu) \cap S^-(\mu) = \varnothing\}$.*

Легко заметить, что

$$(\Gamma_{\sigma,\lambda})^\perp = w^* - \mathrm{cl}\ \mathrm{span}\ \left(\left(\bigcup_{q \in Q_1\backslash\mathbf{Z}} \{\delta_q \cdot \lambda(q) - \delta_{\sigma(q)}\}\right) \bigcup \left(\bigcup_{q \in \mathbf{Z}} \{\delta_q\}\right)\right), \qquad U((\Gamma_{\sigma,\lambda})^\perp) \subset Q_1.$$

В связи с последним включением представляет интерес следующая теорема.

Теорема Б [3]. *Пусть Q — бесконечный бикомпакт, $Y \subset C(Q)$ — бесконечномерное замкнутое подпространство. Тогда если существует бесконечное замкнутое множество $B \subset Q\backslash U(Y^\perp)$, то в Y существует множество M, которое является выпуклым замкнутым ограниченным антипроксиминальным телом относительно Y.*

Для дальнейшей работы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если $\sigma(q) \in \mathbf{Z}$, а $q \notin \mathbf{Z}$, то $\lambda(q) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению множества $\mathbf{Z}$ найдется функция $x \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$ такая, что $x(q) \neq 0$. Имеем $0 = x(\sigma(q)) = \lambda(q) \cdot x(q)$, $x(q) \neq 0$, следовательно, $\lambda(q) = 0$. $\square$

Лемма 2. *Пусть Y — банахово пространство, $X \subset Y$ — замкнутое подпространство, $M \subset X$ — выпуклое ограниченное замкнутое тело относительно X, $0 \in \mathrm{int}_X M$. Пусть $A = M^\pi = \{f \in Y^*\colon \sup\{f(x)\colon x \in M\} \le 1\}$, $-f_0 \in \mathrm{int}_{Y^*} A$, $B = A + f_0$, $B_\pi = \{x \in X\colon \sup\{f(x)\colon f \in B\} \le 1\}$. Тогда B_π — выпуклое ограниченное замкнутое тело в X и $0 \in \mathrm{int}_X B_\pi$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия $-f_0 \in \mathrm{int}_{Y^*} A$ получаем, что $0 \in \mathrm{int}_{Y^*} B$, а отсюда сразу следует ограниченность множества B_π. Выпуклость и замкнутость множества B_π очевидны.

По определению полярны $0 \in B_\pi$. Допустим, что $0 \notin \mathrm{int}_X B_\pi$. Тогда существует последовательность $x_n \in X \backslash B_\pi$ такая, что $x_n \to 0$. По теореме Хана — Банаха найдутся функционалы $f_n \in Y^*$, разделяющие множество B_π и точки x_n. Можно считать, без потери общности, что $f_n \in \partial B$ и $f_n(x_n) > 1$. Имеем $f_n = f_0 + g_n$, где $g_n \in A$. Так как $0 \in \mathrm{int}_X M$, то начиная с некоторого номера $x_n \in \mathrm{int}_X M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $x_n/(1-\varepsilon) \in M$ и поэтому для любого $f \in M^\pi = A$ $\ |f(x_n)| \le 1-\varepsilon$. Имеем $1-\varepsilon + f_0(x_n) \ge g_n(x_n) + f_0(x_n) = f_n(x_n) > 1$, следовательно, $\|f_0\| \cdot \|x_n\| \ge f_0(x_n) > \varepsilon$, противоречие с $x_n \to 0$. $\square$

Лемма 3. *Для любого функционала $\mu \in C^*(Q)\backslash\{0\}$ найдется функционал $\nu \in C^*(Q)\backslash\{0\}$ такой, что*

$$\mu\,|_{\Gamma_{\sigma,\lambda}} = \nu\,|_{\Gamma_{\sigma,\lambda}}, \qquad \|\mu\|_{\Gamma^*_{\sigma,\lambda}} = \|\nu\|_{\Gamma^*_{\sigma,\lambda}} \quad \text{и} \quad \sigma(U(\nu)\cap Q_1)\cap(U(\nu)\cap Q_1) \subset \mathbf{F}$$

и для любого $q \in U(\nu)\cap Q_1$ справедливо неравенство $|\lambda(q)| \le 1$.

Доказательство. Так как для любой функции $g \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$ и любой точки $t \in \mathbf{Z}$, $g(t) = 0$, то считаем, без потери общности, что $U(\mu)\cap\mathbf{Z} = \varnothing$. Мера μ имеет не более чем счетное множество атомов. Пусть $U(\mu)\cap Q_1 = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\ \{\tau_\alpha\}$, $\ \mathcal{D} = \{\alpha \in \mathcal{A}\colon \sigma(\tau_\alpha) \in \mathbf{Z}\}$, $\ \mathcal{B} = \{\alpha \in \mathcal{A}\backslash\mathcal{D}\colon \sigma(\tau_\alpha) \in U(\mu)\backslash\mathbf{F}\}$. Так как для любого $q \in Q_1\backslash\mathbf{Z}$, такого что $\sigma(q) \in Q_1\backslash\mathbf{Z}$, справедливо $\lambda(q)\lambda(\sigma(q)) = 1$, то можно разбить множество $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}^1$ и $\mathcal{B}^2$, где $\mathcal{B}^1\cap\mathcal{B}^2 = \varnothing$, $\ \sigma(\mathcal{B}^1) = \mathcal{B}^2$, $\ \sigma(\mathcal{B}^2) = \mathcal{B}^1$ и для любого $q \in \mathcal{B}^1$ справедливо неравенство $|\lambda(q)| \le 1$.

Пусть

$$\gamma = \sum_{\alpha\in\mathcal{B}^1} \mu(\sigma(\tau_\alpha))(\delta_{\sigma(\tau_\alpha)} - \lambda(\tau_\alpha)\,\delta_{\tau_\alpha}), \qquad \nu = \mu - \gamma.$$

Имеем $\gamma \in (\Gamma_{\sigma,\lambda})^\perp$, следовательно, $\mu\,|_{\Gamma_{\sigma,\lambda}} = \nu\,|_{\Gamma_{\sigma,\lambda}}$, $\ \|\mu\|_{\Gamma^*_{\sigma,\lambda}} = \|\nu\|_{\Gamma^*_{\sigma,\lambda}}$, кроме того, $\nu(\sigma(\tau_\alpha)) = 0$. Так как $U(\mu)\cap\mathbf{Z} = \varnothing$ и по лемме 1 для $\alpha \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство $|\lambda(\tau_\alpha)| \le 1$, то $\sigma(U(\nu)\cap Q_1)\cap(U(\nu)\cap Q_1) \subset \mathbf{F}$ и для любого $q \in U(\nu)\cap Q_1$ справедливо неравенство $|\lambda(q)| \le 1$. $\square$

Лемма 4. *Пусть Q — бикомпакт, $\mu \in C^*(Q)\backslash\{0\}$ — безатомная положительная мера, $\tau \in Q\backslash\mathbf{Z}$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность W точки τ такая, что $|\mu|(W) \le \varepsilon$.*

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность W' точки τ. По лемме Сакса (см., например, [3, с. 335]) разобьем W' на измеримые множества $A_1, A_2, \ldots, A_k$ такие, что $|\mu|(A_i) \le \varepsilon/2$ при $1 \le i \le k$. Тогда $\tau \in \bigcup_{i=1}^k A_i = W'$ и можно считать, что $\tau \in A_1$. Множество A_1 измеримо, мера μ регулярна, следовательно, найдется открытое множество B такое, что $0 \in A_1 \subset B$, $\ |\mu|(B \triangle A_1) \le \varepsilon/2$, $\ |\mu|(B) \le \varepsilon$. $\square$

Лемма 5. *Пусть $Q_1 = Q$, $\widetilde{W}$ — открытое множество в Q_1, W — замыкание $\widetilde{W}$, $z_1 \in C(Q_1)$, $\mathrm{supp}\, z_1 \subset W \subset Q_1\backslash\mathbf{Z}$, $\sup\{|\lambda(q)|\colon q \in W\} = c$ и функция z задается следующим образом:*

$$z(q) = \begin{cases} z_1(q) + \lambda(\sigma(q))\,z_1(\sigma(q)) & \text{при} \quad \sigma(q) \in Q_1\backslash\mathbf{Z}, \\ z_1(q) & \text{при} \quad \sigma(q) \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Тогда $z \in \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ и $\|z\| \le (1+c)\,\|z_1\|$.

Доказательство. В силу условия $(*)$ $c < \infty$.

Докажем, что если $q \in \mathbf{Z}$, то $z(q) = 0$. Действительно, если $q \in \mathbf{Z}$ и $\sigma(q) \notin \mathbf{Z}$, то по лемме 1 $\lambda(\sigma(q)) = 0$, так как supp $z_1 \subset Q\backslash\mathbf{Z}$, то $z_1(q) = 0$. Имеем $z(q) = z_1(q) + \lambda(\sigma(q))\,z_1(\sigma(q)) = z_1(q) = 0$. Если $q \in \mathbf{Z}$ и $\sigma(q) \in \mathbf{Z}$, то $z(q) = z_1(q) = 0$.

Докажем, что функция z непрерывна на Q_1. Функция z_1 непрерывна, следовательно, для непрерывности функции z достаточно, чтобы была непрерывна функция

$$g(q) = \begin{cases} \lambda(\sigma(q))\,z_1(\sigma(q)) & \text{при} \quad \sigma(q) \notin \mathbf{Z}, \\ 0 & \text{при} \quad \sigma(q) \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Возьмем произвольную точку $q \in Q_1$. Пусть сначала $\sigma(q) \in Q_1 \backslash W$. Множество $Q_1 \backslash W$ открыто в Q_1, следовательно, найдется окрестность G_1 в Q_1 точки $\sigma(q)$ такая, что $W \cap G_1 = \varnothing$. Тогда для любой точки $t \in G_1$ справедливо равенство $z_1(t) = 0$ и для любой точки $\tau \in \sigma(G_1)$ $g(\tau) = 0$. Ясно, что $\sigma(G_1)$ — окрестность в Q_1 точки q, тогда g непрерывна в точке q.

Пусть теперь $\sigma(q) \in W$. Так как $W \cap \mathbf{Z} = \varnothing$, то для любого $t \in Q_1$, такого что $\sigma(t) \in W$ справедливо равенство

$$g(t) = \lambda(\sigma(t))\, z_1(\sigma(t)). \tag{1}$$

Тогда если $\sigma(q)$ принадлежит W с некоторой окрестностью, то в силу непрерывности в W функций z_1, σ и λ функция g непрерывна в точке q. Считаем, что $\sigma(q) \in \overline{Q_1 \backslash W}$ и $\sigma(q) \in W$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Так как $z_1(t) = 0$ для любой точки $t \in Q_1 \backslash W$, то $z_1(\sigma(q)) = 0$. В силу непрерывности функции z_1 найдется открытая окрестность W_ε точки $\sigma(q)$ такая, что для любой точки $t \in W_\varepsilon$ $\quad |z_1(t)| \le \varepsilon/c$. В силу (1) имеем $|g(t)| = |\lambda(\sigma(t))| \cdot |z_1(\sigma(t))| \le \varepsilon$ в открытой окрестности $\sigma(W_\varepsilon)$ точки q.

Итак, функция z непрерывна и для любой точки $q \in \mathbf{Z}$ справедливо равенство $z(q) = 0$.

Докажем, что $z(\sigma(q)) = \lambda(q)\, z(q)$ для всех $q \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}$. Сначала пусть $\sigma(q) \in \mathbf{Z}$, тогда $\sigma(q) \notin W$ и $z_1(\sigma(q)) = 0$. Кроме того, $\sigma(q) \in \mathbf{Z}$ и $q \notin \mathbf{Z}$, по лемме 1 получаем, что $\lambda(q) = 0$. Тогда $z(\sigma(q)) = z_1(\sigma(q)) = 0 = \lambda(q)\, z(q)$.

Рассмотрим оставшийся случай: $\sigma(q) \notin \mathbf{Z}$, $q \notin \mathbf{Z}$. Ясно, что $\lambda(\sigma(q)) \ne 0$, $\lambda(q) \ne 0$, $\lambda(\sigma(q))\, \lambda(q) = 1$. Имеем $z(\sigma(q)) = z_1(\sigma(q)) + \lambda(q)\, z_1(q) = \lambda(q)\, (z_1(q) + \lambda(\sigma(q))\, z_1(\sigma(q))) = \lambda(q)\, z(q)$.

Итак во всех случаях $z(\sigma(q)) = \lambda(q)\, z(q)$ для любого $q \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}$ так, что $z \in \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$, $|z(q)| \le |z_1(q)| + |\lambda(\sigma(q))| \cdot |z_1(\sigma(q))| \le (1 + c)\, \|z\|$. $\square$

Лемма 6. *Пусть* $\mu \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash (\Gamma_{\sigma,\lambda})^\perp$, $\sigma(U(\mu) \cap Q_1) \cap (U(\mu) \cap Q_1) \subset \mathbf{F}$, $x \in V_{\sigma,\lambda}$, $\langle \mu, x \rangle = \sup\{\langle \mu, z \rangle \colon z \in V_{\sigma,\lambda}\}$.

Тогда

a) для любой точки $q \in U(\mu) \backslash Q_1$ *справедливо равенство* $x(q) = \operatorname{sign} \mu(q)$;

b) для любой точки $q \in U(\mu) \cap Q_1$, $|\lambda(q)| \le 1$ *справедливо равенство* $x(q) = \operatorname{sign} \mu(q)$.

Доказательство. Сначала докажем b). Так как $\mu \notin (\Gamma_{\sigma,\lambda})^\perp$, то $\langle \mu, x \rangle > 0$, $\|x\| = 1$. Множество атомов $U(\mu)$ не более чем счетно, тогда пусть $U(\mu) \cap Q_1 = \bigcup_{n=1}^N \{\tau_n\}$, $\sigma(\tau_n) = t_n$ (N может принимать значение ∞.)

Если $\sigma(\tau_n) \in U(\mu)$, то $\sigma(\tau_n) \in U(\mu) \cap Q_1$ и по условию леммы $\sigma(\tau_n) = \tau_n$, следовательно, выполняется одно из двух равенств:

$$\text{или } \mu(\sigma(\tau_n)) = 0 \text{ , или } \sigma(\tau_n) = \tau_n. \tag{$***$}$$

Докажем, что для любого номера n справедливо $x(\tau_n) = \operatorname{sign} \mu(\tau_n)$.

Поскольку $\tau_n \in U(\mu)$, то $\mu(\tau_n) \ne 0$ и считаем, без потери общности, что $\operatorname{sign} \mu(\tau_n) = 1$. Так как $\|x\| = 1$, то $|x(\tau_n)| \le 1$, $|x(\sigma(\tau_n))| \le 1$, тогда $|x(\tau_n)| \le 1 = \operatorname{sign} \mu(\tau_n)$.

Допустим, что $-1 \le x(\tau_n) < 1$. Далее, при этих предположениях, мы построим функцию $y \in V_{\sigma,\lambda}$ такую, что $\langle \mu, y \rangle > \langle \mu, x \rangle$.

Возможны 4 случая:

$$\text{I.} \quad |x(\tau_n)| < 1, \quad \tau_n \ne \sigma(\tau_n); \qquad \text{II.} \quad |x(\tau_n)| < 1, \quad \tau_n = \sigma(\tau_n);$$

$$\text{III.} \quad x(\tau_n) = -1, \quad \tau_n \ne \sigma(\tau_n); \qquad \text{IV.} \quad x(\tau_n) = -1, \quad \tau_n = \sigma(\tau_n).$$

Так как $U(\mu) \cap \mathbf{Z} = \varnothing$, то в силу нормальности Q существует замкнутая окрестность W^1 точки τ_n такая, что $W^1 \cap \mathbf{Z} = \varnothing$. В силу непрерывности x на Q найдется открытая окрестность $W \subset W^1$ точки τ_n в Q и число $1 \ge \delta > 0$ такие, что выполняются следующие условия:

$$\left.\begin{array}{c} \text{в случаях I и II } \forall q \in W \text{ справедливо неравенство } |x(q)| \le 1 - \delta; \\ \text{в случаях III и IV } \forall q \in W \text{ справедливо неравенство } x(q) < 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Множество $W \cap Q_1$ открыто в Q_1, σ — гомеоморфизм Q_1 на Q_1, следовательно, множество $\sigma(W \cap Q_1)$ тоже открыто в Q_1. Тогда (см., например, [6, с. 51]) найдется открытое в Q множество $\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{W} \cap Q_1 = \sigma(W \cap Q_1)$. Следовательно, для любой точки $q \in \mathcal{W} \cap Q_1$ выполняются следующие условия:

$$\left.\begin{array}{l} |x(q)| \le (1-\delta)\cdot|\lambda(\sigma(q))| \le 1-\delta \ \text{ в случаях I и II;} \\ \operatorname{sign}\ \lambda(\sigma(q))\cdot \operatorname{sign}\ x(q) \le 0 \quad \text{в случаях III и IV.} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Так как $|x(\sigma(\tau_n))| \le 1-\delta$, то в силу непрерывности x считаем, без потери общности, что для любого $q \in \mathcal{W}$ справедливо неравенство $|x(q)| \le 1-\delta/2$. В случаях I и III считаем, без потери общности, что $\mathcal{W} \cap W = \varnothing$.

В случаях II и IV $\tau_n = \sigma(\tau_n)$, тогда $\lambda(\tau_n) = \lambda(\sigma(\tau_n)) = 1$. В этих случаях считаем, без потери общности, что для любой точки $q \in (W \cup \mathcal{W}) \cap Q_1$ справедливо неравенство $\lambda(q) > 0$.

Пусть $\infty > \lambda_s > \max\{1, \sup\{|\lambda(q)|\colon q \in Q_1\}\}$.

Выберем числа γ и ε, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\varepsilon > 0, \qquad \frac{\delta}{2(1+\lambda_s)} > \gamma > \frac{2\varepsilon \operatorname{var}\mu}{\mu(\tau_n)}.$$

Имеем

$$\varepsilon \operatorname{var}\mu \le \frac{\delta\mu(\tau_n)}{8} \le \frac{\mu(\tau_n)}{8}, \qquad \gamma \le \frac{\delta}{4}. \tag{4}$$

Существует номер n_0 такой, что

$$\sum_{i=n_0}^{N} |\mu(\tau_i)| \le \frac{\mu(\tau_n)}{20(1+\lambda_s)}. \tag{5}$$

Имеет место следующее представление: $\mu = \eta + \nu$, где η — безатомная мера, ν — атомарная мера.

По лемме 4 для точек τ_n, $t_n = \sigma(\tau_n)$ найдутся открытые окрестности W_1 и $\mathcal{W}_1$ соответственно, такие что

$$|\eta|(W_1) \le \frac{\mu(\tau_n)}{20(1+\lambda_s)}, \qquad |\eta|(\mathcal{W}_1 \backslash W_1) \le \frac{\mu(\tau_n)}{20(1+\lambda_s)}. \tag{6}$$

Считаем, без потери общности, что $W_1 = W$, $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$. В силу нормальности бикомпакта Q_1 и условия $(***)$ считаем, без потери общности, что для $k < n_0$, $\tau_k \notin W \cup \mathcal{W}$ или $k = n$. Тогда $\tau_n \notin (\mathcal{W} \backslash W)$ и

$$\nu(W \backslash \{\tau_n\}) \le \sum_{i=n_0}^{N} |\mu(\tau_i)| \le \frac{\mu(\tau_n)}{20(1+\lambda_s)}, \qquad \nu(\mathcal{W} \backslash W) \le \sum_{i=n_0}^{N} |\mu(\tau_i)| \le \frac{\mu(\tau_n)}{20(1+\lambda_s)}. \tag{7}$$

По "большой" лемме Урысона существует определенная и непрерывная на Q_1 функция g_1 со следующими свойствами:

$$g_1(q) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad q = \tau_n \\ 0 & \text{при} \quad q \in Q_1 \backslash W, \end{cases}$$

$0 \le g_1(q) \le 1$ при $q \in Q_1$.

Пусть для любой точки $q \in Q_1$

$$g(q) = \begin{cases} g_1(q) + \lambda(\sigma(q)) g_1(\sigma(q)) & \text{при} \quad \sigma(q) \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}; \\ g_1(q) & \text{при} \quad \sigma(q) \in \mathbf{Z}; \end{cases} \quad \text{в случаях I и III;}$$

и

$$g(q) = \begin{cases} \dfrac{g_1(q) + \lambda(\sigma(q))g_1(\sigma(q))}{2} & \text{при} \quad \sigma(q) \in Q_1 \setminus \mathbf{Z}; \\ \dfrac{g_1(q)}{2} & \text{при} \quad \sigma(q) \in \mathbf{Z}; \end{cases} \qquad \text{в случаях II и IV.}$$

По лемме 5 g непрерывна на Q_1. Легко заметить, что $\operatorname{supp} g \subset (W \cup \mathcal{W}) \cap Q_1$.

По теореме Титце — Урысона найдется функция $\widetilde{g}$ определенная и непрерывная на Q такая, что $\widetilde{g}\,|_{Q_1} = g$, $\|\widetilde{g}\|_{C(Q)} = \|g\|_{C(Q_1)}$.

Пусть $W_\varepsilon = \{q \in Q \colon \widetilde{g}(q) < \varepsilon\}$, $\widetilde{W} = W \cup \mathcal{W} \cup W_\varepsilon$. Имеем $Q_1 \subset \widetilde{W}$ и $\widetilde{W}$ открыто в Q. По "большой" лемме Урысона существует непрерывная функция f на Q такая, что

$$\forall q \in Q \setminus \widetilde{W} \qquad f(q) = 0; \qquad \forall q \in Q_1 \qquad f(q) = 1; \qquad \forall q \in Q \qquad 0 \le f(q) \le 1.$$

Пусть $\widehat{g}(q) = f(q) \cdot \widetilde{g}(q)$. Ясно, что $\widehat{g} \in C(Q)$. Имеем

$$\forall q \in Q_1 \qquad \widehat{g}(q) = g(q), \qquad \forall q \in Q \setminus \widetilde{W} \qquad \widehat{g}(q) = 0, \qquad \widehat{g}(\tau_n) = 1, \qquad \|\widehat{g}\| \le 1 + \lambda_s.$$

По лемме 5 получаем, что $\widehat{g} \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$ и для любого $q \in Q$ справедливо неравенство $|\gamma \widehat{g}(q)| \le \delta/2$.

Рассмотрим функцию

$$y(q) = \frac{x(q) + \gamma\,\widehat{g}(q)}{1+\varepsilon} \qquad \forall q \in Q.$$

Имеем $x, \widehat{g} \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$, следовательно, $y \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$.

Докажем, что $y \in V_{\sigma,\lambda}$. Для этого достаточно доказать следующее неравенство:

$$|y(q)| \le 1 \qquad \forall q \in Q. \tag{8}$$

При $q \in Q \setminus \widetilde{W}$ имеем $|y(q)| = |x(q)/(1+\varepsilon)| \le |x(q)| \le 1$, следовательно, выполняется неравенство (8).

Пусть $q \in W_\varepsilon$, тогда $\|\widehat{g}(q)\| \le \varepsilon$. Имеем

$$|y(q)| \le \frac{|x(q)| + |\gamma\,\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \le \frac{1 + \varepsilon\,\delta}{1+\varepsilon} \le \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1.$$

Остался случай, когда $q \in W \cap \mathcal{W}$.

Рассмотрим случай $q \in W \cap Q_1$. В случаях I и II в силу (2) имеем $|x(q)| \le 1 - \delta$, следовательно,

$$|y(q)| \le \frac{1 - \delta + \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \le \frac{1-\delta+\delta}{1+\varepsilon} \le 1.$$

В случае III в силу (0.2) $x(q) < 0$, кроме того, справедливо равенство $W \cap \mathcal{W} = \varnothing$, следовательно, $\sigma(q) \notin W$ и $g_1(\sigma(q)) = 0$. Тогда $\widehat{g}(q) = g(q) = g_1(q) \ge 0$. В случае IV справедливы неравенства $x(q) < 0$, $\lambda(\sigma(q)) > 0$, тогда в обоих случаях

$$|y(q)| = \left| \frac{|x(q)| - \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \right| \le \frac{\max\{|x(q)|, \gamma\,|\widehat{g}(q)|\}}{1+\varepsilon} \le \frac{1}{1+\varepsilon} \le 1.$$

Пусть $q \in (\mathcal{W} \cap Q_1) \setminus \mathbf{Z}$. В случаях I и II в силу (3) имеем $|x(q)| \le 1 - \delta$, тогда

$$|y(q)| \le \frac{|x(q)| + \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \le \frac{1 - \delta + \delta/2}{1+\varepsilon} \le 1.$$

В случае III $q \notin W$, следовательно, $g_1(q) = 0$, тогда $1 \ge \widehat{g}(q) = \lambda(\sigma(q))\,g_1(\sigma(q)) > 0$. В силу (3) $\operatorname{sign}\lambda(\sigma(q))\operatorname{sign}x(q) \le 0$. В случае IV имеем $x(q) < 0$, $\lambda(\sigma(q)) > 0$, следовательно, $\widehat{g}(q) > 0$, тогда в обоих случаях

$$|y(q)| = \left| \frac{|x(q)| - \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \right| \le \frac{\max\{|x(q)|, \gamma\,|\widehat{g}(q)|\}}{1+\varepsilon} \le \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Рассмотрим случай $q \in W \setminus Q_1$. В случаях I и II в силу (2) имеем $|x(q)| \le 1 - \delta$, следовательно,

$$|y(q)| \le \frac{|x(q)| + \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \le \frac{1-\delta+\delta}{1+\varepsilon} \le 1.$$

В случаях III и IV в силу (2) имеем

$$|y(q)| = \left|\frac{|x(q)| - \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon}\right| \le \frac{\max\{|x(q)|, \gamma\,|\widehat{g}(q)|\}}{1+\varepsilon} \le \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Пусть $q \in \mathcal{W} \setminus Q_1$. В случаях I и II в силу (3) имеем $|x(q)| \le 1 - \delta$, следовательно,

$$|y(q)| \le \frac{|x(q)| + \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon} \le \frac{1-\delta/2+\delta/2}{1+\varepsilon} \le 1.$$

В случаях III и IV в силу (3) имеем

$$|y(q)| = \left|\frac{|x(q)| - \gamma\,|\widehat{g}(q)|}{1+\varepsilon}\right| \le \frac{\max\{|x(q)|, \gamma\,|\widehat{g}(q)|\}}{1+\varepsilon} \le \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Неравенство (8) доказано.

Оценим величину $\langle \mu, y\rangle$. Имеем

$$\int\limits_W \widehat{g}\ d\mu = \int\limits_W \widehat{g}\ d\eta + \int\limits_{W\setminus\{\tau_n\}} \widehat{g}\ d\nu + \widehat{g}(\tau_n)\nu(\tau_n) \le (1+\lambda_s)\eta(W) + (1+\lambda_s)\nu(W\setminus\{\tau_n\}) + \mu(\tau_n),$$

тогда в силу (5) и (6)

$$\mu(\tau_n) - \frac{\mu(\tau_n)}{10} \le \int\limits_W \widehat{g}\ d\mu.$$

Аналогично в силу (6) и (7)

$$-\frac{\mu(\tau_n)}{10} \le \int\limits_{\mathcal{W}\setminus W} \widehat{g}\,d\mu.$$

Кроме того,

$$\left|\int\limits_{\mathcal{W}_\varepsilon\setminus W\setminus\mathcal{W}} \widehat{g} d\mu\right| \le \varepsilon \operatorname{var}\mu \le \frac{\mu(\tau_n)}{8}.$$

Тогда

$$\langle \mu, y\rangle = \frac{\langle \mu, x\rangle + \langle \mu, \widehat{g}\rangle\,\gamma}{1+\varepsilon},$$

$$\langle \mu, \widehat{g}\rangle = \int\limits_{Q\setminus\widetilde{W}} \widehat{g} d\mu + \int\limits_W \widehat{g} d\mu + \int\limits_{\mathcal{W}\setminus W} \widehat{g} d\mu + \int\limits_{\mathcal{W}_\varepsilon\setminus W\setminus\mathcal{W}} \widehat{g}\,d\mu = \int\limits_W \widehat{g} d\mu + \int\limits_{\mathcal{W}\setminus W} \widehat{g} d\mu + \int\limits_{\mathcal{W}_\varepsilon\setminus W\setminus\mathcal{W}} \widehat{g}\,d\mu.$$

Имеем

$$\int\limits_Q \widehat{g}\,d\mu \ge \mu(\tau_n) - \frac{\mu(\tau_n)}{5} - \frac{\mu(\tau_n)}{8} = \frac{27\mu(\tau_n)}{40},$$

тогда в силу (3) и неравенства $\operatorname{var}\mu \ge \langle \mu, x\rangle$ получаем

$$\langle \mu, y\rangle \ge \frac{\langle \mu, x\rangle + \dfrac{27\,\mu(\tau_n)}{40}\,\gamma}{1+\varepsilon} > \langle \mu, x\rangle.$$

Пришли к противоречию, следовательно, для любого номера n справедливо $x(\tau_n) = 1$.

Справедливость a) следует из b), если Q_1 заменить на $Q_1 \cup \{\tau_n\}$ и считать, что $\sigma(\tau_n) = \tau_n$, $\lambda(\tau_n) = 1$. $\square$

Лемма 7 [3]. *Пусть Q — бесконечный бикомпакт. Существуют счетные множества $A, B \subset Q$ такие, что $A \cap B = \varnothing$, $(\overline{A} \cap \overline{B}) \backslash (A \cup B) \neq \varnothing$.*

Лемма 8. *Пусть множества $T_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau_{2n+1} \subset Q \backslash \mathbf{Z}$, $T_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_{2n} \subset Q \backslash \mathbf{Z}$ и точка $\tau_0 \subset Q \backslash \mathbf{Z}$ такие, что $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $\tau_0 \in (\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2) \backslash (T_1 \cup T_2)$.*

Кроме того, пусть

a) в случае $\tau_0 \in Q_1$ выполняются условия: $\sigma(\tau_0) \notin T_1 \cup T_2$ и для любой точки $t \in (T_1 \cup T_2) \cap Q_1$ справедливо $\sigma(t) \notin (T_1 \cup T_2) \backslash \{t\}$ и $|\lambda(t)| \leq 1$;

b) в случае $\tau_0 \notin Q_1$ справедливо равенство $(T_1 \cup T_2) \cap Q_1 = \varnothing$.

Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = 30$, $\gamma = 10$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\tau_n}/2^n - \alpha \delta_{\tau_0}$, $\nu = \beta \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\tau_{2n+1}}/2^{2n+1} - \gamma \delta_{\tau_0}$.

Тогда $\|\mu\|_{C^*(Q)} = \|\mu\|_{(\Gamma_{\sigma,\lambda}(Q))^*} = 1 + \alpha$, $\mu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$, $\nu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$.

Доказательство. Докажем, что $\|\mu\|_{(\Gamma_{\sigma,\lambda}(Q))^*} = \|\mu\|_{C^*(Q)} = 1 + \alpha$. Для этого построим последовательность функций $z^{(k)} \in \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ таких, что $\|z^{(k)}\|_{C(Q)} = 1$, $\lim_{k \to \infty} \langle \mu, z^{(k)} \rangle = \sup_{z \in A_\pi} \langle \mu, z \rangle$.

Сначала построим последовательность $z^{(k)}$ в случае, когда $\tau_0 \notin Q_1$. Пусть $I_k = \bigcup_{n=1}^{k} \{\tau_n\}$. По условию $(T_1 \cup T_2) \cap Q_1 = \varnothing$. В силу нормальности Q найдутся открытые окрестности W_0, W_1 в Q такие, что $\tau_0 \in W_0$, $I_k \subset W_1$, $W_0 \cap Q_1 = \varnothing$, $W_0 \cap W_1 = \varnothing$, $W_1 \cap Q_1 = \varnothing$.

По лемме Урысона (см., например, [7, с. 208]) найдутся непрерывные на Q функции

$$z_1^{(k)}(q) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad q = \tau_0, \\ 0, & \text{если} \quad q \in Q \backslash W_0, \end{cases} \quad 0 \geq z_1^{(k)}(q) \geq -1 \ \text{ при } \ q \in W_0,$$

$$z_2^{(k)}(q) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q \in I_k, \\ 0, & \text{если} \quad q \in Q \backslash W_1, \end{cases} \quad 0 \leq z_2^{(k)}(q) \leq 1 \ \text{ при } \ q \in W_1.$$

Пусть $z^{(k)}(q) = z_1^{(k)}(q) + z_2^{(k)}(q)$ для $q \in Q$. Ясно, что $\|z^{(k)}\|_{C(Q)} = 1$, а так как для любого $q \in Q_1$ $z^{(k)}(q) = 0$, то $z^{(k)} \in \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$.

Рассмотрим случай, когда $\tau_0 \in Q_1$. Пусть k — произвольное натуральное число,

$$I_k = \bigcup_{n=1}^{k} \{\tau_n\}, \qquad A_k = (I_k \cap Q_1) \backslash \mathbf{F}, \qquad \mathbf{F}_k = I_k \cap \mathbf{F}, \qquad B_k = \sigma(A_k \cap Q_1), \qquad C_k = I_k \backslash Q_1.$$

(Возможно, что $B_k = A_k = \varnothing, \mathbf{F}_k = \varnothing$ или $C_k = \varnothing$.) Множества $A_k, \mathbf{F}_k, B_k$ и C_k замкнуты, так как конечны.

По условию имеем, что $\tau_0, \sigma(\tau_0) \notin A_k \cup \mathbf{F}_k \cup B_k \cup C_k$. В силу нормальности Q_1 и гомеоморфности отображения σ найдутся открытые окрестности W_0, W_1, W_2, W_3, W_4 в Q_1 такие, что

$$\tau_0 \in W_0, \qquad A_k \subset W_1, \qquad \mathbf{F}_k \subset W_2, \qquad B_k \subset W_3, \qquad \sigma(\tau_0) \in W_4;$$

$$\sigma(W_0) = W_4, \qquad \sigma(W_4) = W_0, \qquad \sigma(W_1) = W_3, \qquad \sigma(W_3) = W_1,$$

$$\overline{W_i} \cap \overline{W_j} = \varnothing \ \text{ при } \ i \neq j, \qquad i, j = 0, 1, 2, 3; \qquad \overline{W_0} \cap \mathbf{Z} = \varnothing, \qquad \overline{W_1} \cap \mathbf{Z} = \varnothing, \qquad \overline{W_2} \cap \mathbf{Z} = \varnothing.$$

(Полагаем: если $A_k = \varnothing$, то $W_1 = \varnothing$, $W_3 = \varnothing$; если $\mathbf{F}_k = \varnothing$, то $W_2 = \varnothing$, и условимся, что $\sigma(\varnothing) = \varnothing$.)

В силу гомеоморфности отображения σ и того, что для любого $q \in Q_1$ справедливо равенство $\sigma(q) = q$, множество $\widetilde{W}_2 = \sigma(W_2) \cap W_2$ — открытое множество в Q_1 такое, что $\mathbf{F}_k \subset \widetilde{W}_2 = \sigma(\widetilde{W}_2) \subset W_2$. Считаем, без потери общности, что $\sigma(W_2) = W_2$.

Если $\tau_0 \neq \sigma(\tau_0)$, то считаем, без потери общности, что $\overline{W}_0 \cap \overline{W}_4 = \varnothing$. Если $\tau_0 = \sigma(\tau_0)$, то $\sigma(W_0 \cup W_4) = W_0 \cup W_4$, поэтому считаем, без потери общности, что $W_0 = W_4$.

По лемме Урысона найдутся непрерывные на Q_1 функции

$$z_1^{(k)}(q) = \frac{1}{\max\{1, |\lambda(q)|\}} \cdot \begin{cases} -1, & \text{если} \quad q = \tau_0, \\ 0, & \text{если} \quad q \in Q_1 \backslash W_0, \end{cases} \quad 0 \geq z_1^{(k)}(q) \geq -\frac{1}{\max\{1, |\lambda(q)|\}} \ \text{при } q \in W_0.$$

$$z_2(q)^{(k)} = \frac{1}{\max\{1, |\lambda(q)|\}} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q \in A_k, \\ 0, & \text{если} \quad q \in Q_1 \backslash W_1, \end{cases} \quad 0 \le z_2^{(k)}(q) \le \frac{1}{\max\{1, |\lambda(q)|\}} \text{ при } q \in W_1.$$

$$z_3^{(k)}(q) = \frac{1}{2\max\{1, |\lambda(q)|\}} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q \in \mathbf{F}_k, \\ 0, & \text{если} \quad q \in Q_1 \backslash W_2, \end{cases} \quad 0 \le z_3^{(k)}(q) \le \frac{1}{2\max\{1, |\lambda(q)|\}} \text{ при } q \in W_2.$$

Пусть для $i = 1, 2, 3$

$$\widehat{z}_i^{(k)}(q) = \begin{cases} z_i^{(k)}(q) + \lambda(\sigma(q))\, z_i^{(k)}(\sigma(q)) & \text{при} \quad \sigma(q) \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}, \\ z_i(q) & \text{при} \quad \sigma(q) \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

По лемме 5 для $i = 1, 2, 3$ $\widehat{z}_i^{(k)} \in \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q_1)$. Ясно, что для любой точки $q \in \mathbf{F}_k$ $\widehat{z}_3^{(k)}(q) = z_3^{(k)}(q)$, $\|\widehat{z}_3^{(k)}\| \le 1$.

Пусть $\eta = 1$ при $\tau_0 \ne \sigma(\tau_0)$ и $\eta = 1/2$ при $\tau_0 = \sigma(\tau_0)$, тогда $z^{(k)}(q) = \eta \widehat{z}_1^{(k)}(q) + \widehat{z}_2^{(k)}(q) + \widehat{z}_3^{(k)}(q)$ для $q \in Q_1$. Докажем, что $\|z^{(k)}\|_{C(Q_1)} \le 1$.

Имеем $\operatorname{supp} \widehat{z}_1^{(k)} \subset W_0 \cup W_4$, $\operatorname{supp} \widehat{z}_2^{(k)} \subset W_1 \cup W_3$, $\operatorname{supp} \widehat{z}_3^{(k)} \subset W_2$, $\operatorname{supp} z^{(k)} \subset W_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4$. Если $q \notin W_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4$, то $z(q) = 0$.

Если $q \in W_0$, то в случае $\tau_0 \ne \sigma(\tau_0)$ получаем $\sigma(q) \in W_4$ и $\widehat{z}_2^{(k)}(q) = \widehat{z}_3^{(k)}(q) = z_1^{(k)}(\sigma(q)) = 0$, следовательно, $|z^{(k)}(q)| = |\widehat{z}_1^{(k)}(q)| = |z_1^{(k)}(q)| \le 1$. Если $q \in W_0$ и $\tau_0 = \sigma(\tau_0)$, то имеем $|\widehat{z}_2^{(k)}(q)| = |\widehat{z}_3^{(k)}(q)| = 0$, тогда $q, \sigma(q) \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}$ и

$$|z^{(k)}(q)| \le \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{|\lambda(\sigma(q))|}{\max\{1, |\lambda(\sigma(q))|\}}\Big) \le 1.$$

Если $q \in W_1$, то $\sigma(q) \in W_3$ и $\widehat{z}_1^{(k)}(q) = \widehat{z}_3^{(k)}(q) = z_2^{(k)}(\sigma(q)) = 0$, следовательно, $|z^{(k)}(q)| = |\widehat{z}_2^{(k)}(q)| = |z_2^{(k)}(q)| \le 1$.

Если $q \in W_2$, то $\sigma(q) \in W_2$, $\widehat{z}_1^{(k)}(q) = \widehat{z}_2^{(k)}(q) = 0$, тогда

$$|z^{(k)}(q)| = \begin{cases} |z_3^{(k)}(q) + \lambda(\sigma(q))\, z_3^{(k)}(\sigma(q))| & \text{при} \quad \sigma(q) \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}, \\ |z_3^{(k)}(q)| & \text{при} \quad \sigma(q) \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Имеем $q, \sigma(q) \in Q_1 \backslash \mathbf{Z}$, тогда

$$|z^{(k)}(q)| \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\lambda(\sigma(q))|}{\max\{1, |\lambda(\sigma(q))|\}}\right) \le 1.$$

Если $q \in W_3$, то $\sigma(q) \in W_1 \subset Q_1 \backslash \mathbf{Z}$, тогда $\widehat{z}_1^{(k)}(q) = \widehat{z}_3^{(k)}(q) = z_2^{(k)}(q) = 0$, следовательно,

$$|z^{(k)}(q)| = |\widehat{z}_2^{(k)}(q)| = |\lambda(\sigma(q))| \cdot |z_2^{(k)}(\sigma(q))| = \frac{|\lambda(\sigma(q))|}{\max\{1, |\lambda(\sigma(q))|\}} \le 1.$$

Остался случай, когда $q \in W_4$ и $\tau_0 \ne \sigma(\tau_0)$. Имеем $\sigma(q) \in W_0 \subset Q_1 \backslash \mathbf{Z}$, тогда $z_1^{(k)}(q) = \widehat{z}_2^{(k)}(q) = \widehat{z}_3^{(k)}(q) = 0$, следовательно,

$$|z(q)| = |\lambda(\sigma(q))\, z_1^{(k)}(\sigma(q))| \ \ \frac{|\lambda(\sigma(q))|}{\max\{1, |\lambda(\sigma(q))|\}} \le 1.$$

Итак, $\|z^{(k)}\|_{C(Q_1)} \le 1$. Так как $|\lambda(\tau_n)| \le 1$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\bigcup_{n=1}^{k} \{\tau_n\} \subset A_k \cup \mathbf{F}_k \cup C_k$, то $z^{(k)}(\tau_n) = 1$ при $n \ge 1$ и $z^{(k)}(\tau_0) = -1$. По теореме Урысона — Титце (см., например, [7, с. 211]) функцию z непрерывно продолжим на бикомпакт Q с сохранением нормы и равную 1 на C_k и -1 в точке τ_0 (в случае, если $\tau_0 \notin Q_1$). Ясно, что $z^{(k)} \in \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$.

Нетрудно заметить, что $\|\mu\|_{C^*(Q)} = 1+\alpha$. Кроме того, имеем

$$\mu(z^{(k)}) = -\alpha\, z^{(k)}(\tau_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{(k)}(\tau_n)}{2^n} \ge \alpha + \sum_{n=1}^{k} \frac{z^{(k)}(\tau_n)}{2^n} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ge \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^k} + \alpha,$$

следовательно, $\|\mu\|_{(\Gamma_{\sigma,\lambda}(Q))^*} = \|\mu\|_{C^*(Q)} = 1+\alpha$. По теореме A $\mu \notin \Sigma(V_{C(Q)})$, следовательно, $\mu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$, аналогично $\nu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$.

Предложение 1. *Пусть последовательности*

$$T_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tau_{2n+1} \subset Q\backslash \mathbf{Z}, \qquad T_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_{2n} \subset Q\backslash \mathbf{Z}$$

и точка $\tau_0 \subset Q\backslash\mathbf{Z}$ такие, что выполняются следующие условия:

a) $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $\tau_0 \in (\overline{T_1} \cap \overline{T_2})\backslash(T_1 \cup T_2)$;

b) если $\tau_0 \in Q_1$, то $\sigma(\tau_0) \notin T_1 \cup T_2$;

c) для любого $t \in (T_1 \cup T_2) \cap Q_1$ $\sigma(t) \notin (T_1\cup T_2)\backslash\{t\}$;

d) для любого $t \in (T_1 \cup T_2) \cap Q_1$ $|\lambda(t)| \le 1$.

В пространстве $X = \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для X.

Доказательство. Пусть $\alpha = 1/2$, $\beta = 30$, $\gamma = 10$. Рассмотрим меры из $C^*(Q)$:

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{\tau_n}}{2^n} - \alpha\delta_{\tau_0}, \qquad \nu = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{\tau_{2n+1}}}{2^{2n+1}} - \gamma\delta_{\tau_0}.$$

По лемме 8 $\|\mu\|_{C^*(Q)} = \|\mu\|_{\Gamma^*_{\sigma,\lambda}} = 1+\alpha$, $\mu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$, $\nu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$. Пусть $A_1 = \mu + (V_{\sigma,\lambda}(0, 1/(4-\|\mu\|)))^{\pi} \subset X^*$, $A = w^*\text{–}\operatorname{cl}\operatorname{conv}(A_1 \cup \{\nu\} \cup \{-\nu\}) \subset X^*$.

Множества A_1 и A замкнуты в w^*-топологии пространства X^*. Положим $A(y) = \sup\{f(y)\colon f \in A\}$, $A_1(y) = \sup\{f(y)\colon f \in A_1\}$, $y \in X$. Ясно, что $A(y) = \max\{A_1(y), |\nu(y)|\}$.

В силу неравенства $\|\mu\| < 4 - \|\mu\|$ получаем, что $0 \in \operatorname{int} A_1 \subset \operatorname{int} A$.

По теореме о биполяре $A_\pi^\pi = A$. A ограниченно, $0 \in \operatorname{int} A$, следовательно, множество A_π есть выпуклое замкнутое ограниченное тело в $X = \Gamma_{\sigma,\lambda}$. Множество A ограниченно, следовательно, $0 \in \operatorname{int} A_\pi$.

Покажем, что A_π антипроксиминально в X. Допустим противное: найдутся точки x и y такие, что $x \in X\backslash A_\pi$, $y \in P_{A_\pi}(x)$. По теореме Хана — Банаха найдется функционал $\zeta \in S_{X^*}(0,1)$, разделяющий множество A_π и шар $V_Y(x, xy)$. Имеем $\zeta \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$.

Имеем $y \in A_\pi$, $\zeta(y) = \sup\{\zeta(z)\colon z \in A_\pi\}$. Тогда $y \in \partial A_\pi$, что равносильно $\sup\{\xi(y)\colon \xi \in A_\pi^\pi\} = \sup\{\xi(y)\colon \xi \in A\} = 1$. Можно считать, что $\zeta \in \partial A_\pi^\pi$; это равносильно $\sup\{\zeta(z)\colon z \in A_\pi\} = 1$. Таким образом, $\zeta(y) = A(y) = 1$. Так как $\zeta \in A_\pi^\pi = A$, то

$$\zeta = \alpha_1\psi + \beta_1\nu, \tag{9}$$

где $\psi \in A_1, 0 \le \alpha_1$, $\alpha_1 + |\beta_1| = 1$.

Следующее равенство очевидно:

$$A_1(y) = \sup\Big\{f(y)\colon f \in \Big(V_{\sigma,\lambda}\Big(0, \frac{1}{4-\|\mu\|}\Big)\Big)^{\pi}\Big\} + \mu(y) = \|y\|(3-\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y(\tau_n)}{2^n} - \alpha y(\tau_0).$$

Кроме того, справедливы неравенства $4\|y\| \ge A_1(y) \ge \|y\|(2-2\alpha) = \|y\| > 0$.

Рассмотрим случай $\tau_0 \in \operatorname{crit} y$ ($\|y\| > 0$ ввиду $y \in \partial A_\pi$ и $0 \in \operatorname{int} A_\pi$). Пусть $y(\tau_0) = \rho\|y\|$, где $|\rho| = 1$. Имеем

$$-\rho\nu(y) = -\rho\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y(\tau_{2n+1})}{2^{2n+1}} + \rho\gamma y(\tau_0) = -\rho\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y(\tau_{2n+1})}{2^{2n+1}} + \gamma\|y\| \ge \gamma\|y\| - \beta\|y\|/6$$

$$= 5\|y\| \geq \|y\|(3-2\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y(\tau_n)}{2^n} + \|y\| = A_1(y) + \|y\|,$$

следовательно, $-\rho\nu(y) \geq A_1(y) + \|y\| > \|y\|$, $\rho\nu(y) \leq -\|y\|$. Тогда $A(y) = -\rho\nu(y) > A_1(y) > 0 > \rho\nu(y)$, ввиду (0.8) $\zeta = -\rho\nu$ и $\zeta \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$, противоречие.

Пусть теперь $\tau_0 \notin$ crit y, тогда $|y(\tau_0)| < \|y\|$. Так как y — непрерывная функция, то существуют открытое множество W и некоторое число $\varepsilon > 0$ такие, что $\tau_0 \in W$ и $|y(t)| + \varepsilon/2 < \|y\|$ для любого $t \in W$.

Возможны следующие 5 случаев:

1) $A(y) > A_1(y)$, $\nu(y) > A_1(y)$;
2) $A(y) > A_1(y)$, $-\nu(y) > A_1(y)$;
3) $A(y) = A_1(y) = \nu(y)$, $A_1(y) > -\nu(y)$;
4) $A(y) = A_1(y) = -\nu(y)$, $A_1(y) > \nu(y)$;
5) $A(y) = A_1(y)$, $A_1(y) > \nu(y)$, $A_1(y) > -\nu(y)$.

В случаях 1) и 2) можем считать, без потери общности, что для $|\rho| = 1$ имеем $-\rho\nu(y) > A_1(y)$, тогда $\rho\nu(y) < 0, A(y) = -\rho\nu(y)$ и, следовательно, как и выше, $\zeta = -\rho\nu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$.

Остаются случаи 3), 4), 5), тогда $A(y) = A_1(y)$.

У нас

$$\zeta(y) = A(y) = A_1(y) = \|y\|(3-\alpha) + \mu(y)$$
$$= \psi(y) = (\psi - \mu)(y) + \mu(y), \text{ где } \psi \in A_1, \ \psi - \mu \in \left(V_{\sigma,\lambda}\left(0, 1/(4 - \|\mu\|)\right)\right)^{\pi},$$
$$(\psi - \mu)(y) = \|y\|(3-\alpha) = \sup\{\eta(y) \colon \eta \in A_1 - \mu\}.$$

Имеем $y \in V_Y(x, xy)$, $V_Y(x, xy) \cup_X A_\pi = \varnothing$, следовательно, по теореме Хана — Банаха найдется линейный функционал $\varsigma \in C^*(Q)$ такой, что $\|\varsigma\| = \|\psi - \mu\| = 3 - \alpha$, $\varsigma|_X = \psi - \mu$ и $\varsigma(y) = \|y\|(3-\alpha)$.

По лемме 3 найдется функционал $\varsigma_1 \in C^*(Q)$ такой, что $\sigma(U(\varsigma_1) \cap (Q_1 \cap \mathbf{Z})) \cap U(\varsigma_1) \cap (Q_1 \cap \mathbf{Z}) \subset \mathbf{F}$, $\varsigma|_X = \varsigma_1|_X$ и для любого $q \in U(\varsigma_1) \cap Q_1$ справедливо неравенство $|\lambda(q)| \leq 1$. Имеем $\varsigma_1 \notin \Gamma^{\perp}_{\sigma,\lambda}$, $\langle \varsigma_1, y \rangle = \sup\{\langle \varsigma_1, z \rangle \colon z \in V_{\sigma,\lambda}\}$. По лемме 6 $U(\varsigma) \cap Q_1 \subset \operatorname{crit} y$, $U(\psi - \mu) \cap W = \varnothing$, следовательно, для всякого борелевского множества $E \subset W \cap U(\mu)$ справедливо $\psi(E) = \mu(E)$.

В случае 5) аналогично предыдущему $\zeta = \psi$. Тогда для всякого борелевского множества $E \subset W \cap U(\mu)$

$$\zeta(E) = \mu(E), \qquad \tau_0 \in W \cap U^+(\mu) \cap U^-(\mu) = W \cap U^+(\zeta) \cap U^-(\zeta),$$

и по теореме А $\zeta \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$.

Рассмотрим случай 4), тогда в (9) $\beta_1 \geq 0$, а для борелевского множества $E \subset W \cap U(\mu)$, $\zeta(E) = a_1\mu(E) + \beta_1\nu(E)$. Следовательно, $\zeta\{\tau_0\} < 0$, $\zeta\{\tau_{2n}\} > 0$ для бесконечного числа номеров n $\zeta \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$.

Рассмотрим случай 5), тогда в (9) $\beta_1 \leq 0$, а для $E \subset W \cap U(\mu)$ справедливо

$$\zeta(E) = a_1\mu(E) + \beta_1\nu(E) = a_1\mu(E) - (1 - a_1)\nu(E).$$

У нас $\tau_0 \in \overline{T_1} \cap \overline{T_2}$, следовательно, τ_0 — предельная точка для каждого из двух множеств $D_1 = T_1 \cap W \cap U(\mu) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_{2n_i+1}$ и $D_2 = T_2 \cap W \cap U(\mu) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_{2m_i}$. Имеем

$$\zeta\{\tau_0\} = -a_1\alpha + (1 - a_1)\gamma = \frac{20 - 21a_1}{2}, \qquad \zeta\{\tau_{2m_k}\} = a_1\mu\{\tau_{2m_k}\} = \frac{a_1}{2^{2m_k}} > 0,$$

$$\zeta\{\tau_{2n_i+1}\} = \frac{a_1 - (1 - a_1)\beta}{2^{2n_i+1}} = \frac{31a_1 - 30}{2^{2n_i+1}}.$$

При $\alpha_1 = 0$ имеем $\beta = -1$, $\zeta = -\nu \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda})$. При любом $\alpha_1 \in (0, 1]$ $\tau_0 \in \overline{D_2} \subset S^+(\zeta)$. Если окажется, что $\alpha_1 < 30/31$, то $\tau_0 \in \overline{D_1} \subset S^-(\zeta)$; при $\alpha_1 > 20/21$ $\tau_0 \in U^-(\zeta)$. Таким образом, при любом $\alpha_1 \in (0, 1]$ имеем $\tau_0 \in U^+(\zeta) \cap S^-(\zeta)$ и $\zeta \notin \Sigma(V_{X^*}(0, 1))$, противоречие, A_π — антипроксиминальное множество. $\square$

Предложение 2. *Пусть выполняются условия* $(*)$, *пусть существуют последовательность* L *и точка* $\tau_0 \in \mathbf{Z}$ *такие, что* $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n \subset Q \backslash \mathbf{Z}$, $\tau_0 \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n}$, $\forall \tau_n \in Q_1 \ |\lambda(\tau_n)| \leq 1$. *В пространстве* $X = \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ *существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разобьем последовательность L на два множества L_1 и L_2 так, чтобы для любой точки $\tau \in L_1 \cap Q_1$ выполнялось $\sigma(\tau) \notin L_1 \backslash \mathbf{F}$ и для любой точки $\tau \in L_2 \cap Q_1$ выполнялось $\sigma(\tau) \notin L_2 \backslash \mathbf{F}$. Так как $\tau_0 \in \overline{L} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$, то считаем, без потери общности, что $L = L_1$.

Рассмотрим в $C^*(Q)$ множество $A = (V_{\sigma,\lambda})^{\pi} + \nu$, где $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^{n+1} \delta_{\tau_n}$. Ясно, что $0 \in \operatorname{int} A$, множество A выпукло и w^* — замкнуто, множество $(V_{\sigma,\lambda})^{\pi}$ содержит аннулятор в $C^*(Q)$ подпространства $\Gamma_{\sigma,\lambda}$, следовательно, $A_{\pi} \subset \Gamma_{\sigma,\lambda}$ по теореме о биполяре $A_{\pi}^{\pi} = A$. По лемме 2 множество A_{π} есть выпуклое замкнутое ограниченное тело в $\Gamma_{\sigma,\lambda}$.

Докажем, что A_{π} антипроксиминально в $\Gamma_{\sigma,\lambda}$. Допустим противное: для $z \in \Gamma_{\sigma,\lambda} \backslash A_{\pi}$, $x \in P_{A_{\pi}}(z)$. По теореме Хана — Банаха найдется мера $\mu \in C^*(Q)$, отделяющая множество A_{π} от шара $V_Y(z, zx)$ пространства Y. Справедливо включение $\mu \in \Sigma(V_Y(z, zx))$, следовательно, $\mu \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \Gamma_{\sigma,\lambda}^{\perp}$. Считаем, что $1 = \mu(x) = \sup\{\mu(z) \colon z \in A_{\pi}\}$. Из определений поляры и биполяры имеем $1 = \mu(x) = \sup\{f(x) \colon f \in A\}$, тогда

$$\sup\{f(x) \colon f \in (V_{\sigma,\lambda})^{\pi}\} = \sup\{f(x) \colon f \in A - \nu\} = \mu(x) - \nu(x) = (\mu - \nu)(x),$$

а так как $\mu - \nu \in A - \nu = (V_{\sigma,\lambda})^{\pi}$, то $\mu - \nu \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \{0\}$, $\mu \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \{0\} + \nu$.

Таким образом, $\mu = \xi_1 + \nu$, где $\xi_1 \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \{0\}$. По лемме 3 считаем, что $\sigma(U(\xi_1) \cap Q_1) \cap (U(\xi_1) \cap Q_1) \subset \mathbf{F}$ и для любого $q \in U(\xi_1) \cap Q_1$ справедливо неравенство $|\lambda(q)| \leq 1$.

Рассмотрим множество $\mathcal{J}$ номеров n таких, что $\sigma(\tau_n) \in U(\xi_1)$. Так как для любой точки τ_n справедливо неравенство $|\lambda(\tau_n)| \leq 1$ и для любого $q \in U(\xi_1) \cap Q_1$ справедливо неравенство $|\lambda(q)| \leq 1$, то $|\lambda(\tau_n)| = |\lambda(\sigma(\tau_n))| = 1$.

Пусть

$$\gamma = \sum_{n \in \mathcal{J}} \xi_1(\tau_n) \cdot (\delta_{\tau_n} - \lambda(\sigma(\tau_n))\, \delta_{\sigma(\tau_n)}), \qquad \xi_2 = \xi_1 - \gamma, \qquad \mu_2 = \xi_2 + \nu.$$

Имеем $\gamma \in (\Gamma_{\sigma,\lambda})^{\perp}$, следовательно, $\xi_2 \mid_{\Gamma_{\sigma,\lambda}} = \xi_1 \mid_{\Gamma_{\sigma,\lambda}}$, $\xi_2(\sigma(\tau_n)) = 0$, следовательно, $\sigma(U(\xi_2) \cap Q_1) \cap (U(\xi_2) \cap Q_1) \subset \mathbf{F}$ и $\|\xi_2\|_{\Gamma_{\sigma,\lambda}^*} = \|\xi_1\|_{\Gamma_{\sigma,\lambda}^*}$.

Нетрудно заметить, что при этом сохраняются включения $\mu_2 \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) + \nu$, $\xi_2 \in \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \Gamma_{\sigma,\lambda}^{\perp}$ и выполняется условие $\sigma(U(\mu_2) \cap Q_1) \cap (U(\mu_2) \cap Q_1) \subset \mathbf{F}$. По лемме 5 или $\mu_2 \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \Gamma_{\sigma,\lambda}^{\perp}$, или $\xi_2 \notin \Sigma(V_{\sigma,\lambda}) \backslash \Gamma_{\sigma,\lambda}^{\perp}$, противоречие. □

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $(*)$, $\dim \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q) = \infty$. *В пространстве* $X = \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ *существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для* X.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное: в пространстве X нет ограниченного замкнутого выпуклого тела, которое является антипроксиминальным множеством для X.

Так как для любого $q \in \mathbf{Z}$ для любой функции $f \in \Gamma_{\sigma,\lambda}$ справедливо $f(q) = 0$, то $Q \backslash \mathbf{Z}$ бесконечно.

Докажем, что все предельные точки бикомпакта Q принадлежат бикомпакту Q_1. Если существует предельная для Q точка $\tau \notin Q_1$, то найдется замкнутая бесконечная окрестность Q_2 точки τ такая, что $Q_2 \cap Q_1 = \varnothing$. По лемме 7 найдутся множества $T_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_{2n-1} \subset Q_2$, $T_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_{2n} \subset Q_2$ и точка $\tau_0 \in Q_2$ такие, что $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, $\tau_0 \in (\overline{T_1} \cap \overline{T_2}) \backslash (T_1 \cup T_2)$. Так как $Q_2 \cap Q_1 = \varnothing$, то по предложению 1 в пространстве $\Gamma_{\sigma,\lambda}$ существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для $\Gamma_{\sigma,\lambda}$.

Итак, все предельные точки бикомпакта Q принадлежат бикомпакту Q_1.

Докажем, что множество $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$ конечно. Допустим, что множество $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$ бесконечно. Множество $\mathbf{F}$ замкнуто, поскольку σ — гомеоморфизм, множество $\mathbf{Z}$ замкнуто, так как $\Gamma_{\sigma,\lambda}\subset C(Q)$. Если множество $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$ бесконечно, то найдется предельная точка τ для $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$, ясно, что $\tau\in\mathbf{F}$. В случае $\tau\in\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$ найдется замкнутая окрестность W точки τ такая, что $W\cap\mathbf{Z}=\varnothing$. По лемме 7 для бесконечного бикомпакта $Q_3:=W\cap\mathbf{F}$ существуют множества

$$T_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}\tau_{2n-1}\subset Q_3,\qquad T_2=\bigcup_{n=1}^{\infty}\tau_{2n}\subset Q_3$$

и точка $\tau_0\in Q_3$ такие, что $T_1\cap T_2=\varnothing$, $\tau_0\in(\overline{T_1}\cap\overline{T_2})\backslash(T_1\cup T_2)$. Так как $\overline{T_1}\cup\overline{T_2}\subset Q_3\subset\mathbf{F}$, $\tau_0\in Q_3\subset\mathbf{F},\sigma(\tau_0)=\tau_0\notin\ T_1\cup T_2$, то

$$\forall q\in(T_1\cup T_2)\cap Q_1\qquad\sigma(q)=q\notin(T_1\cup T_2)\backslash\{q\},\qquad\forall q\in(T_1\cup T_2)\cap Q_1\qquad\lambda(q)=1.$$

По предложению 1 выполнено утверждение теоремы 1. Пусть теперь все предельные точки множества $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$ принадлежат $\mathbf{Z}$. Возьмем произвольную последовательность L из множества $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$, у последовательности существует предельная точка τ, которая по условию обязана принадлежать множеству $\mathbf{Z}$, $L\subset\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$, следовательно, для любой точки $t\in L$ $\lambda(t)=1$. По предложению 2 выполнено утверждение теоремы 1.

Итак, множество $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$ конечно.

Докажем, что множество $Q_1\backslash\mathbf{Z}$ конечно. Если $Q_1\backslash\mathbf{Z}$ бесконечно, то бесконечно и множество $A:=\{q\in Q_1\backslash\mathbf{Z}\colon 1\geq|\lambda(q)|\}$. Возьмем последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}:=T\subset A$ такую, что для каждого номера n выполняется одно из двух условий: или $\sigma(t_n)\notin T$, или $\sigma(t_n)=t_n$.

В случае, когда последовательность T имеет предельную точку $\tau\in\mathbf{Z}$, выполняются условия предложения 2 и в пространстве $\Gamma_{\sigma,\lambda}$ существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для $\Gamma_{\sigma,\lambda}$. Считаем, что $D:=\overline{\{t_n\}_{n=1}^{\infty}}\subset Q_1\backslash\mathbf{Z}$. Так как λ непрерывна на $Q_1\backslash\mathbf{Z}$, то для любой точки $q\in D$ справедливо неравенство $|\lambda(q)|\leq 1$.

Если все предельные точки множества A принадлежат $\mathbf{F}\backslash\mathbf{Z}$, то A имеет конечное число предельных точек и мы можем считать, что $t_n\to t\in\mathbf{F}\cap D$, $\sigma(t)\notin T$ и для любого номера n справедливо соотношение $\sigma(t_n)\notin T$. Тогда по предложению 1 выполняется утверждение теоремы 1. Считаем, что существует предельная точка τ' множества D такая, что $\tau'\notin\mathbf{F}\cup\mathbf{Z}$.

Тогда существует замкнутая окрестность W точки τ' такая, что $W\cap(\mathbf{F}\cup\mathbf{Z})=\varnothing$ и $\sigma(W\cap D)\cap(W\cap D)=\varnothing$. Для любого счетного (бесконечного) множества $L\subset(D\backslash\mathbf{Z})\cap W$ справедливо $\overline{L}\cap\mathbf{Z}=\varnothing$.

Множество $(Q_1\backslash\mathbf{Z})\cap W$ замкнуто и бесконечно, следовательно, найдется счетное множество L такое, что $\overline{L}\subset D\backslash\mathbf{Z}$. Имеем $\sigma(D\cap W)\cap(D\cap W)=\varnothing$. По лемме 6 найдутся множества $T_1=\bigcup_{n=0}^{\infty}\tau_{2n+1}\subset Q_4\subset D\backslash\mathbf{Z}$, $T_2=\bigcup_{n=1}^{\infty}\tau_{2n}\subset Q_4\subset D\backslash\mathbf{Z}$ и точка $\tau_0\subset Q_4\subset D\backslash\mathbf{Z}$ такие, что

$$T_1\cap T_2=\varnothing,\qquad\tau_0\in(\overline{T_1}\cap\overline{T_2})\backslash(T_1\cup T_2),\qquad\forall t\in T_1\cup T_2\qquad 2\sigma(t)\notin T_1\cup T_2.$$

Для любого номера n справедливо неравенство $|\lambda(\tau_n)|\leq 1$. По предложению 1 выполняется утверждение теоремы 1. Итак, множество $Q_1\backslash\mathbf{Z}$ конечно.

Множество $Q\backslash Q_1$ бесконечно, следовательно, можно выбрать последовательность, состоящую из попарно различных точек и принадлежащую множеству $Q\backslash Q_1$. Все предельные точки последовательности принадлежат Q_1, следовательно, или найдется предельная точка, принадлежащая множеству $\mathbf{Z}$, или множество предельных точек последовательности конечно. В первом случае по предложению 2 выполнено утверждение теоремы 1, во втором случае можно считать, что последовательность сходится к предельной точке и, применяя предложение 1, получим утверждение теоремы 1. $\square$

О п р е д е л е н и е [4]. Пусть σ — гомеоморфное отображение Q на себя, для которого $\sigma^2(s)=s$ при любом $s\in Q$, через $C_\sigma(Q)$ будем обозначать подпространство, образованное теми функциями из $C(S)$, которые удовлетворяют условию $x(\sigma(s))=-x(s)$ для всех $s\in Q$.

Банахово пространство B обладает свойством $\mathcal{A}$ (Аренса — Келли), если для любого семейства Γ максимальных выпуклых подмножеств поверхности единичного шара V, удовлетворяющего условию $\bigcap_{C\in\Gamma} C = \varnothing$, существуют сети $(C_n, n \in \Delta)$ и $(C'_n, n \in \Delta)$ его элементов такие, что для каждого $b \in V$

$$\lim_{n\in\Delta} (d(b, C_n) + d(b, C'_n)) = 2.$$

Банахово пространство B обладает свойством $\mathcal{A}'$, если в каждом семействе Ω максимальных клиньев $W(f)$, удовлетворяющих условию $\bigcap_{W\in\Omega} W = \{0\}$, существуют сети $(W_n, n \in \Delta)$ и $(W'_n, n \in \Delta)$ такие, что для каждого $b \in B$

$$\lim_{n\in\Delta}(\varphi_{W_n}(b) + \varphi_{W'_n}(b)) = 0.$$

Следствие 1. *Пусть Q — бесконечный бикомпакт, $Q_1 \subset Q$ — бикомпакт, σ — гомеоморфное отображение Q_1 на себя, для которого $\sigma^2(s) = s$ $\forall s \in Q_1$, $\forall q \in Q_1$, $\lambda(q) \neq 1$, $\dim \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q) = \infty$. В пространстве $X = \Gamma_{\sigma,\lambda}(Q)$ существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий $\forall \tau \in Q_1$, $\lambda(\tau) \neq 1$, $\sigma(\tau) = \tau$ следует, что $\tau \in \mathbf{Z}$, следовательно, $\mathbf{F} \subset \mathbf{Z}$. Тогда утверждение следует по теореме 1. □

Следствие 2. *Пусть Q — бесконечный бикомпакт, σ — гомеоморфное отображение его на себя, для которого $\sigma^2(s) = s$ при любом $s \in Q$, $\dim C_\sigma(Q) = \infty$. В пространстве $X = C_\sigma(Q)$ существует ограниченное замкнутое выпуклое тело, которое является антипроксиминальным множеством для X.*

Следствие 3. *В банаховом пространстве, удовлетворяющем условию Аренса — Келли, существует выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело.*

Доказательство получаем из теоремы так как пространство будет изомерически изоморфно пространству $C_\sigma(Q)$, где Q — некоторый бикомпакт.

Следствие 4. *В банаховом пространстве, удовлетворяющем условию $\mathcal{A}'$, существует выпуклое замкнутое ограниченное антипроксиминальное тело.*

Доказательство получаем из теоремы, так как пространство будет изомерически изоморфно пространству $C_\sigma(Q)$, где Q — некоторый бикомпакт. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cobzaş S.** Antiproximinal sets in Banach spaces // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 1999. Vol. 40, no. 2. P. 43–52.
2. **Blatter J.** Grothendieck spaces in approximation theory. Providence. R. I, 1972. 121 p. (Memoirs of the Amer. Math. Soc. № 120.)
3. **Балаганский В.С.** Антипроксиминальнальные множества в пространствах непрерывных функций // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 643–657.
4. **Дэй М.М.** Нормированные линейные пространства. М.: ИЛ, 1961. 233 с.
5. **Singer I.** Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Grundlehren math. Wiss. B. 171. Berlin:Springer-Verlag, 1970. 415 p.
6. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962. Т. 1. 895 с.
7. **Александрян Р.А., Мирзахарян Э.А.** Общая топология. М.: “Высшая школа”, 1979. 336 с.

Балаганский Владимир Сергеевич Поступила 04.04.2012
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Том 18 № 4 2012

УДК 519.62

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ, I[1]

Н. А. Барабошкина, В. М. Плещев, Н. И. Черных

Получена формула восстановления электромагнитного поля на антенной решетке по известной диаграмме направленности $\dot{D}(\vartheta,\varphi)$ в дальней зоне в виде обратного преобразования Фурье в случае, когда диаграммы направленности излучателей отличаются лишь фазовыми сдвигами.

Ключевые слова: антенная решетка, диаграмма направленности, целые функции.

N. A. Baraboshkina, V. M. Pleshchev, N. I. Chernykh. Synthesis of electromagnetic field on an antenna array, I.

A formula is obtained for the reconstruction of electromagnetic field on an antenna array from a known radiation pattern in the far-field region in the form of an inverse Fourier transform in the case when the radiation patterns of radiating elements differ by phase shifts only.

Keywords: antenna array, radiation pattern, entire functions.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача синтеза комплексной диаграммы направленности (ДН) $\dot{D}(\vartheta,\varphi)$ с помощью дискретной антенной решетки (АР). От диаграммы направленности обычно требуют заданную ширину луча (ширину главного лепестка на уровне -3 дБ), крутизну скатов главного лепестка, низкий уровень боковых лепестков (УБЛ), в случае контурного луча — форму луча на уровне -3 дБ.

Считаем, что АР состоит из $N=(2n+1)(2m+1)$ элементов (излучателей) ($(2n+1)$ по горизонтали, $(2m+1)$ по вертикали), расположенных на плоской решетке с постоянным шагом. В плоскости АР зададим декартову систему координат (x,y) с центром в геометрическом центре решетки, в котором расположен ее центральный элемент. Считаем, что каждый излучатель A_{kl} занимает ячейку с размерами h_x, h_y и имеет фазовый центр, расположенный в точке с координатами (x_k,y_l), а ось Oz направлена перпендикулярно плоскости решетки.

Будем предполагать, что амплитудная ДН каждого элемента решетки одинакова и в конусе направлений (ϑ,φ) задается положительной функцией $f(\vartheta,\varphi)$ в зоне обслуживания. Будем считать также, что техническое устройство АР позволяет регулировать и амплитудное, и фазовое распределение (АФР) ($\vec{\rho}=:\{\dot{\rho}_{k,l}\in\mathbb{C},\ k=\overline{-n..n}, l=\overline{-m..m}\}$) элементов решетки.

С учетом всех этих предположений напряженность электромагнитного поля, создаваемого решеткой в дальней зоне в направлении (ϑ,φ) на заданной поляризации, в сферической системе координат выражается скалярной комплекснозначной функцией $E(\vartheta,\varphi)$ по формуле

$$E(\vartheta,\varphi)=f(\vartheta,\varphi)\sum_{\nu=-n}^{n}\sum_{\mu=-m}^{m}\dot{E}_{\nu\mu}e^{-\mathrm{i}\mathrm{k}(\nu h_x\sin\vartheta\cos\varphi+\mu h_y\sin\vartheta\sin\varphi)}. \tag{1}$$

Здесь h_x — шаг решетки в направлении оси x; h_y — шаг решетки в направлении оси y; $(\nu h_x,\mu h_y)$ — координаты фазового центра $A_{\nu\mu}$ соответствующего излучателя; $\dot{E}_{\nu\mu}$ — значение суммарной напряженности электромагнитного поля (ЭМП) в раскрыве излучателя $A_{\nu\mu}$;

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022). Исследования третьего автора поддержаны также Министерством образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011).

$\dot{E}_{\nu\mu} = \dot{\rho}_{\nu\mu} h_x\, h_y$, где $\dot{\rho}_{\nu\mu} = |\dot{\rho}_{\nu\mu}| e^{i\varphi_{\nu\mu}}$ — плотность напряженности ЭМП в раскрыве излучателя $A_{\nu\mu}$; показатель $\nu h_x \sin\vartheta \cos\varphi + \mu h_y \sin\vartheta \sin\varphi$ в экспоненте характеризует фазовый сдвиг поля от элемента $A_{\nu\mu}$ в направлении (ϑ, φ) по сравнению с центральным элементом АР A_{00}; $\mathrm{k} = 2\pi$ — волновое число.

Отметим, что выбор АР прямоугольной формы не сужает задачу, так как при другой форме элементов решетки можно свести ее к прямоугольной, выбирая $\dot{E}_{\nu\mu} = 0$.

Введем обобщенные характеристики направления излучения

$$u = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad v = \sin\vartheta \sin\varphi. \tag{2}$$

Тогда выражение для $E(\vartheta, \varphi)$ можно переписать в виде

$$E(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi) \sum_{\nu=-n}^{n} \sum_{\mu=-m}^{m} \dot{E}_{\nu\mu} e^{-2\pi i (u x_\nu + v y_\mu)}, \tag{3}$$

где

$$x_\nu = \nu h_x, \quad y_\mu = \mu h_y.$$

Будем формировать ДН в области $\Omega \subset \{(\vartheta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)\} \subset \mathbb{R}^2$, которая в несколько раз больше зоны обслуживания, считая дополнительно, что $f(\vartheta, \varphi) \neq 0$ в Ω.

Отметим, что двойная сумма в (3) как функция u и v является целой функцией экспоненциального типа $\sigma_u = 2\pi x_n$ по переменной u и $\sigma_v = 2\pi y_m$ по переменной v в $\mathbb{R}^2$. Экспоненциальный тип этих функций определяется апертурой A, и мы будем говорить, что такие функции имеют экспоненциальный тип σ_A. Поэтому естественно задавать требуемую ДН в Ω в виде комплексной ДН $f(\vartheta, \varphi)\, D(\vartheta, \varphi) e^{i\psi_0(\vartheta, \varphi)}$, накладывая требования на УБЛ, форму и крутизну скатов главного лепестка на амплитудную часть ДН fD.

Таким образом, с учетом определения $\dot{E}_{\nu\mu}$ задача состоит в выборе коэффициентов $\dot{\rho}_{\nu\mu}$, реализующих минимум функции

$$B(\vec{\rho}) = \iint\limits_{\Omega} \left| f(\vartheta, \varphi)\, D(\vartheta, \varphi) e^{i\psi_0(\vartheta, \varphi)} - f(\vartheta, \varphi) \sum_{\nu=-n}^{n} \sum_{\mu=-m}^{m} \dot{\rho}_{\nu\mu} e^{-2\pi i (u x_\nu + v y_\mu)} h_x h_y \right|^2 g(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi \to \inf_{\dot{\rho}_{\nu\mu}}, \tag{4}$$

который является уклонением в $L_2(\mathbb{R})$ заданной функции $f(\vartheta, \varphi)\dot{D}(\vartheta, \varphi) {=} f(\vartheta, \varphi) D(\vartheta, \varphi) e^{i\psi_0(\vartheta, \varphi)}$ от ДН, создаваемой решеткой. Здесь u и v определены в (2) как функции $(\vartheta, \varphi) \in \Omega$, $g(\vartheta, \varphi)$ — некоторый положительный, сосредоточенный в Ω вес, $\psi_0(\vartheta, \varphi)$ — фазовая составляющая ДН.

Воспользовавшись соотношением $|\dot{x}|^2 = \dot{x} \cdot \bar{\dot{x}}$, легко проверить, что при $\dot{\rho}_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$ $(\alpha_{kl}, \beta_{kl} \in \mathbb{R})$ необходимое условие минимума

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \beta_{kl}} = 0 \quad (k = \overline{-n..n},\ l = \overline{-m..m})$$

эквивалентно следующей системе уравнений, которой должно удовлетворять решение поставленной задачи:

$$\begin{gathered} \iint\limits_{\Omega} f^2(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \sum_{\nu=-n}^{n} \sum_{\mu=-m}^{m} \bar{\dot{\rho}}_{\nu\mu} h_x^2 h_y^2\ e^{2\pi i (u(x_\nu - x_k) + v(y_\mu - y_l))} d\vartheta d\varphi \\ = \iint\limits_{\Omega} hx\, hy D(\vartheta, \varphi) f^2(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) e^{-i\psi_0(\vartheta, \varphi)} e^{-2\pi i (u x_k + v y_l)} d\vartheta d\varphi \\ (k = -n, \ldots n,\ l = -m, \ldots, m). \end{gathered} \tag{5}$$

Поскольку в левой части системы стоит скалярное произведение с положительным весом $f^2(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi)$ линейно независимых функций из системы $\{e^{2\pi i (u x_\nu + v y_\mu)}\}$, $\nu = \overline{-n..n}$, $\mu = \overline{-m..m}$, ее определитель (определитель Грама) будет ненулевым и, следовательно, решение системы будет единственным. Далее одним из известных способов можно найти приближенное решение системы (5). Группой авторов [1–3] ранее разработан оригинальный алгоритм приближенного решения этой задачи для различных $D(\vartheta,\varphi)$ и $\psi_0(\vartheta,\varphi)$. При большом количестве элементов решетки система получается большой, и при близком расположении элементов в силу их взаимовлияния матрица системы может быть плохообусловленной.

2. Функциональное уравнение для функции распределения плотности ЭМП

Мы предлагаем другой способ приближенного решения системы (5). Рассмотрим комплексно сопряженное уравнение и перейдем в нем от координат (ϑ,φ) к обобщенным координатам (u,v), полагая $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{v}{u}$, $\vartheta=\arcsin\sqrt{u^2+v^2}$. Учитывая, что якобиан этой системы равен $-(u^2+v^2)^{-1}(1-(u^2+v^2))^{-1}$, получим следующий аналог системы уравнений (5):

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega_1} f_1^2(u,v)\widetilde{g}(u,v)\sum_{\nu=-n}^{n}\sum_{\mu=-m}^{m}\dot\rho_{\nu\mu}h_x^2h_y^2\,e^{-2\pi i(u(x_\nu-x_k)+v(y_\mu-y_l))}dudv\\ =\iint\limits_{\Omega_1} hx\,hyD_1(u,v)f_1^2(u,v)\widetilde{g}(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}e^{2\pi i(ux_k+vy_l)}dudv\\ (k=-n,\dots n,\ l=-m,\dots,m),\end{gathered}\tag{6}$$

где

$$\widetilde{g}(u,v)=\frac{g_1(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}\sqrt{1-(u^2+v^2)}},$$

$D_1(u,v)$, $f_1(u,v)$, $g_1(u,v)$, $\psi_1(u,v)$ получены из $D(\vartheta,\varphi)$, $f(\vartheta,\varphi)$, $g(\vartheta,\varphi)$, $\psi_0(\vartheta,\varphi)$, $\Omega_1\subset\{(u,v)\colon u^2+v^2\le\sin^2\vartheta^*\}$ (ϑ^* — максимально возможный для области Ω угол ϑ). Апертуру решетки будем обозначать символом A.

Согласно системе (1) функция $\dot D_1(u,v)=D_1(u,v)\,e^{i\psi_1(u,v)}$, соответствующая реализуемой $\dot D(\vartheta,\varphi)$ (т. е. если $\dot D(\vartheta,\varphi)$ задать так, что ее в точности можно реализовать рассматриваемой антенной решеткой), должна быть следом на $\mathbb{R}^2$ целой функции экспоненциального типа, определяемого апертурой решетки.

Будем предполагать, что плотность распределения напряженности ЭМП в раскрыве решетки задается значением непрерывной на A функции $\dot\rho(x,y)$ в узлах решетки: $\dot\rho_{\nu\mu}=\dot\rho(x_\nu,y_\mu)$. Обозначим

$$\widetilde{D}(u,v)=D_1(u,v)f_1^2(u,v)\widetilde{g}(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}.\tag{7}$$

Перейдем от системы (6) к непрерывному случаю, считая, что сетка по (x,y) достаточно мелкая, т. е. величины h_x,h_y малы. Тогда системе (6) будет соответствовать аналогичная функциональная система

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega_1} f_1^2(u,v)\widetilde{g}(u,v)\iint\limits_{A}\dot\rho(x,y)h_xh_ye^{-2\pi i(u(x-x_k)+v(y-y_l))}dx\,dy\,du\,dv\\ =\iint\limits_{\Omega_1} hx\,hy\widetilde{D}(u,v)e^{2\pi i(ux_k+vy_l)}du\,dv.\end{gathered}\tag{8}$$

Верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\vartheta^*<\pi/2$, $\Omega_1\subset\{(u,v)\colon u^2+v^2<\sin\vartheta^*\}$, $f_1(u,v),\widetilde{g}(u,v)$ — непрерывные в области Ω_1 функции, $\operatorname{supp}\widetilde{g}=\overline{\Omega_1}$, $f_1(u,v)>0$ в области Ω_1, функция $D_1(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}^2)\cap L_2(\mathbb{R}^2)$ и, кроме того, является целой функцией экспоненциального типа порядка σ_A, $\dot\rho(x,y)$ — решение системы* (8).

Тогда

$$\mathfrak{F}(\dot\rho)(u,v) = D_1(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}, \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2 \quad \text{и } \operatorname{supp}\dot\rho = A.$$

Доказательство. Домножим каждое уравнение системы (8) на $a(x_k, y_l)$ ($a(\xi',\eta')$ — пока произвольная непрерывная на A функция) и, просуммировав уравнения системы и устремив $h_x,\ h_y$ к нулю, перейдем к функциональному уравнению

$$\iint\limits_A a(\xi',\eta') \iint\limits_{\Omega_1} f_1^2(u,v)\widetilde{g}(u,v) \iint\limits_A \dot\rho(x,y)\ e^{-2\pi i(u(x-\xi')+v(y-\eta'))}dx\,dy\,du\,dv\,d\xi'\,d\eta'$$
$$= \iint\limits_A a(\xi',\eta') \iint\limits_{\Omega_1} \widetilde{D}(u,v)e^{2\pi i(u\xi'+v\eta')}du\,dv\,d\xi'\,d\eta'.$$

Взяв функцию $a(\xi',\eta')$ такую, что она равна нулю вне окрестности $O(\xi,\eta) = (\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)\times(\eta-\varepsilon,\eta+\varepsilon)$ и $\iint_{O(\xi,\eta)} a(\xi',\eta')d\xi d\eta = 1$, воспользовавшись теоремой о среднем и устремив ε к нулю, получим следующее функциональное уравнение:

$$\iint\limits_{\Omega_1} f_1^2(u,v)\widetilde{g}(u,v) \iint\limits_A \dot\rho(x,y)e^{-2\pi i(u(x-\xi)+v(y-\eta))}dx\,dy\,du\,dv$$
$$= \iint\limits_{\Omega_1} \widetilde{D}(u,v)e^{2\pi i(u\xi+v\eta)}du\,dv, \quad (\xi,\eta)\in A. \tag{9}$$

Отметим, что носитель искомой функции $\dot\rho$ должен быть равен A, а $\operatorname{supp}\widetilde{D} = \Omega_1$, имеем

$$\iint\limits_A \dot\rho(x,y)e^{-2\pi i(ux+vy)}dx\,dy := \mathfrak{F}(\dot\rho)(u,v), \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

есть преобразование Фурье $\mathfrak{F}$ функции $\dot\rho$ в точке (u,v), а

$$\iint\limits_{\Omega_1} \widetilde{D}(u,v)e^{2\pi i(u\xi+v\eta)}dudv := \mathfrak{F}^{-1}(\widetilde{D})(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2,$$

— обратное преобразование Фурье $\mathfrak{F}^{-1}$ функции $\widetilde{D}(u,v)$ в точке (ξ,η). В этих обозначениях, учитывая, что правая часть уравнения (9) есть след на $\mathbb{R}^2$ целой функции и, следовательно, левая часть в (9) с неизвестной функцией должна быть такой же функцией, уравнение (9) перепишем (сначала для $(\xi,\eta)\in A$, а затем на $\mathbb{R}^2$) в виде

$$\iint\limits_{\Omega_1} f_1^2\,(u,v)\widetilde{g}(u,v)\mathfrak{F}(\dot\rho)(u,v)\ e^{2\pi i(u\xi+v\eta)}du\,dv = \mathfrak{F}^{-1}(\widetilde{D})(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2.$$

Левая его часть есть обратное преобразование Фурье функции $f_1^2\,\widetilde{g}\,\mathfrak{F}(\dot\rho)$ в точке (ξ,η). В итоге для определения $\rho(x,y)$ получаем следующее уравнение:

$$\mathfrak{F}^{-1}(f_1^2\,\widetilde{g}\ \mathfrak{F}(\dot\rho)) = \mathfrak{F}^{-1}(\widetilde{D})(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2.$$

Выразим $\widetilde{D}(u,v)$ через функцию ρ:

$$\widetilde{D}(u,v) = f_1^2(u,v)\,\widetilde{g}(u,v)\big(\mathfrak{F}(\dot\rho)\big)(u,v), \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Учитывая (7) и условия теоремы, в силу которых $\widetilde{g}$ и f_1 не равны нулю в Ω_1, получим

$$\mathfrak{F}(\dot\rho)(u,v) = D_1(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}, \quad (u,v)\in\Omega_1.$$

Здесь правая часть равенства является следом на $\mathbb{R}^2$ целой функции экспоненциального типа порядка σ_A по условию теоремы, и в силу самого равенства совпадающая с ней левая часть является ее сужением на Ω_1. Поскольку множество Ω_1 есть область в $\mathbb{R}^2$, то они совпадают на всем $\mathbb{R}^2$. По доказанному найденная функция $\mathfrak{F}(\dot\rho)$ является целой функцией экспоненциального типа порядка σ_A в $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, носитель $\dot\rho$ совпадает с A. Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы имеем*

$$\dot\rho(x,y) = \mathfrak{F}^{-1}\left(D_1(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}\right)(x,y), \qquad (x,y)\in A.$$

3. Способы выбора функции $D(\vartheta,\varphi)=D_1(u,v)$ при синтезе АФР

Как правило, достаточно, чтобы АР не обязательно точно восстанавливала требуемую амплитудную ДН $f(\vartheta,\varphi)D(\vartheta,\varphi)$, а с сохранением ее параметров, таких как форма главного лепестка по уровню -3дБ, крутизна его скатов, уровень боковых лепестков.

Один из способов дальнейшего синтеза АФР на АР — подобрать целую функцию $\dot D_1(u,v) = D_1(u,v)e^{i\psi_1(u,v)}$ так, чтобы $|\dot D_1|$ удовлетворял этим ограничениям, после чего можно воспользоваться следствием.

Например, можно задавать $D_1(u,v)$ в виде $D_1(u,v) = P(u,v)\,b(u,v)$, где $P(u,v)$ — многочлен, заданный его нулями (для достижения нужных характеристик ДН: ширины главного лепестка, крутизны скатов, УБЛ), а $b(u,v)$ — целая функция экспоненциального типа σ_A. Так, в одномерном случае при расчетах в качестве $b(u)$ выбирались функции вида

$$b(u) = \frac{\cos^2(\sigma(u-a))}{\pi^2-\sigma^2(u-a)^2} + \frac{\cos^2(\sigma(u+a))}{\pi^2-\sigma^2(u+a)^2} \quad \text{или} \quad b(u) = \frac{\sin^{2(4)}(\sigma(u-a))}{(u-a)^{2(4)}}$$

в зависимости от требуемой ширины луча (первая функция — для широкого луча, вторая — для узкого).

Для синтеза пространственных ДН в работе [4] В. С. Балаганский использовал при создании секторных осесимметричных ДН с заданными характеристиками функции вида

$$d_i(z) = \frac{\cos(z-a_i)}{\pi^2-4(z-a_i)^2} + \frac{\cos(z+a_i)}{\pi^2-4(z+a_i)^2}$$

или их линейные комбинации, в которых переменная z получается с помощью перехода от декартовых координат (u,v) к круговым $z=\sqrt{u^2+v^2}$ или эллиптическим $z=\sqrt{\alpha^2u^2+\beta^2v^2}$ для синтеза гибридных зеркальных антенн (ГЗА) с круглой или эллиптической апертурой зеркала.

Обычно амплитудную ДН $\mathcal{D}(u,v)f(u,v)$ задают достаточно произвольной, обладающей указанными выше параметрами. И другой подход к решению задачи — выбрав $\Phi(u,v)$, заменить $\dot{\mathcal{D}}(u,v) = \mathcal{D}(u,v)e^{i\Phi(u,v)}$ на ближайшую среди целых функций порядка σ_A функцию $\dot{\mathcal{D}}_1(u,v)\in W^2_{\sigma_A}(\mathbb{R}^2)$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^2)$ с весом $f_1^2(u,v)\widetilde g_1(u,v)$, т. е. решать задачу

$$\inf\left\{\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\left|\dot{\mathcal{D}}(u,v)-\dot{\mathcal{D}}_1(u,v)\right|^2 f_1^2(u,v)\widetilde g_1(u,v)\,du\,dv\colon \dot{\mathcal{D}}_1(u,v)\in W^2_{\sigma_A}(\mathbb{R}^2)\right\}. \tag{10}$$

Хорошо известно, что наилучшей функцией здесь будет функция

$$\dot{\mathcal{D}}_1^*(u,v) = \mathfrak{F}\Big(\chi_A(x,y)\mathfrak{F}^{-1}(\dot{\mathcal{D}})(x,y)\Big)(u,v),$$

а соответствующая ей функция распределения плотности электромагнитного поля на АР равна

$$\dot\rho^*(x,y) = \mathfrak{F}^{-1}(\dot{\mathcal{D}}^*)(x,y)\chi_A(x,y).$$

Минимальная допустимая погрешность приближения в задаче (10) (в рамках непрерывной математической модели) равна $\iint_{\mathbb{R}^2\setminus A} |\mathfrak{F}^{-1}(\dot{\mathcal{D}}^*)(x,y)|^2 dxdy$, при этом полагаем $\dot{\rho}_{\nu\mu} = \dot{\rho}(x_\nu, y_\mu)$, а амплитудную ДН $\mathcal{D}(u,v)f(u,v)$ заменяем на $\dot{\mathcal{D}}^*(u,v)f(u,v)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблема фазового синтеза ДН ГЗА / В.В. Арестов, В.С. Балаганский, В.И. Гусевский [и др.] // Век радио: перспективные пути развития антенных систем космической связи, теорий управления и распознавания образов: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1996. С. 31–55.
2. **Гусевский В.И., Черных Н.И.** Итерационный метод амплитудно-фазового и фазового синтеза ДН // Тез. докл. Межреспубл. науч.-техн. конф. “Фазированные антенные решетки -92”. Казань, 1992.
3. **Соболев Б.С., Сазанов А.А., Черных Н.И.** Интерполяционный метод управления лучом ГЗА // Формирование сигналов и обработка информации в радиосистемах: тр. Москов. энергетич. ин-т. № 18. М., 1988. С. 148–155.
4. **Балаганский В.С., Семенов Б.В., Черных Н.И.** Синтез секторных диаграмм направленности и их реализация в ГЗА // Математические методы анализа и оптимизации зеркальных антенн различного назначения: тез. докл. I Всесоюз. науч.-техн. конф. Свердловск, 1989. С. 34–37.

Поступила 11.11.2011

Барабошкина Наталья Алексеевна
ведущий математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nataliya.Baraboshkina@imm.uran.ru

Плещев Виктор Михайлович
ведущий программист
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Viktor.Pleshchev@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

Том 18 № 4 2012

УДК 519.62

ХАРАКТЕРИСТИКИ СКРЫТОСТИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА[1]

В. И. Бердышев

Даны два варианта характеризации скрытости объекта, движущегося в пространстве, в котором задано множество, препятствующее движению и нарушающее видимость объекта для наблюдателя. Обсуждаются возможность дифференцирования по направлениям введенных характеристик, поиск направлений их возрастания и убывания.

Ключевые слова: скрытость, видимость объекта, навигация.

V. I. Berdyshev. Concealment characteristics for a moving object.

Two variants are given for the characterization of the concealment of an object moving in a space containing a set that hinders the motion and impairs the visibility of the object for an observer. The possibility of the directional differentiation of the introduced characteristics and the search for their ascent and descent directions are discussed.

Keywords: concealment, object visibility, navigation.

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы телесное множество G (являющееся замыканием открытого множества), точка t — движущийся объект, точка f — наблюдатель. Множество G препятствует движению и видимости. Понятия видимости объекта наблюдателем и скрытости объекта от наблюдателя являются в определенном смысле противоположными.

В [1;2] рассматривались характеристики видимости. Простейшая из них определяется следующим образом: пусть отрезок $[t, f]$ не пересекается с множеством G, $V_r(t)$ — замкнутый шар радиуса r с центром t, $K_r(t, f)$ — выпуклая оболочка множества $V_r(t) \cup f$, функция (характеристика) видимости определяется как

$$r(t, f) = \inf \big\{ r \colon K_r(t, f) \cap G \neq \varnothing \big\}.$$

Если же $[t, f] \cap G \neq \varnothing$, т. е. t и f невидимы один для другого, то важно знать, насколько объект t скрыт от наблюдателя.

В данной статье предлагаются два варианта функции скрытости объекта от наблюдателя. Предположим, что существует спрямляемая кривая $\gamma_{t,f}$, которая соединяет точки t и f и не пересекается с внутренностью множества G. Внутренность множества G обозначается через $\overset{\circ}{G}$. Пусть $L(\gamma_{t,f})$ — длина кривой $\gamma_{t,f}$,

$$d(t, f) = \inf L(\gamma_{t,f})$$

— точная нижняя грань длин всех таких кривых $\gamma_{t,f}$ и $\gamma(t, f)$ — кратчайшая кривая. Функция $d(t, f)$ является метрикой на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{G}$. В качестве характеристики скрытости объекта t от наблюдателя возьмем функцию

$$c(t, f) = d(t, f) - \|t - f\|, \tag{0.1}$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Динамические системы и теория управления” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1022), а также поддержана РФФИ (проект 11-01-00445).

которая показывает, насколько путь от t к f при наличии препятствия больше евклидова расстояния между ними.

Для определения второго варианта характеристики скрытости введем множество, являющееся замыканием множества точек пространства, видимых из t:

$$v(t,G)=\left\{\overline{x\in\mathbb{R}^n\colon [t,x]\cap G=\varnothing}\right\}.$$

Пусть $[t,f]\cap \overset{\circ}{G}\neq\varnothing$. Обозначим через

$$C(t,f)=d(f,v(t,G))=\min\left\{d(f,x)\colon x\in v(t,G)\right\}$$

расстояние от f до множества $v(t,G)$ по метрике d. Величина $C(t,f)$ также характеризует степень скрытости t от f: наблюдатель должен преодолеть расстояние не менее чем $C(t,f)$ для того, чтобы увидеть объект t.

Отметим, что

$$C(t,f)=\inf_x\left\{d(f,x)\colon [t,x]\cap G=\varnothing\right\},$$

а функция видимости выражается в виде

$$r(t,f)=\min_x\left\{\|t-x\|\colon [f,x]\cap G\neq\varnothing\right\}.$$

В случае недружественного наблюдателя при выборе тактики движения объект старается уменьшить видимость (если $[t,f]\cap G=\varnothing$) и увеличить скрытость (если $[t,f]\cap \overset{\circ}{G}\neq\varnothing$), а наблюдатель всегда решает задачу увеличения видимости и уменьшения скрытости. В связи с этим представляют интерес задача определения направлений возрастания (подъема) и убывания (спуска) характеристик видимости и скрытости и более трудная задача исследования дифференцируемости и вычисления производных этих характеристик по направлениям. Вопрос дифференцируемости функции видимости по направлениям рассмотрен в [1;2]. В данной статье дается решение ряда задач, связанных с понятием скрытости.

Везде в дальнейшем $\widetilde{t},\widetilde{f}$ — направления движения объекта t и наблюдателя f, соответственно, и $\|\widetilde{t}\|=\|\widetilde{f}\|=1$.

1. О непрерывности функций $d(t,f),\ C(t,f)$

Как уже отмечалось, $d(t,f)$ есть метрика на пространстве $\mathbb{R}^n\setminus \overset{\circ}{G}$, поэтому

$$|d(t,f)-d(t',f')|\le d(t,t')+d(f,f')\qquad (t',f'\notin G)$$

и, следовательно, функция $c(t,f)$ непрерывна по обеим переменным.

Функция расстояния d удовлетворяет неравенству

$$|d(f,v(t,G))-d(f',v(t,G))|\le d(f,f'),$$

следовательно, функция $C(t,f)$ непрерывна по f.

Свойство непрерывности этой функции по переменной t определяется структурой множества G, точнее, условием непрерывности многозначного отображения $t\to v(t,G)$. Непрерывность по Хаусдорфу отображения $t\to v(t,G)$ гарантирует непрерывность функции $C(t,f)$ по t. Обнадеживающим фактом является полунепрерывность сверху этого отображения (из того, что $t'\to t,\ x'\in v(t',G),\ x'\to x$ следует включение $x\in v(t,G)$). Так в случае выпуклого ограниченного множества G отображение $t\to v(t,G)$ непрерывно по Хаусдорфу в ограниченной области пространства, содержащей G. Для множеств G сложной конструкции наличие непрерывности функции $C(t+\lambda\widetilde{t},G)$ по параметру λ в точке $\lambda=0$ зависит от выбора направления $\widetilde{t}$. Продемонстрируем это на следующем примере.

П р и м е р. Пусть $n=2$, $G=\{(x,y)\colon x\le 0,\ 1/2\le y\le 1\}\ \cup\ \{(x,y)\colon x\ge 0,\ y\le 0\}$, $t=(0,2)$, $f=(-1,-1)$, $\widetilde{t}=(1,0)$, $t_\lambda=t+\lambda\widetilde{t}$, тогда

$$v(t,G)=\big\{(x,y)\colon x\le 0,\ y\ge 1\big\}\ \cup\ \big\{(x,y)\colon x\ge 0,\ y\ge 0\big\}.$$

Если $\lambda<0$, то

$$v(t_\lambda,G)=\big\{(x,y)\colon x\le 0,\ y\ge 1\big\}\ \cup\ \Big\{(x,y)\colon x\ge 0,\ y\ge \max\Big\{\frac{1}{\lambda}x+1,\,0\Big\}\Big\},$$

отображение $\lambda\to v(t_\lambda,G)$ непрерывно по Хаусдорфу в нуле, и

$$d(f,v(t_\lambda,G))=\sqrt{2}+|\lambda|(1+\lambda^2)^{-\frac12}\xrightarrow[\lambda\to 0]{} d(f,v(t,G))=\sqrt{2}.$$

Если $\lambda>0$, то

$$v(t_\lambda,G)=\big\{(x,y)\colon x\le 0,\ y\ge 1\big\}\cup\big\{(x,y)\colon x\ge 0,\ y\ge 0\big\}\cup\Big\{(x,y)\colon x\le 0,\ \frac{2}{\lambda}x\le y\le\frac{3}{2\lambda}x+\frac12\Big\},$$

отображение $\lambda\to v(t_\lambda,G)$ не является полунепрерывным сверху,

$$d(f,v(t_\lambda,G))=\frac32(1-\lambda)\Big(\frac94+1\Big)^{-\frac12}\xrightarrow[\lambda\to 0]{} 1<d(f,v(t,G))$$

и функция $C(t_\lambda,f)$ разрывна в точке $\lambda=0$.

Наряду с приведенным выше определением взаимовидимых точек t,f (таких, что $[t,f]\cap G=\varnothing$), взаимовидимыми можно назвать точки t,f, для которых $[t,f]\cap\overset{\circ}{G}=\varnothing$. Тогда множество $\widehat{v}(t,G)$ видимых из t точек будет замкнутым и $v(t,G)\subset\widehat{v}(t,G)$. Легко проверить, что отображение $t\to\widehat{v}(t,G)$ полунепрерывно сверху. Для рассмотренного выше примера имеем

$$\widehat{v}(t,G)=v(t,G)\cup\big\{(0,y)\colon y<0\big\},$$

$\widehat{v}(t_\lambda,G)=v(t,G)$ при $\lambda\ne 0$, при $\lambda<0$ выполняется неравенство

$$d(f,v(t,G))=1<\sqrt{2}<d(f,v(t_\lambda,G)),$$

а при $\lambda>0$

$$d(f,v(t_\lambda,G))\to 1=d(f,v(t,G))$$

есть непрерывность этой функции в нуле.

2. Направления убывания и роста функции $c(t,f)$

Пусть $t,f\notin G$, $[t,f]\cap\overset{\circ}{G}\ne\varnothing$, $\gamma(t,f)$ — кратчайшая кривая, соединяющая точки t и f, $\gamma(t,f)\cap\overset{\circ}{G}=\varnothing$. Поскольку $t,f\notin G$, концевые участки кривой $\gamma(t,f)$ являются прямолинейными отрезками. Пусть $[t,\overline{t}]\subset\gamma(t,f)$, $[f,\overline{f}]\subset\gamma(t,f)$ — максимальные по длине отрезки среди указанных. Ясно, что $\overline{t}\in G$, $\overline{f}\in G$. Далее $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение элементов.

Теорема 1. *Если* $\big\langle\widetilde{t},t-\overline{t}\big\rangle<0$, *то* $\widetilde{t}$ — *направление спуска функции* $d(t,f)$, *если же* $\Big\langle\widetilde{t},\dfrac{t-\overline{t}}{\|t-\overline{t}\|}\Big\rangle>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, *то* $\widetilde{t}$ — *направление подъема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\big\langle\widetilde{t},t-\overline{t}\big\rangle>0$, $t_\lambda=t+\lambda\widetilde{t}$. Поскольку $t\notin G$, то $V_\varepsilon(t)\cap G=\varnothing$ для некоторого ε, $0<\varepsilon<1$. Обозначим $t^\varepsilon=(1-\varepsilon)\,t+\varepsilon\,\overline{t}$. При $0<\lambda<\langle\widetilde{t},t-t^\varepsilon\rangle$ выполняется неравенство $\|t^\varepsilon-t_\lambda\|<\|t^\varepsilon-t\|$, поэтому

$$d(\overline{t},t_\lambda)\le\|\overline{t}-t^\varepsilon\|+\|t^\varepsilon-t_\lambda\|<\|\overline{t}-t^\varepsilon\|+\|t^\varepsilon-t\|=\|\overline{t}-t\|$$

и, значит, $d(f, t_\lambda) < d(f, t)$.

Пусть $\left\langle \widetilde{t}, \dfrac{t-\overline{t}}{\|t-\overline{t}\|} \right\rangle > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Обозначим через t'_λ $(\lambda > 0)$ ортогональную проекцию точки t_λ на прямую $l(t, \overline{t})$. Тогда

$$d(t'_\lambda, f) = d(t, f) + \|t - t'_\lambda\|, \quad \|t_\lambda - t'_\lambda\| < \|t - t'_\lambda\|$$

и, используя неравенство треугольника для метрики d, получим

$$d(t'_\lambda, f) \geq d(t'_\lambda, f) + \|t_\lambda - t'_\lambda\| = d(t, f) + \|t - t'_\lambda\| - \|t_\lambda - t'_\lambda\| > d(t, f).$$

Теорема доказана. В данных условиях точки t и f равноправны, поэтому верна

Теорема 1$'$. *Если $\langle \widetilde{f}, f - \overline{f} \rangle < 0$, то $\widetilde{f}$ — направление спуска функции $d(t, f)$, если же $\left\langle \widetilde{f}, \dfrac{f-\overline{f}}{\|f-\overline{f}\|} \right\rangle > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то $\widetilde{f}$ — направление подъема.*

3. О дифференцируемости функции $c(t, f)$ по направлениям

Поскольку функция $\|t-f\|$ дифференцируема, то (см. (0.1)) достаточно исследовать функцию $d(t, f)$.

Гипотеза. *Пусть X — банахово пространство с дифференцируемой нормой и $G \subset X$ — множество, являющееся замыканием открытого множества, точки t и f не содержатся в G и $d(t, f) < \infty$. Тогда расстояние $d(t, f)$ дифференцируемо по любому направлению $(\widetilde{t}, \widetilde{f})$* в точках t, f.

Свойство дифференцируемости функции $d(t, f)$ и формулу для производной по направлению удается установить лишь в $\mathbb{R}^2$. Пусть $\widetilde{t}, \widetilde{f}$ — заданные направления движения объекта и наблюдателя, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t},\ f_\lambda = f + \lambda\widetilde{f}$, $[t, f] \cap \overset{\circ}{G} \neq \varnothing$ и $[t_\lambda, f_\lambda] \cap \overset{\circ}{G} \neq \varnothing$ при малых $\lambda,\ 0 \leq \lambda \leq \lambda^*$. Найдутся точки $\overline{t}_\lambda,\ \overline{f}_\lambda$ из G такие, что отрезки $[t_\lambda, \overline{t}_\lambda],\ [f_\lambda, \overline{f}_\lambda]$ максимальны по длине и принадлежат кривой $\gamma(t_\lambda, f_\lambda)$, и $\overline{t}_\lambda \to \overline{t},\ \overline{f}_\lambda \to \overline{f}$ при $\lambda \to 0$. Для концевых точек t, f кривой $\gamma(t, f)$ рассуждения аналогичны, поэтому рассмотрим тот случай, когда варьируется только точка t.

Предположим сперва, что $\overline{t} = \overline{t}_\lambda$ при $\lambda \in [0, \lambda^*]$, тогда

$$\Big| d(t, f) - d(t_\lambda, f) \Big| = \Big| \|t - \overline{t}\| - \|t_\lambda - \overline{t}\| \Big|,$$

$$\big\| t_\lambda - \overline{t} \big\|^2 = \|t + \lambda\widetilde{t} - \overline{t}\|^2 = \|t - \overline{t}\|^2 + 2\lambda\langle t - \overline{t}, \widetilde{t} \rangle + \lambda^2\|\widetilde{t}\|^2.$$

Отсюда вытекает соотношение

$$\frac{\|t_\lambda - \overline{t}\| - \|t - \overline{t}\|}{\lambda} \to \frac{\langle\, t - \overline{t},\, \widetilde{t}\, \rangle}{\|t - \overline{t}\|} \qquad (\lambda \to +0). \tag{3.1}$$

Пусть $\overline{t}_\lambda \neq \overline{t}$ для всех $\lambda \in [0, \lambda^*]$, тогда

$$d(t, f) = d(\overline{t}, f) + \|t - \overline{t}\|, \quad d(\overline{t}_\lambda,\ f) = d(\overline{t}_\lambda, f) + \|t_\lambda - \overline{t}_\lambda\|.$$

Предположим, что $\gamma(\,\overline{t}_\lambda, f) \subset \gamma(\,\overline{t}, f)$. Случай обратного включения рассматривается аналогично. При сделанном предположении выполняется равенство

$$d(t_\lambda, f) - d(t, f) = -d(\overline{t}_\lambda, \overline{t}) + \|\overline{t}_\lambda - t_\lambda\| - \|\overline{t} - t\|. \tag{3.2}$$

Участок кривой $\gamma(t, f)$ между точками $\overline{t},\ \overline{t}_\lambda$ является выпуклым, и прямая

$$l\,(\,\overline{t}_\lambda, t_\lambda) = \big\{ \alpha\, \overline{t}_\lambda + (1 - \alpha)\, t_\lambda \colon \alpha \in \mathbb{R} \big\}$$

является опорной к $\gamma(\overline{t}_\lambda, t_\lambda)$. Длина $d(\overline{t}_\lambda, \overline{t})$ этого участка удовлетворяет соотношению

$$\|\overline{t}_\lambda - \overline{t}\| = d(\overline{t}_\lambda, \overline{t}) \le \|\overline{t}_\lambda - t_\lambda^2\| + \|t_\lambda^2 - \overline{t}\|,$$

где t_λ^2 — точка пересечения прямых $l(\overline{t}_\lambda, t_\lambda)$, $l(\overline{t}, t)$. Найдем на прямой $l(\overline{t}, t)$ точку t_λ^4, а на прямой $l(\overline{t}_\lambda, \overline{t})$ точку t_λ^3 так, что векторы $t_\lambda^4 - \overline{t}_\lambda$, $t_\lambda^2 - t_\lambda^3$ параллельны вектору $\widetilde{t}$. Тогда

$$\|t_\lambda^2 - t_\lambda^3\| = \frac{\|\overline{t}_\lambda - t_\lambda^4\|\, \|t_\lambda^2 - \overline{t}_\lambda\|}{\|t_\lambda^4 - \overline{t}\|}, \quad \|\overline{t}_\lambda - t_\lambda^4\| = \lambda\, \frac{\|t_\lambda^4 - t_\lambda^2\|\|}{\|t_\lambda^2 - t\|}, \quad \|t_\lambda^2 - \overline{t}_\lambda\| \le \|t_\lambda^4 - \overline{t}\|,$$

$$\|t_\lambda^2 - t_\lambda^3\| = \lambda \frac{\|t_\lambda^4 - t_\lambda^2\|}{\|t_\lambda^2 - t\|}\, \frac{\|t_\lambda^2 - \overline{t}\|}{\|t_\lambda^4 - \overline{t}\|} \le \lambda \frac{\|t_\lambda^4 - t_\lambda^2\|}{\|t_\lambda^2 - t\|}$$

и поскольку $\|t_\lambda^4 - t_\lambda^2\| \to 0$ при $\lambda \to 0$, то

$$\frac{\|t_\lambda^2 - t_\lambda^3\|}{\lambda} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{3.3}$$

Пусть $z_\lambda = \left[t_\lambda^3, t_\lambda^2\right] \cap \gamma(\overline{t}_\lambda, \overline{t})$. Используя (3.2), получим

$$d(t_\lambda, f) - d(t, f) = \Big(\|t_\lambda^2 - t_\lambda\| - \|t_\lambda^2 - t\|\Big) + \Big(\|t_\lambda^2 - \overline{t}\| - d(z_\lambda, \overline{t})\Big) + \Big(\|t_\lambda - t_\lambda^2\| - d(\overline{t}_\lambda, z_\lambda)\Big). \tag{3.4}$$

Повторяя доказательство соотношения (3.1), с учетом того что $t_\lambda^2 \to \overline{t}$ при $\lambda \to 0$, убеждаемся в справедливости равенства

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{\|t_\lambda^2 - t_\lambda\| - \|t_\lambda^2 - t\|}{\lambda} = \frac{\langle t - \overline{t}, \widetilde{t}\rangle}{\|t - \overline{t}\|}. \tag{3.5}$$

Используя выпуклость кривой $\gamma(\overline{t}_\lambda, \overline{t})$, легко проверить, что

$$\begin{aligned} \Big|\|t_\lambda^2 - \overline{t}\| - d(z_\lambda, \overline{t})\Big| &\le \|t_\lambda^2 - t_\lambda^3\|, \\ \Big|\|\overline{t}_\lambda^1 - t_\lambda^2\| - d(\overline{t}_\lambda^1, z_\lambda)\Big| &\le \|t_\lambda^2 - t_\lambda^3\|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из (3.4) с учетом (3.5), (3.6) и (3.3) следует, что

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{d(t_\lambda, f) - d(t, f)}{\lambda} = \frac{\langle t - \overline{t}_\lambda^1, \widetilde{t}\,\rangle}{\|t - \overline{t}_\lambda^1\|}.$$

Итак, справедлива

Теорема 2. *Пусть G — телесное множество в $\mathbb{R}^2$, точки t и f не принадлежат внутренности множества G, $\gamma\,(t, f)$ — кратчайшая кривая, соединяющая t и f, $\gamma\,(t, f) \cap \overset{\circ}{G} = \varnothing$, $\widetilde{t}, \widetilde{f}$ — заданные направления, $\|\widetilde{t}\| = \|\widetilde{f}\| = 1$, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$, $f_\lambda = f + \lambda\widetilde{f}$ $(\lambda > 0)$, точки $\overline{t}_\lambda$, $\overline{f}_\lambda$ из $\gamma\,(t_\lambda, f_\lambda)$ таковы, что отрезки $[t_\lambda, \overline{t}_\lambda]$, $[f_\lambda, \overline{f}_\lambda]$ принадлежат этой кривой и имеют возможно большую длину, тогда существуют пределы $\lim\limits_{\lambda \to +0} \overline{t}_\lambda = \overline{t}$, $\lim\limits_{\lambda \to +0} \overline{f}_\lambda = \overline{f}$ и выполняются равенства*

$$\frac{d}{d\lambda}\ c(t_\lambda, f)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\langle\, t - \overline{t}, \widetilde{t}\,\rangle}{\|t - \overline{t}\|} - \frac{\langle\, t - f, \widetilde{t}\,\rangle}{\|t - f\|}, \qquad \frac{d}{d\lambda}\ c(t, f_\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\langle\, f - \overline{f}, \widetilde{f}\,\rangle}{\|f - \overline{f}\|} - \frac{\langle\, t - f, \widetilde{t}\,\rangle}{\|t - f\|}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^3$ продифференцировать функцию $d(t,f)$ удается лишь в простейших случаях. Приведем такой

П р и м е р. Пусть $G=\{x\in\mathbb{R}^3\colon \|x\|\le 1\|\}$, $t=(t_1,t_2,t_3)$, $t_3>0$, $t_1^2+t_2^2>1$, $f=(0,0,-1)$. Кратчайшая линия $\gamma(t,f)$ лежит в плоскости, содержащей вертикальную ось и точку t и составлена из отрезка $[t,\overline{t}]$ и дуги единичной окружности с концами $\overline{t}, f$, где $\overline{t}$ — точка касания с шаром прямой, содержащей точку t. Поэтому

$$d(t,f)=\|t-\overline{t}\|+k\Big(180^o-\arcsin\frac{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}{\|t\|}-\arccos\frac{1}{\|t\|}\Big),\qquad k=\frac{\pi}{180^o},$$

и вычисления дают

$$\frac{d}{d\lambda}\,d(t_\lambda,f)\Big|_{\lambda=0}=\frac{\langle t,\widetilde{t}\rangle}{\|t-\overline{t}\|}-k\left[\frac{\|r\|}{t_3\|t\|^2}\,\langle t,\widetilde{t}\rangle-\frac{\|t\|}{\|r\|}\langle r,\widetilde{t}\rangle-\frac{1}{\|t-\overline{t}\|\,\|t\|^2}\,\langle t,\widetilde{t}\rangle\right],$$

где $r=(t_1,t_2,0)$.

4. Направление спуска для функции $C(t)=C(t,f)$

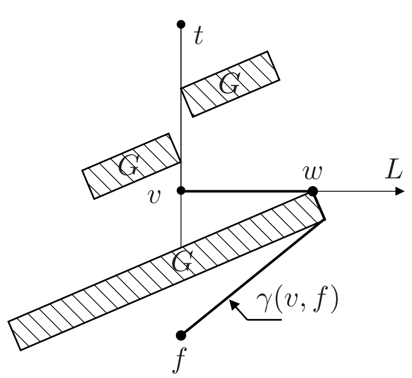
Рассмотрим случай пространства $\mathbb{R}^3$. Пусть $t,f\notin G$, $[t,f\,]\cap\overset{\circ}{G}\ne\varnothing$, $v=v_f$ — ближайшая по метрике d к f точка множества $v(t,G)$. Отметим, что $v\ne t$ и в силу указанного выше условия интервал (t,v) пересекается с G. Возможны два случая (см. рисунок):

а) существует точка w из кратчайшей кривой $\gamma(v,f)$ такая, что $w\ne v$ и $[v,w]\subset\gamma(v,f)$. Обозначим $L=L^a=\dfrac{w-v}{\|w-v\|}$;

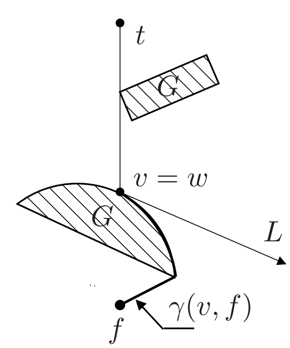
б) такой точки не существует, тогда $v\in v(t,G)\cap G$. В этом случае будем предполагать, что в точке v существует полупрямая, касательная к кривой $\gamma(v,f)$. Обозначим через $L=L^{б}$ единичный вектор, определяющий касательную полупрямую, этот вектор неколлинеарен с прямой $l=l(t,v)=\{\alpha t+(1-\alpha)v\colon \alpha\in\mathbb{R}\}$. В противном случае кривую $\gamma(v,f)$ можно укоротить, выбрав близкую к v точку $x\in\gamma(v,f)$ и взяв ее проекцию на прямую l в качестве точки v_f.

Напомним, что $t_\lambda=t+\lambda\widetilde{t}$. Для заданного направления $\widetilde{t}$ определим плоскость $p=p\,(t,t_\lambda,v_f)$, содержащую точки t,t_λ,v_f $(\lambda>0)$, ε-окрестность $O_\varepsilon=O_\varepsilon([t,v])\cap p$ отрезка $[t,v]$ в плоскости p при малом ε. Прямая l разделяет множество $G_\varepsilon=(O_\varepsilon\cap G)$ на две части G_ε^+, G_ε^-. Пусть $t_\lambda\in G_\varepsilon^-$ $(\lambda>0)$. Будем обозначать

$$B^\pm=G_\varepsilon^\pm\cap(v,t).$$



Случай а)



Случай б)

Рисунок

Для удобства упорядочим точки отрезка $[v,t]$ по возрастанию от v к t и, если множества $B^{\pm}$ не пусты, определим точки

$$b^{\pm}=\max\{g\in B^{\pm}\},\qquad b_{\pm}=\min\{g\in B^{\pm}\}.$$

Для точки $e\in(v,t)$ определим луч

$$L_{\lambda}(e)=\{t_{\lambda}+\alpha(e-t_{\lambda})\colon \alpha>0\}. \tag{4.1}$$

Рассмотрим случай а). Пусть направление $\widetilde{t}$ удовлетворяет условию

$$\langle\widetilde{t},L\rangle<0. \tag{4.2}$$

Если $B^{+}=\varnothing,\ B^{-}=\varnothing$, то возьмем $e\in(v,t)$.

Предположим, что $B^{+}=\varnothing$. Точку e подчиним дополнительному условию $e>b^{-}$, если множество B^{-} непусто. Для точки e определим точку q_{λ}:

$$q_{\lambda}=v_f+\alpha\widetilde{t},\qquad q_{\lambda}\in L_{\lambda}(e).$$

Ввиду неравенства (4.2) имеем

$$\|w-q_{\lambda}\|<\|w-v_f\|$$

и, кроме того, по построению $[t_{\lambda},q_{\lambda}]\subset v(t_{\lambda},G)$ при малом $\lambda>0$. Заменив отрезок $[v_f,w]\subset\gamma(v_f,f)$ на отрезок $[w,q_{\lambda}]$, получаем неравенство

$$d(f,v(t_{\lambda},G))<d(f,v(t,G)).$$

Из него следует, что $\widetilde{t}$ — направление спуска для функции $C(t)=C(t,f)$.

Пусть теперь $B^{-}=\varnothing,\ B^{+}\neq\varnothing$ и $b_{+}>v$. Положим $e\in(v,b_{+}]$.

Предположим, что $B^{+}\neq\varnothing,\ B^{-}\neq\varnothing$ и $b^{-}\le b_{+}$. В этом случае выберем точку e так, что $b^{-}<e\le b_{+}$. Повторяя рассуждения, проведенные выше, убеждаемся, что в двух последних случаях направление $\widetilde{t}$ также является направлением спуска.

Как отмечалось в случае б), через $L=L^{\text{б}}$ обозначается единичный касательный вектор к кривой $\gamma(v,f)$ в точке v. Пусть вектор $\widetilde{t}$ удовлетворяет неравенству

$$\langle\widetilde{t},L\rangle<0. \tag{4.3}$$

Правило определения точки e и, следовательно, луча $L_{\lambda}(e)$ (см. (4.1)) остаются прежними.

На луче $L_{\lambda}(e)$ возьмем точку $q_{\lambda}=v-\dfrac{\|v-e\|}{\|t-e\|}\,t_{\lambda}$, определим точку $r_{\lambda}=v+K\cdot\|v-q_{\lambda}\|\cdot L$ при достаточно большом фиксированном числе K и на кривой $\gamma(v,f)$ найдем точку $w=w_{\lambda}$, ближайшую к r_{λ}.

Поскольку $\langle q_{\lambda}-v,L\rangle>0$ (см. (4.3)), то при малых $\lambda>0$ будет $\|r_{\lambda}-q_{\lambda}\|<\|v-r_{\lambda}\|$ и, более того, с учетом равенства $\|v-q_{\lambda}\|=\dfrac{\|v-e\|}{\|t-e\|}$, получаем

$$\|r_{\lambda}-q_{\lambda}\|\le\|v-r_{\lambda}\|-O(\lambda).$$

Так как $L=L^{\text{б}}$ — касательное направление к кривой $\gamma(v,f)$ в точке v, то

$$\|g_{\lambda}-r_{\lambda}\|=o(\lambda).$$

Из этих неравенств при малых $\lambda>0$ получаем

$$\begin{aligned}\|w_{\lambda}-q_{\lambda}\|&\le\|r_{\lambda}-w_{\lambda}\|+\|r_{\lambda}-q_{\lambda}\|=\|v-r_{\lambda}\|+\|r_{\lambda}-w_{\lambda}\|-\Big(\|v-r_{\lambda}\|-\|r_{\lambda}-q_{\lambda}\|\Big)\\&\le\|v-w_{\lambda}\|+o(\lambda)-O(\lambda)\le d(w_{\lambda},v)+o(\lambda)-O(\lambda)<d(w_{\lambda},v).\end{aligned}$$

Заменив на кратчайшей кривой $\gamma(v,f)$ участок $\gamma(w_{\lambda},v)$ на прямолинейный участок $[w_{\lambda},q_{\lambda}]$, получим неравенство

$$d(f,v(t,G))>d(f,v(t_{\lambda},G)).$$

Итак, установлена

Теорема 3. *Пусть* $t, f \notin G$, $[t,f] \cap \overset{\circ}{G} \neq \varnothing$, $v = v_f$ *— ближайшая к* f *точка из* $v(t,G)$ *и вектор* L *определен следующим образом*:

а) *если существует отрезок* $[v,w] \subset \gamma(v,f)$, $w \neq v$, *то* $L = \dfrac{w-v}{\|w-v\|}$,

б) *если такого отрезка нет, то предполагается существование касательного вектора* L, $\|L\| = 1$, *к кривой* $\gamma(v,f)$ *в точке* v.

Направление $\widetilde{t}$, *удовлетворяющее условию* $\langle \widetilde{t}, L\rangle < 0$, *является направлением спуска для функции* $C(t) = C(t,f)$ *в следующих случаях*:

1) $B^+ = \varnothing$;

2) $B^- = \varnothing$, $B^+ \neq \varnothing$, $b_+ > v$;

3) $B^+ \neq \varnothing$, $B^- \neq \varnothing$, $b^- < b^+$.

З а м е ч а н и е. Если G — выпуклое тело, то кратчайшая кривая на его границе, соединяющая две точки, односторонне дифференцируема в каждой ее точке [3].

5. О дифференцировании функции $C(t,f)$

В данном параграфе рассматривается частный случай задачи, когда для точек t, f и близких к ним точек расстояние $d(f, v(t,G))$ достигается в точке $v_f \in v(t,G)$ такой, что $d(f, v_f) = \|f - v_f\|$, т. е. отрезок $[f, v_f]$ — кратчайшая линия от f до $v(t,G)$ и $[t,f] \cap \overset{\circ}{G} \neq \varnothing$.

Элементарные вычисления показывают справедливость следующей леммы.

Лемма. *Пусть* $t, f, g \in \mathbb{R}^n$, $v^\alpha = \alpha t + (1-\alpha) g$, *тогда минимум*

$$\min\{\|f - v^\alpha\| \colon \alpha \in \mathbb{R}^1\}$$

достигается при

$$\alpha = \alpha(t,g) = \frac{\langle f, t-g\rangle - \langle t, g\rangle + \|g\|^2}{\|t-g\|^2}. \tag{5.1}$$

Пусть $\widetilde{t}$, $\widetilde{f}$ — выбранные направления, $\|\widetilde{t}\| = \|\widetilde{f}\| = 1$, $t_\lambda = t + \lambda \widetilde{t}$, $f_\lambda = f + \lambda \nu \widetilde{f}$ $(0 < \nu \le 1)$. При $\lambda \to 0$ найдется сходящаяся последовательность точек $g_\lambda \in \operatorname{conv}([t_\lambda, v_\lambda] \cap G)$, $g_\lambda \to g \in l(t, v_f) \cap G$, где $v_\lambda = v_{f_\lambda}$ — ближайшая к f_λ точка из $v(t_\lambda, G)$, а conv — выпуклая оболочка.

Нас интересует дифференцируемость функции

$$d(f_\lambda, v(t_\lambda, G))^2 = \|f_\lambda - v_\lambda\|^2, \tag{5.2}$$

где $v_\lambda = v^{\alpha_\lambda} = \alpha_\lambda t_\lambda + (1-\alpha_\lambda) g_\lambda$, $\alpha_\lambda = \alpha(t_\lambda, g_\lambda)$ (см. (5.1)). Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned} &\|f_\lambda - v_\lambda\|^2 = \|f_\lambda\|^2 - 2\langle f_\lambda, v_\lambda\rangle + \|v_\lambda\|^2,\\ &\frac{d}{d\lambda}\|f_\lambda\|^2_{\lambda=0} = 2\nu\langle f, \widetilde{f}\rangle, \quad \frac{d}{d\lambda}\|t_\lambda\|^2_{\lambda=0} = 2\langle t, \widetilde{t}\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

Если дифференцируемы по λ в точке $\lambda = 0$ величины $\|g_\lambda\|$, $\langle t, g_\lambda\rangle$, $\langle f, g_\lambda\rangle$, $\langle \widetilde{f}, g_\lambda\rangle$, то

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}\langle f_\lambda, v_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0} = \langle f, t-g\rangle \frac{d}{d\lambda}\alpha_\lambda\Big|_{\lambda=0} + \frac{d}{d\lambda}\langle (1-\alpha_\lambda) f, g_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0} + \alpha\langle f, \widetilde{t}\rangle + \langle \widetilde{f}, \alpha t + \nu(1-\alpha) g\rangle\\ &\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\|v_\lambda\|^2 = \alpha\|t\|^2 + \Big[(1-2\alpha)\langle f, g\rangle - (1-\alpha)\|g\|^2\Big]\frac{d}{d\lambda}\alpha_\lambda\Big|_{\lambda=0} + (1-\alpha)^2\|g\|\frac{d}{d\lambda}\|g_\lambda\|\Big|_{\lambda=0}\\ &+ \alpha^2\langle t, \widetilde{t}\rangle + \alpha(1-\alpha)\Big[\langle \widetilde{t}, g\rangle + \frac{d}{d\lambda}\langle t, g_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0}\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

Для вычисления производной по λ от $\alpha(t_\lambda, g_\lambda)$ применимы следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{d\lambda}\langle f_\lambda, t_\lambda - g_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0} = \langle f, \widetilde{t}\rangle + \nu\langle \widetilde{f}, t\rangle + \frac{d}{d\lambda}\langle f - \nu\widetilde{f}, g_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0},\\
&\frac{d}{d\lambda}\langle t_\lambda, g_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0} = \langle \widetilde{t}, g\rangle + \frac{d}{d\lambda}\langle t, g_\lambda\rangle,\\
&\frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\|t_\lambda - g_\lambda\|^2 = \langle \widetilde{t}, t - g\rangle - \frac{d}{d\lambda}\langle t, g_\lambda\rangle\Big|_{\lambda=0} + \|g\|\frac{d}{d\lambda}\|g\|\ \frac{d}{d\lambda}\|g_\lambda\|\Big|_{\lambda=0}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

Отметим, что дифференцируемость величины $\langle q, g_\lambda\rangle$ по λ в нуле для всех q, $\|q\| = 1$, влечет дифференцируемость нормы $\|g_\lambda\|$ и, кроме того,

$$\frac{d}{d\lambda}\|g_\lambda\|_{\lambda=0} = \sup_{\|f\|=1}\frac{d}{d\lambda}\langle f, g_\lambda\rangle.$$

Это утверждение следует из хорошо известного соотношения

$$\|x\| = \sup\Big\{\langle x, y\rangle \colon \|y\| \le 1\Big\}.$$

Формулы (5.4), (5.5) останутся справедливыми при условии дифференцируемости нормы $\|v_\lambda\|$ и величин $\langle f, v_\lambda\rangle$, $\langle t, v_\lambda\rangle$, $\langle \widetilde{f}, v_\lambda\rangle$, где $v_\lambda = v_{f_\lambda}$, если в них g_λ заменить на v_λ.

Теорема 4. *Пусть $\widetilde{t}, \widetilde{f}$ — заданные направления, $\|\widetilde{t}\| = \|\widetilde{f}\| = 1$, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$, $f_\lambda = f + \lambda\nu\widetilde{t}$ ($\nu > 0$ фиксировано), $[t_\lambda, f_\lambda] \cap G \ne \varnothing$ при малых $\lambda \in [0, \lambda_*)$. Если для каждого $\lambda \in [0, \lambda_*)$ существуют точки v_λ, g_λ такие, что $v_\lambda \in v(t_\lambda, G)$ — ближайшая к f_λ точка, $g_\lambda \in \operatorname{conv}[t_\lambda, v_\lambda] \cap G$, $[f_\lambda, v_\lambda] \cap \overset{\circ}{G} = \varnothing$, существует предел отношения $(g_\lambda - g_0)/\lambda$ при $\lambda \to +0$, тогда существует производная*

$$\frac{dC(t,f)}{d(\widetilde{t}, \widetilde{f})} = \lim_{\lambda\to+0}\frac{C(t + \lambda\widetilde{t}, f + \lambda\nu\widetilde{f}) - C(t,f)}{\lambda} \tag{5.6}$$

по направлению $(\widetilde{t}, \widetilde{f})$, которая вычисляется в соответствии с формулами (5.1)–(5.5).

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что из ее условий вытекает дифференцируемость величин $\langle t, g_\lambda\rangle$, $\langle f, g_\lambda\rangle$, $\|g_\lambda\|$.

Следствие. *В случае пространства $\mathbb{R}^3$ производная* (5.6) *существует, если G — многогранник с конечным числом граней.*

Рассмотрим эту задачу в случае пространства $\mathbb{R}^2$ и выпуклого множества G. Ради простоты будем считать, что варьируется только точка t. При достаточно малом λ, $0 \le \lambda \le \lambda^*$, прямые $l_\lambda = l(t_\lambda, v_\lambda)$, $l = l(t, v)$ пересекаются. Обозначим $x_\lambda = l_\lambda \cap l$. Поскольку отображение $t \mapsto v(t, G)$ непрерывно по Хаусдорфу в ограниченной области пространства, то $\|v - v_\lambda\| \to 0$ при $\lambda \to 0$. Так как v_λ — ближайшая для f точка из $v(t_\lambda, l)$, то $(t_\lambda, v_\lambda) \cap G \ne \varnothing$. Легко убедиться, что множество

$$\bigcup_{0\le\lambda\le\lambda^*}\Big(\operatorname{conv}\big([t_\lambda, v_\lambda] \cap G\big)\Big)$$

является выпуклой кривой и существует предел $x^* = \lim x_\lambda$, который совпадает с одной из концевых точек отрезка $\operatorname{conv}\big([t, v] \cap G\big)$. Найдем точки t^λ, v^λ на прямой l_λ такие, что

$$\langle t^\lambda - t, l\rangle = \langle v - v^\lambda, l\rangle = 0,$$

тогда

$$\frac{\|v - v^\lambda\|}{\|t - t^\lambda\|} = \frac{\|v - x_\lambda\|}{\|t - x_\lambda\|}, \qquad \frac{\|v^\lambda - v_\lambda\|}{\|v_\lambda - f\|} = \frac{\|t - t^\lambda\|}{\|t - x_\lambda\|} \tag{5.7}$$

и

$$\|f - v_\lambda\| - \|f - v\| = \operatorname{sign}\langle f - v, \widetilde{t}\rangle \|v - v^\lambda\| + o(\|v_\lambda - v^\lambda\|). \tag{5.8}$$

Пусть β — угол между векторами $\widetilde{t}$ и $\dfrac{t^\lambda - t}{\|t^\lambda - t\|}$, а δ_λ — угол между $\widetilde{t}$ и l_λ, тогда

$$\frac{\|t - t^\lambda\|}{\lambda} = \frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta + \delta_\lambda)} \tag{5.9}$$

и в силу (5.8) и (5.7)

$$\frac{\|f - v\| - \|f - v_\lambda\|}{\lambda} = \frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta + \delta_\lambda)} \frac{\|v - x_\lambda\|}{\|t - x_\lambda\|} + \frac{o(\|v_\lambda - v^\lambda\|)}{\lambda}. \tag{5.10}$$

Далее, ввиду (5.7) и (5.9)

$$\frac{\|v_\lambda - v^\lambda\|}{\|v_\lambda - f\|} = \frac{\lambda}{\|t - x_\lambda\|} \frac{\sin\delta_\lambda}{\sin(\beta + \delta_\lambda)},$$

т. е. $o(\|v_\lambda - v^\lambda\|)/\lambda \to 0$ $(\lambda \to 0)$.

Используя (5.10) и соотношение $\delta_\lambda \to (\pi/2) - \beta$ $(\lambda \to 0)$, убеждаемся, что справедлива

Теорема 5. *В случае пространства $\mathbb{R}^2$ и выпуклого множества G имеет место равенство*

$$\frac{dC(t,f)}{d\widetilde{t}} = \operatorname{sign}\langle f - v, \widetilde{t}\rangle \frac{\|v - x^*\|}{\|t - x^*\|} \cdot |\langle \widetilde{t}, n\rangle|,$$

где n — нормальный вектор к прямой l, $x^* = \lim_{\lambda\to 0} x_\lambda$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Видимость объекта для наблюдателя с неточно заданными коэффициентами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 21–28.
2. **Бердышев В.И.** Объект и наблюдатель. Задача сопровождения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 7–9.
3. **Либерман И.М.** Геофизические линии на выпуклой поверхности // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. С. 310–313.

Бердышев Виталий Иванович
академик
директор ИММ УрО РАН
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 28.08.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 514.17; 532.5

К МЕХАНИКЕ ВИНТОВЫХ ПОТОКОВ В ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе найдено общее решение задачи о движении несжимаемой сплошной среды, заполняющей в каждый момент времени целиком область $D \subset R^3$ при условии, что D — аксиально симметричный цилиндр, а движение подчиняется уравнению Эйлера вместе с уравнением непрерывности для несжимаемой среды и принадлежит классу винтовых (по терминологии И. С. Громеки) течений, чьи линии тока и вихревые линии совпадают. Этот класс строится с помощью метода преобразования геометрического строения векторного поля. Решение охарактеризовано в теореме 2 в конце статьи.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. On the mechanics of helical flows in an ideal incompressible viscous continuous medium.

We find a general solution to the problem on the motion in an incompressible continuous medium occupying at any time a whole domain $D \subset R^3$ under the conditions that D is an axially symmetric cylinder and the motion is described by the Euler equation together with the continuity equation for an incompressible medium and belongs to the class of planar–helical flows (according to I.S. Gromeka's terminology), in which sreamlines coincide with vortex lines. This class is constructed by the method of transformation of the geometric structure of a vector field. The solution is characterized in Theorem 2 in the end of the paper.

Keywords: scalar fields, vector fields, tensor fields, curl, Euler equation, Gromeka's problem.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{p}{\rho} + \mathbf{f}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

которую можно использовать при описании движения несжимаемой сплошной среды, заполняющей в любой момент времени t некоторую область $D \subset R^3$, в предположении, что вязкость и теплопроводность у среды отсутствуют. Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — скорость движения среды в точке $\mathbf{x} \in D$ в момент времени t, ρ — плотность среды ($\rho = \mathrm{const}$), $p = p(\mathbf{x}, t)$ — давление среды, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ — сила, действующая на единицу массы среды со стороны внешнего потенциального силового поля, $\boldsymbol{\nabla}$ — дифференциальный оператор Гамильтона.

Задача состоит в том, чтобы найти решения системы уравнений (1) в классе $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ векторных полей $\mathbf{v}$ (определение класса ниже) в случае, когда D — цилиндрическая аксиально симметричная область. Считаем, что ось цилиндра — ось Ox_3 декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Под классом $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ здесь подразумевается класс векторных полей, принадлежащий классу продольно вихревых полей, исчерпывающий все гладкие в D решения системы уравнений

$$(\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})) = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \qquad [\mathbf{v}(\mathbf{x}), \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})] = 0, \tag{2}$$

при условии

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0 \ \text{ п. в. } \ D, \tag{3}$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = [\mathbf{e}_3, [\mathbf{x}, \mathbf{e}_3]]/|[\mathbf{x}, \mathbf{e}_3]|$ есть единичное векторное поле.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00462, 12-01-0004, 11-01-00347). Исследования третьего автора поддержаны также Министерством образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо прежде построить класс $\mathfrak{L}_{\rm sh}(D)$, т.е. решить систему уравнений (2) при условии (3).

1. Для описания полей используем цилиндрическую систему координат (r,γ,x_3) с базисом

$$\bigl\{\mathbf{e}_r(\gamma)=\mathbf{e}_1\cos\gamma+\mathbf{e}_2\sin\gamma,\ \mathbf{e}_\gamma(\gamma)=-\mathbf{e}_1\sin\gamma+\mathbf{e}_2\cos\gamma,\ \mathbf{e}_3\bigr\}. \tag{4}$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(r,\gamma,x_3)=r\mathbf{e}_r(\gamma)+x_3\mathbf{e}_3, \tag{5}$$

$$D=\bigl\{\mathbf{x}(r,\gamma,x_3)\colon r\in[0,r_0),\ \gamma\in[0,2\pi),\ x_3\in R\bigr\}, \tag{6}$$

где r_0 — радиус цилиндрической границы области D $(0<r_0<+\infty)$;

$$\mathbf{n}(\mathbf{x})=\mathbf{n}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3))=\mathbf{e}_r(\gamma);$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x})=\mathbf{v}(\mathbf{x}(r,\gamma,x_3))=\mathbf{v}(r,\gamma,x_3)=v_r(r,\gamma,x_3)\mathbf{e}_r(\gamma)+v_\gamma(r,\gamma,x_3)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+v_3(r,\gamma,x_3)\mathbf{e}_3, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}=\mathbf{e}_r(\gamma)\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{e}_\gamma(\gamma)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\gamma}+\mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

2. Первое из уравнений системы (2) в цилиндрических координатах выражается формулой $(\mathbf{e}_r(\gamma),\mathbf{v}(r,\gamma,x_3))=0$ и удовлетворяется, если и только если $v_r(r,\gamma,x_3)=0$ в D. Поле 7 при этом условии принимает вид

$$\mathbf{v}(r,\gamma,x_3)=v_\gamma(r,\gamma,x_3)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+v_3(r,\gamma,x_3)\mathbf{e}_3. \tag{8}$$

Поле (8) можно построить, следуя [1] путем преобразования, например, единичного векторного поля $\boldsymbol{\alpha}(r,\gamma,x_3)\equiv\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{v}(r,\gamma,x_3)=\sigma(r,\gamma,x_3)\widehat{\Omega}(\psi(r,\gamma,x_3),\mathbf{l}(\gamma))\mathbf{e}_3=\sigma(r,\gamma,x_3)\bigl\{\mathbf{e}_3\cos\psi(r,\gamma,x_3)+[\mathbf{l}(\gamma),\mathbf{e}_3]\sin\psi(r,\gamma,x_3)\bigr\}. \tag{9}$$

Здесь

$$\sigma=\sigma(r,\gamma,x_3), \tag{10}$$

$$\psi=\psi(r,\gamma,x_3) \tag{11}$$

некоторые достаточно гладкие в D (6) скалярные поля, $\mathbf{l}(\gamma)=-\mathbf{e}_r(\gamma)$, $[\mathbf{l}(\gamma),\mathbf{e}_3]=\mathbf{e}_\gamma(\gamma)$ и считаем, что

$$\sigma(r,\gamma,x_3)\neq 0 \ \text{ в } \ D, \tag{12}$$

а $\psi(r,\gamma,x_3)$ ограничено в D. Координаты векторного поля (8) через параметры (10), (11) преобразования (9) выражаются формулами

$$v_\gamma(r,\gamma,x_3)=\sigma(r,\gamma,x_3)\sin\psi(r,\gamma,x_3),\qquad v_3(r,\gamma,x_3)=\sigma(r,\gamma,x_3)\cos\psi(r,\gamma,x_3).$$

Примем обозначение

$$\boldsymbol{\beta}(r,\gamma,x_3)=\mathbf{e}_\gamma(\gamma)\sin\psi(r,\gamma,x_3)+\mathbf{e}_3\cos\psi(r,\gamma,x_3) \tag{13}$$

и перепишем формулу (9) в виде

$$\mathbf{v}(r,\gamma,x_3)=\sigma(r,\gamma,x_3)\boldsymbol{\beta}(r,\gamma,x_3). \tag{14}$$

Сформулируем следующее достаточно очевидное

Предложение 1. *Векторное поле* (14) *непрерывно в области* D (6)*, если и только если поля* (10), (11) *непрерывны в* D *и удовлетворяют в точках прямой* $\mathbf{x}=x_3\mathbf{e}_3\subset D$ *условиям:* $\sigma(0,\gamma,x_3)=\sigma(0,x_3)$, $\psi(0,\gamma,x_3)=n\pi$, *где* n *— некоторое фиксированное целое число. При этом* $n\pi-2\pi\leq\psi(r,\gamma,x_3)\leq n\pi+2\pi$.

Далее, пусть $\mathbf{e}$ — произвольный фиксированный орт. Производная поля (14) в направлении $\mathbf{e}$ при $r \neq 0$ выражается формулой

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla}\sigma) + \sigma\Big\{[\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r](\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla}\psi) - \mathbf{e}_r(\mathbf{e}, \mathbf{e}_\gamma)\frac{1}{r}\sin\psi\Big\},$$

где аргументы полей для сокращения записи опускаются. При условиях предложения 1 и гладких полях σ, ψ эта производная имеет предел

$$\lim_{r\to 0}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = (-1)^n\Big\{\mathbf{e}_3(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla}\sigma)\Big|_{r=0} + \sigma(0, x_3)\Big[\mathbf{e}_\gamma(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla}\psi)\Big|_{r=0} - \mathbf{e}_r(\mathbf{e}, \mathbf{e}_\gamma)\frac{\partial}{\partial r}\psi(r, \gamma, x_3)\Big|_{r=0}\Big]\Big\}.$$

Последний не зависит от γ, если только $\partial\sigma/\partial r\big|_{r=0} = 0$, $(\partial\sigma/\partial\gamma)/r\big|_{r=0} = 0$, $(\partial\psi/\partial\gamma)/r\big|_{r=0} = 0$ и $\partial\psi/\partial r\big|_{r=0}$ не зависит от γ. Учитывая это, сформулируем следующее

Предложение 2. *Векторное поле* $\mathbf{v}$ (14) *непрерывно дифференцируемо в области* D (6) *по любому фиксированному направлению* $\mathbf{e}$ *при условиях предложения* 1, *если и только если поля* (10), (11) *непрерывно дифференцируемы в* D *и удовлетворяют в точках прямой* $\mathbf{x} = x_3\mathbf{e}_3 \subset D$ *условиям*

1) $(\partial/\partial r)\sigma(r, \gamma, x_3)\big|_{r=0} = 0, \quad (1/r)(\partial/\partial\gamma)\sigma(r, \gamma, x_3)\big|_{r=0} = 0;$

2) $(\partial/\partial r)\psi(r, \gamma, x_3)\big|_{r=0} = \psi'_r(0, x_3), \quad (1/r)(\partial/\partial\gamma)\psi(r, \gamma, x_3)\big|_{r=0} = 0;$

при которых

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\Big|_{r=0} = (-1)^n\Big\{\frac{\partial\sigma(0, x_3)}{\partial x_3}(\mathbf{e}_3, \mathbf{e})\mathbf{e}_3 + \sigma(0, x_3)\psi'_r(0, x_3)[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}]\Big\}.$$

3. Найдем дивергенцию и ротор поля $\mathbf{v}$ (14). Так, при $r \neq 0$, используя формулы[2] $\operatorname{div}\mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla}\sigma, \boldsymbol{\beta}) + \sigma\operatorname{div}\boldsymbol{\beta}$, $\operatorname{div}\mathbf{e}_\gamma = 0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\nabla}\psi, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r])$, получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\sigma) + \sigma(\boldsymbol{\nabla}\psi, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]), \tag{15}$$

а при $r = 0$ определим $\operatorname{div}\mathbf{v}$ по непрерывности формулой

$$\operatorname{div}\mathbf{v}\Big|_{r=0} = (-1)^n\frac{\partial\sigma(0, x_3)}{\partial x_3}, \tag{16}$$

исходя из условий предложения 2. Далее при $r \neq 0$, используя формулы $\operatorname{rot}\mathbf{v} = [\boldsymbol{\nabla}\sigma, \boldsymbol{\beta}] + \sigma\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}$, $\operatorname{rot}\mathbf{e}_\gamma = \mathbf{e}_3/r$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\nabla}\psi, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]] + (1/r)\sin\psi\mathbf{e}_3$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = [\boldsymbol{\nabla}\sigma, \boldsymbol{\beta}] + \sigma\Big\{[\boldsymbol{\nabla}\psi, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]] + \frac{1}{r}\sin\psi\mathbf{e}_3\Big\}, \tag{17}$$

а при $r = 0$, следуя условиям предложения 2, положим по непрерывности, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}\Big|_{r=0} = (-1)^n\sigma(0, x_3)\psi'_r(0, x_3)\mathbf{e}_3. \tag{18}$$

Разложим поле (17) по векторам $\{\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]\}$. Получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) + \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_r, \operatorname{rot}\mathbf{v}) + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]([\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r], \operatorname{rot}\mathbf{v}). \tag{19}$$

Здесь

$$(\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) = \sigma\Big[(\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\nabla}\psi) + \frac{1}{r}\sin\psi\cos\psi\Big], \tag{20}$$

$$(\mathbf{e}_r, \operatorname{rot}\mathbf{v}) = ([\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r], \boldsymbol{\nabla}\sigma) - \sigma(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\psi), \tag{21}$$

[2]См., например, [2, табл. 5.5-1], где приведены правила действий с оператором $\boldsymbol{\nabla}$.

$$([\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r], \operatorname{rot} \mathbf{v}) = -(\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\nabla}\sigma) - \frac{\sigma}{r}\sin^2\psi. \tag{22}$$

При $r \neq 0$ из (13), (19)–(22) выводим

$$[\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot} \mathbf{v}] = \boldsymbol{\nabla}\sigma - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\sigma) + \mathbf{e}_r\frac{\sigma}{r}\sin^2\psi - [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]\sigma(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\psi), \tag{23}$$

а при $r = 0$ будем иметь

$$[\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot} \mathbf{v}]\Big|_{r=0} = 0, \tag{24}$$

поскольку $\boldsymbol{\beta}\big|_{r=0} = (-1)^n\mathbf{e}_3$ и $\operatorname{rot}\mathbf{v}\big|_{r=0}$ (см. формулу (18)) коллинеарны.

4. Обратимся ко второму и третьему уравнениям системы (2) и запишем их для $\mathbf{v}$ (14). При $r = 0$ второе уравнение принимает вид $\partial\sigma(0, x_3)/\partial x_3 = 0$ в силу (16) и удовлетворяется, если и только если

$$\sigma(0, x_3) = \sigma(0), \tag{25}$$

где $\sigma(0)$ — некоторая отличная от нуля (см. условие (12)) постоянная. Третье же уравнение при $r = 0$ удовлетворяется тождественно в силу (24). При $r \neq 0$ рассматриваемые уравнения можно выразить, учитывая формулы (15), (23) и условие (12), следующими формулами:

$$(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\ln|\sigma|) + (\boldsymbol{\nabla}\psi, [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r]) = 0, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\ln|\sigma| - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\ln|\sigma|) - [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{e}_r](\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nabla}\psi) + \mathbf{e}_r\frac{1}{r}\sin^2\psi = 0. \tag{27}$$

Исключая второе слагаемое в (27) с помощью (26), придем к уравнению

$$\boldsymbol{\nabla}\ln|\sigma| = \mathbf{G}, \tag{28}$$

где

$$\mathbf{G} = [\boldsymbol{\nabla}\psi, \mathbf{e}_r] - \frac{1}{r}\sin^2\psi\mathbf{e}_r, \tag{29}$$

а при $r = 0$ будем полагать по непрерывности, что

$$(\boldsymbol{\nabla}\ln|\sigma|)\Big|_{r=0} = 0, \qquad \mathbf{G}\Big|_{r=0} = 0, \tag{30}$$

исходя из условий предложения 2 и условия (25).

Векторное поле $\mathbf{G}$, определяемое формулой (29) и второй из формул (30), непрерывно в D при условиях предложения 2 и при условии (25).

Уравнение (28) относительно $\ln|\sigma|$ при заданном ψ определяет $\ln|\sigma|$ как однозначную функцию $\mathbf{x}(r, \gamma, x_3)$, если и только если поле $\mathbf{G}$ потенциально в D, т. е. циркуляция поля $\mathbf{G}$ по любому спрямляемому замкнутому контуру $\mathfrak{L} \subset D$ равна нулю. Поскольку область D односвязна, это условие можно заменить условием

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = 0 \text{ в } D, \tag{31}$$

если допустить, что $\operatorname{rot}\mathbf{G}$ — непрерывное в D поле.

5. Найдем ротор поля $\mathbf{G}$ (29). При $r \neq 0$, используя тождество $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] \equiv \mathbf{c}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{c}) - (\mathbf{c}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{d} + (\mathbf{d}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{c}$ и формулы $(\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{e}_r) = 1/r$, $(\boldsymbol{\nabla}\psi, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\gamma(\partial\psi/\partial\gamma)/r^2$, $(\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\nabla}) = \partial/\partial r$, $[\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{e}_r] = 0$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = \frac{1}{r}\boldsymbol{\nabla}\psi - \mathbf{e}_r\Delta\psi + \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{\nabla}\psi - \mathbf{e}_\gamma\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} + \Big[\mathbf{e}_r, \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\sin^2\psi\Big],$$

где $\Delta = (1/r)(\partial/\partial r)r(\partial/\partial r) + (1/r^2)(\partial^2/\partial\gamma^2) + (\partial^2/\partial x_3^2)$ — дифференциальный оператор Лапласа. Отсюда, переходя к явным выражениям, выводим

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = -\mathbf{e}_r\Big(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}\Big) + \mathbf{e}_\gamma\Big(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\gamma} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\sin^2\psi\Big) + \mathbf{e}_3\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\gamma}\frac{1}{r}\sin^2\psi\Big). \tag{32}$$

Будем полагать, что скалярное поле ψ (11) удовлетворяет условиям предложений 1 и 2 и ограничениям следующего условия.

У с л о в и е 1. Скалярное поле ψ (11) имеет непрерывную при $r = 0$, не зависящую от γ производную второго порядка по r, равную $\psi''_{rr}(0, x_3)$, а соответствующие ему скалярные поля $(1/r^2)(\partial^2\psi/\partial\gamma^2)$, $\partial^2\psi/\partial x_3^2$, $(\partial/\partial r)(1/r)(\partial\psi/\partial\gamma)$, $(1/r)/(\partial/\partial r)r(\partial\psi/\partial x_3)$ непрерывны в области D.

Тогда ротор поля $\mathbf{G}$ поддается определению как непрерывное в D векторное поле, если положить $\operatorname{rot}\mathbf{G}\Big|_{r=0} = 0$.

Условие (31) согласно (32) выполняется при $r \neq 0$, если и только если скалярное поле ψ (11) удовлетворяет условиям, которые выражаются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\gamma^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial r}r\dfrac{\partial\psi}{\partial\gamma} - \dfrac{\partial}{\partial x_3}\dfrac{1}{r}\sin^2\psi = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}r\dfrac{\partial\psi}{\partial x_3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\dfrac{1}{r}\sin^2\psi = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Скалярное поле ψ удовлетворяет первому из условий (33) и условиям предложения 1, если и только если ψ при любом фиксированном $r \in (0, r_0)$ есть гармоническая ограниченная функция переменных $x = x_3 \in R$, $y = r\gamma \in R$. Но функция ψ, гармоническая и ограниченная во всей открытой плоскости переменных x, y при любом фиксированном r есть постоянная (см. теорему 6 в [3, гл. III, § 1, п. 41, с. 192]). Этой постоянной при каждом $r \in (0, r_0)$ может присваиваться свое значение. Стало быть, ограниченное скалярное поле ψ, удовлетворяющее первому из условий (33), может зависеть только от r.

Таким образом, скалярное поле ψ (11), ограниченное и гладкое в области D (6), удовлетворяет первому из условий (33), если и только если

$$\psi(r, \gamma, x_3) = \psi(r) \quad \text{в} \quad D, \tag{34}$$

где $\psi(r)$ — некоторая ограниченная и гладкая в $[0, r_0)$ функция r, удовлетворяющая при $r = 0$ (см. предложение 1) условию

$$\psi(0) = n\pi. \tag{35}$$

Что же касается некоторых из ограничений на ψ, указанных в предложении 2, и ограничений, указанных в условии 1, то при условии (34) в них нет необходимости. Отметим также, что второе и третье из условий (33) при ψ (34) удовлетворяются тождественно.

Векторное поле $\mathbf{G}$ (29) при условии (34) выражается формулой

$$\mathbf{G} = -\frac{1}{r}\sin^2\psi(r)\mathbf{e}_r(\gamma), \qquad r \in (0, r_0). \tag{36}$$

Формула (36) и вторая из формул (30) определяют $\mathbf{G}$ как непрерывное в области D (6) векторное поле. Это поле имеет в D непрерывную производную

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{G} = \frac{1}{r}\sin\psi\Big[\Big(\frac{1}{r}\sin\psi - 2\psi'\cos\psi\Big)\mathbf{e}_r(e, \mathbf{e}_r) - \frac{1}{r}\sin\psi\mathbf{e}_\gamma(\mathbf{e}, \mathbf{e}_\gamma)\Big]$$

по любому фиксированному направлению $\mathbf{e}$, если положить

$$(\mathbf{e}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{G}\Big|_{r=0} = (\psi'(0))^2[\mathbf{e}_3(\mathbf{e}, \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}],$$

где $\psi' = d\psi/dr$, и удовлетворяет условию (31).

6. Вернемся к системе уравнений (26), (28), эквивалентной системе уравнений (26), (27). При ψ (34) и $\mathbf{G}$ (36) уравнение (28) записывается в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\ln|\sigma| = -\frac{1}{r}\sin^2\psi\mathbf{e}_r.$$

Разрешая это уравнение относительно σ, придем к формуле

$$\sigma = \sigma(r) = \sigma(0)\exp\left\{-\int\limits_0^r \frac{1}{\xi}\sin^2\psi(\xi)\,d\xi\right\}, \tag{37}$$

определяющей скалярное поле σ (10) в области D как однозначную гладкую функцию $\mathbf{x}(r,\gamma,x_3)$ при заданном в D гладком скалярном поле ψ (34), удовлетворяющем условию (35). Что же касается уравнения (26), то при ψ (34) и $\mathbf{G}$ (36) оно удовлетворяется тождественно, поскольку поле $\boldsymbol{\beta}$ (см., например, (13)) ортогонально полю $\mathbf{e}_r$.

Таким образом, векторное поле $\mathbf{v}$ (14) есть гладкое решение в D системы уравнений (2), если и только если

$$\mathbf{v}(r,\gamma,x_3) = \sigma(r)\boldsymbol{\beta}(r,\gamma), \tag{38}$$

где поле σ определяется формулой (37), а единичное поле $\boldsymbol{\beta}$ — формулой

$$\boldsymbol{\beta}(r,\gamma) = \mathbf{e}_\gamma(\gamma)\sin\psi(r) + \mathbf{e}_3\cos\psi(r). \tag{39}$$

Ротор поля (38) выражается (см. (19), (20), (34), (37)) формулой

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(r,\gamma,x_3) = \lambda(r,\gamma,x_3)\mathbf{v}(r,\gamma,x_3). \tag{40}$$

Здесь

$$\lambda(r,\gamma,x_3) = \lambda(r,\psi'(r),\psi(r)) = \lambda(r) \tag{41}$$

есть непрерывное в области D скалярное поле, определяемое формулами

$$\lambda(r) = \begin{cases} 2\psi'(0), & r = 0, \\ \psi'(r) + \dfrac{1}{2r}\sin 2\psi(r) = 0, & r \in (0, r_0), \end{cases} \tag{42}$$

и удовлетворяющее условию (3), если $\psi' + 1/(2r)\sin 2\psi \neq 0$ п. в. в D.

Резюмируя сказанное, сформулируем конструктивное определение класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$, которое дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Соответствие* $\mathbf{x}(r,\gamma,x_3) \to \mathbf{v} = \mathbf{v}(r,\gamma,x_3)$ *определяет в области* D (6) *векторное поле класса* $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$*, если и только если это соответствие устанавливается правилом*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(r,\gamma,x_3) = \mathbf{v}(r,\gamma) = \sigma(0)\exp\left\{-\int\limits_0^r \frac{1}{\xi}\sin^2\psi(\xi)\,d\xi\right\}[\sin\psi(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \cos\psi(r)\mathbf{e}_3],$$

где $\sigma(0)$ *— произвольная не равная нулю постоянная,* $\psi(r)$ *— гладкая ограниченная* (*см. предложение* 1) *в промежутке* $[0, r_0)$ *функция, причем такая, что* $\psi(0) = n\pi$ (n *— некоторое фиксированное целое число*) *и* $\psi'(r) + (1/(2r))\sin 2\psi(r) \neq 0$ *п. в. в* $[0, r_0)$.

З а м е ч а н и е 1. Ротор любого из полей класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ выражается формулой (40) через само поле и через непрерывное в D (6) почти всюду отличное от нуля скалярное поле (41), определяемое в явном виде через функцию (42).

7. Согласно теореме 1 векторное поле класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ задается посредством подходящего, независимо задаваемого, скалярного поля $\psi = \psi(r)$, а скалярное поле $\sigma = \sigma(r)$ выражается через $\psi(r)$ формулой (37). Вместе с тем существуют и другие возможности для задания векторных полей класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$. Так, поля $\sigma(r), \psi(r)$ можно рассматривать как пару (σ, ψ) полей, сопряженных в смысле равенств

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r}\sin^2\psi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \tag{43}$$

соответственно при $r \neq 0$ и при $r = 0$ (см. уравнение (28) при $\mathbf{G}$ (36) и вторую из формул (30)). Компоненты σ, ψ пары (σ, ψ) равноправны и в качестве независимо задаваемого может браться скалярное поле $\sigma = \sigma(r)$, где $\sigma(r)$ — гладкая в промежутке $[0, r_0)$ функция, модуль которой монотонно убывает с ростом r, а ее производная при $r = 0$ равна нулю.

Векторное поле $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$ можно задать также формулой

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \gamma, x_3) = \mathbf{v}(r, \gamma) = w_\gamma(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + w_3(r)\mathbf{e}_3, \tag{44}$$

используя пару (w_γ, w_3) скалярных полей

$$w_\gamma = w_\gamma(r), \qquad w_3 = w_3(r), \tag{45}$$

сопряженных в смысле равенств

$$\begin{gathered} w_\gamma(r)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rw_\gamma(r) + w_3(r)w_3'(r) = 0, \qquad r \in (0, r_0), \\ 2w_\gamma(0)w_\gamma'(0) + w_3(0)w_3'(0) = 0, \qquad r = 0, \end{gathered} \tag{46}$$

где $w_\gamma' = dw_\gamma/dr$, $w_3' = dw_3/dr$ и производная $(1/r)(d/dr)rw_\gamma\big|_{r=0} = 2w_\gamma'(0)$ определена по непрерывности. Равенства (46) выражают условие коллинеарности поля (44) полю его ротора

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(r, \gamma, x_3) = \operatorname{rot}\mathbf{v}(r, \gamma) = \begin{cases} 2w_\gamma'(0)\mathbf{e}_3, & r = 0, \\ -w_3'(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(rw_\gamma(r))\mathbf{e}_3, & r \in (0, r_0). \end{cases} \tag{47}$$

Формула (44) определяет гладкое в области D (6) векторное поле класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$, если и только если $w_\gamma(r)$, $w_3(r)$ — гладкие в промежутке $[0, r_0)$ функции, почти всюду отличные от нуля, удовлетворяющие равенствам (46), а также следующим условиям:

$$w_\gamma(0) = 0; \quad w_\gamma(r) \neq 0 \ \text{ и } \ \frac{d}{dr}rw_\gamma(r) \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ (0, r_0); \tag{48}$$

$$w_3(0) \neq 0; \quad w_3'(0) = 0; \quad w_3'(r) \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ (0, r_0). \tag{49}$$

Следует заметить, что в паре $(w_\gamma(r), w_3(r))$ независимо задаваемой является лишь одна из функций. Другая определяется из равенств (46), но определяется в силу нелинейности этих равенств как неоднозначная функция, у которой нужно выделять однозначные, гладкие в промежутке $[0, r_0)$ ветви, что создает некоторые неудобства. Учитывая это и имея в виду работу И. С. Громеки [4], обсудим еще одну из возможностей, когда задаваемой является функция $\lambda(r)$ (см. формулы (40)–(42)). Согласно [5], именно работа [4] положила начало теории, изучающей установившееся движение жидкости, которое в [4] определяется системой уравнений

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}), \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \qquad (\lambda(\mathbf{x}) \not\equiv 0) \tag{50}$$

и называется установившимся винтовым движением (или кратко, винтовым движением)[3]. В [4] И. С. Громека устанавливает некоторые общие свойства таких движений и находит частные решения в R^3 системы уравнений (50) в постановке, предполагающей выполнение условия

$$\lambda(\mathbf{x}) \equiv k, \tag{51}$$

[3]Название “винтовое движение” дается рассматриваемому движению и в работе [6]. За рубежом винтовое движение известно под названием “движение Бельтрами”, хотя работа [7] Бельтрами появилась позднее. В [1] векторное поле $\mathbf{a}$ в области $D \subset R^3$, линии которого всюду в D совпадают с его вихревыми линиями (линиями поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$) и $\operatorname{rot}\mathbf{a} \neq 0$ п. в. в D, называется для краткости продольно вихревым в D.

где k — отличная от нуля постоянная.

Установим связь между функциями (45) пары (w_γ, w_3) и функцией $\lambda(r)$. Используя формулы $w_\gamma = \sigma\sin\psi,\ w_3 = \sigma\cos\psi$, связывающие функции (45) с функциями σ, ψ (сравни (38), (39) и (44)), формулы (42), (43) и формулы

$$w'_\gamma = \sigma'\sin\psi + \sigma\psi'\cos\psi = \sigma'\frac{w_\gamma}{\sigma} + w_3\Big(\lambda - \frac{w_\gamma w_3}{r\sigma^2}\Big),$$

$$w'_3 = \sigma'\cos\psi - \sigma\psi'\sin\psi = \sigma'\frac{w_3}{\sigma} - w_\gamma\Big(\lambda - \frac{w_\gamma w_3}{r\sigma^2}\Big),$$

где аргументы для сокращения записи опускаются, выводим

$$\begin{cases} w'_\gamma(r) = -\dfrac{1}{r}w_\gamma(r) + \lambda(r)w_3(r), \\ w'_3(r) = -\lambda(r)w_\gamma(r), \end{cases} \tag{52}$$

где при $r = 0$ следует брать определенное по непрерывности значение $w_\gamma(r)/r\big|_{r=0} = w'_\gamma(0)$.

Если $\lambda(r)$ в (52) рассматривать как заданную в промежутке $[0, r_0)$ функцию, непрерывную и отличную от нуля, п. в. в $[0, r_0)$, то гладкие решения системы (52), удовлетворяющие условиям (48), (49), определяют пару функций $w_\gamma(r),\ w_3(r)$, сопряженных в смысле равенств (46), поскольку равенства (46) при подстановке $w'_\gamma(r),\ w'_3(r)$ (52) удовлетворяются тождественно. А такой паре функций по правилу (44) ставится в соответствие векторное поле $\mathbf{v} \in \mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(D)$.

Следовательно, интегрирование системы уравнений (50), дополненной условием (3) и условием, которое выражается первым уравнением системы (2), сводится к интегрированию системы (52) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при заданной функции $\lambda(r)$.

Если класс задаваемых функций $\lambda(r)$ сузить до класса C^1, а класс решений системы (52) — до класса C^2, то систему (52) можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \lambda(r)w''_3(r) + \Big[\dfrac{\lambda(r)}{r} - \lambda'(r)\Big]w'_3(r) + \lambda^3(r)w_3(r) = 0, \\ w'_3(r) = -\lambda(r)w_\gamma(r), \end{cases} \tag{53}$$

где $w''_3(r) = d^2w_3(r)/dr^2,\ \lambda'(r) = d\lambda(r)/dr$, и нахождение требуемой пары сводится тогда к решению одного линейного дифференциального уравнения, но уже второго порядка.

При $\lambda(r) = k$ в $[0, r_0)$ в частности (см. предположение (51)) из (53), используя замену $z = kr,\ w_\gamma(r) = \widetilde{w}_\gamma(z),\ w_3(r) = \widetilde{w}_3(z)$ и полагая $r_0 = +\infty$, выводим систему

$$\frac{d^2}{dz^2}\widetilde{w}_3(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}\widetilde{w}_3(z) + \widetilde{w}_3(z) = 0, \qquad \widetilde{w}_\gamma(z) = -\frac{d}{dz}\widetilde{w}_3(z),$$

которая удовлетворяется (см., например, [2, п. 21.8–2]), если $\widetilde{w}_3(z) = CJ_0(z)$, $\widetilde{w}_\gamma(z) = CJ_1(z)$, где C — произвольная постоянная,

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(z\sin\varphi)\,d\varphi \quad \text{и} \quad J_1(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin(z\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

функции Бесселя порядка ноль и один. Функциям $w_\gamma(r) = CJ_1(kr)$, $w_3(r) = CJ_0(kr)$ по правилу (44) ставится в соответствие векторное поле

$$\mathbf{v}(r, \gamma, x_3) = C[J_1(kr)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + J_0(kr)\mathbf{e}_3], \tag{54}$$

принадлежащее классу $\mathfrak{L}_{\mathrm{sh}}(R^3)$, если $C \neq 0$.

Векторное поле (54) было найдено впервые в [4], но иным способом. В [4] находится при условии (51) сначала частное решение в R^3 уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, линии которого в каждой из плоскостей, параллельных некоторой фиксированной плоскости, — параллельные прямые, а угол между линиями в соседних плоскостях зависит линейно от расстояния между плоскостями. Затем это решение расширяется при $\lambda \equiv k$ до поля (54), линии которого, совпадая по-прежнему с вихревыми линиями, криволинейны и "намотаны" на цилиндрические поверхности.

Идея, стоящая за использованным в [4] способом, интересна в методическом отношении. Выразим ее в терминах преобразований и распространим метод [1] построения векторных полей с определенными вихревыми свойствами на случай преобразований, не изменяющих взаимную ориентацию линий отображаемого поля и поля его ротора.

8. Пусть в некоторой области $D \subset R^3$ задано векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_i \tag{55}$$

относительно декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, и пусть полю $\mathbf{a}$ соответствует поле его ротора

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{rot} \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)], \tag{56}$$

где

$$\boldsymbol{\nabla} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{57}$$

Каждой точке $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) \in D$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{b}$ по правилу

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3) = æ\widehat{\Omega}\mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3), \tag{58}$$

где æ — некоторая постоянная, $\widehat{\Omega}$ — поворот на некоторый фиксированный угол вокруг оси, проходящей через точку $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ в некотором фиксированном направлении. Тем самым зададим в области D векторное поле $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3)$ как гладкое преобразование поля

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3). \tag{59}$$

Соответствие $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) \to \mathbf{a}'$ устанавливается с помощью правила (55) путем замены $x_n \to x_n'(x_1, x_2, x_3),\ n = 1, 2, 3$, аргументов в (55):

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_n \to x_n'(x_1,x_2,x_3)} = \mathbf{a}'(x_1'(x_1, x_2, x_3), x_2'(x_1, x_2, x_3), x_3'(x_1, x_2, x_3)). \tag{60}$$

Здесь

$$x_n'(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^{3} (\mathbf{e}_n, \widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{e}_m)x_m, \qquad n = 1, 2, 3, \tag{61}$$

где $(\mathbf{e}_n, \widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{e}_m) = (\widehat{\Omega}\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m)$ в силу ортогональности преобразования $\widehat{\Omega}$.

Найдем ротор поля $\mathbf{b}$ (58). Для этого запишем сначала

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = [\boldsymbol{\nabla}, æ\widehat{\Omega}\mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3)] = æ\widehat{\Omega}[\widehat{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3)] = æ\widehat{\Omega} \sum_{i=1}^{3} \Big[\widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}\Big], \tag{62}$$

используя формулы $\widehat{\Omega}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = [\widehat{\Omega}\mathbf{c}, \widehat{\Omega}\mathbf{d}]$ и (57). Учитывая далее, что

$$\frac{\partial \mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{a}(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_n'}\Big|_{x_k' = x_k'(x_1,x_2,x_3)} \frac{\partial x_n{}'(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{n=1}^{3} (\mathbf{e}_n, \widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{e}_i) \frac{\partial \mathbf{a}(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_n'}\Big|_{x_k'=x_k'(x_1,x_2,x_3)},$$

из (62) выводим

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = æ\widehat{\Omega}\left[\sum_{n=1}^{3} \Omega^{-1} \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i(\mathbf{e}_n, \widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{e}_i)\frac{\partial}{\partial x_n'}, \mathbf{a}(x_1', x_2', x_3')\right]\Big|_{x_k'=x_k'(x_1,x_2,x_3)}.$$

Замечая, что $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i(\mathbf{e}_n, \widehat{\Omega}^{-1}e_i) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i(\mathbf{e}_i, \widehat{\Omega}\mathbf{e}_n) = \widehat{\Omega}\mathbf{e}_n$, получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = æ\widehat{\Omega}\left[\sum_{n=1}^{3} \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n'}, \mathbf{a}(x_1', x_2', x_3')\right]\Big|_{x_k'=x_k'(x_1,x_2,x_3)}$$

$$= æ\widehat{\Omega}[\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)]\Big|_{x_k \to x_k'(x_1,x_2,x_3)} = æ\widehat{\Omega}\mathcal{R}(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_k \to x_k'(x_1,x_2,x_3)}.$$

Итак, будем иметь

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = æ\widehat{\Omega}\mathcal{R}'(x_1, x_2, x_3), \tag{63}$$

где

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}'(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{R}(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_k \to x_k'(x_1,x_2,x_3)} = \mathcal{R}(x_1'(x_1, x_2, x_3), x_2'(x_1, x_2, x_3), x_3'(x_1, x_2, x_3)). \tag{64}$$

Следовательно, полю $\mathbf{b}$ (58) соответствует поле его ротора, которое, как и само поле (58), получается в результате гладкого преобразования поля $\mathcal{R}'$ (64), построенного с помощью поля $\mathcal{R}$ (56), по тому же правилу (60), что и поле $\mathbf{a}'$ (59).

Предположим, что $\mathbf{a}$ (55) — продольно вихревое в D векторное поле. Тогда

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{rot}\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3), \tag{65}$$

где

$$\lambda = \lambda(x_1, x_2, x_3) \tag{66}$$

есть непрерывное в D почти всюду отличное от нуля скалярное поле,

$$\mathcal{R}'(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_k \to x_k'(x_1,x_2,x_3)} = \lambda'(x_1, x_2, x_3)\mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3), \tag{67}$$

где

$$\lambda' = \lambda'(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)\Big|_{x_k \to x_k'(x_1,x_2,x_3)} = \lambda(x_1'(x_1, x_2, x_3), x_2'(x_1, x_2, x_3), x_3'(x_1, x_2, x_3)).$$

Следовательно (см. (63), (58), (67)),

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = \lambda'(x_1, x_2, x_3)\mathbf{b}(x_1, x_2, x_3),$$

т. е. векторное поле $\mathbf{b}$ (58) является продольно вихревым в D.

Таким образом, располагая каким-то одним решением системы (50), путем преобразований (58), (60) можно строить и другие решения системы (50), т. е. взаимная ориентация линий поля $\mathbf{a}$ (55) и поля $\mathcal{R}$ (56) при этих преобразованиях не изменяется.

Выделим случай, когда для заданного продольно вихревого (см. (65)) поля $\mathbf{a}$ (55) и некоторого поворота $\widehat{\Omega}$ выполняется условие

$$\lambda(x_1'(x_1, x_2, x_3), x_2'(x_1, x_2, x_3), x_3'(x_1, x_2, x_3)) = \lambda(x_1, x_2, x_3). \tag{68}$$

Тогда $\lambda'(x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3)$ и можно записать

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \lambda(x_1, x_2, x_3)\mathbf{b}(x_1, x_2, x_3).$$

Следовательно, в этом случае линейная комбинация полей $\mathbf{a}$ (55), $\mathbf{b}$ (71) будет также продольно вихревым в D векторным полем.

Если формулы (61) трактовать как закон преобразования координат точек $\mathbf{x}$ пространства R^3 при его преобразовании $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{x}$, то условие (68) в символической форме можно выразить равенством $\lambda(\widehat{\Omega}^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})$, указывающим на инвариантность скалярного поля λ (см. (66)) относительно этого преобразования пространства.

9. Предположим, что поле $\mathbf{a}$ (55) есть одно из решений системы уравнений (50) при условии (51). Тогда скалярное поле λ (66), будучи константой в D, есть инвариант относительно любого из преобразований $\widehat{\Omega}^{-1}$ пространства. Обсудим этот случай подробно.

Зададим поворот $\widehat{\Omega}$ в явном виде

$$\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}(\varphi, \theta, \psi) = \sum_{n,s=1}^{3} \Omega_{ns}(\varphi, \theta, \psi)\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s$$

через углы[4]

$$\varphi \ (0 \le \varphi \le 2\pi), \qquad \theta \ (0 \le \theta \le \pi), \qquad \psi \ (0 \le \psi \le 2\pi)$$

вращений $\widehat{\Omega}(\varphi, \mathbf{e}_3)$, $\widehat{\Omega}(\theta, \boldsymbol{\tau})$, $\widehat{\Omega}(\psi, \mathbf{l})$ вокруг осей, задаваемых соответственно ортами $\mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\tau} = \widehat{\Omega}(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1$, $\mathbf{l} = \widehat{\Omega}(\theta, \boldsymbol{\tau})\mathbf{e}_3$, в направлениях "против часовой стрелки", если смотреть навстречу осям вращения. Здесь

$$\Omega_{ns}(\varphi, \theta, \psi) = (\mathbf{e}_n, \widehat{\Omega}(\psi, \mathbf{l})\widehat{\Omega}(\theta, \boldsymbol{\tau})\widehat{\Omega}(\varphi, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_s) = (\delta_{n1}\cos\varphi + \delta_{n2}\sin\varphi)(\delta_{s1}\cos\psi - \delta_{s2}\sin\psi)$$
$$+ [\delta_{n3}\sin\theta - (\delta_{n1}\sin\varphi - \delta_{n2}\cos\varphi)\cos\theta](\delta_{s1}\sin\psi + \delta_{s2}\cos\psi)$$
$$+ [\delta_{n3}\cos\theta + (\delta_{n1}\sin\varphi - \delta_{n2}\cos\varphi)\sin\theta]\delta_{s3}, \qquad n, s = 1, 2, 3,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s$ — тензорное произведение векторов $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_s$, действие которого на произвольный вектор $\mathbf{c}$ определяется правилом $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{c} = \mathbf{e}_n(\mathbf{e}_s, \mathbf{c})$. Тогда формулы (61), (58) можно выразить в виде

$$x'_s(x_1, x_2, x_3) = x'_s(x_1, x_2, x_3, \varphi, \theta, \psi) = \sum_{n=1}^{3} x_n \Omega_{ns}(\varphi, \theta, \psi), \qquad s = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3, \varphi, \theta, \psi) = \text{æ}(\varphi, \theta, \psi) \sum_{n=1}^{3} \mathbf{e}_n \sum_{s=1}^{3} \Omega_{ns}(\varphi, \theta, \psi)(\mathbf{e}_s, \mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3)), \tag{69}$$

где допускается, что постоянной æ при различных значениях углов Эйлера могут присваиваться различные значения.

Составляя, наконец, линейную комбинацию полей $\mathbf{b}$ (69), зададим в D векторное поле

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\psi \mathbf{b}(x_1, x_2, x_3, \varphi, \theta, \psi) \tag{70}$$

как гладкое отображение решения $\mathbf{a}$ (55) системы уравнений (50) при условии (51).

[4]Эйлеровы углы, используемые для задания ориентации одного базиса относительно другого.

Для иллюстрации возьмем в качестве решения (55) единичное продольно вихревое в $D = R^3$ векторное поле из [1]

$$\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3) = \widehat{\Omega}(\vartheta(x_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 = \cos\vartheta(x_3)\mathbf{e}_1 + \sin\vartheta(x_3)\mathbf{e}_2,$$

где $\vartheta(x_3) = -kx_3$, имеющее то же геометрическое строение, что и поле, найденное в [4]. Тогда

$$\mathbf{a}'(x_1, x_2, x_3) = \widehat{\Omega}(\vartheta(x_3'(x_1, x_2, x_3, \varphi, \theta, \psi)), \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1,$$

где $x_3'(x_1, x_2, x_3, \varphi, \theta, \psi) = (x_1 \sin\varphi - x_2\cos\varphi)\sin\theta + x_3\cos\theta$.

При переходе к явным выражениям в (69) декартовы координаты x_1, x_2 удобно выразить через цилиндрические — r, γ: $x_1 = r\cos\gamma$, $x_2 = r\sin\gamma$ (см. формулы (4), (5)). Тогда будем иметь

$$x_3'(x_1(r,\gamma), x_2(r,\gamma), x_3, \varphi, \theta, \psi) = x_3'(r, \gamma, x_3, \varphi, \theta) = r\sin(\varphi-\gamma)\sin\theta + x_3\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(x_1(r,\gamma), x_2(r,\gamma), x_3, \varphi, \theta, \psi) = \mathbf{b}(r, \gamma, x_3, \varphi, \theta, \psi) = æ(\varphi, \theta, \psi)\Big\{\mathbf{e}_r(\varphi)\cos(\psi - kx_3'(r, \gamma, x_3, \varphi, \theta))\\ + [\mathbf{e}_\gamma(\varphi)\cos\theta + \mathbf{e}_3\sin\theta]\sin(\psi - kx_3'(r, \gamma, x_3, \varphi, \theta))\Big\},\end{aligned} \tag{71}$$

где

$$\mathbf{e}_r(\varphi) = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_\gamma(\varphi) = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi.$$

Будем полагать, что

$$æ(\varphi, \theta, \psi) = \begin{cases} \dfrac{c}{\pi}\delta\Big(\theta - \dfrac{\pi}{2}\Big)\delta\Big(\psi - \dfrac{\pi}{2}\Big), & \varphi \in [0, \pi], \\ 0, & \varphi \overline{\in} [0, \pi], \end{cases}$$

где c — произвольная отличная от нуля постоянная, $\delta(\theta - \pi/2)$ и $\delta(\psi - \pi/2)$ — символические дельта-функции Дирака (см., напр., [2, п. 21.9–2]). В этом случае из (71) и (70) выводим

$$\mathbf{v}(x_1(r,\gamma), x_2(r,\gamma), x_3) = \mathbf{v}(r,\gamma) = \frac{c}{\pi}\int\limits_0^\pi d\varphi\big\{\mathbf{e}_r(\varphi)\sin[kr\sin(\varphi-\gamma)] + \mathbf{e}_3\cos[kr\sin(\varphi-\gamma)]\big\}. \tag{72}$$

Замечая далее, что

$$\int\limits_0^\pi d\varphi\mathbf{e}_r(\varphi)\sin[kr\sin(\varphi-\gamma)] = \int\limits_0^\pi d\varphi\mathbf{e}_r(\varphi+\gamma)\sin(kr\sin\varphi)$$

$$= \mathbf{e}_r(\gamma)\int\limits_0^\pi d\varphi\sin(kr\sin\varphi)\cos\varphi + \mathbf{e}_\gamma(\gamma)\int\limits_0^\pi d\varphi\sin(kr\sin\varphi)\sin\varphi = \mathbf{e}_\gamma(\gamma)\pi J_1(kr),$$

$$\int\limits_0^\pi d\varphi\cos[kr\sin(\varphi-\gamma)] = \int\limits_0^\pi d\varphi\cos(kr\sin\varphi) = \pi J_0(kr),$$

из (72) получаем поле (54).

10. Будем искать гладкое решение $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, \gamma, x_3, t)$ системы уравнений (1) в области D (6), полагая, что это решение в любой момент времени $t \geq 0$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\rm sh}(D)$, т. е. представимо в виде

$$\mathbf{v}(r, \gamma, x_3, t) = \mathbf{v}(r, \gamma, t) = v_\gamma(r, t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + v_3(r, t)\mathbf{e}_3. \tag{73}$$

Здесь $v_\gamma(r,t),\ v_3(r,t)$ — гладкие функции переменных $r\in[0,r_0),\ t\ge 0$, обладающие в каждый момент времени теми же свойствами, что и функции (45) (см. (46), (48), (49)). В таком случае второе из уравнений системы (1) удовлетворяется в D тождественно, а первое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} = -\boldsymbol{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2+u\Big), \tag{74}$$

используя выражение $\mathbf{f}=-\boldsymbol{\nabla}u$ для силы $\mathbf{f}$ через ее потенциал u и формулу $(\mathbf{v},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}|\mathbf{v}|^2/2$, следующую из тождества $\boldsymbol{\nabla}|\mathbf{v}|^2/2\equiv[\mathbf{v},\operatorname{rot}\mathbf{v}]+(\mathbf{v},\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}$ в случае продольно вихревого поля $\mathbf{v}$.

Подчиним потенциал u ограничениям, которые оговариваются в условии.

У с л о в и е 2. Пусть $u=u(r,\gamma,x_3,t)$ — гладкое в области D скалярное поле, удовлетворяющее в точках прямой $\mathbf{x}=x_3\mathbf{e}_3\subset D$ ограничениям

$$u(0,\gamma,x_3,t)=u_0(x_3,t),\qquad \frac{\partial}{\partial r}u(r,\gamma,x_3,t)\Big|_{r=0}=0,\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\gamma}u(r,\gamma,x_3,t)\Big|_{r=0}=0.$$

Заметим далее, что правая часть в (74) — потенциальное в D векторное поле. Поэтому потенциальным в D для любого $t\ge 0$ должно быть и векторное поле $\partial\mathbf{v}/\partial t$. Условие его потенциальности можно выразить формулой $\operatorname{rot}\partial\mathbf{v}/\partial t=0$ в силу односвязности области D или формулой

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{v}=0, \tag{75}$$

учитывая перестановочность операций rot и $\partial/\partial t$.

Ротор поля $\mathbf{v}$ (73) выражается в силу (47) формулой

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(r,\gamma,t)=\begin{cases} 2\dfrac{\partial}{\partial r}v_\gamma(r,t)\Big|_{r=0}\mathbf{e}_3, & r=0,\\ -\dfrac{\partial}{\partial r}v_3(r,t)\mathbf{e}_\gamma(\gamma)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rv_\gamma(r,t))\mathbf{e}_3, & r\in(0,r_0). \end{cases} \tag{76}$$

Используя (76), выразим условие (75) явным образом в скалярной форме. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial r}v_\gamma(r,t)\Big|_{r=0}\Big)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial r}v_3(r,t)\Big)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial r}rv_\gamma(r,t)\Big)=0,\qquad r\in(0,r_0).$$

Эти условия удовлетворяются, если и только если удовлетворяются условия

$$\frac{\partial}{\partial r}v_\gamma(r,t)\Big|_{r=0}=c_\gamma,\qquad \frac{\partial}{\partial r}v_3(r,t)=\frac{d}{dr}w_3(r),\qquad \frac{\partial}{\partial r}rv_\gamma(r,t)=\frac{d}{dr}rw_\gamma(r),\qquad r\in(0,r_0), \tag{77}$$

где c_γ — некоторая постоянная, $w_3(r),\ w_\gamma(r)$ — гладкие в промежутке $[0,r_0)$ функции. Условия (77), в свою очередь, удовлетворяются, если и только если

$$v_3(r,t)-w_3(r)=F_3(t),\qquad r[v_\gamma(r,t)-w_\gamma(r)]=F_\gamma(t), \tag{78}$$

где $F_3(t),\ F_\gamma(t)$ — некоторые гладкие при $t\ge 0$ функции. Разрешая равенства (78) относительно $v_\gamma,\ v_3$, придем к функциям $v_\gamma(r,t)=w_\gamma(r)+F_\gamma(t)/r,\ v_3(r,t)=w_3(r)+F_3(t)$. Первая из них совместима с требованием непрерывности и непрерывной дифференцируемости в D (6) искомого решения $\mathbf{v}$ (73) только при условиях

$$F_\gamma(t)=0\ \text{ для любого }\ t\ge 0\ \text{ и }\ c_\gamma=\frac{d}{dr}w_\gamma(r)\Big|_{r=0}=w_\gamma'(0).$$

Вторая, при $v_\gamma(r,t)=w_\gamma(r)$, совместима с условиями коллинеарности (см. (46)) полей $\mathbf{v}$ (73) и $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ (76), а именно

$$v_\gamma(r,t)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\gamma(r,t))+v_3(r,t)\frac{\partial}{\partial r}v_3(r,t)=0,\qquad r\in(0,r_0),\quad v_3(0,t)\frac{\partial}{\partial r}v_3(r,t)\Big|_{r=0}=0$$

только при $F_3(t) \equiv 0$.

Таким образом, гладкое продольно вихревое в D векторное поле $\mathbf{v}$ (73) удовлетворяет условию (75) при $t \geq 0$, если и только если

$$\mathbf{v}(r,\gamma,x_3,t) = \mathbf{v}(r,\gamma) = w_\gamma(r)\mathbf{e}_\gamma(\gamma) + w_3(r)\mathbf{e}_3, \tag{79}$$

где $w_\gamma(r),\ w_3(r)$ — скалярные поля (см. (45)), охарактеризованные в разд. 7.

Уравнение (74) при $\mathbf{v}$ (79) принимает вид

$$\boldsymbol{\nabla}\Big(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + u\Big) = 0$$

и удовлетворяется, если и только если

$$p = p(r,\gamma,x_3,t) = P(t) - \Big(\frac{1}{2}\rho v^2(r) + \rho u(r,\gamma,x_3,t)\Big), \tag{80}$$

где $P(t)$ — некоторая непрерывная функция t при $t \geq 0,\ v^2(r) = |\mathbf{v}(r,\gamma)|^2$.

Формула (80) определяет p при любом $t \geq 0$ как гладкое в D (6) скалярное поле, если потенциал u удовлетворяет ограничениям условия 2. При этом

$$p(r,\gamma,x_3,t)\Big|_{r=0} = p_0(x_3,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}p(r,\gamma,x_3,t)\Big|_{r=0} = -\rho\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}v^2(r) + \frac{\partial}{\partial r}u(r,\gamma,x_3,t)\Big)\Big|_{r=0} = 0,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\gamma}p(r,\gamma,x_3,t)\Big|_{r=0} = -\frac{\rho}{r}\frac{\partial}{\partial\gamma}u(r,\gamma,x_3,t)\Big|_{r=0} = 0,$$

где равенство $\partial v^2(r)/\partial r\big|_{r=0} = 0$ следует из равенств (43) при $r \to 0$ и непрерывности $\sigma(r)$ в D, если учесть, что $v^2(r) = \sigma^2(r)$,

$$p_0(x_3,t) = P(t) - \Big(\frac{1}{2}\rho v^2(0) + \rho u_0(x_3,t)\Big). \tag{81}$$

Выражая $P(t)$ из (81) при $x_3 = 0$ и заменяя v^2 на σ^2, получим $P(t) = p_0(0,t) + (1/2)\rho\sigma^2(0) + \rho u_0(0,t)$. Исключая затем $P(t)$ в (80) с помощью этой формулы, будем иметь

$$p(r,\gamma,x_3,t) = p_0(0,t) + \frac{1}{2}\rho[\sigma^2(0) - \sigma^2(r)] + \rho[u_0(0,t) - u(r,\gamma,x_3,t)]. \tag{82}$$

Формула (82) определяет давление жидкости в области D (6) в каждый момент времени $t \geq 0$ через давление $p_0(0,t)$ в точке $\mathbf{x} = 0$ при том условии, что

$$p_0(0,t) + \frac{1}{2}\rho[\sigma^2(0) - \sigma^2(r)] + \rho[u_0(0,t) - u(r,\gamma,x_3,t)] \geq 0 \tag{83}$$

в D для любого $t \geq 0$, поскольку давление в жидкости неотрицательно.

Исходя из полученных результатов, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Пара* $(\mathbf{v}(r,\gamma,x_3,t), p(r,\gamma,x_3,t))$ *полей, где первое как функция* t *является гладким при* $t \geq 0$*, а второе непрерывным, есть гладкое в области* D (6) *решение системы уравнений* (1) *при поле* $\mathbf{v}$*, подчиняющемся в каждый момент времени* t *ограничениям, которые выражаются системой уравнений* (2) *и условием* (3)*, если и только если*

1) *потенциал* u *силового поля* $\mathbf{f}$ *в* (1) *удовлетворяет ограничениям условия* 2;

2) $\mathbf{v}(r,\gamma,x_3,t) = \mathbf{v}(r,\gamma)$*, где* $\mathbf{v}(r,\gamma)$ *— не зависящее от* t *векторное поле, охарактеризованное в теореме* 1;

3) $p(r,\gamma,x_3,t)$ *— скалярное поле, определяемое формулой* (82) *при условии, что* $p_0(0,t)$ *— непрерывная при* $t \geq 0$ *функция, удовлетворяющая условию* (83).

Отметим, что для решения соответствующих системе уравнений (1) и ограничениям (2), (3) краевых задач в аксиально симметричных цилиндрических областях на базе гистограмм измеряемых граничных значений можно, как показано в [8], эффективно применять описанный там алгоритм аппроксимации гармоническими всплесками.

11. В заключение отметим следующее обстоятельство. Векторные поля (54), найденные в [4], рассматривались автором (по построению) как частное решение в R^3 уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{v} = k\mathbf{v}$ ($k = \mathrm{const} \neq 0$). В действительности, судя по результатам разд. 7, поля (54) исчерпывают все решения этого уравнения в R^3, дополненного условиями, которые выражаются системой (2), (3). С этой оговоркой результаты, полученные И. С. Громекой в [4], могли бы составить содержание теорем относительно решений системы уравнений (1) в классе установившихся винтовых движений, при которых линии тока принадлежат аксиально симметричным цилиндрическим поверхностям, вложенным в R^3. Теоремы 1 и 2 (см. разд. 6 и 10) можно рассматривать тогда как обобщение результатов работы [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.
2. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.
3. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1958. 678 с.
4. **Громека И.С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Отд. изд. Казань, 1881. 107 с.; в кн.: Собрание сочинений / И. С. Громека. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.
5. **Талицких Н.А.** Научные труды И. С. Громеки. 1952. С. 7–22; в кн.: Собрание сочинений / И. С. Громека. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.
6. **Craig Th.** On certain possible cases of steady motion in a viscous fluid // Amer. J. Math. 1880. Vol. 3, № 3. P. 269–288.
7. **Beltrami E.** Considerazioni idrodinamiche // Rendiconti del reale Instituto Lombardo. Milano. 1889. Vol. 22. P. 121–130.
8. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 123–138.

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Российский государственный профессионально-педагогический университет
г. Екатеринбург

Поступила 23.07.2012

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 519.65

УСЛОВИЯ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СПЛАЙНАМИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ПО СУББОТИНУ И ПО МАРСДЕНУ[1]

Ю. С. Волков, В. Т. Шевалдин

Для двух конструкций интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену установлены простые достаточные условия, при которых интерполянт наследует геометрические характеристики (положительность, монотонность, выпуклость) интерполируемых данных.

Ключевые слова: сплайн второй степени, интерполяция, формосохранение.

Yu. S. Volkov, V. T. Shevaldin. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden.

For two constructions of quadratic interpolation splines in the sense of Subbotin and Marsden, simple sufficient conditions are established under which the interpolant inherits the geometric properties (positivity, monotonicity, and convexity) of the interpolated data.

Keywords: quadratic spline, interpolation, shape preservation.

Введение

В задачах интерполяции сплайнами четной степени множество точек интерполяции и сетку узлов сплайна принято выбирать несовпадающими, в то время как для сплайнов нечетной степени эти сетки совпадают. При интерполяции сплайнами второй степени распространены два подхода: по Субботину и по Марсдену. Ю. Н. Субботин предложил узлы параболического сплайна выбирать посередине между заданными точками интерполяции [1–3]. М. Марсден, наоборот, стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки интерполяции выбирал посередине между узлами сплайна [4; 5].

Заметим, что это две принципиально различные конструкции, предназначенные, вообще говоря, для разных задач. Например, если задан набор дискретных значений, которые требуется интерполировать, то здесь подходит сплайн по Субботину, в то время как сплайн по Марсдену будет существовать не для любой неравномерной сетки данных. В другом примере, наоборот, подходят именно сплайны по Марсдену. Например, при приближении функции (значения которой можно вычислять в любой точке) требуется, чтобы узлы сплайна находились в определенных точках (это может диктоваться положением возможных разрывов второй производной интерполянта). Такая задача легко решается сплайном по Марсдену, а сплайн по Субботину для каких-то сеток может не существовать.

Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в целом эти два разных сплайна обладают различными аппроксимативными свойствами.

Ранее одним из авторов было обнаружено [6], что, несмотря на принципиальные отличия интерполянтов, между сплайнами по Субботину и по Марсдену существует тесная связь, и между аппроксимативными свойствами этих разных конструкций был переброшен своеобразный мостик. Матрицы систем определяющих уравнений в одном подходе являются транспонированными от соответствующих матриц в другом.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-07-00447, 11-01-00347) и программы поддержки совместных интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проекты 2012-Б32, 12-С-1-1018).

Методика вывода подобных систем определяющих уравнений была предложена в [7]. В дальнейшем оказалось, что такие системы в случае кубических сплайнов удобны для исследования изогеометрических свойств интерполяционных сплайнов [8;9]. На основе этих систем уравнений в работе [10] рассмотрен единый подход к получению достаточных условий формосохранения, т. е. k-монотонности (положительности k-й производной) кубического сплайна, интерполирующего k-монотонные данные. До этого в [11] были получены только достаточные условия монотонности и выпуклости (случаи $k = 1$ и $k = 2$). Отметим, что при локальной аппроксимации полиномиальными сплайнами за счет отказа от интерполяции всегда можно добиться наследования свойств монотонности и выпуклости [12–15].

В настоящей работе устанавлены достаточные условия k-монотонности сплайнов второй степени, интерполирующих k-монотонные исходные данные ($k = 0, 1, 2, 3$). Причем, поскольку системы определяющих уравнений для сплайнов по Субботину и по Марсдену связаны между собой, нами получены условия формосохранения для обеих конструкций.

1. Две конструкции сплайнов второй степени

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две сетки узлов

$$\boldsymbol{X}\colon\ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

$$\boldsymbol{Y}\colon\ y_0 = a < y_1 < \ldots < y_n < b = y_{n+1}$$

так, что $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2,\ \ i = 1, \ldots, n.$

Интерполяционным сплайном второй степени по Субботину будем называть сплайн $s(x)$ с узлами на сетке $\boldsymbol{Y}$, который принимает в точках сетки $\boldsymbol{X}$ известные значения некоторой функции $f(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, т. е.

$$s(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Интерполяционным сплайном второй степени по Марсдену будем называть сплайн $s(x)$ с узлами на сетке $\boldsymbol{X}$, который принимает в узлах сетки $\boldsymbol{Y}$ известные значения некоторой функции $f(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, т. е.

$$s(y_i) = f(y_i), \quad i = 0, \ldots, n + 1. \tag{1.2}$$

В обоих случаях мы рассматриваем простые сплайны (по терминологии [16]), т. е. максимальной гладкости $s(x) \in C^1[a, b]$, причем сплайн по Марсдену определяется условиями (1.2) однозначно, а для однозначного определения сплайна по Субботину кроме условий (1.1) нужны какие-либо краевые условия. Мы ограничимся лишь случаем задания на концах отрезка $[a, b]$ значений производной интерполируемой функции, т. е. считаем известными значения $f'(a), f'(b)$ и полагаем $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$. Кроме того, будем считать, что интерполируемая функция $f(x)$ k-монотонна для некоторого фиксированного $k = 0, 1, 2, 3$, т. е. функция $f^{(k)}(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Но поскольку нам известна информация об интерполируемой функции лишь в узлах сетки $\boldsymbol{X}$ (для сплайнов по Субботину) или $\boldsymbol{Y}$ (для сплайнов по Марсдену), то под k-монотонностью данных мы понимаем неотрицательность разделенных разностей k-го порядка от исходных данных, обозначаемых как $\Delta^k_{i,\boldsymbol{X}} = f[x_{i-k}, \ldots, x_i]$, $\ \Delta^k_{i,\boldsymbol{Y}} = f[y_{i-k}, \ldots, y_i]$.

Наша цель — получить условия, при которых сплайн второй степени по Субботину и по Марсдену будет наследовать свойство k-монотонности интерполируемых данных, т. е. условия неотрицательности $s^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2$, на $[a, b]$. Известно [17], что скачок второй производной сплайна (величина разрыва второй производной в узлах сетки, отнесенная к шагу сетки) на равномерных сетках приближает узловые значения третьей производной интерполируемой функции. Поэтому представляет интерес также получить условия 3-монотонности сплайнов второй степени, т. е. условия неотрицательности скачков второй производной.

Производную сплайна $s^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2$, будем представлять в виде разложения по B-сплайнам порядка $3 - k$ или степени $2 - k$ (см., например, [3]). Для сплайнов по Субботину имеем

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2+k}^{n} \alpha_i^{(k)} N_{i,3-k,\boldsymbol{Y}}(x), \tag{1.3}$$

а по Марсдену

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2+k}^{n-1} \alpha_i^{(k)} N_{i,3-k,\boldsymbol{X}}(x). \tag{1.4}$$

Здесь $N_{i,3-k,\boldsymbol{X}}$ и $N_{i,3-k,\boldsymbol{Y}}$ — B-сплайны порядка $3 - k$ по сеткам $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, определяемые равенствами

$$N_{i,r,\boldsymbol{X}}(x) = (x_{i+r} - x_i)\big((\cdot - x)_+\big)^{r-1}[x_i, \ldots, x_{i+r}],$$
$$N_{i,r,\boldsymbol{Y}}(x) = (y_{i+r} - y_i)\big((\cdot - x)_+\big)^{r-1}[y_i, \ldots, y_{i+r}],$$

где разделенные разности от усеченной степенной функции $g(t, x) = \big((t - x)_+\big)^{r-1}$ берутся по аргументу t. При этом сетки $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ мы считаем расширенными влево и вправо кратными дополнительными узлами $x_{-2} = x_{-1} = a$, $b = x_{n+1} = x_{n+2}$, $y_{-2} = y_{-1} = a$, $b = y_{n+2} = y_{n+3}$.

Поскольку B-сплайны являются неотрицательными функциями, то достаточными условиями k-монотонности сплайнов (неотрицательности $s^{(k)}(x)$) при $k = 0, 1, 2$ являются условия неотрицательности набора коэффициентов $\alpha_{-2+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$ в представлении (1.3) для сплайнов по Субботину и коэффициентов $\alpha_{-2+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(k)}$ в представлении (1.4) для сплайнов по Марсдену, а при $k = 3$ — условия неотрицательности скачков или разрывов второй производной сплайнов в узлах сетки.

Указанные коэффициенты являются, вообще говоря, неизвестными параметрами сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену, и для их определения в [6] установлены системы линейных уравнений. Приведем здесь эти системы уравнений. Введем стандартные обозначения:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = -2, \ldots, n+1;$$
$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i},\ \lambda_i = 1 - \mu_i, \quad i = -1, \ldots, n+1.$$

Для сплайнов по Субботину в случае $k = 0$ параметры $\alpha_{-2}^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}$ выводятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{-2}^{(0)} = f(a), \qquad \alpha_{-1}^{(0)} = f(a) + \frac{h_0}{2} f'(a),\\
&N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\alpha_{i-2}^{(0)} + N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\alpha_{i-1}^{(0)} + N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\alpha_i^{(0)} = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n-1,\\
&\alpha_n^{(0)} = f(b), \qquad \alpha_{n-1}^{(0)} = f(b) - \frac{h_{n-1}}{2} f'(b).
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

При $k = 1$ неизвестными будут $\alpha_{-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}$, которые получаем из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{-1}^{(1)} = f'(a),\\
&\lambda_{i-1}\alpha_{i-2}^{(1)} + (2 + \mu_{i-1} + \lambda_i)\alpha_{i-1}^{(1)} + \mu_i \alpha_i^{(1)} = 4\Delta_{i,\boldsymbol{X}}^1,\ i = 1, \ldots, n,\\
&\alpha_n^{(1)} = f'(b).
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

При $k=2$ система уравнений относительно $\alpha_0^{(2)},\dots,\alpha_n^{(2)}$ такова:

$$\left.\begin{aligned}
&3\alpha_0^{(2)}+\alpha_1^{(2)}=4\Delta^2_{1,\boldsymbol{X}},\\
&\mu_i\alpha_{i-1}^{(2)}+3\alpha_i^{(2)}+\lambda_i\alpha_{i+1}^{(2)}=4\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{X}},\ i=1,\dots,n-1,\\
&\alpha_{n-1}^{(2)}+3\alpha_n^{(2)}=4\Delta^2_{n+1,\boldsymbol{X}}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

И, наконец, случай $k=3$. Известно [17], что разрывы второй производной интерполяционного сплайна по Субботину

$$\beta_i=S''(y_i-0)-S''(y_i+0),\quad i=1,\dots,n,$$

отнесенные к шагу сетки h_i, на равномерных сетках приближают $f'''(y_i)$. Система уравнений относительно разрывов имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&(2+\lambda_1)\beta_1+\lambda_1\beta_2=8\delta^3_{2,\boldsymbol{X}},\\
&\mu_i\beta_i+(2+\mu_i+\lambda_{i+1})\beta_{i+1}+\lambda_{i+1}\beta_{i+2}=8\delta^3_{i+2,\boldsymbol{X}},\ i=1,\dots,n-2,\\
&\mu_{n-1}\beta_{n-1}+(2+\mu_{n-1})\beta_n=8\delta^3_{n+1,\boldsymbol{X}},
\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

где $\delta^3_{i,\boldsymbol{X}}=\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{X}}-\Delta^2_{i,\boldsymbol{X}},\ i=2,\dots,n+1$.

Теперь — для сплайнов по Марсдену. Для $k=0$ система уравнений относительно параметров $\alpha_{-2}^{(0)},\dots,\alpha_{n-1}^{(0)}$ записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{-2}^{(0)}=f(a),\\
&\lambda_{i-1}\alpha_{i-3}^{(0)}+(2+\mu_{i-1}+\lambda_i)\alpha_{i-2}^{(0)}+\mu_i\alpha_{i-1}^{(0)}=4f(y_i),\ i=1,\dots,n,\\
&\alpha_{n-1}^{(0)}=f(b).
\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

Система уравнений при $k=1$ относительно неизвестных $\alpha_{-1}^{(1)},\dots,\alpha_{n-1}^{(1)}$ выглядит так:

$$\left.\begin{aligned}
&3\alpha_{-1}^{(1)}+\alpha_0^{(1)}=4\Delta^1_{1,\boldsymbol{Y}},\\
&\mu_i\alpha_{i-2}^{(1)}+3\alpha_{i-1}^{(1)}+\lambda_i\alpha_i^{(1)}=4\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{Y}},\ i=1,\dots,n-1,\\
&\alpha_{n-2}^{(1)}+3\alpha_{n-1}^{(1)}=4\Delta^1_{n+1,\boldsymbol{Y}}.
\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

Далее, случаю $k=2$ соответствует система уравнений относительно $\alpha_0^{(2)},\dots,\alpha_{n-1}^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&h_0(2+\lambda_1)\alpha_0^{(2)}+\lambda_1h_1\alpha_1^{(2)}=\delta^2_{2,\boldsymbol{Y}},\\
&\mu_ih_{i-1}\alpha_{i-1}^{(2)}+h_i(2+\mu_i+\lambda_{i+1})\alpha_i^{(2)}+\lambda_{i+1}h_{i+1}\alpha_{i+1}^{(2)}=\delta^2_{i+2,\boldsymbol{Y}},\ i=1,\dots,n-2,\\
&\mu_{n-1}h_{n-2}\alpha_{n-2}^{(2)}+h_{n-1}(2+\mu_{n-1})\alpha_{n-1}^{(2)}=\delta^2_{n+1,\boldsymbol{Y}},
\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

где $\delta^2_{i,\boldsymbol{Y}}=\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^1_{i,\boldsymbol{Y}}$, $i=2,\dots,n+1$. И, наконец, в случае $k=3$ разрывы второй производной в узлах сетки $\beta_i=S''(x_i-0)-S''(x_i+0),\ i=1,\dots,n-1$, находим из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&N_{0,3,\boldsymbol{Y}}(x_1)\beta_1+N_{0,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)\beta_2=2\delta^3_{3,\boldsymbol{Y}},\\
&N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\beta_i+N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})\beta_{i+1}+N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(y_{i+2})\beta_{i+2}=2\delta^3_{i+3,\boldsymbol{Y}},\ i=1,\dots,n-3,\\
&N_{n-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})\beta_{n-2}+N_{n-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-1})\beta_{n-1}=2\delta^3_{n+1,\boldsymbol{Y}},
\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

где $\delta^3_{i,\boldsymbol{Y}}=\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^2_{i,\boldsymbol{Y}},\ i=3,\dots,n+1$.

2. Условия k-монотонности

Основным инструментом для получения условий k-монотонности является доказанная в [10] теорема о положительном решении системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Az} = \mathbf{g} \tag{2.13}$$

относительно неизвестных $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)^T$ с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

и вектором правой части $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_n)^T$.

Теорема 1 [10, теорема 3]. *Пусть элементы матрицы* $\mathbf{A}$ *и вектора правой части* $\mathbf{g}$ *системы* (2.13) *неотрицательны и матрица* $\mathbf{A}$ *приводится к матрице со строгим диагональным преобладанием* (*по строкам или столбцам*) *путем домножения ее на диагональную матрицу с положительными диагональными элементами. Тогда решение* $\mathbf{z}$ *будет неотрицательным, если выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} & g_0 - \frac{b_0}{a_1}\, g_1 \geqslant 0; \\ & g_i - \frac{c_i}{a_{i-1}}\, g_{i-1} - \frac{b_i}{a_{i+1}}\, g_{i+1} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n-1; \\ & g_n - \frac{c_n}{a_{n-1}}\, g_{n-1} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Отметим, что частные случаи этой теоремы (когда сама матрица $\mathbf{A}$ имеет диагональное преобладание по строкам или столбцам) доказаны в работах [11; 18].

Применение теоремы 1 к системам уравнений (1.5)–(1.12) приводит к достаточным условиям положительности (неотрицательности) неизвестных параметров этих систем. Ясно, что этого достаточно для 3-монотонности. В остальных случаях ($k = 0, 1, 2$) k-монотонность сплайна следует из того, что определяемые параметры являются коэффициентами разложения соответствующей производной сплайна по неотрицательным B-сплайнам, следовательно, неотрицательность коэффициентов разложения производной сплайна обеспечивает неотрицательность и самой производной.

Очевидно, системы (1.6)–(1.10) имеют диагональное преобладание, матрица системы (1.11) будет иметь диагональное преобладание после умножения ее справа на диагональную матрицу $\operatorname{diag}\{h_0^{-1}, \ldots, h_{n-1}^{-1}\}$. Осталось исследовать только две системы (1.5) и (1.12). В системе уравнений (1.5) для двух первых и двух последних неизвестных выписаны явные формулы, поэтому эту систему можно рассматривать лишь относительно неизвестных $\alpha_0^{(0)}, \ldots, \alpha_{n-2}^{(0)}$. Матрица такой урезанной системы совпадает с транспонированной матрицей системы (1.12). Таким образом, нам осталось показать, что матрица урезанной системы удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что умножение этой матрицы справа на матрицу $\operatorname{diag}\{h_0 + h_1, \ldots, h_{n-2} + h_{n-1}\}$ дает матрицу со строгим диагональным преобладанием.

В самом деле, величина диагонального преобладания в i-й строке преобразованной матрицы определяется как

$$\begin{aligned} & (h_{i-1} + h_i) N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_i) - (h_{i-2} + h_{i-1}) N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_i) - (h_i + h_{i+1}) N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i) \\ & = (h_{i-1} + h_i) \Big[\frac{h_i (h_{i-2} + 2h_{i-1})}{(h_{i-1} + h_i)(h_{i-2} + 2h_{i-1} + h_i)} + \frac{h_{i-1}(2h_i + h_{i+1})}{(h_{i-1} + h_i)(h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1})} \Big] \end{aligned}$$

$$
-\frac{(h_{i-2}+h_{i-1})h_i^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-2}+2h_{i-1}+h_i)}-\frac{(h_i+h_{i+1})h_{i-1}^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+2h_i+h_{i+1})}=\frac{2h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i}.
$$

Таким образом, все системы уравнений (1.5)–(1.12) удовлетворяют условиям теоремы 1. Применение данной теоремы приводит к достаточным условиям k-монотонности для интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену при каждом фиксированном $k=0,1,2,3$.

Теорема 2. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют положительные данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет неотрицательным, если выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
&f(a)+\frac{h_0}{2}f'(a)\geqslant 0,\\
&f(x_1)-N_{-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_1)\Big(f(a)+\frac{h_0}{2}f'(a)\Big)-\frac{N_{1,3,\boldsymbol{Y}}(x_1)}{N_{1,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)}f(x_2)\geqslant 0,\\
&f(x_i)-\frac{N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)}{N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i-1})}f(x_{i-1})-\frac{N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)}{N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})}f(x_{i+1})\geqslant 0,\quad i=2,\dots,n-2,\\
&f(x_{n-1})-N_{n-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-1})\Big(f(b)-\frac{h_{n-1}}{2}f'(b)\Big)-\frac{N_{n-3,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-1})}{N_{n-3,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})}f(x_{n-2})\geqslant 0,\\
&f(b)-\frac{h_{n-1}}{2}f'(b)\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$
\begin{aligned}
&f(y_1)-\frac14 f(a)-\frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}f(y_2)\geqslant 0,\\
&f(y_i)-\frac{\lambda_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}f(y_{i-1})-\frac{\mu_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}f(y_{i+1})\geqslant 0,\quad i=2,\dots,n-1,\\
&f(y_n)-\frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}f(y_{n-1})-\frac14 f(b)\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Теорема 3. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют монотонные данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет монотонным, если выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
&\Delta^1_{1,\boldsymbol{X}}-\frac14 f'(a)-\frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\Delta^1_{2,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\\
&\Delta^1_{i,\boldsymbol{X}}-\frac{\lambda_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}\Delta^1_{i-1,\boldsymbol{X}}-\frac{\mu_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\quad i=2,\dots,n-1,\\
&\Delta^1_{n,\boldsymbol{X}}-\frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\Delta^1_{n-1,\boldsymbol{X}}-\frac14 f'(b)\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$
\begin{aligned}
&3\Delta^1_{1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^1_{2,\boldsymbol{Y}}\geqslant 0,\\
&3\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{Y}}-\mu_i\Delta^1_{i,\boldsymbol{Y}}-\lambda_i\Delta^1_{i+2,\boldsymbol{Y}}\geqslant 0,\quad i=1,\dots,n-1,\\
&3\Delta^1_{n+1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^1_{n,\boldsymbol{Y}}\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Теорема 4. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют выпуклые данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет выпуклым, если выполнены условия*

$$
\begin{aligned}
&3\Delta^2_{1,\boldsymbol{X}}-\Delta^2_{2,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\\
&3\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{X}}-\mu_i\Delta^2_{i,\boldsymbol{X}}-\lambda_i\Delta^2_{i+2,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\quad i=1,\dots,n-1,\\
&3\Delta^2_{n+1,\boldsymbol{X}}-\Delta^2_{n,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$\delta^2_{2,\boldsymbol{Y}} - \frac{\lambda_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta^2_{3,\boldsymbol{Y}} \geqslant 0,$$

$$\delta^2_{i+1,\boldsymbol{Y}} - \frac{\mu_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}\delta^2_{i,\boldsymbol{Y}} - \frac{\lambda_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}\delta^2_{i+2,\boldsymbol{Y}} \geqslant 0, \quad i=2,\ldots,n-1,$$

$$\delta^2_{n+1,\boldsymbol{Y}} - \frac{\mu_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta^2_{n,\boldsymbol{Y}} \geqslant 0.$$

Теорема 5. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют 3-монотонные данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет 3-монотонным, если выполнены условия*

$$\delta^3_{2,\boldsymbol{X}} - \frac{\lambda_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta^3_{3,\boldsymbol{X}} \geqslant 0,$$

$$\delta^3_{i+1,\boldsymbol{X}} - \frac{\mu_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}\delta^3_{i,\boldsymbol{X}} - \frac{\lambda_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}\delta^3_{i+2,\boldsymbol{X}} \geqslant 0, \quad i=2,\ldots,n-1,$$

$$\delta^3_{n+1,\boldsymbol{X}} - \frac{\mu_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta^3_{n,\boldsymbol{X}} \geqslant 0,$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$\delta^3_{3,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{0,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)}{N_{1,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)}\delta^3_{4,\boldsymbol{X}} \geqslant 0,$$

$$\delta^3_{i+2,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i-1})}{N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i-1})}\delta^3_{i+1,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})}{N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})}\delta^3_{i+3,\boldsymbol{X}} \geqslant 0, \quad i=2,\ldots,n-2,$$

$$\delta^3_{n+1,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{n-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})}{N_{n-3,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})}\delta^3_{n,\boldsymbol{X}} \geqslant 0.$$

Отметим, что под 3-монотонностью сплайна второй степени мы понимаем неотрицательность разрывов второй производной в узлах сетки сплайна. Такое допущение оправдано тем, что на равномерных сетках в периодическом случае величина разрыва, отнесенная к шагу сетки, приближает третью производную интерполируемой функции [17] (на равномерных сетках обе конструкции по Субботину и по Марсдену одинаковы) даже с порядком $O(h^4)$ шага сетки $h \to 0$ [19]. На произвольных неравномерных сетках такой факт не имеет места ввиду отсутствия баланса суммы коэффициентов при неизвестных и коэффициента в правой части уравнений в системах (1.8) и (1.12). Тем не менее в работе [20] для сплайнов нечетной степени $2m-1$ показано, что приближение производной порядка $2m$ интерполируемой функции величинами разрыва старших производных сплайна возможно и на некоторых специальных неравномерных сетках.

Отметим, что достаточные условия монотонности и выпуклости (теоремы 3 и 4) для интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину ранее были получены в работах [11; 21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** О кусочно полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 1. С. 63–70.
2. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Добавления // Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. М.: Мир, 1972. С. 270–309.
3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Marsden M.** Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 5. P. 903–906.
5. **Marsden M.** Operator norm bounds and error bounds for quadratic spline interpolation // Approximation theory (Papers, VIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warszawa, 1975). Banach Center Publ. Warsaw: PWN – Polish Scientific Publishers, 1979. Vol. 4. P. 159–175.

6. **Волков Ю.С.** Две конструкции интерполяционных сплайнов четной степени: препринт № 169 / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2006. 32 с.
7. **Волков Ю.С.** О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычисл. системы. Вып. 159. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. С. 3–18. (Сплайн-функции и их приложения.)
8. **Волков Ю.С.** О монотонной интерполяции кубическими сплайнами // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 14–24.
9. **Волков Ю.С.** Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.
10. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами / Ю.С. Волков, В.В. Богданов, В.Л. Мирошниченко, В.Т. Шевалдин // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 6. С. 836–844.
11. **Miroshnichenko V.L.** Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of function: Proc. Intern. Conf., Varna, 1984. Sofia: Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 1984. P. 610–620.
12. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
13. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
14. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимации полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющие некоторые свойства аппроксимируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 156–166.
15. **Волков Ю. С., Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т.** Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 2. С. 73–82.
16. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
17. **Субботин Ю. Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173. (Приближение функций и операторов.)
18. **Богданов В.В., Волков Ю.С.** Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.
19. **Kindalev B. S.** Asymptotics of error for interpolating splines of even degree // Constructive theory of function: Proceed. Intern. Conf., Varna, 1984. Sofia: Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 1984. P. 445–450.
20. **Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.** О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Мат. заметки. 2011. Т. 89, вып. 1. С. 127–130.
21. **Мирошниченко В. Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов // Вычисл. системы. Вып. 142. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1991. С. 3–14. (Сплайны и их приложения.)

Поступила 19.08.2011
Исправлена 03.03.2012

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 519.65

ПОРЯДКИ АППРОКСИМАЦИИ ЛОКАЛЬНЫМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ[1]

Ю. С. Волков, Е. Г. Пыткеев, В. Т. Шевалдин

В работе продолжено изучение аппроксимативных свойств локальных экспоненциальных сплайнов с равномерными узлами с шагом $h>0$ (построенных Е. В. Стрелковой и В. Т. Шевалдиным), соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами, все корни характеристического многочлена которого действительны и попарно различны. Найдены порядковые оценки погрешности аппроксимации при $h\to 0$ некоторых соболевских классов функций такими сплайнами, точными на ядре оператора $\mathcal{L}$.

Ключевые слова: аппроксимация, локальные экспоненциальные сплайны, порядковые оценки.

Yu. S. Volkov, E. G. Pytkeev, V. T. Shevaldin. Orders of approximation by local exponential splines.

We continue the study of approximation properties of local exponential splines on a uniform grid with step $h>0$ corresponding to a linear differential operator $\mathcal{L}$ with constant coefficients and real pairwise different roots of the characteristic polynomial (such splines were constructed by E.V. Strelkova and V.T. Shevaldin). We find order estimates as $h\to 0$ for the error of approximation of certain Sobolev classes of functions by the mentioned splines, which are exact on the kernel of the operator $\mathcal{L}$.

Keywords: approximation, local exponential splines, order estimates.

Введение

Пусть в узлах равномерной с шагом $h>0$ сетки $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$ числовой прямой $\mathbb{R}$ заданы значения $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ некоторой функции $f(x)\colon y_j=f(jh)$, $j\in\mathbb{Z}$. Обозначим через B_r нормализованный полиномиальный базисный сплайн (B-сплайн) порядка $r\in\mathbb{N}$ (степени $r-1$) с носителем $\operatorname{supp} B_r=[0,rh]$ и равномерными узлами $0,h,2h,\dots,rh$ (см., например, [1, гл. 1]). В 1975 г. Т. Лич и Л. Шумейкер [2] (см. также [1, гл. 9]) для любой функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ построили локальные полиномиальные сплайны r-го порядка вида

$$S_r(x)=S_r(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{s=-k}^{k}\gamma_s f((j+s)h)B_r\Big(x-jh-\frac{rh}{2}\Big)\qquad(x\in\mathbb{R}),\tag{0.1}$$

где $k=[(r-1)/2]$ и действительные коэффициенты γ_s выбирались из условия точности формулы $S_r(f,x)=f(x)$ для алгебраических многочленов степени $r-1$. Было доказано, что такой выбор коэффициентов может быть осуществлен единственным образом. Методы локальной аппроксимации сплайнами стали эффективным инструментом решения задач теории приближения функций и численного анализа как полезная альтернатива метода интерполяции. Впоследствии оказалось, что на основе локальных полиномиальных (и более общих экспоненциальных и тригонометрических) сплайнов можно строить конструкции, обладающие свойством сохранения локальной k-монотонности исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Результаты Т. Лича и Л. Шумейкера [2] по локальной полиномиальной аппроксимации обобщались и развивались в различных направлениях. Выделим лишь те из них, которые относятся к теме

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-07-00447, 11-01-00347), интеграционных проектов, выполняемых совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проекты 2012-Б32, 12-С-1-1018), и программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003).

настоящей работы. Е. В. Стрелкова (Шевалдина) в двух своих работах [3; 4] построила локальные $\mathcal{L}$-сплайны $S(x)$ соответственно четного и нечетного порядков r (а затем исследовала их аппроксимативные свойства в терминах ядра интегрального представления погрешности аппроксимации) с равномерными узлами, сохраняющие все функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с постоянными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого предполагались действительными и попарно различными. Такие $\mathcal{L}$-сплайны называются экспоненциальными. В [5] был предложен единый подход (независимо от четности r) к построению еще более общих конструкций локальных экспоненциальных сплайнов, при котором сохранялось не все ядро оператора $\mathcal{L}$, а его произвольное подпространство. В [5] была выписана невырожденная система линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов (аналогов чисел γ_s в (0.1)) линейной комбинации узловых значений $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ ($j \in \mathbb{Z}$, $0 \le \alpha < 1$) аппроксимируемой функции f в схеме локальной аппроксимации, точной на подпространстве ядра оператора $\mathcal{L}$. В [6] эта система линейных алгебраических уравнений была сведена к треугольной (что позволило выписать ее решение явно) и были указаны необходимые и достаточные условия на параметры локальных экспоненциальных сплайнов, наследующих свойство обобщенной k-монотонности ($0 \le k \le r-1$) исходных данных $y_{j+\alpha}$. Отметим, что подобные вопросы рассматривались и для полиномиальных локальных сплайнов (см., например, [7–9] и библиографию к ним).

Настоящая работа продолжает исследования [3–6]. В [5] задача нахождения поточечной оценки погрешности аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами $S(x)$ на классах дифференцируемых функций была сведена к исследованию свойств ядра $K(x,\cdot)$ интегрального представления. Данная работа посвящена нахождению оценки интегральной нормы функции $K(x,\cdot)$ (при каждом фиксированном x) как функции от шага сетки h. На этом пути получены порядковые оценки погрешности аппроксимации соответствующих соболевских классов функций локальными экспоненциальными сплайнами, точными на всем ядре оператора $\mathcal{L}$.

1. Обозначения и постановка задачи

Дадим основные определения. Пусть $r \in \mathbb{N}$, D — оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{j=1}^{r}(D-\beta_j) \qquad (\beta_j \in \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

— линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, все корни β_j характеристического многочлена которого действительны и попарно различны. Пусть φ_r — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ ($j = \overline{0, r-1}$), где $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. В [10] выписано следующее рекуррентное соотношение:

$$\varphi_r(x) = \int\limits_0^x e^{\beta_r(x-t)}\varphi_{r-1}(t)\,dt. \tag{1.2}$$

Поскольку $\varphi_2(x) = (1/(\beta_1-\beta_2))(e^{\beta_1 x} - e^{\beta_2 x})$, то из (1.2) индукцией по r получаем равенство

$$\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{\beta_j x}\prod_{\substack{k=1\\k\ne j}}^{r}(\beta_j-\beta_k)^{-1}. \tag{1.3}$$

Для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определим (см., например, [11])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r}(T - e^{\beta_j h}E)f(x) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s^{(r)} f(x+sh) \tag{1.4}$$

— конечную разность с шагом $h > 0$, соответствующую оператору $\mathcal{L}_r$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ — оператор сдвига, E — тождественный оператор и коэффициенты $\mu_s^{(r)}$ могут быть вычислены по формулам Виета

$$\mu_r^{(r)} = 1,\ \mu_{r-1}^{(r)} = \sum_{s=1}^{r} e^{\beta_s h}, \dots, \mu_0^{(r)} = \prod_{s=1}^{r} e^{\beta_s h}.$$

Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$, определенный на пространстве функций f, выбран таким образом, что для любого решения линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_r(D)f = 0$ имеет место тождество $\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) \equiv 0$.

Базисный $\mathcal{L}$-сплайн (B-$\mathcal{L}$-сплайн) с носителем $\operatorname{supp} B = [0, rh]$ определяется формулой (см., например, [12])

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_r} \varphi_r((x - rh)_+) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{1.5}$$

где t_+ означает $\max\{0, t\}$. Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и произвольного числа $\alpha\colon 0 \le \alpha < 1$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j + \alpha)h) \qquad (j \in \mathbb{Z}).$$

Дифференциальный оператор (1.1) представим в виде

$$\mathcal{L}_r(D) = \mathcal{L}_m(D)\mathcal{L}_{r-m}(D), \qquad \mathcal{L}_m(D) = \prod_{j=1}^{m} (D - \beta_j), \tag{1.6}$$

где $1 \le m \le r$ и $\mathcal{L}_0(D) = E$ — тождественный оператор. Рассмотрим систему функционалов

$$I_j = I_j(\alpha) = \sum_{s=1}^{r} c_s y_{j+s+\alpha-1} \qquad (j \in \mathbb{Z},\ c_s \in \mathbb{R}) \tag{1.7}$$

и локальный экспоненциальный сплайн, задающий линейный метод приближения функции f, вида

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B_{\mathcal{L}_r}(x - jh) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.8}$$

Указанный метод аппроксимации функции f задается системой чисел $\{c_s\}_{s=1}^r$ и параметром $\alpha\colon 0 \le \alpha < 1$. В [5; 6] эта система чисел определялась таким образом, чтобы имели место равенства

$$S(e^{\beta_j \cdot}, x) = e^{\beta_j x} \qquad (x \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, m}). \tag{1.9}$$

Из [5, теорема 1] и [6, равенства (1.12)] вытекает следующее утверждение.

Теорема A. *Пусть действительные числа β_j ($j = \overline{1, r}$) попарно различны. Тогда система линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta_j (s-1)h} = Y_j = e^{\beta_j (r-\alpha-1)h} \prod_{\substack{k=1\\k \ne j}}^{r} \frac{(\beta_j - \beta_k)}{(e^{\beta_j h} - e^{\beta_k h})} \qquad (j = \overline{1, m}) \tag{1.10}$$

относительно вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_r)^T$ разрешима, и ее решение обращает в тождества равенства (1.9).

Ранг системы уравнений (1.10) равен $m\colon 1 \le m \le r$, поскольку она содержит ненулевой минор порядка m, являющийся определителем Вандермонда от элементов $x_j = e^{\beta_j h}$, которые в силу условия теоремы A попарно различны. При $m < r$ решение системы (1.10) не единственное, оно представляет собой линейное подпространство размерности $r - m$. В связи с этим в самой постановке задачи удобно считать, что $c_{m+1} = c_{m+2} = \dots = c_r = 0$. В этом случае достигается минимальная длина “шаблона” в системе функционалов (1.7) и система (1.10) однозначно разрешима.

Оператор $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(D)$ (см. (1.1) и (1.6)) представим в виде

$$\mathcal{L}_m(D) = \mathcal{L}_n(D)\mathcal{L}_{m-n}(D), \qquad \mathcal{L}_n(D) = \prod_{j=1}^{n}(D-\beta_j), \tag{1.11}$$

где $n\colon 1 \le n < m$. Рассмотрим отрезок $[a,b] = [(l-r+1+\alpha)h, (l+r-1+\alpha)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$. На этом отрезке рассмотрим следующие классы функций: $AC = AC[a,b]$ — класс функций f, абсолютно непрерывных на $[a,b]$, $L_\infty[a,b]$ — класс функций f, существенно ограниченных на $[a,b]$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

и $C = C[a,b]$ — пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с нормой

$$\|f\|_C = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Определим на этом отрезке соболевский класс дифференцируемых функций, ассоциированный с оператором $\mathcal{L}_n$, следующим образом:

$$W_\infty^{\mathcal{L}_n} = W_\infty^{\mathcal{L}_n}[a,b] = \{f: \ f^{(n-1)} \in AC: \ \|\mathcal{L}_n(D)f\|_\infty \le 1\}.$$

Через φ_n (см. (1.2), (1.3)) обозначается решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_n(D)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_n^{(j)}(0) = \delta_{j,n-1}$ $(j = \overline{0,n-1})$. Пусть $B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x)$ — B-$\mathcal{L}$-сплайн вида (1.5) и $S(x)$ — экспоненциальный локальный сплайн вида (1.8), у которого коэффициенты c_s $(s = \overline{1,r})$ в функционале (1.7) находятся исходя из равенств (1.9). Введем функцию

$$K(x,t) = K_{n,m,r}(x,t) = \varphi_n((x-t)_+) - \sum_{j=l-r+1}^{l}\sum_{s=1}^{r} c_s B_{\mathcal{L}_r}(x-jh)$$

$$\times \varphi_n(((j+s-1+\alpha)h-t)_+), \quad x \in [lh,(l+1)h] \quad (l \in \mathbb{Z}), \quad t \in [a,b]. \tag{1.12}$$

Эта функция является ядром интегрального представления разности $f(x) - S(x)$ (см. [5, теорема 2]) для $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_n}$. Из [5, следствие к теореме 2] вытекает следующее утверждение.

Теорема B. *Пусть действительные числа β_j $(j = \overline{1,r})$ попарно различны и $1 \le n < m \le r$. Тогда*

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_n}[a,b]} \|f-S\|_{C[lh,(l+1)h]} = \max_{x\in[lh,(l+1)h]} \int_a^b |K(x,t)|\,dt \qquad (l \in \mathbb{Z}).$$

Для локальных полиномиальных сплайнов подобная теорема доказана в [1, с. 262] (там же рассмотрен случай неравномерных узлов) и в [13, § 7.2]. Таким образом, теорема B сводит задачу вычисления порядков (по $h \to 0$) аппроксимации соболевского класса функций $W_\infty^{\mathcal{L}_n}$ в равномерной метрике локальными экспоненциальными сплайнами вида (1.8), точными на функциях ядра оператора $\mathcal{L}_n$, к исследованию свойств ядра $K(x,t)$ и оценке его интегральной нормы как функции от параметра $h \to 0$. Из [1] следует, что локальные полиномиальные сплайны с равномерными узлами реализуют наивысший (по $h \to 0$) порядок аппроксимации h^{r-1} (совпадающий с порядком колмогоровского поперечника) только в случае $m = r$, $n = r-1$. В следующих разделах мы покажем, что в указанном случае данный эффект имеет место для локальных экспоненциальных сплайнов. Вначале при $m = r$ изучим поведение решений $\{c_s\}_{s=1}^r$ системы линейных алгебраических уравнений (1.10) при $h \to 0$.

2. Свойства решений системы линейных алгебраических уравнений

Система уравнений (1.10) при $m = r$ является полной, так как количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Положим

$$\widetilde{c}_s = \widetilde{c}_s(h) = h^{r-1} c_s \quad (s = \overline{1,r}), \qquad \widetilde{Y}_j = \widetilde{Y}_j(h) = h^{r-1} Y_j \quad (j = \overline{1,r}). \tag{2.1}$$

Тогда система (1.10) принимает вид

$$\sum_{s=1}^{r} \widetilde{c}_s e^{\beta_j (s-1)h} = \widetilde{Y}_j = e^{\beta_j (r-\alpha-1)h} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{\beta_j h - \beta_k h}{e^{\beta_j h} - e^{\beta_k h}} \qquad (j = \overline{1,r}). \tag{2.2}$$

Теорема 1. *Пусть числа β_j $(j = \overline{1,r})$ действительны и попарно различны. Тогда при каждом $s = \overline{1,r}$ существует конечный предел $\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_s(h)$.*

Доказательство этого утверждения разобьем на несколько пунктов. Систему (2.2) будем решать по правилу Крамера. Пусть Δ — основной определитель этой системы и Δ_s — определитель, отвечающий переменной с номером s. Ясно, что Δ — определитель Вандермонда и поэтому система имеет единственное решение $\widetilde{c}_s$ $(s = \overline{1,r})$ при любой правой части. Пусть $F_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$, $F_1 = (e^{\beta_1 h}, e^{\beta_2 h}, \dots, e^{\beta_r h})^T, \dots, F_{r-1} = (e^{(r-1)\beta_1 h}, e^{(r-1)\beta_2 h}, \dots, e^{(r-1)\beta_r h})^T$, $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \dots, \widetilde{Y}_r)^T$ — столбцы системы (2.2). По правилу Крамера

$$\widetilde{c}_s = \frac{\Delta_s}{\Delta} \qquad (s = \overline{1,r}),$$

где $\Delta = \Delta(h) = |F_0 F_1 \dots F_{r-1}|$ и $\Delta_s = |F_0 \dots F_{s-2} \widetilde{Y} F_s \dots F_{r-1}|$.

Хорошо известно, что при $h \to 0$

$$\Delta(h) \sim h^{1+2+\dots+(r-1)} \prod_{r\ge k>l\ge 1} (\beta_k - \beta_l) = h^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{r\ge k>l\ge 1} (\beta_k - \beta_l). \tag{2.3}$$

Нас интересует порядок по $h \to 0$ величин $\Delta_s = \Delta_s(h)$ $(s = \overline{1,r})$. Пусть

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

— функция, бесконечно дифференцируемая в любой точке $x \in \mathbb{R}$. Из (2.2) выводим равенства

$$\widetilde{Y}_j = \widetilde{Y}_j(h) = e^{-\beta_j \alpha h} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \Phi((\beta_k - \beta_j)h) \qquad (j = \overline{1,r}). \tag{2.4}$$

Приступим к доказательству конечности пределов $\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_s(h)$ $(s = \overline{1,r})$. Вначале его проведем при $s = r$ (для случаев $s = \overline{2, r-1}$ доказательство будет аналогичным приведенному ниже, случай $s = 1$ рассмотрим отдельно). Имеем

$$\widetilde{c}_r(h) = \frac{\Delta_r}{\Delta}, \qquad \Delta_r = |F_0 F_1 \dots F_{r-2} \widetilde{Y}|. \tag{2.5}$$

Поскольку функция $\Delta_r = \Delta_r(h)$ бесконечно дифференцируема по h, то для доказательства существования конечного предела $\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_r(h)$ в силу (2.3) достаточно проверить равенства

$$\Delta_r^{(s)}\Big|_{h=0} = 0 \qquad \Big(s = 0, 1, \dots, \frac{r(r-1)}{2} - 1\Big). \tag{2.6}$$

В самом деле, тогда $\Delta_r(h) = Kh^{\frac{r(r-1)}{2}}(1 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \ldots)$ $(h \to 0)$ и

$$\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_r(h) = K \prod_{r\geq k>l\geq 1} (\beta_k - \beta_l)^{-1},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и K — некоторые константы.

По правилу дифференцирования определителей имеем

$$\Delta_r^{(s)}(h) = \sum_{i_0+i_1+\ldots+i_{r-1}=s} \frac{s!}{i_0! i_1! \ldots i_{r-1}!} \Big| F_0^{(i_0)} F_1^{(i_1)} \ldots F_{r-2}^{(i_{r-2})} \widetilde{Y}^{(i_{r-1})} \Big|. \tag{2.7}$$

Покажем, что все слагаемые в сумме (2.7) при $h = 0$ и $s = \overline{0, (r(r-1)/2) - 1}$ равны 0. Отсюда будет следовать (2.6). Эти слагаемые разобьем на 4 группы. К первой группе отнесем те слагаемые, у которых $i_0 > 0$. Заметим, что все эти слагаемые равны нулю, так как $F_0^{(i_0)} = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Поэтому в остальных группах можно принять, что $i_0 = 0$ и $F_0^{(0)} = F_0$. Ко второй группе отнесем те слагаемые, у которых $i_l = 0$ $(l \neq 0)$. Тогда $F_l^{(i_l)} = F_l$ и $F_l(0) = (1, 1, \ldots, 1)^T = F_0 = F_0(0)$. Поэтому соответствующий определитель равняется нулю, так как в матрице присутствуют два одинаковых столбца. В остальных группах можно принять, что $i_l > 0$ при $l > 0$. В третью группу определим слагаемые из (2.7), обладающие свойством $i_{l_1} = i_{l_2}$ для некоторых $l_1 \neq l_2,\ 0 < l_1, l_2 < r-1$. Тогда соответствующие определители содержат пропорциональные столбцы $F_{l_1}^{(i_{l_1})}(0) = l_1^{i_{l_1}} (\beta_1^{i_{l_1}}, \beta_2^{i_{l_1}}, \ldots, \beta_r^{i_{l_1}})^T$ и $F_{l_2}^{(i_{l_2})}(0) = l_2^{i_{l_2}} (\beta_1^{i_{l_1}}, \beta_2^{i_{l_1}}, \ldots, \beta_r^{i_{l_1}})^T$ и поэтому равняются нулю. Итак, осталось рассмотреть последнюю, четвертую, группу слагаемых в (2.7) таких, что $i_0 = 0,\ i_{l_1} \neq i_{l_2}$ $(0 < l_1 \neq l_2 < r-1),\ i_l > 0$ $(l > 0)$. Вначале отметим одно свойство чисел из этой группы.

Пусть $i_{r-1} = k$ $(k \geq 1)$. Докажем, что среди чисел $\{i_l \colon 0 < l < r-1\}$ встретятся все натуральные числа $1, 2, \ldots, k$. Предположим противное. Пусть $j \colon 1 \leq j \leq k$ — первое по счету число из множества $\{1, 2, \ldots, k\} \backslash \{i_l \colon 0 < l < r-1\}$. Оценим сумму $s = i_{r-1} + \sum_{0<l<r-1} i_l$. В силу свойств слагаемых из четвертой группы имеем

$$s \geq k + 1 + 2 + \cdots + (j-1) + (j+1) + \cdots + (r-1) = 1 + 2 + \cdots + (r-1) + (k-j) \geq \frac{r(r-1)}{2}. \tag{2.8}$$

Неравенство (2.8) противоречит тому, что $s < 1 + 2 + \cdots + (r-1) = (r(r-1)/2)$ (см. (2.7)).

Итак, при рассмотрении слагаемых из четвертой группы можно считать, что если $i_{r-1} = k$, то множество $\{1, 2, \ldots, k\} \subset \{i_l :\ 0 < l < r-1\}$. Покажем, что в этом случае

$$\Big| F_0(0) F_1^{(i_1)}(0) \ldots F_{r-2}^{(i_{r-2})}(0) \widetilde{Y}^{(k)}(0) \Big| = 0. \tag{2.9}$$

Для выполнения (2.9) достаточно установить, что последний столбец $\widetilde{Y}^{(k)}(0) = (\widetilde{Y}_1^{(k)}(0), \widetilde{Y}_2^{(k)}(0), \ldots, \widetilde{Y}_r^{(k)}(0))^T$ является линейной комбинацией остальных столбцов.

Обозначим $\tau_2 = \beta_2 - \beta_1, \ldots, \tau_r = \beta_r - \beta_1$. Тогда

$$\widetilde{Y}_1(h) = u \cdot v, \tag{2.10}$$

где

$$u = \prod_{k=2}^{r} \Phi(\tau_k h), \qquad v = e^{-\beta_1 \alpha h}. \tag{2.11}$$

По формуле Лейбница из (2.10) и (2.11) имеем

$$\widetilde{Y}_1^{(k)}(h) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i u^{(i)} v^{(k-i)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-\beta_1 \alpha)^{k-i} e^{-\beta_1 \alpha h} u^{(i)}. \tag{2.12}$$

По обобщенной формуле Лейбница

$$u^{(i)} = \sum_{i_2+\dots+i_r=i} \frac{i!}{i_2!\dots i_r!}\Phi^{(i_2)}(\tau_2 h)\times\dots\times\Phi^{(i_r)}(\tau_r h)$$

$$= \sum_{i_2+\dots+i_r=i} \frac{i!}{i_2!\dots i_r!}\left(\tau_2^{i_2}\times\dots\times\tau_r^{i_r}\right)\left(\Phi^{(i_2)}(x)\Big|_{x=\tau_2 h}\times\dots\times\Phi^{(i_r)}(x)\Big|_{x=\tau_r h}\right).$$

Отсюда при $h=0$ имеем

$$u^{(i)}(0) = \sum_{i_2+\dots+i_r=i} \frac{i!}{i_2!\dots i_r!}\left(\tau_2^{i_2}\times\dots\times\tau_r^{i_r}\right)\left(\Phi^{(i_2)}(0)\times\dots\times\Phi^{(i_r)}(0)\right)$$

$$= \sum_{\substack{m_2+\dots+m_r=i\\ m_2\geq m_3\geq\dots\geq m_r}} \frac{i!}{m_2!\dots m_r!}\Phi^{(m_2)}(0)\times\dots\times\Phi^{(m_r)}(0)P(\tau_2,\dots,\tau_r), \tag{2.13}$$

где $P(\tau_2,\dots,\tau_r)=\sum\tau_2^{q_2}\times\dots\times\tau_r^{q_r}$ — сумма мономов и суммирование идет по всем наборам $q_2,\dots,q_r$, совпадающих с набором $m_2,\dots,m_r$ с учетом кратности. Переменные $\tau_2,\dots,\tau_r$ входят в выражение для $P(\tau_2,\dots,\tau_r)$ равноправно, поэтому $P(\tau_2,\dots,\tau_r)$ — симметрический многочлен относительно переменных $\tau_2,\dots,\tau_r$ степени i. Отсюда следует, что многочлен $P(\beta_2-\beta_1,\dots,\beta_r-\beta_1)=P(\tau_2,\dots,\tau_r)$ является многочленом относительно переменных $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r$, причем справедливо представление

$$P(\beta_2-\beta_1,\dots,\beta_r-\beta_1)=Q_0(\beta_2,\dots,\beta_r)\beta_1^i+Q_1(\beta_2,\dots,\beta_r)\beta_1^{i-1}+\dots+Q_i(\beta_2,\dots,\beta_r), \tag{2.14}$$

где $Q_0,Q_1,\dots,Q_i$ — симметрические многочлены относительно $\beta_2,\dots,\beta_r$ степени $0,1,\dots,i$ соответственно.

Докажем, что любой симметрический многочлен $Q_p(\beta_2,\dots,\beta_r)$ степени $p:\ 0\leq p\leq i$ из равенства (2.14) можно представить в виде

$$Q_p(\beta_2,\dots,\beta_r)=b_1^pQ_0^*(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)+b_1^{p-1}Q_1^*(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)+\dots+Q_p^*(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r), \tag{2.15}$$

где Q_j^* $(j=\overline{0,p})$ — симметрические многочлены степени j относительно переменных β_1, $\beta_2,\dots,\beta_r$.

Вначале проверим справедливость (2.15) для элементарных симметрических многочленов $S_1(\beta_2,\dots,\beta_r)$, $S_2(\beta_2,\dots,\beta_r),\dots,S_r(\beta_2,\dots,\beta_r)$ степени $1,2,\dots,r$ (при $r=0$ доказывать нечего). Имеем

$$S_1(\beta_2,\dots,\beta_r)=\beta_2+\dots+\beta_r+\beta_1-\beta_1=S_1(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1. \tag{2.16}$$

Далее при $k\geq 2$ получаем

$$\begin{aligned}S_k(\beta_2,\dots,\beta_r)&=S_k(\beta_2,\dots,\beta_r)+\beta_1S_{k-1}(\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1S_{k-1}(\beta_2,\dots,\beta_r)\\&=S_k(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1S_{k-1}(\beta_2,\dots,\beta_r)\\&=S_k(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1(S_{k-1}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1S_{k-2}(\beta_2,\dots,\beta_r))\\&=S_k(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1S_{k-1}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)+\beta_1^2S_{k-2}(\beta_2,\dots,\beta_r)\\&=S_k(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)-\beta_1S_{k-1}(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_r)+\dots+(-1)^k\beta_1^k.\end{aligned} \tag{2.17}$$

В силу основной теоремы о симметрических многочленах (см., например, [14]) многочлен $Q_p(\beta_2,\dots,\beta_r)$ степени p: $0\leq p\leq i$ можно представить в виде многочлена $R=R(S_1(\beta_2,\dots,\beta_r),\dots,S_r(\beta_2,\dots,\beta_r))$ от переменных $S_1,\dots,S_r$, причем R является линейной комбинацией одночленов вида $S_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}\times\dots\times S_r^{\alpha_r}$, где $\alpha_1+2\alpha_2+\dots+r\alpha_r\leq\deg Q_p=p$. Отсюда и из равенств (2.16) и (2.17) следует (2.15). Из равенств (2.13)–(2.15) выводим, что

$$u^{(i)}(0)=\beta_1^i\widetilde{Q}_0(\beta_1,\dots,\beta_r)+\beta_1^{i-1}\widetilde{Q}_1(\beta_1,\dots,\beta_r)+\dots+\widetilde{Q}_i(\beta_1,\dots,\beta_r),$$

где $\widetilde{Q}_j = \widetilde{Q}_j(\beta_1, \dots, \beta_r)$ $(j = \overline{0, i})$ — некоторые симметрические многочлены степени j от переменных $\beta_1, \dots, \beta_r$. Из последнего равенства и (2.12), (2.13) следует, что

$$\widetilde{Y}_1^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-\alpha)^{k-i} \beta_1^{k-i} (\beta_1^i \widetilde{Q}_0 + b_1^{i-1} \widetilde{Q}_1 + \dots + \widetilde{Q}_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-\alpha)^{k-i} (\beta_1^k \widetilde{Q}_0 + \beta_1^{k-1} \widetilde{Q}_1 + \dots + \beta_1^{k-i} \widetilde{Q}_i)$$

$$= \beta_1^k P_0(\beta_1, \dots, \beta_r) + \beta_1^{k-1} P_1(\beta_1, \dots, \beta_r) + \dots + P_k(\beta_1, \dots, \beta_r), \tag{2.18}$$

где $P_j = P_j(\beta_1, \dots, \beta_r)$ $(j = \overline{0, k})$ — симметрические многочлены степени j от переменных $\beta_1, \dots, \beta_r$.

Заметим, что вторая координата $\widetilde{Y}_2^{(k)}(0)$ вектора $\widetilde{Y}^{(k)}(0) = (\widetilde{Y}_1^{(k)}(0), Y_2^{(k)}(0), \dots, Y_r^{(k)}(0))^T$ (см. (2.4), (2.12)) получается из первой координаты $\widetilde{Y}_1^{(k)}(0)$ заменой β_1 на β_2 и β_2 на β_1. Поскольку P_j $(j = \overline{0, k})$ — симметрические многочлены, то с помощью тех же рассуждений выводим равенство

$$\widetilde{Y}_2^{(k)}(0) = \beta_2^k P_0 + \beta_2^{k-1} P_1 + \dots + P_k$$

и аналогично для остальных переменных

$$\widetilde{Y}_j^{(k)}(0) = \beta_j^k P_0 + \beta_j^{k-1} P_1 + \dots + P_k \qquad (j = \overline{2, r}),$$

где P_j $(j = \overline{0, k})$ — симметрические многочлены степени j из равенства (2.18). Таким образом, справедливо равенство векторов

$$\widetilde{Y}^{(k)}(0) = \big(\widetilde{Y}_1^{(k)}(0), \widetilde{Y}_2^{(k)}(0), \dots, \widetilde{Y}_r^{(k)}(0)\big)^T$$

$$= P_0(\beta_1^k, \beta_2^k, \dots, \beta_r^k)^T + P_1(\beta_1^{k-1}, \beta_2^{k-1}, \dots, \beta_r^{k-1})^T + \dots + P_k(1, 1, \dots, 1)^T. \tag{2.19}$$

Напомним, что в рассматриваемом случае $i_0 = 0$, $i_{l_1} \neq i_{l_2}$ $(0 < l_1 \neq l_2 < r-1)$, $i_l > 0$ при $l > 0$, $i_{r-1} = k$ $(k \geq 1)$ и множество $\{1, 2, \dots, k\} \subset \{i_l :\ 0 < l < r-1\}$. Пусть $i_{l_j} = j$ $(j = \overline{1, k})$. Тогда $F_{l_j}^{(j)}(0) = l_j^j (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_r^j)^T$ $(j = \overline{1, k})$ и из (2.19) получаем

$$\widetilde{Y}^{(k)}(0) = \frac{P_0}{l_k^k} F_{l_k}^{(k)}(0) + \frac{P_1}{l_{k-1}^{k-1}} F_{l_{k-1}}^{(k-1)}(0) + \dots + \frac{P_k}{1} F_0(0).$$

Последнее равенство означает, что последний столбец $\widetilde{Y}^{(k)}(0)$ в формуле (2.7) в четвертой группе выделенных нами слагаемых является линейной комбинацией остальных столбцов. Значит, соответствующий определитель равен нулю и из (2.7) и предыдущих рассуждений выводим равенства (2.6). В свою очередь, отсюда и из (2.3) и (2.5) следует конечность предела $\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_r(h)$. Заметим, что все рассуждения данного раздела проходят и для остальных $j = \overline{2, r-1}$. Из конечности пределов $\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_j(h)$ $(j = \overline{2, r})$ и, например, из первого уравнения системы (2.2) получаем, что предел $\lim_{h\to 0} \widetilde{c}_1(h)$ также конечен. Теорема 1 доказана.

3. Порядковые оценки погрешности аппроксимации

В данном разделе всюду считаем $m = r$, $n = r - 1 \geq 1$ (см. (1.1), (1.6), (1.11)) и будем изучать порядки (по $h \to 0$) погрешности аппроксимации в равномерной метрике класса дифференцируемых функций

$$W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}} = W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}[a, b] = \{f \colon f^{(r-2)} \in AC,\ \|\mathcal{L}_{r-1}(D) f\|_\infty \leq 1\}$$

на отрезке $[a, b] = [(l - r + 1 + \alpha)h, (l + r - 1 + \alpha)h]$ локальными экспоненциальными сплайнами $S(x)$ вида (1.8), точными на всем ядре оператора $\mathcal{L}_r$.

Теорема 2. *Пусть действительные числа* β_j $(j=\overline{1,r})$ *попарно различны. Имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}[a,b]} \|f-S\|_{C[a,b]} = O(h^{r-1}) \qquad (h\to 0).$$

Доказательство. В силу теоремы B для доказательства теоремы 2 требуется проверить равенство

$$\max_{x\in[lh,(l+1)h]} \int\limits_a^b |K(x,t)|\,dt = O(h^{r-1}) \qquad (h\to 0), \tag{3.1}$$

где функция $K(x,t)=K_{r-1,r,r}(x,t)$ имеет вид (1.12).

Из теоремы 1 и (2.1) следует, что

$$c_s = c_s(h) = O(h^{-(r-1)}) \qquad (h\to 0). \tag{3.2}$$

Из равенств (1.2) и (1.3) индукцией по r выводим, что $\varphi_{r-1}(t)>0$ $(t>0)$ и

$$\int\limits_0^{rh} \varphi_{r-1}(t)\,dt = O(h^{r-1}) \qquad (h\to 0). \tag{3.3}$$

Из (1.2)–(1.5) легко получаем, что

$$\max_{x\in[0,rh]} |B_{\mathcal{L}_r}(x)| = O(h^{r-1}) \qquad (h\to 0). \tag{3.4}$$

Теперь равенство (3.1) следует из определения функции $K(x,t)$ (см. (1.12)) и полученных оценок (3.2)–(3.4). Теорема 2 доказана.

Замечание. Результат теоремы 2 интересно сравнить с известными результатами по приближению класса $W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}$ в равномерной метрике другими классами непрерывных функций. Пусть

$$d_n(W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}})_\infty = \inf_{M_n:\ \dim M_n\le n}\ \sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}}\ \inf_{g\in M_n} \|f-g\|_C$$

— n-й поперечник по Колмогорову класса $W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}$ в равномерной метрике. В последнем равенстве внешняя нижняя грань берется по всем подпространствам M_n размерности не выше n. Из результатов М. Г. Крейна, В. Т. Шевалдина и И. Н. Володиной (подробную историю вопроса см., например, в [10]) вытекает, в частности, что для периодических функций f имеет место порядковое равенство

$$d_n(W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}})_\infty \asymp h^{r-1} \qquad \Big(h=\frac{1}{n}\to 0\Big).$$

Таким образом, для периодических функций локальные экспоненциальные сплайны вида (1.8), точные на всем ядре оператора $\mathcal{L}_r$, в равномерной метрике реализуют наилучший по $h\to 0$ порядок приближения класса функций $W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, no. 4. P. 294–325.
3. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора // Изв. ТулГУ. 2009. Т. 2. С. 62–73. (Естественные науки.)

4. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.
5. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
6. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Формосохранение при аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами произвольного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. Т. 17, № 3. С. 291–299.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
8. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющая некоторые свойства аппроксимируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 2. С. 156–166.
9. **Волков Ю.С., Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 2. С. 73–82.
10. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
11. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–173.
12. **ter Morsche H.G.** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: Dissertation. Eindhoven: Techinische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.
13. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
14. **Прасолов В.В.** Многочлены. М.: МЦИМО, 2003. 336 с.

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Поступила 19.05.2012

Пыткеев Евгений Георгиевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 519.65

УСЛОВИЯ ФОРМОСОХРАНЕНИЯ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СПЛАЙНАМИ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ПО СУББОТИНУ И ПО МАРСДЕНУ[1]

Ю. С. Волков, В. Т. Шевалдин

Для двух конструкций интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену установлены простые достаточные условия, при которых интерполянт наследует геометрические характеристики (положительность, монотонность, выпуклость) интерполируемых данных.

Ключевые слова: сплайн второй степени, интерполяция, формосохранение.

Yu. S. Volkov, V. T. Shevaldin. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden.

For two constructions of quadratic interpolation splines in the sense of Subbotin and Marsden, simple sufficient conditions are established under which the interpolant inherits the geometric properties (positivity, monotonicity, and convexity) of the interpolated data.

Keywords: quadratic spline, interpolation, shape preservation.

Введение

В задачах интерполяции сплайнами четной степени множество точек интерполяции и сетку узлов сплайна принято выбирать несовпадающими, в то время как для сплайнов нечетной степени эти сетки совпадают. При интерполяции сплайнами второй степени распространены два подхода: по Субботину и по Марсдену. Ю. Н. Субботин предложил узлы параболического сплайна выбирать посередине между заданными точками интерполяции [1–3]. М. Марсден, наоборот, стал считать сетку узлов сплайна заданной, а точки интерполяции выбирал посередине между узлами сплайна [4; 5].

Заметим, что это две принципиально различные конструкции, предназначенные, вообще говоря, для разных задач. Например, если задан набор дискретных значений, которые требуется интерполировать, то здесь подходит сплайн по Субботину, в то время как сплайн по Марсдену будет существовать не для любой неравномерной сетки данных. В другом примере, наоборот, подходят именно сплайны по Марсдену. Например, при приближении функции (значения которой можно вычислять в любой точке) требуется, чтобы узлы сплайна находились в определенных точках (это может диктоваться положением возможных разрывов второй производной интерполянта). Такая задача легко решается сплайном по Марсдену, а сплайн по Субботину для каких-то сеток может не существовать.

Конечно, в случае равномерных сеток получается одна и та же конструкция, но в целом эти два разных сплайна обладают различными аппроксимативными свойствами.

Ранее одним из авторов было обнаружено [6], что, несмотря на принципиальные отличия интерполянтов, между сплайнами по Субботину и по Марсдену существует тесная связь, и между аппроксимативными свойствами этих разных конструкций был переброшен своеобразный мостик. Матрицы систем определяющих уравнений в одном подходе являются транспонированными от соответствующих матриц в другом.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-07-00447, 11-01-00347) и программы поддержки совместных интеграционных проектов СО РАН и УрО РАН (проекты 2012-Б32, 12-С-1-1018).

Методика вывода подобных систем определяющих уравнений была предложена в [7]. В дальнейшем оказалось, что такие системы в случае кубических сплайнов удобны для исследования изогеометрических свойств интерполяционных сплайнов [8;9]. На основе этих систем уравнений в работе [10] рассмотрен единый подход к получению достаточных условий формосохранения, т. е. k-монотонности (положительности k-й производной) кубического сплайна, интерполирующего k-монотонные данные. До этого в [11] были получены только достаточные условия монотонности и выпуклости (случаи $k = 1$ и $k = 2$). Отметим, что при локальной аппроксимации полиномиальными сплайнами за счет отказа от интерполяции всегда можно добиться наследования свойств монотонности и выпуклости [12–15].

В настоящей работе устанавлены достаточные условия k-монотонности сплайнов второй степени, интерполирующих k-монотонные исходные данные ($k = 0, 1, 2, 3$). Причем, поскольку системы определяющих уравнений для сплайнов по Субботину и по Марсдену связаны между собой, нами получены условия формосохранения для обеих конструкций.

1. Две конструкции сплайнов второй степени

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две сетки узлов

$$\boldsymbol{X}\colon\ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

$$\boldsymbol{Y}\colon\ y_0 = a < y_1 < \ldots < y_n < b = y_{n+1}$$

так, что $y_i = (x_{i-1} + x_i)/2,\quad i = 1, \ldots, n$.

Интерполяционным сплайном второй степени по Субботину будем называть сплайн $s(x)$ с узлами на сетке $\boldsymbol{Y}$, который принимает в точках сетки $\boldsymbol{X}$ известные значения некоторой функции $f(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, т. е.

$$s(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Интерполяционным сплайном второй степени по Марсдену будем называть сплайн $s(x)$ с узлами на сетке $\boldsymbol{X}$, который принимает в узлах сетки $\boldsymbol{Y}$ известные значения некоторой функции $f(x)\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, т. е.

$$s(y_i) = f(y_i), \quad i = 0, \ldots, n + 1. \tag{1.2}$$

В обоих случаях мы рассматриваем простые сплайны (по терминологии [16]), т. е. максимальной гладкости $s(x) \in C^1[a, b]$, причем сплайн по Марсдену определяется условиями (1.2) однозначно, а для однозначного определения сплайна по Субботину кроме условий (1.1) нужны какие-либо краевые условия. Мы ограничимся лишь случаем задания на концах отрезка $[a, b]$ значений производной интерполируемой функции, т. е. считаем известными значения $f'(a), f'(b)$ и полагаем $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$. Кроме того, будем считать, что интерполируемая функция $f(x)$ k-монотонна для некоторого фиксированного $k = 0, 1, 2, 3$, т. е. функция $f^{(k)}(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Но поскольку нам известна информация об интерполируемой функции лишь в узлах сетки $\boldsymbol{X}$ (для сплайнов по Субботину) или $\boldsymbol{Y}$ (для сплайнов по Марсдену), то под k-монотонностью данных мы понимаем неотрицательность разделенных разностей k-го порядка от исходных данных, обозначаемых как $\Delta^k_{i,\boldsymbol{X}} = f[x_{i-k}, \ldots, x_i]$, $\Delta^k_{i,\boldsymbol{Y}} = f[y_{i-k}, \ldots, y_i]$.

Наша цель — получить условия, при которых сплайн второй степени по Субботину и по Марсдену будет наследовать свойство k-монотонности интерполируемых данных, т. е. условия неотрицательности $s^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2$, на $[a, b]$. Известно [17], что скачок второй производной сплайна (величина разрыва второй производной в узлах сетки, отнесенная к шагу сетки) на равномерных сетках приближает узловые значения третьей производной интерполируемой функции. Поэтому представляет интерес также получить условия 3-монотонности сплайнов второй степени, т. е. условия неотрицательности скачков второй производной.

Производную сплайна $s^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2$, будем представлять в виде разложения по B-сплайнам порядка $3 - k$ или степени $2 - k$ (см., например, [3]). Для сплайнов по Субботину имеем

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2+k}^{n} \alpha_i^{(k)} N_{i,3-k,\boldsymbol{Y}}(x), \tag{1.3}$$

а по Марсдену

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=-2+k}^{n-1} \alpha_i^{(k)} N_{i,3-k,\boldsymbol{X}}(x). \tag{1.4}$$

Здесь $N_{i,3-k,\boldsymbol{X}}$ и $N_{i,3-k,\boldsymbol{Y}}$ — B-сплайны порядка $3 - k$ по сеткам $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ соответственно, определяемые равенствами

$$N_{i,r,\boldsymbol{X}}(x) = (x_{i+r} - x_i)\big((\cdot - x)_+\big)^{r-1}[x_i, \ldots, x_{i+r}],$$
$$N_{i,r,\boldsymbol{Y}}(x) = (y_{i+r} - y_i)\big((\cdot - x)_+\big)^{r-1}[y_i, \ldots, y_{i+r}],$$

где разделенные разности от усеченной степенной функции $g(t, x) = \big((t - x)_+\big)^{r-1}$ берутся по аргументу t. При этом сетки $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ мы считаем расширенными влево и вправо кратными дополнительными узлами $x_{-2} = x_{-1} = a$, $b = x_{n+1} = x_{n+2}$, $y_{-2} = y_{-1} = a$, $b = y_{n+2} = y_{n+3}$.

Поскольку B-сплайны являются неотрицательными функциями, то достаточными условиями k-монотонности сплайнов (неотрицательности $s^{(k)}(x)$) при $k = 0, 1, 2$ являются условия неотрицательности набора коэффициентов $\alpha_{-2+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}$ в представлении (1.3) для сплайнов по Субботину и коэффициентов $\alpha_{-2+k}^{(k)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(k)}$ в представлении (1.4) для сплайнов по Марсдену, а при $k = 3$ — условия неотрицательности скачков или разрывов второй производной сплайнов в узлах сетки.

Указанные коэффициенты являются, вообще говоря, неизвестными параметрами сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену, и для их определения в [6] установлены системы линейных уравнений. Приведем здесь эти системы уравнений. Введем стандартные обозначения:

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = -2, \ldots, n+1;$$
$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i},\ \lambda_i = 1 - \mu_i, \quad i = -1, \ldots, n+1.$$

Для сплайнов по Субботину в случае $k = 0$ параметры $\alpha_{-2}^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}$ выводятся из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{-2}^{(0)} = f(a), \qquad \alpha_{-1}^{(0)} = f(a) + \frac{h_0}{2} f'(a),\\
&N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\alpha_{i-2}^{(0)} + N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\alpha_{i-1}^{(0)} + N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\alpha_i^{(0)} = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n-1,\\
&\alpha_n^{(0)} = f(b), \qquad \alpha_{n-1}^{(0)} = f(b) - \frac{h_{n-1}}{2} f'(b).
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

При $k = 1$ неизвестными будут $\alpha_{-1}^{(1)}, \ldots, \alpha_n^{(1)}$, которые получаем из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{-1}^{(1)} = f'(a),\\
&\lambda_{i-1}\alpha_{i-2}^{(1)} + (2 + \mu_{i-1} + \lambda_i)\alpha_{i-1}^{(1)} + \mu_i\alpha_i^{(1)} = 4\Delta_{i,\boldsymbol{X}}^1,\ i = 1, \ldots, n,\\
&\alpha_n^{(1)} = f'(b).
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

При $k=2$ система уравнений относительно $\alpha_0^{(2)},\dots,\alpha_n^{(2)}$ такова:

$$\left.\begin{aligned}&3\alpha_0^{(2)}+\alpha_1^{(2)}=4\Delta^2_{1,\boldsymbol{X}},\\&\mu_i\alpha_{i-1}^{(2)}+3\alpha_i^{(2)}+\lambda_i\alpha_{i+1}^{(2)}=4\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{X}},\ i=1,\dots,n-1,\\&\alpha_{n-1}^{(2)}+3\alpha_n^{(2)}=4\Delta^2_{n+1,\boldsymbol{X}}.\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

И, наконец, случай $k=3$. Известно [17], что разрывы второй производной интерполяционного сплайна по Субботину

$$\beta_i=S''(y_i-0)-S''(y_i+0),\quad i=1,\dots,n,$$

отнесенные к шагу сетки h_i, на равномерных сетках приближают $f'''(y_i)$. Система уравнений относительно разрывов имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&(2+\lambda_1)\beta_1+\lambda_1\beta_2=8\delta^3_{2,\boldsymbol{X}},\\&\mu_i\beta_i+(2+\mu_i+\lambda_{i+1})\beta_{i+1}+\lambda_{i+1}\beta_{i+2}=8\delta^3_{i+2,\boldsymbol{X}},\ i=1,\dots,n-2,\\&\mu_{n-1}\beta_{n-1}+(2+\mu_{n-1})\beta_n=8\delta^3_{n+1,\boldsymbol{X}},\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

где $\delta^3_{i,\boldsymbol{X}}=\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{X}}-\Delta^2_{i,\boldsymbol{X}},\ i=2,\dots,n+1$.

Теперь — для сплайнов по Марсдену. Для $k=0$ система уравнений относительно параметров $\alpha_{-2}^{(0)},\dots,\alpha_{n-1}^{(0)}$ записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{-2}^{(0)}=f(a),\\&\lambda_{i-1}\alpha_{i-3}^{(0)}+(2+\mu_{i-1}+\lambda_i)\alpha_{i-2}^{(0)}+\mu_i\alpha_{i-1}^{(0)}=4f(y_i),\ i=1,\dots,n,\\&\alpha_{n-1}^{(0)}=f(b).\end{aligned}\right\}\tag{1.9}$$

Система уравнений при $k=1$ относительно неизвестных $\alpha_{-1}^{(1)},\dots,\alpha_{n-1}^{(1)}$ выглядит так:

$$\left.\begin{aligned}&3\alpha_{-1}^{(1)}+\alpha_0^{(1)}=4\Delta^1_{1,\boldsymbol{Y}},\\&\mu_i\alpha_{i-2}^{(1)}+3\alpha_{i-1}^{(1)}+\lambda_i\alpha_i^{(1)}=4\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{Y}},\ i=1,\dots,n-1,\\&\alpha_{n-2}^{(1)}+3\alpha_{n-1}^{(1)}=4\Delta^1_{n+1,\boldsymbol{Y}}.\end{aligned}\right\}\tag{1.10}$$

Далее, случаю $k=2$ соответствует система уравнений относительно $\alpha_0^{(2)},\dots,\alpha_{n-1}^{(2)}$:

$$\left.\begin{aligned}&h_0(2+\lambda_1)\alpha_0^{(2)}+\lambda_1h_1\alpha_1^{(2)}=\delta^2_{2,\boldsymbol{Y}},\\&\mu_ih_{i-1}\alpha_{i-1}^{(2)}+h_i(2+\mu_i+\lambda_{i+1})\alpha_i^{(2)}+\lambda_{i+1}h_{i+1}\alpha_{i+1}^{(2)}=\delta^2_{i+2,\boldsymbol{Y}},\ i=1,\dots,n-2,\\&\mu_{n-1}h_{n-2}\alpha_{n-2}^{(2)}+h_{n-1}(2+\mu_{n-1})\alpha_{n-1}^{(2)}=\delta^2_{n+1,\boldsymbol{Y}},\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

где $\delta^2_{i,\boldsymbol{Y}}=\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^1_{i,\boldsymbol{Y}}$, $i=2,\dots,n+1$. И, наконец, в случае $k=3$ разрывы второй производной в узлах сетки $\beta_i=S''(x_i-0)-S''(x_i+0),\ i=1,\dots,n-1$, находим из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}&N_{0,3,\boldsymbol{Y}}(x_1)\beta_1+N_{0,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)\beta_2=2\delta^3_{3,\boldsymbol{Y}},\\&N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)\beta_i+N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})\beta_{i+1}+N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(y_{i+2})\beta_{i+2}=2\delta^3_{i+3,\boldsymbol{Y}},\ i=1,\dots,n-3,\\&N_{n-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})\beta_{n-2}+N_{n-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-1})\beta_{n-1}=2\delta^3_{n+1,\boldsymbol{Y}},\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

где $\delta^3_{i,\boldsymbol{Y}}=\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^2_{i,\boldsymbol{Y}},\ i=3,\dots,n+1$.

2. Условия k-монотонности

Основным инструментом для получения условий k-монотонности является доказанная в [10] теорема о положительном решении системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Az} = \mathbf{g} \tag{2.13}$$

относительно неизвестных $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)^T$ с трехдиагональной матрицей коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

и вектором правой части $\mathbf{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_n)^T$.

Теорема 1 [10, теорема 3]. *Пусть элементы матрицы* $\mathbf{A}$ *и вектора правой части* $\mathbf{g}$ *системы* (2.13) *неотрицательны и матрица* $\mathbf{A}$ *приводится к матрице со строгим диагональным преобладанием* (*по строкам или столбцам*) *путем домножения ее на диагональную матрицу с положительными диагональными элементами. Тогда решение* $\mathbf{z}$ *будет неотрицательным, если выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} & g_0 - \frac{b_0}{a_1}\, g_1 \geqslant 0; \\ & g_i - \frac{c_i}{a_{i-1}}\, g_{i-1} - \frac{b_i}{a_{i+1}}\, g_{i+1} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n-1; \\ & g_n - \frac{c_n}{a_{n-1}}\, g_{n-1} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Отметим, что частные случаи этой теоремы (когда сама матрица $\mathbf{A}$ имеет диагональное преобладание по строкам или столбцам) доказаны в работах [11; 18].

Применение теоремы 1 к системам уравнений (1.5)–(1.12) приводит к достаточным условиям положительности (неотрицательности) неизвестных параметров этих систем. Ясно, что этого достаточно для 3-монотонности. В остальных случаях ($k = 0, 1, 2$) k-монотонность сплайна следует из того, что определяемые параметры являются коэффициентами разложения соответствующей производной сплайна по неотрицательным B-сплайнам, следовательно, неотрицательность коэффициентов разложения производной сплайна обеспечивает неотрицательность и самой производной.

Очевидно, системы (1.6)–(1.10) имеют диагональное преобладание, матрица системы (1.11) будет иметь диагональное преобладание после умножения ее справа на диагональную матрицу $\mathrm{diag}\{h_0^{-1}, \ldots, h_{n-1}^{-1}\}$. Осталось исследовать только две системы (1.5) и (1.12). В системе уравнений (1.5) для двух первых и двух последних неизвестных выписаны явные формулы, поэтому эту систему можно рассматривать лишь относительно неизвестных $\alpha_0^{(0)}, \ldots, \alpha_{n-2}^{(0)}$. Матрица такой урезанной системы совпадает с транспонированной матрицей системы (1.12). Таким образом, нам осталось показать, что матрица урезанной системы удовлетворяет условиям теоремы 1. Покажем, что умножение этой матрицы справа на матрицу $\mathrm{diag}\{h_0 + h_1, \ldots, h_{n-2} + h_{n-1}\}$ дает матрицу со строгим диагональным преобладанием.

В самом деле, величина диагонального преобладания в i-й строке преобразованной матрицы определяется как

$$\begin{aligned} & (h_{i-1} + h_i) N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_i) - (h_{i-2} + h_{i-1}) N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_i) - (h_i + h_{i+1}) N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i) \\ & = (h_{i-1} + h_i)\Big[\frac{h_i(h_{i-2} + 2h_{i-1})}{(h_{i-1} + h_i)(h_{i-2} + 2h_{i-1} + h_i)} + \frac{h_{i-1}(2h_i + h_{i+1})}{(h_{i-1} + h_i)(h_{i-1} + 2h_i + h_{i+1})}\Big] \end{aligned}$$

$$-\frac{(h_{i-2}+h_{i-1})h_i^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-2}+2h_{i-1}+h_i)}-\frac{(h_i+h_{i+1})h_{i-1}^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+2h_i+h_{i+1})}=\frac{2h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i}.$$

Таким образом, все системы уравнений (1.5)–(1.12) удовлетворяют условиям теоремы 1. Применение данной теоремы приводит к достаточным условиям k-монотонности для интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину и по Марсдену при каждом фиксированном $k=0,1,2,3$.

Теорема 2. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют положительные данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет неотрицательным, если выполнены условия*

$$\begin{aligned}
&f(a)+\frac{h_0}{2}f'(a)\geqslant 0,\\
&f(x_1)-N_{-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_1)\Big(f(a)+\frac{h_0}{2}f'(a)\Big)-\frac{N_{1,3,\boldsymbol{Y}}(x_1)}{N_{1,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)}f(x_2)\geqslant 0,\\
&f(x_i)-\frac{N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)}{N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i-1})}f(x_{i-1})-\frac{N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_i)}{N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})}f(x_{i+1})\geqslant 0,\quad i=2,\dots,n-2,\\
&f(x_{n-1})-N_{n-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-1})\Big(f(b)-\frac{h_{n-1}}{2}f'(b)\Big)-\frac{N_{n-3,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-1})}{N_{n-3,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})}f(x_{n-2})\geqslant 0,\\
&f(b)-\frac{h_{n-1}}{2}f'(b)\geqslant 0,
\end{aligned}$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$\begin{aligned}
&f(y_1)-\frac14 f(a)-\frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}f(y_2)\geqslant 0,\\
&f(y_i)-\frac{\lambda_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}f(y_{i-1})-\frac{\mu_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}f(y_{i+1})\geqslant 0,\quad i=2,\dots,n-1,\\
&f(y_n)-\frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}f(y_{n-1})-\frac14 f(b)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют монотонные данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет монотонным, если выполнены условия*

$$\begin{aligned}
&\Delta^1_{1,\boldsymbol{X}}-\frac14 f'(a)-\frac{\mu_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\Delta^1_{2,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\\
&\Delta^1_{i,\boldsymbol{X}}-\frac{\lambda_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}\Delta^1_{i-1,\boldsymbol{X}}-\frac{\mu_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\quad i=2,\dots,n-1,\\
&\Delta^1_{n,\boldsymbol{X}}-\frac{\lambda_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\Delta^1_{n-1,\boldsymbol{X}}-\frac14 f'(b)\geqslant 0,
\end{aligned}$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$\begin{aligned}
&3\Delta^1_{1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^1_{2,\boldsymbol{Y}}\geqslant 0,\\
&3\Delta^1_{i+1,\boldsymbol{Y}}-\mu_i\Delta^1_{i,\boldsymbol{Y}}-\lambda_i\Delta^1_{i+2,\boldsymbol{Y}}\geqslant 0,\quad i=1,\dots,n-1,\\
&3\Delta^1_{n+1,\boldsymbol{Y}}-\Delta^1_{n,\boldsymbol{Y}}\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Теорема 4. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют выпуклые данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет выпуклым, если выполнены условия*

$$\begin{aligned}
&3\Delta^2_{1,\boldsymbol{X}}-\Delta^2_{2,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\\
&3\Delta^2_{i+1,\boldsymbol{X}}-\mu_i\Delta^2_{i,\boldsymbol{X}}-\lambda_i\Delta^2_{i+2,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,\quad i=1,\dots,n-1,\\
&3\Delta^2_{n+1,\boldsymbol{X}}-\Delta^2_{n,\boldsymbol{X}}\geqslant 0,
\end{aligned}$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$\delta^2_{2,\boldsymbol{Y}} - \frac{\lambda_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta^2_{3,\boldsymbol{Y}} \geqslant 0,$$

$$\delta^2_{i+1,\boldsymbol{Y}} - \frac{\mu_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}\delta^2_{i,\boldsymbol{Y}} - \frac{\lambda_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}\delta^2_{i+2,\boldsymbol{Y}} \geqslant 0, \quad i = 2,\ldots,n-1,$$

$$\delta^2_{n+1,\boldsymbol{Y}} - \frac{\mu_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta^2_{n,\boldsymbol{Y}} \geqslant 0.$$

Теорема 5. *Пусть сплайны второй степени по Субботину и по Марсдену интерполируют 3-монотонные данные функции $f(x)$. Тогда сплайн по Субботину будет 3-монотонным, если выполнены условия*

$$\delta^3_{2,\boldsymbol{X}} - \frac{\lambda_1}{2+\mu_1+\lambda_2}\delta^3_{3,\boldsymbol{X}} \geqslant 0,$$

$$\delta^3_{i+1,\boldsymbol{X}} - \frac{\mu_{i-1}}{2+\mu_{i-2}+\lambda_{i-1}}\delta^3_{i,\boldsymbol{X}} - \frac{\lambda_i}{2+\mu_i+\lambda_{i+1}}\delta^3_{i+2,\boldsymbol{X}} \geqslant 0, \quad i = 2,\ldots,n-1,$$

$$\delta^3_{n+1,\boldsymbol{X}} - \frac{\mu_{n-1}}{2+\mu_{n-2}+\lambda_{n-1}}\delta^3_{n,\boldsymbol{X}} \geqslant 0,$$

а сплайн по Марсдену — при выполнении условий

$$\delta^3_{3,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{0,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)}{N_{1,3,\boldsymbol{Y}}(x_2)}\delta^3_{4,\boldsymbol{X}} \geqslant 0,$$

$$\delta^3_{i+2,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i-1})}{N_{i-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i-1})}\delta^3_{i+1,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{i-1,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})}{N_{i,3,\boldsymbol{Y}}(x_{i+1})}\delta^3_{i+3,\boldsymbol{X}} \geqslant 0, \quad i = 2,\ldots,n-2,$$

$$\delta^3_{n+1,\boldsymbol{X}} - \frac{N_{n-2,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})}{N_{n-3,3,\boldsymbol{Y}}(x_{n-2})}\delta^3_{n,\boldsymbol{X}} \geqslant 0.$$

Отметим, что под 3-монотонностью сплайна второй степени мы понимаем неотрицательность разрывов второй производной в узлах сетки сплайна. Такое допущение оправдано тем, что на равномерных сетках в периодическом случае величина разрыва, отнесенная к шагу сетки, приближает третью производную интерполируемой функции [17] (на равномерных сетках обе конструкции по Субботину и по Марсдену одинаковы) даже с порядком $O(h^4)$ шага сетки $h \to 0$ [19]. На произвольных неравномерных сетках такой факт не имеет места ввиду отсутствия баланса суммы коэффициентов при неизвестных и коэффициента в правой части уравнений в системах (1.8) и (1.12). Тем не менее в работе [20] для сплайнов нечетной степени $2m-1$ показано, что приближение производной порядка $2m$ интерполируемой функции величинами разрыва старших производных сплайна возможно и на некоторых специальных неравномерных сетках.

Отметим, что достаточные условия монотонности и выпуклости (теоремы 3 и 4) для интерполяционных сплайнов второй степени по Субботину ранее были получены в работах [11; 21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** О кусочно полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 1. С. 63–70.
2. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Добавления // Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. М.: Мир, 1972. С. 270–309.
3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Marsden M.** Quadratic spline interpolation // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 5. P. 903–906.
5. **Marsden M.** Operator norm bounds and error bounds for quadratic spline interpolation // Approximation theory (Papers, VIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warszawa, 1975). Banach Center Publ. Warsaw: PWN – Polish Scientific Publishers, 1979. Vol. 4. P. 159–175.

6. **Волков Ю.С.** Две конструкции интерполяционных сплайнов четной степени: препринт № 169 / Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН. Новосибирск, 2006. 32 с.
7. **Волков Ю.С.** О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычисл. системы. Вып. 159. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. С. 3–18. (Сплайн-функции и их приложения.)
8. **Волков Ю.С.** О монотонной интерполяции кубическими сплайнами // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 6. С. 14–24.
9. **Волков Ю.С.** Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.
10. Формосохраняющая интерполяция кубическими сплайнами / Ю.С. Волков, В.В. Богданов, В.Л. Мирошниченко, В.Т. Шевалдин // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 6. С. 836–844.
11. **Miroshnichenko V.L.** Convex and monotone spline interpolation // Constructive theory of function: Proc. Intern. Conf., Varna, 1984. Sofia: Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 1984. P. 610–620.
12. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
13. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
14. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимации полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющие некоторые свойства аппроксимируемых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 156–166.
15. **Волков Ю. С., Стрелкова Е. В., Шевалдин В. Т.** Локальная аппроксимация сплайнами со смещением узлов // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 2. С. 73–82.
16. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 316 с.
17. **Субботин Ю. Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173. (Приближение функций и операторов.)
18. **Богданов В.В., Волков Ю.С.** Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.
19. **Kindalev B. S.** Asymptotics of error for interpolating splines of even degree // Constructive theory of function: Proceed. Intern. Conf., Varna, 1984. Sofia: Publishing House of Bulgarian Academy of Sciences, 1984. P. 445–450.
20. **Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.** О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Мат. заметки. 2011. Т. 89, вып. 1. С. 127–130.
21. **Мирошниченко В. Л.** Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов // Вычисл. системы. Вып. 142. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1991. С. 3–14. (Сплайны и их приложения.)

Поступила 19.08.2011
Исправлена 03.03.2012

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет
e-mail: volkov@math.nsc.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518.86

ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДНОЙ МНОГОЧЛЕНА ЧЕРЕЗ ЕГО РАВНОМЕРНУЮ НОРМУ НА ОТРЕЗКЕ[1]

М. Р. Габдуллин

В работе исследуется оценка среднего геометрического производной алгебраического многочлена степени не выше n через его равномерную норму на отрезке. В общем случае получены близкие двусторонние оценки наилучшей константы, которые дают ее порядковый рост по n. В случае $n = 2$ наилучшая константа найдена точно.

Ключевые слова: неравенство Маркова, алгебраические многочлены, многочлены Чебышёва.

M. R. Gabdullin. An estimate of the geometric mean of the derivative of a polynomial in terms of its uniform norm on a closed interval.

We study an estimate of the geometric mean of the derivative of an algebraic polynomial of degree at most n in terms of its uniform norm on a closed interval. In the general case, we obtain close two-sided estimates for the best constant; the estimates describe the order growth of the constant with respect to n. In the case $n = 2$, the best constant is found exactly.

Keywords: Markov's inequality, algebraic polynomials, Chebyshev polynomials.

1. Введение

А. А. Марков [1] в 1889 г. доказал, что на множестве $\mathcal{P}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами справедливо точное неравенство

$$\|P'\|_\infty \leqslant n^2 \|P\|_\infty,$$

где $\|P\|_\infty = \max\{|P(x)|\colon x \in [-1,1]\}$; экстремальным в этом неравенстве является многочлен Чебышёва 1-го рода

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1,1].$$

В 1981 г. Б. Д. Боянов [2] получил следующее обобщение этого неравенства, а именно он доказал, что при всех $p \geqslant 1$

$$\|P'\|_p \leqslant M(n,p) \|P\|_\infty, \quad P \in \mathcal{P}_n, \tag{1}$$

с точной константой $M(n,p) = \|T_n'\|_p$. Здесь и ниже

$$\|P\|_p = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |P(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty. \tag{2}$$

Неравенство (1) является частным случаем неравенства Маркова — Никольского

$$\|P^{(k)}\|_p \leqslant M(n,k;p,q)\ \|P\|_q, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad 0 \leqslant p, \quad q \leqslant \infty. \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011) и при поддержке РФФИ (проект 12-01-31495).

Этому неравенству посвящено большое число работ; хороший обзор результатов можно найти в [3; 4]. В настоящее время известен порядок поведения наилучшей константы $M(n,k;p,q)$ в неравенстве (3) по n при $n\to\infty$ для фиксированных значений $0\leqslant k\leqslant n$, $0<p,q\leqslant\infty$:

$$M(n,k;p,q)\asymp\begin{cases} n^{2k+2/q-2/p}, & \text{если} \;\; k>2/p-2/q,\\ n^k(\ln(n+1))^{1/p-1/q}, & \text{если} \;\; k=2/p-2/q,\\ n^k, & \text{если} \;\; k<2/p-2/q.\end{cases}$$

Этот результат содержит порядок поведения наилучшей константы $M(n,p)$ в неравенстве (1) по n при фиксированном значении $0<p\leqslant\infty$; в частности,

$$M(n,p)\asymp n, \quad \text{если} \;\; 0<p<2.$$

Известно (см., например, [5, п. 6.7, теорема 185]), что при $p\to 0+$ функционал (2) имеет предел

$$\|P\|_0=\lim_{p\to 0+}\|P\|_p=\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\ln|P(x)|dx\right),$$

который является средним геометрическим модуля P на $[-1,1]$. Точная константа в неравенстве (3) при $q=0$, $0\leqslant p\leqslant\infty$ найдена П.Ю. Глазыриной [4; 6; 7].

В данной работе рассматривается задача о значении наилучшей константы в неравенстве (1) при $p=0$:

$$\|P'\|_0\leqslant M(n)\|P\|_\infty, \quad P\in\mathcal{P}_n. \tag{4}$$

Для произвольного $n\geqslant 2$ в работе получен следующий результат.

Теорема 1. *Для любого $n\geqslant 2$ справедливы оценки*

$$Kn<M(n)<n, \tag{5}$$

где

$$K=\exp\left(1-\ln 2-\frac{M_1}{2}\pi\right)=0.479898\ldots\,, \tag{6}$$

$$M_1=\max\left\{-\sin 2t\cdot\ln\operatorname{tg}t\colon 0<t\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}=0.662743\ldots$$

В случае $n=1$ задача (4) тривиальна, экстремальным является многочлен $P(x)=T_1(x)=x$ и наилучшая константа есть $M(1)=1$. В работе будет исследовано неравенство (4) при $n=2$.

Теорема 2. *При $n=2$ в задаче (4) экстремален многочлен Чебышёва $T_2(x)=2x^2-1$, и наилучшая константа имеет следующее значение:*

$$M(2)=\sup\big\{\|P'\|_0:\, P\in\mathcal{P}_2,\ \|P\|_\infty=1\big\}=\|T_2'\|_0=\frac{4}{e}.$$

2. Оценка снизу в теореме 1

Лемма. *Для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\|T_n'\|_0=C(n)\,n,$$

в котором величина $C(n)$ обладает следующими двумя свойствами:

$$C(n)\to\frac{e}{4} \;\; \textit{при} \;\; n\to\infty, \qquad K<C(n)<\frac{e}{2},$$

и константа K описана в (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное натуральное n. Обозначим

$$I_n = \int\limits_{-1}^{1} \ln|T_n'(x)|dx.$$

Так как старший коэффициент многочлена T_n равен 2^{n-1} (см., например, [8, глава III, §1]), то получаем

$$T_n'(x) = n2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k), \quad x_k = \cos\frac{\pi k}{n}.$$

Поэтому

$$I_n = 2(\ln n + (n-1)\ \ln 2) + \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{-1}^{1}\ln|x-x_k|dx.$$

Исследуем последнюю величину. Нетрудно убедиться, что для функции $p(x) = \int_{-1}^{1}\ln|t-x|dt$ при $x \in (-1,1)$ имеет место формула

$$p(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x) - 2; \tag{7}$$

отметим, что функция p – четная. Рассмотрим далее два случая.

а) Пусть $n = 2m$. В этом случае точки $x_k = \cos(\pi k/(2m))$ расположены симметрично относительно нуля и $x_m = 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{-1}^{1}\ln|x-x_k|dx = p(0) + 2\sum_{x_k>0}p(x_k) = -2 + 2\sum_{k=1}^{n/2-1}p(x_k),$$

а следовательно,

$$I_n = (-2-2\ln 2) + 2\ln n + 2\ln 2\cdot n + 2\sum_{k=1}^{n/2-1}p(x_k). \tag{8}$$

В силу формулы (7) при $t \in (0,\pi/2)$ выводим

$$p(\cos t) = -2 + 2\cos^2\frac{t}{2}\cdot\ln 2\cos^2\frac{t}{2} + 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\ln 2\sin^2\frac{t}{2}$$

$$= -2 + 2\ln 2 + 4\Big(\cos^2\frac{t}{2}\cdot\ln\cos\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2}\cdot\ln\sin\frac{t}{2}\Big).$$

Введем функцию $s(t) = \cos^2 t\cdot\ln\cos t + \sin^2 t\cdot\ln\sin t$, $t \in (0,\pi/2)$, и точки $t_k = \pi k/(2n)$. В этих обозначениях формула (8) примет вид

$$I_n = (-2-2\ln 2) + 2\ln n + 2\ln 2\cdot n + 2\sum_{k=1}^{n/2-1}(-2 + 2\ln 2 + 4s(t_k))$$

$$= (-2-2\ln 2) + 2\ln n + 2\ln 2\cdot n + 2\left(\frac{n}{2}-1\right)(-2+2\ln 2) + 8\sum_{k=1}^{n/2-1}s(t_k).$$

Итак,

$$I_n = (2-6\ln 2) + 2\ln n + (4\ln 2 - 2)\,n + 8\sum_{k=1}^{n/2-1}s(t_k). \tag{9}$$

Исследуем вначале поведение суммы $\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n/2-1} s(t_k)$. В этой сумме $t_k = \pi k/(2n) \in (0, \pi/4)$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \pi/(2n)$. Отсюда следует, что

$$\Sigma_n \frac{\pi}{2n} \to \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt, \quad n \to \infty.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{1}{n}\Sigma_n \to \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt, \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из (9) следует, что

$$\frac{1}{n} I_n \to 4\ln 2 - 2 + \frac{16}{\pi}\int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt, \quad n \to \infty.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\displaystyle\int_0^{\pi/4} s(t)dt = -\pi(2\ln 2 - 1)/8$. Таким образом, $\dfrac{I_n}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$

Положим $G_n = \sum_{k=1}^{n/2} s(t_k)\,\pi/(2n)$, где $t_{n/2} = \pi/4$. Оценим величину

$$(4\ln 2 - 2)n + 8\Sigma_n = -\frac{16}{\pi}\int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt \cdot n + \frac{16n}{\pi}\left(G_n - \frac{\pi}{2n}\, s\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{16n}{\pi}\left(G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right) - 8s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16n}{\pi}\left(G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right) + 4\ln 2.$$

Величина G_n есть приближенное значение интеграла $\displaystyle\int_0^{\pi/4} s(t)dt$, посчитанное с помощью метода правых прямоугольников. В этом случае известно, что

$$\left|G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right| < \frac{M_1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\Delta t_k = M_1\frac{\pi^2}{16n}, \quad M_1 = \max_{0\leqslant t\leqslant \pi/4} |s'(t)| = 0.662743\ldots$$

Кроме того, так как $\lim\limits_{t\to 0+} s(t) = 0$ и $s'(t) = \sin 2t \cdot \ln \operatorname{tg} t < 0$ при $0 < t < \pi/4$, то функция $s(t)$ строго убывает и отрицательна на интервале $(0, \pi/4)$. Отсюда следует, что $|G_n| > \left|\displaystyle\int_0^{\pi/4} s(t)dt\right|$.

Таким образом,

$$0 > \frac{16n}{\pi}\left(G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right) > -M_1\pi.$$

Итак, окончательно имеем

$$I_n = (2 - 6\ln 2 + 4\ln 2) + 2\ln n + \frac{16n}{\pi}\left(G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right).$$

Или, положив $A_n = 16n/\pi \cdot \left(G_n - \int_0^{\pi/4} s(t)dt\right)$, можем записать

$$I_n = (2 - 2\ln 2) + 2\ln n + A(n), \quad A(n) \in (-M_1\pi, 0).$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Имеем

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (s(t_{k+1}) - s(t))dt = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \int\limits_{t}^{t_{k+1}} s'(\xi)d\xi dt = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} s'(\xi)(\xi - t_k)d\xi = s'(\xi_k)\frac{(\Delta t_k)^2}{2}, \quad \xi_k \in (t_k, t_{k+1}).$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{16}A_n = n\sum_{k=0}^{n/2-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} (s(t_{k+1}) - s(t))dt = \frac{n\Delta t_k}{2} \sum_{k=0}^{n/2-1} s'(\xi_k)\cdot\triangle t_k.$$

Отсюда заключаем, что при $n\to\infty$

$$\frac{\pi}{16}A_n \to \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\pi/4} s'(t)dt = \frac{\pi}{4}\cdot s\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Таким образом, если $n = 2m$, то $A_n \to -2\ln 2$ при $n\to\infty$.

б) Пусть $n = 2m+1$. Будем рассуждать аналогично предыдущему случаю. В данном случае

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{-1}^{1} \ln|x - x_k|dx = 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} p(x_k),$$

и, следовательно,

$$I_n = -2\ln 2 + 2\ln n + 2\ln 2\cdot n + 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} p(x_k).$$

При этом

$$2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} p(x_k) = 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2} (-2 + 2\ln 2 + 4s(t_k)) = (n-1)(-2+2\ln 2) + 8\sum_{k=1}^{(n-1)/2} s(t_k).$$

Отсюда

$$I_n = 2 - 4\ln 2 + 2\ln n + (4\ln 2 - 2)n + 8\sum_{k=1}^{(n-1)/2} s(t_k). \tag{10}$$

Положим

$$G_n = \sum_{k=1}^{(n-1)/2} s(t_k)\frac{\pi}{2n} + s\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4n}.$$

В этом обозначении имеем

$$8\sum_{k=1}^{(n-1)/2} s(t_k) = \frac{16n}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{(n-1)/2} s(t_k)\frac{\pi}{2n} + s\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{4n}\right) - 4s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16n}{\pi}G_n + 2\ln 2.$$

Подставляя последнее выражение в (10) и обозначая

$$A_n = \frac{16n}{\pi} G_n + (4\ln 2 - 2)n = \frac{16n}{\pi}\left(G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right),$$

получаем $I_n = (2 - 2\ln 2) + 2\ln n + A_n$. Имеем

$$\left|G_n - \int\limits_0^{\pi/4} s(t)dt\right| < \frac{M_1}{2}\frac{\pi}{2n}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right) + \frac{M_1}{2}\frac{\pi}{4n}\frac{\pi}{4n} = \frac{M_1\pi}{16n} - \frac{M_1\pi}{32n^2} < \frac{M_1\pi}{16n},$$

а значит, снова имеем $0 > A(n) > -M_1\pi$.

По аналогии со случаем а) найдем $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Выводим

$$\frac{\pi}{16}A_n = n\sum_{k=0}^{(n-3)/2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}(s(t_{k+1}) - s(t))dt$$

$$= \frac{n\Delta t_k}{2}\sum_{k=0}^{(n-3)/2} s'(\xi_k)\triangle t_k + n\int\limits_{\pi/4-\pi/(4n)}^{\pi/4}\left(s\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right) - s\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)dt,$$

отсюда заключаем, что

$$\frac{\pi}{16}A_n \to \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\pi/4} s'(t)dt = -\frac{\pi}{8}\ln 2, \quad n\to\infty.$$

Таким образом, и в случае $n = 2m+1$ справедливо соотношение $A_n \to -2\ln 2$ при $n\to\infty$.

Итак, мы доказали, что вне зависимости от четности n выполняется соотношение $I_n = (2 - 2\ln 2) + 2\ln n + A(n)$, в котором $A(n) \in (-M_1\pi, 0)$ и $A(n) \to -2\ln 2$ при $n\to\infty$. Следовательно, справедлива формула

$$\|T_n'\|_0 = \exp\left(\ln n + (1-\ln 2) + \frac{1}{2}A(n)\right) = C(n)\, n,$$

в которой $C(n) = e^{(1-\ln 2)+A(n)/2}$. Поскольку $A(n)/2 \in (-M_1\pi/2, 0)$ и $A(n)/2 \to -\ln 2$ при $n\to\infty$, то $C(n) \in (K, e/2)$ и $C(n) \to e/4$ при $n\to\infty$; здесь $K = \exp(1 - \ln 2 - M_1\pi/2) = 0.479898\ldots$ Лемма доказана.

Для доказательства оценки снизу в (5) положим $P = T_n$ и воспользуемся леммой:

$$M(n) = \sup\left\{\frac{\|P'\|_0}{\|P\|_\infty} :\ P\in\mathcal{P}_n,\ P\not\equiv 0\right\} \geqslant \|T_n'\|_0 > Kn.$$

3. Завершение доказательства теоремы 1

Для доказательства оценки сверху в теореме 1 воспользуемся тем, что при $0\leqslant p\leqslant\infty$ на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов степени не выше n с вещественными коэффициентами имеет место точное неравенство

$$\|F'\|_p \leqslant n\|\cos t\|_p\cdot\|F\|_\infty, \quad F\in\mathcal{T}_n, \tag{11}$$

где

$$\|F\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |F(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty;$$

$$\|F\|_\infty = \max\{|F(t)| : t \in [0, 2\pi]\}; \quad \|F\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln |F(t)| dt \right).$$

При $p = \infty$ это есть известное неравенство Бернштейна. При $1 \leqslant p < \infty$ неравенство (11) следует из результатов работы [9] Кальдерона и Клейна 1951 г. В случае $0 \leqslant p < 1$ неравенство (11) доказано в недавних работах В. В. Арестова и П. Ю. Глазыриной [10; 11].

В частности, при $p = 1$ неравенство (11) принимает вид

$$\|F'\|_1 \leqslant n\|\cos t\|_1 \cdot \|F\|_\infty = \frac{2}{\pi} n\|F\|_\infty, \quad F \in \mathcal{T}_n.$$

Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ функция $F(t) = P(\cos t)$ является вещественным четным тригонометрическим полиномом порядка n. Поэтому

$$\|P'\|_0 < \|P'\|_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} |P'(x)| dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} |P'(\cos t)| \sin t dt = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} |P'(\cos t) \sin t| dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |P'(\cos t) \sin t| dt = \frac{\pi}{2} \|F'\|_1 \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{2}{\pi} n\|F\|_\infty = n\|F\|_\infty = n\|P\|_\infty.$$

Оценка сверху в теореме 1 доказана.

Теорема 1 доказана полностью.

4. Случай $n = 2$. Доказательство теоремы 2

Будем искать экстремальный многочлен в виде $P(x) = x^2 + bx + c$. Тогда

$$M(2) = \sup_{b,c \in \mathbb{R}} \frac{\|P'\|_0}{\|P\|_\infty} = \sup_{b,c \in \mathbb{R}} \frac{\|2x + b\|_0}{\max\limits_{x \in [-1,1]} |x^2 + bx + c|}.$$

Обозначим

$$f(b, c) = \frac{\|2x + b\|_0}{\max\limits_{x \in [-1,1]} |x^2 + bx + c|}.$$

При фиксированном b максимизируем функцию $f(b, c)$ по аргументу c, т. е. найдем такую точку $c = c(b)$, что $f(b, c(b)) = \sup\limits_{c \in \mathbb{R}} f(b, c)$. Тогда будем иметь

$$M(2) = \sup_{b,c \in \mathbb{R}} f(b, c) = \sup_{b \in \mathbb{R}} \left(\sup_{c \in \mathbb{R}} f(b, c) \right) = \sup_{b \in \mathbb{R}} f(b, c(b)) = \sup_{b \in \mathbb{R}} H(b),$$

где $H(b) = f(b, c(b))$.

Достаточно рассмотреть случай $b \geqslant 0$, так как при $b < 0$ заменой $x = -t$ можно свести задачу к случаю $b > 0$. Более того, достаточно рассматривать случай $0 \leqslant b \leqslant 2$.

Действительно, при $b \geqslant 2$ парабола $x^2 + bx + c$ строго возрастает на отрезке $[-1, 1]$, значит, $\|P\|_\infty = \max\{|P(1)|, |P(-1)|\}$. Легко понять, что в этом случае величина $\|P\|_\infty$ минимальна по c при условии, что $-P(-1) = P(1)$, или, что то же самое, $-(1-b+c) = 1+b+c$. Откуда $2c+2=0$, $c=c(b)=-1$ и $\|P\|_\infty = b$. Таким образом, выводим

$$H(b) = \frac{\|2x+b\|_0}{b}, \quad b \geqslant 2.$$

Предположим, что величина $M(2) = \sup\limits_{b\geqslant 0} H(b)$ достигается при некотором $b \geqslant 2$, т. е. $M(2) = \|2x+b\|_0/b$. Тогда в силу обратного неравенства треугольника в пространстве L_0 (см., например, [5, п. 6.7, теорема 185]) и того, что $\|2x+b\|_0 = \|2x-b\|_0$, имеем

$$2M(2) = \frac{\|2x+b\|_0 + \|2x-b\|_0}{b} \leqslant \frac{\||2x+b|+|2x-b|\|_0}{b} = \frac{\|2x+b+b-2x\|_0}{b} = \frac{\|2b\|_0}{b} = 2,$$

откуда $M(2) \leqslant 1$. Однако

$$M(2) \geqslant \|T_2'\|_0 = \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \ln|4x|dx\right) = \frac{4}{e} > 1.$$

Пришли к противоречию. Точно так же невозможен и случай $M(2) = \lim\limits_{b\to\infty} H(b) = 1$.

Итак, действительно, $M(2) = \sup\limits_{0\leqslant b<2} H(b)$.

Найдем явное выражение для функции $H(b)$ при $0 \leqslant b < 2$. С помощью аналогичных рассуждений минимизируем величину $\|P\|_\infty$ по аргументу c. Имеем

$$\|P\|_\infty = \max\left\{|f(-1)|, |f(1)|, \left|f\Big(-\frac{b}{2}\Big)\right|\right\}.$$

Заметим, что если $f(-1) \geqslant 0$, то $f(-1) < f(1)$, а если $f(-1) < 0$, то $|f(-1)| < |f(-b/2)|$. Поэтому $\|P\|_\infty = \max\{|f(1)|, |f(-b/2)|\}$. Эта величина минимальна, если $-f(-b/2) = f(1)$, т. е. $b^2/4 - c = 1+b+c$, откуда $c = c(b) = \big(b^2/4 - b - 1\big)/2 = \big(b^2-4b-4\big)/8$ и

$$\|P\|_\infty = 1+b+c(b) = \frac{b^2+4b+4}{8} = \frac{(b+2)^2}{8}.$$

Вычислим $\|2x+b\|_0$ при $0 \leqslant b < 2$. Получаем

$$\int\limits_{-1}^{1} \ln|2x+b|dx = \int\limits_{-1}^{-b/2} \ln(-2x-b)dx + \int\limits_{-b/2}^{1} \ln(2x+b)dx$$

$$= -\frac{1}{2}((-2x-b)\ln(-2x-b)+2x+b)\Big|_{-1}^{-b/2} + \frac{1}{2}((2x+b)\ln(2x+b)-2x-b)\Big|_{-b/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\big((2-b)\ln(2-b)-b+2\big) + \frac{1}{2}\big((b+2)\ln(b+2)-b-2\big)$$

$$= \frac{1}{2}(2-b)\ln(2-b) + \frac{1}{2}(b+2)\ln(b+2) - 2,$$

откуда

$$\|2x+b\|_0 = \exp\Big(-1+\frac{1}{4}\big[(2-b)\ln(2-b)+(b+2)\ln(b+2)\big]\Big).$$

Следовательно, при $0 \leqslant b < 2$

$$H(b) = 8\frac{\|2x+b\|_0}{(b+2)^2} = \frac{8}{e}\exp\Big(\frac{1}{4}\big[(2-b)\ln(2-b)+(b+2)\ln(b+2)-8\ln(b+2)\big]\Big)$$

$$= \frac{8}{e}\exp\Big(\frac{1}{4}\big[(2-b)\ln(2-b)+(b-6)\ln(b+2)\big]\Big).$$

Положим $\Upsilon(b)=(2-b)\ln(2-b)+(b-6)\ln(b+2)$. Отметим, что $\Upsilon(0)=-4\ln 2$, $\Upsilon(2-0)=-4\ln 4=-8\ln 2$. Легко проверяется, что

$$\Upsilon'(b)=-\ln(2-b)-1+\ln(b+2)+\frac{b-6}{b+2}=\ln\frac{2+b}{2-b}-\frac{8}{b+2},$$

$$\Upsilon''(b)=\frac{2-b}{2+b}\Big(\frac{4}{2-b}-1\Big)'+\frac{8}{(b+2)^2}$$

$$=4\frac{-1}{(b+2)(b-2)}+8\frac{1}{(b+2)^2}=4\frac{-(b+2)+2(b-2)}{(b-2)(b+2)^2}=4\frac{b-6}{(b-2)(b+2)^2}>0.$$

Откуда следует, что функция Υ выпукла вниз на интервале $(0,2)$, а значит,

$$\sup_{[0,2)}\Upsilon(b)=\max\{\Upsilon(0),\Upsilon(2-0)\}=\Upsilon(0)=-4\ln 2.$$

Наконец, так как

$$H(b)=\frac{8}{e}\exp\Big(\frac{1}{4}\Upsilon(b)\Big),$$

то

$$\sup_{[0,2)}H(b)=H(0)=\frac{8}{e}e^{(-4\ln 2)/4}=\frac{4}{e},$$

причем коэффициенты экстремального многочлена суть $b=0$ и $c=c(0)=-1/2$. Итак, величина $M(2)=H(0)=4/e$, и в задаче (4) при $n=2$ экстремален многочлен $T_2(x)=2x^2-1$, а следовательно и многочлены $CT_2(x)$ при произвольном $C\neq 0$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя П. Ю. Глазырину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Марков А.А.** Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Зап. Имп. акад. наук. Санкт-Петербург, 1889. Т. 62. С. 1–24.
2. **Bojanov B.D.** An extension of the Markov inequality // J. Approx. Theory. 1982. Vol. 35, no. 2. P. 181–190.
3. **Milovanović G.V., Mitrinovic D.S., Rassias Th.M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.
4. **Глазырина П.Ю.** Неравенство Маркова – Никольского для пространств L_q, L_0 на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 60–71.
5. **Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
6. **Глазырина П.Ю.** Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 59–65.
7. **Глазырина П.Ю.** Точное неравенство Маркова — Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q и L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 3–22.
8. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
9. **Calderon A.P., Clain G.** On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials // Studia Math. 1951. Vol. 12. P. 166–169.
10. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 422, № 6. С. 727–731.
11. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501—1512.

Габдуллин Михаил Рашидович
студент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: MrCoo1@ya.ru

Поступила 08.06.2012

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА — НИКОЛЬСКОГО МЕЖДУ РАВНОМЕРНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ НОРМАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЕ[1]

М. В. Дейкалова, В. В. Рогозина

Изучается точное неравенство Джексона — Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраических многочленов заданного порядка $n \geq 0$ (по совокупности переменных) на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Доказано, что многочлен Q_n одного переменного с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^\psi(-1,1)$ функций, суммируемых на $(-1,1)$ с весом Якоби $\psi(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha = (m-1)/2$, $\beta = (m-3)/2$, как зональный многочлен одного переменного $t = x_m$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным в неравенстве Джексона — Никольского на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$.

Ключевые слова: многомерная евклидова сфера, алгебраические многочлены, неравенство Джексона — Никольского, многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.

M. V. Deikalova, V. V. Rogozina. Jackson — Nikol'skii inequality between the uniform and integral norms of algebraic polynomials on a Euclidean sphere.

We study the sharp Jackson — Nikol'skii inequality between the uniform and integral norms of algebraic polynomials of a given (total) degree $n \geq 0$ on the unit sphere $\mathbb{S}^{m-1}$ of the Euclidean space $\mathbb{R}^m$. We prove that the polynomial Q_n in one variable with the unit leading coefficient, which deviates least from zero in the space $L^\psi(-1,1)$ of functions summable on $(-1,1)$ with the Jacobi weight $\psi(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha = (m-1)/2$, $\beta = (m-3)/2$, as zonal polynomial in one variable $t = x_m$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, is extremal in the Jackson — Nikol'skii inequality on the sphere $\mathbb{S}^{m-1}$.

Keywords: multidimensional Euclidean sphere, algebraic polynomials, Jackson — Nikol'skii inequality, polynomials that deviate least from zero.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}^m$ при $m \geq 2$ есть евклидово пространство со скалярным произведением

$$xy = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \qquad x = (x_1, \ldots, x_m), \qquad y = (y_1, \ldots, y_m),$$

и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. В пространстве $\mathbb{R}^m$ рассмотрим сферу $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| = 1\}$ единичного радиуса с центром в начале координат.

Сделаем несколько замечаний относительно рассматриваемых в данной работе мер и интегралов. На множествах $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{S}^{k-1}$, $1 \leq k \leq m$, рассматривается классическая мера Лебега (соответствующей размерности), и для измеримого подмножества E этих множеств символом $|E|$ обозначается (соответствующая) мера множества E. Для измеримой, суммируемой на E функции f ее интеграл (Лебега) по множеству E будет записываться в виде $\int_E f(x)dx$. Впрочем, ниже в большинстве случаев интегралы можно понимать в римановском смысле (относительно

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

соответствующей меры Жордана). Пусть $L(E) = L_1(E)$ есть пространство функций, измеримых и суммируемых на E, наделенное нормой $\|f\|_{L(E)} = \int_E |f(x)|dx$. На множестве E мы будем рассматривать еще пространство $L_\infty(E)$ измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|\colon x \in E\}$; это пространство является сопряженным для $L(E)$.

Для компакта $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^m$ через $C(\mathcal{Q})$ будем обозначать пространство вещественнозначных непрерывных функций на $\mathcal{Q}$, наделенное равномерной нормой $\|f\|_{C(\mathcal{Q})} = \max\{|f(x)|\colon x \in \mathcal{Q}\}$.

Пусть $\mathscr{P}_{n,m}$ есть множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_m \le n,\\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x^\alpha, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}, \qquad x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени не выше n от m переменных с вещественными коэффициентами c_α.

Цель данной работы — исследование точного неравенства, т. е. наименьшей константы $C_{n,m}$ в неравенстве

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} \le C_{n,m}\,\|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \qquad P_n \in \mathscr{P}_{n,m}, \tag{1.1}$$

между равномерной и интегральной нормами

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} = \max\{|P_n(x)|\colon x \in \mathbb{S}^{m-1}\}, \qquad \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} = \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |P_n(x)|dx$$

многочленов заданного порядка на единичной сфере.

1.2. Предыстория. В случае $m = 2$ неравенство (1.1) сводится к точному неравенству

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} \le C(n)\|f_n\|_{L_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{T}_n, \tag{1.2}$$

между равномерной и интегральной нормами

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f_n(t)|\colon t \in \mathbb{R}\}, \qquad \|f_n\|_{L_{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_n(t)|dt$$

на множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов $f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ заданного порядка $n \ge 1$ с вещественными коэффициентами. Задача исследования константы $C(n)$ восходит к Д. Джексону [1]. Как показал С. Б. Стечкин (см. [2; 3]), существует предел $c = \lim\limits_{n\to\infty} C(n)/n$. Л. В. Тайков [2] (см. также [3]) получил для величины c близкие между собой оценки сверху и снизу. Лучшие на данный момент результаты относительно наилучшей константы $C(n)$ в неравенстве (1.2) представлены в работах В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанова, С. А. Пичугова [4] и Д. В. Горбачева [5] (см. также [6]). Д. В. Горбачев, в частности, установил [5; 6] связь неравенства (1.2) с другими экстремальными задачами теории функций.

Неравенство (1.2) есть частный случай неравенств разных метрик, обстоятельное изучение которых было начато С. М. Никольским [7]. В настоящее время таким неравенствам посвящено большое число исследований; см., к примеру, работы [8; 9] и приведенную там библиографию.

Поведение точной константы $C_{n,m}$ в неравенстве (1.1) при $m \ge 3$ изучалось в работе [10] М. В. Дейкаловой; в частности, в этой работе доказано следующее утверждение.

Теорема A. *При $m \ge 3$ существуют положительные константы A_m и B_m такие, что при всех $n \ge 1$ выполняются неравенства*

$$A_m n^{m-1} \le C_{n,m} \le B_m n^{m-1}.$$

Эта теорема дает правильный порядок поведения величины $C_{n,m}$ по n при $n \to +\infty$ для фиксированного m. На самом деле в [10] доказаны более информативные оценки сверху и снизу для $C(n, m)$.

1.3. Формулировка основного результата. Неравенство (1.1) сводится (см. [11; 10]) к точному неравенству для алгебраических многочленов одного переменного в пространстве суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с соответствующим ультрасферическим весом. Такие неравенства изучались многими математиками; наиболее общий результат здесь получил В. И. Иванов [8]. В частности, в работе [8] содержится правильный порядок поведения по n наилучшей константы в одномерном неравенстве, соответствующем неравенству (1.1).

Пусть $L^{\psi}(-1,1)$ есть пространство функций, суммируемых на $(-1,1)$ с весом Якоби (см., например, [12])

$$\psi(t)=\psi_m(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta},\qquad \alpha=(m-1)/2,\qquad \beta=(m-3)/2; \tag{1.3}$$

это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{L^{\psi}(-1,1)}=\int\limits_{-1}^{1}|f(t)|\,\psi(t)\,dt,\qquad f\in L^{\psi}(-1,1). \tag{1.4}$$

При $n\ge 1$ обозначим через Q_n многочлен порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^{\psi}(-1,1)$, так что многочлен Q_n является решением задачи

$$\inf\{\|p_n\|_{L^{\psi}(-1,1)}:\ \ p_n\in\mathscr{P}_n^1\}=\|Q_n\|_{L^{\psi}(-1,1)},$$

где $\mathscr{P}_n^1$ есть множество многочленов $p_n(t)=t^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kt^k$ порядка n, старший коэффициент которых равен 1.

Теорема 1. *При любых $m\ge 3,\ n\ge 1$ справедливы следующие два утверждения.*

1) *Многочлен Q_n как зональный многочлен одного переменного $t=x_m,\ x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным в неравенстве* (1.1).

2) *Имеет место равенство*

$$C_{n,m}=\frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|\,I_n}, \tag{1.5}$$

в котором

$$I_n=\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{(m-3)/2}\,\mathrm{sign}\,Q_n(t)dt>0.$$

1.4. Редукция к одномерной задаче. На множестве $\mathscr{P}_n=\mathscr{P}_{n,1}$ алгебраических многочленов (одного переменного) порядка n на отрезке $[-1,1]$ будем рассматривать равномерную норму

$$\|p\|_{C[-1,1]}=\max\{|p(t)|:\ t\in[-1,1]\}$$

и интегральную норму

$$\|p\|_{L^{\phi}(-1,1)}=\int\limits_{-1}^{1}|p(t)|\,\phi(t)\,dt$$

с ультрасферическим весом

$$\phi(t)=\phi_m(t)=(1-t^2)^{(m-3)/2}. \tag{1.6}$$

Обозначим через $M_{n,m}$ и $M_{n,m}(1)$ наименьшие (наилучшие) константы в неравенствах

$$\|p\|_{C[-1,1]}\le M_{n,m}\|p\|_{L^{\phi}(-1,1)},\qquad p\in\mathscr{P}_n, \tag{1.7}$$

$$|p(1)|\le M_{n,m}(1)\|p\|_{L^{\phi}(-1,1)},\qquad p\in\mathscr{P}_n, \tag{1.8}$$

соответственно; ясно, что $M_{n,m}(1)\le M_{n,m}$.

Следующее утверждение, доказанное в [10], сводит проблему исследования многомерного неравенства (1.1) к исследованию одномерных неравенств (1.7) и (1.8).

Теорема B. *При* $n \geq 1$, $m \geq 3$ *для наилучших констант в неравенствах* (1.1), (1.7) *и* (1.8) *имеют место равенства*

$$M_{n,m} = M_{n,m}(1) = |\mathbb{S}^{m-2}|\, C_{n,m}. \tag{1.9}$$

Более того, любой экстремальный многочлен q_n *неравенства* (1.7) *или* (1.8) *как зональный многочлен одного переменного* $t = x_m$, $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, *является экстремальным и в неравенстве* (1.1).

2. Некоторые свойства линейных функционалов на множестве многочленов с нормой пространства $L^{\upsilon}(-1,1)$ с произвольным весом υ

В последующей части работы изучается неравенство (1.8). Нам удобно рассматривать более общую ситуацию, а именно изучать неравенство (1.8) не для ультрасферического веса (1.6), а для произвольного веса.

2.1. Неравенство Джексона — Никольского на отрезке с произвольным весом. Пусть υ есть функция, суммируемая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля, т. е. вес на $(-1,1)$. Обозначим через $L^{\upsilon}(-1,1)$ пространство измеримых на $(-1,1)$ функций f, для которых произведение $f\upsilon$ суммируемо на $(-1,1)$; это есть банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |f(t)|\upsilon(t)\, dt, \qquad f \in L^{\upsilon}(-1,1).$$

Нас интересует наилучшая константа $M_n^{\upsilon}(1)$ в неравенстве

$$|p_n(1)| \leq M_n^{\upsilon}(1)\|p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)}, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{2.1}$$

Многочлен $q_n \in \mathcal{P}_n$, $q_n \not\equiv 0$, на котором неравенство (2.1) обращается в равенство, называют *экстремальным многочленом* неравенства (2.1). Ясно, что если многочлен q_n экстремальный, то для любой константы $c \neq 0$, многочлен cq_n также является экстремальным. Если других экстремальных многочленов нет, то говорят, что q_n — единственный экстремальный многочлен.

Значение $p(1)$ многочлена $p \in \mathscr{P}_n$ в точке 1 является линейным функционалом на множестве $\mathscr{P}_n$. Величину $M_n^{\upsilon}(1)$ можно интерпретировать как норму этого функционала на подпространстве $\mathscr{P}_n$ пространства $L^{\upsilon}(-1,1)$.

Лемма 1. *При любом* $n \geq 0$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Экстремальный многочлен* $q_n \in \mathscr{P}_n$ *в неравенстве* (2.1) *существует.*

2. *Пусть многочлен* $q_n \in \mathscr{P}_n$ *и число* A *обладают свойством*

$$p_n(1) = A \int_{-1}^{1} \upsilon(t)\, p_n(t) \operatorname{sign} q_n(t)\, dt, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{2.2}$$

Тогда

$$|A| = M_n^{\upsilon}(1) \tag{2.3}$$

и многочлен q_n *является экстремальным в неравенстве* (2.1).

3. *Если* $q_n \in \mathscr{P}_n$ *есть экстремальный многочлен задачи* (2.1), *то имеет место представление* (2.2) *со свойством* (2.3).

Это утверждение является частным случаем более общего факта относительно линейных функционалов на множестве многочленов с нормой пространства $L^{\upsilon}(-1,1)$. Пусть F_n есть линейный функционал на множестве $\mathscr{P}_n$. Нас интересует наименьшая константа $\widetilde{M}_n^{\upsilon}$ в неравенстве

$$|F_n p_n| \le \widetilde{M}_n^{\upsilon} \|p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)}, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{2.4}$$

Константу $\widetilde{M}_n^{\upsilon}$ можно интерпретировать как норму функционала F_n на подпространстве $\mathscr{P}_n$ пространства $L^{\upsilon}(-1,1)$. Эту константу можно записать в виде

$$\widetilde{M}_n^{\upsilon} = \sup\{|F_n p_n| \colon p_n \in \mathscr{P}_n,\ \|p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} = 1\}. \tag{2.5}$$

Лемма 2. *При любом $n \ge 0$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Экстремальный многочлен $q_n \in \mathscr{P}_n$ в неравенстве* (2.4) *существует.*

2. *Пусть многочлен $q_n \in \mathscr{P}_n$ и число A обладают свойством*

$$F_n p_n = A \int_{-1}^{1} \upsilon(t) p_n(t) \operatorname{sign} q_n(t) dt, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{2.6}$$

Тогда

$$|A| = \widetilde{M}_n^{\upsilon} \tag{2.7}$$

и многочлен q_n является экстремальным в неравенстве (2.4).

3. *Если $q_n \in \mathscr{P}_n$ есть экстремальный многочлен задачи* (2.4), *то имеет место представление* (2.6) *со свойством* (2.7).

Доказательство. 1. Произвольный линейный оператор (в частности, линейный функционал) на конечномерном линейном нормированном пространстве непрерывен; помимо того, единичный шар такого пространства компактен (см., например, [13]). Поэтому верхняя грань в (2.5) обязательно конечна и достигается на некотором многочлене $q_n \in \mathscr{P}_n$, $\|q_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} = 1$. Многочлен q_n обращает неравенство (2.4) в равенство, т. е. является экстремальным. Таким образом, при любом $n \ge 0$ экстремальный многочлен в неравенстве (2.4) существует.

2. Докажем второе утверждение леммы. Используя равенство (2.6), оценим значение функционала F_n на произвольном многочлене $p_n \in \mathscr{P}_n$:

$$|F_n p_n| \le |A| \int_{-1}^{1} \upsilon(t)\, |p_n(t)|\, |\operatorname{sign} q_n(t)|\, dt = |A|\, \|p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)}\,.$$

Так как $\widetilde{M}_n^{\upsilon}$ есть наилучшая (т. е. наименьшая) константа в неравенстве (2.4), то справедлива оценка $\widetilde{M}_n^{\upsilon} \le |A|$. С другой стороны, для многочлена $p_n = q_n \in \mathscr{P}_n$ имеем

$$|F_n q_n| = \left| A \int_{-1}^{1} \upsilon(t) q_n(t) \operatorname{sign} q_n(t)\, dt \right| = |A| \int_{-1}^{1} \upsilon(t)\, |q_n(t)|\, dt = |A|\, \|q_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)}\,,$$

значит $\widetilde{M}_n^{\upsilon} \ge |A|$. Таким образом, $\widetilde{M}_n^{\upsilon} = |A|$, а многочлен q_n является экстремальным в неравенстве (2.4). Второе утверждение леммы доказано.

3. В силу теоремы Хана—Банаха (см., например, [13, гл. 4, § 1; 14, гл. 2, § 3]) функционал F_n продолжается с сохранением нормы на все пространство $L^{\upsilon}(-1,1)$. Обозначим это продолжение символом Φ_n. Функционал Φ_n обладает следующими двумя свойствами:

$$\Phi_n p_n = F_n p_n, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n, \tag{2.8}$$

$$\|\Phi_n\|_{(L^{\upsilon}(-1,1))^*} = \widetilde{M}_n^{\upsilon}.$$

Поскольку вес υ (суммируем и) почти всюду на $(-1,1)$ отличен от нуля, то сопряженным для пространства $L^\upsilon(-1,1)$ является пространство $L_\infty(-1,1)$ (см., например, [14, гл. 4, § 8, теорема 5; гл. 4, § 2, п. 19]). Более того, как и произвольный линейный ограниченный функционал на пространстве $L^\upsilon(-1,1)$, функционал Φ_n представим в виде (см., например, [14, гл. 4, § 8])

$$\Phi_n f = \int_{-1}^{1} \sigma(t)\upsilon(t)f(t)dt, \qquad f \in L^\upsilon(-1,1), \tag{2.9}$$

где $\sigma \in L_\infty(-1,1)$, причем $\|\Phi_n\|_{(L^\upsilon(-1,1))^*} = \|\sigma\|_{L_\infty(-1,1)}$. Следовательно,

$$\widetilde{M}_n^\upsilon = \|\sigma\|_{L_\infty(-1,1)}. \tag{2.10}$$

Пусть $q_n \in \mathscr{P}_n$ есть экстремальный многочлен задачи (2.4). На этом многочлене будет достигаться норма функционала F_n, а значит и норма функционала Φ_n. Имеем

$$F_n q_n = \Phi_n q_n = \int_{-1}^{1} \sigma(t)\upsilon(t)q_n(t)dt.$$

Отсюда получаем

$$|F_n q_n| = \left|\int_{-1}^{1} \sigma(t)\upsilon(t)q_n(t)dt\right| \le \int_{-1}^{1} \upsilon(t)|\sigma(t)q_n(t)|dt \le \|\sigma\|_{L_\infty(-1,1)}\|q_n\|_{L^\upsilon(-1,1)}.$$

Учитывая (2.10) и свойство экстремальности многочлена q_n, делаем вывод, что оба последних неравенства обращаются в равенство. Но это означает, что $|\sigma(t)| = \widetilde{M}_n^\upsilon$ почти всюду на $(-1,1)$ и знак функции σ почти всюду на $(-1,1)$ совпадает со знаком или противоположен знаку многочлена q_n. Таким образом,

$$\sigma = A \operatorname{sign} q_n \qquad \text{п. в. на } (-1,1),$$

где A есть константа со свойством (2.7). Из соотношений (2.8) и (2.9) следует теперь представление (2.6). Лемма полностью доказана. □

2.2. Свойства экстремального многочлена. Лемма 1 позволяет выяснить некоторые свойства экстремального многочлена неравенства (2.1).

Лемма 3. *При любом* $n \ge 1$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Экстремальный многочлен задачи* (2.1) *имеет* n *простых нулей и все они лежат на интервале* $(-1,1)$.
2. *Экстремальный многочлен задачи* (2.1) *единственный.*

Доказательство. 1. Нам предстоит доказать, что экстремальный многочлен q_n задачи (2.1) имеет n перемен знака на $(-1,1)$. Предположим, что таких точек меньше чем n и хотя бы одна перемена знака имеется. Пусть это будут точки $-1 < t_1 < \ldots < t_k < 1$, $1 \le k < n$. Рассмотрим многочлен

$$q(t) = (1-t)\prod_{j=1}^{k}(t-t_j); \tag{2.11}$$

он имеет порядок не выше чем n, т. е. принадлежит множеству $\mathscr{P}_n$. На многочлене (2.11) тождество (2.6) принимает вид

$$0 = A\int_{-1}^{1} \upsilon(t)\,|q(t)|\,dt, \qquad |A| = M_n^\upsilon(1).$$

Это соотношение невозможно. Таким образом, мы пришли к противоречию.

В предположении, что у экстремального многочлена нет перемен знака на интервале $(-1, 1)$, вместо многочлена (2.11) надо рассмотреть многочлен $q(t) = 1 - t$.

Так что, действительно, любой экстремальный многочлен задачи (2.1) имеет n перемен знака на интервале $(-1, 1)$, а значит имеет n простых нулей на $(-1, 1)$. Первое утверждение леммы доказано.

2. Пусть q_n — некоторый экстремальный многочлен неравенства (2.1). Как уже доказано, этот многочлен на интервале $(-1, 1)$ имеет n простых нулей, которые являются точками перемены знака q_n. Пусть p_n — еще один экстремальный многочлен неравенства (2.1). Представление (2.6) влечет цепочку соотношений

$$|p_n(1)| = \left| A \int_{-1}^{1} \upsilon(t) p_n(t) \operatorname{sign} q_n(t) dt \right| \le |A| \int_{-1}^{1} \upsilon(t) |p_n(t)| dt = M_n^{\upsilon}(1) \|p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)}.$$

Поскольку многочлен p_n экстремальный, то неравенство в последнем соотношении обращается в равенство. Но это возможно лишь в том случае, если почти всюду на $(-1, 1)$ многочлены p_n и q_n либо одного знака, либо противоположного. Следовательно, нули многочленов p_n и q_n совпадают, а значит $p_n = c q_n$, где c — отличная от нуля константа. Второе утверждение леммы также доказано. $\square$

З а м е ч а н и е. Для произвольных линейных функционалов на множестве $\mathscr{P}_n$ аналог леммы 3 не имеет места. Приведем пример. Рассмотрим на $\mathscr{P}_n$ функционал $F_n p_n = p_n(0)$. Предположим, что вес υ четный. Тогда, если многочлен q_n экстремальный, то многочлен $q_n(-t)$ также является экстремальным. А значит экстремальным будет и многочлен

$$q^*(t) = \frac{q_n(t) + q_n(-t)}{2}.$$

Последний многочлен четный. Следовательно, если число n нечетное, то многочлен q^* имеет порядок $n - 1$. Для этого многочлена не выполняется первое свойство экстремальных многочленов неравенства (2.1) из леммы 3. Легко понять, что при любом γ, удовлетворяющем условию $|\gamma| \le 1$, многочлен $(1 - \gamma t) q^*(t)$ также будет экстремальным. Так что экстремальный многочлен не единственный.

3. Связь с задачей о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля

3.1. Характеризация экстремального многочлена неравенства (2.1). Исходя из веса υ, определим на интервале $(-1, 1)$ новый вес

$$w(t) = (1 - t)\upsilon(t). \tag{3.1}$$

Обозначим через q_n многочлен порядка $n \ge 1$ с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^w(-1, 1)$; этот многочлен является решением задачи

$$\inf\{\|p_n\|_{L^w(-1,1)} \colon p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|q_n\|_{L^w(-1,1)},$$

где $\mathscr{P}_n^1$ есть множество многочленов

$$p_n(t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$$

порядка n, старший коэффициент которых равен 1. Многочлен q_n характеризуется свойством ортогональности знака многочлена пространству $\mathscr{P}_{n-1}$:

$$\int_{-1}^{1} p_{n-1}(t)\, w(t) \operatorname{sign} q_n(t)\, dt = 0, \qquad p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}. \tag{3.2}$$

Известно, что все n нулей многочлена q_n простые и лежат на интервале $(-1,1)$; впрочем, этот факт легко следует из свойства (3.2).

Теорема 2. *При любом $n \geq 1$ многочлен q_n порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^w(-1,1)$ с весом* (3.1), *является единственным экстремальным многочленом неравенства* (2.1). *При этом*

$$M_n^{\upsilon}(1) = \frac{1}{I_n}, \tag{3.3}$$

где

$$I_n = \int\limits_{-1}^{1} \upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)\,dt > 0. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть q_n — многочлен порядка n, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^w(-1,1)$. Для произвольного многочлена $p_n \in \mathscr{P}_n$ имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(t)\,\upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} r_{n-1}(t)(1-t)\upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt + p_n(1)\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt,$$

где

$$r_{n-1}(t) = \frac{p_n(t)-p_n(1)}{1-t}$$

есть многочлен порядка $n-1$. Отсюда в силу (3.2) следует равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} p_n(t)\upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt = p_n(1)\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n. \tag{3.5}$$

Выясним знак интеграла $I_n = \int_{-1}^{1} \upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt$. Подставив в (3.5) многочлен $p_n = q_n$, получаем равенство

$$\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(t)|q_n(t)|dt = q_n(1)\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt. \tag{3.6}$$

Все нули многочлена q_n лежат на интервале $(-1,1)$, поэтому $q_n(1) \neq 0$, а поскольку старший коэффициент q_n положительный, то $q_n(1) > 0$. В силу (3.6) можно утверждать, что имеет место свойство (3.4).

Соотношение (3.5) можно теперь переписать в виде

$$p_n(1) = \frac{1}{I_n}\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(t)p_n(t)\operatorname{sign} q_n(t)dt, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n.$$

В силу первого утверждения леммы 1 справедливо равенство (3.3) и многочлен q_n является экстремальным в неравенстве (2.1). Теорема доказана. □

3.2. Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 2 многочлен Q_n, наименее уклоняющийся от нуля относительно нормы (1.4), т. е. в пространстве $L^{\psi}(-1,1)$ функций, суммируемых на $(-1,1)$ с весом Якоби (1.3), является экстремальным в неравенстве (1.8). В силу теоремы B многочлен Q_n как зональный многочлен одного переменного $t = x_m,\ x = (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$, является экстремальным и в неравенстве (1.1). Соотношения (3.3) и (1.9) влекут равенство (1.5). Теорема 1 доказана. □

3.3. Частные случаи. Теорема 2, а также и лемма 1 позволяют вычислить наименьшую константу в неравенстве (1.8), а в силу теоремы 1 и в неравенстве (1.1), по крайней мере, для малых значений n. Сделаем это при $n=1$ и $n=2$ для $m=3$. В случае $m=3$ ультрасферический вес (1.6) является единичным весом $\phi(t)\equiv 1$, а соответствующий вес (1.3) есть $\psi(t)=1-t$.

С л у ч а й $m=3,\ n=1$. Экстремальный многочлен $q_1\in\mathscr{P}_1$ в неравенстве (1.8) имеет вид $q_1(t)=t-a,\ a\in(-1,1)$. В силу свойства (3.2) знак этого многочлена ортогонален пространству $\mathscr{P}_0$ с весом $\psi(t)=1-t$, т. е. выполняется равенство

$$\int_{-1}^{1}(1-t)\operatorname{sign} q_1(t)\,dt=0.$$

Имеем

$$0=\int_{-1}^{1}(1-t)\operatorname{sign} q_1(t)\,dt=\int_{-1}^{a}(t-1)\,dt+\int_{a}^{1}(1-t)\,dt=a^2-2a-1.$$

Это уравнение имеет два решения $a=1\pm\sqrt{2}$, лишь одно из которых, $a=1-\sqrt{2}$, принадлежит интервалу $(-1,1)$. Следовательно, экстремальным является многочлен $q_1(t)=t-1+\sqrt{2}$, а наилучшая константа в неравенстве (1.8) есть

$$M_{1,3}(1)=\left(\int_{-1}^{1}\operatorname{sign} q_1(t)\,dt\right)^{-1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

В силу теоремы 1 многочлен $p_1^*(x)=q_1(x_3),\ x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, будет экстремальным в неравенстве (1.1) и к тому же

$$C_{1,3}=\frac{1+\sqrt{2}}{4\pi}.$$

С л у ч а й $m=3,\ n=2$. Экстремальный многочлен $q_2\in\mathscr{P}_2$ в неравенстве (1.8) имеет вид $q_2(t)=(t-t_1)(t-t_2)$, $-1<t_1<t_2<1$. В силу свойства (3.2) знак этого многочлена ортогонален пространству $\mathscr{P}_1$ с весом $\psi=1-t$, т. е. выполняются равенства

$$\int_{-1}^{1}(1-t)\operatorname{sign} q_2(t)\,dt=0,\qquad \int_{-1}^{1}t(1-t)\operatorname{sign} q_2(t)\,dt=0,$$

которые приводят к системе двух уравнений относительно t_1 и t_2:

$$t_2^2-t_1^2+2t_1-2t_2+2=0,\qquad \frac{2t_2^3}{3}-\frac{2t_1^3}{3}+{t_1}^2-t_2^2-\frac{2}{3}=0.$$

Решение этой системы сводится к уравнению 4-й степени относительно неизвестной t_2

$$3t_2^4-8t_2^3+12t_2^2-12t_2+1=0. \tag{3.7}$$

При этом t_1 выражается через t_2 следующим образом:

$$t_1=\frac{3t_2^3-11t_2^2+11t_2-5}{6},$$

а искомая константа

$$M_{2,3}(1)=\left(\int_{-1}^{1}\operatorname{sign} q_2(t)\,dt\right)^{-1}=\frac{1}{2+2t_1-2t_2}=\frac{3}{3t_2^3-11t_2^2+5t_2+1}.$$

Применяя метод Феррари [15, гл. 10, § 38] решения уравнений 4-й степени, можно найти выражение для t_2 (а значит и для t_1 и $M_{2,3}(1)$) в радикалах. Численное же решение уравнения (3.7) приводит к следующим значениям искомых параметров:

$$M_{2,3}(1) = 2.19515634\ldots, \qquad t_1 = -0.68107093\ldots, \qquad t_2 = 0.09115485\ldots .$$

Согласно теореме 1 многочлен $p_2^*(x) = q_2(x_3),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, будет экстремальным в неравенстве (1.1) и

$$C_{2,3} = \frac{M_{2,3}(1)}{2\pi} = 0.34936998\ldots .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906.
2. **Тайков Л. В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 3. С. 205–211.
3. **Тайков Л. В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 6. С. 116—121.
4. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA. 2002. P. 24–53.
5. **Gorbachev D. V.** An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 2. P. S117–S138.
6. **Горбачев Д. В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Изд-во “Гриф и К”, 2005. 152 с.
7. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
8. **Иванов В. И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 489–498.
9. **Арестов В. В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, вып. 4. С. 539–547.
10. **Дейкалова М. В.** О точном неравенстве Джексона — Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 122–134.
11. **Дейкалова М. В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
12. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
13. **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
14. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
15. **Курош А. Г.** Курс высшей алгебры. М.: ГИФМЛ, 1962. 432 с.

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

Поступила 26.04.2012

Рогозина Виктория Витальевна
студентка магистратуры
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Rogozina_Vika@e1.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ РУДИНА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ РАДИАЛЬНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

А. В. Ефимов

Пусть $\mathscr{G}_m$ есть класс непрерывных радиальных вещественнозначных функций от m переменных с носителем в единичном шаре $\mathbb{B}_1$ пространства $\mathbb{R}^m$, непрерывных на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ и имеющих неотрицательное преобразование Фурье. В работе доказано, что при $m \geq 3$ функция f из класса $\mathscr{G}_m$ может быть представлена в виде не более чем счетной суммы самосверток $\sum f_k \widetilde{*} f_k$ вещественнозначных функций f_k с носителем в шаре половинного радиуса. Этот результат является обобщением теоремы, доказанной Рудиным при условии бесконечной дифференцируемости функции f и комплекснозначности функций f_k.

Ключевые слова: положительно определенные функции, многомерные радиальные функции, теорема Рудина.

A. V. Efimov. An analog of Rudin's theorem for continuous radial positive definite functions of several variables.

Let $\mathscr{G}_m$ be the class of radial real-valued functions of m variables with support in the unit ball $\mathbb{B}$ of the space $\mathbb{R}^m$ that are continuous on the whole space $\mathbb{R}^m$ and have a nonnegative Fourier transform. For $m \geq 3$, it is proved that a function f from the class $\mathscr{G}_m$ can be presented as the sum $\sum f_k \widetilde{*} f_k$ of self-convolutions of at most countably many real-valued functions f_k with support in the ball of radius 1/2. This result generalizes the theorem proved by Rudin under the assumptions that the function f is infinitely differentiable and the functions f_k are complex-valued.

Keywords: positive definite functions, multidimensional radial functions, Rudin's theorem.

Введение

Пусть $\mathbb{R}^m$ при $m \geq 2$ есть евклидово пространство со скалярным произведением $xt = \sum_{k=1}^m x_k t_k$ элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. Символами $\mathbb{B}_r = \mathbb{B}_r^m$ будет обозначаться шар радиуса r с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^m$. Напомним, что функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, зависящая только от радиуса $r = \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$, называется радиальной. Пусть $\mathscr{G}_m(r)$ есть класс радиальных функций $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $f \in C(\mathbb{R}^m)$;
2) $\operatorname{supp} f \subseteq \mathbb{B}_r$;
3) преобразование Фурье функции f неотрицательно:

$$\widehat{f}(t) = \int\limits_{x \in \mathbb{R}^m} f(x) e^{-i\,tx}\, dx \geq 0, \qquad t \in \mathbb{R}^m.$$

Класс $\mathscr{G}_m(1)$ в дальнейшем будем обозначать $\mathscr{G}_m$. Для пары функций $g_1,\ g_2 \in \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ положим

$$(g_1 \widetilde{*} g_2)(x) = \int\limits_{t \in \mathbb{R}^m} g_1(t) \overline{g_2(x+t)} dt.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

В 1970 г. Рудин [3] доказал следующее утверждение.

Теорема A (Рудин). *Бесконечно дифференцируемая функция φ из класса $\mathscr{G}_m$ может быть представлена в виде конечной суммы или ряда*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_k \alpha_k \tilde{*} \alpha_k(x) + \sum_k \sum_{l=1}^m \omega_{kl} \tilde{*} \omega_{kl}(x), \\ \omega_{kl}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_l} \omega_k(x), \qquad l = 1, 2, \ldots, m,\end{aligned} \tag{0.1}$$

где ω_k и $\alpha_k \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ — радиальные, бесконечно дифференцируемые функции с носителем в шаре радиуса $1/2$. При этом ряды в правой части (0.1) сходятся равномерно.

Правую часть (0.1) можно интерпретировать как сумму ряда $\sum f_i \widetilde{*} f_i$ функций f_i из $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ с носителем в шаре половинного радиуса.

Еще в 1945 г. Боас и Кац [1] показали, что в одномерном случае ($m = 1$) справедливо более сильное утверждение в сравнении с теоремой Рудина, а именно произвольная функция $\varphi \in \mathscr{G}_1$ имеет следующее представление:

$$\varphi = u \widetilde{*} u, \tag{0.2}$$

где u — действительнозначная функция из пространства $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ с носителем в промежутке $[-1/2, 1/2]$. Такое представление является аналогом следующего хорошо известного факта о неотрицательных тригонометрических полиномах (см., например, [5, гл. VI, теорема 40]): всякий тригонометрический полином n-го порядка T_n, принимающий лишь неотрицательные значения, может быть представлен в форме $T_n(t) = |P_n(e^{it})|^2$, где P_n — алгебраический полином степени не выше n. Эм, Гнейтинг и Ричардс [2] назвали функции u со свойством (0.2) корнями Боаса—Каца функции φ и привели необходимые и достаточные условия существования корней Боаса—Каца для многомерных радиальных функций в терминах кратностей нулей преобразования Фурье функции φ. Также они отметили возможность рассматриваемого нами обобщения теоремы Рудина, однако доказательства этого факта они не привели.

В работе доказывается следующее обобщение теоремы Рудина для непрерывных функций, которое было использовано без доказательства в работе [4] автора.

Теорема B. *Произвольная функция φ из класса $\mathscr{G}_m$, $m \geq 3$, может быть представлена в виде конечной суммы или ряда*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_k \alpha_k \tilde{*} \alpha_k(x) + \sum_k \sum_{l=1}^m \omega_{kl} \tilde{*} \omega_{kl}(x), \\ \omega_{kl}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_l} \omega_k(x), \qquad l = 1, 2, \ldots, m,\end{aligned} \tag{0.3}$$

где ω_k и α_k — радиальные вещественнозначные функции из $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ с носителем в шаре радиуса $1/2$; каждая из функций ω_k почти всюду непрерывна и дифференцируема как функция, зависящая только от радиуса, на отрезке $[0, 1/2]$, и частные производные $\omega_{kl}(x)$ принадлежат пространству $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$. При этом оба ряда в (0.3) сходятся в метрике $\mathbb{C}(\mathbb{R}^m)$.

Хотя теорема A Рудина верна для всех $m \geq 1$, доказательство теоремы B для непрерывных функций при $m = 2$ представляет дополнительную сложность, поэтому мы ограничимся рассмотрением $m \geq 3$.

1. Теорема Рудина для непрерывных функций

При $\alpha > 0$ обозначим через $E(\alpha)$ класс функций экспоненциального типа $\alpha > 0$, т. е. целых функций f, обладающих свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C = C(\varepsilon) > 0$ такое, что справедлива оценка

$$|f(z)| < Ce^{(\alpha+\varepsilon)|z|}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Для радиальной функции $g(x) = g(x_1, x_2, \dots x_m)$, $x \in (x_1, x_2, \dots x_m) \in \mathbb{R}^m$, условимся писать

$$g(x) = g(r), \qquad r = |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}, \qquad x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

Относительно радиальной функции g нескольких (вещественных) переменных будем говорить, что она принадлежит классу $E(\alpha)$ функций экспоненциального типа α, если четное продолжение функции $g(r)$ на вещественную ось является сужением из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$ функции класса $E(\alpha)$.

Рудиным [3] было доказано следующее утверждение.

Лемма (Рудин). *Пусть $F \in E(1)$, F — функция, четная в комплексной плоскости, неотрицательная на вещественной оси: $F(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, и*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(x)d\,x < \infty.$$

Тогда существуют четные функции $G_j, H_j \in E(1/2)$ такие, что

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |G_j(x)|^2 + x^2 \sum_{j=1}^{\infty} |H_j(x)|^2, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Оба ряда в (1.2) сходятся равномерно на любом отрезке вещественной оси.

Перейдем к обоснованию главного результата работы. Пусть $f \in \mathscr{G}_m$. Поскольку $\widehat{f} \geq 0$ и функция f непрерывна в точке 0, то $\widehat{f}$ суммируема на $\mathbb{R}^m$ [6, гл. 1, § 1, следствие 1.26]. Помимо того, по теореме Планшереля она интегрируема с квадратом как преобразование Фурье функции из $\mathbb{L}_2$. Вместе с функцией f функция $\widehat{f}$ радиальная. В соответствии с договоренностью (1.1), будем писать

$$\widehat{f}(y) = \widehat{f}(r), \qquad r = |y| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} y_k^2}, \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Рассмотрим некоторые свойства функции $F(y_1) = \widehat{f}(y_1, 0, \dots, 0)$ как функции одного переменного $y_1 \in \mathbb{R}$. Очевидно, эта функция непрерывна на $\mathbb{R}$. Убедимся, что

$$F(y_1) \in \mathbb{L}(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Имеем

$$\int_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} F(y_1)dy_1 = \int_{r \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} \widehat{f}(r)dr \leq \int_{r \in \mathbb{R}} \widehat{f}(r) r^{m-1} dr = \frac{1}{\Omega_m(1)} \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(y)dy,$$

где $\Omega_m(1)$ — площадь $(m-1)$-мерной сферы радиуса 1. Отсюда следует, что $F(y_1) \in \mathbb{L}(\mathbb{R})$. Точно так же проверяется, что $F(y_1) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. Отсюда, свойство (1.3) действительно имеет место.

Покажем теперь, что функция $F(y_1)$ принадлежит классу $E(1)$. В самом деле, имеем

$$F(y_1) = \widehat{f}(y_1, 0, \dots, 0) = \int_{x \in \mathbb{B}_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) e^{-ix_1 y_1} dx_1 dx_2 \dots dx_m = \int_{-1}^{1} e^{-ix_1 y_1} f_{x_1}(x_1) dx_1, \tag{1.4}$$

где

$$f_{x_1}(x_1) = \int\limits_{(x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{B}^{m-1}_{r(x_1)}} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)dx_2\ldots dx_m, \qquad r(x_1)=\sqrt{1-x_1^2}.$$

Как нетрудно заметить, $\operatorname{supp} f_{x_1}(x_1)\subseteq[-1;1]$. В силу (1.4) и теоремы Пэли—Винера [6, гл. 3, § 4, теорема 4.1] функция $F(y_1)$ принадлежит классу $E(1)$, а точнее, является следом на вещественной оси функции из $E(1)$.

Таким образом, $F(y_1)$ удовлетворяет условиям леммы Рудина и, следовательно, представима в виде

$$\widehat{f}(y_1,0,\ldots,0)=\sum_{k=1}^{\infty}|G_k(y_1)|^2+y_1^2\sum_{j=1}^{\infty}|H_j(y_1)|^2,$$

где G_k, H_j — четные функции из класса $E(1/2)$. Функции G_k, H_j представимы в виде суммы ряда по степеням y_1 как целые функции. Поскольку G_k, H_j — четные, то слагаемые при нечетных степенях y_1^{2k+1} отсутствуют и, следовательно, G_k, H_j раскладываются в ряды по степеням y_1^2. Продолжим комплекснозначные функции G_k и H_j на $\mathbb{R}^m$ как радиальные функции (это возможно, поскольку они четные). В этом случае G_k и H_j как радиальные функции m переменных лежат в классе $E(1/2)$ и раскладываются в ряд по $r^2=\sum_{i=1}^m y_i^2$. Так как $\widehat{f}$ тоже радиальная, то имеем

$$\widehat{f}(y)=\sum_{k=1}^{\infty}|G_k(y)|^2+|y|^2\sum_{j=1}^{\infty}|H_j(y)|^2, \qquad y\in\mathbb{R}^m. \tag{1.5}$$

Поскольку f суммируема на $\mathbb{R}^m$, то $\widehat{f}(y)\to 0,\ |y|\to\infty$. Поэтому в дополнение к лемме Рудина можно утверждать, что оба ряда в (1.5) сходятся равномерно на всей вещественной оси $\mathbb{R}$.

Рассмотрим обратные преобразования Фурье для функций G_k, H_j, H_jy_k:

$$g_k(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ixy}G_k(y)dy=\widetilde{G}_k(x), \tag{1.6}$$

$$h_j(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ixy}H_j(y)dy=\widetilde{H_j}(x), \tag{1.7}$$

$$h_{jk}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ixy}H_j(y)y_kdy=\widetilde{H_jy_k}(x). \tag{1.8}$$

Данные интегралы существуют в смысле преобразования Фурье в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$, к примеру, как пределы в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ интегралов по шарам $\mathbb{B}_r$ при $r\to\infty$. Очевидно, что g_k и h_j — радиальные функции. Дальнейшее обоснование теоремы будет опираться на две леммы.

Лемма 1. *Функции* $g_k, h_j, h_{jk}\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$, *определенные формулами* (1.6)–(1.8), *обладают следующими свойствами*:

1) *носители функций* g_k, h_j *лежат в шаре* $\mathbb{B}_{\frac{1}{2}}$;

2) *носители функций* h_{kl} *содержатся в кубе со стороной* 1 *с центром в начале координат.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y\in\mathbb{R}^m$. Зафиксируем номер k и введем следующие обозначения: $G=G_k$,

$$G_-^a(y)=\begin{cases} G(y) & \text{для } y_2,y_3,\ldots,y_m\in[-a;a],\quad y_1\in\mathbb{R},\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases} \tag{1.9}$$

Поскольку $|G| \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$, то $|G_-^a| \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$. По теореме Планшереля существует $g_-^a = \widetilde{G_-^a}$, понимаемое в смысле пространства $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$; кроме того, $||g - g_-^a||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)} = ||G - G_-^a||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)}$. Следовательно,

$$||g - g_-^a||_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)} \to 0 \quad \text{при} \quad a \to +\infty. \tag{1.10}$$

Покажем, что G как функция одного переменного y_1 (при фиксированных остальных переменных $y_2, y_3, \dots, y_m$) интегрируема на числовой оси, по крайней мере, для $m \geq 3$. С помощью соотношения (1.5) и неравенства Гельдера получаем

$$\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1 \leq \int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} \sqrt{\widehat{f}(y_1, y_2, \dots, y_m)} dy_1$$

$$\leq \left(\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} y_1^2 \widehat{f}(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 \int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} \frac{1}{y_1^2} dy_1 \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \left(\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} y_1^2 \widehat{f}(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 \right)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Оценим последний интеграл. От переменного y_1 перейдем к переменному $r = \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$. Если y_1 меняется от 0 до $+\infty$, то r будет меняться от $r_0 = \sqrt{\sum_{j=2}^m y_j^2}$ до $+\infty$. Имеем

$$\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}} y_1^2 \widehat{f}(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 = 2 \int\limits_{r_0}^{+\infty} \widehat{f}(r) r \sqrt{r^2 - r_0^2}\, dr \leq 2 \int\limits_0^{+\infty} \widehat{f}(r) r^2\, dr$$

$$\leq 2 \int\limits_0^1 \widehat{f}(r) r^2\, dr + 2 \int\limits_1^{+\infty} \widehat{f}(r) r^{m-1}\, dr.$$

Последний интеграл конечен, поскольку $\widehat{f}$ — радиальная интегрируемая функция. Следовательно, конечен и последний интеграл в (1.11) и, более того, имеет место оценка

$$\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}\setminus[-1;1]} |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1 \leq \sqrt{2} \left(2 \int\limits_0^1 \widehat{f}(r) r^2\, dr + 2 \int\limits_1^{+\infty} \widehat{f}(r) r^{m-1}\, dr \right)^{1/2}. \tag{1.12}$$

Функция G к тому же непрерывна на $\mathbb{R}^m$, поэтому из (1.12) вытекает, что G как функция одного переменного y_1 интегрируема для всех $(y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Убедимся, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}} |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1 \leq C, \qquad (y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}. \tag{1.13}$$

Запишем

$$\int\limits_{y_1 \in \mathbb{R}} |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1 = \int\limits_{-1}^1 |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1 + \int\limits_{|y_1| \geq 1} |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1.$$

Из (1.12) следует, что последний интеграл ограничен константой, не зависящей от $(y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Интеграл

$$J(y_2, \dots, y_m) = \int\limits_{-1}^1 |G(y_1, y_2, \dots, y_m)| dy_1 \tag{1.14}$$

является непрерывной функцией точки $(y_2,\dots,y_m)$. Помимо того, поскольку $|G(y)|\le\sqrt{\widehat{f}(y)}$, то $G(y)\to 0$, $y\to\infty$, а значит и $J(y_2,\dots,y_m)\to 0$ при $(y_2,\dots,y_m)\to\infty$. Следовательно, функция (1.14) по $(y_2,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^{m-1}$ также ограничена. Свойство (1.13) доказано.

Рассмотрим обратное преобразование Фурье $g_-^a=\widetilde{G_-^a}$ функции (1.9). В данном случае имеем

$$g_-^a(x)=\lim_{b\to+\infty}\int_{-a}^{a}dy_2\dots\int_{-a}^{a}dy_n\int_{-b}^{+b}e^{ixy}G(y)dy_1. \tag{1.15}$$

Равенство здесь понимается в смысле предела в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$. Более того, предел (1.15) существует поточечно на $\mathbb{R}^m$ и в силу (1.13) можно перейти к пределу под знаком интегралов, так что

$$g_-^a(x)=\int_{-a}^{a}dy_2\dots\int_{-a}^{a}dy_n\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}G(y)dy_1,\qquad x\in\mathbb{R}^m.$$

Функция G как функция одного переменного y_1 принадлежит пространству $E(1/2)$. Поэтому последний интеграл обращается в ноль для $|x_1|\ge 1/2$. Следовательно, $g_-^a(x)=0$ при $|x_1|>1/2$. В силу равенства (1.10) можно сделать вывод, что $g(x)=0$ при $|x_1|>1/2$. Поскольку функция g радиальная, то отсюда заключаем, что $g(x)=0$ при $|x|>1/2$.

Для функций h_j,h_{jk} утверждения леммы обосновываются аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $h_j,h_{jl}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ — функции из условий* (1.7), (1.8). *Тогда $h_j(x)$ почти всюду дифференцируема как функция одного переменного x_l, и $\dfrac{\partial h_j}{\partial x_l}=h_{jl}$ почти всюду.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать $l=1$ и введем обозначения $H(y)=H_j(y)$, $h(x_1)=h_j(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $\chi(x_1)=h_{j1}(x)$, подразумевая, что $x_2,\dots,x_m$ фиксированы. Для доказательства леммы нам достаточно показать, что

$$\int_0^{x_1}\chi(z)\,dz=h(x_1)-h(0) \tag{1.16}$$

почти всюду. Заметим, что данный интеграл почти всюду существует по теореме Фубини, поскольку $h_{j1}\in\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$ и имеет конечный носитель в силу леммы 1, а значит $h_{j1}\in\mathbb{L}(\mathbb{R}^m)$.

Пусть Ω — ограниченное измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, $x\in\Omega$. Обозначим

$$\delta(\Omega)=\left\|\int_0^{x_1}\chi(z)\,dz-h(x_1)+h(0)\right\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}.$$

Достаточно доказать, что $\delta(\Omega)=0$ для любого Ω. Распишем $\delta(\Omega)$ в терминах преобразования Фурье:

$$\delta(\Omega)=\left\|\int_0^{x_1}h_{k1}(z,x_2,\dots,x_m)dz-h_k(x)+h(0)\right\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}=\left\|\int_0^{x_1}\chi(z)\,dz-h(x_1)+h(0)\right\|$$

$$=\lim_{r\to+\infty}\left\|\int_0^{x_1}\chi(z)\,dz-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{B}_r}e^{ixy}H(y)d\,y+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{B}_r}e^{i(x_2y_2+\dots+x_my_m)}H(y)d\,y\right\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}.$$

Поскольку H — целая функция и $\mathbb{B}_r$ — ограниченное множество, то

$$\int_{\mathbb{B}_r}e^{ixy}H(y)d\,y-\int_{\mathbb{B}_r}e^{i(x_2y_2+\dots+x_my_m)}H(y)d\,y=\int_0^{x_1}d\,z\int_{\mathbb{B}_r}e^{i(zy_1+x_2y_2+\dots+x_my_m)}iy_1H(y)dy.$$

Введем обозначения $s(z,x,y)=zy_1+x_2y_2+\ldots+x_my_m$. Имеем

$$\delta(\Omega)=\lim_{r\to+\infty}\left\|\int\limits_0^{x_1}\chi(z)dz-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_1}dz\int\limits_{\mathbb{B}_r}e^{is(z,x,y)}iy_1H(y)dy\right\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}.$$

По неравенству Гельдера

$$\left|\int\limits_0^{x_1}\chi(z)dz-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_1}dz\int\limits_{\mathbb{B}_r}e^{is(z,x,y)}iy_1H(y)dy\right|\le\sqrt{|x_1|}\left|\int\limits_0^{x_1}dz\left(\chi(z)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{B}_r}e^{is(z,x,y)}iy_1H(y)dy\right)^2\right|^{1/2}.$$

Тогда

$$\left\|\int\limits_0^{x_1}\chi(z)dz-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{x_1}dz\int\limits_{\mathbb{B}_r}e^{is(z,x,y)}iy_1H(y)dy\right\|_{\mathbb{L}_2(\Omega)}$$

$$\le(2x_{\max})^{3/2}\left\|\chi(z)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{B}_r}e^{is(z,x,y)}iy_1H(y)dy\right\|_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)}\xrightarrow[r\to+\infty]{}0,$$

где $x_{\max}$ — максимальное значение $|x_1|$ в Ω. Таким образом, $\delta(\Omega)=0$ для любого Ω. Соотношение (1.16) проверено.

Лемма доказана.

2. Завершение доказательства теоремы B

Пусть $f\in\mathscr{G}_m(1)$. В соответствии с (1.5)

$$\widehat{f}(y)=\sum_{k=1}^{\infty}|G_k(y)|^2+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}y_l^2|H_j(y)|^2.$$

Принимая во внимание (1.6)–(1.8), $\widehat{g_k\widetilde{*}g_k}=G_k\overline{G}_k=|G_k|^2$ и $\widehat{h_{jl}\widetilde{*}h_{jl}}=y_l^2|H_j|^2$. Тогда функцию f можно представить в следующем виде:

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\widetilde{*}g_k+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{m}h_{jl}\widetilde{*}h_{jl}, \tag{2.1}$$

где оба ряда сходятся в $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^m)$. В силу леммы 1 носители всех функций в этом представлении содержатся в шаре половинного радиуса. В силу леммы 2 имеем $h_{jl}=\dfrac{\partial h_j}{\partial x_l}$.

Убедимся, что ряд (2.1) сходится равномерно. При любых $n_1\ge1$, $n_2\ge1$ в интеграле

$$I(n_1,n_2)=\int\limits_{y\in\mathbb{R}^m}\left(\widehat{f}(y)-\sum_{k=1}^{n_1}|G_k(y)|^2-\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{m}y_l^2|H_j(y)|^2\right)dy$$

подынтегральная функция неотрицательная и мажорируется (суммируемой на $\mathbb{R}^m$) функцией $\widehat{f}$. Поэтому согласно теореме Лебега о мажорантной сходимости

$$I(n_1,n_2)\to0,\qquad n_1,n_2\to+\infty.$$

Следовательно, действительно, ряд (2.1) сходится равномерно.

Функции g_k, h_{jl} в (2.1), вообще говоря, комплекснозначные, а нам необходим ряд из действительнозначных функций. Пусть $g_k = \alpha_k^{re} + i\alpha_k^{im}$, $h_{jl} = \omega_{jl}^{re} + i\omega_{jl}^{im}$. Тогда в силу радиальности

$$g_k \widetilde{*} g_k = \alpha_k^{re} \widetilde{*} \alpha_k^{re} + \alpha_k^{im} \widetilde{*} \alpha_k^{im},$$

$$h_{jl} \widetilde{*} h_{jl} = \omega_{jl}^{re} \widetilde{*} \omega_{jl}^{re} + \omega_{jl}^{im} \widetilde{*} \omega_{jl}^{im} + i(\omega_{jl}^{im} \widetilde{*} \omega_{jl}^{re} - \omega_{jl}^{re} \widetilde{*} \omega_{jl}^{im}).$$

Поскольку функция f действительнозначна, то комплексную часть можно отбросить. Теорема B доказана.

Автор благодарен В. В. Арестову и Е. Е. Бердышевой за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Boas R.P., Jr. and Kac M.** Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 189–206.
2. **Ehm W., Gneiting T., Richards D.** Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
3. **Rudin W.** An extension theorem for positive-definite functions // Duke Math. J. 1970. Vol. 37. P. 49–53.
4. **Ефимов А.В.** Вариант задачи Турана для положительно-определенных функций нескольких переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 136–154.
5. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: ч. 2. М.: Наука, 1978. 431 с.
6. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.

Ефимов Андрей Владимирович
аспирант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: anothar@ya.ru

Поступила 02.02.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 519.168

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ЧИСЛО ПОДМНОЖЕСТВ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ МОЩНОСТИ ИСХОДНОГО МНОЖЕСТВА[1]

Е. Е. Иванко

В работе рассматривается критерий устойчивости оптимальных в смысле минимакса распределений заданий между фиксированным числом работников. При возмущении начальных данных допускается не только изменение значений функции стоимости, но и добавление и удаление заданий. При этом под устойчивостью существующего распределения понимается возможность добавить новый элемент (удалить или заменить существующий) к одному из подмножеств распределения с сохранением оптимальности полученного распределения. В статье приводятся критерий и достаточное условие устойчивости, изучается специфика областей устойчивости при ограничениях на функцию стоимости, рассматриваются алгоритмы построения областей устойчивости. На примере ряда экспериментов демонстрируется различие областей устойчивости, полученных с помощью критерия и с помощью достаточного условия.

Ключевые слова: оптимальное решение, распределение, разбиение, дискретная оптимизация, устойчивость.

I. I. Ivanko. A stability criterion for optimal solutions of a minimax problem about a partition into an arbitrary number of subsets under varying cardinality of the initial set.

A stability criterion is considered for distributions of tasks between a fixed number of workers that are optimal in the minimax sense. A perturbation of the initial data may include not only a variation in the values of the cost function but also an addition or removal of tasks. The stability of a distribution is understood as the possibility to add a new element (remove or replace an existing element) to one of the subsets of the distribution with the optimality of the distribution preserved. An optimality criterion and a sufficient optimality condition are presented, the properties of optimality domains under constraints on the cost function are studied, and algorithms for constructing optimality domains are considered. The difference between optimality domains obtained by means of the criterion and by means of the sufficient condition is exemplified by a number of experiments.

Keywords: optimal solution, distribution, partition, discrete optimization, stability.

Введение

Задачи оптимального распределения работ среди конечного числа исполнителей широко распространены в экономике и планировании [1], важное применение находят при конструировании мультипотоковых вычислительных систем [2], актуальны при оптимизации перемещений группы исполнителей в критических условиях [3; 4]. Наиболее распространенными точными методами решения таких задач являются методы математического программирования [5]. В случае равенства числа исполнителей и заданий имеет место известная задача о назначениях (assignment problem) [6], успешно решаемая с помощью методов линейного программирования за полиномиальное время (см., например, венгерский алгоритм [7]). Обобщенная постановка задачи о назначениях [8], в которой множество заданий и множество работников могут не совпадать по мощности, а также присутствует ограничение на ресурсы работников, уже не только NP-трудна, но и APX-трудна [9], то есть (при условии $P \neq NP$) не допускает существования полиномиального приближенного алгоритма, решающего задачу с постоянной, не зависящей от параметров задачи точностью.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-08-00484-а и 10-01-96020-р-урал-а) и программы 12-П-1-1019.

Любые задачи, связанные с распределением ресурсов, рассматриваются обычно в двух вариантах постановок: на минимизацию совокупных затрат (максимизацию совокупной прибыли) и на минимизацию наибольших по всем работникам затрат (максимизацию наименьшей прибыли). Постановки второго вида называются минимаксными (максиминными). Задачи о назначениях рассматриваются, как правило, в типичной для экономических приложений постановке минимизации (максимизации) совокупных затрат (прибыли). Одним из наиболее известных примеров распределительной минимаксной задачи (или, в западной терминологии, задачи на “узкое горлышко” — “bottleneck”) является классическая NP-полная задаче о разбиении (partition problem) [10]. В дискретной экстремальной постановке этой задачи требуется разбить заданное конечное множество чисел на два непересекающихся подмножества так, чтобы модуль разности между суммами чисел, содержащихся в каждом из подмножеств, был минимален.

Рассматриваемая в настоящей работе постановка, на примере которой демонстрируется теория устойчивости в распределительных задачах, содержит элементы двух описанных выше классических задач: обобщенной задачи о назначениях и дискретной экстремальной задачи о разбиении. В постановке настоящей статьи требуется распределить конечное число заданий среди конечного числа исполнителей, минимизируя стоимость выполнения заданий “наиболее загруженного” исполнителя. При этом предполагается, что затрачиваемый исполнителями ресурс и получаемая прибыль — это один параметр (иными словами, экономию мы и считаем выигрышем), а значит, рассматриваемая постановка отличается от описанной выше обобщенной задачи о назначениях отсутствием “рюкзачной” компоненты. В отличие же от дискретной экстремальной задачи о разбиении (на два подмножества) в постановке данной статьи требуется найти оптимальное в смысле минимакса разбиение на произвольное заданное число подмножеств. Другой важной особенностью рассматриваемой задачи является отсутствие ограничений на функцию трудоемкости. Так, в отличие от большинства постановок распределительной тематики, допускается неаддитивная функция агрегирования стоимости работ, имеющая место, например, в случае минимаксной задачи мультикоммивояжера, где группе исполнителей требуется распределить между собой позиции и при этом каждому посетить выделенное подмножество позиций, так чтобы длина максимального по всем исполнителям пути была минимальна [11]. Сформулированную специфическую задачу разбиения на N подмножеств в минимаксной постановке с произвольной функцией агрегирования затрат для краткости будем называть далее в тексте задачей распределения.

Среди известных работ по устойчивости дискретных экстремальных задач отметим [12–16]. Настоящая статья продолжает цикл работ автора, посвященных исследованию устойчивости оптимальных решений задач дискретной оптимизации в случае изменения множества входных данных. Ранее в работах [17–19] подробно рассматривалась задача коммивояжера, а также в работе [20] кратко излагался критерий устойчивости оптимальных распределений при росте количества распределяемых заданий.

1. Общая теория

Рассмотрим конечное множество X всех потенциально возможных заданий с функцией трудоемкости

$$d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+, \tag{1.1}$$

где $d(\varnothing) = 0$, а под $\mathcal{P}(X)$ мы традиционно понимаем множество всех подмножеств X.

Фиксируем число работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$. Введенная функция трудоемкости d зависит только от подмножества заданий и не зависит от исполнителя. Иными словами, все исполнители считаются равносильными. Для любого $K \subset X$ через $M_N(K)$ будем обозначать совокупность всех разбиений множества K, содержащих не более N подмножеств (“разрешается” оставлять одного работника без заданий). Под разбиением $\alpha = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(K)$ множества K на N подмножеств мы традиционно понимаем неупорядоченную совокупность N

попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с K:

$$1)\ \forall K_i, K_j \in \alpha \quad (K_i \neq K_j) \Rightarrow (K_i \cap K_j = \varnothing); \qquad 2) \bigcup_{K' \in \alpha} K' = K.$$

Всякий элемент $\alpha \in M_N(K)$ будем называть *распределением* заданий из K по N работникам. *Стоимостью* D распределения α будем называть максимум трудоемкости по составляющим распределение подмножествам:

$$\forall K \subset X \ \ \forall \alpha = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(K) \quad D(\alpha) \triangleq \max_{K' \in \alpha} d(K').$$

Оптимальным распределением заданий из $K \subseteq X$ среди N работников будем называть всякое разбиение $\alpha_0 \in M_N(K)$, обладающее минимальной на $M_N(K)$ стоимостью

$$\alpha_0 \colon D(\alpha_0) = \min_{\alpha \in M_N(K)} D(\alpha). \tag{1.2}$$

Далее, считая, что количество работников N фиксировано, будем говорить, что α_0, удовлетворяющее (1.2), *оптимально на* K.

Пусть фиксировано *исходное* конечное множество заданий $S \subseteq X$. Введем операцию Ins добавления одного задания в распределение заданий исходного множества

$$\forall z \in X \setminus S,\ \forall \alpha = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$$

$$Ins(z, K_i, \alpha) \triangleq (\alpha \setminus \{K_i\}) \cup \{K_i \cup \{z\}\} \in M_N(S \cup \{z\}) \tag{1.3}$$

или, более наглядно, $Ins(z, K_i, \alpha) = \{K_1, \ldots, K_i \cup \{z\}, \ldots, K_N\}$, откуда имеем

$$D(Ins(z, K_i, \alpha)) = \max\{D(\alpha \setminus \{K_i\}), d(K_i \cup \{z\})\}. \tag{1.4}$$

Если функция d *монотонна*, то есть

$$\forall K \subset X \ \ \forall x \in X \ \ d(K) \leq d(K \cup \{x\}), \tag{1.5}$$

то выражение (1.4) можно упростить:

$$D(Ins(z, K_i, \alpha)) = \max\{D(\alpha), d(K_i \cup \{z\})\}. \tag{1.6}$$

Если для оптимального распределения $\alpha_0 = \{K_1^0, \ldots, K_N^0\} \in M_N(S)$ и добавляемого задания $z \in X \setminus S$ найдется $K_i^0 \in \alpha \colon \{K_1^0, \ldots, K_i^0 \cup \{z\}, \ldots, K_N^0\} \in M_N(S \cup \{z\})$ оптимально, будем говорить, что задание z может быть *устойчиво добавлено* к распределению α_0. Это важное для настоящей статьи определение расширяет классическое понятие устойчивости оптимального распределения на случай роста размерности задачи; аналогичные расширения будут приведены ниже для случая удаления и замены задания.

Для произвольного задания $x \in S$ через K^x будем обозначать всякое подмножество заданий из S, содержащее задание x. Определим теперь операцию удаления одного задания из распределения заданий исходного множества

$$\forall x \in S,\ \forall \alpha = \{K_1, \ldots, K^x, \ldots, K_N\} \in M_N(S) \colon \forall K \in \alpha\ K \neq \varnothing$$

$$Del(x, \alpha) \triangleq (\alpha \setminus \{K^x\}) \cup \{K^x \setminus \{x\}\} \in M_N(S \setminus \{x\}),$$

или, иными словами, $Del(x, \alpha) = \{K_1, \ldots, K^x \setminus \{x\}, \ldots, K_N\}$, откуда согласно определению (1)

$$D(Del(x, \alpha)) = \max\{D(\alpha \setminus \{K^x\}), d(K^x \setminus \{x\})\}.$$

Если для оптимального распределения $\alpha_0 = \{K_1^0, \ldots, K^x, \ldots, K_N^0\} \in M_N(S)$ и удаляемого задания $x \in S$ распределение $\{K_1^0, \ldots, K^x \setminus \{x\}, \ldots, K_N^0\} \in M_N(S \setminus \{x\})$ оптимально, будем говорить, что задание x может быть *устойчиво удалено* из распределения α_0.

Наконец, рассмотрим случай замены задания

$$\forall x \in S,\ \forall z \in X \setminus S,\ \forall \alpha = \{K_1, \ldots, K^x, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$$
$$Mov(z, x, \alpha) \triangleq (\alpha \setminus \{K^x\}) \cup \{K^x \setminus \{x\} \cup \{z\}\} \in M_N(S \setminus \{x\} \cup \{z\})$$

или, по-другому, $Mov(z, x, \alpha) = \{K_1, \ldots, K^x \setminus \{x\} \cup \{z\}, \ldots, K_N\}$, откуда

$$D(Mov(z, x, \alpha)) = \max\{D(\alpha \setminus \{K^x\}), d(K^x \setminus \{x\} \cup \{z\})\}.$$

Как и прежде, если для оптимального распределения $\alpha_0 = \{K_1^0, \ldots, K^x, \ldots, K_N^0\} \in M_N(S)$, удаляемого задания $x \in S$ и добавляемого задания $z \in X \setminus S$ распределение $\{K_1^0, \ldots, K^x \setminus \{x\} \cup \{z\}, \ldots, K_N^0\} \in M_N(S \setminus \{x\} \cup \{z\})$ оптимально, будем говорить, что задание x может быть *устойчиво заменено* на задание z в распределении α_0.

Можно рассматривать иное определение замены задания, где новое задание не обязательно добавляется в то подмножество распределения, из которого было удалено существующее. Для такого случая можно построить аналогичную теорию устойчивости, что, впрочем, выходит за рамки данной статьи.

Кроме того, в следующих теоремах удобно использовать стоимость оптимального распределения заданий из исходного множества S при изъятии одного из исполнителей вместе с выделенным ему подмножеством заданий:

$$\forall K \subseteq S \quad \mathbf{D}_N^S(K) \triangleq \min_{\alpha' \in M_{N-1}(S \setminus K)} \{D(\alpha')\}. \tag{1.7}$$

Используя введенные обозначения, сформулируем теорему о критерии устойчивости оптимального распределения при добавлении задания.

Теорема 1. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$ и количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, тогда для произвольного задания $z \in X \setminus S$ стоимость оптимального на $M_N(S \cup \{z\})$ распределения можно выразить как*

$$\min_{K \subset S} \left[\max\{\mathbf{D}_N^S(K), d(K \cup \{z\})\}\right]. \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольное распределение $\beta^* = \{K_1, \ldots, K^z, \ldots, K_N\} \in M_N(S \cup \{z\})$, тогда согласно (1.3)

$$Ins(z, K^z \setminus \{z\}, \beta) = \beta^*, \quad \text{где} \quad \beta = \{K_1, \ldots, K^z \setminus \{z\}, \ldots, K_N\} \in M_N(S).$$

Используя (1.4), имеем $D(\beta^*) = D(Ins(z, K^z \setminus \{z\}, \beta)) = \max\{D(\beta \setminus \{K^z \setminus \{z\}\}), d(K^z)\}$. Учитывая (1.7), получим $D(\beta \setminus \{K^z \setminus \{z\}\}) \geq \mathbf{D}_N^S(K^z \setminus \{z\})$, откуда

$$D(\beta^*) = \max\{D(\beta \setminus \{K^z \setminus \{z\}\}), d(K^z)\} \geq \max\{\mathbf{D}_N^S(K^z \setminus \{z\}), d(K^z)\}$$
$$\geq \min\nolimits_{K \subset S} \left[\max\{\mathbf{D}_N^S(K), d(K \cup \{z\})\}\right].$$

Итак, стоимость всякого распределения из множества $M_N(S \cup \{z\})$ не менее значения (1.8). Покажем теперь, что существует распределение из $M_N(S \cup \{z\})$, обладающее стоимостью (1.8). Множество S конечно, следовательно, существует подмножество $K_0 \subset S$, на котором достигается минимум (1.8):

$$\max\{\mathbf{D}_N^S(K_0), d(K_0 \cup \{z\})\} = \min_{K \subset S} \left[\max\{\mathbf{D}_N^S(K), d(K \cup \{z\})\}\right].$$

Согласно (1.7) и из конечности $M_{N-1}(S \setminus K_0)$ следует, что существует распределение $\alpha'_0 \in M_{N-1}(S \setminus K_0)$: $D(\alpha'_0) = \mathbf{D}^S_N(K_0)$. Пусть $\alpha_0 = \alpha'_0 \cup \{K_0\}$. По построению очевидно, что

$$D(Ins(z, K_0, \alpha_0)) = \max\{D(\alpha_0 \setminus \{K_0\}), d(K_0 \cup \{z\})\} = \max\{\mathbf{D}^S_N(K_0), d(K_0 \cup \{z\})\}$$
$$= \min_{K \subset S} \left[\max\{\mathbf{D}^S_N(K), d(K \cup \{z\})\}\right].$$

Теорема доказана. □

При фиксированных S и N выражение (1.8) будем считать функцией от $z \in X \setminus S$ и обозначать $\mathcal{D}_I(z)$. Сформулируем в виде следствия утверждение, использующее соотношение (1.8) для проверки возможности устойчивого добавления задания к существующему оптимальному распределению.

Следствие 1. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$ и оптимальное распределение $\alpha_0 = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$, тогда для задания $z \in X \setminus S$ распределение $Ins(z, K_i, \alpha_0)$ при $i \in \overline{1, N}$ является оптимальным на множестве $M_N(S \cup \{z\})$ в том и только в том случае, когда $D(Ins(z, K_i, \alpha_0)) = \mathcal{D}_I(z)$.*

Рассмотрим теперь выражение стоимости оптимального распределения при изъятии одного из распределяемых заданий. Доказательство теоремы 2 опущено, оно проводится по общей схеме теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$ и количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, тогда для произвольного задания $x \in S$ стоимость оптимального на $M_N(S \setminus \{x\})$ распределения можно выразить как*

$$\min_{K^x \subset S} \left[\max\{\mathbf{D}^S_N(K^x), d(K^x \setminus \{x\})\}\right]. \tag{1.9}$$

Аналогично случаю добавления задания при фиксированных S и N выражение (1.9) будем считать функцией от $x \in S$ и обозначать $\mathcal{D}_D(x)$. Сформулируем критерий устойчивости оптимального распределения при удалении задания.

Следствие 2. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, произвольное задание $x \in S$ и некоторое оптимальное распределение $\alpha_0 \in M_N(S)$, тогда распределение $Del(x, \alpha_0)$ является оптимальным на множестве $M_N(S \setminus \{x\})$ в том и только в том случае, когда*

$$D(Del(x, \alpha_0)) = \mathcal{D}_D(x).$$

Наконец, приведем аналогичную теорему, выражающую стоимость оптимального распределения в случае замены задания. Доказательство опущено, оно проводится по общей схеме теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$ и количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, тогда для произвольного заменяемого задания $x \in S$ и произвольного замещающего задания $z \in X \setminus S$ стоимость оптимального на $M_N(S \setminus \{x\} \cup \{z\})$ распределения можно выразить как*

$$\min_{K^x \subset S} \left[\max\{\mathbf{D}^S_N(K^x), d(K^x \setminus \{x\} \cup \{z\})\}\right]. \tag{1.10}$$

При фиксированных S и N выражение (1.10) будем считать функцией от $x \in S, z \in X \setminus S$ и обозначать $\mathcal{D}_M(z, x)$. Сформулируем критерий устойчивости оптимального распределения при удалении задания.

Следствие 3. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, произвольные задания $x \in S, z \in X \setminus S$ и некоторое оптимальное распределение $\alpha_0 \in M_N(S)$, тогда распределение $Mov(z, x, \alpha_0)$ является оптимальным на множестве $M_N(S \setminus \{x\} \cup \{z\})$ в том и только в том случае, когда $D(Mov(z, x, \alpha_0)) = \mathcal{D}_M(z, x)$.*

В следующем разделе на примере случая добавления задания будет рассмотрен ряд фактов, позволяющих существенно упростить анализ усточивости оптимальных распределений в условиях дополнительных ограничений на функцию стоимости d.

2. Анализ устойчивости при ограничениях функции стоимости на примере добавления задания к оптимальному распределению

Рассмотрим полученное в теореме 1 условие (1.8). Расчет величины $\mathcal{D}_I(z)$ связан с вычислением минимума значений выражений $\max\{\mathbf{D}_N^S(K), d(K \cup \{z\})\}$ по всем подмножествам $K \subseteq S$. При этом каждому подмножеству $K \subseteq S$ соответствует трудоемкий процесс расчета значения $\mathbf{D}_N^S(K)$. Предложения 1,2 позволяют с помощью известного приближенного распределения совокупности заданий $S \cup \{z\}$ сократить число перебираемых подмножеств K при расчете минимума (1.8), отбрасывая те подмножества, на которых искомый минимум заведомо не достигается. В силу высокой вычислительной сложности расчета $\mathbf{D}_N^S(K)$ исключение из рассмотрения каждого K приводит к существенному уменьшению необходимых при расчете $\mathcal{D}_I(z)$ вычислений. Рассмотрим для начала условие исключения подмножеств заданий K "большой стоимости", применимое в случае монотонности функции стоимости d.

Предложение 1. *Пусть даны множество заданий X, монотонная функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X\colon |S| < \infty$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, добавляемое задание $z \in X \setminus S$ и произвольное распределение $\beta \in M_N(S \cup \{z\})$. Кроме того, пусть величина $\mathcal{D}_I(z)$ определяется выражением* (1.8), *тогда* $\forall K^0 \subset S$

$$(d(K^0) > D(\beta)) \Rightarrow (\max\{\mathbf{D}_N^S(K^0), d(K^0 \cup \{z\})\} > \mathcal{D}_I(z)). \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K^0 \subset S\colon d(K^0) > D(\beta)$. Из (1.5) следует, что $d(K^0 \cup \{z\}) > D(\beta)$, а значит, и $\max\{\mathbf{D}_N^S(K^0), d(K^0 \cup \{z\})\} > D(\beta)$. Кроме того, поскольку $\mathcal{D}_I(z)$ — стоимость оптимального на $M_N(S \cup \{z\})$ распределения, имеет место неравенство $D(\beta) \geq \mathcal{D}_I(z)$, а значит $\max\{\mathbf{D}_N^S(K^0), d(K^0 \cup \{z\})\} > \mathcal{D}_I(z)$. □

Итак, установлено, что при расчете минимума (1.8) при условии монотонности функции стоимости "слишком трудоемкие" подмножества рассматривать не нужно. Отметим, что в общем случае похожим образом использовать монотонность d и отказаться от рассмотрения "слишком легко выполнимых" подмножеств заданий не удается.

Аналогичное предложению 1 утверждение для минимума можно было бы сформулировать следующим образом: если распределение не является оптимальным при некоторой стоимости "минимального подмножества", то и всякое распределение, обладающее "минимальным подмножеством" меньшей стоимости, не оптимально. В общем случае такое утверждение неверно.

Для демонстрации этого факта рассмотрим задачу распределения конечного числа точек евклидовой плоскости между двумя работниками, стартующими из заданной точки O и посещающими выделенные каждому из них подмножества заданного конечного множества оптимальным образом (задача двух коммивояжеров). При этом требуется минимизировать максимум длин путей работников. Формально в данной постановке $X = \mathbb{R}^2$, трудоемкостью d конечного множества $K \subset X$ будем считать длину кратчайшего (в смысле евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$) маршрута обхода множества K при старте из точки O и посещении каждой вершины множества K ровно один раз. В примере на рис. 1 требуется оптимально распределить множество точек $S = \{a = (-0.5, -0.5); b = (-0.5, 0.5); c = (0.5, 0.5); f = (0.5, -0.5)\}$

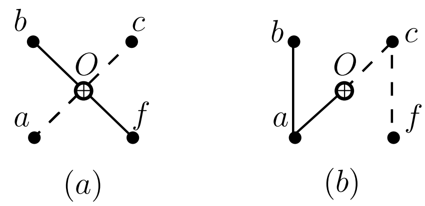


Рис. 1. Пример некорректности аналога предложения 1 для “минимального подмножества”.

между двумя коммивояжерами, стартующими из точки $O=(0,0)$. Распределение на рис. 1(a) $\{\{a,c\};\{b,f\}\}$ не является оптимальным, обладая при этом “минимальным подмножеством” стоимости $3\sqrt{2}/2$, однако распределение на рис. 1(b) $\{\{a,b\};\{c,f\}\}$ является оптимальным, хотя и обладает “минимальным подмножеством” меньшей стоимости: $1+\sqrt{2}/2$.

При дополнительном требовании *аддитивности* функции d из (1.1), то есть при выполнении

$$\forall K_1,K_2\subset X\quad d(K_1\cup\ K_2)=d(K_1)+d(K_2)-d(K_1\cap K_2), \tag{2.2}$$

можно выписать условие, исключающее из расчета (1.8) также подмножества K “малой стоимости”. Отметим, что всякая аддитивная функция очевидно является монотонной. Обратное не верно, например функция агрегирования затрат в минимаксной задаче мультикоммивояжера, частный случай которой сформулирован выше, монотонна, но не аддитивна.

Предложение 2. *Пусть даны множество заданий X, аддитивная функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X)\to\mathbb{R}^+$, начальное множество $S\subset X\colon |S|<\infty$, количество работников $N\in\mathbb{N}\colon N>1$, добавляемое задание $z\in X\setminus S$ и произвольное распределение $\beta\in M_N(S\cup\{z\})$, а величина $\mathcal{D}_I(z)$ определяется выражением* (1.8), *тогда*

$$\forall K^0\subset S\quad (d(K^0)<d(S)-D(\beta)(N-1))\Rightarrow(\max\{\mathbf{D}_N^S(K^0),d(K^0\cup\{z\})\}>\mathcal{D}_I(z)). \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K^0\subset S\colon d(K^0)<d(S)-D(\beta)(N-1)$, что при $N\neq 1$ эквивалентно условию

$$D(\beta)<\frac{d(S)-d(K^0)}{N-1}\overset{(2.2)}{=}\frac{d(S\setminus K^0)}{N-1}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим произвольное распределение $\alpha'=\{K_1,\ldots,K_{N-1}\}\in M_{N-1}(S\setminus K^0)$. Покажем, что его стоимость не менее правой части (2.4). Допустим противное

$$\forall i\in\overline{1,N-1}\quad d(K_i)<\frac{d(S\setminus K^0)}{N-1}. \tag{2.5}$$

Суммируя правые и левые части неравенств (2.5) по всем $i\in\overline{1,N-1}$, имеем противоречие

$$d(S\setminus K^0)\overset{(2.2)}{=}\sum_{i\in\overline{1,N-1}}d(K_i)<\sum_{i\in\overline{1,N-1}}\frac{d(S\setminus K^0)}{N-1}=d(S\setminus K^0).$$

Учитывая сказанное, а также очевидное в силу определения $\mathcal{D}_I(z)$ неравенство $D(\beta)\geq\mathcal{D}_I(z)$, получаем цепочку неравенств

$$D(\alpha')\geq\frac{d(S\setminus K^0)}{N-1}\overset{(2.4)}{>}D(\beta)\geq\mathcal{D}_I(z),$$

справедливую для всякого $\alpha'\in M_{N-1}(S\setminus K^0)$. В силу конечности множества $M_{N-1}(S\setminus K^0)$ сказанное означает, что $\mathbf{D}_N^S(K^0)>\mathcal{D}_I(z)$ и тем более $\max\{\mathbf{D}_N^S(K^0),d(K^0\cup\{z\})\}>\mathcal{D}_I(z)$. $\square$

Т а б л и ц а 1

Три группы подмножеств множества $S = \{a, b, c, f, g\}$.
Подмножества первой и последней группы исключаются
из расчета (1.8) за счет предложений 1 и 2

$D(K)$	0–4	5–7	8–12
K	$\varnothing$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{b,c\}$	$\{a,f\}$ $\{a,g\}$ $\{b,f\}$ $\{b,g\}$ $\{c,f\}$ $\{c,g\}$ $\{f,g\}$ $\{a,b,c\}$ $\{a,b,f\}$ $\{a,b,g\}$ $\{a,c,f\}$ $\{a,c,g\}$ $\{b,c,f\}$ $\{b,c,g\}$	$\{a,f,g\}$ $\{b,f,g\}$ $\{c,f,g\}$ $\{a,b,c,f\}$ $\{a,b,c,g\}$ $\{a,b,f,g\}$ $\{a,c,f,g\}$ $\{b,c,f,g\}$ $\{a,b,c,f,g\}$

Приведем пример использования предложений 1 и 2 для сужения области расчетов при вычислении минимума (1.8). Пусть $S = \{a, b, c, f, g\}$, $N = 2$, $d(\{a\}) = d(\{b\}) = d(\{c\}) = 2$, $d(\{f\}) = d(\{g\}) = 3$, причем функция d аддитивна. Для построения некоторого распределения $\beta \in M_N(S)$ воспользуемся простым "жадным" алгоритмом: перебирая последовательно задания из S, упорядоченные по убыванию трудоемкости, будем выделять текущее задание наименее загруженному к началу текущего шага работнику. Получим последовательность "растущих" подмножеств: $\{K_1 = \varnothing; K_2 = \varnothing\} \to \{K_1 = \{f\}; K_2 = \varnothing\} \to \{K_1 = \{f\}; K_2 = \{g\}\} \to \{K_1 = \{f, a\}; K_2 = \{g\}\} \to \{K_1 = \{f, a\}; K_2 = \{g, b\}\} \to \{K_1 = \{f, a, c\}; K_2 = \{g, b\}\}$, в итоге $\beta = \{\{f, a, c\}; \{g, b\}\}$ и $D(\beta) = 7$. Полученное распределение не оптимально, поскольку, как несложно заметить, одним из оптимальных распределений будет $\alpha_0 = \{\{f, g\}; \{a, b, c\}\}$, где $D(\alpha_0) = 6$.

Множество $S = \{a, b, c, f, g\}$ содержит $2^5 = 32$ подмножества, которые следует перебирать при расчете (1.8). Условие (2.1) позволяет исключить из рассмотрения все подмножества $K \subset S\colon d(K) > 7$. Непосредственной проверкой убедимся, что таких подмножеств 9. Условие (2.3) отбрасывает все $K \subset S\colon d(K) < d(S) - 7 \cdot 1 = 5$, количество которых также равняется 9. Таким образом, в приведенном примере использование предложений 1 и 2 позволяет сократить объем расчетов при вычислении (1.8) более чем в два раза (см. табл. 1).

В общем случае, однако, задача остается очень сложной в вычислительном отношении. В предложениях 3–5 приводится ряд свойств, упрощающих анализ устойчивости оптимальных распределений при добавлении задания и имеющих место в основном при условии аддитивности функции стоимости (2.2). Так, предложение 3 позволяет "оптимально добавлять" новое задание "менее загруженным" работникам, если установлена возможность "оптимального добавления" этого задания "более загруженным".

Предложение 3. *Пусть даны множество заданий X, аддитивная функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, произвольное распределение $\alpha = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$ и добавляемое задание $z \in X \setminus S$; тогда если распределение $Ins(z, K_i, \alpha)$ является оптимальным на $S \cup \{z\}$, то оптимальным будет также всякое распределение*

$$Ins(z, K_j, \alpha)\colon d(K_j) \le d(K_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию $Ins(z, K_i, \alpha)$ — оптимальное распределение заданий из $S \cup \{z\}$, следовательно, $\forall j \in \overline{1, N}$ $D(Ins(z, K_j, \alpha)) \ge D(Ins(z, K_i, \alpha))$. С другой стороны, в силу условия $d(K_j) \le d(K_i)$ имеем

$$D(Ins(z, K_j, \alpha)) = \max\{D(\alpha), d(K_j \cup \{z\})\} = \max\{D(\alpha), d(K_j) + d(\{z\})\}$$

$$\le \max\{D(\alpha), d(K_i) + d(\{z\})\} = \max\{D(\alpha), d(K_i \cup \{z\})\} = D(Ins(z, K_i, \alpha)).$$

Таким образом, $D(Ins(z, K_j, \alpha)) = D(Ins(z, K_i, \alpha))$, а значит, распределение $Ins(z, K_j, \alpha)$ оптимально. $\square$

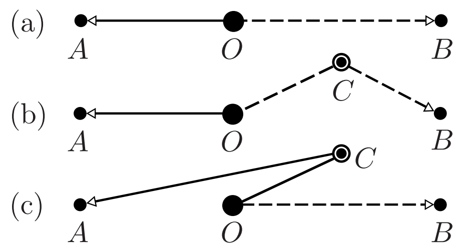


Рис. 2. Пример существенности аддитивности функции d в предложении 3.

На рис. 2 на примере упомянутой выше задачи двух коммивояжеров демонстрируется существенность аддитивности функции d в предложении 3. Исходное распределение изображено на рис. 2(a). В нем первому коммивояжеру досталось посещение вершины A, а второму — B. Очевидно, это оптимальный обход множества $\{A, B\}$ из точки O двумя коммивояжерами, причем первый коммивояжер загружен менее, чем второй: $d(\{A\}) < d(\{B\})$. При добавлении точки C к множеству посещаемых вершин оптимальным будет распределение $\{\{A\}, \{C, B\}\}$ (рис. 3(b)), однако добавить C первому, менее загруженному, коммивояжеру с сохранением оптимальности не удастся, поскольку получающееся в этом случае распределение $\{\{A, C\}, \{B\}\}$ (рис. 3(c)) обладает большей стоимостью, чем распределение на рис. 3(b): $|OC| + |CB| < |OC| + |CA|$.

Четвертое предложение касается возможности устойчивого добавления “более легких” заданий в случае, если установлена возможность устойчивого добавления “более трудного”.

Предложение 4. *Пусть, как и прежде, даны множество заданий X, аддитивная функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, оптимальное распределение $\alpha_0 = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$ и добавляемое задание $z \in X \setminus S$, тогда если распределение $Ins(z, K_i, \alpha_0)$ является оптимальным на $S \cup \{z\}$, то оптимальным на $S \cup \{z'\}$, где $z' \in X \setminus S$, будет также всякое распределение*

$$Ins(z', K_i, \alpha_0)\colon\ d(\{z'\}) \leq d(\{z\}). \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполняются условия предложения. Для произвольного распределения $\gamma = \{L_1, \ldots, L_j \cup \{z'\}, \ldots, L_N\} \in M_N(S \cup \{z'\})$ покажем, что $D(\gamma) \geq D(Ins(z', K_i, \alpha_0))$. Рассмотрим соответствующее γ распределение

$$\beta' = \{L_1, \ldots, L_j \cup \{z\}, \ldots, L_N\} \in M_N(S \cup \{z\}).$$

Пусть

$$\beta = \{L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_N\} \in M_N(S)\colon Ins(z, L_j, \beta) = \beta'.$$

В таких обозначениях, очевидно, $\gamma = Ins(z', L_j, \beta)$. Распределение $Ins(z, K_i, \alpha_0)$ оптимально на $M_N(S \cup \{z\})$, а значит, имеем $Ins(z, K_i, \alpha_0) \leq Ins(z, L_j, \beta)$ или (в силу аддитивности, а значит монотонности, d) согласно (1.6)

$$\max\{D(\alpha_0), d(K_i \cup \{z\})\} \leq \max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z\})\}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим 2 случая.

1) $D(\beta) \geq d(L_j \cup \{z\})$; в этом случае имеем $\max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z\})\} = D(\beta)$. Условие (2.7) при этом можно расписать как совокупность условий

$$D(\alpha_0) \leq D(\beta), \tag{2.8}$$

$$d(K_i \cup \{z\}) \leq D(\beta). \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует, что

$$D(\beta) \geq d(K_i \cup \{z\}) = d(K_i) + d(\{z\}) \overset{(2.6)}{\geq} d(K_i) + d(\{z'\}) = d(K_i \cup \{z'\}). \tag{2.10}$$

В итоге из (2.8) и (2.10) следует, что $\max\{D(\alpha_0), d(K_i \cup \{z'\})\} \leq D(\beta) \leq \max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z'\})\} = D(\gamma)$, что означает $D(\gamma) \geq D(Ins(z', K_i, \alpha_0))$.

2) $D(\beta) < d(L_j \cup \{z\})$; в этом случае $\max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z\})\} = d(L_j \cup \{z\})$, откуда (вновь учитывая оптимальность $Ins(z, K_i, \alpha_0)$) имеем $\max\{D(\alpha_0), d(K_i \cup \{z\})\} \leq d(L_j \cup \{z\})$, и в частности $(d(K_i \cup \{z\}) \leq d(L_j \cup \{z\})$, откуда имеем цепочку неравенств

$$(d(K_i \cup \{z\}) \leq d(L_j \cup \{z\})) \Rightarrow (d(K_i) + d(\{z\}) \leq d(L_j) + d(\{z\})) \Rightarrow (d(K_i) \leq d(L_j))$$
$$\Rightarrow (d(K_i) + d(\{z'\}) \leq d(L_j) + d(\{z'\})) \Rightarrow (d(K_i \cup \{z'\}) \leq d(L_j \cup \{z'\}))$$
$$\Rightarrow (d(K_i \cup \{z'\}) \leq \max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z'\})\}). \tag{2.11}$$

Кроме того, из оптимальности распределения α_0 имеем

$$D(\alpha_0) \leq D(\beta) \leq \max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z'\})\}. \tag{2.12}$$

Учитывая (2.11) и (2.12), получим искомое неравенство

$$D(Ins(z', K_i, \alpha_0)) = \max\{D(\alpha_0), d(K_i \cup \{z'\})\} \leq \max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z'\})\} = D(\gamma),$$

справедливое для произвольного $\gamma \in M_N(S \cup \{z'\})$. □

В четвертом предложении существенными являются условия аддитивности функции стоимости d и оптимальности исходного маршрута α_0. Соответствующие примеры приведены на рис. 3(a)–3(c) и рис. 3(d)–3(f) соответственно. Рассмотрим пример неаддитивной задачи. На рис. 3(a) представлено оптимальное распределение заданий $\{A, B\}$ между двумя коммивояжерами, стартующими из точки O (точку C опускаем); первый коммивояжер посещает подмножество $\{A\}$, второй — $\{B\}$. Добавленная точка C очевидно включается в подмножество второго коммивояжера с сохранением оптимальности получившегося распределения $\{\{A\}, \{C, B\}\}$. Однако если вместо C добавить к исходному распределению точку E, удовлетворяющую условию $d(\{E\}) < d(\{C\})$, то распределение $\{\{A\}, \{E, B\}\}$ (рис. 3(b)) оптимальным не будет, "проигрывая" распределению $\{\{A, E\}, \{B\}\}$ (рис. 3(c)).

Рассмотрим теперь пример существенности оптимальности распределения α_0 в предложении 4. На рис. 3(d) изображено неоптимальное распределение работ a, b и c на две группы (задание g опускаем). Стоимость выполнения работ каждой группы суммируется из высот прямоугольников, содержащихся в группе (функция стоимости аддитивна). Стоимость всего распределения равна максимуму из стоимостей выполнения работ в обеих группах. Добавляя к имеющемуся распределению величин a, b, c величину g, имеем оптимальное распределение $\{\{a, b\}, \{c, g\}\}$ (рис. 3(d)), однако при добавлении "меньшего" задания h вместо g имеем распределение $\{\{a, b\}, \{c, h\}\}$ (рис. 3(e)), которое очевидно не является оптимальным (см. рис. 3(f)).

Рассмотрим, наконец, простое достаточное условие сохранения оптимальности распределения при добавлении одного задания.

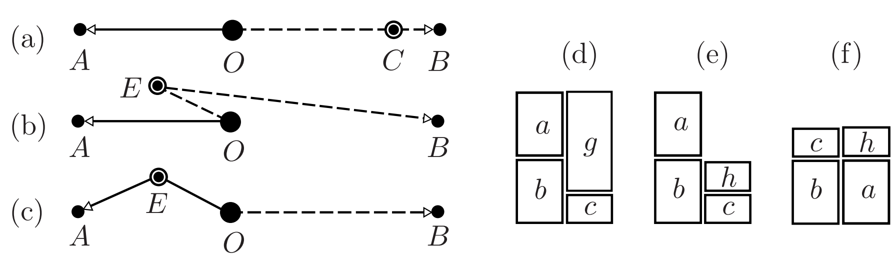


Рис. 3. Примеры существенности условий аддитивности функции d и оптимальности распределения α_0 в предложении 4.

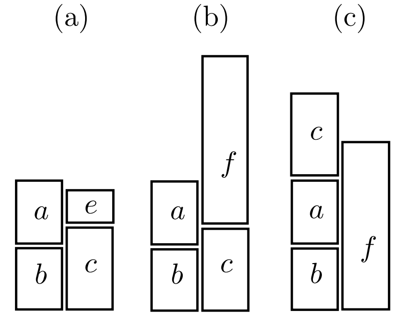


Рис. 4. Пример существенности условия $d(K \cup \{z\}) \leq d(K_{\max})$ в предложении 5.

Предложение 5. *Пусть даны множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$, оптимальное распределение $\alpha_0 = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$, где $K_{\max} \in \alpha_0\colon d(K_{\max}) = D(\alpha_0)$, тогда для любых $K \in \alpha_0, z \in X \setminus S$, удовлетворяющих условию $d(K \cup \{z\}) \leq d(K_{\max})$, распределение $\alpha_0' \triangleq Ins(z, K, \alpha_0)$ является оптимальным на $S \cup \{z\}$.*

Доказательство. Пусть $K \in \alpha_0$ и $z \in X \setminus S$ выбраны произвольно при условии $d(K \cup \{z\}) \leq d(K_{\max})$. Для произвольного распределения $\beta' = \{L_1, \ldots, L_j \cup \{z\}, \ldots, L_N\} \in M_N(S \cup \{z\})$ рассмотрим соответствующее распределение $\beta \in M_N(S)\colon Ins(z, L_j, \beta) = \beta'$.

По условию $D(\alpha_0') = \max\{D(\alpha_0), d(K \cup \{z\})\}$, причем по выбору $K_{\max}$ справедливо $D(\alpha_0) = d(K_{\max})$, а по выбору z выполняется $d(K \cup \{z\}) \leq d(K_{\max})$, следовательно, $D(\alpha_0) \geq d(K \cup \{z\})$ и, значит, $D(\alpha_0') = D(\alpha_0) = d(K_{\max})$.

Учитывая сказанное и в силу оптимальности α_0 на $M_N(S)$, имеем неравенство

$$D(\alpha_0') = D(\alpha_0) \leq D(\beta) \leq \max\{D(\beta), d(L_j \cup \{z\})\} = D(\beta'),$$

справедливое для любого $\beta' \in M_N(S \cup \{z\})$. □

Согласно сформулированному предложению при условии аддитивности функции d распределение $Ins(z, K, \alpha_0)$ будет оптимальным в случае, если $z\colon d(\{z\}) \leq d(K_{\max}) - d(K)$. Условие $d(K \cup \{z\}) \leq d(K_{\max})$ в предложении 5 является существенным. На рис. 4(a) представлено оптимальное распределение высот прямоугольников a, b и c между двумя “работниками” (задание e на данном этапе не учитываем). При добавлении задания e, удовлетворяющего условию $d(\{c\} \cup \{e\}) \leq d(\{a, b\})$, распределение рис. 4(a) сохраняет оптимальность, однако при добавлении вместо e задания f, не удовлетворяющего условию $d(\{c\} \cup \{f\}) \leq d(\{a, b\})$, распределение рис. 4(b) перестает быть оптимальным (рис. 4(c)).

Существенность оптимальности α_0 в предложении 5 легко видеть на примере рис. 3(e), 3(f), трактуя их как добавление задания h к неоптимальному распределению $\{\{a, b\}, \{c\}\}$.

3. Примеры алгоритмов построения областей устойчивости при добавлении задания к оптимальному распределению

В данном разделе приводятся два алгоритма построения областей устойчивости для известного оптимального распределения при добавлении одного задания из конечного множества $X \setminus S$. В первом алгоритме допускается произвольная функция стоимости d, во втором — функция стоимости аддитивна. Начнем рассмотрение со случая произвольной функции стоимости d.

А л г о р и т м 1 (d — произвольна).

1. Пусть даны конечное множество заданий X, функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subseteq X$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$ и оптимальное распределение $\alpha_0 = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$.

2. Ограничим совокупность перебираемых подмножеств S. Для этого построим семейство произвольных (по возможности приближенных к соответствующим оптимальным) распределений $\{\beta(z) \in M_N(S \cup \{z\})\colon z \in X \setminus S\}$ и выделим все подмножества $K \subseteq S$, которые удовлетворяют условиям предложения 1 для всякого $z \in X \setminus S$:

$$\widetilde{\mathcal{P}}(S) = \{K \in \mathcal{P}(S) \mid \forall z \in X \setminus S \;\; D(K) > D(\beta(z))\}.$$

Согласно предложению 1 для всякого $z \in X \setminus S$ эти подмножества можно не учитывать при расчете $\mathcal{D}_I(z)$ на последующих шагах алгоритма. Пусть далее $\mathcal{P}^*(S) = \mathcal{P}(S) \setminus \widetilde{\mathcal{P}}(S)$.

3. Для всякого $K \in \mathcal{P}^*(S)$ рассчитаем $\mathbf{D}_N^S(K)$. На этом шаге наиболее трудоемкие вычисления производятся однократно, независимо от добавляемого к распределению $z \in X \setminus S$.

4. Для всякого $z \in X \setminus S$:
   (a) Рассчитаем $\mathcal{D}_I(z) = \min\limits_{K \in \mathcal{P}^*(S)} \left[\max\{\mathbf{D}_N^S(K), d(K \cup \{z\})\}\right]$.

   (b) Если найдется $i \in \overline{1, N}\colon \max\{D(\alpha_0), d(K_i \cup \{z\})\} = \mathcal{D}_I(z)$, значит, распределение $\{K_1, \ldots, K_i \cup \{z\}, \ldots, K_N\}$ оптимально на $S \cup \{z\}$.

Приведенный алгоритм сложен в вычислительном отношении (в основном за счет шага 3, требующего решения $|\mathcal{P}^*(S)|$ распределительных задач). Если количество заданий $z \in X \setminus S$, для которых требуется проверить возможность устойчивого включения в распределение α_0, сопоставимо с количеством $|\mathcal{P}^*(S)|$ решаемых на шаге 3 подзадач, то применение алгоритма 1 нецелесообразно. В этом случае для каждого $z \in X \setminus S$ следует найти распределение заданий множества $S \cup \{z\}$ по N работникам непосредственно. В случае же $|X \setminus S| >> 2^{|S|}$ использование алгоритма 1 приведет к существенной вычислительной экономии по сравнению с непосредственной проверкой возможности устойчивой вставки для каждого $z \in X \setminus S$.

Рассмотрим теперь специфический алгоритм, использующий условие аддитивности функции стоимости d.

А л г о р и т м 2 (d — аддитивна).

1. Пусть даны конечное множество заданий X, *аддитивная* функция трудоемкости $d\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+$, начальное множество $S \subset X$, количество работников $N \in \mathbb{N}\colon N > 1$ и оптимальное распределение $\alpha_0 = \{K_1, \ldots, K_N\} \in M_N(S)$. Пусть, кроме того, задана точность $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

2. Учитывая аддитивность d и в силу предложения 4 имеем очевидное свойство: если задание $z^* \in X \setminus S$ невозможно устойчиво добавить к распределению α_0, то невозможно устойчиво добавить и всякое $z \in X \setminus S$, для которого $d(\{z\}) \geq d(\{z^*\})$. Исходя из сформулированного свойства и предложения 4, далее на шаге 5 методом половинного деления будем итерационно приближаться к такой величине $T \in \mathbb{R}$, для которой всякое задание $z \in X \setminus S\colon d(\{z\}) < T$ возможно устойчиво добавить к α_0, а всякое задание $z \in X \setminus S\colon d(\{z\}) > T$ — невозможно. В силу аддитивности d и предложений 3, 5 исходную нижнюю границу t_1 и верхнюю границу t_2 для T установим в виде

$$\begin{aligned} &t_1 := D(\alpha_0) - d(K_{\min}), \text{ где } \; K_{\min} \in \alpha_0\colon d(K_{\min}) = \min_{i \in \overline{1,N}} d(K_i), \\ &t_2 := d(S). \end{aligned}$$

3. Аналогично шагу 2 алгоритма 1, учитывая предложения 1,2, ограничим совокупность перебираемых подмножеств S. Пусть $\{\beta(z) \in M_N(S \cup \{z\})\colon z \in X \setminus S\}$ — совокупность

произвольных (по возможности приближенных к оптимальным) распределений. Пусть далее $\mathcal{P}_1(S)$ — совокупность “слишком крупных”, а $\mathcal{P}_2(S)$ — совокупность “слишком мелких” подмножеств S:

$$\mathcal{P}_1(S) = \{K \in \mathcal{P}(S) \mid \forall z \in X \setminus S \;\; d(K) > D(\beta(z))\},$$
$$\mathcal{P}_2(S) = \{K \in \mathcal{P}(S) \mid \forall z \in X \setminus S \;\; d(K) < d(S) - D(\beta(z))(N-1)\},$$

тогда “подходящие” подмножества составят совокупность $\mathcal{P}^*(S) = \mathcal{P}(S) \setminus (\mathcal{P}_1(S) \cup \mathcal{P}_2(S))$.

4. Аналогично шагу 3 алгоритма 1 для всякого $K \in \mathcal{P}^*(S)$ рассчитаем $\mathbf{D}_N^S(K)$.

5. До тех пор, пока $|t_2 - t_1| \geq \varepsilon$ выполняем
   (a) $t_0 := (t_2 - t_1)/2$;
   (b) выберем $z_0 \in X \setminus S$: $|d(\{z_0\}) - t_0| = \min\limits_{z \in X \setminus S} |d(\{z\}) - t_0|$;
   (c) рассчитаем $\mathcal{D}(z_0) = \min\limits_{K \in \mathcal{P}^*(S)} \big[\max\{\mathbf{D}_N^S(K), d(K \cup \{z_0\})\}\big]$;
   (d) переберем подмножества, составляющие распределение α_0; если

$$\exists i \in \overline{1,N}\colon \; \max\{D(\alpha_0), d(K_i \cup \{z\})\} = \mathcal{D}(z_0),$$

то задание z_0 может быть устойчиво добавлено к распределению α_0; в этом случае изменим “нижнюю границу”: $t_1 := t_0$; иначе изменим “верхнюю границу”: $t_2 := t_0$.

6. Получившееся в результате итераций шага 5 значение t_0 будем считать приближением с точностью ε к искомому порогу T.

По аналогии с алгоритмом 1 отметим, что если для достижения приближения с точностью ε достаточно количества итераций шага 5 алгорима 2, сопоставимого с мощностью множества $\mathcal{P}^*(S)$, то применение алгоритма 2 нецелесообразно. В этом случае следует пропустить шаг 4 и проводить процедуру половинного деления на шаге 5, непосредственно вычисляя оптимальное распределение заданий множества $S \cup \{z_0\}$ среди N работников для каждого из соответствующих заданий z_0. Такая ситуация возникает при достаточно низкой точности:

$$\varepsilon \gtrsim \frac{d(S) - (D(\alpha_0) - d(K_{\min}))}{2^{\mathcal{P}^*(S)}}.$$

4. Эксперименты

В предложении 5 описан простой метод определения множества заданий, которые допускают устойчивое добавление в существующее оптимальное распределение. Например, при условии аддитивности функции стоимости устойчиво добавить можно все задания, обладающие стоимостью, не превышающей разности Δ между наиболее трудоемким и наименее трудоемким наборами заданий распределения.

Согласно предложению 4 при аддитивных положительно определенных функциях стоимости область устойчивости определяется отрезком $[0, x]$ на множестве стоимостей заданий. Все задания, обладающие стоимостью менее x, можно устойчиво добавить к существующему оптимальному распределению, а все задания с превосходящей x стоимостью — устойчиво добавить невозможно.

В настоящем разделе на примере ряда распределительных задач с положительно определенной аддитивной функцией стоимости демонстрируется, насколько величина x превосходит величину Δ.

Пусть $X = \overline{1,100}$, функция d аддитивна и $\forall K \subset X \;\; d(K) = \sum_{i \in K} i$ (откуда, в частности, имеем $d(\{i\}) = i$). Зададимся числом исполнителей $N \in \mathbb{N}$: $N > 1$ и исходным множеством заданий $S \subset \overline{1,100}$. Построим оптимальное распределение $\alpha_0 = (K_1, \ldots, K_N) \in M_N(S)$. Учитывая предложение 4 и конечность X, с помощью алгоритма 1 или 2 либо с помощью непосредственного перебора найдем такое $i_0 \in \overline{1,100}$, что всякое задание $i \in X\colon i \leq i_0$ можно устойчиво вставить в распределение α_0, а всякое задание $i \in X\colon i > i_0$ — невозможно. Найденную величину i_0 будем называть *точной границей* области устойчивости.

Т а б л и ц а 2

Усредненные характеристики областей устойчивости оптимальных распределений 10 заданий среди N работников

N	M_r	m_r	M_e	m_e	$aver_r$	$aver_e$	$diff_{\max}$
2	2	0	3	1	0.68	1.69	2
3	38	0	39	1	4.6	5.41	3
4	87	1	89	1	15.4	16.29	25

Пусть далее $\Delta = d(K_{\max}) - d(K_{\min})$, где, как и прежде, $K_{\max}$ — наиболее трудоемкий набор заданий распределения α_0, а $K_{\min}$ — наименее трудоемкий. Величину Δ будем называть *разностной границей* области устойчивости.

В первой серии экспериментов отражается изменение точных и разностных границ областей устойчивости при росте количества работников (табл. 2). Для каждого из значений $N \in \overline{2,4}$ проводится по 100 экспериментов по оптимальному (в смысле минимизации максимума) распределению 10 случайно выбранных натуральных чисел из промежутка $[1, 100]$. Для каждого полученного распределения находятся точная и разностная границы. Максимальное среди ста экспериментов значение разностной границы обозначено как M_r, минимальное — m_r, максимальное значение точной границы обозначается M_e, минимальное — m_e, среднее значение разностной границы выражается величиной $aver_r$, точной — $aver_e$, наконец, максимальной разнице между точной и разностной границами в рамках одного эксперимента соответствует величина $diff_{\max}$.

Отметим, что в приведенных экспериментах при росте N абсолютное значение разницы между границами растет, однако отношение этой разницы к абсолютному значению разностной границы быстро стремится к нулю, что позволяет (как минимум в задачах с аддитивной функцией стоимости) считать разностную границу хорошим приближением точной границы области устойчивости.

Рассмотрим теперь пример изменения характеристик областей устойчивости при росте количества заданий и фиксированном числе исполнителей $N = 2$ (табл. 3).

Сравнительно небольшие (и уменьшающиеся при росте n) значения $aver_r$ и $aver_e$ легко объяснить, учитывая, что "достаточное" количество заданий удается распределить между исполнителями "равномерно". Интересно отметить, что, также как и при росте количества работников, в каждом из экспериментов данной серии среднее значение точной границы слабо (относительно средней стоимости распределяемых заданий) отличается от соответствующего значения разностной границы.

Т а б л и ц а 3

Усредненные характеристики областей устойчивости оптимальных распределений n заданий между двумя работниками

n	M_r	m_r	M_e	m_e	$aver_r$	$aver_e$	$diff_{\max}$
10	2	0	3	1	0.71	1.74	2
11	2	0	4	1	0.55	1.56	2
12	2	0	3	1	0.48	1.47	1
13	1	0	2	1	0.52	1.51	1
14	1	0	2	1	0.49	1.48	1
15	1	0	2	1	0.38	1.37	1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Канторович Л.В., Горстко А.Б.** Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972. 229 с.
2. Реконфигурируемые мульти-конвейерные вычислительные структуры / И.А. Каляев [и др.]. Ростов-на-Дону: ЮНЦ РАН, 2008. 320 с.
3. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 238 с.
4. **Ченцов П.А.** О некоторых алгоритмах распределения заданий между участниками // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. / Ин-т математики и механики УрО РАН. 2002. Вып. 6. С. 231–241.
5. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
6. **Burkard R.E., Dell'Amico M., Martello S.** Assignment problems. Philadelphia, 2009. 382 p. (Society for Industrial and Applied Mathematics).
7. **Kuhn H.W.** The Hungarian method for the assignment problem // Naval Res. Logist. Quart. 1955. No. 2. P. 83–97.
8. **Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D.** Knapsack problems. Berlin: Springer Verlag, 2004. 546 p.
9. **Papadimitriou C., Yannakakis M.** Optimization, approximation and complexity classes // J. Comput. System Sci. 1991. Vol. 43, no. 3. P. 425–440.
10. **Korf R.E.** A complete anytime algorithm for number partitioning // Artificial Intelligence. 1998. Vol. 106, no. 2. P. 181–203.
11. **Иванко Е.Е., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Об одном подходе к решению задачи маршрутизации перемещений с несколькими участниками // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. С. 63–71.
12. **Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 36, № 1. С. 66–72.
13. **Емеличев В.А., Подкопаев Д.П.** О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1996. Т. 38, № 11. С. 1801–1805.
14. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А.** Об устойчивости некоторых алгоритмов целочисленного программирования // Дискретный анализ и исследование операций: материалы конф. Новосибирск, 2002. С. 206.
15. Sensitivity theorems in integer linear programming / W. Cook [et al.] // Math. Programming. 1986. Vol. 34, no. 3. P. 251–264.
16. **Chakravarti N., Wagelmans A. P. M.** Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems // Oper. Res. Letters. 1998. Vol. 23, no. 1. P. 1–7.
17. **Иванко Е.Е.** Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей // Вестн. Удмурт. ун-та. 2010. №1. С. 46–56. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
18. **Иванко Е.Е.** Устойчивость оптимальных маршуртов в задаче коммивояжера при добавлении и удалении вершин // Материалы рос. конф. "Дискретная оптимизация и исследование операций" (DOOR-2010). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 105.
19. **Иванко Е.Е.** Критерий устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении вершины // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. №1. С. 58–66. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
20. **Иванко Е.Е.** Критерий устойчивости оптимальных решений при росте размерности распределительной задачи // Информ. бюллютень ассоциации мат. программирования, №12: тез. 14-й конф. "Математическое программирование и приложения". Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 178.

Иванко Евгений Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: viatore@ya.ru

Поступила 07.07.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.977

О ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С БИЛИНЕЙНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ[1]

Е. К. Костоусова

Выведены системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие динамику внутренних параллелотопозначных оценок множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью. Доказаны существование и единственность решений по крайней мере на некотором подынтервале рассматриваемого временно́го интервала, а для случая одноточечных аддитивных членов в правых частях исходных уравнений — на всем интервале. Получены два типа дифференциальных включений, гарантирующих продолжение оценок на весь интервал. Второе из этих включений генерирует невырожденные параллелепипедозначные оценки. Указаны некоторые условия, при которых предлагаемые оценки наиболее эффективны. Дифференциальные уравнения для внешних параллелепипедозначных оценок множеств достижимости были получены ранее. Здесь они для унификации даны в виде уравнений, описывающих динамику центров и матриц параллелотопов. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: множества достижимости, билинейная неопределенность, полиэдральные оценки, параллелепипеды, параллелотопы, интервальный анализ.

E. K. Kostousova. On polyhedral estimates for reachable sets of differential systems with bilinear uncertainty.

Systems of nonlinear ordinary differential equations describing the dynamics of internal parallelotope-valued estimates for reachable sets of differential systems with bilinear uncertainty are derived. The existence and uniqueness of solutions are proved at least on some subinterval of the time interval under consideration and, in the case of single-valued additive terms in the right-hand sides of the original equations, on the whole interval. Two types of differential inclusions that guarantee the extension of estimates to the whole interval are obtained. The second of these inclusions produces nondegenerate parallelepiped-valued estimates. Some conditions are specified under which the proposed estimates are most efficient. Differential equations for external parallelepiped-valued estimates of reachable sets were obtained earlier. Here, for unification, they are given in the form of equations describing the dynamics of the centers and matrices of parallelotopes. Results of numerical simulation are presented.

Keywords: reachable sets, bilinear uncertainty, polyhedral estimates, parallelepipeds, parallelotopes, interval analysis.

Введение

Решение многих задач теории управления и оценивания в условиях неопределенности в гарантированной постановке связано с построением множеств достижимости (см., например, [13; 26]). Точное построение этих множеств может оказаться очень затруднительным. Среди различных численных методов их построения активно развиваются методы, основанные на аппроксимации множеств более простыми областями фиксированной формы (в частности, эллипсоидами, параллелепипедами — см., например, [2; 6–10; 12; 19; 23–28] и приведенную там библиографию). Подобные методы наиболее полно развиты для линейных систем с неопределенностью в начальных условиях и аддитивных управлениях/возмущениях. Важными для изучения являются также системы с исходно линейной, но неточно заданной динамикой (с неопределенностью в матрице). Неопределенность здесь оказывается билинейной, что приводит к явлениям, характерным для нелинейных систем, например к возможной невыпуклости

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Динамические системы и теория управления" при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1019), при поддержке гранта РФФИ (12-01-00043) и Государственной программы поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2239.2012.1).

множеств достижимости. Имеется ряд результатов для систем такого рода с разными типами ограничений на неопределенности (см., например, [15; 21; 22]), в том числе касающихся построения внешних эллипсоидальных оценок множеств достижимости (см., в частности, [6; 19; 28]) и внешних интервальных оценок (см., например, [7; 12; 27]).

Работа посвящена нахождению двусторонних полиэдральных (параллелотопозначных) оценок для множеств достижимости дифференциальных систем с неопределенностью интервального типа в задании матрицы системы и продолжает исследования [8–10; 24; 25]. При этом грани оценивающих параллелотопов не обязаны быть параллельными координатным плоскостям, как принято в классическом интервальном анализе [20]. Основное внимание уделяется построению внутренних оценок. С использованием результатов из [9; 25] выведены системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающие динамику внутренних параллелотопозначных оценок множеств достижимости. Доказаны существование и единственность решений по крайней мере на некотором подынтервале рассматриваемого временно́го интервала, а для случая одноточечных аддитивных членов в правых частях исходных уравнений — на всем интервале. Получены два типа дифференциальных включений, гарантирующих продолжение оценок на весь интервал в общем случае. Второе из этих включений генерирует невырожденные параллелепипедозначные оценки. Приведены некоторые достаточные условия, при которых предлагаемые оценки наиболее эффективны. Дифференциальные уравнения для внешних параллелепипедозначных оценок множеств достижимости были получены ранее [8]. Здесь они для унификации даны в виде уравнений, описывающих динамику центров и матриц параллелотопов. Приведены результаты численного моделирования.

1. Постановка задачи

Пусть состояние $x(t) \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$\dot{x} = A(t)\,x + w(t), \quad t \in T = [0, \theta]. \tag{1.1}$$

Здесь неизвестные точно начальное состояние $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и входное воздействие $w(\cdot)$, являющееся измеримой (по Лебегу) n-мерной функцией времени t, удовлетворяют ограничениям

$$x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad w(t) \in \mathcal{R}(t) \quad \text{при п.в.} \;\; t \in T, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(t)$ — заданные выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^n$, причем многозначное отображение $\mathcal{R}(\cdot)$ непрерывно; измеримая матричная функция $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (символами $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times m}$ обозначаем линейные пространства вещественных n-векторов и $n\times m$-матриц) также точно не известна, но удовлетворяет заданным ограничениям интервального типа

$$A(t) \in \mathcal{A}(t) = \{A \,|\, \underline{A}(t) \le A \le \overline{A}(t)\} \quad \text{при п.в.} \;\; t \in T \tag{1.3}$$

с известными непрерывными матричными функциями $\underline{A}(t)$, $\overline{A}(t)$.

Под *интервальной матрицей* $\mathcal{A}$, задаваемой парой матриц $\underline{A} = \{\underline{a}_i^j\}$, $\overline{A} = \{\overline{a}_i^j\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{A} \le \overline{A}$, понимаем множество матриц $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \, \underline{A} \le A \le \overline{A}\} = \{A |\, \mathrm{Abs}\,(A - \tilde{A}) \le \hat{A}\}$, где $\tilde{A} = (\underline{A} + \overline{A})/2$ и $\hat{A} = (\overline{A} - \underline{A})/2$. Матричные и векторные неравенства $(\le, <, \ge, >)$ здесь и ниже понимаются покомпонентно; $\mathrm{Abs}\,A$ обозначает матрицу абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\}$: $\mathrm{Abs}\,A = \{|a_i^j|\}$ (верхним индексом нумеруем столбцы, нижним — строки).

Таким образом, соотношения (1.3) иначе могут быть записаны в виде

$$A(t) \in \mathcal{A}(t) = \{A |\, \mathrm{Abs}\,(A - \tilde{A}(t)) \le \hat{A}(t)\}, \quad \tilde{A} = (\underline{A} + \overline{A})/2, \quad \hat{A} = (\overline{A} - \underline{A})/2. \tag{1.4}$$

Множеством достижимости $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, 0, \mathcal{X}_0)$ системы (1.1)–(1.3) при $t > 0$ называется множество таких точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют x_0, $w(\cdot)$ и $A(\cdot)$, удовлетворяющие ограничениям (1.2), (1.3) и порождающие решение $x(\cdot)$ системы (1.1) такое, что $x(t) = x$. Многозначная функция $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, известна как *трубка достижимости* $\mathcal{X}(\cdot)$.

Известно, что множества достижимости обладают *полугрупповым свойством*

$$\mathcal{X}(t,0,\mathcal{X}_0) = \mathcal{X}(t,s,\mathcal{X}(s,0,\mathcal{X}_0)) \quad \forall s,t: \quad 0 \le s \le t \le \theta. \tag{1.5}$$

Будем полагать, что $\mathcal{X}_0$ — параллелепипед, $\mathcal{R}(t)$ — параллелотопы (при этом множества $\mathcal{X}(t)$ параллелотопами, вообще говоря, не будут), и искать внешние и внутренние параллелотопозначные (полиэдральные) оценки $\mathcal{P}^{\pm}(t)$ для $\mathcal{X}(t)$:

$$\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{X}(t) \subseteq \mathcal{P}^+(t) \qquad \forall\, t \in T. \tag{1.6}$$

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p,P,\pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p,P,\pi) = \{x|\ x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i,\ |\xi_i| \le 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p_j^i\} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — неособая матрица ($\det P \ne 0$) со столбцами p^i единичной длины ($\|p^i\|_2 = 1$)[2]; $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi \ge 0$ (символом 0 обозначаем нулевые векторы и матрицы произвольной размерности). Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины "полуосей". Называем параллелепипед *невырожденным*, если $\pi > 0$.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p,\bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p,\bar{P}] = \{x|\ x = p + \bar{P}\zeta,\ \|\zeta\|_\infty \le 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, а матрица $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m \le n$, может быть особой (p определяет центр параллелотопа, $\bar{P}$ — форму). Называем параллелотоп $\mathcal{P}$ *невырожденным*, если $m = n$ и $\det \bar{P} \ne 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p,P,\pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p,\bar{P}]$ с $\bar{P} = P \operatorname{diag}\pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P} \operatorname{diag}\{\|\bar{p}^i\|_2^{-1}\}$, $\pi_i = \|\bar{p}^i\|_2$ или, иначе, с $P = \bar{P}$, $\pi = \mathrm{e}$, где $\mathrm{e} = (1,1,\dots,1)^\top \in \mathbb{R}^n$, через $\operatorname{diag}\pi$, $\operatorname{diag}\{\pi_i\}$ обозначаем диагональную матрицу с компонентами π_i вектора π на диагонали.

Итак, везде ниже считаем выполненным следующее

Предположение 1. *Множество $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}_0$ — параллелепипед, $\mathcal{R}(t)$ — параллелотопы:*

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(p_0,P_0,\pi_0) = \mathcal{P}[p_0,\bar{P}_0], \quad \mathcal{R}(t) = \mathcal{P}[r(t),\bar{R}(t)], \quad \text{где } \bar{R}(t) \in \mathbb{R}^{n\times m},\ m \le n; \tag{1.7}$$

$r(\cdot)$, $\bar{R}(\cdot)$, $\underline{A}(\cdot)$, $\overline{A}(\cdot)$ *— непрерывные векторная и матричные функции.*

Работа посвящена нахождению внешних и внутренних полиэдральных оценок для $\mathcal{X}(t)$, обладающих *обобщенным полугрупповым свойством* (соответственно, *"верхним"* и *"нижним"*) [24;26] и *эволюционными свойствами*, являющимися аналогами свойства (1.5). Напомним, что *эволюционное свойство (субдостижимость)* внутренних оценок формулируется в терминах множеств достижимости:

$$\mathcal{P}^-(t) \subseteq \mathcal{X}(t,s,\mathcal{P}^-(s)) \ \ \forall s,t:\ 0 \le s \le t \le \theta; \qquad \mathcal{P}^-(0) \subseteq \mathcal{X}_0 \tag{1.8}$$

и гарантирует выполнение левого включения в (1.6). *Эволюционное свойство* (*супердостижимость*) [19] внешних оценок определяется аналогично. Будем искать оценки в виде параллелотопов $\mathcal{P}^{\pm}(t)=\mathcal{P}[p^{\pm}(t),\bar{P}^{\pm}(t)]$ и выделять случаи, когда они оказываются параллелепипедами.

Несложно видеть, что множества достижимости системы (1.1) при ограничениях $x_0 \in \mathcal{P}_0$, $w(\cdot) \equiv r(t)$ и фиксированной функции $A(\cdot)$, удовлетворяющей (1.4), оказываются параллелотопами и являются внутренними оценками для $\mathcal{X}(t)$. Назовем их *простыми внутренними оценками*. Простые оценки, соответствующие матричной функции $A(\cdot) \equiv \tilde{A}(\cdot)$, обозначим через $\mathcal{P}^{0-}(t)$ и назовем *тривиальными*. Ниже будут введены оценки $\mathcal{P}^-(t)$ другого типа, которые назовем *смешанными*.

Некоторую информацию о "качестве" оценок $\mathcal{P}^-(t)$ может дать сравнение $\mathcal{P}^-(t)$ и $\mathcal{P}^{0-}(t)$, например с помощью какого-либо функционала [26]. Мы будем использовать функционал объема. Напомним, что объем невырожденного параллелотопа $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p,\bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ определяется формулой $\operatorname{vol}\mathcal{P} = 2^n|\det \bar{P}|$.

[2] Условие нормировки может быть опущено с целью упрощения формул (оно, в частности, обеспечивает единственность представления параллелепипеда с ненулевыми величинами полуосей).

В работе используются следующие обозначения: $\stackrel{\triangle}{=}$ — знак равенства по определению; $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$ — разные нормы вектора $x = (x_1,\dots,x_n)^\top$; $\top$ — знак транспонирования; $\mathrm{e}^i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i-м месте), $\mathrm{e} = (1,1,\dots,1)^\top$; $\mathbb{R}^{n+} = \{x\in\mathbb{R}^n \,|\, x>0\}$; $\bar{\mathbb{R}}^{n+} = \{x\in\mathbb{R}^n \,|\, x\ge 0\}$; $A = \{a_i^j\} = \{a^1\dots a^n\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; $\det A$ — определитель матрицы A; $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ — след матрицы A; $\|A\| = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^m |a_i^j|$ — норма матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$; используем для краткости обозначение типа $k=1,\dots,n$ вместо $k=1,2,\dots,n$.

2. Внешние оценки

В [8] были получены дифференциальные уравнения для внешних оценок двух типов множеств достижимости в виде параллелепипедов $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}(p^+(t),P(t),\pi^+(t))$, где $P(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $t\in T$, — произвольная непрерывно-дифференцируемая функция, такая что

$$\det P(t)\ne 0,\quad t\in T. \tag{2.1}$$

Для единообразия с приводимым ниже описанием внутренних оценок выпишем уравнения для внешних оценок в виде параллелотопов[3]. Сделаем это для более точных оценок II типа (для оценок I типа уравнения получаются аналогично путем дифференцирования функции $\bar P^+ = P\operatorname{diag}\pi^+$).

Рассмотрим следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику центров и матриц параллелотопов $\mathcal{P}^+(t)=\mathcal{P}[p^+(t),\bar P^+(t)]$:

$$\begin{gathered}
\frac{dp^+}{dt} = \dot P P^{-1}p^+ + P\,(\Phi^{(+)}-\Phi^{(-)})/2 + r,\quad p^+(0)=p_0;\\
\frac{d\bar P^+}{dt} = \dot P P^{-1}\bar P^+ + P\operatorname{diag}\big((\Phi^{(+)}+\Phi^{(-)})/2 + \operatorname{Abs}(P^{-1}\bar R)\,\mathrm{e}\big),\ \bar P^+(0) = P(0)\operatorname{diag}\big(\operatorname{Abs}(P(0)^{-1}\bar P_0)\,\mathrm{e}\big),\\
\Phi_i^{(\pm)} = \max_{\xi\in\boldsymbol{\Xi}_i^{\pm}}\big(\pm P^{-1}(\tilde A - \dot P P^{-1})x + \operatorname{Abs}(P^{-1})\hat A\operatorname{Abs}x\big)_i,\\
x = p^+ + \bar P^+\xi;\quad \boldsymbol{\Xi}_i^{\pm} = \{\xi \,|\, \xi\in\boldsymbol{E}(\mathcal{P}(0,I,\mathrm{e})),\ \xi_i=\pm1\},\quad i=1,\dots,n,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

символом $\boldsymbol{E}(\mathcal{P})$ обозначаем множество всех вершин параллелепипеда $\mathcal{P}=\mathcal{P}(p,P,\pi)$, т. е. точек вида $x = p+\sum_{j=1}^n p^j\pi_j\zeta_j$, $\zeta_j\in\{-1,1\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1 *и задана произвольная непрерывно-дифференцируемая функция* $P(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $t\in T$, *удовлетворяющая* (2.1)*. Тогда система* (2.2) *имеет и притом единственное решение на* T *и соответствующие параллелотопы* $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}[p^+(t),\bar P^+(t)]$ *обладают "верхним" полугрупповым свойством и свойством супердостижимости и оказываются внешними параллелепипедозначными оценками для множеств достижимости* $\mathcal{X}(t)$ *системы* (1.1), (1.2), (1.4), (1.7)*:* $\mathcal{X}(t)\subseteq\mathcal{P}^+(t)$, $t\in T$*; при этом* $\mathcal{P}^+(t) = \mathcal{P}(p^+(t),P(t),\pi^+(t))$, *где* $\pi^+(t)$ *— вектор, компоненты которого образуют диагональ матрицы* $\Pi(t) = P^{-1}(t)\bar P^+(t)$, *которая оказывается диагональной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения на некотором отрезке $T_1\subseteq T$ вытекают из известных результатов [18, с. 7, теорема 1; с. 8, теорема 2] ввиду выполнения условий Каратеодори и липшицевости правых частей по p^+, $\bar P^+$ (которая следует из

[3] Хотя в плане вычислений системы ОДУ из [8] лучше, поскольку состоят из меньшего числа уравнений, чем система для описания параллелотопов ($2n$ и $n+n^2$ уравнений соответственно).

известных свойств функции максимума конечного числа функций [4, с. 75]). Продолжимость решения на весь T вытекает, например, из рассуждений, аналогичных приведенным ниже при доказательстве теоремы 2, с использованием [18, с. 10, теорема 4] и оценок сверху для правых частей уравнений для p^+, $\bar{P}^+$ типа $C_1\|p^+\| + C_2\|\bar{P}^+\| + C_3$, где константы C_i могут быть вычислены на основе значений известных непрерывных функций P, $\dot{P}$, $\tilde{A}$, $\hat{A}$, r, $\bar{R}$.

Осталось убедиться, что параллелотопы $\mathcal{P}^+(t)$ могут быть представлены в виде параллелепипедов $\mathcal{P}(p^+(t), P(t), \pi^+(t))$, где $p^+(t)$, $\pi^+(t)$ удовлетворяют системе ОДУ [8, (3.20)], и применить полученный ранее результат [8, теорема 1].

Покажем, что матрица $\Pi(t) = P^{-1}(t)\bar{P}^+(t)$ оказывается диагональной, т. е. может быть записана в виде $\Pi(t) = \operatorname{diag}\pi^+(t)$. При $t = 0$ это так в силу начальных условий из (2.2), причем имеем $\pi^+(0) = \operatorname{Abs}(P(0)^{-1}\bar{P}_0)\,\mathrm{e}$. Вычислим $\dot{\Pi}$, пользуясь равенством $dP^{-1}/dt = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$ (получающимся дифференцированием тождества $P^{-1}P \equiv I$) и учитывая вид правой части ОДУ для $\dot{\bar{P}}$. В результате имеем

$$\dot{\Pi} = \frac{dP^{-1}}{dt}\,\bar{P}^+ + P^{-1}\,\frac{d\bar{P}^+}{dt} = \operatorname{diag}\big((\Phi^{(+)}{+}\Phi^{(-)})/2 + \operatorname{Abs}(P^{-1}\bar{R})\,\mathrm{e}\big).$$

Таким образом, производные недиагональных элементов $\Pi(t)$ равны 0, $\Pi(t)$ остается диагональной на всем T и представима в виде $\Pi(t) = \operatorname{diag}\pi^+(t)$. При этом, как нетрудно видеть, $\pi^+(t)$ вместе с $p^+(t)$ удовлетворяют [8, (3.20)] и можно применить [8, теорема 1]. □

З а м е ч а н и е 1. Теорема 1 описывает целое семейство оценок $\mathcal{P}^+(\cdot)$ (параметром служит функция $P(\cdot)$). Напомним [8] некоторые эвристические способы выбора $P(\cdot)$:

(a) Найти $P(\cdot)$ из системы ОДУ $\dot{P} = \tilde{A}P$, $P(0) = P_0$ (при этом $\dot{P}P^{-1} = \tilde{A}$ в (2.2) и становится равным 0 первое слагаемое в $\Phi^{(\pm)}$ под знаком максимума в (2.2)).

(b) Для получения покоординатных (интервальных) оценок положить $P(t) \equiv I$ (при этом ОДУ (2.2) также упрощаются с учетом того, что $\dot{P} \equiv 0$, $P^{-1} \equiv I$).

(c) Если $\tilde{A}$ — постоянная простая матрица с n действительными собственными значениями $\tilde{\lambda}_i$, то положить значения $P(t)$ равными постоянной матрице, у которой столбцы совпадают с собственными векторами $\tilde{A}$ (при этом имеем $P\operatorname{diag}\tilde{\lambda} = \tilde{A}P$).

З а м е ч а н и е 2. Пусть система принадлежит *классу систем с постоянными коэффициентами*, т. е. $A(t) \equiv A$, $\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}$, и $\mathcal{Y}(t)$ — соответствующие множества достижимости. (При $\mathcal{A}(t) \equiv \mathcal{A}$ множества достижимости $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$, соответствующие двум разным случаям, когда A предполагается зависящей или не зависящей от t, вообще говоря, различны.) Теорема 1 описывает оценки именно для $\mathcal{X}(t)$, но $\mathcal{P}^+(t)$ оказываются также (грубыми) оценками и для $\mathcal{Y}(t)$, поскольку $\mathcal{Y}(t) \subseteq \mathcal{X}(t) \subseteq \mathcal{P}^+(t)$. В [8] указано, как объединением нескольких параллелепипедозначных оценок можно получить более точные невыпуклые оценки для $\mathcal{Y}(t)$.

3. Внутренние оценки

Для получения внутренних оценок используем рассуждения, аналогичные проводимым в [8; 19; 26]. Рассмотрим простейшую конечно-разностную аппроксимацию системы (1.1)

$$\begin{aligned} &x[k] = A[k]x[k{-}1] + w[k], \quad k = 1, \ldots, N; \quad x[0] \in \mathcal{P}_0;\\ &w[k] \in \mathcal{R}[k] = h_N\mathcal{R}(t_{k-1});\\ &A[k] \in \mathcal{A}[k] = \{I + h_N A \,|\, A \in \mathcal{A}(t_{k-1})\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $t_k = kh_N$, $h_N = \theta N^{-1}$. Следуя [9; 25], можно построить внутренние параллелотопозначные оценки $\mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$ для множеств достижимости $\mathcal{X}[k]$ системы (3.1).

Формальный переход к пределу при $N \to \infty$ позволяет получить следующую нелинейную систему ОДУ, описывающую динамику параллелотопов $\mathcal{P}^-(t) = \mathcal{P}[p^-(t), \bar{P}^-(t)]$:

$$\frac{dp^-}{dt} = \tilde{A}(t)\,p^- + r(t), \quad p^-(0) = p_0; \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar P^-}{dt} &= \tilde A(t)\,\bar P^- + \operatorname{diag}\nu(t,\bar P^-;J(t))\cdot B(\bar P^-) + \bar R(t)\,\Gamma(t) \overset{\triangle}{=} F(t,\bar P^-), \quad \bar P^-(0)=\bar P_0,\\ &\nu_i(t,\bar P^-;J) = \hat a_i^{j_i}(t)\cdot \eta_{j_i}(t,\bar P^-), \quad i=1,\dots,n,\\ &\eta(t,\bar P^-) = \max\{0, \operatorname{Abs}p^-(t) - (\operatorname{Abs}\bar P^-)\mathrm{e}\},\\ &B = \operatorname{diag}\beta(\bar P^-)\cdot \bar P^-, \quad \beta_i(\bar P^-) = 1\,/\,(\mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}\bar P^-)\,\mathrm{e}), \quad i=1,\dots,n,\end{aligned} \tag{3.3}$$

(операция максимума для векторов понимается покомпонентно). Здесь в качестве $\Gamma(t)\in\mathbb{R}^{m\times n}$ может быть взята произвольная измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая

$$\Gamma(t)\in\mathcal{G}^{m\times n} \text{ при п.в. } t\in T, \quad \mathcal{G}^{m\times n} \overset{\triangle}{=} \{\Gamma=\{\gamma_i^j\}\in\mathbb{R}^{m\times n} \mid \|\Gamma\| = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^n |\gamma_i^j| \le 1\}, \tag{3.4}$$

а $\{j_1,\dots,j_n\} \overset{\triangle}{=} J$ — произвольная перестановка чисел $\{1,\dots,n\}$, которую также можно считать измеримой (векторной) функцией. Будем обозначать множества таких функций $\Gamma(\cdot)$ и $J(\cdot)$ через $\mathbb{G}^{m\times n}$ и $\mathbb{J}$ соответственно.

В ряде случаев будет полезно выделять случай, когда выполняется следующее предположение.

Предположение 2. *Либо множества $\mathcal{R}(t)$ — одноточечные*[4] *(т. е. $\bar R(t)\equiv 0$), либо функция $\Gamma(\cdot)\in\mathbb{G}^{m\times n}$ такова, что $\bar R(t)\Gamma(t)\equiv 0$, $t\in T$.*

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение 1, $\mathcal{P}_0$ — невырожденный параллелепипед (т. е. $\det\bar P_0\ne 0$), и $J(\cdot)\in\mathbb{J}$, $\Gamma(\cdot)\in\mathbb{G}^{m\times n}$. Тогда по крайней мере на некотором промежутке $T_1=[0,\theta_1]\subseteq T$, где $0<\theta_1\le\theta$, система (3.2), (3.3) имеет и притом единственное решение, причем $\det\bar P^-(t)\ne 0$, $t\in T_1$. Соответствующие невырожденные параллелотопы $\mathcal{P}^-(t)=\mathcal{P}[p^-(t),\bar P^-(t)]$, $t\in T_1$, обладают нижним полугрупповым свойством и свойством субдостижимости (1.8) и являются внутренними оценками для множеств достижимости $\mathcal{X}(t)$ системы (1.1), (1.2), (1.4), (1.7): $\mathcal{P}^-(t)\subseteq\mathcal{X}(t)$, $t\in T_1$. При выполнении предположения 2 промежуток T_1 совпадает с T.*

Дадим доказательство, не опирающееся на предельный переход. Нам понадобится

Лемма 1. *В условиях теоремы 2 решения системы (3.2), (3.3) удовлетворяют соотношению*

$$\det\bar P^-(t) = m_0(t)\exp\int_0^t\bigl(\varphi(\tau,\bar P^-(\tau);J(\tau)) + \operatorname{tr}(\Xi(\tau,\bar P^-(\tau))\Gamma(\tau))\bigr)d\tau, \quad t\in[0,\theta_2],$$

$$m_0(t)=\det\bar P_0\,\exp\int_0^t\operatorname{tr}\tilde A(\tau)\,d\tau,\ \ \varphi(t,\bar P^-;J)=\sum_{i=1}^n \nu_i(t,\bar P^-;J)\,\beta_i(\bar P^-),\ \ \Xi(t,\bar P^-)=(\bar P^-)^{-1}\bar R(t). \tag{3.5}$$

Здесь θ_2 — первый момент $t\in T$ (если такой существует), при котором $\det\mathcal{P}^-(t)$ обращается в 0 (в противном случае $\theta_2=\theta$), формулы для ν и β даны в (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем замену переменных $\bar P^-(t)=\Phi(t)\,P(t)$, где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot x=\tilde A(t)\,x$, удовлетворяющая $\dot\Phi=\tilde A\,\Phi$, $\Phi(0)=I$. Тогда

$$\dot P = \Phi^{-1}\operatorname{diag}\nu(t,\bar P^-(t);J(t))\operatorname{diag}\beta(\bar P^-(t))\,\Phi\,P + \Phi^{-1}\bar R\,\Gamma, \quad P(0)=\bar P_0.$$

[4] При этом функцию $w(\cdot)\equiv r(\cdot)$ можно считать измеримой.

Используя известное соотношение $d\det P/dt = \det P\ \mathrm{tr}\,(P^{-1}\dot{P})$, справедливое при $\det P \neq 0$ [14, с. 183], тождество типа $\mathrm{tr}\,(S^{-1}AS) = \mathrm{tr}\,A$ [14, с. 56, 60], а также равенство $(\bar{P}^{-})^{-1} = P^{-1}\Phi^{-1}$, получаем

$$\frac{d\ \det P}{dt} \,/\, \det P = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(t, \bar{P}^{-}(t); J(t))\, \beta_i(\bar{P}^{-}(t)) + \mathrm{tr}\,((\bar{P}^{-})^{-1}\bar{R}\,\Gamma). \tag{3.6}$$

С учетом равенства $\det \bar{P}^{-} = \det\Phi \det P$, формулы Лиувилля $\det\Phi(t) = \exp\int_0^t \mathrm{tr}\,\tilde{A}(\tau)\,d\tau$ [17, с. 133] и соотношения (3.6) имеем (3.5). □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Система ОДУ (3.2), (3.3) распадается на линейную подсистему для p^{-} и подсистему для $\bar{P}^{-}$, в которой непрерывную функцию $p^{-}(t)$ считаем известной.

В силу вида функций $\nu(t, \bar{P}^{-}; J)$ и $B(\bar{P}^{-})$ и условия (3.4) можно получить следующую оценку для правой части $F(t, \bar{P}^{-})$ уравнений для $\bar{P}^{-}$:

$$\begin{gathered} \|\mathrm{diag}\,\nu \cdot B\| = \max_i\{\nu_i\,\beta_i\,{\mathrm{e}^i}^{\top}(\mathrm{Abs}\,\bar{P}^{-})\,\mathrm{e}\} = \max_i \nu_i \le m_1(t) \overset{\triangle}{=} \max_i\{\hat{a}_i^{j_i}(t)\,|p_{j_i}^{-}(t)|\}; \\ \|F(t, \bar{P}^{-})\| \le m_1(t) + \|\bar{R}(t)\| + \|\tilde{A}(t)\| \cdot \|\bar{P}^{-}\|. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Поэтому с использованием неравенства Гронуолла — Беллмана получаем ограниченность функции $\bar{P}^{-}$, удовлетворяющей (3.3):

$$\|\bar{P}^{-}(t)\| = \|\bar{P}^{-}(0) + \int_0^t F(\tau, \bar{P}^{-}(\tau))d\tau\| \le C \overset{\triangle}{=} \big(\|\bar{P}_0\| + \int_0^\theta (m_1(\tau) + \|\bar{R}(\tau)\|)\,d\tau\big)\exp\Big(\int_0^\theta \|\tilde{A}(\tau)\|\,d\tau\Big). \tag{3.8}$$

Эту константу C будем использовать ниже. Обозначим

$$\mathcal{D}_\delta = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2^\delta,\ \mathcal{D}_1 = \{\bar{P}^{-} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,|\,|(\mathrm{e}^i)^\top \bar{P}^{-}\mathrm{e}^j| \le C+1,\ i,j=1,\dots,n\},\ \mathcal{D}_2^\delta = \{\bar{P}^{-}\,|\,|\det\bar{P}^{-}| \ge \delta\},$$

где δ — произвольное сколь угодно малое положительное число. Несложно видеть, что если $\bar{P}^{-} \in \mathcal{D}_\delta$, то ${\mathrm{e}^i}^\top(\mathrm{Abs}\,\bar{P}^{-})\,\mathrm{e} \ge \delta_1$, где для нахождения δ_1 достаточно записать цепочку грубых неравенств (где $\mathrm{A}_i^j(\bar{P}^{-})$— алгебраические дополнения ij-х элементов $(\mathrm{e}^i)^\top\bar{P}^{-}\mathrm{e}^j$ матрицы $\bar{P}^{-}$):

$$\begin{aligned} \delta &\le |\det\bar{P}^{-}| \le \textstyle\sum_{j=1}^n |(\mathrm{e}^i)^\top\bar{P}^{-}\mathrm{e}^j \cdot \mathrm{A}_i^j(\bar{P}^{-})| \le \max_{1\le k,j\le n}|\mathrm{A}_k^j(\bar{P}^{-})|\,{\mathrm{e}^i}^\top(\mathrm{Abs}\,\bar{P}^{-})\,\mathrm{e} \\ &\le (n-1)!\,(\max_{k,j}|(\mathrm{e}^k)^\top\bar{P}^{-}\mathrm{e}^j|)^{n-1}\,{\mathrm{e}^i}^\top(\mathrm{Abs}\,\bar{P}^{-})\,\mathrm{e} \quad \le (n-1)!\,(C+1)^{n-1}\,{\mathrm{e}^i}^\top(\mathrm{Abs}\,\bar{P}^{-})\,\mathrm{e} \end{aligned}$$

и положить $\delta_1 = \delta\,/\,((n-1)!\,(C+1)^{n-1})$. Теперь несложно видеть, что в области $T \times \mathcal{D}_\delta$ выполняются условия Каратеодори, и в силу [18, с. 7] решение $\bar{P}^{-}(t)$ системы (3.3) существует, по крайней мере, на некотором промежутке $T_1 \subseteq T$. Кроме того, применяя несложно проверяемые неравенства типа $|\,|a+\varepsilon| - |a|\,| \le 3\,|\varepsilon|$ и вытекающие из них неравенства типа $|{\mathrm{e}^i}^\top(\mathrm{Abs}\,(A+B))\,\mathrm{e} - {\mathrm{e}^i}^\top(\mathrm{Abs}\,A)\,\mathrm{e}| \le 3\,\|B\|$, а также неравенства типа $|\max\{0,a\}\,/\,b - \max\{0,c\}\,/\,d| \le |a-c|\,/\,|b| + |c|\cdot|d-b|\,/\,|bd|$, нетрудно убедиться, что функция $F(t, \bar{P}^{-})$ является в $\mathcal{D}_\delta$ липшицевой по $\bar{P}^{-}$:

$$\|F(t,P) - F(t,Q)\| \le \Big(\|\tilde{A}(t)\| + \frac{\|\hat{A}(t)\|}{\delta_1}\cdot\big(\|p^{-}(t)\|_\infty + 3n(C+1)(1 + \frac{\|p^{-}(t)\|_\infty}{\delta_1})\big)\Big)\|P - Q\|.$$

Поэтому в $T \times \mathcal{D}_\delta$ не может существовать более одного решения $\bar{P}^{-}(t)$ системы (3.3) [18, с. 8]. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $\bar{R}(t)\Gamma(t) \equiv 0$. Тогда решение $\bar{P}^{-}(t)$, начавшись в момент $t = 0$ в точке $\bar{P}_0$, при увеличении t удовлетворяет в силу леммы 1, с учетом того что $\varphi \ge 0$, неравенству $|\det\bar{P}^{-}(t)| \ge \delta_0$, где $\delta_0 = \min_{t\in T} |m_0(t)| > 0$, т. е. $\bar P^-(t) \in \mathcal{D}_{\delta_0}$. При этом, очевидно, справедливо строгое включение $\mathcal{D}_{\delta_0} \subset \mathcal{D}_{\delta_0/2} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2^{\delta_0/2}$. В силу [18, с. 10, теорема 4] решение $\bar P^-(t)$ может быть продолжено до границы области $T\times\mathcal{D}_{\delta_0/2}$, в которой выполняются условия Каратеодори. Но значения $\bar P^-(t)$ не могут выйти на границы множеств $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2^{\delta_0/2}$: достаточно сравнить, соответственно, определение $\mathcal{D}_1$ с неравенством (3.8) и определение $\mathcal{D}_2^{\delta_0/2}$ с тем, что имеем $|\det \bar P^-(t)| \ge \delta_0$. Значит, решение может быть продолжено до $t=\theta$.

Осталось доказать справедливость левого включения из (1.8) при $0\le s\le t\le\theta_1$ (правое выполняется со знаком равенства в силу начальных условий в (3.2), (3.3)). Зафиксируем $t\in T_1$. Если $x^*\in\mathcal{P}^-(t)$, то найдется такой вектор ξ, что $\operatorname{Abs}\xi \le \mathrm{e}$ и $x^* = p^-(t) + \bar P^-(t)\,\xi$. Рассмотрим $x^* = x^*(t)$ как функцию t (зафиксировав ξ). Очевидно, при произвольном $s\le t$ имеем также $x^*(s)\in\mathcal{P}^-(s)$. Осталось убедиться, что можно так подобрать функции $A(\tau) = \tilde A(\tau) + \Delta A(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$ и $w(\tau)\in\mathcal{R}(\tau)$, $\tau\in[s,t]$, что $x^*(\tau)$ будет удовлетворять (1.1) при $\tau\in[s,t]$. Дифференцируя $x^*(\tau)$ с учетом (3.2), (3.3), можно записать (аргумент τ для краткости опускаем): $\dot x^* = \tilde A x^* + w + \operatorname{diag}\nu\, B\,\xi = Ax^* + w + q$, где $w = r + \bar R\Gamma\xi \in \mathcal{R}$ поскольку $\|\Gamma\,\xi\|_\infty \le \|\Gamma\|\,\|\xi\|_\infty \le 1$; $A = \tilde A + \Delta A$, а слагаемое $q = \operatorname{diag}\nu\, B\,\xi - \Delta A\,(p^- + \bar P^-\xi)$. Желаемое равенство $q=0$ достигается, если взять ΔA в виде $\Delta A = \operatorname{diag}\alpha\, D$, где $D = \{\mathrm{e}^{j_1}\cdots\mathrm{e}^{j_n}\}^\top$ — матрица, отвечающая перестановке $J = J(\tau)$ строк единичной матрицы, а компоненты вектора $\alpha = \alpha(\tau)$ вычислить по формулам

$$\alpha_i = \begin{cases} 0,\ \text{если}\ \ |p^-_{j_i}| \le \mathrm{e}^{j_i\top}(\operatorname{Abs}\bar P^-)\mathrm{e} \quad (\text{т. е. если } \nu_i = 0), \\ \nu_i\,\mathrm{e}^{i\top}B\xi/(p^-_{j_i} + \mathrm{e}^{j_i\top}\bar P^-\xi),\ \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n,$$

(знаменатели оказываются отличными от 0 при $\nu_i\ne 0$). Неравенства $|\alpha_i| \le \hat a_i^{j_i}$, $i=1,\dots,n$, обеспечивающие $A\in\mathcal{A}$, доказываются несложными оценками: при $\alpha_i = 0$ выполнение очевидно, а при вычислении α_i по второй формуле имеем $|\alpha_i| \le \nu_i/(|p^-_{j_i}| - \mathrm{e}^{j_i\top}(\operatorname{Abs}\bar P^-)\mathrm{e}) \le \hat a_i^{j_i}$. $\square$

З а м е ч а н и е 3. Пользуясь терминологией из введения, можно сказать, что теорема 2 описывает семейство *смешанных* внутренних оценок $\mathcal{P}^-(\cdot)$ (параметрами служат функции $J(\cdot)$ и $\Gamma(\cdot)$), а тривиальные внутренние оценки $\mathcal{P}^{0-}(\cdot)$ определяются уравнениями (3.2), (3.3), если положить в (3.3) $\nu\equiv 0$ и $\Gamma\equiv 0$.

З а м е ч а н и е 4. В связи с замечанием 2 отметим, что в случае $\mathcal{A}(t)\equiv\mathcal{A}$ теорема 2 описывает внутренние оценки для множеств $\mathcal{X}(t)$, но, вообще говоря, не для $\mathcal{Y}(t)$.

З а м е ч а н и е 5. В общем случае, когда не выполняется предположение 2, для возможности продолжения оценок на весь интервал T можно перейти к дифференциальным включениям и при этом рассмотреть два пути. В первом случае (см. теорему 3 ниже), при выбранных фиксированных $J(\cdot)\in\mathbb{J}$ и $\Gamma(\cdot)\in\mathbb{G}^{m\times n}$, следует доопределить правую часть дифференциальных уравнений (3.3), как только какой-либо из знаменателей у $\beta(\bar P^-)$ обращается в 0. При этом невырожденность получаемых параллелотопозначных оценок не гарантируется. Во втором случае путем специального выбора значений $\Gamma(\cdot)$ можно добиться получения невырожденных параллелепипедозначных оценок на T (см. теорему 4).

Следуя первому пути, рассмотрим матричное дифференциальное включение

$$\frac{d\bar P^-}{dt} \in \tilde A(t)\bar P^- + \operatorname{diag}\nu(t,\bar P^-;J(t))\cdot\boldsymbol{B}(\bar P^-) + \bar R(t)\,\Gamma(t) \stackrel{\triangle}{=} \boldsymbol{F}(t,\bar P^-), \quad \bar P^-(0) = \bar P_0, \tag{3.9}$$

где значения $\nu(t,\bar P^-;J(t))$ определены в (3.3), а $\boldsymbol{B}(\bar P^-)$ — множество таких матриц $B(\bar P^-)$, у которых каждая строка $\mathrm{e}^{i\top}B$ $(i=1,\dots,n)$ удовлетворяет условиям:

$$\mathrm{e}^{i\top}B = \begin{cases} \mathrm{e}^{i\top}\bar P^-/(\mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}\bar P^-)\,\mathrm{e}),\ \text{если}\ \ \mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}\bar P^-)\,\mathrm{e}\ne 0, \\ \mathrm{e}^{i\top}\Omega,\ \text{если}\ \ \mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}\bar P^-)\,\mathrm{e} = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$
$$\Omega \text{ — произвольная матрица, удовлетворяющая } \Omega\in\mathcal{G}^{n\times n}.$$

Теорема 3. *При любых* $J(\cdot) \in \mathbb{J}$ *и* $\Gamma(\cdot) \in \mathbb{G}^{m\times n}$ *существует решение системы* (3.2), (3.9), (3.10)*, определенное на всем* T*, и все решения этой системы порождают параллелотопы* $\mathcal{P}^-(t)$*, которые оказываются внутренними оценками для* $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и продолжимость решений вытекает из известных результатов [18, с. 66, теорема 6], поскольку в произвольной замкнутой ограниченной области переменных t, $\bar{P}^-$ выполняются все условия этой теоремы: $\boldsymbol{F}(t,\bar{P}^-)$ — непустое замкнутое выпуклое множество; $\boldsymbol{F}$ измерима по t и ограничена в силу оценки типа (3.7), справедливой и для $\boldsymbol{F}$ из (3.9), (3.10); полунепрерывность $\boldsymbol{F}$ сверху по включению по переменной $\bar{P}^-$ вытекает из того, что при любом i имеем $\|\mathrm{e}^{i\top}\bar{P}^-\|_1/(\mathrm{e}^{i\top}(\mathrm{Abs}\,\bar{P}^-)\,\mathrm{e}) = 1$.

Доказательство того, что $\bar{P}^-(t)$ удовлетворяют включениям (1.8), проводится по схеме из доказательства теоремы 2 (см. также доказательство утверждения 1 из разд. 5). □

З а м е ч а н и е 6. Теорема 3 верна и в случае вырожденного параллелотопа $\mathcal{P}_0$.

З а м е ч а н и е 7. В частности, пусть $\mathcal{P}_0 = p_0$ — одноточечное множество (т. е. $\bar{P}_0 = 0$) и выполнено предположение 2. Тогда теорема 3 подсказывает следующий эвристический способ выбора функции $J(\cdot)$ на начальном промежутке оценивания. Допустимым значением правой части системы (3.9) при $t = 0$ является $\boldsymbol{F}(0,0) = \mathrm{diag}\,\nu_0$, где $(\nu_0)_i = \hat{a}_i^{j_i}(0)(\mathrm{Abs}\,p_0)_{j_i}$, $i = 1,\dots,n$. Если при этом $\mathrm{Abs}\,p_0 > 0$ и существует такая перестановка $J(0)$, что оказывается $\nu_0 > 0$, то представляется разумным положить $J(t) \equiv J(0)$, $t \in [0,\varepsilon]$, при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда, при условии $(n+1)$-кратной дифференцируемости $\bar{P}^-(t)$, $t \in [0,\varepsilon]$, получили бы с использованием формулы для производной определителя [3, с. 98, задача 987], что

$$\frac{d^k}{dt^k}\det \bar{P}^-|_{t=0} = 0,\ k = 1,\dots,n-1;\ \frac{d^n}{dt^n}\det \bar{P}^-|_{t=0} = C(n)\det(\frac{d}{dt}\bar{P}^-)|_{t=0} = C(n)\det(\mathrm{diag}\,\nu_0) > 0$$

(здесь $C(n)$ — положительная константа) и, следовательно, $\det P^-(t) > 0$ при значениях $t > 0$, достаточно близких к 0.

Следуя второму пути, в условиях теоремы 2 без ограничения общности можно считать, что $\det \bar{P}_0 > 0$ (в противном случае положительности легко добиться умножением какого-либо столбца $\bar{P}_0$ на -1).

Рассмотрим множество $\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{P}^-)$ матриц $\Gamma(t,\bar{P}^-)$, которые являются решениями оптимизационной задачи $\max_\Gamma \mathrm{tr}\,(\Xi(t,\bar{P}^-)\Gamma)$, $\|\Gamma\| \le 1$, и в силу (3.6) обеспечивают (локально) максимально возможную, за счет выбора значения $\Gamma = \Gamma(t,\bar{P}^-)$, скорость возрастания $\det \bar{P}^-$ в момент t при уже вычисленном и зафиксированном значении $\det \bar{P}^-(t)$. Множество $\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{P}^-)$ может быть выписано в следующем явном виде:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{P}^-) = \{\Gamma(t,\bar{P}^-) = \{\gamma_k^i(t,\bar{P}^-)\}\,|\,\gamma_k^i(t,\bar{P}^-) = \mathrm{sign}\,(\xi_i^k(t,\bar{P}^-))\,l_k^i,\\ k = 1,\dots,m,\ i = 1,\dots,n,\ L = \{l_k^i\} \in \boldsymbol{L}\},\end{gathered} \tag{3.11}$$

где $\Xi(t,\bar{P}^-) = \{\xi_i^k(t,\bar{P}^-)\} = (\bar{P}^-)^{-1}\bar{R}(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, а $\boldsymbol{L}$ — это множество матриц $L = \{l_k^i\} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} l_k^i \ge 0, \quad k = 1,\dots,m,\ i = 1,\dots,n;\\ l_k^i = 0 \text{ если } \ i \notin I_k(t,\bar{P}^-), \quad k = 1,\dots,m,\ i = 1,\dots,n;\\ \sum_{i=1}^n l_k^i = 1, \quad k = 1,\dots,m;\\ I_k(t,\bar{P}^-) = \mathrm{Argmax}\,\{|\xi_i^k(t,\bar{P}^-)|\,|\, i = 1,\dots,n\}, \quad k = 1,\dots,m,\end{gathered} \tag{3.12}$$

где функция $\mathrm{sign}\,z$ равна $-1, 0, 1$ для $z < 0$, $z = 0$, $z > 0$ соответственно.

Рассмотрим матричное дифференциальное включение

$$\frac{d\bar{P}^-}{dt} \in \tilde{A}(t)\bar{P}^- + \mathrm{diag}\,\nu(t,\bar{P}^-;J(t))\cdot B(\bar{P}^-) + \bar{R}(t)\,\boldsymbol{\Gamma}(t,\bar{P}^-), \quad \bar{P}^-(0) = \bar{P}_0, \tag{3.13}$$

где $\nu(t,\bar{P}^-;J)$ и $B(\bar{P}^-)$ — такие же, как в (3.3).

Теорема 4. *Пусть выполнены указанные выше условия и* $\mathcal{P}_0$ *— невырожденный параллелепипед с* $\det \bar{P}_0 > 0$. *Тогда при любой функции* $J(\cdot) \in \mathbb{J}$ *существует решение системы* (3.2), (3.11)–(3.13), *определенное на всем интервале* T, *и все решения этой системы порождают параллелотопы* $\mathcal{P}^-(t)$, *которые оказываются внутренними невырожденными параллелепипедозначными оценками для* $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$.

Доказательство проводится посредством рассуждений, подобных приведенным в [24, теорема 5.2]. □

Замечание 8. Можно продолжить "локальную оптимизацию" оценок и предложить следующий способ построения функции $J(\cdot)$. Введем произвольное конечное разбиение T^N отрезка T точками τ_k, например $\tau_k = kh_N$, $k = 0, \ldots, N$, $h_N = \theta N^{-1}$. В моменты $\tau \in T^N$ будем решать задачу $\max_J \varphi(\tau, \bar{P}^-(\tau); J)$, т. е. максимизировать значение выражения $\varphi(\tau, \bar{P}^-; J) = \sum_{i=1}^n \nu_i(\tau, \bar{P}^-; J) \,/\, (\mathrm{e}^{i\top}(\mathrm{Abs}\, \bar{P}^-)\, \mathrm{e})$ из (3.5), считая $\bar{P}^- = \bar{P}^-(\tau)$ уже найденным, по всевозможным перестановкам $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$. Теперь в качестве $J(\cdot)$ можно взять произвольную кусочно-постоянную функцию перестановок, построенную по правилу $J(t) \equiv J(\tau_k) \in \mathrm{Argmax}_J\, \varphi(\tau_k, \bar{P}^-(\tau_k); J)$, $\quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, $\quad k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Сравним смешанные и тривиальные оценки (параллелотопы $\mathcal{P}^-(t)$ и $\mathcal{P}^{0-}(t)$) по объему.

Предварительно докажем вспомогательную лемму о значениях вектора $\chi(\mathcal{P}) = \mathrm{Abs}\, p - (\mathrm{Abs}\, \bar{P})\, \mathrm{e}$ в зависимости от расположения параллелотопа $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$, а именно когда $\mathcal{P}$ либо содержит начало координат, либо содержится в одном из 2^n ортантов.

Напомним, что каждый (замкнутый) *ортант* может быть описан формулами $\bar{\mathcal{K}}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, s_i x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\}$, где $s \in \mathbb{R}^n$ — вектор с компонентами $s_i \in \{-1, 1\}$; соответствующий *открытый ортант* $\mathcal{K}(s) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, s_i x_i > 0,\, i = 1, \ldots, n\}$. Будем использовать также обозначения $\mathbb{R}^{n+}$ и $\bar{\mathbb{R}}^{n+}$ для *положительного* и *неотрицательного ортантов*: $\mathbb{R}^{n+} = \mathcal{K}(\mathrm{e}) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x > 0\}$ и $\bar{\mathbb{R}}^{n+} = \bar{\mathcal{K}}(\mathrm{e}) = \{x \in \mathbb{R}^n |\, x \geq 0\}$.

Лемма 2. *Если* $0 \in \mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$, *то* $\chi(\mathcal{P}) = \mathrm{Abs}\, p - (\mathrm{Abs}\, \bar{P})\, \mathrm{e} \leq 0$. *Если* $\mathcal{P}$ *принадлежит открытому (замкнутому) ортанту, то* $\chi(\mathcal{P}) > 0$ (*соответственно,* $\chi(\mathcal{P}) \geq 0$).

Доказательство первого утверждения можно найти в [9]. Докажем второе. Пусть $\mathcal{P}$ принадлежит некоторому ортанту $\mathcal{K}(s)$. Тогда для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\|_\infty \leq 1$, имеем $s_i p_i > -s_i \mathrm{e}^{i\top} \bar{P} \xi$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим произвольное $i_* \in \{1, \ldots, n\}$ и возьмем $\xi = \xi^*$, где ξ^* — вектор с компонентами $\xi^*_j = -s_{i_*} \mathrm{sign}\, \bar{P}^j_{i_*}$, $j = 1, \ldots, n$. С учетом того что $s_{i_*} p_{i_*} > 0$, имеем $|p_{i_*}| = s_{i_*} p_{i_*} > -s_{i_*} \mathrm{e}^{i_*\top} \bar{P} \xi^* = \mathrm{e}^{i_*\top} (\mathrm{Abs}\, \bar{P})\, \mathrm{e}$, т. е. $\chi_{i_*} > 0$. Ввиду произвольности i_* получаем $\chi > 0$. Аналогично для случая $\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{K}}(s)$. □

Следствие 1. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *В условиях теоремы* 2 *имеем* $\mathrm{vol}\, \mathcal{P}^-(t) = \mathrm{vol}\, \mathcal{P}^{0-}(t) \exp(\psi_1(t) + \psi_2(t))$, $t \in T_1$, *где* $\psi_1(t) = \int_0^t \varphi(\tau, \bar{P}^-(\tau); J(\tau)) d\tau$, $\psi_2(t) = \int_0^t \mathrm{tr}\, (\Xi(\tau, \bar{P}^-(\tau)) \Gamma(\tau)) d\tau$ *и использованы обозначения из* (3.5). *Поэтому при выполнении предположения* 2 *получаем* $\mathrm{vol}\, \mathcal{P}^-(t) \geq \mathrm{vol}\, \mathcal{P}^{0-}(t)$, *причем* $\mathrm{vol}\, \mathcal{P}^-(t) > \mathrm{vol}\, \mathcal{P}^{0-}(t)$ *тогда и только тогда, когда* $\psi_1(t) > 0$.

(2) *В условиях теоремы* 2, *если выполнено предположение* 2 *и оказывается, что* $\mathcal{P}^-(t) \ni 0$ *при всех* $t \in T$, *имеем* $\mathcal{P}^-(t) \equiv \mathcal{P}^{0-}(t)$, $t \in T$.

(3) *В условиях теоремы* 4 *имеем* $\mathrm{tr}\, ((\bar{P}^-)^{-1} \bar{R}(t) \Gamma) \geq 0$ *при выборе* $\Gamma \in \mathbf{\Gamma}(t, \bar{P}^-)$, $t \in T$, *и следовательно,* $\mathrm{vol}\, \mathcal{P}^-(t) \geq \mathrm{vol}\, \mathcal{P}^{0-}(t)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из леммы 1. Второе утверждение справедливо ввиду того, что оказывается $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$ (первое из этих тождеств вытекает из леммы 2 и формул (3.3), (3.5), второе — из формул (3.5)). Третье утверждение следует из неравенства $\psi_1(t) \geq 0$, справедливого при любой функции $J(\cdot) \in \mathbb{J}$, и формул (3.11), (3.12). □

Укажем некоторые условия, при которых "плохой" случай ($\mathcal{P}^-(t) \equiv \mathcal{P}^{0-}(t)$) не имеет места.

Следствие 2. *Пусть* $\mathcal{X}(t)$ *— множества достижимости системы* (1.1), (1.2), (1.4), (1.7) *и* $\mathcal{P}^{0-}(t)$ *— тривиальные внутренние оценки для* $\mathcal{X}(t)$. *Пусть* $\mathcal{P}_0$ *содержится в одном из открытых ортантов* $\mathcal{K}(s)$ *и* $\hat{A}(t_0) \neq 0$. *Тогда в условиях теоремы* 2 *при выполнении предположения* 2, *а также в условиях теоремы* 4 *существует такая функция* $J(\cdot) \in \mathbb{J}$, *что соответствующие смешанные внутренние оценки* $\mathcal{P}^{-}(t)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\operatorname{vol}\mathcal{P}^{-}(t) > \operatorname{vol}\mathcal{P}^{0-}(t), \quad t \in (0, \theta]. \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу непрерывности $\hat{A}(t)$ и $\hat{A}(t_0) \neq 0$ существует некоторый интервал $T_* = [0, \varepsilon]$, на котором хотя бы один элемент матрицы $\hat{A}(t)$ положителен; пусть это будет элемент $\hat{a}_{i_*}^{j_*} > 0$. Возьмем постоянную на T_* перестановку $J(t) = \{j_1, \ldots, j_n\}$, для которой $j_{i_*} = j_*$, $t \in T_*$. В силу непрерывности $p^-(t)$, $\bar{P}^-(t)$ можно считать, что $\mathcal{P}^-(t) \subset \mathcal{K}(s)$, $t \in T_*$ (иначе достаточно уменьшить ε). Тогда в силу формул из (3.3) и второго утверждения леммы 2 получаем $\nu_{i_*}(t, \bar{P}^-(t); J(t)) > 0$, $t \in T_*$, и в силу формул из следствия 1 имеем $\psi_1(t) > 0$, $\psi_2(t) \geq 0$ при $t \in (0, \theta]$, что приводит к (3.14). □

Выделим класс $\mathbb{P}$ “положительных” систем, для которых смешанные оценки $\mathcal{P}^-(t)$ могут оказаться особенно полезными с точки зрения обеспечения объемов, больших чем у $\mathcal{P}^{0-}(t)$.

Скажем, что *система относится к классу* $\mathbb{P}$, если она описывается соотношениями (1.1), (1.2), (1.3), (1.7) и выполнено

Предположение 3. *Выполняются три следующих условия:*

$$\underline{a}_i^j(t) \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \quad t \in T; \tag{3.15}$$

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^{n+}; \tag{3.16}$$

$$\mathcal{R}(t) \subset \bar{\mathbb{R}}^{n+}, \quad t \in T. \tag{3.17}$$

Следствие 3. *Пусть* $\mathcal{X}(t)$ *— множества достижимости системы из класса* $\mathbb{P}$ *и* $\hat{A}(t) \neq 0$ *при всех* $t \in T$. *Тогда в условиях теоремы* 2 *при выполнении предположения* 2, *а также в условиях теоремы* 4 *существует такая функция* $J(\cdot) \in \mathbb{J}$, *что для соответствующих оценок* $\mathcal{P}^-(t)$ *отношение* $\Psi(t) = \operatorname{vol}\mathcal{P}^-(t)/\operatorname{vol}\mathcal{P}^{0-}(t)$ *будет строго монотонно возрастать на* T.

Доказательство. Известно, что условия (3.15), $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}^{n+}$, $w(t) \in \bar{\mathbb{R}}^{n+}$, $t \in T$, гарантируют, что соответствующее решение системы (1.1), (1.3) не может выйти из $\bar{\mathbb{R}}^{n+}$ (см., например, [11, с.288]) и, значит, $\mathcal{X}(t) \subset \bar{\mathbb{R}}^{n+}$, $t \in T$. Несложно заметить, что при условии (3.16) имеем более строгое включение

$$\mathcal{X}(t) \subset \mathbb{R}^{n+}, \quad t \in T. \tag{3.18}$$

Действительно, по формуле Коши любое решение системы (1.1) может быть записано в виде $x(t) = X(t,0)x_0 + \int_0^t X(t,\tau)w(\tau)\,d\tau$. Условия (3.15) гарантируют, что $X(t,\tau) \geq 0$, поскольку (опять же в силу формулы Коши) любой элемент $X_{i_*}^{j_*}(t,\tau)$ матрицы $X(t,\tau)$ равен значению i_*-й компоненты функции $x^*(t)$, являющейся решением системы $d\,x^*/dt = Ax^*$, $x^*(\tau) = \mathrm{e}^{j_*}$, а условие (3.15), как уже было отмечено выше, обеспечивает $x^*(t) \geq 0$. Неравенства $X(t,\tau) \geq 0$ и $w(t) \geq 0$ приводят к тому, что $x(t) \geq X(t,0)x_0$. Но матрица $X(t,0)$ — неособенная и не может иметь нулевых строк. Поэтому, если $x_0 \in \mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^{n+}$, т. е. $x_0 > 0$, то $x(t) > 0$ и имеем (3.18).

Включение (3.18) гарантирует, что при любой функции $J(\cdot) \in \mathbb{J}$

$$\mathcal{P}^-(t) \subset \mathbb{R}^{n+}, \quad t \in T. \tag{3.19}$$

В силу формул из следствия 1 получаем $d\,\Psi(t)/dt \geq \exp(\psi_1(t))\,\varphi(t, \bar{P}^-(t); J(t))$. Используя (3.19), условие $\hat{A}(t) \neq 0$, $t \in T$, и рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве следствия 2, можно построить $J(\cdot) \in \mathbb{J}$ так, чтобы получилось $\varphi(t, \bar{P}^-(t); J(t)) > 0$, $t \in (0, \theta]$. □

Замечание 9. Формулы (3.3) позволяют учитывать в каждый момент времени не более n ненулевых элементов матрицы $\hat{A}(t)$ (не более n неопределенностей в коэффициентах матрицы $A(t)$) и, следовательно, при большем числе ненулевых элементов в $\hat{A}$ получать только довольно грубые оценки для множеств достижимости.

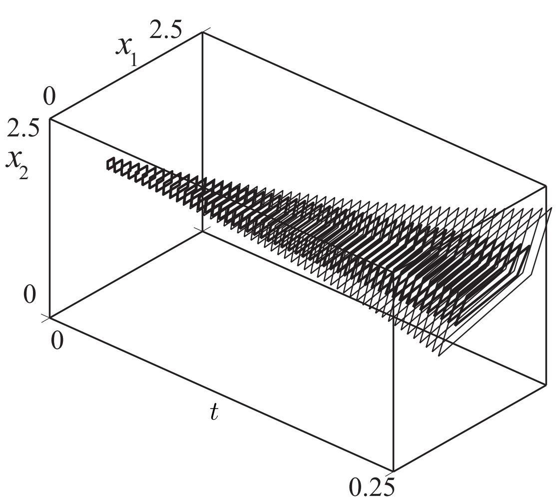
4. Результаты численного моделирования

Обратимся к примерам построения оценок. Расчеты были проведены с использованием аппроксимаций (3.1) по схеме Эйлера (в приведенных ниже примерах $N = 100$; на рисунках, фактически, показаны оценки для множеств $\mathcal{X}[k]$). Несколько других примеров можно найти в [9; 25]. Однако подчеркнем, что оценки могут быть найдены путем численного интегрирования полученных дифференциальных систем с использованием и других разностных аппроксимаций, в частности более высокого порядка точности.

П р и м е р 1. Пусть $\tilde{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$; $\hat{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathcal{R}(t) \equiv 0$; $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}((1, 1.5)^\top, I, (0.05, 0.05)^\top)$; $\theta = 0.25$. Система может быть интерпретирована как аналог модели вооружения двух государств Л. Ричардсона [16] (где x_i отражает оборонные расходы i-го государства; $a_i^j > 0$ можно трактовать как выбираемый i-м государством коэффициент пропорциональности относительно расходов x_j; $a_i^i < 0$ — как коэффициенты амортизации, связанные со старением вооружения). Заметим, что данная система относится к классу $\mathbb{P}$.

В левой части рис. 1 показана динамика внешних оценок (соответствующих функции $P(\cdot)$ типа (a) из разд. 2) и смешанных внутренних оценок для $\mathcal{X}[k]$. В правой части рис. 1 изображены $\mathcal{P}_0$ (штриховой линией) и оценки для множества достижимости $\mathcal{X}[N]$ в конечный момент времени: три внешние оценки, найденные в соответствии с тремя способами (a)–(c) выбора $P(\cdot)$ (показаны тонкими линиями), смешанная внутренняя и тривиальная внутренняя оценки (последняя показана штриховой линией). Множество достижимости принадлежит пересечению внешних оценок и содержит внутренние.

П р и м е р 2. Пусть $\tilde{A} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\hat{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathcal{R} \equiv \mathcal{P}\left(\begin{bmatrix} -0.6 \\ -0.4 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{bmatrix} \right)$; $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}((1, 1, 1)^\top, I, (0.2, 0.2, 0.2)^\top)$; $\theta = 0.4$. Система может быть интерпретирована как простая модель экологической системы [5, с. 112], описывающая динамику численности популяции микроорганизмов (клеток), имеющих три фазы развития и делящихся в последней фазе, производя от 2 до 8 потомков (элемент a_1^n матрицы A в (1.1) интерпретируется как среднее число потомков и может задаваться не обязательно целым числом [5, с. 15] — его величина зависит от соотношения микроорганизмов разной плодовитости). Аддитивные члены $w(t)$ описывают действие управления, направленного на уничтожение популяции путем введения некоторого препарата (пример соответствует случаю, когда чувствительность клеток разных фаз разви-



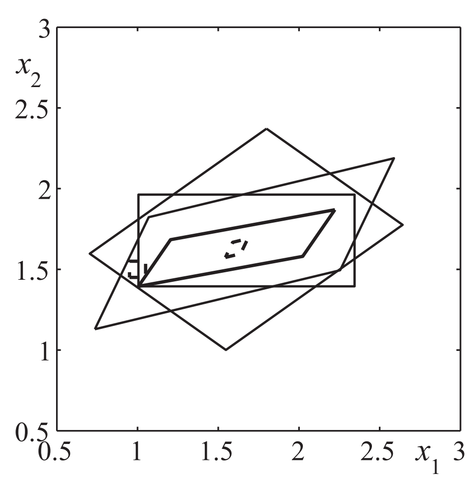


Рис. 1. Внешние и внутренние оценки для трубки достижимости и для $\mathcal{X}[N]$ в примере 1.

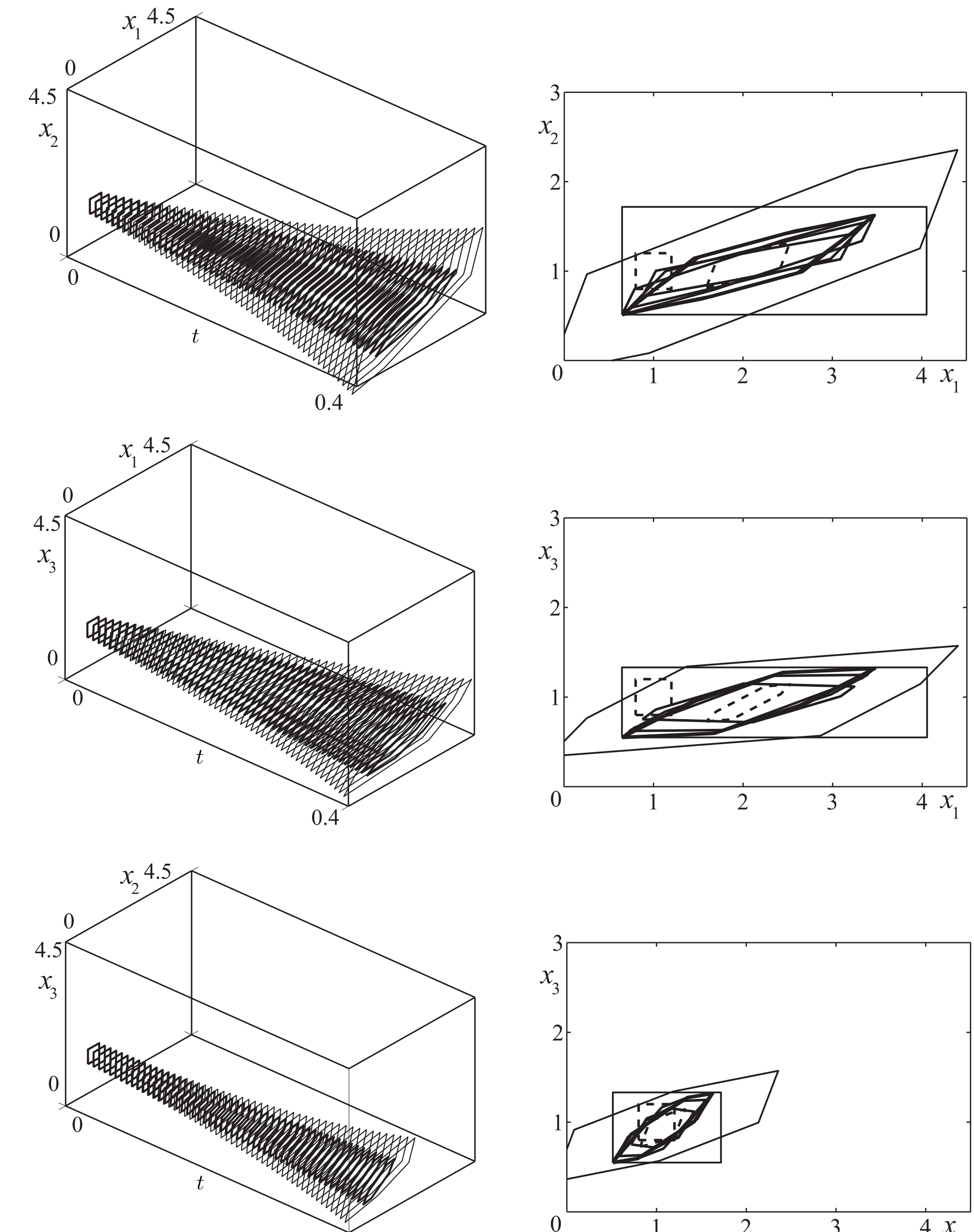


Рис. 2. Проекции на двумерные координатные плоскости внешних и внутренних оценок для трубки достижимости и для $\mathcal{X}[N]$ в примере 2.

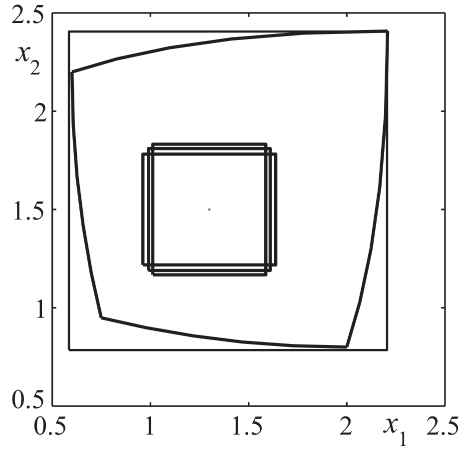


Рис. 3. Оценки для множества достижимости $\mathcal{X}(\theta)$ в примере 3.

тия к препарату разная).

Имеем $n = 3$ и трехмерные параллелотопы. Представим их проекции на три координатные плоскости. В левой части рис. 2 показана динамика проекций оценок для $\mathcal{X}[k]$: внешних (соответствующих функции $P(\cdot)$ типа (a) из разд. 2) и внутренних, соответствующих дискретному аналогу конструкций из теоремы 4 (подобному [24, пример 6.1]). В правых частях показаны проекции оценок для $\mathcal{X}[N]$: двух внешних оценок, построенных в соответствии с двумя способами (a), (b) выбора $P(\cdot)$; четырех внутренних, соответствующих четырем "квазистационарным" функциям $\Gamma(\cdot)$ (Γ взяты аналогично [24, пример 6.1]) и внутренней, соответствующей теореме 4 (тонкие, толстые и жирные линии соответственно). Штриховыми линиями показаны проекции начального множества $\mathcal{P}_0$, а также тривиальной внутренней оценки для $\mathcal{X}[N]$.

П р и м е р 3. Пусть $\tilde{A}(t) \equiv 0$; $\hat{A}(t) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathcal{R}(t) \equiv 0$; $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}((1.3, 1.5)^\top, I, 0)$; $\theta = 0.25$. Начальное множество здесь одноточечное. Построение внутренних оценок с использованием (3.1) и рекуррентных соотношений из [9;25] приводит к тривиальному результату (однозначной траектории). Поэтому применялись модифицированные рекуррентные соотношения (дискретные аналоги соотношений (3.9), (3.10)), в которых фигурируют элементарные оценки, описанные ниже в разд. 5. На рис. 3 показаны: граница множества достижимости $\mathcal{X}(\theta)$, построенная по формулам из [1]; внешняя оценка (фактически, три совпавшие внешние оценки, соответствующие замечанию 1); три внутренние оценки, соответствующие трем способам выбора $J(\cdot)$ ($J^1 \equiv \{1, 2\}$, $J^2 \equiv \{2, 1\}$ и функция J^3 найдена из условия локальной максимизации объема). Относительная малость внутренних оценок объясняется, в частности, замечанием 9.

Заметим, что предложенные оценки для множеств достижимости систем, рассматриваемых на длительном промежутке времени, могут оказаться довольно грубыми. С другой стороны, точные множества достижимости вычислить трудно, а оценки сравнительно легко вычислимы путем численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений; они могут дать полезную информацию и позволить учесть билинейную неопределенность (в частности, в примерах найденные смешанные внутренние оценки оказались больше тривиальных).

5. Приложение. Модифицированные внутренние оценки для $\mathcal{A} \circ \mathcal{P}$

Уравнения (3.2), (3.3) получены с использованием предложенных в [9; 25] элементарных внутренних оценок $\boldsymbol{P}^-_{J,\Gamma}(\mathcal{A} \circ \mathcal{P}) \subseteq \mathcal{A} \circ \mathcal{P}$ для результата умножения интервальной матрицы $\mathcal{A}$ на параллелотоп: $\mathcal{A} \circ \mathcal{P} \stackrel{\triangle}{=} \{y \in \mathbb{R}^n | \, y = Ax, \; A \in \mathcal{A}, \, x \in \mathcal{P}\}$. Можно предложить также следующий модифицированный способ построения внутренних оценок.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | \operatorname{Abs}(A - \tilde{A}) \le \hat{A}\}$ *и* $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ *— параллелотоп с* $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(возможно, вырожденный). Пусть* $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ *— произвольная перестановка чисел* $\{1, \ldots, n\}$ *и матрицы* $\Gamma, \Omega \in \mathcal{G}^{n\times n}$*, где множество* $\mathcal{G}^{n\times n}$ *введено в* (3.4). *Тогда параллелотоп* $\mathcal{P}^-$*, определяемый формулами*

$$\begin{gathered}\mathcal{P}^- = \boldsymbol{P}^-_{J,\Gamma,\Omega}(\mathcal{A}\circ\mathcal{P}) = \mathcal{P}[p^-, \bar{P}^-], \quad p^- = \tilde{A}p,\ \bar{P}^- = \tilde{A}\bar{P}\Gamma + (\operatorname{diag}\nu)B, \\ \nu_i = \hat{a}_i^{j_i}\,\eta_{j_i},\ i = 1, \ldots, n, \quad \eta = \max\{0, \operatorname{Abs} p - \operatorname{Abs}(\bar{P}\Gamma)\,\mathrm{e}\},\end{gathered} \tag{5.1}$$

где матрица $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *такова, что ее строки* $\mathrm{e}^{i\top}B$ *удовлетворяет условиям*

$$\mathrm{e}^{i\top}B = \begin{cases} \mathrm{e}^{i\top}\tilde{A}\bar{P}\Gamma/(\mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}(\tilde{A}\bar{P}\Gamma))\,\mathrm{e}), & \text{если } \mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}(\tilde{A}\bar{P}\Gamma))\,\mathrm{e} \ne 0, \\ \mathrm{e}^{i\top}\Omega, & \text{если } \mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}(\tilde{A}\bar{P}\Gamma))\,\mathrm{e} = 0, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.2}$$

оказывается внутренней оценкой для $\mathcal{A}\circ\mathcal{P}$*, т. е.* $\mathcal{P}^- \subseteq \mathcal{A}\circ\mathcal{P}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства включения $\mathcal{P}^- \subseteq \mathcal{A}\circ\mathcal{P}$ убедимся, что для любого $y \in \mathcal{P}^-$ (т. е. $y = p^- + \bar{P}^-\xi$, $\|\xi\|_\infty \le 1$) можно найти такие $A \in \mathcal{A}$ (т. е. $A = \tilde{A} + \Delta A$, $\operatorname{Abs}(\Delta A) \le \hat{A}$) и $x \in \mathcal{P}$ (т. е. $x = p + \bar{P}\zeta$, $\|\zeta\|_\infty \le 1$), что $y = Ax$, т. е.

$$\tilde{A}p + (\tilde{A}\bar{P}\Gamma + (\operatorname{diag}\nu)B)\xi = \tilde{A}p + \tilde{A}\bar{P}\zeta + \Delta A(p + \bar{P}\zeta). \tag{5.3}$$

Возьмем $\zeta = \Gamma\xi$; при этом имеем $\|\zeta\|_\infty \le \|\Gamma\|\,\|\xi\|_\infty \le 1$. Положим $\Delta A = (\operatorname{diag}\delta)D$, где $D = \{\mathrm{e}^{j_1}\cdots\mathrm{e}^{j_n}\}^\top$ — матрица, отвечающая перестановке J строк единичной матрицы, а компоненты вектора δ вычисляются по следующим формулам. Если для какого-либо i имеем $\nu_i = 0$, то положим $\delta_i = 0$. Если же $\nu_i > 0$, то в силу (5.1) $\eta_{j_i} > 0$ и $|p_{j_i}| > \mathrm{e}^{j_i\top}\operatorname{Abs}(\bar{P}\Gamma)\mathrm{e}$. Тогда $\mathrm{e}^{j_i\top}(p + \bar{P}\Gamma\xi) \ne 0$ и возьмем $\delta_i = \nu_i\,\mathrm{e}^{i\top}B\xi/(\mathrm{e}^{j_i\top}(p + \bar{P}\Gamma\xi))$. Равенство (5.3) обеспечено. Осталось проверить неравенства $|\delta_i| \le \hat{a}_i^{j_i}$, гарантирующие $\operatorname{Abs}(\Delta A) \le \hat{A}$. Для индексов i таких, что $\nu_i = 0$, это очевидно. Для остальных i (таких, что $\nu_i > 0$), имеем $|\delta_i| \le \hat{a}_i^{j_i}\,\eta_{j_i}\,\mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}B)\mathrm{e}/(|p_{j_i}| - \mathrm{e}^{j_i\top}(\operatorname{Abs}(\bar{P}\Gamma))\mathrm{e}) \le \hat{a}_i^{j_i}\mathrm{e}^{i\top}(\operatorname{Abs}B)\mathrm{e} \le \hat{a}_i^{j_i}$, поскольку для матрицы B из (5.2) $\|B\| \le 1$. □

Такой способ построения оценок позволяет при определенных условиях получать, в отличие от [9; 25], невырожденные оценки $\mathcal{P}^-$ при вырожденном $\mathcal{P}$ (например, при условиях, аналогичных указанным в замечании 7, полагая $\Gamma = \Omega = I$). Однако нужно отметить, что в случае одноточечного множества $\mathcal{P} = p = \mathcal{P}[p, 0]$ получающаяся при этом интервальная оценка $\mathcal{P}^-$ с $\bar{P}^- = \operatorname{diag}\{\hat{a}_i^{j_i}(\operatorname{Abs}p)_{j_i}\}$ оказывается, вообще говоря, меньше множества $\mathcal{A}\circ p$, которое, как следует из [21] с использованием формул из [8], является параллелепипедом следующего вида.

Утверждение 2. *Для одноточечного множества* $p \in \mathbb{R}^n$ *имеем* $\mathcal{A}\circ p = \mathcal{P}(\tilde{A}p, I, \hat{A}(\operatorname{Abs}p))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ащепков Л.Т., Лифантова С.В.** Выпуклость множества достижимости билинейной управляемой системы // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 24–28.
2. **Гусев М.И.** Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С.82–94.
3. **Демидович Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1972. 544 с.
4. **Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
5. **Заславский Б.Г., Полуэктов Р.А.** Управление экологическими системами. М.: Наука, 1988. 296 с.
6. **Кинёв А.Н., Рокитянский Д.Я., Черноусько Ф.Л.** Эллипсоидальные оценки фазового состояния линейных систем с параметрическими возмущениями и неопределенной матрицей наблюдений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 1. С. 5–13.

7. **Корноушенко Е.К.** Интервальные покоординатные оценки для множества достижимых состояний линейной стационарной системы. I– IV // Автоматика и телемеханика. 1980. № 5. С. 12–22; 1980. № 12. С. 10–17; 1982. № 10. С. 47–52; 1983. № 2. С. 81–87.
8. **Костоусова Е.К.** О внешних полиэдральных оценках для множеств достижимости систем с билинейной неопределенностью // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 4. С. 559–571.
9. **Костоусова Е.К.** О полиэдральных оценках множеств достижимости многошаговых систем с билинейной неопределенностью // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 49–60.
10. **Костоусова Е.К., Куржанский А.Б.** Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 19–27.
11. **Красносельский М.А.** Положительные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1962. 396с.
12. **Кунцевич В.М., Куржанский А.Б.** Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управления ими // Пробл. управления и информатики. 2010. № 1. С. 5–21.
13. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
14. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
15. **Лисин Д.В., Филиппова Т.Ф.** Об оценивании траекторных трубок дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 435–445.
16. **Никольский М.С.** Об управляемых вариантах модели Л. Ричардсона в политологии // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 121–128.
17. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 332 с.
18. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
19. **Черноусько Ф.Л.** Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей// Прикл. математика и механика. 1996. Т.60, вып. 6. С. 940–950.
20. **Шарый С.П.** Конечномерный интервальный анализ. 604 с. // Интервальный анализ и его приложения: [сайт]. URL: http://www.nsc.ru/interval/index.php?j=Library/InteBooks/index (дата обращения 13.09.2012).
21. **Barmish B.R., Sankaran J.** The propagation of parametric uncertainty via polytopes // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. Vol. AC-24, no. 2. P. 346–349.
22. **Digailova I.A., Kurzhanski A.B.** The joint model and state estimation problem under set-membership uncertainty: Proc. of the 15-th IFAC Congress, Barselona, 2002 // А.Б. Куржанский. Избр. тр. М: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 756 с. С. 182–193.
23. **Filippova T.F.** Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011. Suppl. Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. 8th AIMS Conference. P. 410–419.
24. **Kostousova E.K.** Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 2001. Vol. 14, no. 4. P. 267–310.
25. **Kostousova E.K.** On polyhedral estimates for trajectory tubes of dynamical discrete-time systems with multiplicative uncertainty // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011. Suppl. Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. 8th AIMS Conference. P. 864–873.
26. **Kurzhanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
27. **Nazin S.A., Polyak B.T.** Interval parameter estimation under model uncertainty // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 225–237.
28. Ellipsoidal parameter or state estimation under model uncertainty / B.T. Polyak, S.A. Nazin, C. Durieu, E. Walter // Automatica J. IFAC. 2004. Vol. 40, no. 7. P. 1171–1179.

Костоусова Елена Кирилловна
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: kek@imm.uran.ru.

Поступила 06.02.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518.86

МНОЖЕСТВО НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ НАИМЕНЬШЕЙ МЕРЫ МНОГОЧЛЕНОВ С НУЛЕВЫМ ВЗВЕШЕННЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ОТРЕЗКЕ[1]

С. В. Кузнецов, К. С. Тихановцева

Пусть $\mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ есть множество алгебраических многочленов p_n порядка n с действительными коэффициентами с нулевым средним взвешенным с ультрасферическим весом $\varphi^{(\alpha)}(t) = (1-t^2)^\alpha$ значением на отрезке $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1}\varphi^{(\alpha)}(t)p_n(t)dx = 0$. Изучается задача о наименьшем возможном значении $\inf\{\mu(p_n) : p_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})\}$ меры $\mu(p_n) = \int_{\mathcal{X}(p_n)}\varphi^{(\alpha)}(t)dt$ множества $\mathcal{X}(p_n) = \{t \in [-1,1] : p_n(t) \ge 0\}$ точек отрезка, в которых многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ является неотрицательным. В работе изучаются свойства экстремального многочлена этой задачи и приведено точное решение для случая многочленов третьей степени.

Ключевые слова: алгебраические многочлены, многочлены с нулевым взвешенным средним значением, ультрасферический вес.

S. V. Kuznetsov, K. S. Tikhanovtseva. Nonnegativity set of smallest measure for polynomials with zero weighted mean value on a closed interval.

Let $\mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ be the set of algebraic polynomials p_n of order n with real coefficients and zero weighted mean value with respect to the ultraspherical weight $\varphi^{(\alpha)}(t) = (1-t^2)^\alpha$ on the interval $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1}\varphi^{(\alpha)}(t)p_n(t)dx = 0$. We study the problem on the smallest possible value $\inf\{\mu(p_n) : p_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})\}$ of the measure $\mu(p_n) = \int_{\mathcal{X}(p_n)}\varphi^{(\alpha)}(t)dt$ of the set $\mathcal{X}(p_n) = \{t \in [-1,1] : p_n(t) \ge 0\}$ of points of the interval at which the polynomial $p_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ is nonnegative. In this paper, the properties of an extremal polynomial of this problem are studied and an exact solution is presented for the case of cubic polynomials.

Keywords: algebraic polynomials, polynomials with zero weighted mean value, ultraspherical weight.

1. Введение. Постановка задачи. Формулировка основных результатов

Предположим, что функции φ и ψ неотрицательны, суммируемы на отрезке $[-1,1]$ и отличны от 0 на множестве положительной меры из $[-1,1]$; такие функции называют весом. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\varphi)$ есть множество многочленов p с действительными коэффициентами степени точно $n \geqslant 1$, для которых выполняется условие

$$\int_{-1}^{1} p(t)\varphi(t)\,dt = 0. \tag{1.1}$$

Для многочлена $p \in \mathcal{P}_n$ введем множество

$$\mathcal{X}(p) = \{t \in [-1,1] :\ p(t) \geqslant 0\}$$

точек отрезка $[-1,1]$, в которых многочлен неотрицателен. Величина

$$\mu(p) = \int_{\mathcal{X}(p)} \psi(t)dt \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-31495), Министерства образования и науки РФ (Госзадание 1.1544.2011) и поддержке молодых ученых УрФУ в рамках реализации программы развития УрФУ.

является ψ-мерой множества $\mathcal{X}(p)$. Интерес представляет наименьшее значение этой меры, т. е. величина

$$\mu_n = \mu_n(\varphi,\psi) = \inf\{\mu(p):\ p\in\mathcal{P}_n\} = \inf_{p\in\mathcal{P}_n}\int\limits_{\mathcal{X}(p)}\psi(t)\,dt. \tag{1.3}$$

В 1987 г. А. Г. Бабенко [2] для единичных весов $\psi=\varphi\equiv 1$ нашел порядок поведения μ_n по n при $n\to\infty$. Десять лет спустя В. В. Арестов и В. Ю. Раевская [1] исследовали задачу (1.3) для $\psi\equiv 1$ и некоторого класса весов φ. Они доказали, что если вес φ положителен, непрерывен на $(-1,1)$ и удовлетворяет следующему условию: при любом $\theta\in(0,1)$ функции

$$\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(\theta t-1)},\qquad \frac{\varphi(1-t)}{\varphi(1-\theta t)}$$

не убывают по переменному t на интервале $(0,2)$, то множество положительности экстремального многочлена есть промежуток. Кроме того они получили точное значение величины μ_n и указали экстремальные многочлены в этом случае.

Отметим, что экстремальный многочлен задачи (1.3) обязательно существует (см. [1]). Действительно, многочлены из множества $\mathcal{P}_n$ можно описать следующим образом. Задаем произвольно коэффициенты $a_1,\ldots,a_n$ многочлена $p_n(t)=a_nt^n+\ldots+a_1t+a_0$, а затем находим (единственным образом) коэффициент a_0 из условия ортогональности $\displaystyle\int_{-1}^{1}p(t)\varphi(t)\,dt=0$. Функционал (1.2) является непрерывной функцией коэффициентов $a_1,\ldots,a_n$. К тому же значение функции (1.2) не изменяется при умножении многочлена на положительную константу, следовательно, в (1.3) можно рассматривать только те многочлены, которые удовлетворяют условию $|a_0|+\ldots+|a_n|=1$. Таким образом, задача (1.3) является задачей минимизации непрерывной функции на компактном множестве и, следовательно, нижняя грань достигается, т.е экстремальный многочлен существует.

Основными результатами работы являются следующие два утверждения, относящиеся к свойствам экстремального многочлена задачи (1.3) для ультрасферических весов

$$\psi(t)=\varphi(t)=(1-t^2)^\alpha \text{ при } \alpha>0. \tag{1.4}$$

Теорема 1. *В случае весов* (1.4) *экстремальный многочлен задачи* (1.3) *имеет не более трех промежутков неотрицательности на* $[-1,1]$.

Теорема 2. *В случае весов* (1.4) *экстремальный многочлен нечетной степени задачи* (1.3) *имеет не более двух промежутков неотрицательности на* $[-1,1]$.

Помимо того, в работе доказано следующее утверждение, содержащее точное решение задачи (1.3) для многочленов третьей степени.

Теорема 3. *Для* $n=3$ *в случае* $\psi(t)=\varphi(t)=(1-t^2)^\alpha$ *при* $\alpha\in(0,+\infty)$ *многочлен*

$$\overline{p}_3(t)=\left(t+\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right)^2\left(t-\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right)$$

является экстремальным многочленом задачи (1.3) *и*

$$\mu_3=\int\limits_{1/\sqrt{2\alpha+3}}^{1}(1-t^2)^\alpha dt. \tag{1.5}$$

Утверждение теоремы 3 для $\alpha = 0$ содержится в работе В.В. Арестова и В.Ю. Раевской [1]. В силу теоремы 3 при $n = 3$ экстремальный многочлен задачи (1.3) имеет лишь один промежуток неотрицательности.

Как ранее было доказано одним из авторов [4, теорема], при $n = 2$ для всех $\alpha > 0$ экстремальный многочлен задачи (1.3) имеет уже два промежутка неотрицательности. Точнее, при $n = 2$ справедливо следующее утверждение.

Теорема A [4, теорема]. *Для $n = 2$ в случае весов $\psi(t) = \varphi(t) = (1-t^2)^\alpha$ при $\alpha > 0$ любой экстремальный многочлен задачи* (1.3) *представляется в виде $p_2^*(t) = a(t-x^*)(t-y^*)$, где*

а) $a > 0$;

б) *корни x^* и y^* связаны соотношением $x^*y^* = -1/(2\alpha+3)$;*

в) $|x^*|$ *определяется единственным образом как точка минимума функции*

$$m(x) = \int\limits_{-1}^{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}} (1-t^2)^\alpha\,dt + \int\limits_{x}^{1} (1-t^2)^\alpha\,dt$$

на интервале

$$x \in \left(\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}\right).$$

2. Вспомогательные утверждения

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на несколько вспомогательных утверждений относительно экстремального многочлена задачи (1.3), в которых накладываются те или иные ограничения на веса φ и ψ.

Лемма 1. *Для произвольных весов φ и ψ среди экстремальных многочленов задачи* (1.3) *существует многочлен, все корни которого вещественные и лежат на отрезке* $[-1, 1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся вначале, что среди экстремальных многочленов существует многочлен, все корни которого вещественные. Предположим, что p_n — некоторый многочлен из $\mathcal{P}_n$ у которого не все корни вещественные. Такой многочлен представляется в виде $p_n(t) = p_{n-2}(t)(t^2 + at + b)$, где $a^2 - 4b < 0$. Условие $p_{n-2}(t)(t^2 + at + b) \in \mathcal{P}_n$ имеет вид

$$M_2 + aM_1 + bM_0 = 0. \tag{2.1}$$

Покажем, что найдется $c \in \mathbb{R}$ такое, что многочлен $q_n(t) = p_{n-2}(t)(t-c)^2$ тоже принадлежит множеству $\mathcal{P}_n$, т. е.

$$\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)p_{n-2}(t)(t-c)^2\,dt = 0. \tag{2.2}$$

Последнее соотношение можно представить в виде $M_2 - 2cM_1 + c^2M_0 = 0$, где

$$M_i = \int\limits_{-1}^{1} t^i p_{n-2}(t)\varphi(t)\,dt.$$

Предположим вначале, что $M_0 = 0$. Тогда $c = M_2/2M_1$ при $M_1 \ne 0$ и $c \in \mathbb{R}$ при $M_1 = 0$. Пусть теперь $M_0 \ne 0$. В этом случае мы получили квадратное уравнение относительно переменной c. Это уравнение имеет вещественные корни в том и только том случае, когда его дискриминант не отрицателен, т. е. когда

$$M_1^2 - M_2M_0 \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Предположим, что $M_0 > 0$. Тогда в силу неравенства $a^2 < 4b$ из (2.1) получаем неравенство

$$M_2 + aM_1 + \frac{a^2}{4}M_0 < 0. \tag{2.4}$$

Поскольку $M_0 > 0$, то ветви параболы

$$\chi(u) = M_2 + uM_1 + \frac{u^2}{4}M_0 \tag{2.5}$$

направлены вверх. Поскольку существует $a \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенству (2.4), то дискриминант многочлена χ положительный: $M_1^2 - M_2M_0 > 0$, что и требовалось показать. Предположим, что $M_0 < 0$. Тогда в силу свойства $a^2 < 4b$ из (2.1) следует неравенство

$$M_2 + aM_1 + \frac{a^2}{4}M_0 > 0. \tag{2.6}$$

Поскольку $M_0 < 0$, то ветви параболы (2.5) направлены вниз. Поскольку существует $a \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее неравенству (2.6), то дискриминант многочлена (2.5) положительный: $M_1^2 - M_2M_0 > 0$, мы вновь пришли к свойству (2.3). Следовательно, действительно существует такое $c \in \mathbb{R}$, что многочлен $q_n(t) = p_{n-2}(t)(t-c)^2$ удовлетворяет условию (2.2), т. е. принадлежит множеству $\mathcal{P}_n$. Многочлены p_n и q_n имеют одно и то же множество неотрицательности. Отсюда, в частности, следует, что среди экстремальных многочленов задачи (1.3) существует многочлен, все корни которого вещественные.

Пусть x — корень экстремального многочлена p_n, лежащий вне отрезка $[-1, 1]$. Поскольку многочлен p_n удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1} p_n(t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

то на интервале $(-1, 1)$ существует хотя бы одна точка y перемены знака этого многочлена. Следовательно, многочлен p_n можно представить в виде $p_n(t) = p_{n-2}(t)(t-x)(t-y)$. Рассмотрим многочлен $q_n(t) = q_n(t)_{a,b} = p_{n-2}(t)(t-a)(t-b)$ с двумя вещественными корнями a, b. Условие $q_n \in \mathcal{P}_n$ принимает вид $M_2 - (a+b)M_1 + abM_0 = 0$, где $M_i = \int_{-1}^{1} t^i p_{n-2}(t)\varphi(t)\,dt$. Перепишем это условие в виде $a(bM_0 - M_1) = bM_1 - M_2$. Если $yM_0 - M_1 = 0$, то и $yM_1 - M_2 = 0$. Поэтому при любом a многочлен q_n лежит во множестве $\mathcal{P}_n$. Взяв $a = -1$, если $x < -1$ и $a = 1$, если $x > 1$, получим такой многочлен q_n, что $\mu(q_n) = \mu(p_n)$. Следовательно, многочлен q_n является экстремальным. Если $yM_0 - M_1 \neq 0$, то a является непрерывной функцией от b в некоторой окрестности точки y. Поэтому можно выбрать $b > y$, если y является точкой перемены знака с “$-$” на “+’,’ и $b < y$, если y является точкой перемены знака с “+” на “$-$”, столь близкими к точке y, чтобы $a \notin [-1, 1]$. Для так выбранных a, b получим $\mu(q_n) < \mu(p_n)$, что противоречит экстремальности многочлена p_n.

Следовательно, $yM_0 - M_1 = 0$.

Лемма 1 доказана полностью.

Лемма 2. *Пусть φ и ψ — произвольные веса. Точка -1 не может лежать между двумя соседними корнями экстремального многочлена так, чтобы он принимал в этой точке положительные значения, и не может являться точкой перемены знака с “$-$” на “+”. Точка 1 не может лежать между двумя соседними корнями экстремального многочлена так, чтобы он принимал в этой точке положительные значения, и не может являться точкой перемены знака с “+” на “$-$”.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем от противного. Рассмотрим случай, когда точка -1 лежит между двумя соседними корнями экстремального многочлена так, чтобы он принимал в этой точке положительные значения, или является точкой перемены знака с "$-$" на "$+$". Пусть $x \leqslant -1 < y$ — корни экстремального многочлена p_n такие, что на интервале (x, y) он принимает положительные значения. Тогда p_n можно представить в виде $p_n(t) = p_{n-2}(t)(t-x)(t-y)$. Рассмотрим многочлен $q_n(t) = q_n(t)_{a,b} = p_{n-2}(t-a)(t-b)$ с двумя вещественными корнями a, b. Условие $q_n \in \mathcal{P}_n$ принимает вид $M_2 - (a+b)M_1 + abM_0 = 0$, где $M_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^i p_{n-2}(t)\varphi(t)\,dt$. Перепишем его в виде $a(bM_0 - M_1) = bM_1 - M_2$. Если $yM_0 - M_1 = 0$, то и $yM_1 - M_2 = 0$. В этом случае при любом a многочлен q_n лежит во множестве $\mathcal{P}_n$. Взяв $a \in (-1, y)$, мы получим многочлен q_n такой, что $\mu(q_n) < \mu(p_n)$. Последнее неравенство противоречит предположению о том, что многочлен p_n является экстремальным. Если $yM_0 - M_1 \neq 0$, то a является непрерывной функцией от b в некоторой окрестности точки y. Следовательно, мы можем выбрать такое $b \in (-1, y)$, чтобы выполнялось неравенство $a < b$. Для так выбранных a, b вновь получим многочлен q_n со свойством $\mu(q_n) < \mu(p_n)$, что противоречит экстремальности многочлена p_n.

Утверждение леммы относительно точки 1 доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть z есть точка перемены знака экстремального многочлена p_n задачи (1.3). Положим $\sigma(z) = 1$, если в точке z многочлен меняет знак с "$+$" на "$-$", и $\sigma(z) = -1$, если в точке z многочлен меняет знак с "$-$"на "$+$".

Лемма 3. *Предположим, что*

1) *при* $n \geq 2$ *экстремальный многочлен* p_n *задачи* (1.3) *имеет две точки перемены знака* x, y, $x \neq y$, *на интервале* $(-1, 1)$;

2) *вес* φ *произвольный, а вес* ψ *отличен от нуля и дифференцируем в точках* x *и* y.

Тогда имеет место неравенство

$$\sigma(x)\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^2} + \sigma(y)\frac{\psi'(y)}{\psi(y)^2} + \frac{2}{(y-x)}\left(\frac{\sigma(y)}{\psi(y)} - \frac{\sigma(x)}{\psi(x)}\right) \geq 0. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многочлен p_n можно записать в виде $p_n(t) = p_{n-2}(t)(t-x)(t-y)$, где p_{n-2} есть многочлен порядка $n-2$. Поскольку p_n меняет знак в точках x, y, то эти точки являются корнями нечетной кратности. Следовательно, многочлен p_{n-2} в некоторых окрестностях $\mathcal{O}(x)$ и $\mathcal{O}(y)$ точек x, y сохраняет знак; будем считать, что окрестности $\mathcal{O}(x)$ и $\mathcal{O}(y)$ между собой не пересекаются и лежат в интервале I. Уточним, что если в точке x или y многочлен p_n меняет знак с "$+$" на "$-$", то многочлен p_{n-2} в окрестности этой точки неположительный, а если p_n меняет знак с "$-$" на "$+$", то многочлен p_{n-2} в окрестности точки неотрицательный. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$.

Рассмотрим многочлен

$$q_n(t) = p_{n-2}(t)(t-a)(t-b) \tag{2.8}$$

с двумя вещественными корнями $a \in \mathcal{O}(x)$, $b \in \mathcal{O}(y)$ Положим

$$f(a,b) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t) q_n(t) dt = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t) p_{n-2}(t)(t-a)(t-b) dt = M_2 - (a+b)M_1 + abM_0$$

где

$$M_i = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(t) p_{n-2}(t) t^i dt.$$

Наложим на параметры a, b условие, чтобы многочлен (2.8) принадлежал множеству $\mathcal{P}_n$, т. е. потребуем, чтобы

$$f(a,b) = 0. \tag{2.9}$$

Отметим, что соотношение (2.9) не может выполняться тождественно для всех $a \in \mathcal{O}(x)$, $b \in \mathcal{O}(y)$, т. е. хотя бы один из коэффициентов M_i не равен нулю. Действительно, в противном случае для всех $a \in \mathcal{O}(x)$, $b \in \mathcal{O}(y)$ многочлен q_n принадлежал бы множеству $\mathcal{P}_n$. Будем называть пару (a, b) нетривиальной, если $a \neq x$ или $b \neq y$. Возможны четыре случая смены знака многочлена p_n в точках x и y. Во всех четырех случаях можно выбрать нетривиальную пару (a, b), $a \in \mathcal{O}(x), b \in \mathcal{O}(y)$ так, чтобы у многочлена (2.8) множество неотрицательности было меньше, чем у p_n; к примеру, если знак многочлена в обеих точках x, y меняется с "+" на "−", то нужно взять $a \leq x, b \leq y$. Таким образом, во всех четырех случаях получили бы многочлен q_n со свойством $\mu(q_n) < \mu(p_n)$, что противоречит экстремальности многочлена p_n. Так что, в самом деле, соотношение (2.9) не может выполняться тождественно для $a \in \mathcal{O}(x)$, $b \in \mathcal{O}(y)$.

Обозначим через $\mu(a, b)$ величину $\mu(q_n)$, определенную формулой (1.2) для многочлена (2.8). С помощью характеристики σ эту функцию можно записать в виде

$$\mu(a, b) = K + \sigma(x) \int_x^a \psi(t)dt + \sigma(y) \int_y^b \psi(t)dt, \qquad K = \int_{\mathcal{X}(p_n)} \psi(t)dt.$$

Рассмотрим задачу на (условный) минимум функции $\mu(a, b)$ двух переменных a, b при условии (2.9). В точке (x, y) эта задача имеет глобальный (условный) минимум. Для исследования этой задачи применим метод неопределенных множителей Лагранжа.

Убедимся, что $f'_a(x, y) \neq 0$. Действительно, в противном случае функция $f(a, y)$ не зависит от a и имеет значение $f(a, y) = f(x, y) = 0$. Но из этого следует, что при $b = y$ и любом значении параметра a многочлен $p_{n-2}(t)(t-a)(t-b)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}_n$, однако, как мы только что видели, это невозможно. Таким образом, $f'_a(x, y) \neq 0$ и мы имеем право применять метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим функцию Лагранжа сформулированной задачи $L(a, b) = \mu(a, b) + \lambda f(a, b)$, где λ — множитель Лагранжа. Имеем

$$L(a, b) = K + \sigma(x) \int_x^a \psi(t)dt + \sigma(y) \int_y^b \psi(t)dt + \lambda(M_2 - (a + b)M_1 + abM_0). \tag{2.10}$$

В силу принципа Лагранжа существует значение параметра λ такое, что точка (x, y) будет являться стационарной точкой функции (2.10). Следовательно, для параметров x, y и λ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sigma(x)\psi(x) + \lambda(yM_0 - M_1) = 0, \\ \sigma(y)\psi(y) + \lambda(xM_0 - M_1) = 0, \\ M_2 - (x + y)M_1 + xyM_0 = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Более того, второй дифференциал функции Лагранжа (2.10) в точке (x, y) (при выполнении условий (2.11)) неотрицателен:

$$d^2L(x, y) = \sigma(x)\psi'(x)(dx)^2 + \sigma(y)\psi'(y)(dy)^2 + 2\lambda M_0 dxdy \geq 0. \tag{2.12}$$

Преобразуем выражение второго дифференциала. Возьмем дифференциал от третьего уравнения системы (2.11): $(-M_1 + yM_0)dx + (-M_1 + xM_0)dy = 0$. Отсюда и из первых двух уравнений системы находим

$$dy = -\frac{\sigma(x)\psi(x)}{\sigma(y)\psi(y)} dx. \tag{2.13}$$

Вычитая из первого уравнения системы (2.11) второе, получаем

$$\lambda M_0 = \frac{\sigma(y)\psi(y) - \sigma(x)\psi(x)}{y - x}. \tag{2.14}$$

Подставим в левую часть неравенства (2.12) значения (2.13) и (2.14) и сократим на $(dx)^2$ и $\psi(x)^2$. В результате получим неравенство (2.7). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть φ — произвольный вес, а для веса ψ функция $1/\psi$ дифференцируема и ее производная строго выпукла вниз на некотором интервале $I \subseteq (-1, 1)$. Тогда экстремальный многочлен задачи* (1.3) *имеет на I не более одной перемены знака с "+" на "−".*

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому будем считать, что $n \geq 2$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что экстремальный многочлен p_n задачи (1.3) имеет на I, по крайней мере, две точки перемены знака с "+" на "−". Обозначим эти точки соответственно через x и y. В силу леммы 3 для пары точек x, y справедливо неравенство

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^2} + \frac{\psi'(y)}{\psi(y)^2} + \frac{2}{(y-x)}\left(\frac{1}{\psi(y)} - \frac{1}{\psi(x)}\right) \geq 0. \tag{2.15}$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что в условиях леммы на самом деле имеет место обратное неравенство. Сделаем замену $z = 1/\psi$. Неравенство, обратное (2.15), можно записать в виде

$$\frac{z'(x) + z'(y)}{2} - \frac{z(y) - z(x)}{y - x} > 0. \tag{2.16}$$

В силу второго условия леммы функция z' строго выпукла вниз на интервале I. Поэтому

$$z'(t) < z'(x)\frac{y-t}{y-x} + z'(y)\frac{t-x}{y-x}, \quad t \in (x, y).$$

А отсюда следует неравенство

$$(y-x)\frac{z'(x) + z'(y)}{2} > \int\limits_x^y z'(t)dt = z(y) - z(x),$$

эквивалентное (2.16). Лемма 4 доказана.

Следующее утверждение является следствием леммы 4 для случая четных весов.

Лемма 5. *Предположим, что веса φ и ψ четные, для веса ψ функция $1/\psi$ дифференцируема и ее производная строго выпукла вниз на интервале* $(0, 1)$. *Тогда экстремальный многочлен задачи* (1.3) *имеет не более четырех промежутков неотрицательности на всем интервале* $(-1, 1)$. *Причем если имеется четыре промежутка неотрицательности, то у экстремального многочлена найдутся четыре точки перемены знака $x_1 < y_1 \leqslant 0 \leqslant x_2 < y_2$, $y_1 < x_2$, такие что на отрезках $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$ он принимает неотрицательные значения.*

Доказательство. В силу леммы 4 экстремальный многочлен задачи (1.3) имеет на $(0, 1)$ не более одной перемены знака с "+" на "−" . Отсюда следует, что на $(0, 1)$ существует не более двух промежутков неотрицательности экстремального многочлена. По предположению леммы оба веса задачи четные. Поэтому если $p(t)$ — экстремальный многочлен задачи (1.3), то и $p(-t)$ тоже является экстремальным. Следовательно, на $(0, 1)$ существует не более двух промежутков неотрицательности многочлена $p(-t)$ или, то же самое, у многочлена p на $(-1, 0)$ существует не более двух промежутков неотрицательности и не более одной перемены знака с "−" на "+" . Таким образом, экстремальный многочлен p имеет не более четырех промежутков неотрицательности на всем интервале $(-1, 1)$.

Пусть экстремальный многочлен задачи (1.3) имеет 4 промежутка неотрицательности. Тогда на $(-1, 1)$ он имеет не менее 3 точек перемены знака с "+" на "−" и не менее 3 точек перемены знака с "−" на "+". В силу леммы 4 на $(0, 1)$ имеется не более одной точки перемены знака с "+" на "−". Поэтому на $(-1, 0]$ имеется не менее двух таких точек. Следовательно, на

$(-1,0]$ найдутся такие точки перемены знака $x_1 < y_1 \leqslant 0$ экстремального многочлена, что на отрезке $[x_1, y_1]$ он принимает только неотрицательные значения. Из того что на $(-1,0)$ имеется не более одной точки перемены знака с "$-$" на "$+$", следует, что на $[0,1)$ имеется не менее двух таких точек. А потому на $[0,1)$ найдутся такие точки перемены знака $0 \leqslant x_2 < y_2$ экстремального многочлена, что на отрезке $[x_2, y_2]$ он принимает только неотрицательные значения. Лемма доказана.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Утверждение этой теоремы для случая $1 \le n \le 4$ очевидно. Поэтому будем предполагать, что $n \ge 5$. Несложно убедиться в том, что производная функции $(1-t^2)^{-\alpha}$ выпукла вниз на $(0,1)$. Поэтому в силу леммы 5 экстремальный многочлен задачи (1.3) для весов (1.4) имеет не более четырех промежутков неотрицательности на всем интервале $(-1,1)$. Покажем, что экстремальный многочлен не может иметь четыре промежутка неотрицательности на $(-1,1)$.

Будем рассуждать от противного. Пусть экстремальный многочлен p_n задачи (1.3) имеет 4 промежутка неотрицательности. В силу леммы 5 в этом случае существуют точки перемены знака $x_1 < y_1 \leqslant 0 \leqslant x_2 < y_2,\ y_1 \neq x_2$, этого многочлена такие, что на отрезках $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$ многочлен p_n принимает только неотрицательные значения.

В точке x_1 многочлен p_n будет менять знак с "$-$" на "$+$", а в точке y_2 — с "$+$" на "$-$". Поэтому согласно лемме 3 имеет место неравенство

$$-\frac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)^2} + \frac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)^2} + 2\frac{\psi(x_1)+\psi(y_2)}{(y_2-x_1)\psi(x_1)\psi(y_2)} \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Многочлен p_n в точке y_1 будет менять знак с "$+$" на "$-$", а в точке x_2 с "$-$" на "$+$". Поэтому в силу леммы 3 для этой пары точек имеет место неравенство

$$-\frac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)^2} + \frac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)^2} + 2\frac{\psi(y_1)+\psi(x_2)}{(x_2-y_1)\psi(y_1)\psi(x_2)} \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Перегруппировав слагаемые в (3.1) и (3.2), получим следующую систему двух неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\psi(x_1)}\left(\dfrac{2}{y_2-x_1} - \dfrac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)}\right) + \dfrac{1}{\psi(y_2)}\left(\dfrac{2}{y_2-x_1} + \dfrac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)}\right) \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{\psi(y_1)}\left(\dfrac{2}{x_2-y_1} - \dfrac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)}\right) + \dfrac{1}{\psi(x_2)}\left(\dfrac{2}{x_2-y_1} + \dfrac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)}\right) \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Для доказательства теоремы достаточно доказать несовместность этой системы. Будем рассуждать от противного. Допустим, что система (3.3) совместна. Функция $\psi'(t)/\psi(t)$ убывает по $t \in (-1,1)$, так как

$$\left(\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}\right)' = -\frac{2\alpha(t^2+1)}{(1-t^2)^2} < 0.$$

Очевидно, что $2/(y_2-x_1) < 2/(x_2-y_1)$. Поэтому выполнены соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y_2-x_1} - \dfrac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} < \dfrac{2}{x_2-y_1} - \dfrac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)}, \\ \dfrac{2}{y_2-x_1} + \dfrac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} < \dfrac{2}{x_2-y_1} + \dfrac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Рассмотрим все случаи расположения левой и правой частей первого неравенства в (3.4) относительно нуля. Обсудим вначале случай

$$\frac{2}{y_2-x_1} - \frac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} \leqslant 0 \leqslant \frac{2}{x_2-y_1} - \frac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)}.$$

Тогда в силу первого неравенства в (3.3) получаем $2/(y_2 - x_1)+\psi'(y_2)/\psi(y_2) \geqslant 0$. Теперь второе соотношение (3.4) влечет $2/(x_2 - y_1) + \psi'(x_2)/\psi(x_2) > 0$. Отсюда в силу второго неравенства в (3.3) получаем, что $2/(x_2 - y_1) - \psi'(y_1)/\psi(y_1) < 0$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь

$$\frac{2}{x_2 - y_1} - \frac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)} \leqslant 0.$$

Тогда тем более

$$\frac{2}{y_2 - x_1} - \frac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} < 0.$$

Поскольку выполнено первое неравенство в (3.3), то $2/(y_2 - x_1) + \psi'(y_2)/\psi(y_2) > 0$. Следовательно, и

$$\frac{2}{x_2 - y_1} + \frac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)} > 0.$$

Таким образом, справедлива система соотношений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y_2 - x_1} - \dfrac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} < \dfrac{2}{x_2 - y_1} - \dfrac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)} \leqslant 0, \\ 0 \leqslant \dfrac{2}{y_2 - x_1} + \dfrac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} < \dfrac{2}{x_2 - y_1} + \dfrac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Из неравенств $2/(x_2 - y_1) - \psi'(y_1)/\psi(y_1) \leqslant 0$ и $0 \leqslant 2/(y_2 - x_1) + \psi'(y_2)/\psi(y_2)$ системы (3.5) находим

$$-\frac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} \leqslant \frac{2}{y_2 - x_1} < \frac{2}{x_2 - y_1} \leqslant \frac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)}. \tag{3.6}$$

Положим $\widetilde{y_1} = -y_1$, $\widetilde{x_1} = -x_1$; имеем $0 \leqslant \widetilde{y_1} < \widetilde{x_1}$. В силу нечетности отношения ψ'/ψ из (3.6) следует, что $\psi'(\widetilde{y_1})/\psi(\widetilde{y_1}) < \psi'(y_2)/\psi(y_2)$. Так как функция $\psi'(t)/\psi(t)$ убывает по t, то делаем вывод, что $y_2 < \widetilde{y_1}$. Таким образом,

$$0 \leqslant x_2 < y_2 < \widetilde{y_1} < \widetilde{x_1}. \tag{3.7}$$

В силу первой строчки системы (3.5) и неравенства $\psi(y_1) > \psi(x_1)$ имеем

$$\frac{1}{\psi(x_1)} \left(\frac{2}{y_2 - x_1} - \frac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} \right) < \frac{1}{\psi(y_1)} \left(\frac{2}{x_2 - y_1} - \frac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)} \right).$$

Отсюда в силу системы (3.3) и первой строчки неравенств системы (3.5) получаем

$$\frac{1}{\psi(y_2)} \left(\frac{2}{y_2 - x_1} + \frac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} \right) > \frac{1}{\psi(x_2)} \left(\frac{2}{x_2 - y_1} + \frac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)} \right).$$

Перепишем последнее неравенство, используя обозначения $\widetilde{y_1}$, $\widetilde{x_1}$:

$$\frac{1}{\psi(y_2)} \left(\frac{2}{y_2 + \widetilde{x_1}} + \frac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} \right) > \frac{1}{\psi(x_2)} \left(\frac{2}{x_2 + \widetilde{y_1}} + \frac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)} \right). \tag{3.8}$$

Рассмотрим поведение функции

$$A(t, \kappa) = \frac{1}{\psi(t)} \left(\frac{2}{t + \kappa} + \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \right)$$

по $t \in [0, 1)$ при $\kappa > 0$. Для производной этой функции по t справедлива формула

$$A'_t(t, \kappa) = \frac{1}{(1 - t^2)^\alpha} \left(\frac{4\alpha t}{(1 - t^2)(t + \kappa)} - \frac{4\alpha^2 t^2}{(1 - t^2)^2} - \frac{2}{(t + \kappa)^2} - \frac{2\alpha(t^2 + 1)}{(1 - t^2)^2} \right).$$

В этой формуле

$$\frac{4\alpha^2 t^2}{(1-t^2)^2} + \frac{1}{(t+\kappa)^2} - \frac{4\alpha t}{(1-t^2)(t+\kappa)} = \left(\frac{2\alpha t}{1-t^2} - \frac{1}{t+\kappa}\right)^2 \geqslant 0,$$

поэтому $A'_t(t,\kappa) < 0$. Так как функция $A(t,\kappa)$ убывает по t, то $A(x_2,\widetilde{y_1}) > A(y_2,\widetilde{y_1})$ Отсюда в силу неравенства (3.8) получаем $A(y_2,\widetilde{x_1}) > A(y_2,\widetilde{y_1})$ Следовательно, $1/(y_2+\widetilde{x_1}) > 1(y_2+\widetilde{y_1})$, а потому, $\widetilde{y_1} > \widetilde{x_1}$. Получили противоречие с (3.7).

Пусть теперь

$$\frac{2}{y_2-x_1} - \frac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} \geqslant 0.$$

Тогда

$$\frac{2}{x_2-y_1} - \frac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)} > 0,$$

а поскольку выполнено второе неравенство в (3.3), то $2/(x_2-y_1) + \psi'(x_2)/\psi(x_2) < 0$. Следовательно, и

$$\frac{2}{y_2-x_1} + \frac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} < 0.$$

Таким образом, справедлива система

$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{2}{y_2-x_1} - \dfrac{\psi'(x_1)}{\psi(x_1)} < \dfrac{2}{x_2-y_1} - \dfrac{\psi'(y_1)}{\psi(y_1)}, \\ \dfrac{2}{y_2-x_1} + \dfrac{\psi'(y_2)}{\psi(y_2)} < \dfrac{2}{x_2-y_1} + \dfrac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)} \leqslant 0. \end{cases}$$

Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим, что любой многочлен нечетной степени имеет нечетное количество точек перемены знака. Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть экстремальный многочлен p_n нечетной степени n имеет, по крайней мере, три промежутка неотрицательности на $(-1,1)$. Покажем, что в этом случае он имеет пять точек перемены знака на $(-1,1)$. Ясно, что если многочлен имеет три промежутка неотрицательности на интервале, то он имеет, по крайней мере, 4 точки перемены знака на этом интервале, а именно две точки перемены знака с "+" на "−" и две точки перемены знака с "−" на "+". Причем крайняя левая из этих четырех точек является точкой перемены знака с "+" на "−"; обозначим эту точку через y. Крайняя правая — с "−" на "+"; обозначим эту точку через x. Поскольку многочлен имеет нечетное количество точек перемены знака, то либо существует точка x_1 перемены знака с "−" на "+", лежащая левее y, либо существует точка y_1 перемены знака с "+" на "−", лежащая правее x. Для определенности будем предполагать, что существует точка x_1, лежащая левее y; второй случай рассматривается аналогично. Если точка x_1 лежит на интервале $(-1,1)$, тогда мы уже нашли пять точек перемены знака на этом интервале. Случай $x_1 \leqslant -1$ в силу леммы 2 невозможен.

Таким образом, многочлен p_n в трех точках меняет знак с "−" на "+" и в двух — с "+" на "−". В силу леммы 4 экстремальный многочлен задачи (1.3) имеет на $(0,1)$ не более одной перемены знака с "+" на "−". Поэтому на $(-1,0]$ найдутся точки перемены знака $x_1 < y_1 \leqslant 0$ многочлена p_n такие, что на отрезке $[x_1,y_1]$ он принимает неотрицательные значения. На $(-1,0)$ лежит не более одной точки перемены знака с "−" на "+", поэтому на $[0,1)$ таких точек (по крайней мере) две. Следовательно, найдутся точки перемены знака $0 \leqslant x_2 < y_2$ этого многочлена такие, что на отрезке $[x_2,y_2]$ он принимает только неотрицательные значения. При доказательстве теоремы 1 было показано, что такая ситуация невозможна. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

В работе [4] при обосновании теоремы, названной выше теоремой A, было показано, что для $\alpha > 0$ и
$$x \in \left[\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right]$$
справедливо неравенство [4, неравенство (2.3)]
$$\int\limits_0^x (1-t^2)^\alpha dt > \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^1 (1-t^2)^\alpha dt.$$
Ниже будет использоваться частный случай этого неравенства при $\alpha = 1/\sqrt{2\alpha+3}$. Для удобства ссылок приведем его в виде следующего утверждения.

Лемма 6. *При всех $\alpha \in [0, +\infty)$ справедливо неравенство*
$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}} (1-t^2)^\alpha dt \geqslant \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}}^1 (1-t^2)^\alpha dt. \tag{4.1}$$

Приступим к доказательству теоремы 3. На множестве многочленов третьей степени имеет место квадратурная формула Гаусса
$$\int\limits_{-1}^1 p_3(t)(1-t^2)^\alpha dt = A_\alpha \left(p_3\left(x_\alpha\right) + p_3\left(-x_\alpha\right)\right), \tag{4.2}$$
в которой
$$x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}, \qquad A_\alpha = \int\limits_{-1}^1 (1-t^2)^\alpha \frac{t+x_\alpha}{2x_\alpha} dt; \tag{4.3}$$
узлы x_α и $-x_\alpha$ являются корнями ультрасферического многочлена второй степени, ортогонального с весом $(1-t^2)^\alpha$ всем многочленам меньших степеней (см. [3, гл. 7, с. 95–101]).

Рассмотрим многочлен
$$\overline{p}_3(t) = \left(t + \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right)^2 \left(t - \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right).$$
Из формулы Гаусса (4.2) следует, что для многочлена $\overline{p}_3$ выполняется свойство (1.1) с весом $\varphi(t) = (1-t^2)^\alpha$, т. е. $\overline{p}_3 \in \mathcal{P}_3$. Нам предстоит доказать, что многочлен $\overline{p}_3$ является экстремальным. Отметим, что множество неотрицательности многочлена $\overline{p}_3$ есть отрезок $[x_\alpha, 1]$.

Пусть p_3^* есть экстремальный многочлен задачи (1.3) в случае (1.4) на множестве многочленов $\mathcal{P}_3$ третьей степени. В силу леммы 1 можно считать, что все три корня x, y, z многочлена p_3^* лежат на отрезке $[-1, 1]$. Наряду с $p_3^*(t)$ многочлен $p_3^*(-t)$ также будет экстремальным. Поэтому можно считать, что старший коэффициент экстремального многочлена p_3^* положительный и даже, более того, что он равен 1. Итак, $p_3^*(t) = (t-x)(t-y)(t-z)$. Для многочлена p_3^* выполняется соотношение
$$\int\limits_{-1}^1 p_3^*(t)(1-t^2)^\alpha dt = 0. \tag{4.4}$$

Это соотношение можно записать в виде

$$M_3 - (x+y+z)M_2 + (xy+yz+xz)M_1 - xyzM_0 = 0, \tag{4.5}$$

где

$$M_k = \int_{-1}^{1} t^k (1-t^2)^\alpha dt, \quad 0 \le k \le 3. \tag{4.6}$$

В интегралах (4.6) при $k=1$ и $k=3$ подинтегральная функций нечетная, а следовательно, $M_3 = M_1 = 0$. Нетрудно убедиться (см. также [4]), что $M_2/M_0 = 1/(2\alpha+3)$. Подставив эти соотношения для M_k в (4.5), получим

$$(x+y+z) + xyz(2\alpha+3) = 0. \tag{4.7}$$

Отсюда видно, что либо $y = z = x = 0$, либо у многочлена p_3^* существуют корни разных знаков. Многочлен $p_3(t) = t^3$ не может быть экстремальным, поскольку множество $\mathcal{X}(\overline{p}_3) = [x_\alpha, 1]$ строго вложено во множество $\mathcal{X}(p_3) = [0,1]$. Так что, действительно, у многочлена p_3^* имеются корни разных знаков. Без ограничения общности будем считать, что $y \leqslant z \leqslant x$ и, значит, $-1 \le y < 0$, $0 < x \le 1$.

В силу (4.4) и (4.2) для многочлена p_3^* справедливо соотношение

$$\int_{-1}^{1} p_3^*(t)(1-t^2)^\alpha dt = A_\alpha \left(p_3\left(x_\alpha\right) + p_3\left(-x_\alpha\right)\right) = 0, \tag{4.8}$$

Поскольку $M_1 = 0$, то в силу (4.3) имеем $A_\alpha = M_0/2 > 0$. Поэтому из (4.8) следует свойство

$$p_3^*(x_\alpha) + p_3^*(-x_\alpha) = 0. \tag{4.9}$$

Докажем, что многочлен p_3^* совпадает с многочленом $\overline{p}_3$. Для этого рассмотрим возможные значения знаков числа $p_3^*(x_\alpha)$ и несколько возможных случаев расположения корней многочлена p_3^* и точки x_α.

С л у ч а й 1: $p_3^*(x_\alpha) > 0$, $x < x_\alpha$.

В этом случае отрезок $[x_\alpha, 1]$ строго вложен во множестве неотрицательности многочлена p_3^*, а следовательно, $\mu(\overline{p}_3) < \mu(p_3^*)$. Это противоречит тому, что многочлен p_3^* экстремальный. Таким образом, случай 1 невозможен.

С л у ч а й 2: $p_3^*(x_\alpha) \geqslant 0$, $x > x_\alpha$.

В этой ситуации на отрезке $[x_\alpha, 1]$ находятся два корня x и z. Поскольку третий корень y многочлена p_3^* отрицательный, то отсюда следует, что отрезок $[0, x_\alpha]$ содержится в отрезке положительности многочлена p_3^*, причем включение строгое. В силу леммы 6 выполнено неравенство $\mu(\overline{p}_3) < \mu(p_3^*)$. Следовательно, многочлен p_3^* не является экстремальным. Поэтому случай 2 также невозможен.

С л у ч а й 3: $p_3^*(x_\alpha) < 0$, $|x| \leqslant |y|$.

Поскольку $p_3^*(x_\alpha) < 0$, то $x > x_\alpha$, а как следствие и $y < -x_\alpha$. В силу соотношения (4.9) имеем $p_3^*(-x_\alpha) > 0$. Поэтому во множестве неотрицательности $\mathcal{X}(p_3^*)$ многочлена p_3^* содержатся отрезки $[y, -x_\alpha]$ и $[x, 1]$; причем поскольку $p_3^*(x_\alpha) < 0$, то вложение $[y, -x_\alpha] \cup [x, 1] \subset \mathcal{X}(p_3^*)$. строгое. Следовательно, имеет место строгое неравенство

$$\int_{\mathcal{X}(p_3^*)} (1-t^2)^\alpha dt > \int_{y}^{-x_\alpha} (1-t^2)^\alpha dt + \int_{x}^{1} (1-t^2)^\alpha dt.$$

В силу четности весовой функции интеграл от нее по отрезку $[y, -x_\alpha]$ равен интегралу по отрезку $[x_\alpha, -y]$. По условию $|x| \leqslant |y|$, поэтому $[x_\alpha, 1] \subset [x_\alpha, -y] \cup [x, 1]$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{X}(p_3^*)} (1-t^2)^\alpha dt > \int\limits_{x_\alpha}^{1} (1-t^2)^\alpha dt = \int\limits_{\mathcal{X}(\overline{p}_3)} (1-t^2)^\alpha dt,$$

а значит, многочлен p_3^* не является экстремальным. Таким образом, и этот случай не может иметь места.

Случай 4: $p_3^*(x_\alpha) < 0, \;\; |x| > |y|$.

В данном случае имеем $p_3^*(-x_\alpha) > 0$. Поэтому $x > x_\alpha$, $y < -x_\alpha$. Отсюда выводим, что

$$xy < \frac{-1}{2\alpha+3},$$

а значит, $1 + (2\alpha+3)xy < 1 - 1 = 0$. Соотношение (4.7) влечет, что

$$z = -\frac{x+y}{1+(2\alpha+3)xy}.$$

При сделанных предположениях величина $x+y$ положительная. Поэтому $z > 0$. Следовательно, отрезок $[-x_\alpha, 0]$ строго вложен во множество неотрицательности многочлена p_3^*. Используя неравенство (4.1), вновь заключаем, что $\mu(\overline{p}_3) < \mu(p_3^*)$; это противоречит экстремальности p_3^*. В итоге мы приходим к тому, что единственно возможным является следующий случай.

Случай 5: $p_3^*(x_\alpha) = 0, \;\; |x| = |y| = x_\alpha$.

В этой ситуации $x = x_\alpha$, $y = -x_\alpha$. Покажем, что в этом случае $z = y$. Действительно, если $z \in (y, x]$, то в отрезке неотрицательности многочлена p_3^* содержатся отрезки $[-x_\alpha, y]$ и $[x_\alpha, 1]$. Следовательно, $\mu(\overline{p}_3) < \mu(p_3^*)$, что противоречит экстремальности многочлена p_3^*. Корни многочленов p_3^* и $\overline{p}_3$ совпадают, значит, при условии, что старший коэффициент многочлена p_3^* равен единице, $p_3^* \equiv \overline{p}_3$.

Таким образом, многочлен $\overline{p}_3$ является экстремальным. Равенство (1.5) очевидным образом вытекает из вида экстремального многочлена. Теорема 3 доказана.

Авторы выражают благодарность В.В. Арестову за постановку задачи и всестороннюю поддержку при подготовке данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В. В., Раевская В. Ю.** Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 332–344.
2. **Бабенко А. Г.** Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987. 109 с.
3. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959. 327 с.
4. **Тихановцева К. С.** О наименьшей мере множества неотрицательности алгебраического многочлена с нулевым взвешенным средним значением на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 300–311.

Поступила 06.01.2012

Кузнецов Сергей Владимирович
программист
ООО "Прикладные технологии"
e-mail: sereja_k@rambler.ru

Тихановцева Кристина Сергеевна
аспирант
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Kristina-Tih@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518.86 + 519.147

МЕТОД ДЕЛЬСАРТА В ЗАДАЧЕ О КОНТАКТНЫХ ЧИСЛАХ ПРОСТРАНСТВ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ[1]

Н. А. Куклин

Рассмотрены экстремальные задачи для непрерывных неположительных на отрезке функций, представимых рядами по многочленам Гегенбауэра с неотрицательными коэффициентами, возникающие из схемы Дельсарта оценки сверху контактного числа евклидова пространства. Разработан общий метод решения таких задач. С помощью этого метода повторены результаты предыдущих авторов, а также получено решение в следующих 11 новых размерностях: 147, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 164, 165, 167, 173. При этом возникают экстремальные многочлены нового вида.

Ключевые слова: схема Дельстара, бесконечномерное линейное программирование, многочлены Гегенбауэра, контактные числа.

N. A. Kuklin. Delsarte method in the problem on kissing numbers in high-dimensional spaces.

We consider extremal problems for continuous functions that are nonpositive on a closed interval and can be represented as series in Gegenbauer polynomials with nonnegative coefficients. These problems arise from the Delsarte method of finding an upper bound for the kissing number in the Euclidean space. We develop a general method for solving such problems. Using this method, we reproduce results of previous authors and find a solution in the following 11 new dimensions: 147, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 164, 165, 167, and 173. The arising extremal polynomials are of a new type.

Keywords: Delsarte method, infinite-dimensional linear programming, Gegenbauer polynomials, kissing numbers.

1. Введение

В работе изучаются задачи бесконечномерного линейного программирования, возникающие из схемы Дельсарта оценки сверху контактных чисел евклидовых пространств. Схема Дельсарта появилась в исследованиях Ф. Дельсарта [17; 3] границ упаковок в некоторых метрических пространствах. В дальнейшем эта схема была развита и успешно применена в работах Г. А. Кабатянского и В. И. Левенштейна [4], Э. Одлыжко и Н. Слоэна [22], В. И. Левенштейна [8; 7], В. М. Сидельникова [11], О. Р. Мусина [9; 20; 21], а также других авторов. При применении схемы Дельсарта возникает задача бесконечномерного линейного программирования (которую мы будем называть задачей Дельсарта), ее решение доставляет оценку сверху контактного числа евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Изложение этих результатов и другая родственная, богатая информация имеется в монографии Дж. Конвея и Н Слоэна [5]. Также отметим работу В. А. Юдина [14], в которой для изучения достаточно общей задачи минимизации функции фиксированного числа точек на единичной сфере евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ применяется аналог схемы Дельсарта.

Контактным числом пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, называют максимальное число шаров единичного радиуса с непересекающимися внутренностями, касающихся единичного шара пространства; это число в дальнейшем будет обозначаться через τ_m. В настоящее время точное значение τ_m известно лишь при $m = 2, 3, 4, 8, 24$, а именно $\tau_2 = 6$ (очевидный случай), $\tau_3 = 12$ (Б. Л. ван дер Варден, К. Шютте [23]), $\tau_4 = 24$ (О. Р. Мусин [9; 21]), $\tau_8 = 240$, $\tau_{24} = 196560$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00462) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания вузам на проведение фундаментальных и прикладных исследований (проект 1.1544.2011).

(В. И. Левенштейн [8]; Э. Одлыжко, Н. Слоэн [22]); в остальных случаях известны лишь оценки снизу и сверху величины τ_m, например (верхняя оценка — см. [19]), $40 \leqslant \tau_5 \leqslant 44$.

Конкретные конструкции расположения шаров дают оценки снизу числа τ_m (см. [5]). В данной работе оценки снизу величины τ_m не рассматриваются. Оценку сверху для τ_m, $m \geqslant 2$ дает подход Дельсарта, который мы приведем сейчас в несколько измененной, удобной для нас, форме.

Пусть $P_k^{(m)}$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, есть система ультрасферических многочленов (многочленов Гегенбауэра; см., например, [12, гл. 7, § 6]), ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^{(m-3)/2}$, нормированных условием $P_k^{(m)}(1) = 1$.

В дальнейшем нам понадобится следующая оценка.

Утверждение 1 [13, лемма 2.1]. *Пусть $m \geqslant 4$, $k \geqslant \max\{3, m-4\}$. Тогда справедлива оценка*

$$|P_k^{(m)}(t)| \leqslant \frac{\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})^{m-4}}{(1-t^2)^{\frac{m-2}{4}}(k+1)^{\frac{m-2}{2}}} \cdot \Gamma\Big(\frac{m-1}{2}\Big), \quad t \in (-1, 1). \tag{1.1}$$

Определим множество Φ_m непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций, представимых рядами

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k P_k^{(m)}(t), \quad t \in [-1, 1]$$

с сумируемой последовательностью $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных коэффициентов $\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k| < \infty$. Для любых $\varphi \in \Phi_m$ и $k \geqslant 0$ справедлива формула

$$\varphi_k = \left(\int\limits_{-1}^{1} \varphi(t)\, P_k^{(m)}(t)\, (1-t^2)^{(m-3)/2}\, dt\right) \left(\int\limits_{-1}^{1} \Big(P_k^{(m)}(t)\Big)^2 (1-t^2)^{(m-3)/2}\, dt\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{F}_m \subset \Phi_m$ функций f, обладающих следующими тремя свойствами:

(1) $f_0 = 1$;
(2) $f_k \geqslant 0$ для всех $k \geqslant 1$;
(3) $f(t) \leqslant 0$ для любых $t \in [-1, 1/2]$.

Элементы множества $\mathcal{F}_m$ (при некотором m) будем в дальнейшем называть допустимыми функциями. На множестве $\mathcal{F}_m$ рассмотрим задачу о вычислении величины

$$u_m = \inf_{f \in \mathcal{F}_m} f(1) = 1 + \inf_{f \in \mathcal{F}_m} \sum_{k=1}^{\infty} f_k. \tag{1.3}$$

Как легко видеть, задача (1.3) является задачей бесконечномерного линейного программирования (см., например, [15]). Задачу (1.3) мы называем задачей Дельсарта.

Введем множество экстремальных функций $\mathcal{F}_m^* \subset \mathcal{F}_m$, состоящее из тех допустимых функций f, для которых $f(1) = u_m$. Хорошо известен следующий результат (см., например, [1, теорема A]).

Теорема 1. *При любом $m \geqslant 2$ выполнена оценка $\tau_m \leqslant \lfloor u_m \rfloor$.*

О числах u_m известно гораздо больше, чем о контактных числах τ_m. При $m = 2, 8, 24$ величины u_m независимо нашли В. И. Левенштейн [8] и Э. Одлыжко, Н. Слоэн [22]. В этих случаях (и похоже, что только в этих) числа u_m оказались целыми и совпали с известными нижними оценками для контактных чисел, т. е. $\tau_m = u_m$. В случае $m = 4$ величину $u_4 = 25.55\ldots$ нашли В. В. Арестов и А. Г. Бабенко [1]. Как видно, в этом случае классическая схема

Дельсарта не позволяет получить оценку $\tau_4 \leqslant 24$, совпадающую с известной оценкой снизу $24 \leqslant \tau_4$. Позже Д. В. Штром [13] нашел величины u_m для следующих размерностей:

$$5 \leqslant m \leqslant 7, \qquad 9 \leqslant m \leqslant 23, \qquad 25 \leqslant m \leqslant 146, \qquad 148 \leqslant m \leqslant 156, \qquad m = 161. \tag{1.4}$$

Во всех перечисленных в предыдущем абзаце случаях была найдена экстремальная функция, а для $m \neq 2, 8, 24$ доказано, что она — единственна. Во всех случаях последовательность коэффициентов $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ экстремальной функции состоит из конечного числа отличных от нуля чисел. Другими словами, экстремальной функцией задачи (1.3) при указанных m является алгебраический многочлен, причем его степень растет с ростом размерности.

В работе [6] автором изучалась задача (1.3) при $m = 3$. Были получены близкие двусторонние оценки

$$13.158225715299274 \leqslant u_3 \leqslant 13.158225715311796,$$

а также доказано, что все функции из $\mathcal{F}_3^*$ являются многочленами, причем степень d любого из них удовлетворяет неравенствам $27 \leqslant d < 1450$. При этом для доказательства использовались отличные от [1; 13] и от настоящей работы методы — без отыскания экстремальной функции.

В данной статье мы развиваем идеи работ [1; 13] и разрабатываем единый — не зависящий от размерности — способ нахождения экстремальности многочлена некоторого типа (см. определение ниже) в задаче (1.3), а также доказательства единственности экстремальной функции. При этом тип многочлена устанавливается заранее при численном решении задачи бесконечномерного линейного программирования на компьютере.

В итоге задача (1.3) решена новым методом в размерностях $m = 4$ и (1.4), а также в следующих 11 новых случаях:

$$m = 147, 157, 158, 159, 160, 162, 163, 164, 165, 167, 173. \tag{1.5}$$

Результаты сведены в теореме 3 и могут быть восстановлены с помощью теоремы 2. Ввиду громоздкости вычислений мы рассматриваем более подробно лишь случай $m = 173$.

2. Метод решения задачи Дельсарта

В работе [1] В. В. Арестов и А. Г. Бабенко построили двойственную к (1.3) задачу. Для ее формулировки рассмотрим банахово пространство $rca = rca[-1,\, 1/2]$ (см. [2, гл. IV, §2, определение 17]) вещественнозначных регулярных счетно-аддитивных функций множества, определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств отрезка $[-1,\, 1/2]$. Элементы этого пространства в дальнейшем будем называть мерами. Нормой в этом пространстве является

$$\|\mu\| = \max_{B \in \mathcal{B}} \mu B - \min_{B \in \mathcal{B}} \mu B, \quad \mu \in rca.$$

Введем множество $\mathcal{M}_m \subset rca$ мер μ, обладающих следующими двумя свойствами:

(1) мера μ неотрицательна, т. е. $\mu B \geqslant 0$ для любых множеств $B \in \mathcal{B}$;

(2) величина

$$\mu_k = \int_{-1}^{1/2} P_k^{(m)}(t)\, d\mu(t)$$

(здесь и далее такой интеграл понимается как интеграл Лебега по мере) удовлетворяет неравенству $\mu_k \geqslant -1$ для всех $k \geqslant 1$.

Носителем меры $\mu \in \mathcal{M}_m$ назовем множество $\operatorname{supp}(\mu) \subset [-1,\, 1/2]$ такое, что для любой открытой окрестности U (в индуцированной топологии отрезка $[-1,\, 1/2]$) любой точки $t \in \operatorname{supp}(\mu)$ выполняется строгое неравенство $\mu U > 0$. Отметим, что носитель меры — замкнутое множество, так как в открытой окрестности U предельной точки содержится точка из $\operatorname{supp}(\mu)$, для которой множество U также является открытой окрестностью.

Элементы множества $\mathcal{M}_m$ (при некотором m) будем в дальнейшем называть допустимыми мерами. На множестве $\mathcal{M}_m$ рассмотрим задачу о вычислении величины

$$v_m = 1 + \sup_{\mu \in \mathcal{M}_m} \|\mu\| . \tag{2.1}$$

Введем множество экстремальных мер $\mathcal{M}_m^* \subset \mathcal{M}_m$, состоящее из тех допустимых мер μ, для которых выполняется равенство $1 + \|\mu\| = v_m$.

Для любой допустимой меры $\mu \in \mathcal{M}_m$ имеем

$$\|\mu\| = \max_{B \in \mathcal{B}} \mu B - \min_{B \in \mathcal{B}} \mu B = \mu \left[-1, 1/2 \right] = \mu_0,$$

поэтому задача (2.1) также является задачей бесконечномерного линейного программирования. Эта задача является классической двойственной задачей (см., например, [15]) для задачи (1.3). Следующее утверждение устанавливает двойственность.

Утверждение 2 [1, теорема 2.1]. *При любом $m \geqslant 2$ справедливы следующие утверждения*:

(D1) $u_m = v_m$;

(D2) *множества $\mathcal{F}_m^*$ и $\mathcal{M}_m^*$ не пусты*;

(D3) *допустимые функция f и мера μ экстремальны тогда и только тогда, когда они обладают следующими свойствами*:

(D3.1) $f(\operatorname{supp}(\mu)) = 0$, *т. е.* $f(t) = 0$ *для любой точки* $t \in \operatorname{supp}(\mu)$;

(D3.2) *если номер $k \geqslant 1$ таков, что $\mu_k > -1$, то $f_k = 0$.*

Типом (экстремального многочлена) назовем четверку (d, N, p, r), где $d \geqslant 0$ и $r \geqslant 1$ — целые числа, $p = 0$ или $p = 1$, и $N \subset \{1, 2, \ldots, d-1\}$ — множество чисел. Также потребуем, чтобы выполнялось неравенство $d - p - 2r - 1 \geqslant 0$.

С каждым типом свяжем следующие многочлены, зависящие от переменной t, а также формально зависящие от переменных $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}, R_0, R_1, \ldots, R_{d-p-2r-2}$:

$$\begin{aligned}
&\zeta(t) = t^r - Z_{r-1} t^{r-1} + \ldots + (-1)^r Z_0;\\
&\rho(t) = t^{d-p-2r-1} - R_{d-p-2r-2} t^{d-p-2r-2} + \ldots + (-1)^{d-p-2r-1} R_0;\\
&\varphi^{(j)}(t) = (t+1)^p \, \zeta(t) \, t^j \, (t - 1/2) \, (t-1), \quad 0 \leqslant j \leqslant d - p - r - 3;\\
&\psi(t) = (t+1)^p \, \zeta(t) \, (t - 1/2);\\
&\sigma(t) = (t+1)^p \, \zeta^2(t) \, (t - 1/2) \, \rho(t).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Заметим, что коэффициенты этих многочленов, вычисленные по формуле (1.2), уже не зависят от t. Пользуясь этим замечанием, свяжем каждый тип с системой нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
\varphi_0^{(j)} + \sum_{k \in N} G_k \varphi_k^{(j)} = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant d - p - r - 3;\\
S \left(\psi_0 + \sum_{k \in N} G_k \psi_k \right) - \psi(1) = 0;\\
S \sigma_0 - \sigma(1) = 0;\\
\sigma_k = 0, \quad k \in N,
\end{cases} \tag{2.3}$$

зависящей от переменных

$$S, R_0, R_1, \ldots, R_{d-p-2r-2}, G_k, Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}, \tag{2.4}$$

где индекс k пробегает все числа из множества N. Отметим, что число уравнений совпадает с числом неизвестных и равно $d+|N|-p-r$.

Если формальные переменные (2.4) приравнять некоторым комплексным числам, то многочлены (2.2) становятся многочленами от одной переменной t, а многочлен

$$\varphi^{(0)}(t)=(t+1)^p\,\zeta(t)\,(t-1/2)\,(t-1)$$

имеет степень $p+r+2$. Обозначим его корни через $t_0,t_1,\ldots,t_{p+r+1}=1$, и с каждым из этих корней свяжем многочлен $\omega^{(i)}(t)=\varphi^{(0)}(t)\,(t-t_i)^{-1}$ и число

$$L_i=S\left(\omega_0^{(i)}+\sum_{k\in N}G_k\omega_k^{(i)}\right)\left(\omega^{(i)}(t_i)\right)^{-1},\quad 0\leqslant i\leqslant p+r+1. \tag{2.5}$$

Также для $k>d$ введем числа

$$G_k=\frac{1}{S}\left(1+\sum_{i=0}^{p+r}L_iP_k^{(m)}(t_i)\right).$$

Следующая основная теорема устанавливает достаточные условия того, чтобы многочлен некоторого типа был единственной экстремальной функцией задачи (1.3).

Теорема 2. *Пусть $m\geqslant 2$, (d,N,p,r) — некоторый тип и существует решение системы (2.3), удовлетворяющее следующим условиям:*

(C1) $S>0$;

(C2) $G_k\geqslant 0$ *для* $k\in N$;

(C3) *многочлен ζ имеет r различных простых корней из интервала $(-1,\,1/2)$, причем корни многочлена $\varphi^{(0)}$ мы перенумеруем следующим образом: $-1\leqslant t_0<t_1<\ldots<t_{p+r}=1/2<t_{p+r+1}=1$, т. е. $t_0=-1$ в случае $p=1$ и $t_p,t_{p+1},\ldots,t_{p+r-1}$ — корни многочлена ζ;*

(C4) *многочлен ρ не имеет корней на отрезке $[-1,\,1]$;*

(C5) *для всех $0\leqslant i\leqslant p+r$ выполняется неравенство $L_i\geqslant 0$;*

(C6) $G_k\geqslant 0$ *для всех* $k>d$;

(C7) *справедливы неравенства $\sigma_0>0$ и $\sigma_k\geqslant 0$ для всех $k\geqslant 1$.*

Тогда многочлен $f=\sigma/\sigma_0$ является экстремальным в задаче (1.3), а дискретная мера

$$\mu\{t\}=\sum_{i=0}^{p+r}L_i\delta(t-t_i),\quad t\in[-1,1/2],$$

где δ есть дельта-функция Дирака, является экстремальной в задаче (2.1). При этом справедливы равенства $u_m=S$, $d=\deg(f)$, $f_k=0$ для $k\in N$, $p=1\iff f(-1)=0$ и r — число двойных нулей многочлена f на интервале $(-1,\,1/2)$. Другими словами, четверка (d,N,p,r) определяет тип экстремального многочлена f.

Более того, если выполнены условия

(E1) $f_k>0$ *для всех* $1\leqslant k\leqslant d, k\notin N$;

(E2) $L_i>0$ *при* $0\leqslant i\leqslant p+r$;

(E3) $G_k>0$, *когда* $k\in N$ *и* $k>d$;

(E4) *существует лишь одно решение системы (2.3) с $S=u_m$,*

то $\mathcal{F}_m^*=\{f\}$ и $\mathcal{M}_m^*=\{\mu\}$, т. е. найденные экстремальные многочлен f и мера μ являются единственными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть переменные (2.4) из системы (2.3), а также числа $t_i, L_i, 0 \leqslant i \leqslant p+r+1$ и $G_k, k > d$ выбраны, как указано в условии теоремы. Под многочленами (2.2), а также многочленами $\omega^{(i)}, 0 \leqslant i \leqslant p+r+1$ мы будем понимать многочлены, зависящие лишь от t, в которые вместо остальных неизвестных подставлены значения из условия. Через f и μ мы будем обозначать экстремальные многочлен и меру из условия.

Определим линейное пространство $\mathcal{P}_l$ многочленов степени не выше l. Справедливы равенства $\mathcal{P}_l = \{\varphi \in \Phi_m \mid \varphi_k = 0,\, k > l\}$, $\dim(\mathcal{P}_l) = l+1$. Отметим, что операция взятия коэффициента линейна, т.е. для любых $l \geqslant 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi, \varphi \in \mathcal{P}_l$ и любых $k \geqslant 0$ имеем $(a\phi + b\varphi)_k = a\phi_k + b\varphi_k$.

Заметим, что $\omega^{(p+r+1)}(t) = \varphi^{(0)}(t) \cdot (t - t_{p+r+1})^{-1} = \psi(t)$. Рассмотрим множество многочленов $\{\omega^{(i)}\}_{i=0}^{p+r+1}$. Для всех $0 \leqslant i \leqslant p+r+1$ имеем равенство $\deg(\omega^{(i)}) = p+r+1$. Покажем, что набор $\{\omega^{(i)}\}_{i=0}^{p+r+1}$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_{p+r+1}$. Чтобы это сделать, для набора вещественных чисел $c_0, c_1, \ldots, c_{p+r+1} \in \mathbb{R}$ нужно проверить равносильность $c_0\omega^{(0)} + \ldots + c_{p+r+1}\omega^{(p+r+1)} \equiv 0 \iff c_i = 0$ для всех $0 \leqslant i \leqslant p+r+1$. Для этого покажем, что вектора

$$\begin{pmatrix} \omega^{(0)}(t_0) \\ \omega^{(0)}(t_1) \\ \vdots \\ \omega^{(0)}(t_{p+r+1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^{(1)}(t_0) \\ \omega^{(1)}(t_1) \\ \vdots \\ \omega^{(1)}(t_{p+r+1}) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \omega^{(p+r+1)}(t_0) \\ \omega^{(p+r+1)}(t_1) \\ \vdots \\ \omega^{(p+r+1)}(t_{p+r+1}) \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Отметим, что $\omega^{(j)}(t_i) = 0$ при $i \neq j$ и $\omega^{(i)}(t_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{p+r+1}(t_i - t_j) \neq 0$. Таким образом, из условия (C3) получаем

$$\det \begin{pmatrix} \omega^{(0)}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega^{(1)}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{(p+r+1)}(t_{p+r+1}) \end{pmatrix} = \omega^{(0)}(t_0) \cdot \omega^{(1)}(t_1) \cdot \ldots \cdot \omega^{(p+r+1)}(t_{p+r+1}) \neq 0$$

и число многочленов в наборе равно $p+r+2$, что совпадает с $\dim(\mathcal{P}_{p+r+1})$.

Добавим к набору $\{\omega^{(i)}\}_{i=0}^{p+r+1}$ многочлены $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(d-p-r-3)}$ и многочлен σ и покажем, что получившаяся система образует базис в пространстве $\mathcal{P}_d$. Для этого заметим, что

$$\deg(\varphi^{(j)}) = p+r+j+2, \quad 0 \leqslant j \leqslant d-p-r-3, \quad \deg(\sigma) = d$$

и что степень многочлена $\varphi^{(0)}$ на единицу выше степени многочленов $\omega^{(i)}$; в то же время степень многочлена $\varphi^{(d-p-r-3)}$ на единицу ниже степени многочлена σ. Из этого следует, что набор из $d+1$ указанных многочленов образует базис в пространстве $\mathcal{P}_d$.

В линейном пространстве $\mathcal{P}_d$ введем линейный функционал

$$L(\varphi) = \left(\varphi_0 + \sum_{k\in N} G_k\varphi_k\right) - \frac{1}{S}\left(\varphi(1) + \int\limits_{-1}^{1/2} \varphi(t)\, d\mu(t)\right), \quad \varphi \in \mathcal{P}_d,$$

и покажем, что он тождественно равен нулю. Для этого вычислим L на всех базисных многочленах. Для $0 \leqslant i \leqslant p+r$ рассмотрим выражение

$$L(\omega^{(i)}) = \left(\omega_0^{(i)} + \sum_{k\in N} G_k\omega_k^{(i)}\right) - \frac{1}{S}\left(\omega^{(i)}(1) + \int_{-1}^{1/2} \omega^{(i)}(t)\, d\mu(t)\right).$$

Здесь $\omega^{(i)}(1) = 0$ и $\int_{-1}^{1/2} \omega^{(i)}(t)\, d\mu(t) = L_i\omega^{(i)}(t_i)$, поэтому

$$L(\omega^{(i)}) = \left(\omega_0^{(i)} + \sum_{k\in N} G_k\omega_k^{(i)}\right) - \frac{1}{S}\, S\left(\omega_0^{(i)} + \sum_{k\in N} G_k\omega_k^{(i)}\right) = 0.$$

Подставляя многочлен ψ в функционал L, получаем выражение

$$L(\psi) = \left(\psi_0 + \sum_{k\in N} G_k\psi_k\right) - \psi(1)/S,$$

которое совпадает со вторым уравнением в системе (2.3) с точностью до множителя $S > 0$, поэтому равно нулю. Точно таким же образом из оставшихся уравнений системы (2.3) следуют равенства $L(\sigma) = L(\varphi^{(j)}) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant d - p - r - 3$.

Мы показали, что линейный функционал L зануляется на всех базисных многочленах пространства $\mathcal{P}_d$. Из этого следует, что он зануляется на всех многочленах степени не выше d. Для всех $k \leqslant d$ имеем $P_k^{(m)} \in \mathcal{P}_d$, поэтому получаем равенства

$$0 = G_k - (1+\mu_k)/S, \quad k\in N, \quad 0 = -(1+\mu_k)/S, \quad 1\leqslant k\leqslant d, \quad k\notin N.$$

В то же время для $k > d$ мы имеем равенство $G_k = (1+\mu_k)/S$. Таким образом, из условий (C2) и (C6) мы получаем, что для всех $k \geqslant 1$ справедливо неравенство $\mu_k \geqslant -1$.

Из условия (C5) видно, что мера μ является неотрицательной, поэтому $\mu \in \mathcal{M}_m$. Неравенство $\mu_k > -1$ может выполняться лишь для $k \in N$ или для $k > d$, но для этих номеров k имеем $f_k = 0$, поэтому справедливо условие (D3.2) утверждения 2. Кроме того, $\operatorname{supp}(\mu) = \{t_i \mid 0 \leqslant i \leqslant p + r,\ L_i > 0\}$, поэтому $f(\operatorname{supp}(\mu)) = 0$, т. е. выполнено условие (D3.1).

Для проверки условий (D3) утверждения 2 остается доказать, что многочлен f является допустимым. Из (C7) имеем $f_0 = \sigma_0/\sigma_0 = 1$, $f_k = \sigma_k/\sigma_0 \geqslant 0$ для всех $k \geqslant 1$. Из третьего уравнения системы (2.3) и условия (C1) получаем неравенство $f(1) = \sigma(1)/\sigma_0 = S > 0$. Из условий (C3) и (C4) видно, что наибольший корень многочлена f в полуинтервале $[-1, 1)$ — это простой корень $1/2$, а все корни в интервале $(-1, 1/2)$ двойные, поэтому $f(t) \leqslant 0$ для $t \in [-1, 1/2]$.

Таким образом, мы показали, что многочлен f и мера μ являются экстремальными в задачах (1.3) и (2.1) соответственно. Также очевидны равенства $u_m = f(1) = S$.

Перейдем к доказательству единственности. Пусть $g \in \mathcal{F}_m^*$ и $\nu \in \mathcal{M}_m^*$. Покажем, что при дополнительных условиях (E1)–(E4) выполняются равенства $g = f$ и $\nu = \mu$. Пары (g, μ) и (f, ν), состоящие из экстремальной функции и экстемальной меры, удовлетворяют условию (D3) утверждения 2. Из этого получаем следующие четыре условия на g и ν:

(1) из (E3) имеем $\mu_k = S \cdot G_k - 1 > -1$ для $k \in N$ и $k > d$, поэтому для этих номеров k выполняются равенства $g_k = 0$, т. е. g — также многочлен и $\deg(g) \leqslant d$;

(2) из (E2) следует равенство $\operatorname{supp}(\mu) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{p+r}\}$, поэтому $g(t_i) = 0$ для всех $0 \leqslant i \leqslant p + r$;

(3) из (E1) следуют равенства $\nu_k = 0$ для $1 \leqslant k \leqslant d$, $k \notin N$;

(4) справедливо вложение $\operatorname{supp}(\nu) \subset \{t_0, t_1, \ldots, t_{p+r}\}$, так как многочлен f зануляется лишь на множестве $\{t_0, t_1, \ldots, t_{p+r}\}$.

Рассмотрим многочлен $h = (f+g)/2$ и меру $\lambda = (\mu+\nu)/2$. Они являются экстремальными, так как $h(1) = (f(1) + g(1))/2 = 2u_m/2 = u_m$ и $1 + \|\lambda\| = 1 + (\|\mu\| + \|\nu\|)/2 = 2u_m/2 = u_m$. Более того, справедливо равенство $\operatorname{supp}(\lambda) = \operatorname{supp}(\mu)$, на отрезке $[-1, 1/2]$ многочлен h имеет точно такие же нули, что и f, и справедливы соотношения $k \in N$ или $k > d \iff f_k = 0 \iff h_k = 0 \iff \mu_k = -1 \iff \lambda_k = -1$.

Многочлен h имеет степень d, и его производная должна занулятся в точках $t_p, \ldots, t_{p+r-1}$, так как в противном случае не будет выполняться условие $h(t) \leqslant 0$, $t \in [-1, 1/2]$. Получаем, что h может быть записан в виде

$$h(t) = A\,(t+1)^p \prod_{i=p}^{p+r-1}(t-t_i)^2\cdot(t-1/2)\left(t^{d-p-2r-1} - K_{d-p-2r-2}t^{d-p-2r-2} + \ldots + (-1)^{d-p-2r-1}K_0\right),$$

где $A \neq 0, K_0, K_1, \ldots, K_{d-p-2r-2}$ — вещественные числа.

В пространстве $\mathcal{P}_d$ рассмотрим линейный функционал

$$T(\varphi) = \left(\varphi_0 + \sum_{k\in N} H_k\varphi_k\right) - \frac{1}{u_m}\left(\varphi(1) + \int_{-1}^{1/2} \varphi(t)\,d\lambda(t)\right), \quad \varphi \in \mathcal{P}_d,$$

где $H_k = (1+\lambda_k)/u_m > 0$ для $k \in N$. Покажем, что этот функционал тождественно равен нулю. Для этого нужно левую и правую части выражения

$$\int_{-1}^{1/2} \varphi(t)\,d\lambda(t) = \int_{-1}^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k P_k^{(m)}(t)\,d\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\varphi_k = \varphi_0 u_m + \sum_{k\in N}(1+\lambda_k)\varphi_k - \varphi(1)$$

поделить на u_m и перенести интеграл в правую часть.

Мы показали, что для всех $\varphi \in \mathcal{P}_d$ выполняется равенство $T(\varphi) = 0$. Подставляя в функционал T многочлены $\psi, \varphi^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant d-p-r-3$, и многочлен h/A, мы получим условия, аналогичные первым трем уравнениям системы (2.3). Таким образом, мы можем заключить, что существует решение системы (2.3), в котором

$$S = u_m, \quad R_0 = K_0, R_1 = K_1, \ldots, R_{d-p-2r-2} = K_{d-p-2r-2}, \quad G_k = H_k,\, k \in N,$$

где в левых частях записаны формальные переменные. Но по условию (E4) нет других решений системы, кроме решения, указанного в условии теоремы, т. е. мы имеем равенства $H_k = G_k$, $k \in N$ и $K_j = R_j$, $0 \leqslant j \leqslant d-p-2r-2$. Отсюда можно заключить, что $h = f$, а следовательно, $g = f$.

Осталось показать равенство $\lambda = \mu$, из которого будет следовать нужное нам равенство $\nu = \mu$. Напомним, что $\operatorname{supp}(\lambda) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{p+r}\}$, поэтому достаточно доказать равенства $\lambda\{t_i\} = L_i$ для всех $0 \leqslant i \leqslant p+r$. Для этих i подставим многочлены $\omega^{(i)} \in \mathcal{P}_d$ в нулевые функционалы L и T:

$$0 = L(\omega^{(i)}) = \left(\omega_0^{(i)} + \sum_{k\in N} G_k\omega_k^{(i)}\right) - \frac{1}{u_m} L_i\,\omega^{(i)}(t_i) = T(\omega^{(i)})$$

$$= \left(\omega_0^{(i)} + \sum_{k\in N} H_k\omega_k^{(i)}\right) - \frac{1}{u_m}\int_{-1}^{1/2} \omega^{(i)}(t)\,d\lambda(t).$$

Отметим, что для всех $0 \leqslant i \leqslant p+r$ имеет место равенство $\int_{-1}^{1/2} \omega^{(i)}(t)\,d\lambda(t) = \lambda\{t_i\}\cdot\omega^{(i)}(t_i)$ и что для всех $k \in N$ справедливы соотношения $G_k = H_k$. Сказанное, очевидно, дает нужные нам равенства $\lambda\{t_i\} = L_i$ для всех $0 \leqslant i \leqslant p+r$. □

Если есть гипотеза о типе экстремального многочлена, полученная, например, при численном решении задачи Дельсарта, то теорема 2 позволяет свести нахождение экстремального многочлена такого типа и доказательство того, что других экстремальных функций нет к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В следующем разделе мы разберем, как решать такие системы.

При помощи теоремы 2 нам удалось решить задачу (1.3) во всех случаях, разобранных в работах [1; 13], т.е. в случаях $m = 4$ и (1.4), а также в новых размерностях (1.5), но ввиду громоздкости вычислений мы ниже разберем подробно лишь случай $m = 173$. Сформулируем в виде теоремы все полученные нами новые результаты.

Теорема 3. *Единственной экстремальной функцией задачи* (1.3) *является многочлен типа* (d, N, p, r) *с параметрами из табл.* 1. *В третьем столбце таблицы для сравнения приведены отношения* B_m^*/u_m, *где* B_m^* — *оценки сверху числа* u_m, *полученные В. И. Левенштейном в* [7, теорема 4.1].

Т а б л и ц а 1

Параметры экстремальных многочленов для новых размерностей

m	u_m	B^*_m/u_m	d	N	p	r
147	$4.75945505023617990\ldots\cdot 10^{22}$	$1.30\ldots$	42	$\{34,35,36\}\cup\{39,40,41\}$	1	17
157	$1.01961111471187294\ldots\cdot 10^{24}$	$1.31\ldots$	44	$\{35,36,37\}\cup\{40,41,42,43\}$	0	18
158	$1.40963057977586500\ldots\cdot 10^{24}$	$1.31\ldots$	44	$\{36,37,38\}\cup\{41,42,43\}$	1	18
159	$1.87929976565036876\ldots\cdot 10^{24}$	$1.35\ldots$	44	$\{36,37,38\}\cup\{41,42,43\}$	1	18
160	$2.50603587669566843\ldots\cdot 10^{24}$	$1.43\ldots$	44	$\{36,37,38\}\cup\{41,42,43\}$	1	18
162	$4.47040526399543029\ldots\cdot 10^{24}$	$1.45\ldots$	45	$\{36,37,38,39\}\cup\{41,42,43,44\}$	0	18
163	$5.98348450690750653\ldots\cdot 10^{24}$	$1.44\ldots$	45	$\{36,37,38,39\}\cup\{41,42,43,44\}$	0	18
164	$8.08068467147400953\ldots\cdot 10^{24}$	$1.42\ldots$	45	$\{36,37,38,39\}\cup\{41,42,43,44\}$	0	18
165	$1.10920037286385228\ldots\cdot 10^{25}$	$1.38\ldots$	45	$\{36,37,38,39\}\cup\{41,42,43,44\}$	0	18
167	$2.12910435347085336\ldots\cdot 10^{25}$	$1.31\ldots$	41	$\{37,38,39\}$	0	19
173	$1.30014231641676101\ldots\cdot 10^{26}$	$1.47\ldots$	47	$\{38,39,40,41\}\cup\{43,44,45,46\}$	0	19

Ниже на рис. 1 дан график зависимости отношений B^*_m/u_m от $2\leqslant m\leqslant 165$.

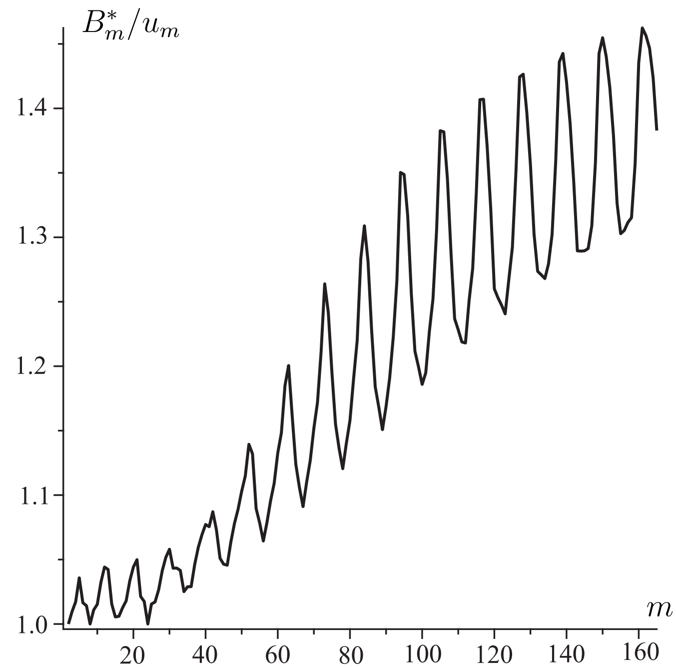


Рис. 1

Отметим, что в размерности 147 у экстремального многочлена появляется новая особенность: множество N состоит из двух “отрезков” натуральных чисел, что отличает данный многочлен от многочленов в размерностях $m=4$ и (1.4). Для наглядности приведем несколько примеров в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Параметры экстремальных многочленов для размерностей 146–148

m	d	N	p	r
146	37	$\{34,35\}$	0	17
147	42	$\{34,35,36\}\cup\{39,40,41\}$	1	17
148	38	$\{34,35,36\}$	0	17

3. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений

Рассмотрим коммутативное кольцо $\mathcal{R} = \mathbb{Q}[z] = \mathbb{Q}[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ многочленов от n переменных над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Напомним, что множество $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$ называется идеалом кольца $\mathcal{R}$, если оно замкнуто относительно сложения многочленов, а также $pq \in \mathcal{I}$ для любых $p \in \mathcal{R},\ q \in \mathcal{I}$. Очевидно, что пересечение любого семейства идеалов снова есть идеал, поэтому любое множество многочленов порождает идеал — наименьший идеал, содержащий все многочлены из множества. Например,

$$\mathcal{I}(Q) = \{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_l q_l \mid p_j \in \mathcal{R},\ 1 \leqslant j \leqslant l\}$$

— идеал, порожденный конечным множеством $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\} \subset \mathcal{R}$.

Для конечного набора многочленов $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\} \subset \mathcal{R}$ обозначим $\mathrm{var}(Q) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid q_1(z) = 0, q_2(z) = 0, \ldots, q_l(z) = 0\}$ — множество решений системы уравнений в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Отметим, что из равенства $\mathcal{I}(Q_1) = \mathcal{I}(Q_2)$ следует равенство $\mathrm{var}(Q_1) = \mathrm{var}(Q_2)$, так как любой многочлен из Q_1 есть сумма многочленов, каждый из которых делится на некоторый многочлен из Q_2 — и аналогично для Q_2.

Одночленом будем называть многочлен из $\mathcal{R}$ вида $az^\alpha = az_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$, где $a \in \mathbb{Q}$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ — это мультииндекс. На множестве всех одночленов определим лексикографический порядок $\prec$, т. е. будем считать, что $az^\alpha \prec bz^\beta$, когда существует номер $1 \leqslant k \leqslant n$ такой, что $\alpha_j = \beta_j$ для всех $1 \leqslant j < k$ и $\alpha_k < \beta_k$. Старшим одночленом многочлена $\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{R}$ назовем самый большой одночлен $a_\alpha z^\alpha$ относительно порядка $\prec$.

Приведенным базисом Гребнера (см. [10, гл. 6, §26, п. 5]) идеала $\mathcal{I}$ называется конечный набор многочленов $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\} \subset \mathcal{I}$ такой, что

(1) старший одночлен каждого многочлена из $\mathcal{I}$ делится на старший одночлен хотя бы одного многочлена из G;

(2) коэффициент перед старшим одночленом многочлена g_j равен 1 при всех $1 \leqslant j \leqslant s$;

(3) ни один из одночленов, входящих в g_i, не делится на старший одночлен многочлена g_j при $1 \leqslant i,j \leqslant s,\ i \neq j$.

У любого идеала $\mathcal{I}$ существует единственный приведенный базис Гребнера G (см. [10, теорема 26.7]), причем $\mathcal{I} = \mathcal{I}(G)$ (см. [10, следствие из теоремы 26.2]), поэтому для конечного набора $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\} \subset \mathcal{R}$ и приведенного базиса Гребнера $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_s\}$ идеала $\mathcal{I}(Q)$ имеем равенство $\mathrm{var}(Q) = \mathrm{var}(G)$.

Первый алгоритм нахождения базиса Гребнера был предложен в работе [16]. Чтобы применить теорему 2, сначала находим приведенный базис Гребнера многочленов системы (2.3). Для этого мы пользуемся более современным алгоритмом из работы [18], реализованным в системе компьютерной алгебры Maple. Для задания лексикографического порядка на одночленах полагаем (в обозначениях предыдущего раздела)

$$z = (S, R_0, R_1, \ldots, R_{d-p-2r-2}, G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_{|N|}}, Z_0, Z_1, \ldots, Z_{r-1}),$$

где $n_1 < n_2 < \ldots < n_{|N|}$ — элементы множества N. Во всех рассмотренных нами случаях базис Гребнера системы (2.3) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} g_1(z) = a_1 z_1 + w_1(z_n) = 0; \\ g_2(z) = a_2 z_2 + w_2(z_n) = 0; \\ \ldots \\ g_{n-1}(z) = a_{n-1} z_{n-1} + w_{n-1}(z_n) = 0; \\ g_n(z) = a_n z_n + w_n(z_n) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ и $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — многочлены одной переменной одинаковой степени. Локализуя корни последнего многочлена одной переменной, мы легко можем найти все решения системы (3.1), а значит и системы (2.3), с любой наперед заданной точностью.

Отметим, что в Maple отсутствует требование п. (2) из определения базиса Гребнера, т. е. коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ перед старшими одночленами не обязаны равняться единице. Вместо этого налагается требование, чтобы все коэффициенты всех одночленов были целыми. Таким образом, уравнения, получаемые в Maple, совпадают с уравнениями из приведенного базиса Гребнера с точностью до множителя. Также порядок уравнений будет обратным по сравнению с (3.1).

4. Решение задачи Дельсарта при $m = 173$

В данном разделе более детально рассмотрим задачу (1.3) при $m = 173$. Как указано в теореме 3, мы будем искать экстремальный многочлен типа

$$(47, N = \{38, 39, 40, 41\} \cup \{43, 44, 45, 46\}, 0, 19). \tag{4.1}$$

Таким образом, ищем экстремальный многочлен в виде

$$f(t) = A \prod_{i=0}^{18} (t - t_i)^2 \cdot (t - 1/2)\,(t^8 - R_7 t^7 + \ldots + R_0), \tag{4.2}$$

где константа A выбрана так, чтобы $f_0 = 1$; $f_k = 0$ при $k \in N$.

В системе (2.3), связанной с типом (4.1), 36 неизвестных

$$z = (S, R_0, \ldots, R_7, G_{38}, G_{39}, G_{40}, G_{41}, G_{43}, G_{44}, G_{45}, G_{46}, Z_0, \ldots, Z_{18}), \tag{4.3}$$

но уравнения достаточно громоздки, поэтому выпишем лишь самое маленькое уравнение $\sigma_{46} = 0$:

$$\begin{aligned} &1541090853248913390130167808\, R_7 + 3082181706497826780260335616\, Z_{18} + \\ &7705454266244566950650839 04 = 0. \end{aligned}$$

Базис Гребнера многочленов системы (2.3) вычисляется за 3 минуты в системе компьютерной алгебры Maple 15 и имеет вид (3.1), где $n = 36$, $\deg(w_j) = 29$, $1 \leqslant j \leqslant 36$. Для наглядности выпишем первые три одночлена в последнем уравнении:

$$\begin{aligned} &14460096725320020157527611751829487956450034969952980745059238795444508776252087963 4\\ &46300445361011494148219381441395832290281872356616941084512315848029161669256236453 1\\ &24691265326427008308358342039914917450908547952833352660452928613711834877599628555 2\\ &920572951285141081627297351984302150987375009663518027241750990657945600000 00\, Z_{18}^{30} +\\ &13819084200461506676185166501965536232150972162757712564288547768204925943423436938 7\\ &18824987419460991776237532596702709001933136221158167251331375405344128685745755947 7\\ &33074656848531191980614294519372427506335615886777645418793170783700830582205656982 6\\ &171005918490745794108750559749931502461630113098306253522871867073626112000000\, Z_{18}^{29} +\\ &44941849919738864384414975334669745612424651098954721949490723109055516760386627741 8\\ &88401960778583024896457027789431285535043042538043977938636464490858527997543577321 7\\ &53392705059140394284493926493657224611798261527095250748971646680765819868239756331 4\\ &426103671727246633792116426362159142653920784176125365821860561538646016000000\, Z_{18}^{28}\,. \end{aligned}$$

Отметим, что в этом уравнении коэффициенты перед одночленами самые маленькие и имеют менее 330 цифр в десятичной записи. Для сравнения, в других уравнениях коэффиценты имеют более 6150 цифр в десятичной записи.

Таким образом, система имеет 30 комплексных решений. Из них мы выпишем 8 вещественных решений последнего уравнения по возрастанию с точностью до 15-го знака:

$$\begin{gathered} Z_{18} = -1.97467482420494, -1.67462659211702, -0.795034465222612, 0.308530250549136,\\ 0.327642654629227, 0.445537074162360, 1.30326162583884, 2.47936283123280. \end{gathered}$$

Лишь третий корень дает решение, удовлетворяющее теореме 2, поэтому в дальнейшем полагаем $Z_{18} = -0.795034465222612$.

Вид системы (3.1) позволяет легко найти остальные неизвестные (4.3); коэффициенты многочлена σ вычисляются по формуле (1.2); корни $-1 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{18}$ многочлена ζ вычисляются численно; $t_{19} = 1/2$; соответствующие веса L_i, $0 \leqslant i \leqslant 19$ экстремальной меры μ вычисляются по формулам (2.5). Константа A в выражении (4.2) вычисляется по формуле $A = 1/\sigma_0 = 7.269325804828220 \cdot 10^{26}$. Все параметры сведены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры экстремального многочлена и меры для размерности 173

$S = 130014231641676101623514997.43801853418087 = 1.3\ldots \cdot 10^{26}$	
$R_0 = 0.905759275296386$	$\sigma_{22} = 7.59434879208805 \cdot 10^{-06}$
$R_1 = -0.0814536134498285$	$\sigma_{23} = 2.33526684165151 \cdot 10^{-05}$
$R_2 = -0.876252807410158$	$\sigma_{24} = 6.52739995995533 \cdot 10^{-05}$
$R_3 = 1.29744874222703$	$\sigma_{25} = 0.000175096591501327$
$R_4 = 1.12280847058646$	$\sigma_{26} = 0.000422108941390946$
$R_5 = -2.31524225481819$	$\sigma_{27} = 0.000985684386856817$
$R_6 = -1.81514616156539$	$\sigma_{28} = 0.00202856347288649$
$R_7 = 1.09006893044522$	$\sigma_{29} = 0.00410040929649853$
$G_{38} = 1.85044893698085 \cdot 10^{-26}$	$\sigma_{30} = 0.0070637940089167$
$G_{39} = 2.49923083310461 \cdot 10^{-26}$	$\sigma_{31} = 0.0122335513685827$
$G_{40} = 7.64483403642883 \cdot 10^{-27}$	$\sigma_{32} = 0.016989394809492$
$G_{41} = 2.13046144962642 \cdot 10^{-28}$	$\sigma_{33} = 0.0247864284005391$
$G_{43} = 3.10133880145161 \cdot 10^{-27}$	$\sigma_{34} = 0.0256064360527264$
$G_{44} = 1.60874629381664 \cdot 10^{-26}$	$\sigma_{35} = 0.0306063054537167$
$G_{45} = 1.67384376552196 \cdot 10^{-26}$	$\sigma_{36} = 0.0186997425147167$
$G_{46} = 1.87048018986731 \cdot 10^{-27}$	$\sigma_{37} = 0.0174471795469989$
$Z_0 = 7.54437911658241 \cdot 10^{-15}$	$\sigma_{42} = 0.0109291598277758$
$Z_1 = 6.19373825086753 \cdot 10^{-13}$	$\sigma_{47} = 0.00667988641126084$
$Z_2 = -1.65981010230748 \cdot 10^{-11}$	$t_0 = -0.529707621148329$
$Z_3 = -3.40366612509779 \cdot 10^{-10}$	$t_1 = -0.462231095257876$
$Z_4 = 5.40649033606300 \cdot 10^{-9}$	$t_2 = -0.403125658808374$
$Z_5 = 4.84115503613316 \cdot 10^{-8}$	$t_3 = -0.347740741135305$
$Z_6 = -6.17776444918612 \cdot 10^{-7}$	$t_4 = -0.294433139288427$
$Z_7 = -2.71455973762897 \cdot 10^{-6}$	$t_5 = -0.242406181444783$
$Z_8 = 3.25584804062927 \cdot 10^{-5}$	$t_6 = -0.191204370574824$
$Z_9 = 6.78787484104570 \cdot 10^{-5}$	$t_7 = -0.140536370528129$
$Z_{10} = -0.000895192638336856$	$t_8 = -0.090197677128757$
$Z_{11} = -0.000675334242872776$	$t_9 = -0.0400311635851473$
$Z_{12} = 0.013525737845186$	$t_{10} = 0.0100961015647454$
$Z_{13} = -0.00102016407162105$	$t_{11} = 0.0603089880113697$
$Z_{14} = -0.112118666253164$	$t_{12} = 0.110738363455537$
$Z_{15} = 0.0696862108512415$	$t_{13} = 0.16153693037558$
$Z_{16} = 0.474322370786247$	$t_{14} = 0.212901587517492$
$Z_{17} = -0.471957530338811$	$t_{15} = 0.265110895183765$
$Z_{18} = -0.795034465222612$	$t_{16} = 0.318597466032192$
$\sigma_0 = 1.37564339093979 \cdot 10^{-27}$	$t_{17} = 0.37411130489201$
$\sigma_1 = 1.74888911721838 \cdot 10^{-25}$	$t_{18} = 0.433177916644648$
$\sigma_2 = 9.38790703531566 \cdot 10^{-24}$	$L_0 = 3.58473298337137 \cdot 10^{13}$
$\sigma_3 = 3.25329841686402 \cdot 10^{-22}$	$L_1 = 5.64148070543154 \cdot 10^{16}$
$\sigma_4 = 8.06291993574179 \cdot 10^{-21}$	$L_2 = 1.09653937351200 \cdot 10^{19}$

Т а б л и ц а 3 (окончание)

$\sigma_5 = 1.57509764722337 \cdot 10^{-19}$	$L_3 = 6.42764619560992 \cdot 10^{20}$
$\sigma_6 = 2.48984269542426 \cdot 10^{-18}$	$L_4 = 1.60434445032016 \cdot 10^{22}$
$\sigma_7 = 3.33930785911326 \cdot 10^{-17}$	$L_5 = 2.03616438028945 \cdot 10^{23}$
$\sigma_8 = 3.82617721756285 \cdot 10^{-16}$	$L_6 = 1.45828683960378 \cdot 10^{24}$
$\sigma_9 = 3.86376891321702 \cdot 10^{-15}$	$L_7 = 6.29097067616361 \cdot 10^{24}$
$\sigma_{10} = 3.43398461682409 \cdot 10^{-14}$	$L_8 = 1.70385962752051 \cdot 10^{25}$
$\sigma_{11} = 2.75274975056090 \cdot 10^{-13}$	$L_9 = 2.97092983893681 \cdot 10^{25}$
$\sigma_{12} = 1.97753787811008 \cdot 10^{-12}$	$L_{10} = 3.37703273518305 \cdot 10^{25}$
$\sigma_{13} = 1.30139903458646 \cdot 10^{-11}$	$L_{11} = 2.50653817993261 \cdot 10^{25}$
$\sigma_{14} = 7.76321838171045 \cdot 10^{-11}$	$L_{12} = 1.20385758692381 \cdot 10^{25}$
$\sigma_{15} = 4.29011843946996 \cdot 10^{-10}$	$L_{13} = 3.66367607995533 \cdot 10^{24}$
$\sigma_{16} = 2.16415458301204 \cdot 10^{-09}$	$L_{14} = 6.81437633278881 \cdot 10^{23}$
$\sigma_{17} = 1.02009810335236 \cdot 10^{-08}$	$L_{15} = 7.31309130676939 \cdot 10^{22}$
$\sigma_{18} = 4.40533126209119 \cdot 10^{-08}$	$L_{16} = 4.13018397257071 \cdot 10^{21}$
$\sigma_{19} = 1.79026318604713 \cdot 10^{-07}$	$L_{17} = 1.05066295458661 \cdot 10^{20}$
$\sigma_{20} = 6.67019720823174 \cdot 10^{-07}$	$L_{18} = 8.94163222758850 \cdot 10^{17}$
$\sigma_{21} = 2.35339888124697 \cdot 10^{-06}$	$L_{19} = 1.21130678307230 \cdot 10^{15}$

На рис. 2 и 3 указаны коэффициенты экстермальной функции и значения экстремальной меры соответственно.

Отметим, что вычисления производились с точностью до 200 знака после запятой и что порядки больших и маленьких параметров практически совпадают, поэтому если бы переменная G_k или σ_k равнялась нулю при каком-то k, то ее порядок был бы во много раз меньше. Например, для $45 \in N$ численный расчет дает $\sigma_{45} = -1.4435 \ldots \cdot 10^{-197}$.

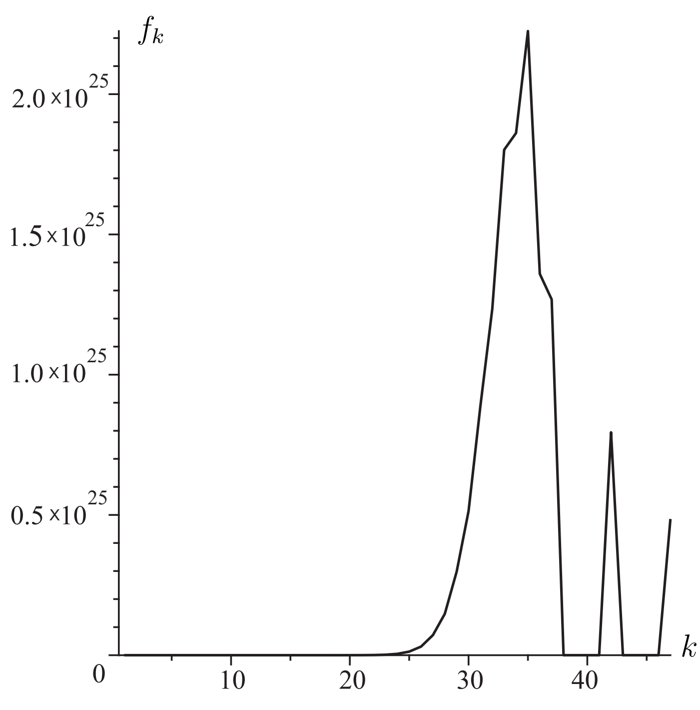


Рис. 2. Коэффициенты $f_k = \sigma_k/\sigma_0$ экстремальной функции для $m = 173$ в зависимости от k.

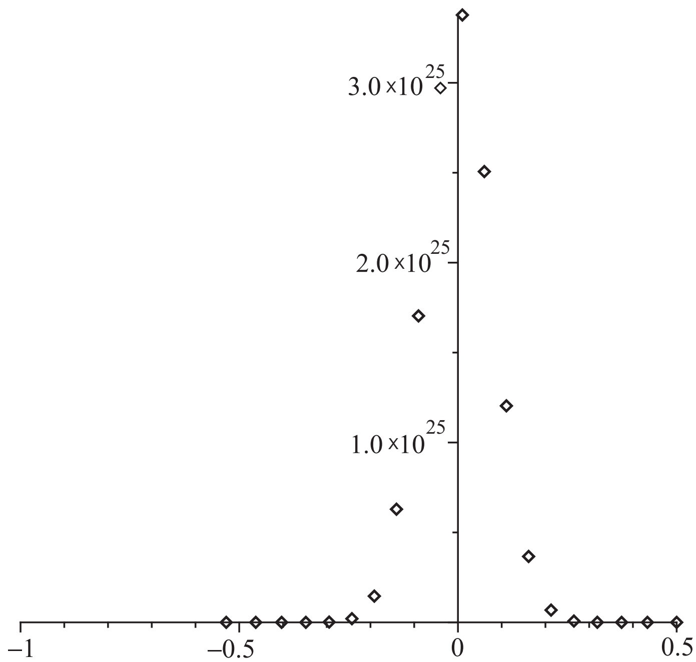


Рис. 3. Точки отрезка $[-1, 1]$, в которых сосредоточена экстремальная мера для $m = 173$. По оси ординат — значения меры в этих точках.

Для выполнения всех условий теоремы 2 остается проверить, что числа

$$G_k = \frac{1}{S}\biggl(1 + \sum_{i=0}^{19} L_i P_k^{(173)}(t_i)\biggr), \quad k > 47$$

удовлетворяют неравенству $G_k > 0$, а для этого достаточно при любом k проверить неравенство

$$\biggl|\sum_{i=0}^{19} L_i P_k^{(173)}(t_i)\biggr| \leqslant 1. \tag{4.4}$$

Справедливы неравенства

$$\biggl|\sum_{i=0}^{19} L_i P_k^{(173)}(t_i)\biggr| \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant 19} \bigl|P_k^{(173)}(t_i)\bigr| \sum_{i=0}^{19} L_i = \max_{0\leqslant i\leqslant 19} \bigl|P_k^{(173)}(t_i)\bigr| (S-1).$$

Если теперь воспользуемся оценкой (1.1) из утверждения 1, то получим неравенство

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 19} \bigl|P_k^{(173)}(t_i)\bigr| (S-1) \leqslant \frac{\sqrt{2}\,(2+\sqrt{2})^{173-4}}{(1-t_0^2)^{\frac{173-2}{4}}(k+1)^{\frac{173-2}{2}}}\,\Gamma\Bigl(\frac{173-1}{2}\Bigr)(S-1),$$

откуда следует, что неравенство (4.4) справедливо для $k \geqslant 900$. Для меньших k неравенство (4.4) проверяется непосредственно.

На рис. 4 указаны коэффициенты $\mu_k = (1 + G_k)/u_{173}$ экстремальной меры в зависимости от $1 \leqslant k \leqslant 100$.

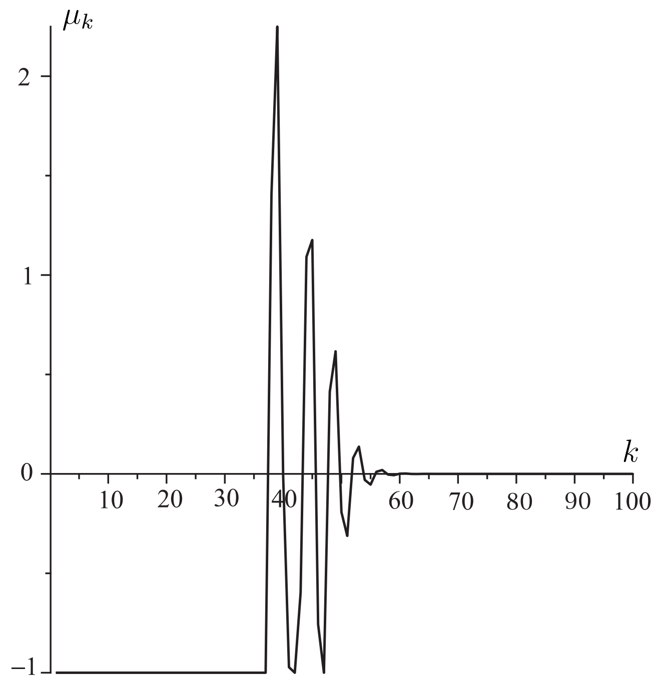


Рис. 4. Коэффициенты μ_k экстремальной меры для $m = 173$ в зависимости от k.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН 1997. Т. 219. С. 44–73.
2. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.
3. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976. 136 с.
4. **Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.** О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т. 14, вып. 1. С. 3–25.
5. **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. Т. 1,2. М.: Мир, 1990. 791 с.
6. **Куклин Н.А.** Вид экстремальной функции в задаче Дельсарта оценки сверху контактного числа трехмерного пространства // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 225–232.
7. **Левенштейн В.И.** Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т. 40. С. 44–110.
8. **Левенштейн В.И.** О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 6. С. 1299–1303.
9. **Мусин О.Р.** Проблема двадцати пяти сфер // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, вып. 4 (352). С. 153–154.
10. **Прасолов В.В.** Многочлены. 3-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2003. 336 с.
11. **Сидельников В.М.** Об экстремальных многочленах, используемых при оценках мощности кода // Проблемы передачи информации. 1980. Т. 16, вып. 3. С. 17–30.
12. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены: 3-е изд., перераб. и доп. М.: Физматлит, 2005. 480 с.
13. **Штром Д.В.** Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Т. 8, № 2. С. 162–189.
14. **Юдин В.А.** Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 115–121.
15. **Anderson E.J., Nash P.** Linear programming in infinite-dimensional spaces: Theory and Applications. Chichester etc.: Wiley, 1987. 172 p. (Wiley Intersci. ser. in discrete mathematics and optimization).

16. **Buchberger B.** An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal: Ph.D. dissertation / University of Innsbruck. 1965. // J. Symb. Comp. 2006. Vol. 41. P. 475–511. (English translation by M. Abramson).
17. **Delsarte Ph.** Bounds for unrestricted codes, by linear programming // Philips Res. Rep. 1972. Vol. 27. P. 272–289.
18. **Faugere J.-C.** A new efficient algorithm for computing Groebner bases (F_4) // J. Pure and Appl. Alg. 1999. Vol. 139, № 1–3. P. 61–88.
19. **Mittelmann H.D., Vallentin F.** High-accuracy semidefinite programming bounds for kissing numbers // Experiment. Math. 2010. Vol. 19, iss. 2. P. 174–178.
20. **Musin O.R.** The kissing problem in three dimensions // Discrete Comput. Geom. 2006. Vol. 35, no. 3. P. 375–384.
21. **Musin O.R.** The kissing number in four dimensions // Ann. of Math. 2008. Vol. 168, no. 1. P. 1–32.
22. **Odlyzko A.M., Sloane N.J.A.** New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. Combinatorial Theory. Ser. A. 1979. Vol. 26, no. 2. P. 210–214.
23. **Schutte K., van der Waerden B.L.** Das Problem der dreizehn Kugeln // Math. Ann. 1953. Bd. 125. S. 325–334.

Куклин Николай Алексеевич
аспирант
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: nickkuklin@gmail.com

Поступила 29.02.2012

Том 18 № 4 2012

УДК 517.5

О НЕРАВЕНСТВАХ РАЗНЫХ МЕТРИК ТИПА С. М. НИКОЛЬСКОГО

Дж. И. Мамедханов

Работа посвящена получению аналогов неравенств типа С.М.Никольского для алгебраических многочленов в весовых пространствах на достаточно общих классах кривых в комплексной плоскости. Подобные неравенства на менее общих классах кривых и для более простых весовых функций были анонсированы ранее нами и в совместных работах И.И. Ибрагимовым. Точность, в смысле порядка, этих неравенств следует из полученных следствий, справедливых на отрезке вещественной оси.

Отметим, что подобные неравенства на вещественной оси были получены в работах С.М. Никольского, Н.К. Бари, И.И. Ибрагимова, С.Б. Стечкина, А.Ф. Тимана, В.В. Арестова и др.

Ключевые слова: неравенства типа С.М.Никольского, комплексная плоскость, алгебраический многочлен, квазиконформные кривые, конформное отображение, линия уровня, кривые Салаева.

J. I. Mamedkhanov. On S.M. Nikol'skii type inequalities between different metrics.

The paper is devoted to the derivation of analogs of S.M. Nikol'skii type inequalities for algebraic polynomials in weighted spaces and for rather general classes of curves in the complex plane. We announced similar inequalities for less general classes of curves and simpler weight functions earlier and in joint papers with I.I. Ibragimov. The order optimality of the inequalities follows from the obtained corollaries, which hold for a closed interval of the real line.

Note that similar inequalities on the real line were obtained by S.M. Nikol'skii, N.K. Bari, I.I. Ibragimov, S.B. Stechkin, A.F. Timan, V.V. Arestov, and others.

Keywords: S.M. Nikol'skii type inequalities, complex plane, algebraic polynomial, quasiconformal curves, conformal mapping, level curve, Salayev curves.

Введение

Неравенствами разных метрик типа С.М.Никольского называются неравенства между различными нормами одной и той же функции из пространства L_p $(0 < p \le \infty)$.

Такие неравенства на вещественной оси для многочленов, рациональных функций и целых функций конечной степени рассматривались в [1–5].

Начиная с 1974 г., неравенства типа Никольского рассматривались нами на различных кривых в комплексной плоскости. При этом, последовательно расширяя класс кривых и классы весовых функций, входящих в эти неравенства, мы анонсировали некоторые результаты в [6–12].

В данной работе представлены достаточно общие результаты, связанные с неравенствами разных метрик типа С.М. Никольского.

Вначале приведем некоторые понятия, обозначения и известные факты, используемые в настоящей статье.

Пусть Ω — произвольная односвязная область в расширенной комплексной плоскости, содержащая точку $z=\infty$, $\overline{B}$ — континуум, являющийся дополнением к Ω, $d_0 \overset{def}{=} diam\,\overline{B} > 0$, $\Gamma = \partial\Omega = \partial\overline{B}$ — их общая граница. Далее, пусть $\omega = \varphi(z)$ — функция, конформно и однолистно отображающая Ω на внешность единичного круга и нормированная условиями $\varphi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\varphi(z)}{z} > 0$. Обозначим через $z = \psi(w) = \varphi^{-1}(w)$ функцию, обратную к $\omega = \varphi(z)$, и через $\Gamma_{1+\sigma} \overset{def}{=} \{t\colon |\varphi(t)| = 1+\sigma > 1\}$ — линию уровня континуума $\overline{B}$, $d(z,\sigma) \overset{def}{=} \inf\limits_{t\in\Gamma_{1+\sigma}} |z-t|$ при $z \in \Gamma$, $\widetilde{d}(t,\sigma) \overset{def}{=} \inf\limits_{z\in\Gamma} |z-t|$ при $t \in \Gamma_{1+\sigma}$.

Для $0 < \delta \le d$ обозначим $\Gamma_\delta(t) = \{\tau\colon |t-\tau| \le \delta, \tau \in \Gamma\}$, $t \in \Gamma$, $\theta_\delta(t) = mes\ \Gamma_\delta(t)$ (мера Лебега), $\theta(\delta) = \sup\limits_{t\in\Gamma} \theta_\delta(t)$. Очевидно, что $\theta(\delta) \ge \delta$.

Определение 1. Кривая Γ принадлежит классу S_θ, если существует постоянная $C(\Gamma) \ge 2$ такая, что $\theta(\delta) \le C(\Gamma)\,\delta$.

Класс S_θ был введен В.В. Салаевым [13] и поэтому мы называем его классом кривых В.В. Салаева [14].

Отметим также, что класс S_θ является наиболее широким из обозримых классов кривых, на которых верна теорема Племеля — Привалова.

Определение 2. Кривая Γ, являющаяся образом окружности при некотором K-квазиконформном отображении плоскости на себя, называется K-квазиконформной кривой. Класс таких кривых обозначим через A_K.

Определение 3. Кривая Γ принадлежит классу K-кривых (классу М.А. Лаврентьева), если, каковы бы ни были на ней точки z_1 и z_2, не большая из дуг, соединяющая их, имеет длину $\ell(z_1, z_2) = \ell_\Gamma(z_1, z_2)$, удовлетворяющую неравенству $|z_1 - z_2| \ge k\ \ell(z_1, z_2)$, где k — положительная постоянная, зависящая от Γ.

Определение 4 (В.К. Дзядык, [4, с. 392]). Будем говорить, что множество E со спрямляемой жордановой границей $\Gamma = \partial E$ принадлежит классу B_k при некотором натуральном k (или $\Gamma \in B_k$), если $\Gamma \in S_\theta$ и удовлетворяет следующим условиям:[1]

1) $|\widetilde{z} - z| \asymp d\Big(z, \dfrac{1}{n}\Big)$, для всех $z \in \Gamma$, где $\widetilde{z} = \widetilde{z}\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \psi\Big(\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)\varphi(z)\Big)$, $\underset{\sim}{z} = \psi\Big(\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{-1}\varphi(z)\Big)$;

2) $|\widetilde{t} - t|^k \preceq |\widetilde{t} - z|^{k-1}\,|\widetilde{z} - z|$, для всех $z, t \in \Gamma$.

Отметим, что при определении класса B_k, В.К.Дзядыком были введены еще два дополнительных условия, которые, как показал В.И. Белый [15], выполняются для любых континуумов со связным дополнением.

Очевидно, что класс K — кривых, содержащий класс кусочно-гладких кривых без точек возврата, содержится в классах B_k и A_k и, тем более, в S_θ. При этом классы кривых A_k и B_k не вложены друг в друга, хотя если $\Gamma \in A_k$, то для нее условия 1) и 2) в определении класса B_k выполняются. Кроме того, как показал В.К. Дзядык [4, с. 393], из условий 1) и 2) следует справедливость условия порядкового равенства

$$|\widetilde{z} - z| \asymp \widetilde{d}\Big(\widetilde{z}, \frac{1}{n}\Big), \tag{$*$}$$

которое, как показал В.В. Андриевский [16], эквивалентно следующему геометрическому свойству области E: любые точки z и $t \in \Gamma$ можно соединить дугой $\gamma(z,t) \subset E$, длина которой удовлетворяет неравенству

$$mes\ \gamma(z,t) \preceq |z - t|. \tag{$**$}$$

Определение 5. Множество E со спрямляемой границей $\Gamma = \partial E$ принадлежит классу D ($\Gamma \in D$), если $\Gamma \in S_\theta$ и для нее выполняется условие $(**)$ либо эквивалентное условие $(*)$.

Очевидно, что класс множеств D, имеющих чисто геометрическое описание, содержит внутри себя классы B_k.

Раннее нами был рассмотрен также и следующий класс кривых (см., например, [14]).

[1] Соотношения $A \asymp B$ и $A \preceq B$ ($A > 0$, $B > 0$) каждый раз определяются относительно некоторого фиксированного набора параметров и соответствуют следующим неравенствам: $C_1\,B \le A \le C_2\,B$ и $A \le C_3\,B$, где $C_k > 0$ ($k = 1, 2, 3$) — константы, не зависящие от упомянутого набора параметров.

О п р е д е л е н и е 6. Обозначим через $\mathcal{J}_\gamma$ класс спрямляемых кривых Γ, для которых при любом заданном $\gamma > 1$ и всех $t \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}$ справедливо следующее соотношение:

$$\widetilde{d}^{\gamma-1}\Big(t,\frac{1}{n}\Big)\int\limits_{\Gamma}\frac{|dz|}{|z-t|^\gamma} \le C(\Gamma,\gamma), \tag{A}$$

где $C(\Gamma,\gamma)$ — положительная постоянная, зависящая лишь от Γ и γ.

Для этого класса была доказана

Лемма 1 [14]. *Если $\Gamma \in S_\theta$, то для любого заданного $\gamma > 1$, $\Gamma \in \mathcal{J}_\gamma$, т. е. $S_\theta \subset \mathcal{J}_\gamma$.*

Кроме того, там же в [14] был приведен пример кривой Γ, не принадлежащей S_θ, которая также не принадлежит и $\mathcal{J}_\gamma$.

Позднее в работе [17] было доказано обратное вложение $J_\gamma \subset S_\theta$ при $1 < \gamma \le 2$. Таким образом, учитывая утверждение леммы 1, имеем $S_\theta = \mathcal{J}_\gamma$ при $(1 < \gamma \le 2)$.

Кроме того, нами были доказаны следующие утверждения [14; 18].

Лемма 2. *Пусть $\Gamma \in D$. Тогда при $\gamma > 1$ и всех $z \in \Gamma$ справедливо неравенство*

$$d^{\gamma-1}\int\limits_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}}\frac{|dt|}{|t-z|^\gamma} \le C(\Gamma,\gamma).$$

Лемма 3. *Пусть $\Gamma \in D$ (или более обще, $\Gamma \in J_\gamma$). Тогда для любого многочлена P_n степени не выше n при $p \ge 1$ и $s \in (-\infty,\infty)$ справедливо неравенство*

$$\Big\|\widetilde{d}^{-s}\Big(t,\frac{1}{n}\Big)P_n(t)\Big\|_{L_p\left(\Gamma_{1+\frac{1}{n}}\right)} \le C(\Gamma,p,s)\,\Big\|\widetilde{d}^{-s}\Big(z,\frac{1}{n}\Big)P_n(z)\Big\|_{L_p(\Gamma)}, \tag{a}$$

$$d(\widetilde{t},\Gamma) \asymp \widetilde{d}\Big(t,\frac{1}{n}\Big). \tag{b}$$

Нам понадобится также

Лемма А [19, теорема 1]. *Пусть $\overline{B}$—произвольный континуум со связным дополнением. Тогда при $|w| > 1$ выполняются соотношения $|\psi'(w)| \asymp \dfrac{d\left(\psi(w),\overline{B}\right)}{|w|-1}$, $|\varphi'(z)| \asymp \dfrac{|\varphi(z)|-1}{d(z,\overline{B})}$, $z = \psi(w)$, где $d(z,\overline{B})$ — расстояние от точки $z = \psi(w)$ до $\overline{B}$.*

Пусть Γ — произвольная жорданова спрямляемая кривая, φ — отличная от нуля, измеримая и почти всюду конечная на Γ функция. Обозначим через $L_p(\Gamma,\varphi)$ пространство функций f, определенных на Γ, с конечной нормой $\|f\|_{L_p(\Gamma,\varphi)} = \left(\int_\Gamma \left|\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}\right|^p|dz|\right)^{1/p}$ $\forall p \ge 1$.

Очевидно, что алгебраический многочлен P_n степени $\le n$ принадлежит пространству $L_p\left(\Gamma, d^s\left(z,\frac{1}{n}\right)\right)$ $(\forall p \ge 1,\ -\infty < s < \infty)$ в случае, когда Γ — произвольная K-квазиконформная кривая или кривая из класса S_θ и в то же время принадлежит пространству $L_p(\Gamma) \equiv L_p(\Gamma,1)$ $(\forall p \ge 1,\ \varphi \equiv 1)$ в случае, когда Γ — произвольная жорданова спрямляемая кривая. При $p = \infty$ мы имеем, фактически, норму в метрике $C(\Gamma)$.

В данной работе устанавливаются неравенства типа С.М. Никольского для многочленов, т. е. найдена зависимость между нормами

$$\|P_n\|_{L_{p'}\left(\Gamma,d^{s+(\alpha-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)},\quad \|P_n\|_{L_{p'}\left(\Gamma_{1+\frac{1}{n}},d^{s+(\alpha-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)}\quad \text{и}\quad \|P_n\|_{L_p\left(\Gamma,d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)},$$

где $\Gamma \in B_k$, $0 \le \alpha \le 1$, $-\infty < s < \infty$ и $1 \le p < p' \le \infty$.

В частности, найдена связь между нормами $\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)}$ и $\|P_n\|_{L_p(\Gamma)}$ в случае, когда Γ — произвольная жорданова спрямляемая кривая.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \in B_k$ $(k \geq 2)$ *при некотором натуральном* k. *Тогда при* $\alpha \in [0,1]$,

$$-\frac{1}{(k-1)p} - \alpha\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\Big) < \Big|s + \alpha\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\Big)\Big| < \frac{k}{(k-1)p} - \alpha\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\Big) \quad \text{и} \quad 1 \leq p < p' \leq \infty$$

справедливо неравенство

$$\|P_n\|_{L_{p'}\left(\Gamma, d^{s+(\alpha-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)} \leq C(p,p',s,\Gamma)\ \|P_n\|_{L_p\left(\Gamma, d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)},$$

где $C(p,p',s,\Gamma)$ — *постоянная, зависящая лишь от* p, p', s, Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале убедимся в справедливости неравенства

$$\frac{|P_n(z)|}{d^{\beta-\frac{1}{p}}\left(z,\frac{1}{n}\right)} \leq C(p,\Gamma)\left(\int\limits_{\Gamma_{1+1/n}} \left|\frac{P_n(t)}{\widetilde{d}^{\,\beta}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^p |dt|\right)^{1/p}, \quad z \in \Gamma \tag{1}$$

при $\beta \in (-1/(k-1)p,\, k/(k-1)p)$.

Используя формулу Коши, в силу неравенства Гельдера имеем $(1/p + 1/q = 1)$

$$|P_n(z)| \leq \left(\int\limits_{\Gamma_{1+1/n}} \left|\frac{P_n(t)}{\widetilde{d}^{\,\beta}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^p |dt|\right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{\widetilde{d}^{\,\beta q}\left(t,\frac{1}{n}\right)}{|t-z|^q}|dt|\right)^{1/q}. \tag{2}$$

Теперь, учитывая, что для $\Gamma \in B_k$ справедливы соотношения

$$|t - \underset{\sim}{t}|^k \preceq |t-z|^{k-1}|\widetilde{z} - z|, \quad d\Big(z, \frac{1}{n}\Big) \asymp |\widetilde{z} - z|, \quad \widetilde{d}\Big(t, \frac{1}{n}\Big) \asymp |t - \underset{\sim}{t}|,$$

$$\underset{\sim}{t} = \psi\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1}\varphi(\widetilde{t})\Big), \quad t \in \Gamma_{1+1/n}, \quad z \in \Gamma, \quad \underset{\sim}{t} = \psi\Big(\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{-1}\varphi(t)\Big),$$

согласно лемме 2 для второго интеграла в (2) при $\beta \in \Big[0,\ \dfrac{k}{(k-1)p}\Big)$ получим

$$\left(\int\limits_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{\widetilde{d}^{\,\beta q}\left(t,\frac{1}{n}\right)\,|dt|}{|t-z|^q}\right)^{1/q} \preceq d^{\beta/k}\Big(z, \frac{1}{n}\Big)\left(\int\limits_{\Gamma_{1+1/n}} \frac{|t-z|^{\frac{\beta q(k-1)}{k}}\,|dt|}{|t-z|^q}\right)^{1/q} \preceq d^{\beta-1/p}\Big(z, \frac{1}{n}\Big).$$

Аналогично рассматривается и случай $\beta \in \Big(-\dfrac{k}{(k-1)p}, 0\Big)$. Отсюда в силу (2) и леммы 3 следует справедливость неравенства (1).

Полагая $\beta = s + \alpha\Big(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p'}\Big)$ $(0 \leq \alpha < 1)$, замечаем, что в этом случае $s \in \Big(-\dfrac{1}{(k-1)p} - \alpha\Big(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p'}\Big), \dfrac{k}{(k-1)p} - \alpha\Big(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p'}\Big)\Big)$ и неравенство (1) принимает вид

$$\frac{|P_n(z)|}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)-\frac{1}{p}}\left(z,\frac{1}{n}\right)} \preceq \left(\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^p |dt|\right)^{1/p}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\|P_n\|_{L_{p'}\left(\Gamma, d^{s+(\alpha-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)} = \left(\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^p \left|\frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^{p'-p} \frac{|dt|}{d^{-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)p'}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right)^{1/p'}$$

$$= \left(\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t, \frac{1}{n}\right)} \right|^{p} \left| \frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)-\frac{1}{p}}\left(t, \frac{1}{n}\right)} \right|^{p'-p} \frac{d^{-\frac{p'-p}{p}}\left(t, \frac{1}{n}\right)|dt|}{d^{-\frac{p'-p}{p}}\left(t, \frac{1}{n}\right)} \right)^{1/p'}$$

$$\preceq \left(\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t, \frac{1}{n}\right)} \right|^{p} |dt| \right)^{\frac{p'-p}{pp'}} \left(\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{P_n(t)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t, \frac{1}{n}\right)} \right|^{p} |dt| \right)^{1/p'}$$

$$= \|P_n\|_{L_p\left(\Gamma, d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)}, \tag{3}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in B_k$ *при некотором* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда при любых* $s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ *и* $0 < p < p' \le \infty$ *справедливо неравенство*

$$\|P_n\|_{L_{p'}\left(\Gamma_{1+\frac{1}{n}},\ \widetilde{d}^{s+(\alpha-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)} \le C(p, p', s, \Gamma)\ \|P_n\|_{L_p\left(\Gamma,\ d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь рассуждениями Дж. Уолша [20, с. 120], леммой 1 и соотношением (b) леммы 3, получим

$$\left| \frac{P_n(t)}{\widetilde{d}^{s}\left(z, \frac{1}{n}\right)} \right| \le C(\Gamma, s, p)\, \widetilde{d}^{-\frac{1}{p}}\left(t, \frac{1}{n}\right) \|P_n\|_{L_p(\Gamma, d^s)}, \quad p > 0, \tag{4}$$

где $t \in \Gamma_{1+\frac{1}{n}}$.

В случае $s \ge 0$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$Q(z) = \frac{[\varphi'(z)]^s\, P_n(z)}{n^s\, \varphi^n(z)} \prod_{j=1}^{m} \frac{1 - \overline{\varphi(z_j)}\varphi(z)}{\varphi(z) - \varphi(z_j)}, \tag{5}$$

где z_j $(j = \overline{1,m})$ — это все нули многочлена $P_n(z)$, не лежащие на Γ.

Очевидно, что каждая ветвь этой функции является однозначной, аналитической, отличной от нуля в расширенной плоскости вне Γ и непрерывной на Γ. Кроме того, в силу леммы А на Γ справедливо соотношение $(d^s(\widetilde{z}, 1/n))^{-1} |P_n(t)| \asymp |Q(z)|$, откуда $\|Q\|_{L_p(\Gamma)} \asymp \|P_n\|_{L_p(\Gamma, d^s)}$. Заметим, что каждая ветвь функции $[Q(z)]^{p/2}\varphi^{-1}(z)$ аналитична во внешности Γ, равна нулю в бесконечности и непрерывна на Γ, а значит, представима интегралом Коши

$$\frac{[Q(t)]^{p/2}}{\varphi(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{[Q(z)]^{p/2}\, dz}{\varphi(z)\,(z-t)}.$$

Отсюда следует, что для $t \in \Gamma_{1+1/n}$ справедлива оценка

$$\left| \frac{P_n(t)}{d^s\left(\widetilde{t}, \Gamma\right)} \right|^{p/2} \asymp |\varphi(t)|^{n+1} \prod_{j=1}^{m} \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(z_j)}{1 - \overline{\varphi(z_j)}\varphi(t)} \right| \frac{|Q(t)|^{p/2}}{|\varphi(t)|} \le \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \left| \frac{P_n(z)}{\widetilde{d}^s\left(\widetilde{z}, \frac{1}{n}\right)} \right|^{p/2} \frac{|dz|}{|z-t|}, \tag{6}$$

так как согласно принципу максимума $\left| \dfrac{\varphi(t) - \varphi(z_j)}{1 - \overline{\varphi(z_j)}\varphi(t)} \right| \le 1$ $(j = \overline{1,m})$. Далее, в силу неравенства Гельдера и леммы 1, а также в силу свойств класса B_k и соотношения (b) леммы 3 имеем

$$\left| \frac{P_n(t)}{d^s\left(\widetilde{t}, \Gamma\right)} \right|^{p/2} \le \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\pi} \left(\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{P_n(z)}{\widetilde{d}^s\left(\widetilde{z}, \frac{1}{n}\right)} \right|^{p} |dz| \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Gamma} \frac{|dz|}{|z-t|^2} \right)^{1/2},$$

откуда

$$\left|\frac{P_n(t)}{\widetilde{d}^s\,(t,\Gamma)}\right| \preceq \left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\,\pi}\right\}^{2/p} \widetilde{d}^{-1/p}\Big(t,\frac{1}{n}\Big)\,\|P_n\|_{L_p(\Gamma)}.$$

В случае $s<0$ введем вспомогательную функцию

$$Q_1(z)=\frac{P_n(z)\,[\varphi'(z)]^s}{n^s\,\varphi^{n+|s|}(z)}\prod_{j=1}^{m}\frac{1-\overline{\varphi(z_j)}\varphi(z)}{\varphi(z)-\varphi(z_j)},$$

и с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в случае $s\geq 0$, получим требуемое неравенство (4).

Теперь, исходя из того, что оценка (4) остается справедливой, если вместо s взять $s+\alpha(1/p-1/p')$ $(0\leq\alpha\leq 1)$, то будем иметь

$$\frac{|P_n(t)|}{\widetilde{d}^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)-\frac{1}{p}}\left(t,\frac{1}{n}\right)} \preceq \left(\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{P_n(z)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(z,\frac{1}{n}\right)}\right|^p|dz|\right)^{1/p}.$$

Отсюда, с учетом леммы 3 непосредственно следует неравенство

$$\|P_n\|_{L_{p'}\left(\Gamma_{1+\frac{1}{n}},\ d^{s+(\alpha-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)} = \left(\int\limits_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}}\left|\frac{P_n(t)}{\widetilde{d}^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^p\left|\frac{P_n(t)}{\widetilde{d}^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)-\frac{1}{p}}\left(t,\frac{1}{n}\right)}\right|^{p'-p}|dt|\right)^{1/p'}$$

$$\preceq \left(\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{P_n(z)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(z,\frac{1}{n}\right)}\right|^p|dz|\right)^{\frac{p'-p}{p'p}}\left(\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{P_n(z)}{d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\left(z,\frac{1}{n}\right)}\right|^p|dz|\right)^{1/p'} = \|P_n\|_{L_p\left(\Gamma,d^{s+\alpha\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\right)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть* Γ *— произвольная жорданова спрямляемая кривая и* $0<p<p'\leq\infty$. *Тогда*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq \left\{(2\,\pi)^{-1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}\right\}^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\ \delta_1^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\Big(\frac{1}{n}\Big)\ \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}\,, \tag{7}$$

где $\delta_1\,(1/n)=\max\limits_{t\in\Gamma_{1+\frac{1}{n}}}\int\limits_{\Gamma}|t-z|^{-2}|dz|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая вспомогательную функцию $Q(z)$ (см. (5)) при $s=0$ и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве (6), получим

$$|P_n(t)|^{p/2}\leq\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\,\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{|P_n(z)|^{p/2}}{|z-t|}\,|dz|\quad\forall t\in\Gamma_{1+\frac{1}{n}},\quad p>0.$$

Отсюда в силу принципа максимума и неравенства Гельдера будем иметь

$$|P_n(z)|\leq\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\,\pi}\right]^{2/p}\left[\delta_1\Big(\frac{1}{n}\Big)\right]^{1/p}\|P_n\|_{L_p(\Gamma)}\,.$$

Оценка (7) получается так же, как в (3).

Из этой теоремы непосредственно можно получить следующее важное утверждение.

Следствие 1. *Пусть кривая* Γ *принадлежит классу* $\mathcal{J}_\gamma$ *(или* S_θ*)*$(\gamma > 1)$ *и* $0 < p \le p' \le \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \le \left\{ \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\,\pi} \right\}^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \left\{ \frac{C(\Gamma,\gamma)}{d\left(\frac{1}{n}\right)} \right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}\,,$$

где $d\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \overset{def}{=} \inf\limits_{z\in\Gamma} d\Big(z,\dfrac{1}{n}\Big)$, *а* $C(\Gamma,\gamma)$ *— постоянная в формуле* (A) *определения* 6.

Из этого следствия получаются более конкретные неравенства для известных классов $W(\alpha)$ и $W_{[0,2]}$ (см., например, [4]). Напомним:

1) $W(\alpha)$ есть совокупность всех замкнутых (разомкнутых) жордановых кривых Γ, для которых отображающая функция $\varphi(z)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi(t)-\varphi(z)| \le C_*(\Gamma)\,|t-z|^{1/\alpha}, \quad \alpha\in[1,2], \quad z\in\Gamma, \quad t\in\Gamma_{1+\frac{1}{n}}.$$

2) $W_{[0,2]}$ есть совокупность всех жордановых кривых Γ, состоящих из конечного числа гладких дуг, каждая из которых имеет непрерывную кривизну, причем эти дуги образуют между собой в точках стыка z_j, соответственно, внешние углы $\alpha_j\,\pi$ $(j=\overline{1,k})$ такие, что $0 \le \alpha_j \le 2$.

В работе [19] приведены следующие оценки:

а) если $\Gamma\in W(\alpha)$, то $n^{-\alpha} \preceq d\Big(z,\dfrac{1}{n}\Big) \le d\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$;

б) если $\Gamma\in W_{[0,2]}$, то $d\Big(z,\dfrac{1}{n}\Big) \ge C(\Gamma)\,n^{-\alpha_*}$, $\alpha_* = \max\limits_{1\le j\le k}(1,\alpha_j)$.

Пользуясь этими оценками, из следствия 1 получим

Следствие 2. *Пусть* $0 < p \le p' \le \infty$. *Тогда*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \le \begin{cases} \left\{ \left[\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{2\,\pi}\right]^2 C(\Gamma)\,C_*^{\alpha}(\Gamma)\,n^{\alpha} \right\}^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}\,, & \Gamma\in W(\alpha); \\ C(p,p',\Gamma)\,n^{\alpha_*\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)}\,\|P_n\|_{L_p(\Gamma)}\,, & \Gamma\in W_{[0,2]}, \end{cases}$$

где $\alpha_* = \max\limits_{1\le j\le k}(1,\alpha_j)$, $C_*(\Gamma)$ *— постоянная, входящая в определение класса* $W(\alpha)$.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 в случае $\Gamma\equiv[-1,1]$ и $1\le p\le p'\le\infty$ доказана М.К. Потаповым [21]. Теорема 2, также и в случае $\Gamma\equiv[-1,1]$, насколько нам известно, получена впервые нами.

Докажем теперь неравенство типа С.М. Никольского с определенной постоянной в терминах величины $d\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ на произвольных жордановых спрямляемых кривых.

Теорема 4. *Если* Γ *есть произвольная спрямляемая жорданова кривая и* $1 \le p < p' \le \infty$, *то*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \le 2^{1-\frac{p}{p}'} \left(\frac{2\ell}{d\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}'} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}\,. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z=z(s)$ $(0\le s\le\ell,\ \ell-$ длина кривой $\Gamma)$ есть уравнение кривой Γ и $M_n = \sup\limits_{z\in\Gamma}|P_n(z)| = \big|P_n\big(z_0^{(n)}\big)\big|$, $z_0^{(n)} = z_0^{(n)}(s_0)\in\Gamma$.

Обозначим через γ_n дугу кривой Γ (или множество точек Γ), на которой выполняется соотношение $|P_n(z)| \ge M_n/2$, $z\in\gamma_n$, а через $\ell(\gamma_n)$ — нижнюю грань длин дуг γ_n по всем полиномам P_n.

Очевидно, имеем

$$\|P_n\|_{L_p(\Gamma)} = \left\{ \int\limits_{\Gamma} |P_n(z)|^p \; |dz| \right\}^{1/p} \geq \left\{ \int\limits_{\gamma_n} |P_n(z)|^p \; |dz| \right\}^{1/p} \geq M_n/2 \left\{ \int\limits_{\gamma_n} |dz| \right\}^{1/p} = M_n/2 \, \{\ell(\gamma_n)\}^{1/p},$$

откуда

$$|P_n(z)| \leq 2 \; [\ell(\gamma_n)]^{-1/p} \, \|P_n\|_{L_p(\Gamma)} \, . \tag{9}$$

Теперь определим величину $\ell(\gamma_n)$. Следуя С.Н. Мергеляну [22, с. 43], выводим

$$\left|P_n'(z)\right| \leq \frac{e}{d\left(z, \frac{1}{n}\right)} \; \|P_n\|_{C(\Gamma)} \, .$$

Отсюда и из оценки

$$\left|P_n(z_1) - P_n\big(z_0^{(n)}\big)\right| \leq \int\limits_{s_0}^{s_1} \left|P_n'(\xi)\right| \; |d\xi|, \quad z_1 \in \Gamma,$$

при $z = z_1$ получим $\left|P_n(z) - P_n\big(z_0^{(n)}\big)\right| \leq \dfrac{e}{d\Big(\frac{1}{n}\Big)} \, M_n \; |s - s_0|$, и, следовательно,

$$|P_n(z)| \geq M_n - \frac{e}{d\Big(\frac{1}{n}\Big)} \, |s - s_0| \; M_n.$$

Очевидно, полагая $|s - s_0| \leq \dfrac{d\Big(\frac{1}{n}\Big)}{2e}$, имеем $|P_n(z)| \geq \; M_n/2$.

Таким образом, в данном случае $mes \, \ell(\gamma_n) \geq \dfrac{d\Big(\frac{1}{n}\Big)}{2e}$.

Учитывая последнюю оценку, в силу неравенства (9) имеем $|P_n(z)| \leq 2\Bigg(\dfrac{2e}{d\left(\frac{1}{n}\right)}\Bigg)^{1/p} \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}$, откуда из очевидного неравенства $\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \; \leq \; \max\limits_{z \in \Gamma} |P_n(z)|^{\frac{p'-p}{p'}} \; \|P_n\|_{L_p(\Gamma)}^{\frac{p}{p}'}$ следует требуемая оценка (8).

Следствие 3. *Пусть* $\Gamma \equiv [-1, 1]$ *и* $1 \leq p < p' \leq \infty$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\|P_n\|_{L_{p'}[-1,1]} \leq 2^{1-\frac{p}{p'}} \; \left(12en^2\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}'} \; \|P_n\|_{L_p[-1,1]} \, . \tag{10}$$

Это непосредственное следствие из теоремы 4, если учесть, что для $\Gamma \equiv [-1, 1]$ справедливо соотношение [4, с. 258] $d\Big(\frac{1}{n}\Big) \geq 1/6 \; n^2$ при $\; n \geq 2$.

Отметим, что оценка (10) в плане порядка по n совпадает с точной оценкой для многочленов $\|P_n\|_{L_{p'}[-1,1]} \leq \left\{(p+1) \, n^2\right\}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \|P_n\|_{L_p[-1,1]}$, полученной ранее А.Ф. Тиманом [5, с. 251], а для достаточно больших p, в частности для $p > 70$, улучшает ее в смысле постоянной.

Следствие 4. *Пусть* $\Gamma = \{z \colon |z| = 1\}$ *и* $1 \leq p < p' \leq \infty$. *Тогда*

$$\|P_n\|_{L_{p'}(\Gamma)} \leq 2^{1-\frac{p}{p'}} \; (2en)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}'} \; \|P_n\|_{L_p(\Gamma)} \, . \tag{11}$$

Эта оценка непосредственно получается из (8), если учесть, что в случае $\Gamma = \{z \colon |z| = 1\}$ справедливо равенство $d\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{n}$.

Отметим, что в плане порядка оценка (11) совпадает с заведомо точной оценкой для тригонометрических полиномов, полученной в работах Н.К. Бари, И.И. Ибрагимова и А.Ф. Тимана [5, с. 243], а при некоторых значениях p улучшает ее в смысле постоянной.

Более точные, подобные оценки для тригонометрических полиномов были получены в работах С.Б. Стечкина и В.В. Арестова [23].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мамедханов Дж.И.** Некоторые экстремальные задачи в классе полиномов и рациональных функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, вып. 6. С. 1277–1279.
2. **Мамедханов Дж.И.** Неравенства для положительных целых функций в обобщенном пространстве Лебега // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, вып. 3. С. 526–528.
3. **Ибрагимов И.И., Мамедханов Дж.И.** Связь между нормами с весом целой функции конечной степени на прямых, паралельных вещественной оси // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157, вып. 2. С. 247–255.
4. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближение функции полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
5. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 626 с.
6. **Мамедханов Дж.И.** Неравенства типа С.М. Никольского для многочленов комплексного переменного на кривых // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, вып. 1. С. 34–37.
7. **Мамедханов Дж.И.** Оценки производных аналитических функций на кривых // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, вып. 3. С. 526–528.
8. **Мамедханов Дж.И.** Некоторые интегральные оценки на кривых в комплексной плоскости // Конструктивная теория функций: тез. докл. Междунар. конф. Варна, 1981. С. 81–82.
9. **Мамедханов Дж.И.** Некоторые классические неравенства на кривых в интегральных метриках // Теория приближения функций: тез. докл. Междунар. конф. Киев, 1983. С. 112–113.
10. **Ибрагимов И.И., Мамедханов Дж.И.** Неравенства типа С.М. Никольского // Конструктивная теория функций: тез. докл. Всерос. конф. Днепропетровск, 1985. С. 67–68.
11. **Мамедханов Дж.И.** О неравенствах типа С.М.Никольского // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1987. Т. 180. С. 118–119.
12. **Мамедханов Дж.И.** Неравенства типа С.М. Никольского в комплексной плоскости // Конструктивная теория функций: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию С.М. Никольского. Москва, 1995. С. 67–68.
13. **Салаев В.В.** Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой // Мат. заметки. 1976. Т. 19, вып. 3. С. 365–380.
14. **Мамедханов Дж.И.** Неравенства Маркова — Бернштейна на кривых В.В. Салаева // Теория функций и приближений: сб. тр. шк. Саратов, 1986. С. 127–134.
15. **Белый В.И.** Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей // Мат. сб. 1977. Т. 102, вып. 144, № 3. С. 331–361.
16. **Андриевский В.В.** Геометрические свойства областей В.К. Дзядыка // Укр. мат. журн. 1981. Т. 33, вып. 6. С. 723–727.
17. **Долженко Е.П., Данченко В.И.** Отображение множеств конечной α-меры посредством рациональных функции // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1987. Т. 51, вып. 6. С. 1309–1321.
18. **Мамедханов Дж.И.** Некоторые интегральные неравенства для многочленов на кривых в комплексной плоскости // Специальные вопросы теории функции. Вып. IV. Баку: Элм, 1989. С. 122–156.
19. **Андриевский В.В.** Некоторые свойства контимуумов с кусочно квазиконформной границей // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32, вып. 4. С. 435–440.
20. **Уолш Дж.** Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости. Москва: ИЛ, 1961. 508 с.
21. **Потапов М.К.** О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1975. Т. 134. С. 260–277.
22. **Мергелян С.Н.** Равномерное приближение функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, вып. 2(48), С. 31–122.
23. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 4. С. 539–547.

Мамедханов Джамал Исламович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Бакинский государственный университет
e-mail: jamalmamedkhanov@rambler.ru

Поступила 17.03.2011

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.51

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА КВАДРАТЕ С МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ РАВНОМЕРНОЙ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА[1]

С. И. Новиков

Рассмотрена задача интерполяции конечных наборов числовых данных гладкими функциями, определенными в квадрате на плоскости и обращающимися в нуль на его границе. При некоторых ограничениях на расположение точек интерполяции внутри квадрата для L_∞-норм оператора Лапласа наилучших интерполянтов получены двусторонние оценки, правильно зависящие от числа точек интерполяции, а для интерполяции в одной точке — центре квадрата найдено точное решение.

Ключевые слова: интерполяция, оператор Лапласа, кубические B-сплайны.

S. I. Novikov. Interpolation on a square with a minimum value of the uniform norm of the Laplace operator.

We consider the problem of interpolation of finite sets of numerical data by smooth functions that are defined on a plane square and vanish on its boundary. Under some constraints on the location of interpolation points inside the square, we obtain two-sided estimates with a correct dependence on the number of interpolation points for the L_∞-norms of the Laplace operator of the best interpolants. For the case of interpolation at one point, which is the center of the square, we find an exact solution.

Keywords: interpolation, Laplace operator, cubic B-splines.

Настоящая работа посвящена задаче интерполирования конечного набора числовых данных гладкими функциями с минимальным значением нормы оператора Лапласа внутри квадрата при условии, что интерполянты обращаются в нуль на его границе.

Изучаемая проблема тесно связана с интерполяционной задачей Фавара (см., например, [1–3]) и с задачами экстремальной интерполяции [4–8] (одномерные задачи), [5;9] (многомерные задачи). Работа автора [10] содержит обзор этой тематики и подробную библиографию.

Переходим к точной постановке рассматриваемой задачи. Пусть

$$Q \;=\; \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon |x|<1/2,\ |y|<1/2\big\}$$

— единичный квадрат с центром в нуле. Через $\overline{Q}$ обозначаем замыкание Q, а через ∂Q — его границу.

Для конечного набора вещественных чисел $z=\{z_j\}_{j=1}^N$ полагаем

$$\|z\|_{l_\infty^N}=\max\{|z_j|\colon j=1,2,\dots,N\}.$$

Определяем класс данных

$$\mathfrak{M}_\infty \;=\; \Big\{z\colon z=\{z_j\}_{j=1}^N,\ \|z\|_{l_\infty^N}\le 1\Big\},$$

которые будем интерполировать в точках $\big\{t^{(s)}=(x^{(s)},y^{(s)})\big\}_{s=1}^N\subset Q,\ t^{(k)}\ne t^{(j)}\ (k\ne j)$.

Пусть

$$F_N(z) \;=\; \Big\{u\in C^2(Q)\bigcap C(\overline{Q})\colon\ \ u|_{\partial Q}=0,\ u(t^{(s)})=z_s,\ \ s=1,2,\dots,N\Big\}$$

— класс функций, интерполирующих фиксированный элемент $z\in\mathfrak{M}_\infty$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 11-01-00347) и программы проектов исследований, выполняемых совместно в Уральском и Сибирском отделениях РАН (проект 12-С-1-1018).

Как обычно, через Δ обозначается оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ и $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x,y)|\colon (x,y)\in Q\}$.

Целью настоящей работы является исследование величины

$$a_\infty^N(Q) = \sup_{z\in\mathfrak{M}_\infty}\ \inf_{u\in F_N(z)}\ \|\Delta u\|_\infty, \tag{1}$$

которую можно интерпретировать как равномерную норму функции, полученной применением оператора Лапласа к “наилучшей” функции из класса $F_N(z)$, при интерполировании “наихудших” данных из множества $\mathfrak{M}_\infty$. На величину (1) можно также смотреть как на интерполяционную задачу Фавара для класса интерполируемых данных $\mathfrak{M}_\infty$.

В случае $N=1$ верхний индекс в обозначении величины (1) будем опускать.

Аналогичная (1) величина в случае шара в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$ была рассмотрена в работах автора [11; 12].

Основными результатами настоящей работы являются две теоремы, в первой из которых найдено точное значение величины (1) при $N=1$, а во второй для нее получены двусторонние оценки при всех $N\ge 2$.

Теорема 1. *Если $u(0,0)=1$, то*

$$a_\infty(Q) = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\ \operatorname{ch}\dfrac{\pi(2k+1)}{2}}\right)^{-1}.$$

Для доказательства теоремы 1 нужна следующая

Лемма 1. *Пусть $a_2>a_1$, $b_2>b_1$ и $Q_{a,b} = (a_1,a_2)\times(b_1,b_2)$ — открытый прямоугольник в $\mathbb{R}^2$. Тогда для любой константы $c\in\mathbb{R}$ решение внутренней задачи Дирихле*

$$\begin{cases}\Delta u = c,\\ u|_{\partial Q_{a,b}} = 0\end{cases}$$

в классе функций $C^2(Q_{a,b})\bigcap C(\overline{Q_{a,b}})$ имеет следующий вид:

$$u(x,y) = c\left\{\frac{(x-a_1)(x-a_2)}{2} + \frac{4(a_2-a_1)^2}{\pi^3}\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{a_2-a_1}\left(y-\dfrac{b_2+b_1}{2}\right)\right)\sin\left(\dfrac{\pi(2k+1)(x-a_1)}{a_2-a_1}\right)}{(2k+1)^3\ \operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi(2k+1)(b_2-b_1)}{2(a_2-a_1)}\right)}\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится стандартными методами теории уравнений в частных производных.

Представляем искомое решение в виде суммы двух функций $u = v + w$, где функция $v = v(x,y)$ есть решение краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta v = c,\\ v(a_1,y) = v(a_2,y) = 0, \quad y\in[b_1,b_2],\end{cases}$$

а функция $w = w(x,y)$ — решение другой краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta w = 0,\\ w(x,b_1) = -v(x,b_1),\ \ w(x,b_2) = -v(x,b_2), \quad x\in[a_1,a_2],\end{cases}$$

краевые условия в которой определяются функцией v.

Нетрудно видеть, что в качестве v можно взять функцию одной переменной

$$v(x) = \frac{c}{2}(x - a_1)(x - a_2).$$

Для нахождения функции $w = w(x, y)$ применяем метод Фурье разделения переменных (см., например, [13, § 26]): ищем решение в виде $w(x, y) = X(x)Y(y)$. В результате получаем два обыкновенных линейных дифференциальных уравнения второго порядка относительно $X(x)$ и $Y(y)$ соответственно:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

с краевыми условиями на функцию $X(x)$: $X(a_1) = X(a_2) = 0$, где λ — неизвестная вещественная константа. Нетрудно видеть, что функция $X(x)$ отлична от тождественного нуля только в том случае, когда λ совпадает с элементами последовательности $\lambda_n = \pi^2 n^2 (a_2 - a_1)^{-2}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда с учетом краевых условий получаем

$$X(x) \;=\; A \sin\Big(\frac{\pi n}{a_2 - a_1}(x - a_1)\Big)$$

при некоторой ненулевой константе A. Для найденных значений $\lambda = \lambda_n$ решаем дифференциальное уравнение относительно $Y(y)$ и получаем общее решение в виде

$$Y(y) \;=\; \beta_1 \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n}{a_2 - a_1}(y - b_1)\Big) + \beta_2 \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n}{a_2 - a_1}(b_2 - y)\Big),$$

где β_1, β_2 — произвольные вещественные константы. Теперь полагаем

$$w(x, y) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \Big\{ A_n \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n(y - b_1)}{a_2 - a_1}\Big) + B_n \operatorname{sh}\Big(\frac{\pi n(b_2 - y)}{a_2 - a_1}\Big) \Big\} \; \frac{\sin\Big(\dfrac{\pi n}{a_2 - a_1}(x - a_1)\Big)}{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{\pi n}{a_2 - a_1}(b_2 - b_1)\Big)}\,. \tag{2}$$

Подставляем в (2) $y = b_1$ и получаем, что при всех $x \in [a_1, a_2]$

$$v(x) \;=\; -\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \; \sin\Big(\frac{\pi n(x - a_1)}{a_2 - a_1}\Big).$$

Это равенство означает, что $\{B_n\}_{n=1}^{+\infty}$ представляют собой коэффициенты разложения функции $g(x) = -v(x)$ в ряд Фурье по ортогональной на отрезке $[a_1, a_2]$ системе тригонометрических функций $\Big\{ \sin\Big(\dfrac{\pi n}{a_2 - a_1}(x - a_1)\Big) \Big\}_{n=1}^{+\infty}$. В результате

$$B_n \;=\; \begin{cases} \dfrac{4c(a_2 - a_1)^2}{\pi^3 (2k+1)^3}, & n = 2k+1, \\ \quad 0, & n = 2k. \end{cases} \tag{3}$$

Полагая в (2) $y = b_2$, получаем

$$A_n = B_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Для завершения доказательства остается подставить (3) и (4) в представление (2), выполнить там элементарные преобразования и воспользоваться ранее найденным явным видом функции v. Полученное решение единственно. Лемма 1 доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Применив лемму 1 к квадрату Q, после несложных преобразований получаем, что функция

$$u(x,y) \;=\; c\left\{\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)+\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\;\operatorname{ch}(\pi y(2k+1))\;\cos(\pi x(2k+1))}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right\}$$

является единственным решением внутренней задачи Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u = c,\\ u|_{\partial Q}=0\end{cases}$$

в классе $C^2(Q)\bigcap C(\overline{Q})$ для любой константы $c\in\mathbb{R}$.

Поскольку

$$u(0,0) \;=\; c\left\{-\frac{1}{8}+\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right\},$$

то из условия интерполяции $u(0,0)=1$ получаем

$$c \;=\; \left(-\frac{1}{8}+\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right)^{-1}.$$

Отсюда

$$\|\Delta u\|_\infty \;=\; \left|-\frac{1}{8}+\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right|^{-1}.$$

Покажем, что величина под знаком модуля отрицательна, т. е.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)} \;<\; \frac{\pi^3}{32}. \tag{5}$$

Известно (см., например, [14, с. 724]), что

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\;\operatorname{th}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right) \;=\; \frac{\pi^3}{32}.$$

Поэтому

$$\frac{\pi^3}{32}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)} \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}+\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}{(2k+1)^3\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\,,$$

а поскольку $\operatorname{sh}(\pi(2k+1)/2)\ge\operatorname{sh}(\pi/2)>1$ для всех $k=0,1,2,\ldots$, то все члены ряда в правой части являются положительными, следовательно, положительна и его сумма, и неравенство (5) доказано.

Поскольку при найденной константе c функция $u=u(x,y)$ принадлежит $F_1(1)$, для величины (1) получаем

$$a_\infty(Q) \;\le\; \left(\frac{1}{8}-\frac{4}{\pi^3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\;\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right)^{-1}. \tag{6}$$

Теперь находим оценку снизу. Пусть $u = u(x, y)$ — произвольная функция из класса $F_1(1)$. Представляя u через Δu с помощью функции Грина $G(x, y; \tau_1, \tau_2)$, имеем

$$u(x, y) = -\iint\limits_Q G(x, y; \tau_1\tau_2)\ \Delta u(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2.$$

Поскольку $u(0, 0) = 1$, то $\iint\limits_Q G(0, 0; \tau_1\tau_2)\Delta u(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = -1$ и, благодаря положительности функции Грина задачи Дирихле (см., например, [13, § 29]), отсюда получаем

$$\|\Delta u\|_\infty \ \geq \ \left(\iint\limits_Q G(0, 0; \tau_1\tau_2) \ \ d\tau_1\ d\tau_2\right)^{-1}.$$

Правая часть этого неравенства есть не что иное, как значение решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta U = -1$, $U|_{\partial Q} = 0$, вычисленное в начале координат. Применив лемму 1 при $c = 1$, приходим к оценке

$$\|\Delta u\|_\infty \ \geq \ \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\ \ \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right)^{-1}.$$

После перехода в этом неравенстве к точной нижней грани по функциям класса $F_1(1)$, имеем

$$a_\infty(Q) \ \geq \ \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{\pi^3}\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3\ \ \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi(2k+1)}{2}\right)}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Сопоставление неравенств (6) и (7) завершает доказательство теоремы 1. $\square$

При $N \geq 2$ найти точное значение величины (1) не удается. Мы получим для нее оценку сверху с помощью интерполяции произвольного набора данных $z \in \mathfrak{M}_\infty$ функциями, построенными на основе кубических B-сплайнов. B-сплайны хорошо известны и успешно применяются при решении многих задач, главным образом в качестве наиболее удобного базиса пространства сплайнов (см., например, [15–17] и приведенную в них библиографию). Кратко отметим нужные нам свойства кубических B-сплайнов.

Пусть $a \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число, $h > 0$. Центральный кубический B-сплайн $B(t)$ с узлами в точках $\{a - h/2,\ a - h/4,\ a, a + h/4,\ a + h/2\}$ имеет следующее явное представление:

$$B(t) = \alpha\ \begin{cases} (a + h/2 - t)^3, & t \in (a + h/4,\ a + h/2], \\ (a + h/2 - t)^3 - 4(a + h/4 - t)^3, & t \in (a,\ a + h/4], \\ (a + h/2 - t)^3 - 4(a + h/4 - t)^3 + 6(a - t)^3, & t \in (a - h/4,\ a], \\ -(a - h/2 - t)^3, & t \in [a - h/2,\ a - h/4], \\ 0, & t \notin [a - h/2,\ a + h/2], \end{cases} \tag{8}$$

где $\alpha > 0$ — нормирующий коэффициент. Эта функция является дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ с носителем $[a - h/2, a + h/2]$, неотрицательна на нем и достигает максимума в его центре — точке a; носитель при этом обладает свойством минимальности, т. е. невозможно построить нетривиальный кубический сплайн дефекта 1 с носителем меньшей длины. Конкретное значение нормирующего коэффициента для нас неважно, поэтому полагаем его равным единице.

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть*

$$d_N = \min\left\{|t^{(k)} - t^{(j)}| : \ k, j = 1, 2, \ldots, N, \ k \neq j\right\}$$

— минимальное расстояние между точками интерполяции,

$$b_N = \min_{k=1,2,\ldots,N} \ \min\left\{|t^{(k)} - T| : \quad T \in \partial Q\right\}$$

— расстояние от множества точек интерполяции до ∂Q *и* $\delta_N = \min\{d_N, b_N\}$. *Тогда*

$$a_\infty^N(Q) \ \leq \ A \ \delta_N^{-2},$$

где A *— некоторая положительная константа, не зависящая от* N.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 проводится на основе идеи работы автора [12]. Около каждой точки интерполяции $t^{(s)} = (x^{(s)}, y^{(s)})$ $(s = 1, 2, \ldots, N)$ строим квадрат $Q_s(\delta)$ с центром в этой точке и длиной сторон δ, которые параллельны осям координат, т. е. $Q_s(\delta) \ = \ [x^{(s)} - \delta/2, x^{(s)} + \delta/2] \times [y^{(s)} - \delta/2, y^{(s)} + \delta/2]$, $(s = 1, 2, \ldots, N)$. Выбрав $\delta = \delta_N$, добиваемся того, чтобы квадраты, построенные около различных точек интерполяции, не пересекались друг с другом и с ∂Q.

На каждом таком квадрате определяем функцию $\varphi_{s,\delta_N}(x, y; z_s)$ следующим образом:

$$\varphi_{s,\delta_N}(x, y; z_s) \ = \ c_{s,\delta_N} B_s(x) B_s(y), \tag{9}$$

где $B_s(x), B_s(y)$ — кубические B-сплайны, построенные на отрезках $[x^{(s)} - \delta_N/2, x^{(s)} + \delta_N/2]$ и $[y^{(s)} - \delta_N/2, y^{(s)} + \delta_N/2]$ соответственно, c_{s,δ_N} — некоторая константа. Эту константу находим из условия интерполяции $\varphi_{s,\delta_N}(x^{(s)}, y^{(s)}; z_s) = z_s$, используя представление (8) при $h = \delta_N$. В результате получаем

$$c_{s,\delta_N} \ = \ 2^8 \ \delta_N^{-6} \ z_s. \tag{10}$$

Определяем N функций

$$F_{s,\delta_N}(x, y; z) \ = \ \begin{cases} \varphi_{s,\delta_N}(x, y; z_s), & x \in Q_s(\delta_N), \\ \qquad 0, & x \notin Q_s(\delta_N), \end{cases}$$

$(s = 1, 2, \ldots, N)$ и пусть

$$F_{\delta_N}(x, y; z) \ = \ \sum_{s=1}^{N} F_{s,\delta_N}(x, y; z). \tag{11}$$

Найдем $\max\{|\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x, y; z_s)| : (x, y) \in Q_s(\delta_N)\}$, $s = 1, 2, \ldots, N$. Согласно (9)

$$\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x, y; z_s) \ = \ c_s\Big(B_s(y) \ \frac{\partial^2 B_s(x)}{\partial x^2} \ + \ B_s(x) \ \frac{\partial^2 B_s(y)}{\partial y^2}\Big). \tag{12}$$

Ввиду (8) каждый из квадратов $Q_s(\delta_N)$, $s = 1, 2, \ldots, N$ разбивается на шестнадцать малых квадратов $q_s^{(ij)}(\delta_N)$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, на каждом из которых правая часть (12) задается отдельным аналитическим выражением. При любом фиксированном $s = 1, 2, \ldots, N$ рассмотрим $q_s^{(11)}(\delta_N)$. Для всех $(x, y) \in q_s^{(11)}(\delta_N)$ имеем

$$\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x, y; z_s) = 3c_s\Big\{\Big(-2x^{(s)} + \delta_N + 2x\Big)\Big[\Big(y^{(s)} + \frac{\delta_N}{2} - y\Big)^3 - 4\Big(y^{(s)} + \frac{\delta_N}{4} - y\Big)^3$$

$$+ 6\left(y^{(s)} - y\right)^3 - 4\Big(y^{(s)} + \frac{\delta_N}{4} - y\Big)^3\Big] + \Big(-2y^{(s)} + \delta_N + 2y\Big)$$

$$\times\Big[\Big(x^{(s)}+\frac{\delta_N}{2}-x\Big)^3-4\Big(x^{(s)}+\frac{\delta_N}{4}-x\Big)^3+6\left(x^{(s)}-x\right)^3-4\left(x^{(s)}+\frac{\delta_N}{4}-x\right)^3\Big]\Big\}.$$

После замены переменных

$$x=\frac{\delta_N}{4}\Big(u+\frac{4x^{(s)}}{\delta_N}-2\Big),\quad y=\frac{\delta_N}{4}\Big(v+\frac{4y^{(s)}}{\delta_N}-2\Big)$$

последнее выражение принимает вид

$$\Delta\varphi_{s,\delta_N}(u,v;z_s)=3\cdot 2^{-7}\,c_{s,\delta_N}\,\delta_N^4\;uv(u^2+v^2),$$

причем $(u,v)\in[0,1]^2$. Переход к максимуму по $(u,v)\in[0,1]^2$ дает

$$\max_{(u,v)\in[0,1]^2}|\Delta\varphi_{s,\delta_N}(u,v;z_s)| \;=\; \max_{(x,y)\in q_s^{(11)}(\delta_N)}|\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x,y;z_s)| \;=\; \frac{3}{64}\,|c_{s,\delta_N}|\;\delta_N^4.$$

Теперь тем же способом находим максимум функции $|\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x,y;z_s)|$ на каждом из остальных пятнадцати квадратов $q_s^{(ij)}(\delta_N),\ i+j\neq 2$. Выбрав наибольшее из найденных шестнадцати чисел и воспользовавшись (10), получаем

$$\max\{|\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x,y;z_s)|\colon (x,y)\in Q_s(\delta_N)\}\;=\;A\delta_N^{-2}|z_s|,$$

где A — некоторая положительная константа, не зависящая от N. Отсюда для оператора Лапласа, примененного к функции (11), имеем

$$\|\Delta F_{\delta_N}(\cdot,z)\|_\infty \;=\; \max_{s=1,2,\dots,N}\,\max\{|\Delta\varphi_{s,\delta_N}(x,y;z_s)|\colon (x,y)\in Q_s(\delta_N)\}\;=\;A\delta_N^{-2}\|z\|_{l_\infty^N}. \tag{13}$$

Применяя (13), приходим к оценке сверху

$$a_\infty^N(Q)\;\le\;\sup_{z\in\mathfrak{M}_\infty}\;\|\Delta F_{\delta_N}(\cdot,z)\|_\infty\le\;A\;\delta_N^{-2}.$$

Лемма 2 доказана. □

Теперь обратимся к исследованию величины (1) для равномерной сетки с одинаковым шагом $h=1/m,\ m\ge 2$ по каждой из двух переменных. Очевидно, что $N=(m-1)^2$. Для величины (1) в этом случае удается получить оценки сверху и снизу, которые при достаточно густой сетке точек интерполяции одинаково зависят от N.

Теорема 2. *Существует такое натуральное число N_0, что при всех $N\ge N_0$ выполняются неравенства*

$$C_1\;(1+\sqrt{N})^2\;<\;a_\infty^N(Q)\;\le\;C_2\;(1+\sqrt{N})^2\;,$$

где C_1,C_2 — некоторые положительные константы, не зависящие от N.

Доказательство теоремы 2. Оценка сверху является частным случаем леммы 2 при $\delta_N=1/m,\ N=(m-1)^2$.

Доказываем оценку снизу. Выбираем набор данных $\tilde z=\{\tilde z_j\}_{j=1}^N\in\mathfrak{M}_\infty$, все элементы которого являются нулями, за исключением одного равного единице, и интерполируем его в точках $((2j-m)/(2m),(2\nu-m)/(2m)),\ (j,\nu=1,2,\dots,m-1)$. Для величины (1) имеем

$$a_\infty^N(Q)\;\ge\inf_{u\in F_N(\tilde z)}\;\|\Delta u\|_\infty. \tag{14}$$

Фиксируем следующие точки:

$$A=\Big(\frac{m-2}{2m},\;1/2\Big),\qquad B=\Big(\frac{m-4}{2m},\;\frac{m-2}{2m}\Big),\qquad C=\Big(\frac{m-2}{2m},\;\frac{m-2}{2m}\Big),$$

$$D = \Big(1/2,\ \frac{m-2}{2m}\Big), \qquad E = \Big(\frac{m-2}{2m},\ \frac{m-4}{2m}\Big).$$

Точки A и D лежат на ∂Q, поэтому в них любой интерполянт из класса $F_N(\tilde z)$ обращается в нуль. Интерполируем в точке C значение, равное единице, а во всех остальных узлах — нулевые значения. Через $U = U_h(x,y)$ обозначаем любой из таких интерполянтов. Нетрудно видеть, что

$$\frac{U(A)-2U(C)+U(E)}{h^2} + \frac{U(D)-2U(C)+U(B)}{h^2} \ = \ -\frac{4}{h^2}\ .$$

С другой стороны,

$$\frac{U(D)-2U(C)+U(B)}{h^2} = \ U''_{xx}(C) + \alpha_1(h)\ h^2,$$

$$\frac{U(A)-2U(C)+U(E)}{h^2} \ = \ U''_{yy}(C) + \alpha_2(h)\ h^2,$$

где $\alpha_k(h) \to 0 \quad (k=1,2)$ при $h \to +0$.

Отсюда

$$h^2\ \|\Delta U\|_\infty \ \geq \ 4 - h^4\left(|\alpha_1(h)| + |\alpha_2(h)|\right).$$

Переход к пределу при $h \to +0$ дает

$$\lim_{h\to+0}\ \left(h^2\ \|\Delta U\|_\infty\right) \geq 4.$$

Усиливая это неравенство, получаем, что при некоторой положительной константе C_1, не зависящей от N (а стало быть, и от m), выполняется

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{\|\Delta U\|_\infty}{m^2}\ >\ C_1.$$

Отсюда заключаем, что для всех достаточно больших номеров m выполняется неравенство $\|\Delta U\|_\infty > C_1 m^2$. Обращение к (14) и переход от m к N завершают доказательство оценки снизу. Теорема 2 доказана. □

Замечание 1. С помощью леммы 2 можно получить оценку сверху и для неравномерных сеток узлов интерполяции. Однако соответствующая ей оценка снизу в терминах параметра δ_N автору неизвестна.

Замечание 2. Условие зануления интерполянта на границе квадрата отбросить нельзя. Действительно, допустим, что в определении класса $F_N(z)$ нет этого условия. Тогда можно построить комплексный полином степени $N-1$, принимающий в точках $\xi_j = x^{(j)} + iy^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$ (i — мнимая единица) значения z_j. Взяв от него вещественную часть, получаем вещественную функцию двух переменных, удовлетворяющую нужным интерполяционным условиям. Поскольку вещественная часть аналитической функции является гармонической функцией, приходим к выводу, что величина, аналогичная (1), в таком случае равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Favard J.** Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no 9. P. 281–306.
2. **Fisher S., Jerome J.** Minimum norm extremals in function spaces // Lecture Notes in Math. 1975. Vol. 479. P. 1–209.
3. **Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.** О некоторых выпуклых задачах теории приближений // Serdica. 1979. Vol. 5, no 1. P. 83–96.
4. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1965. Т. 78. С. 24–42.
5. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1967. Т. 88. С. 30–60.
6. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1975. Т. 138. С. 118–173.

7. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
8. **Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
9. **Новиков С.И., Шевалдин В.Т.** Об одной задаче экстремальной интерполяции для функций многих переменных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 144–159.
10. **Новиков С.И.** Задачи экстремальной функциональной интерполяции // Тр. Междунар. летней мат. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 100–109.
11. **Новиков С.И.** Интерполяция с минимальным значением нормы оператора Лапласа в шаре // Збiрник праць Iн-ту матем. НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 248–262.
12. **Новиков С.И.** Интерполяция в шаре с минимальным значением L_p-нормы оператора Лапласа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 258–265.
13. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М: Наука, 1971. 512 с.
14. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Ряды и интегралы. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
15. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
16. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
17. **de Boor C.** Splines as linear combinations of B-splines // Approximation Theory II (Proceedings of Internat. Symposium, Austin, Texas, 1976) N.Y. ect.: Academic Press, 1976. P. 1–47.

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Поступила 23.01.2012

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.51

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ КЛАССОВ $MB^{\omega}_{p,\theta}$ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

С. А. Стасюк

В работе получены порядковые оценки наилучшего приближения в равномерной метрике периодических функций нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов.

Ключевые слова: наилучшее приближение, ступенчатый гиперболический крест, смешанная гладкость, равномерная метрика.

S. A. Stasyuk. Best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\,\theta}$ in the uniform metric.

We obtain order estimates for the best approximation in the uniform metric of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ by trigonometric polynomials with the “indices” of harmonics from step hyperbolic crosses.

Keywords: best approximation, step hyperbolic cross, mixed smoothness, uniform metric.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d-мерное эвклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$. $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [0; 2\pi)$, — пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)| \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Далее будем рассматривать только те функции $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых выполняется условие

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) \, dx_j = 0, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ рассмотрим смешанный модуль непрерывности порядка l

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j = \overline{1, \ldots, d}}} ||\Delta^l_h f(\cdot)||_p,$$

где $\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d} \ldots \Delta^l_{h_1} f(x) = \Delta^l_{h_d}(\ldots(\Delta^l_{h_1} f(x)))$ — смешанная l-я разность с шагом h_j по переменной x_j и

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} \binom{l}{n} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Пусть $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — заданная функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ возрастает по каждой переменной;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$;

4) $\Omega(t)$ непрерывна при $t_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, d$.

Будем считать, что функция $\Omega(t)$ удовлетворяет также условиям (S), (S_l), которые называют условиями Бари — Стечкина [1]. Это значит следующее.

Функция одной переменной $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S), если $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ почти возрастает при некотором $\alpha > 0$, т. е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_1 > 0$, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}\,, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1. \tag{1.1}$$

Функция $\varphi(\tau) \ge 0$ удовлетворяет условию (S_l), если $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ почти убывает при некотором $0 < \gamma < l$, т. е. существует такая независимая от τ_1 и τ_2 постоянная $C_2 > 0$, что

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}\,, \qquad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будем говорить, что функция $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ удовлетворяет условиям (S) и (S_l), если она удовлетворяет этим условиям по каждой переменной t_j при фиксированных значениях остальных переменных.

Множество функций Ω, для которых выполняются сформулированные выше условия 1)–4), а также условия (S) и (S_l), будем обозначать через $\Phi_{\alpha,l}$.

Приведем определение пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных, которые были рассмотрены в работе [2].

Пусть $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ и $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда пространство $MB^\Omega_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$MB^\Omega_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon ||f||_{MB^\Omega_{p,\theta}} < \infty \right\},$$

где

$$||f||_{MB^\Omega_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^\theta \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.2}$$

$$||f||_{MB^\Omega_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}. \tag{1.3}$$

Шкала пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$ является естественным обобщением шкалы пространств Никольского — Бесова $MB^r_{p,\theta}$, $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, d$, функций смешанной гладкости (см., например, [3]) и $MB^\Omega_{p,\theta} \equiv MB^r_{p,\theta}$ при $\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$, $r_j < l$, $j = 1, \ldots, d$ (заметим, что при $\theta = \infty$ $MB^r_{p,\theta}$ — пространства Никольского MH^r_p).

Далее нам будет удобно рассматривать пространства $MB^\Omega_{p,\theta}$ с так называемой декомпозиционной точки зрения и пользоваться при этом эквивалентными к (1.2) и (1.3) определениями полунорм функций из пространств $MB^\Omega_{p,\theta}$.

Пусть $\mathcal{V}_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле Пуссена степени $2n-1$ вида

$$\mathcal{V}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} \mathcal{D}_k(t),$$

где $\mathcal{D}_k(t) = \sum_{m=-k}^{k} e^{imt}$ — ядро Дирихле. Для $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, d$, положим

$$A_s(x) := \prod_{j=1}^{d} \Big(\mathcal{V}_{2^{s_j}}(x_j) - \mathcal{V}_{2^{s_j-1}}(x_j) \Big)$$

и для $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим $A_s(f) = f * A_s$, где значком “$*$” обозначена операция свёртки двух функций, т. е. $\varphi * g := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(y) g(x-y)\, dy$ для $\varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d)$.

Приведем определение порядковых соотношений, используемых в работе.

Запись $a \asymp b$ будет означать, что для неотрицательных величин a и b, определяемых некоторой совокупностью параметров, существует положительная величина C, не зависящая от одного обозначенного контекстом параметра, такая, что $C^{-1}a \le b \le Ca$. Если только выполняется неравенство $b \le Ca$ или $b \ge C^{-1}a$, то будем писать $b \ll a$ или $b \gg a$ соответственно.

Пусть $1 \le p \le \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, тогда [4; 5]

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s (\Omega(2^{-s}))^{-\theta} \, \|A_s(f)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.4}$$

$$\|f\|_{MB^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}\ , \tag{1.5}$$

где $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$. Соотношение (1.4) установлено в [5], а (1.5) — в [4].

При $\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d}$, $0 < r_j < l$, $j = 1, \ldots, d$, т.е. для пространств $MB^r_{p,\theta}$, соответствующие (1.4) и (1.5) соотношения известны и установлены в [3].

При $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ аналогичное к (1.4) представление известно [2]. Отличие состоит лишь в том, что в [2] вместо “блоков” $A_s(f)$ использовались “блоки” $\delta_s(f) = \mathcal{D}_{\rho(s)} * f$ ($\mathcal{D}_{\rho(s)} := \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$, $\rho(s) := \{k = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ s_j \in \mathbb{N},\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, d\}$), а поскольку

$$\|A_s(f)\|_p \asymp \|\delta_s(f)\|_p, \quad 1 < p < \infty, \tag{1.6}$$

то определяемые в [2] и в данной работе пространства $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ можно считать эквивалентными.

Дальше будем использовать термин “класс $MB^{\Omega}_{p,\theta}$”, понимая под этим термином единичный шар в пространстве $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ и сохраняя одинаковое обозначение и для пространства, и для класса, поскольку из контекста будет понятно, о чем идет речь, о классе или о пространстве.

Кроме этого, будем рассматривать классы $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ в случае, когда гладкостная функция Ω имеет вид

$$\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d), \tag{1.7}$$

где $\omega(\tau)$ — функция одной переменной типа модуля непрерывности порядка l, $l \in \mathbb{N}$ ($\omega \in \Phi_{\alpha,l}$). Для классов $MB^{\Omega}_{p,\theta}$ с функцией Ω, определяемой с помощью (1.7), будем использовать обозначение $MB^{\omega}_{p,\theta}$ вместо $MB^{\Omega}_{p,\theta}$.

Обозначим

$$E_{Q_n}(F)_q \ := \ \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_q \ := \ \sup_{f \in F} \ \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_q \tag{1.8}$$

— наилучшее приближение класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов $Q_n = \bigcup_{\|s\|_1 \le n} \rho(s)$ $\big(\|s\|_1 = s_1 + \cdots + s_d$, $T(Q_n) = \{t :\ t(x) = \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,x)}\}\big)$.

В [2; 4; 6–12] были найдены точные по порядку оценки величины $E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q$ для $1 \le p, q \le \infty$, за исключением случая $1 \le p < \infty$, $q = \infty$.

Целью настоящей работы является установление порядковых оценок величины $E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q$ при не рассмотренном ранее соотношении между параметрами p и q, а именно при $1 \le p < \infty$, $q = \infty$, что дополнит полученные в [2] точные по порядку оценки величины $E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q$ при $1 < p < q < \infty$.

Заметим, что выполнение условия $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \max\{1/p - 1/q;\ 0\}$, обеспечивает вложение $MB^{\omega}_{p,\theta} \subset L_q(\mathbb{T}^d)$.

Отметим, что в [8] (при $\theta = \infty$) и в [11] (при $1 \le \theta < \infty$) установлено, что при $1 \le q \le p \le \infty$, $d \ge 1$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ (за исключением случаев $p = q = \infty$ и $2 < p \le \infty$, $q = 1$) выполняется порядковое равенство

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{\theta}\right)_+}, \tag{1.9}$$

где $p_0 = \min\{p; 2\}$, $a_+ = \max\{a; 0\}$. Заметим, что оценка (1.9) при $\theta = \infty$ хотя и установлена в [8], но получается как следствие результатов работы [7], а при $1 < p = q < \infty$ получена ранее в работе [4]. При $1 < p = q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ оценка (1.9) установлена в [2], а при $1 < q < p < \infty$, $p \ge 2$, $1 \le \theta < \infty$ — в [9]. Если $2 < p \le \infty$, $q = 1$, $1 \le \theta \le 2$ или $p = q = \infty$, $\theta = 1$, тогда при $d \ge 1$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ выполняется порядковое равенство $E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n})$, которое получено в [12].

В оставшихся из нерассмотренных при $q \le p$ случаях точные по порядку оценки удалось установить только в двумерном случае. При $d = 2$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ имеют место следующие соотношения [12]:

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} \omega(2^{-n}) n^{1-\frac{1}{\theta}}, & \text{если } \ p = q = \infty,\ 1 < \theta \le \infty, \\[2ex] \omega(2^{-n}) n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}, & \text{если } \ 2 < p \le \infty,\ q = 1,\ 2 < \theta \le \infty. \end{cases}$$

Если же $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $d \ge 1$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p - 1/q$, то

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{1.10}$$

Оценка (1.10) для $1 < p < q < \infty$, $\theta = \infty$ установлена в [4], для $1 < p < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ — в [2], для $p = 1$, $1 < q < \infty$, $\theta = \infty$ — в [8], а для $p = 1$, $1 < q < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ — в [10].

Заметим также, что при $d = 1$, $1 \le p, q, \theta \le \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > (1/p - 1/q)_+$ имеет место оценка (см., например, [13]) $E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/q)_+}$.

Нами будет использована оценка [14, гл. 3, § 3],

$$E_{Q_n}(MW^{\rho}_2)_{\infty} \asymp 2^{-n(\rho - \frac{1}{2})}, \quad \rho > 1/2, \tag{1.11}$$

где $MW^{\rho}_2 = \{f\colon f = \varphi * F_{(\rho)},\ \|\varphi\|_2 \le 1\}$, $F_{(\rho)} = 2^d \prod_{j=1}^{d} \sum_{k_j=1}^{\infty} (\cos k_j x_j)/k_j^{\rho}$.

Для

$$\mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in MB^{\omega}_{p,\theta}} \|f - S_{Q_n}(f)\|_q \tag{1.12}$$

— величины приближения (в метрике пространства $L_q(\mathbb{T}^d)$) классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ ступенчато-гиперболическими суммами Фурье $S_{Q_n}(f)$ ($S_{Q_n}(f) := f * \mathcal{D}_{Q_n}$, $\mathcal{D}_{Q_n}(x) := \sum_{k \in Q_n} e^{i(k,x)}$), в [10; 15] получена оценка

$$\mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \tag{1.13}$$

для $1 \le p < \infty$, $q = \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $d \ge 1$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$ (случай $1 < p < \infty$ рассмотрен в [15], а $p = 1$ — в [10]).

Заметим, что согласно определениям (1.8) и (1.12) величины $E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q$ и $\mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q$ связаны неравенством

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q \le \mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_q. \tag{1.14}$$

2. Основные результаты

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$.

1) *Для* $1 \le p \le 2$, $2 \le \theta \le \infty$, $d \ge 2$ *выполняется порядковая оценка*

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}. \tag{2.1}$$

2) *Для* $2 < p < \infty$, $d \ge 2$ *выполняется порядковая оценка*

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \ll \begin{cases} \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{2}{p\theta'})}, & \text{если } \ 1 < \theta \le 2, \\ \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{p})}, & \text{если } \ 2 < \theta \le \infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $1/\theta + 1/\theta' = 1$.

3) *Для* $1 \le p \le 2$, $1 \le \theta \le 2$ *или* $2 < p < \infty$, $\theta = 1$ *при любом* $d \ge 1$ *выполняется порядковое равенство*

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем сначала доказательство соотношения (2.1) при $p = 2$, т. е. для класса $MB^{\omega}_{2,\theta}$.

Для произвольной функции $f \in MB^{\omega}_{2,\theta}$ обозначим

$$f_m = \sum_{||s||_1=m} \delta_s(f)$$

(тогда очевидно, что $f_m \in MB^{\omega}_{2,\theta}$) и покажем, что

$$||f_m||_2 \ll \omega(2^{-m})m^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \tag{2.4}$$

при $2 \le \theta \le \infty$.

Для $2 < \theta < \infty$, применяя неравенство Гельдера (с показателем $\theta/2 > 1$) и оценку (см., например, [16, введение])

$$\sum_{||s||_1=m} 1 \asymp m^{d-1},$$

получим

$$\|f_m\|_2^2 = \omega^2(2^{-m}) \sum_{\|s\|_1=m} \Big(\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f_m)\|_2\Big)^2$$

$$\le \omega^2(2^{-m})\Bigg(\sum_{\|s\|_1=m} \Big(\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f_m)\|_2\Big)^{\theta}\Bigg)^{\frac{2}{\theta}}\Bigg(\sum_{\|s\|_1=m} 1\Bigg)^{\frac{\theta-2}{\theta}}$$

$$\asymp \omega^2(2^{-m})\Bigg(\sum_{\|s\|_1=m} \Big(\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f_m)\|_2\Big)^{\theta}\Bigg)^{\frac{2}{\theta}} m^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})}$$

$$\ll \omega^2(2^{-m})||f_m||^2_{MB^{\omega}_{2,\theta}} m^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \le \omega^2(2^{-m})m^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})}.$$

В случаях $\theta = 2$ и $\theta = \infty$, соответственно, имеем

$$\|f_m\|_2^2 \ll \omega^2(2^{-m})\|f_m\|^2_{MB^{\omega}_{2,2}} \le \omega^2(2^{-m})$$

и

$$\|f_m\|_2^2 \le \omega^2(2^{-m})\Big(\sup_{s:\|s\|_1=m}\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|\delta_s(f_m)\|_2\Big)^2\sum_{\|s\|_1=m}1$$

$$\ll \omega^2(2^{-m})\|f_m\|^2_{MB^{\omega}_{2,\infty}}m^{d-1} \le \omega^2(2^{-m})m^{d-1}.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f_m^{(\rho)} := \sum_{\|s\|_1=m}\sum_{k\in\rho(s)}\prod_{j=1}^{d}|k_j|^{\rho}\hat f(k)e^{i(k,x)},$$

для которой, учитывая (2.4), имеем

$$\|f_m^{(\rho)}\|_2 = \Big(\sum_{\|s\|_1=m}\|\delta_s(f_m^{(\rho)})\|_2^2\Big)^{1/2} \asymp \Big(\sum_{\|s\|_1=m}2^{2\rho\|s\|_1}\|\delta_s(f_m)\|_2^2\Big)^{1/2}$$

$$= 2^{\rho m}\Big(\sum_{||s||_1=m}\|\delta_s(f_m)\|_2^2\Big)^{1/2} = 2^{\rho m}\|f_m\|_2 \ll \omega(2^{-m})2^{\rho m}m^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}. \tag{2.5}$$

Фиксируем любое $\rho\in(1/2,\alpha)$ и покажем, что найдется $C(\omega,\rho,d)>0$ такое, что для любой $f\in MB^{\omega}_{2,\theta}$ имеем $C(\omega,\rho,d)f\in MW^{\rho}_2$. В самом деле, пусть $f\in MB^{\omega}_{2,\theta}$. Очевидно, что $f=f^{(\rho)}*F_{(\rho)}$, где $f^{(\rho)}=\sum_{m=d}^{\infty}f_m^{(\rho)}$. Из (2.5) и (1.1) следует, что

$$\|f^{(\rho)}\|_2 = \Big(\sum_{m=d}^{\infty}\|f_m^{(\rho)}\|_2^2\Big)^{1/2} \ll \Big(\sum_{m=d}^{\infty}\Big(\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}\Big)^2 2^{-2(\alpha-\rho)m}m^{d-1}\Big)^{1/2}$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-d})}{2^{-\alpha d}}\Big(\sum_{m=d}^{\infty}2^{-2(\alpha-\rho)m}m^{d-1}\Big)^{1/2} \asymp \frac{\omega(2^{-d})}{2^{-\alpha d}}2^{-(\alpha-\rho)d}d^{\frac{d-1}{2}} = \omega(2^{-d})2^{\rho d}d^{\frac{d-1}{2}}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) вытекает существование требуемого $C(\omega,\rho,d)$.

Принимая во внимание (1.11), (2.5), получим

$$E_{Q_n}(f)_\infty \le \sum_{m=n+1}^{\infty}E_{Q_n}(f_m)_\infty \ll E_{Q_n}(MW^{\rho}_2)_\infty\sum_{m=n+1}^{\infty}\|f_m^{(\rho)}\|_2$$

$$\ll 2^{-n(\rho-\frac12)}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}2^{-(\alpha-\rho)m}m^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}$$

$$\ll 2^{-n(\rho-\frac12)}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\sum_{m=n+1}^{\infty}2^{-(\alpha-\rho)m}m^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}$$

$$\ll \omega(2^{-n})2^{(\alpha-\rho+\frac12)n}2^{-(\alpha-\rho)n}n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)} = \omega(2^{-n})2^{\frac n2}n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}. \tag{2.7}$$

Таким образом, оценка (2.1) для $p=2$ доказана. Докажем оценку (2.1) для $1\le p<2$.

Исходя из (1.4) (из (1.5) — аналогично) и применяя неравенство разных метрик Никольского (см., например, [16, гл. I]), имеем

$$\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}} \asymp \Big(\sum_s\Big(\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f)\|_p\Big)^{\theta}\Big)^{1/\theta} \gg \Big(\sum_s\Big(\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})2^{\|s\|_1(\frac12-\frac1p)}\|A_s(f)\|_2\Big)^{\theta}\Big)^{1/\theta}$$

$$= \Big(\sum_s\Big(\omega_1^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f)\|_2\Big)^{\theta}\Big)^{1/\theta} \asymp \|f\|_{MB^{\omega_1}_{2,\theta}}, \tag{2.8}$$

где $\omega_1(\tau)=\omega(\tau)\tau^{\frac12-\frac1p}$ и ω_1 является модулем непрерывности порядка l. Вследствие (2.8) делаем вывод, что для $1\le p<2$ имеет место вложение

$$MB^{\omega}_{p,\theta}\subset MB^{\omega_1}_{2,\theta}, \tag{2.9}$$

где $\omega_1(\tau)=\omega(\tau)\tau^{\frac12-\frac1p}$, $\omega_1\in\Phi_{\alpha_1,l}$, $\alpha_1=\alpha+1/2-1/p>1/2$, поскольку $\omega\in\Phi_{\alpha,l}$, $\alpha>1/p$.

В силу вложения (2.9) и оценки (2.7) с ω_1 вместо ω получаем

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty\ll E_{Q_n}(MB^{\omega_1}_{2,\theta})_\infty\ll\omega_1(2^{-n})2^{\frac n2}n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}=\omega(2^{-n})2^{\frac np}n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)}, \tag{2.10}$$

что и завершает доказательство соотношения (2.1).

А вследствие вложения $MB^{\omega}_{p,\theta}\subset MB^{\omega}_{p,2}$, $1\le\theta\le2$, и (2.10) (с $\theta=2$) имеем (для $1\le\theta\le2$)

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty\le E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,2})_\infty\ll\omega(2^{-n})2^{n/p},$$

и, таким образом, оценка сверху в (2.3) для $1\le p,\theta\le2$ установлена.

Перейдем теперь к доказательству соотношения (2.2).

Покажем сначала, что при $2\le p<\infty$ имеет место соотношение

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty\asymp\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\biggl(\sum_s(\omega(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_{p'})^{\theta'}\biggr)^{1/\theta'}, \tag{2.11}$$

где $T^\perp(Q_n)_1=\{t\colon \|t\|_1\le1\ \forall\varphi\in T(Q_n)\ (t,\varphi)=0\}$, $1/p+1/p'=1$.

Действительно, вследствие применения теоремы двойственности Никольского (см., например, [14, введение, § 2]), соотношения (1.6) и неравенства Гельдера имеем

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty=\sup_{f\in MB^{\omega}_{p,\theta}}\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}(f,g)=\sup_{f\in MB^{\omega}_{p,\theta}}\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\sum_s(\delta_s(f),\delta_s(g))$$

$$=\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\sup_{f\in MB^{\omega}_{p,\theta}}\sum_s||\delta_s(f)||_p\,\|\delta_s(g)\|_{p'}\asymp\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\sup_{f\in MB^{\omega}_{p,\theta}}\sum_s\|A_s(f)\|_p\,\|A_s(g)\|_{p'}$$

$$=\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\sup_{f\in MB^{\omega}_{p,\theta}}\sum_s\omega^{-1}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(f)\|_p\;\omega(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_{p'}$$

$$=\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\sup_{f\in MB^{\omega}_{p,\theta}}\|f\|_{MB^{\omega}_{p,\theta}}\biggl(\sum_s\Bigl(\omega(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_{p'}\Bigr)^{\theta'}\biggr)^{1/\theta'}$$

$$=\sup_{g\in T^\perp(Q_n)_1}\biggl(\sum_s\Bigl(\omega(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_{p'}\Bigr)^{\theta'}\biggr)^{1/\theta'}.$$

Из (2.11) с $\omega^{1/2}$ вместо ω и 2 вместо p и уже доказанных оценок сверху в (2.1) и (2.3) вытекает оценка для $g\in T^\perp(Q_n)_1$, а именно

$$\biggl(\sum_s\Bigl(\omega^{\frac12}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_2\Bigr)^{\theta'}\biggr)^{1/\theta'}\ll\omega^{\frac12}(2^{-n})2^{\frac n2}n^{(d-1)(\frac12-\frac1\theta)_+}. \tag{2.12}$$

Воспользовавшись неравенством (см., например, [14, введение, § 1]) $\|f\|_a\le\|f\|_1^{2/a-1}\,\|f\|_2^{2-2/a}$ $(1<a<2)$, а затем неравенством Гельдера с показателем $p'/(2(p'-1))>1$ $(1<p'<2)$, получим

$$\biggl(\sum_s\Bigl(\omega(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_{p'}\Bigr)^{\theta'}\biggr)^{1/\theta'}$$

$$\leq \left(\sum_s \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_2^2\right)^{\theta'(1-\frac{1}{p'})} \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{\frac{\theta'}{p'}} \|A_s(g)\|_1^{\theta'(\frac{2}{p'}-1)} \right)^{\frac{1}{\theta'}}$$

$$\leq \left(\sum_s \left(\omega^{\frac{1}{2}}(2^{-\|s\|_1})\|A_s(g)\|_2\right)^{\theta'} \right)^{\frac{2}{\theta'}(1-\frac{1}{p'})} \left(\sum_s \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \|A_s(g)\|_1^{\theta'} \right)^{\frac{2-p'}{p'\theta'}}. \tag{2.13}$$

Далее, поскольку $g \in T^{\perp}(Q_n)_1$, то $\|A_s(g)\|_1 \ll 1$, то

$$\sum_s \left(\omega(2^{-\|s\|_1})\right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \|A_s(g)\|_1^{\theta'} \ll \sum_{\|s\|_1 \geq n-d} \left(\frac{\omega(2^{-\|s\|_1})}{2^{-\alpha\|s\|_1}} 2^{-\alpha\|s\|_1} \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}}$$

$$\ll \left(\frac{\omega(2^{-(n-d)})}{2^{-\alpha(n-d)}} \right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \sum_{\|s\|_1 \geq n-d} \left(2^{-\alpha\|s\|_1}\right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} \ll \left(\omega(2^{-(n-d)})\right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} (n-d)^{d-1}$$

$$\asymp \left(\omega(2^{-n})\right)^{\frac{\theta'}{2-p'}} n^{d-1}. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.12) и (2.14) в (2.13), а затем (2.13) в (2.11), для $1 < \theta \leq 2$ получим

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll \left(\omega^{\frac{1}{2}}(2^{-n}) 2^{\frac{n}{2}} n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}\right)^{\frac{2}{p}} \left(\left(\omega(2^{-n})\right)^{\frac{1}{2-p'}} n^{\frac{d-1}{\theta'}} \right)^{\frac{2-p'}{p'}}$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{2}{p\theta'})},$$

а для $2 < \theta \leq \infty$ —

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty \ll \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(\frac{1}{\theta'}-\frac{1}{p})}.$$

Таким образом, при $2 < p < \infty$, $1 < \theta \leq \infty$ теорема доказана.

Теперь остается установить в (2.3) оценку сверху для $2 < p < \infty$, $\theta = 1$, а также оценку снизу в обоих случаях.

Для $1 \leq p < \infty$, $\theta = 1$, учитывая (1.14) и (1.13), имеем

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,1})_\infty \leq \mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,1})_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n/p}.$$

Поскольку правая часть (2.3) не зависит от размерности d, то нижнюю оценку в (2.3) можно установить исходя из одномерного случая, который содержится, например, в [13].

Теорема доказана.

В завершение работы приведем некоторые комментарии.

Замечание 1. Доказанная теорема в случае $\omega(\tau) = \tau^r$, $r > 1/p$, т.е. для классов $MB^r_{p,\theta}$, известна и для $1 \leq p \leq 2$, $\theta = \infty$ установлена в [17], для $1 \leq p < \infty$, $\theta = \infty$ — в [14, гл. 3, § 3], для $1 \leq p \leq 2$, $2 \leq \theta < \infty$ — в [18], а для $1 \leq p \leq 2$, $1 \leq \theta \leq 2$ или $2 < p < \infty$, $1 < \theta < \infty$ — в [19].

Замечание 2. Сравнивая (2.1)–(2.3) с (1.13) приходим к выводу, что при $1 \leq p < \infty$, $d \geq 2$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$ имеют место соотношения

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty = o\left(\mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty\right), \quad 1 < \theta \leq \infty,$$

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,1})_\infty \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,1})_\infty.$$

Если же $d = 1$, то при $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1/p$ имеем (см., например, [13; 20])

$$E_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{p,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\mathcal{E}_{Q_n}(MB^{\omega}_{\infty,\theta})_\infty \asymp n E_{Q_n}(MB^{\omega}_{\infty,\theta})_\infty \asymp \omega(2^{-n}) n.$$

В заключение выражаю искреннюю признательность рецензенту за сделанные им полезные замечания, которые способствовали улучшению изложения материала работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1952. Т. 2. С. 489–523.
2. **Sun Yongsheng, Wang Heping.** Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1997. Т. 219. С. 356–377.
3. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
4. **Пустовойтов Н.Н.** Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. 1994. Т. 20, № 1. P. 35–48.
5. **Стасюк С.А., Федуник О.В.** Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58, № 5. С. 692–704.
6. **Динь Зунг.** Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Мат. сб. 1986. Т. 131(173), № 2(10). С. 251–271.
7. **Пустовойтов Н.Н.** Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 107–117.
8. **Пустовойтов Н.Н.** О приближении и характеризации периодических функций многих переменных, имеющих мажоранту смешанных модулей непрерывности специального вида // Anal. Math. 2003. Т. 29, № 3. С. 201–218.
9. **Стасюк С.А.** Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 11. С. 1557–1568.
10. **Федуник О.В.** Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. Т. 2, № 2. С. 268–294.
11. **Стасюк С.А.** Наилучшие приближения периодических функций многих переменных из классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 108–121.
12. **Стасюк С.А.** Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, № 1. С. 140–144.
13. **Стасюк С.А.** Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях // Мат. Студії. 2011. Т. 35, № 1. С. 66–73.
14. **Temlyakov V.N.** Approximation of periodic functions. New York: Nova Science, 1993. 419 p.
15. **Стасюк С.А.** Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 11. С. 1551–1559.
16. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
17. **Темляков В.Н.** Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1985. Т. 49, № 5. С. 986–1030.
18. **Романюк А.С.** Приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 2. С. 91–116.
19. **Романюк А.С.** Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 2. С. 93–114.
20. **Миронюк В.В.** Наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних сумами Фур'є у просторі L_p при $p = 1, \infty$ // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, № 9. С. 1204–1213.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 14.06.2012

Том 18 № 4 2012

УДК 517.518

ОДНОСТОРОННИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Ю. Н. Субботин

В работе изучаются односторонние поперечники классов функций $W_p^r[0,1]$ в метрике $L_q[0,1]$, $1 \le p, q \le \infty$, $r > 1$. Такие поперечники определяются аналогично колмогоровским поперечникам, но накладываются дополнительные ограничения на приближающие функции.

Ключевые слова: односторонние поперечники, точные порядки, классы гладких функций.

Yu. N. Subbotin. One-sided widths of classes of smooth functions.

One-sided widths of the classes of functions $W_p^r[0,1]$ in the metric $L_q[0,1]$, $1 \le p, q \le \infty$, $r > 1$, are studied. Such widths are defined similarly to Kolmogorov widths with additional constraints on the approximating functions.

Keywords: one-sided widths, exact orders, classes of smooth functions.

Приведем соответствующие определения в рассматриваемом случае. Колмогоровским поперечником (см. [1]) называется следующая величина:

$$d_n(W_p^r, L_q) = \inf_{L_n \subset L_q} \sup_{f \in W_p^r} \inf_{g(x) \in L_n} \|f - g\|_{L_q}, \tag{1}$$

где L_n — n-мерное подпространство пространства $L_q[0,1]$, W_p^r — класс функций $f(x)$, представимых в форме

$$f(x) = P_{r-1}(x) + \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\, dt.$$

Здесь $P_{r-1}(x)$ — многочлен степени не выше $r-1$, $r > 1$, r — натуральное, $f^{(r-1)}(x)$ — абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_{L_p} = \Big(\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^p\, dx \Big)^{1/p} \le 1$, $1 \le p \le \infty$, где под $\|f^{(r)}\|_{L_\infty}$ понимается $\operatorname{ess\,sup}\{|f^{(r)}(x)| \colon 1 \le x < \infty\}$.

Соответствующий односторонний поперечник (см. [2]) определяется следующим образом:

$$d_n^+(W_p^r, L_q) = \inf_{L_n \subset L_q} \sup_{f \in W_p^r} \inf_{\substack{g(x) \in L_n \\ g(x) \ge f(x)}} \|f - g\|_{L_q}.$$

Порядки по n поперечников $d_n(W_p^r, L_q)$ (1) изучались многими авторами. Обстоятельная информация по этому поводу достаточно полно изложена в [3], где и получены окончательные результаты в этом направлении. А именно справедлив следующий окончательный порядковый результат:

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } 1 \le q \le p \le \infty \text{ или } 2 < p \le q \le \infty, \\ n^{-r-\frac12+\frac1p}, & \text{если } 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ n^{-r-\frac1q+\frac1p}, & \text{если } 1 \le p < q \le 2, \end{cases} \tag{2}$$

где знак $\asymp$ означает, что для $d_n(W_p^r, L_q)$ получены оценки сверху и снизу с указанными порядками поведения по n, но с различными константами, зависящими только от r, p, q.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00347а) и программы Отделения математических наук РАН, финансируемой из средств УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4).

В настоящей работе показано, что порядки по n в (2) справедливы и для односторонних поперечников $d_n^+(W_p^r, L_q)$.

Справедлива

Теорема. *Для любых натуральных $r > 1$, $1 \le p, q \le \infty$ справедливы порядковые равенства*

$$d_n^+(W_p^r, L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & \text{если } 1 \le q \le p \le \infty \text{ или } 2 < p \le q \le \infty, \\ n^{-r-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \le p \le 2 \le q \le \infty, \\ n^{-r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}, & \text{если } 1 \le p < q \le 2. \end{cases}$$

Доказательство. Оценки снизу следуют непосредственно из определения, а именно $d_n^+(W_p^r, L_q) \ge d_n(W_p^r, L_q)$, и оценок (2).

При оценках сверху рассмотрим несколько случаев. Разобьем отрезок $[0,1]$ на n равных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$, $x_i = i/n$. На каждом отрезке функцию $f(x)$ из W_p^r будем приближать отрезком ряда Тейлора

$$\varphi_{i,r}(x) = f(\overline{x}_i)(x - \overline{x}_i) + \dots + f^{(r-1)}(\overline{x}_i)\frac{(x-\overline{x}_i)^{r-1}}{(r-1)!}, \qquad \overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Имеем

$$|f(x) - \varphi_{i,r}(x)| = \left|\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_{\overline{x}_i}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt\right|, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{3}$$

Справедливы оценки $(1/p + 1/p_1 = 1)$

$$|f(x) - \varphi_{i,r}(x)| \le \frac{1}{(r-1)!}\left|\int\limits_{\overline{x}_i}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt\right|$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!}\left|\int\limits_{\overline{x}_i}^{x}|x-t|^{(r-1)p_1}\,dt\right|^{\frac{1}{p_1}}\left|\int\limits_{\overline{x}_i}^{x}|f^{(r)}(t)|^p\,dt\right|^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!}|x-\overline{x}_i|^{\frac{(r-1)p_1+1}{p_1}}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(r)}(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!}\,\frac{(x_{i+1}-x_i)^{r-1+\frac{1}{p_1}}}{2^{r-1+\frac{1}{p_1}}}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(r)}(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = C_i. \tag{4}$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$f(x) - \varphi_{i,r}(x) + C_i \ge 0 \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1), \tag{5}$$

$$0 \le f(x) - \varphi_{i,r}(x) + C_i \le 2C_i = \frac{1}{(r-1)!}\frac{(x_{i+1}-x_i)^{r-1+\frac{1}{p_1}}}{2^{r+\frac{1}{p_1}}}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(r)}(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Через L_{nr} обозначим nr-мерное подпространство функций $g(x)$ вида

$$g(x) = P_{r-1,i}(x), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

где $P_{r-1,i}(x)$ — многочлен степени не выше $r-1$. Тогда для функций, использованных в (3)–(6) и принадлежащих L_{nr}, имеем

$$d_{nr_1}^+(W_p^r, L_q) \le \left(\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x) - \varphi_{i,r}(x) + C_i|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left[\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(2C_i)^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \frac{1}{(r-1)!2^{r-\frac{1}{p}}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}|f^{(r)}(t)|^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (7)$$

Обозначим $\alpha_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(r)}(t)|^p\,dt \geq 0$, тогда из условия $f \in W_p^r$ следует, что $\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i = 1$. Отсюда и из (7) вытекает, что $\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^{\frac{q}{p}}$ достигает наибольшее значение при $q/p > 1$, когда одно из α_i равно 1, а остальные равны нулю, т. е. в этом случае

$$d_{nr}^+(W_p^r, L_q) \leq \frac{1}{(r-1)!2^{r-\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}, \qquad q > p.$$

При $q \leq p$ наибольшее значение правой части (7) достигается, когда $\alpha_i = (1/n)$, т. е. в этом случае

$$d_{nr}^+(W_p^r, L_q) \leq \frac{1}{(r-1)!2^{r-\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{(r-1)!2^{r-\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{(r-1)!2^{r-\frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{n}\right)^{r} \qquad (q \leq p). \qquad (8)$$

Далее рассмотрим случай $2 < p \leq q \leq \infty$. При этом используем факт, указанный в [3]. Имеют место неравенства

$$d_n^+(W_p^r, L_q) \leq d_n^+(W_p^r, L_\infty) \leq d_n^+(W_2^r, L_\infty). \qquad (9)$$

Первое из неравенств (8) следует из неравенства $\|f\|_{L_q} \leq \|f\|_{L_\infty}$, второе — из вложения $W_p^r \subset W_2^r$, так как

$$\left(\int\limits_0^1 |f^{(r)}(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int\limits_0^1 |f^{(r)}(x)|^{2\cdot\frac{p}{2}}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 (1)^{\frac{p}{p-2}}\,dx\right)^{\frac{p-2}{p}} = \left(\int\limits_0^1 |f^{(r)}(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из неравенства (8) при $2 < p \leq q \leq \infty$ выводим, что

$$d_n(W_p^r, L_q) \leq d_n^+(W_p^r, L_q) \leq d_n^+(W_2^r, L_\infty) \leq 2d_n(W_2^r, L_\infty) \asymp n^{-r},$$

$$2 < p \leq q \leq \infty$$

т. е. в этом случае

$$d_n^+(W_2^r, L_\infty) \asymp n^{-r}, \qquad 2 \leq p \leq q \leq \infty.$$

Осталось показать, что при $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ поперечник $d_n^+(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}$. Учитывая первое из неравенств (9), имеем

$$d_n^+(W_p^r, L_q) \leq d_n^+(W_p^r, L_\infty).$$

Далее отметим следующий факт. Если множество $W[0,1]$ из L_∞ содержит произвольную константу, то и приближающие подпространства должны содержать константу, иначе $d_n(W, L_\infty) = \infty$. Поэтому

$$d_n(W_p^r, L_\infty) \leq d_n^+(W_p^r, L_\infty) = \inf_{L_n}\sup_{f\in W_p^r}\inf_{\substack{g(x)\in L_n\\ g(x)\geq f(x)}}\|f-g\|_{L_q}$$

$$\leq \inf_{L_n}\sup_{f\in W_p^r}\inf_{g(x)\in L_n}\|f-g+d_n(W_p^r, L_\infty)\|_{L_\infty} \leq 2d_n(W_p^r, L_\infty) \asymp n^{-r+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p \leq 2 \leq g \leq \infty).$$

По поводу последней эквивалентности (см. (2) случай ($p \le 2 \le q \le \infty$)).

По заданному m найдем $[m/r]$, где $[m/r]$ — целая часть числа m/r. Тогда $[m/r]r \le m \le ([m/r]+1)r$. В этом случае

$$d^{+}_{[\frac{m}{r}]r+1}(W^r_p, L_q) \le d^{+}_{m}(W^r_p, L_q) \le d^{+}_{[\frac{m}{r}]r}(W^r_p, L_q)$$

и из предыдущего получаем точный порядок поведения односторонних поперечников относительно m ($m \to \infty$) для любых m, а не только для m кратных r. При этом константы эквивалентности конечны и зависят только от r, p, q; $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p, q \le \infty$. $\square$

Для натуральных четных r можно воспользоваться также результатами работы [4]. При этом в ряде случаев константы, не зависящие от n, при оценках сверху могут быть меньше, чем в настоящей работе, но порядок поведения по n ($n \to \infty$) будет тем же самым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kolmogoroff A.** Über die beste Annäherung von Funktionen einer geqebenen Functionenklasse // Ann. Math. 1936. № 37. S. 107–111.
2. **Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г.** Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 250 с.
3. **Кашин Б.С.** Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.
4. **Birkhoff G., Schultz M.H., Varga R.S.** Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with application to partial differential equations // Numer. Math. 1968. Vol. 11. P. 232–256.

Субботин Юрий Николаевич

Поступила 20.05.2012

д-р физ.-мат. наук
чл.-корр. РАН
гл. науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.977.1

К ВОПРОСУ О СЛАБОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ МНОЖЕСТВ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ, ПОРОЖДЕННОГО УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМОЙ[1]

В. Н. Ушаков, А. А. Зимовец

Рассматривается дифференциальное включение на конечном промежутке времени, порожденное управляемой системой. Исследуются вопросы, имеющие отношение к свойству слабой инвариантности множеств относительно дифференциального включения. Для множеств в пространстве позиций управляемой системы, не являющихся слабо инвариантными относительно дифференциального включения, вводится числовая характеристика, оценивающая степень их (слабой) неинвариантности — дефект слабой инвариантности множества относительно дифференциального включения.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, управление, слабая инвариантность множества, дефект слабой инвариантности.

V. N. Ushakov, A. A. Zimovets. On the question of the weak invariance of sets with respect to a differential inclusion generated by a control system.

A differential inclusion generated by a control system is considered on a finite time interval. Questions concerning the property of weak invariance of sets with respect to the differential inclusion are investigated. For sets in the space of positions of the control system that are not weakly invariant with respect to the differential inclusion, a numerical characteristic is introduced, which estimates the degree of the (weak) noninvariance of a set, i.e., the weak invariance defect of this set with respect to the differential inclusion.

Keywords: control system, differential inclusion, control, weak invariance of a set, weak invariance defect.

Введение

В работе рассматривается управляемая система на конечном промежутке времени и порожденное этой системой дифференциальное включение. Обсуждаются вопросы, относящиеся к одному из ключевых понятий математической теории управления — свойству слабой инвариантности множеств относительно управляемой системы или дифференциального включения. В теории управления нередко исследуются задачи о наведении управляемой системы на целевое множество (см., например, [1–7]). Один из возможных подходов к решению таких задач состоит в использовании при построении решений множества разрешимости — множества всех исходных позиций управляемой системы, из которых разрешима задача о наведении на целевое множество. Как известно, это множество обладает свойством слабой инвариантности относительно управляемой системы. Выделив это множество (в пространстве позиций системы), мы, естественно, можем ответить на вопрос о разрешимости задачи о наведении для конкретной начальной позиции. Отметим, что для тех начальных позиций управляемой системы, для которых разрешима задача о наведении, существует эффективная процедура управления (см. [2; 8; 9]), обеспечивающая попадание движения системы на целевое множество с наперед заданной точностью. При построении решений задач о наведении таким путем основная тяжесть ложится на выделение в пространстве позиций управляемой системы множества разрешимости. Это множество, к сожалению, удается выделить точно, т. е. описать аналитически,

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: “Методы позиционных дифференциальных игр в задачах техники, экономики и экологии” (проект 11-01-12088 офи-м-2011) и “Алгоритмы и динамические процедуры решения в дифференциальных играх и задачах управления ” (проект 11-01-00427-а), а также гранта Президента Российской Федерации по поддержке ведущих научных школ (НШ-5927.2012.1).

далеко, не всегда; мы вынуждены чаще всего конструировать это множество приближенно. В результате получаем множество в пространстве позиций, не обладающее свойством слабой инвариантности относительно управляемой системы. При этом возникает вопрос о том, в какой мере сконструированное множество не обладает свойством слабой инвариантности. Для аккуратной постановки этого вопроса и ответа на него в настоящей работе вводится некоторая числовая характеристика, оценивающая эту меру, — дефект слабой инвариантности множества в пространстве позиций управляемой системы. Эта числовая характеристика оценивает степень несогласованности эволюции множества во времени с динамикой системы с точки зрения понятия слабой инвариантности. Эта работа является продолжением исследований [10–14] и примыкает также к исследованиям [15–18].

1. Слабо инвариантные множества в пространстве позиций относительно дифференциального включения

Пусть задана управляемая система на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ $(t_0 < \vartheta < \infty)$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P. \tag{1.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — вектор управляющих воздействий, P — непустой компакт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

Условие A. Функция $f(t, x, u)$ определена на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$ и непрерывна, и для любой ограниченной замкнутой области $\mathcal{D}$ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ существует такая постоянная $L = L(\mathcal{D}) \in (0, \infty)$, что

$$\left\| f\left(t, x^{(1)}, u\right) - f\left(t, x^{(2)}, u\right) \right\| \leqslant L \left\| x^{(1)} - x^{(2)} \right\|, \quad \left(t, x^{(i)}, u\right) \in \mathcal{D} \times P, \quad i = 1, 2.$$

Условие B. Существует такая постоянная $\mu \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \mu(1 + \|x\|), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P.$$

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Сопоставим системе (1.1) дифференциальное включение (д. в.) на $[t_0, \vartheta]$:

$$\dot{x} \in F(t, x) = \mathrm{co}\left\{f(t, x, u) \colon u \in P\right\}, \quad x(t_0) = x_0; \tag{1.2}$$

здесь $\mathrm{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$.

Множества достижимости $X(t, t_0, x_0)$ и $Y(t, t_0, x_0)$ в момент $t \in [t_0, \vartheta]$ соответственно системы (1.1) и д. в. (1.2) связаны соотношением

$$Y(t, t_0, x_0) = \mathrm{cl}\, X(t, t_0, x_0), \quad t \in [t_0, \vartheta];$$

здесь $\mathrm{cl}\, X$ — замыкание множества X в $\mathbb{R}^m$.

Пусть W — некоторый произвольно выбранный компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, для которого $W(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^m \colon (t, x) \in W\right\} \neq \varnothing$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Исследуем его на предмет слабой инвариантности [14] относительно д. в. (1.2). Не исключено, что W не является слабо инвариантным относительно д. в. (1.2); в этом случае введем неотрицательную числовую характеристику, представляющую собой некоторую меру (слабой) неинвариантности множества W относительно этого д. в.

В связи с этим проведем предварительные построения и напомним определения основных понятий, используемых в этих построениях.

Полагаем: $Z = [t_0, \vartheta] \times B(0; \gamma)$ — такой цилиндр в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, что $W \subset Z$; $D = \big\{(t, x) \colon t \in [t_0, \vartheta],\ x \in B\big(0; \gamma(t)\big)\big\}$; здесь $B(0; \gamma) = \{b \in \mathbb{R}^m \colon \|b\| \leqslant \gamma\}$, где $\gamma(t) = \big(\gamma + \mu(t - t_0)\big)e^{\mu(t - t_0)}$ при $t \in [t_0, \vartheta]$.

Из определения ограниченной и замкнутой области D следует, что все решения $x(t)$ ($x(t_*) = x_*$, $(t_*, x_*) \in D$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$) д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$ удовлетворяют на $[t_*, \vartheta]$ включению $\bigl(t, x(t)\bigr) \in D$. Поскольку $W \subset Z \subset D$, то и все решения $x(t)$ ($x(t_*) = x_*$, $(t_*, x_*) \in W$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$) д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$ удовлетворяют на $[t_*, \vartheta]$ включению $\bigl(t, x(t)\bigr) \in D$.

Обозначим символом $Y(t_*, x_*)$ интегральную воронку д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x(t_*) = x_*$ на $[t_*, \vartheta]$. Уточним определение множества $Y(t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in D$.

О п р е д е л е н и е 1.1. $Y(t_*, x_*)$ есть множество всех $(t^*, x^*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, для которых существуют решения $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющие равенству $x(t^*) = x^*$.

Согласно сказанному выше имеем $Y(t_*, x_*) \subset D$, $(t_*, x_*) \in D$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем *слабо инвариантным* относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, если для любых $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$ имеет место

$$Y(t, t_*, x_*) \cap \mathcal{W}(t) \neq \varnothing, \quad t \in [t_*, \vartheta].$$

З а м е ч а н и е 1.1. Слабая инвариантность множества $\mathcal{W} \subset D$ относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$ означает также, что для любых $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$ существуют решения $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x(t_*) = x_*$, удовлетворяющие включению $(t, x(t)) \in \mathcal{W}$ при $t \in [t_*, \vartheta]$.

Существует инфинитезимальная формулировка свойства слабой инвариантности множества $\mathcal{W}$ относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, выраженная в терминах производного множества $\overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*)$ многозначного отображения $t \mapsto \mathcal{W}(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, отвечающего точке $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ (см., например, [10]). Это множество определяется равенством $\overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) = \bigl\{d \in \mathbb{R}^m \colon d = \lim\limits_{k\to\infty} (t_k - t_*)^{-1}(w_k - x_*)$, $\{(t_k, w_k)\}$ — последовательность в $\mathcal{W}$, где $t_k \downarrow t_*$ и $w_k \to x_*$ при $k \to \infty\bigr\}$.

Нетрудно показать, что для интегральной воронки $Y(t_*, x_*)$ ($(t_*, x_*) \in D$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$) д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$ имеет место $\overrightarrow{D}Y(t_*, x_*) = F(t_*, x_*)$.

На языке производных множеств $\overrightarrow{D}Y(t_*, x_*)$ и $\overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*)$ ($(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$) определение 1.2 принимает вид

О п р е д е л е н и е 1.3. Множество $\mathcal{W} \subset D$ назовем *слабо инвариантным* относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, если для любых $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ имеет место

$$\overrightarrow{D}Y(t_*, x_*) \cap \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \neq \varnothing$$

или, что одно и то же,

$$F(t_*, x_*) \cap \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \neq \varnothing. \tag{1.3}$$

Выберем такой шар $G = B(0; R)$, что $F(t,x) \subset G$ при $(t,x) \in D$. Если $\mathcal{W}$ слабо инвариантно относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, то из (1.3) вытекает

$$G \cap \overrightarrow{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in \mathcal{W}, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \tag{1.4}$$

2. Дефект слабой инвариантности множества относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$

Вернемся к рассмотрению множества W, выбранного нами в разд. 1. Дадим определение дефекта слабой инвариантности этого множества относительно д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$. При этом предполагаем, что в дополнение к условию $W(t) \neq \varnothing$, $t \in [t_0, \vartheta]$, выполнено следующее условие.

Условие C. При любых $(t_*, t^*) \in \Delta$ справедливо неравенство

$$h\bigl(W(t_*), W(t^*)\bigr) \leqslant R(t^* - t_*). \tag{2.1}$$

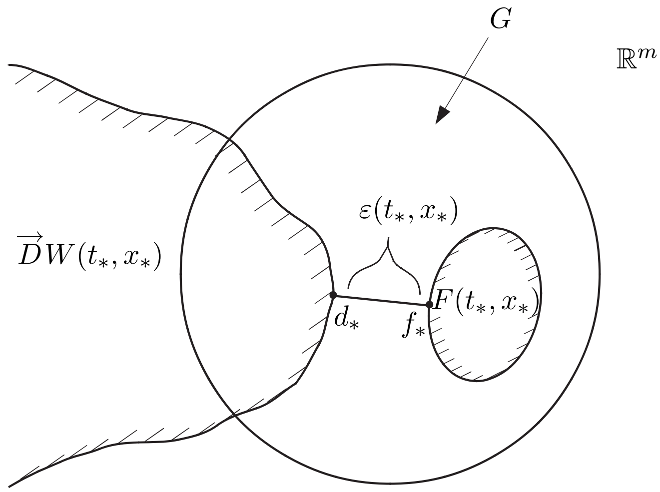


Рис. 1

Здесь $h(W^{(1)}, W^{(2)}) = \max\limits_{w^{(1)} \in W^{(1)}} \rho(w^{(1)}, W^{(2)})$ — хаусдорфово отклонение $W^{(1)}$ от $W^{(2)}$, где $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$ — компакты в $\mathbb{R}^m$, $\Delta = \big\{(t_*, t^*)\colon t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta\big\} \subset [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta]$.

Не нарушая общности рассуждений, считаем, что R в (2.1) — та же константа, что и в разд. 1, т. е. R совпадает с радиусом шара G в (1.4). Из условия С липшицевости отображения $t \mapsto W(t)$ (с константой R) следует, что W удовлетворяет соотношению

$$G \cap \overrightarrow{D}W(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta); \tag{2.2}$$

здесь $\partial W = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} \big(t, \partial W(t)\big)$, $\partial W(t)$ — граница множества $W(t)$ в $\mathbb{R}^m$.

Заметим, что условие (2.1) не слишком ограничительно для множества W и при этом (2.2) аналогично условию (1.4), сопутствующему слабо инвариантному множеству $\mathcal{W}$.

Представляется важным выяснить, в какой мере множество W не является слабо инвариантным относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, т. е. в какой мере множество W далеко от удовлетворения определению 1.2.

Для аккуратной формализации этого вопроса и ответа на него введем понятие дефекта слабой инвариантности множества W относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

В связи с этим сопоставим каждой точке $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \rho\big(\overrightarrow{D}W(t_*, x_*), F(t_*, x_*)\big) \geqslant 0; \tag{2.3}$$

здесь $\rho\big(W_*, W^*\big) = \inf\big\{\|w_* - w^*\|\colon (w_*, w^*) \in W_* \times W^*\big\}$ для множеств W_* и W^* в $\mathbb{R}^m$.

Величину $\varepsilon(t_*, x_*) \geqslant 0$ назовем *дефектом слабой инвариантности* множества W в точке $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$. Множество $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$ замкнуто и $F(t_*, x_*)$ компактно в $\mathbb{R}^m$. Следовательно, inf в (2.3) достигается на некоторой паре точек $d_* \in \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)$, $f_* \in F(t_*, x_*)$ (см. рис. 1).

Заметим, что из соотношений $F(t_*, x_*) \subset G$ и $G \cap \overrightarrow{D}W(t_*, x_*) \neq \varnothing$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, следует неравенство

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \rho\big(F(t_*, x_*), \overrightarrow{D}W(t_*, x_*)\big) \leqslant 2R,$$

$$(t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta).$$

Далее, полагаем при $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{x_* \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*);$$

здесь $\Lambda(t_*) = \partial W(t_*)$, $W(t_*) = \{x_* : (t_*, x_*) \in W\}$.

Величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом слабой инвариантности* множества W в момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$. В результате получаем функцию $\varepsilon(t) \geqslant 0$ на $[t_0, \vartheta)$, которую доопределим в точке $t = \vartheta$ значением $\varepsilon(\vartheta) = 0$. Функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ есть числовая характеристика, оценивающая степень (слабой) неинвариантности множества W.

Поскольку $\varepsilon(t_*, x_*) \leqslant 2R$, $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, то $\varepsilon(t) \leqslant 2R$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Принимая во внимание определение 1.3, видим, что слабая инвариантность множества W эквивалентна равенству $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta]$. Возникает естественное предположение о том, что если функция $\varepsilon(t)$ мала на $[t_0, \vartheta]$, то множество W можно погрузить в некоторое слабо инвариантное относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$ множество W^*, $W^*(t_0) = W(t_0)$, сечения $W^*(t)$ которого монотонно разбухают с ростом времени $t \in [t_0, \vartheta]$ по отношению к сечениям $W(t)$, но не сильно отличаются от $W(t)$ в хаусдорфовой метрике.

Для подтверждения нашего предположения введем еще одно условие.

Условие E. Функция $\varepsilon(t)$ измерима по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$.

Далее введем функцию

$$\varkappa(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{L(t-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

и множество $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$: $W^*(t) = W(t) + B\big(0; \varkappa(t)\big)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Здесь $W^{(1)} + W^{(2)} = \left\{w^{(1)} + w^{(2)} : w^{(1)} \in W^{(1)}, w^{(2)} \in W^{(2)}\right\}$.

Величину $\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} e^{L(\vartheta-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau$ назовем *дефектом слабой инвариантности* множества W.

З а м е ч а н и е 2.1. В формуле для дефекта слабой инвариантности ε_W вместо константы Липшица L можно взять константу Липшица $L(\tau)$ ($L(\tau) \leqslant L$ при $\tau \in [t_0, \vartheta]$) по переменной x вектор-функции $f(t, x, u)$ в множестве $D(\tau) = \{x \in \mathbb{R}^m : (\tau, x) \in D\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$. Считаем при этом, что $L(\tau)$ — интегрируемая функция на $[t_0, \vartheta]$. Так что с учетом этого замечания дефект слабой инвариантности множества W примет вид

$$\varepsilon_W = \varkappa(\vartheta) = \int\limits_{t_0}^{\vartheta} e^{L(\tau)(t-\tau)} \varepsilon(\tau)\, d\tau.$$

В ряде случаев подмена в формуле для ε_W константы L функцией $L(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ значительно улучшает величину ε_W.

Сформулируем и докажем основное утверждение.

Теорема. *Пусть управляемая система* (1.1) *и компакт* $W \subset D$, $W(t) \neq \varnothing$ *при* $t \in [t_0, \vartheta]$, *удовлетворяют условиям A–E. Тогда множество* W^* *слабо инвариантно относительно д. в.* $\dot{x} \in F(t, x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопоставим функции $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ д. в.:

$$\frac{dx}{dt} \in F^*(t, x), \quad [t_0, \vartheta]; \tag{2.4}$$

здесь $F^*(t, x) = F(t, x) + \varepsilon(t) B$, $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^m$.

Так как для любых $(t_*, x_*) \in \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \rho\left(\overrightarrow{D} W(t_*, x_*), F(t_*, x_*)\right) \leqslant \varepsilon(t_*),$$

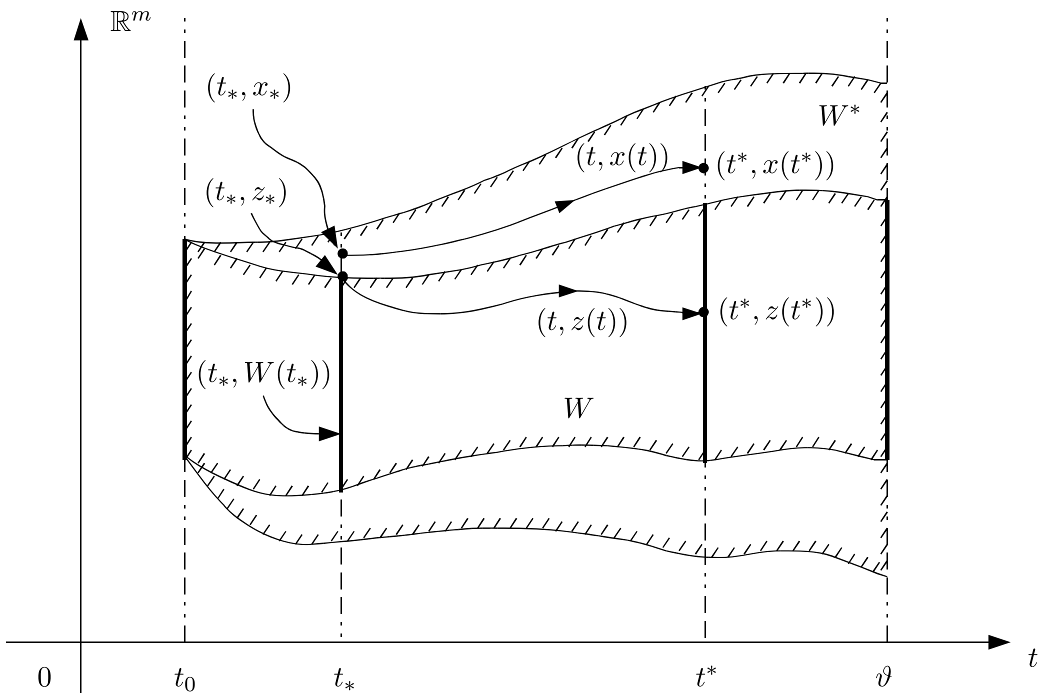


Рис. 2

то имеет место

$$\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) \cap F^*(t_*, x_*) \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in \partial W, \quad t_* \in [t_0, \vartheta). \tag{2.5}$$

Так как для точек $(t_*, x_*) \in W \setminus \partial W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ имеет место $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) = \mathbb{R}^m$, то для них, очевидно, выполняется $\overrightarrow{D}W(t_*, x_*) \cap F^*(t_*, x_*) \neq \varnothing$. Тогда соотношение (2.5) означает, что множество W слабо инвариантно относительно д. в. (2.4).

Принимая во внимание этот факт, покажем, что множество W^* слабо инвариантно относительно д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Для этого выберем произвольные $(t_*, x_*) \in W^*$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Покажем, что $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$. Тем самым мы покажем, что W^* удовлетворяет определению 1.2.

Итак, пусть точка (t_*, x_*) удовлетворяет дополнительному условию $(t_*, x_*) \notin \operatorname{int} W$. В этом случае точка (t_*, z_*), ближайшая на $\big(t_*, W(t_*)\big)$ к (t_*, x_*), удовлетворяет включению $(t_*, z_*) \in \Lambda(t_*) \subset \partial W$. Из свойства слабой инвариантности множества W относительно д. в. (2.4) следует, что существует такая вектор-функция $z(t)$ на $[t_*, t^*]$, $z(t_*) = z_*$, что

$$\frac{dz(t)}{dt} = f^*(t) \in F^*\big(t, z(t)\big) \quad \text{п. в. на} \quad [t_*, t^*]$$

и при этом $\big(t, z(t)\big) \in W$, на $t \in [t_*, t^*]$ (см. замечание 1.1).

Вектор-функция $f^*(t)$ представима в виде

$$f^*(t) = f(t) + \varepsilon(t) b(t), \quad t \in [t_*, t^*];$$

здесь $f(t) \in F\big(t, z(t)\big)$ и $b(t) \in B$ — интегрируемые по Лебегу на $[t_*, t^*]$ вектор-функции.

Покажем, что существует решение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$, на $[t_*, t^*]$ д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$, удовлетворяющее включению $\big(t^*, x(t^*)\big) \in W^*$ (см. рис. 2). Это решение сконструируем как равномерный предел на $[t_*, t^*]$ некоторой последовательности ломаных Эйлера д. в. $\dot{x} \in F(t, x)$.

Для этого введем в рассмотрение разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_{N-1}, \tau_N = t^*\}$, где $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta = 1/N\,(t^* - t_*)$, $i = \overline{0, N-1}$.

Сконструируем некоторую ломаную Эйлера $x_\Gamma(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x_\Gamma(t_*) = x_*$ на $[t_*, t^*]$, отвечающую разбиению Γ. Конструирование этой ломаной осуществим рекуррентно по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ.

А именно, в начальный момент $\tau_0 = t_*$ разбиения Γ полагаем $x_\Gamma(\tau_0) = x_*$. Предположим, что мы сконструировали уже ломаную на промежутке $[\tau_0, \tau_i]$, где τ_i, $i \in \overline{0, N-1}$ — некоторый момент разбиения Γ. В момент τ_i реализовалась точка $x_\Gamma(\tau_i)$ нашей ломаной Эйлера. Вычисляем вектор $s(\tau_i) = z(\tau_i) - x_\Gamma(\tau_i)$ и выбираем вектор $f^{(i)} \in F\big(\tau_i, x_\Gamma(\tau_i)\big)$ из условия

$$\langle s(\tau_i), f^{(i)} \rangle = h_{F(\tau_i, x_\Gamma(\tau_i))}\big(s(\tau_i)\big).$$

Здесь $h_F(s) = \max\limits_{f \in F} \langle s, f \rangle$ — опорная функция выпуклого компакта F в $\mathbb{R}^m$, $\langle s, f \rangle$ — скалярное произведение векторов s и f в $\mathbb{R}^m$.

Звено ломаной Эйлера $x_\Gamma(t)$ на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ определяем равенством

$$x_\Gamma(t) = x_\Gamma(\tau_i) + (t - \tau_i) f^{(i)}.$$

Так, продвигаясь по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ, определяем последовательно на всех промежутках $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ ломаную Эйлера.

Введем в рассмотрение величину $\|s(\tau_i)\|$, $\tau_i \in \Gamma$ и оценим сверху величину $\|s(\tau_{i+1})\|$. Имеем

$$s(\tau_{i+1}) = s(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f^*(t)\,dt - \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f^{(i)}\,dt.$$

Введем также скалярную функцию

$$\omega^*(\delta) = \sup\big\{d\big(F(t_*, x_*), F(t^*, x^*)\big) \colon (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D,$$
$$|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leqslant \delta\big\}, \quad \delta \in (0, \infty)$$

и число $K = \max\{\|f\| \colon f \in F(t,x), (t,x) \in D\} < +\infty$. Для функции $\omega^*(\delta)$ имеет место $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Вектор-функция $z(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяет неравенству

$$d\left(F\big(t, z(t)\big), F\big(\tau_i, z(\tau_i)\big)\right) \leqslant \omega^*\left(|t - \tau_i| + \|z(t) - z(\tau_i)\|\right) \leqslant \omega^*\left(|t - \tau_i| + \|\int\limits_{\tau_i}^{t} f^*(\tau)\,d\tau\|\right).$$

Учитывая оценку $\|f^*(\tau)\| \leqslant \|f(\tau)\| + \varepsilon(\tau) \leqslant K + 2R$, получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$

$$d\Big(F\big(t, z(t)\big), F\big(\tau_i, z(\tau_i)\big)\Big) \leqslant \omega^*\big((1 + K + 2R)\Delta_i\big). \tag{2.6}$$

Имеем

$$\|s(\tau_{i+1})\|^2 = \|s(\tau_i)\|^2 + 2\left\langle s(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f^*(t)\,dt \right\rangle - 2\left\langle s(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f^{(i)}\,dt \right\rangle + \gamma(\tau_i, \tau_{i+1}); \tag{2.7}$$

здесь $\gamma(\tau_i, \tau_{i+1}) = \left\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (f^*(t) - f^{(i)})\,dt \right\|^2$.

Справедливо неравенство

$$\Big\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (f^*(t) - f^{(i)})\, dt \Big\| \leqslant \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big(\|f^*(t)\| + \|f^{(i)}\| \Big)\, dt \leqslant 2(K+R)\Delta_i,$$

и поэтому $\gamma(\tau_i, \tau_{i+1}) \leqslant 4(K+R)^2\Delta_i^2$.

Для простоты обозначений полагаем $K^* = 4(K+R)^2$.

Принимая во внимание (2.7) и предыдущую оценку, получаем

$$\|s(\tau_{i+1})\|^2 \leqslant \|s(\tau_i)\|^2 + 2\left\langle s(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t)\, dt \right\rangle$$

$$- 2\left\langle s(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f^{(i)}\, dt \right\rangle + 2\left\langle s(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t) b(t)\, dt \right\rangle + K^*\Delta_i^2. \tag{2.8}$$

Согласно оценке (2.6) выводим, что вектор-функция $f(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ удовлетворяет включению

$$f(t) \in F\big(t, z(t)\big) \subset F\big(\tau_i, z(\tau_i)\big) + B\Big(0; \omega^*\big((1+K+2R)\Delta_i\big)\Big)$$

и, значит, справедливо включение

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t)\, dt \in \Delta_i F\big(\tau_i, z(\tau_i)\big) + B\big(0; \omega(\Delta_i)\big);$$

здесь обозначено $\omega(\delta) = \delta\omega^*\big((1+K+2R)\delta\big)$, $\delta \in (0, \infty)$. Отсюда следует, что интеграл $\displaystyle\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t)\, dt$ представим в виде

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t)\, dt = \Delta_i g^{(i)} + b^{(i)};$$

здесь $g^{(i)} \in F\big(\tau_i, z(\tau_i)\big)$, $b^{(i)} \in B\big(0; \omega(\Delta_i)\big)$.

Тогда вектор $h^{(i)}$, ближайший в $F\big(\tau_i, x_\Gamma(\tau_i)\big)$ к вектору $g^{(i)}$, удовлетворяет неравенству

$$\|h^{(i)} - g^{(i)}\| \leqslant d\Big(F\big(\tau_i, x_\Gamma(\tau_i)\big), F\big(\tau_i, z(\tau_i)\big)\Big) \leqslant L\|z(\tau_i) - x_\Gamma(\tau_i)\| = L\|s(\tau_i)\|. \tag{2.9}$$

Представив интеграл $\displaystyle\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t)\, dt$ в виде

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t)\, dt = \Delta_i h^{(i)} + \Delta_i\left(g^{(i)} - h^{(i)}\right) + b^{(i)},$$

получаем равенство

$$2\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \big\langle s(\tau_i), f(t) - f^{(i)} \big\rangle\, dt = 2\Delta_i \big\langle s(\tau_i), h^{(i)} - f^{(i)} \big\rangle + 2\Delta_i \big\langle s(\tau_i), g^{(i)} - h^{(i)} \big\rangle + 2\big\langle s(\tau_i), b^{(i)} \big\rangle.$$

Из определения вектора $f^{(i)}$ в $F\big(\tau_i, x_\Gamma(\tau_i)\big)$ следует неравенство

$$\langle s(\tau_i), h^{(i)} - f^{(i)} \rangle \leqslant 0. \tag{2.10}$$

Также справедливы неравенства

$$\begin{gathered}\langle s(\tau_i), g^{(i)} - h^{(i)}\rangle \leqslant \|s(\tau_i)\| \cdot \|g^{(i)} - h^{(i)}\| \leqslant L\|s(\tau_i)\|^2, \\ 2\langle s(\tau_i), b^{(i)}\rangle \leqslant 2\|s(\tau_i)\| \cdot \omega(\Delta_i).\end{gathered} \tag{2.11}$$

Принимая во внимание (2.9)–(2.11), получаем

$$2\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \langle s(\tau_i), f(t) - f^{(i)}\rangle\, dt \leqslant 2L\|s(\tau_i)\|^2\Delta_i + 2\|s(\tau_i)\|\omega(\Delta_i).$$

В итоге из оценки (2.8) и последующих оценок вытекает оценка

$$\|s(\tau_{i+1})\|^2 \leqslant (1 + 2L\Delta_i)\|s(\tau_i)\|^2 + 2\|s(\tau_i)\|\omega(\Delta_i) + 2\|s(\tau_i)\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\, dt + K^*\Delta_i^2. \tag{2.12}$$

Если вдруг оказалось, что $\|s(\tau_i)\| = 0$, то $\|s(\tau_{i+1})\| \leqslant K^{*\frac{1}{2}}\Delta_i$.

Проанализируем теперь случай $\|s(\tau_i)\| > 0$ и проведем оценки в этом случае. Из (2.12) следует

$$\|s(\tau_{i+1})\|^2 - \|s(\tau_i)\|^2 \leqslant 2L\Delta_i\|s(\tau_i)\|^2 + 2\|s(\tau_i)\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\, dt + 2\|s(\tau_i)\|\omega(\Delta_i) + K^*\Delta_i^2. \tag{2.13}$$

Относительно величины $\|s(\tau_i)\| > 0$ есть две возможности: 1. $\|s(\tau_i)\| < \Delta_i^{\frac{1}{2}}$. 2. $\|s(\tau_i)\| \geqslant \Delta_i^{\frac{1}{2}}$.

Пусть относительно $\|s(\tau_i)\| > 0$ реализовалась возможность 1. Тогда из (2.13) следует

$$\|s(\tau_{i+1})\|^2 \leqslant e^{2L\Delta_i}\Delta_i + 4R\Delta_i^{\frac{3}{2}} + 2\Delta_i^{\frac{1}{2}}\omega(\Delta_i) + K^*\Delta_i^2.$$

Положив $\gamma_*(\delta) = \Big(e^{2L\delta}\delta + 2\delta^{\frac{1}{2}}\omega(\delta) + 4R\delta^{\frac{3}{2}} + K^*\delta^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, получаем оценку в рассматриваемом случае

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leqslant \gamma_*(\Delta_i). \tag{2.14}$$

Пусть относительно $\|s(\tau_i)\| > 0$ реализовалась возможность 2. В этом случае рассмотрим два варианта: (a) $\|s(\tau_i)\| \leqslant \|s(\tau_{i+1})\|$, (b) $\|s(\tau_i)\| > \|s(\tau_{i+1})\|$.

Пусть реализовался вариант (a). Из (2.13) выводим оценку

$$2\|s(\tau_i)\|\left(\|s(\tau_{i+1})\| - \|s(\tau_i)\|\right) \leqslant 2L\Delta_i\|s(\tau_i)\|^2 + 2\|s(\tau_i)\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\, dt + 2\|s(\tau_i)\|\omega(\Delta_i) + K^*\Delta_i^2. \tag{2.15}$$

Из (2.15) следует оценка

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leqslant e^{L\Delta_i}\|s(\tau_i)\| + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\, dt + \omega(\Delta_i) + \frac{1}{2\|s(\tau_i)\|}K^*\Delta_i^2,$$

из которой в рассматриваемом случае возможности 2 вытекает

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leqslant e^{L\Delta_i}\|s(\tau_i)\| + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\, dt + \omega(\Delta_i) + \frac{1}{2}K^*\Delta_i^{\frac{3}{2}}. \tag{2.16}$$

Пусть реализовался вариант (b). Очевидно, что в этом случае также имеет место оценка (2.16).

В результате получаем, что в случае, когда реализовалась возможность 2, величина $\|s(\tau_{i+1})\|$ связана с величиной $\|s(\tau_i)\| > 0$ неравенством (2.16).

Перейдем теперь от локальных оценок к рассмотрению всего набора $S = \{s(\tau_i)\colon i = \overline{0,N}\}$, в котором нас интересуют прежде всего последний вектор $s(\tau_N)$ и его норма $\|s(\tau_N)\|$.

Относительно S предполагаются следующие возможности.

1. $\|s(\tau_i)\| > \Delta^{\frac{1}{2}}$ при $i \in \overline{0,N}$.

2. $\|s(\tau_i)\| > \Delta^{\frac{1}{2}}$ при $i \in \overline{q,N}$, $\|s(\tau_{q-1})\| \leqslant \Delta^{\frac{1}{2}}$ при некотором $q \geqslant 1$.

3. $\|s(\tau_N)\| \leqslant \Delta^{\frac{1}{2}}$.

Оценим в каждом из этих вариантов величину $\|s(\tau_N)\|$ сверху, воспользовавшись пошаговыми оценками (2.14), (2.16).

Итак, пусть относительно набора S реализовалась возможность 1. Имеем при $i = \overline{0, N-1}$

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leqslant e^{L\Delta_i}\|s(\tau_i)\| + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\,dt + \gamma^*(\Delta_i); \tag{2.17}$$

здесь $\gamma^*(\delta) = \omega(\delta) + 1/2\,K^*\delta^{\frac{3}{2}}$, $\delta \in (0,\infty)$.

Возьмем, например, последние четыре номера $i = N-1, N-2, N-3, N-4$, примыкающие к номеру N; для них имеем оценку

$$\begin{gathered}\|s(\tau_N)\| \leqslant e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\Delta_{N-3}+\Delta_{N-4})}\|s(\tau_{N-4})\| + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\Delta_{N-3})}\int\limits_{\tau_{N-4}}^{\tau_{N-3}} \varepsilon(t)\,dt \\ + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2})}\int\limits_{\tau_{N-3}}^{\tau_{N-2}} \varepsilon(t)\,dt + e^{L\Delta_{N-1}}\int\limits_{\tau_{N-2}}^{\tau_{N-1}} \varepsilon(t)\,dt + \int\limits_{\tau_{N-1}}^{\tau_N} \varepsilon(t)\,dt + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\Delta_{N-3})}\gamma^*(\Delta_{N-4}) \\ + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2})}\gamma^*(\Delta_{N-3}) + e^{L\Delta_{N-1}}\gamma^*(\Delta_{N-2}) + \gamma^*(\Delta_{N-1}).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Правая часть оценки (2.18) — мажоранта величины $\|s(\tau_N)\|$, включающая в себя величины $\|s(\tau_{N-4})\|$ и $\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\,dt$, $i = \overline{N-4, N-1}$. По этой оценке мы заключаем, как выглядит оценка, выражающая величину $\|s(\tau_N)\|$ через $\|s(\tau_0)\|$ и $\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\,dt$, $i = \overline{0, N-1}$. Выпишем эту оценку:

$$\begin{gathered}\|s(\tau_N)\| \leqslant e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_0)}\|s(\tau_0)\| + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_1)}\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} \varepsilon(t)\,dt \\ + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_2)}\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon(t)\,dt + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_3)}\int\limits_{\tau_2}^{\tau_3} \varepsilon(t)\,dt + \ldots \\ + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2})}\int\limits_{\tau_{N-3}}^{\tau_{N-2}} \varepsilon(t)\,dt + e^{L\Delta_{N-1}}\int\limits_{\tau_{N-2}}^{\tau_{N-1}} \varepsilon(t)\,dt + \int\limits_{\tau_{N-1}}^{\tau_N} \varepsilon(t)\,dt \\ + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_1)}\gamma^*(\Delta_0) + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_2)}\gamma^*(\Delta_1) \\ + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_3)}\gamma^*(\Delta_2) + \ldots + e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2})}\gamma^*(\Delta_{N-3}) \\ + e^{L\Delta_{N-1}}\gamma^*(\Delta_{N-2}) + \gamma^*(\Delta_{N-1}).\end{gathered} \tag{2.19}$$

Рассмотрим далее произвольный промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in \overline{0, N-1}$ и соответствующую ему величину

$$e^{L(\Delta_{N-1}+\Delta_{N-2}+\ldots+\Delta_{i+1})} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\,dt = \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})}\varepsilon(t)\,dt.$$

Сравним эту величину с интегралом $\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt$. Поскольку при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ имеет место $e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})} \leqslant e^{L(\tau_N-t)}$, то

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})}\varepsilon(t)\,dt \leqslant \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt.$$

Из неравенства (2.19), имеющего место при всех $i \in \overline{0, N-1}$, следует

$$\sum_{i=0}^{N-1} e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \varepsilon(t)\,dt \leqslant \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt. \tag{2.20}$$

При этом заметим, что в оценке (2.20) левую часть оценки мы завысили не сильно. А именно, при достаточно малых $\Delta_i > 0$ верно неравенство

$$e^{L(\tau_N-t)} - e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})} \leqslant 2L\Delta_i e^{L(\tau_N-\tau_0)}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}],$$

из которого вытекает оценка

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt \leqslant \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})}\varepsilon(t)\,dt + 4LRe^{L(\tau_N-\tau_0)}\Delta_i^2.$$

Наряду с оценкой (2.20) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})}\gamma^*(\Delta_i) &= \sum_{i=0}^{N-1} e^{L(\tau_N-\tau_{i+1})}\Delta_i\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta_i\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta_i^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &\leqslant e^{L(\tau_N-\tau_0)}(\tau_N-\tau_0)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big) \end{aligned} \tag{2.21}$$

Из оценок (2.19), (2.20), (2.21) выводим оценку

$$\begin{aligned} \|s(\tau_N)\| &\leqslant e^{L(\tau_N-\tau_0)}\|s(\tau_0)\| + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt \\ &+ e^{L(\tau_N-\tau_0)}(\tau_N-\tau_0)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Далее учитывая, что $\big(\tau_0, x_\Gamma(\tau_0)\big) = (t_*, x_*) \in W^*$ и $\big(\tau_0, x_\Gamma(\tau_0)\big) = (t_*, z_*) \in \Lambda(t_*) \subset \partial W$ — ближайшая на $\big(t_*, W(t_*)\big)$ точка к (t_*, x_*), имеем

$$\|s(\tau_0)\| = \|x_* - z_*\| = \rho\big(x_*, W(t_*)\big) \leqslant h\big(W^*(t_*), W(t_*)\big) = \varkappa(t_*) = \varkappa(\tau_0).$$

Заменяя в оценке (2.22) величину $\|s(\tau_0)\|$ ее мажорантой $\varkappa(\tau_0) = \int_{t_0}^{\tau_0} e^{L(\tau_0-t)}\varepsilon(t)\,dt$, получаем

$$\begin{aligned} \|s(\tau_N)\| &\leqslant e^{L(\tau_N-\tau_0)} \int\limits_{t_0}^{\tau_0} e^{L(\tau_0-t)}\varepsilon(t)\,dt + \int\limits_{\tau_0}^{\tau_N} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt \\ &+ e^{L(\tau_N-\tau_0)}(\tau_N-\tau_0)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Из (2.23), учитывая $\tau_0 = t_*$ и $\tau_N = t^*$, получаем

$$\|s(t^*)\| \leqslant \varkappa(t^*) + e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big) \tag{2.24}$$

при $\Delta \in (0, t^*-t_*)$, Δ — диаметр разбиения Γ.

Пусть относительно набора S реализовалась возможность 2. В этом случае имеет место оценка, аналогичная оценке (2.22)

$$\|s(\tau_N)\| \leqslant e^{L(\tau_N-\tau_q)}\|s(\tau_q)\| + \int\limits_{\tau_q}^{\tau_N} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt$$
$$+ e^{L(\tau_N-\tau_q)}(\tau_N-\tau_q)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{2.25}$$

Учитывая также неравенство $\|s(\tau_{q-1})\| < \|s(\tau_q)\|$, выводим, согласно (2.17), оценку

$$\|s(\tau_q)\| \leqslant e^{L\Delta_{q-1}}\|s(\tau_{q-1})\| + \int\limits_{\tau_{q-1}}^{\tau_q} \varepsilon(t)\,dt + \omega(\Delta_{q-1}) + \frac{1}{2}K^*\Delta_{q-1}^{\frac{3}{2}}. \tag{2.26}$$

Подставляя в (2.25) вместо величины $\|s(\tau_q)\|$ ее мажоранту из (2.26), имеем оценку

$$\|s(\tau_N)\| \leqslant e^{L(\tau_N-\tau_{q-1})}\|s(\tau_{q-1})\| + \int\limits_{\tau_{q-1}}^{\tau_N} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt$$
$$+ e^{L(\tau_N-\tau_{q-1})}(\tau_N-\tau_{q-1})\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Принимая в рассматриваемом случае во внимание неравенство $\|s(\tau_{q-1})\| \leqslant \Delta^{\frac{1}{2}} < \|s(\tau_q)\|$, получаем оценку

$$\|s(\tau_N)\| \leqslant e^{L(\tau_N-\tau_{q-1})}\Delta^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\tau_{q-1}}^{\tau_N} e^{L(\tau_N-t)}\varepsilon(t)\,dt$$
$$+ e^{L(\tau_N-\tau_{q-1})}(\tau_N-\tau_{q-1})\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{2.27}$$

Из оценки (2.27) с учетом $\tau_0 = t_*$, $\tau_N = t^*$ и $\tau_0 = t_* \leqslant \tau_{q-1}$, вытекает

$$\|s(t^*)\| \leqslant e^{L(t^*-t_*)}\Delta^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{t_*}^{t^*} e^{L(t^*-t)}\varepsilon(t)\,dt$$
$$+ e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big) \tag{2.28}$$

при $\Delta \in (0, t^*-t_*)$, Δ — диаметр разбиения Γ.

Очевидно, что из (2.28) следует оценка

$$\|s(t^*)\| \leqslant e^{L(t^*-t_*)}\Delta^{\frac{1}{2}} + \varkappa(t^*) + e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)\Big(\omega^*\big((1+K+2R)\Delta\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{\frac{1}{2}}\Big). \tag{2.29}$$

Пусть, наконец, относительно набора S реализовалась возможность 3: $\|s(\tau_N)\| \leqslant \Delta^{\frac{1}{2}}$. Ясно, что в этом случае величина $\|s(t^*)\| = \|s(\tau_N)\|$ удовлетворяет и неравенству (2.29).

Таким образом, рассмотрев все три возможности относительно набора S, будем считать, что величина $\|s(t^*)\| = \|s(\tau_N)\|$, отвечающая последнему вектору $s(\tau_N)$ из набора S, удовлетворяет оценке (2.24) или оценке (2.29).

Рассмотрим теперь последовательность $\{\Gamma_n\}$ разбиений, подобных разбиению Γ, т. е. $\Gamma_n = \{\tau_0^{(n)} = t_*, \tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)-1}^{(n)}, \tau_{N(n)}^{(n)} = t^*\}$ с промежутками $[\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)}]$, $i = \overline{0, N(n)-1}$ равной длины $\Delta^{(n)} = \frac{1}{N(n)}(t^* - t_*) > 0$. При этом полагаем, что $N(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и, стало быть, $\Delta^{(n)} \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

Каждому разбиению Γ_n сопоставим свою ломаную Эйлера $x_{\Gamma_n}(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x_{\Gamma_n}(t_*) = x_*$ на $[t_*, t^*]$, которая сконструирована по той же схеме, что и ломаная Эйлера $x_\Gamma(t)$. При этом движение $z(t)$ на $[t_*, t^*]$, участвующее в конструировании ломаной $x_{\Gamma_n}(t)$, остается тем же самым, что и при конструировании ломаной $x_\Gamma(t)$.

Каждой ломаной Эйлера $x_{\Gamma_n}(t)$ на $[t_*, t^*]$ сопоставим свой набор $S^{(n)} = \{s^{(n)}(\tau_i^{(n)}), i = \overline{0, N(n)}\}$ векторов $s^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = z(\tau_i^{(n)}) - x_{\Gamma_n}(\tau_i^{(n)})$ так, что при этом последний вектор $s^{(n)}(\tau_{N(n)}^{(n)})$ набора $S^{(n)}$ имеет вид $s^{(n)}(\tau_{N(n)}^{(n)}) = s^{(n)}(t^*) = z(t^*) - x_{\Gamma_n}(t^*)$.

Величины $\|s^{(n)}(t^*)\|$, $n = 1, 2, \ldots$, стеснены оценками (каждая из величин стеснена одной из оценок):

$$\|s^{(n)}(t^*)\| \leqslant \varkappa(t^*) + e^{L(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\Big(\omega^*\big((1 + K + 2R)\Delta^{(n)}\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{(n)\frac{1}{2}}\Big), \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}\|s^{(n)}(t^*)\| \leqslant e^{L(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\Delta^{(n)\frac{1}{2}} + \varkappa(t^*)\\ + e^{L(t^*-t_*)}(t^* - t_*)\Big(\omega^*\big((1 + K + 2R)\Delta^{(n)}\big) + \frac{1}{2}K^*\Delta^{(n)\frac{1}{2}}\Big).\end{aligned} \tag{2.31}$$

Последовательность $\{x_{\Gamma_n}(t)\}$ ломаных Эйлера на $[t_*, t^*]$ равноограничена и равностепенно непрерывна и поэтому, согласно теореме Арцела (см. [19]), из нее можно выделить равномерно сходящуюся на $[t_*, t^*]$ подпоследовательность. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что сама последовательность $\{x_{\Gamma_n}(t)\}$ равномерно сходится на $[t_*, t^*]$. Полагаем $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_{\Gamma_n}(t)$ на $[t_*, t^*]$. Вектор-функция $x(t)$ является решением д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x(t_*) = x_*$, на $[t_*, t^*]$. Кроме того, исходя из оценки (2.30), (2.31) и равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta^{(n)} = 0$, получаем, что вектор $s(t^*) = z(t^*) - x(t^*) = \lim\limits_{n\to\infty} s^{(n)}(t^*)$ удовлетворяет неравенству

$$\|s(t^*)\| = \lim_{n\to\infty} \|s^{(n)}(t^*)\| \leqslant \varkappa(t^*). \tag{2.32}$$

Учитывая включение $\big(t^*, z(t^*)\big) \in W$ и оценку (2.32), выводим, что решение $x(t)$ д. в. $\dot{x} \in F(t,x)$, $x(t_*) = x_*$ удовлетворяет включению $x(t^*) \in W^*(t^*)$. Тем самым показано, что для любых $(t_*, x_*) \in W^* \setminus \operatorname{int} W$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$ имеет место $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$.

Покажем теперь, что это соотношение имеет место и для любых $(t_*, x_*) \in \operatorname{int} W$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Для этого выберем произвольные $(t_*, x_*) \in \operatorname{int} W$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$. При этом представляются две возможности:

1. $\bigcup\limits_{t\in[t_*,\vartheta]} \big(t, Y(t, t_*, x_*)\big) \subset \operatorname{int} W$.
2. $\bigcup\limits_{t\in[t_*,\vartheta]} \big(t, Y(t, t_*, x_*)\big) \not\subset \operatorname{int} W$.

Пусть реализовалась возможность 1. В этом случае имеем $Y(t, t_*, x_*) \subset \operatorname{int} W$ при $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и, следовательно, $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$ при $t^* \in [t_*, \vartheta]$.

Пусть реализовалась возможность 2. Тогда найдутся моменты $\hat{t}_* \in (t_*, \vartheta]$, для которых $Y(\hat{t}_*, t_*, x_*) \not\subset \operatorname{int} W(\hat{t}_*)$. Полагаем $\bar{t}_* = \inf\{\hat{t}_* \in (t_*, \vartheta] \colon Y(\hat{t}_*, t_*, x_*) \not\subset \operatorname{int} W(\hat{t}_*)\}$ (см. рис. 3).

Выберем последовательности $\{\hat{t}_*^{(k)}\}$ ($\hat{t}_*^{(k)} \downarrow \bar{t}_*$ при $k \to \infty$) и $\{x^{(k)}\}$ ($x^{(k)} \in Y(\hat{t}_*^{(k)}, t_*, x_*) \setminus \operatorname{int} W(\hat{t}_*^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$). Так как $\{x^{(k)}\}$ ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся

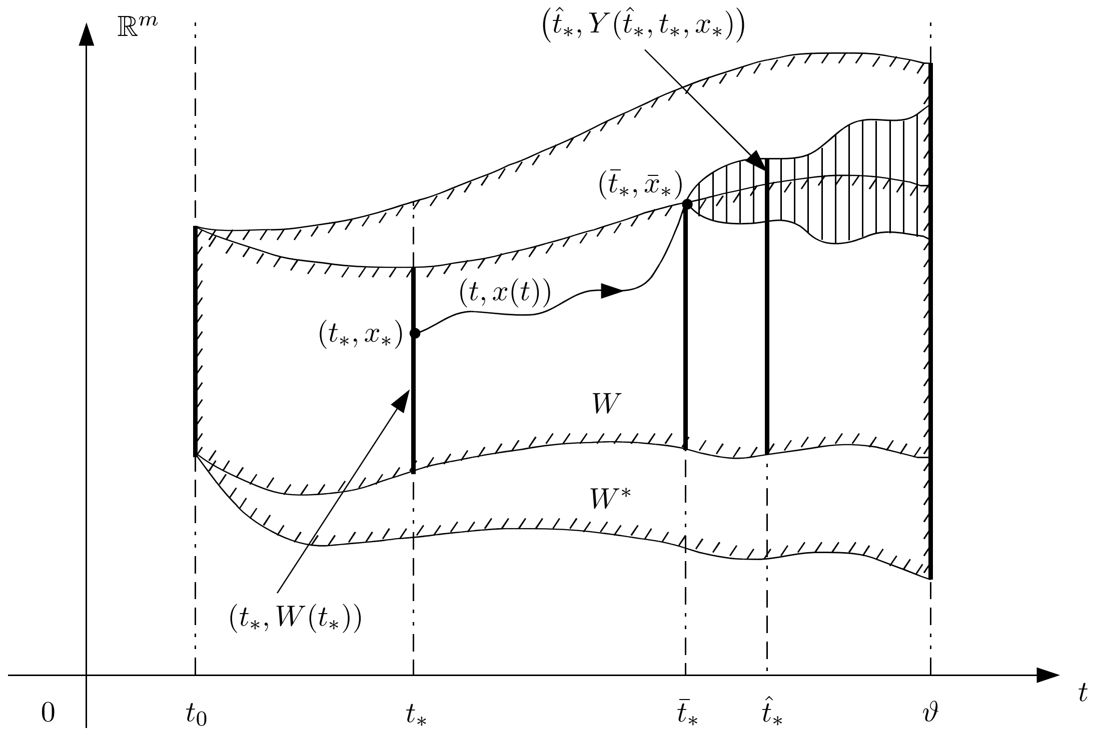


Рис. 3

подпоследовательность $\{x^{(l)}\}$ ($x^{(l)} \in Y(\hat{t}_*^{(l)}, t_*, x_*) \setminus \operatorname{int} W(\hat{t}_*^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots$; $\hat{t}_*^{(l)} \downarrow \bar{t}_*$ при $l \to \infty$). Отображение $t \mapsto Y(t, t_*, x_*)$ непрерывно справа в точке $\bar{t}_*$ и поэтому $\bar{x}_* = \lim\limits_{l\to\infty} x_l \in Y(\bar{t}_*, t_*, x_*)$. Также отображения $t \mapsto Y(t, t_*, x_*)$ и $t \mapsto W(t)$ непрерывны слева в точке $\bar{t}_*$ и поэтому из включения $Y(t, t_*, x_*) \subset \operatorname{int} W(t)$ при $t < \bar{t}_*$ следует $Y(\bar{t}_*, t_*, x_*) \subset W(\bar{t}_*)$. Из включения $\bar{x}_* \in Y(\bar{t}_*, t_*, x_*)$ и $Y(\bar{t}_*, t_*, x_*) \subset W(\bar{t}_*)$ получаем $\bar{x}_* \in W(\bar{t}_*)$. С другой стороны, поскольку $x^{(l)} \notin \operatorname{int} W(\hat{t}_*^{(l)})$, $l = 1, 2, \ldots$, то $\bar{x}_* \notin \operatorname{int} W(\bar{t}_*)$. Из соотношений $\bar{x}_* \in W(\bar{t}_*)$, $\bar{x}_* \notin \operatorname{int} W(\bar{t}_*)$ следует $\bar{x}_* \in \partial W(\bar{t}_*)$ или, что одно и то же, $(\bar{t}_*, \bar{x}_*) \in \Lambda(\bar{t}_*) \subset \partial W$. Для точки $(\bar{t}_*, \bar{x}_*) \in \Lambda(\bar{t}_*)$, пользуясь доказанным ранее, получаем $Y(t^*, \bar{t}_*, \bar{x}_*) \cap W^*(\bar{t}_*) \neq \varnothing$ при $t^* \in [\bar{t}_*, \vartheta]$. Из включения $Y(t^*, \bar{t}_*, \bar{x}_*) \subset Y(t^*, t_*, x_*)$ следует $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$ при $t^* \in [\bar{t}_*, \vartheta]$. Кроме того, $Y(t^*, t_*, x_*) \subset \operatorname{int} W(t^*) \subset W^*(t^*)$ при $t^* \in [t_*, \bar{t}_*)$ и, значит, $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$ при $t^* \in [t_*, \bar{t}_*)$. Вместе с тем установлено, что для любых $(t_*, x_*) \in \operatorname{int} W$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$ имеет место $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$.

Итак, в случаях $(t_*, x_*) \in W^* \setminus \operatorname{int} W$ и $(t_*, x_*) \in \operatorname{int} W$ установлено, что $Y(t^*, t_*, x_*) \cap W^*(t^*) \neq \varnothing$ при любых $t^* \in [t_0, \vartheta]$.

Теорема доказана.

Из теоремы вытекает, что для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in W$ и любого $\zeta \in (0, \infty)$ существует движение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, управляемой системы (1.1), удовлетворяющее включению $x(t) \in W(t) + B\,(0, \varkappa(t) + \zeta)$ при $t \in [t_0, \vartheta]$.

Пусть перед нами стоит задача о наведении управляемой системы (1.1) в момент ϑ на целевое множество M, которое при этом удовлетворяет равенству $M = W(\vartheta)$. С помощью известных процедур управления с поводырем, пристроенных к W^*, мы можем построить управление $u(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$ для системы (1.1), которое обеспечивает сколь угодно точное приведение движения $x(t)$, $(t_0, x_0) \in W$, системы (1.1) на ε_W-окрестность множества M. Таким образом, в задаче о наведении системы (1.1) в момент ϑ на множество $M = W(\vartheta)$ дефект ε_W множества W есть та погрешность, которую лицо, управляющее системой (1.1), гарантирует себе, используя W^* в качестве базы для процедуры управления множеством.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** О дифференциальной игре на сближение // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 6. С. 1287–1289.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Дифференциальная игра наведения // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 579–591.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. I // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1281.
5. **Понтрягин Л.С.** О линейных дифференциальных играх. II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. **Kurzhanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia / ed. A.B. Kurzhanski. Boston etc.: Birkhauser, 1993. P. 122–188. (Progress in Systems and Control Theory; vol. 17).
8. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
9. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Аппроксимация в дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204.
10. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control // Probl. Control Inform. Theory. 1985. Vol. 14, no. 6. P. 405–419.
11. **Ушаков В.Н., Латушкин Я.А.** Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 2. С. 178–194.
12. **Ushakov V.N., Brykalov S.A., Latushkin Y.A.** Stable and unstable sets in problems of conflict control // Funct. Differ. Equ. 2008. Vol. 15, № 3–4. P. 309–338.
13. **Ушаков В.Н., Малёв А.Г.** К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
14. **Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н.** Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения // Докл. АН СССР. 1988. 2011. Т. 303. №. 4. С. 794–797.
15. **Тонков Е.Л., Панасенко Е.А.** Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 859–860.
16. **Тонков Е.Л., Панасенко Е.А.** Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
17. Another proof for the equivalence between invariance of closed sets with respect to stochastic and deterministic systems / M. Quincampoix, R. Buckdahn, C. Rainer, J. Teichman // Bull. Sci. Math. 2010. Vol. 134, no. 2. P. 207–214.
18. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. Математического ин-та им. Стеклова. 1985. Т. 169. С. 194–252.
19. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

Ушаков Владимир Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 10.04.2012

Зимовец Артем Анатольевич
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: aazimovets@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.968.72, 517.983.5

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ[1]

М. В. Фалалеев, С. С. Орлов

В статье исследованы специальные классы линейных интегро-дифференциальных уравнений с нетеровым оператором при старшей производной и сверточными интегральными членами типа Вольтерра. Получены достаточные условия разрешимости задачи Коши для таких уравнений как в обобщенных функциях, так и в классах функций конечной гладкости, исследована связь между этими типами решений. Исследования проведены с помощью аппарата фундаментальных оператор-функций. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач, возникающих в математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банахово пространство, нетеров оператор, полный жорданов набор, распределение, фундаментальная оператор-функция.

M. V. Falaleev, S. S. Orlov. Generalized solutions of singular integro-differential equations in Banach spaces and their applications.

We investigate special classes of linear integro-differential equations with a Noether operator at the highest derivative and convolution integral terms of Volterra type. We obtain sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem for such equations both in generalized functions and in classes of functions of finite smoothness and investigate the connection between these types of solutions. The investigation uses the fundamental operator function techniques. Abstract results are illustrated by examples of initial–boundary value problems that appear in the mathematical theory of viscoelasticity.

Keywords: Banach space, Noether operator, complete Jordan set, distribution, fundamental operator function.

Ряд начально-краевых задач прикладного характера для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных можно редуцировать к исследованию вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, что дает возможность рассматривать их с единых позиций. В данной работе представлен один из возможных подходов в проведении таких исследований.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Коши вида

$$Bu'(t) = Au(t) + \int\limits_0^t g(t-\tau)Au(\tau)d\tau + f(t), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

где выполнена следующая группа условий:

(A) B, A — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subseteq D(A)$, B — нетеров оператор [1, с. 387],

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (госконтракт № 14.B37.21.0365), гранта для поддержки НИР аспирантов и молодых сотрудников ИГУ, тема № 113-11-000 (приказ № 334 от 12.12.2011), а также именной стипендии губернатора Иркутской области аспирантам в 2011 г. (распоряжение № 111-р губернатора Иркутской области Д.Ф. Мезенцева от 22.12.2011).

$n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2, $g(t)$ — непрерывная при $t \geq 0$ числовая функция.

Интерес к задачам такого вида проявляется с середины прошлого века. Полная теория интегро-дифференциальных уравнений с необратимым оператором при старшей производной далека до завершения, несмотря на усилия многих математических школ, результаты исследований которых опубликованы в книгах, обзорах, статьях; их обширный перечень можно найти в библиографических списках к монографиям: Н.А. Сидоров, Б.В. Логинов, А.В. Синицын, М.В. Фалалеев [2], Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров [3], В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков [4], А. Фавини, А. Яги [5], И.С. Егоров, С.Т. Пятков, С.В. Попов [6;7], Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас [8], Г.О. Фатторини [9], А.И. Кожанов [10; 11], Г.В. Демиденко, С.В. Успенский [12], С.Г. Крейн, М.Г. Крейн, Ю.А. Далейкий, М.И. Хасан [13–16] и др. Последними по времени и наиболее важными для приложений основ общей теории вырожденных интегро-дифференциальных уравнений являются, на взгляд авторов статьи, результаты, изложенные в монографиях А.Г. Свешникова, С.А. Габова, М.О. Корпусова, А.Б. Альшина, Ю.Д. Плетнера [17–19]. Отметим тот факт, что все авторы указывали на неразрешимость в общем случае задачи (1.1), (1.2), т. е. для существования гладкого решения задачи Коши (1.1), (1.2) всегда требуется согласование входных данных u_0 и $f(t)$. Именно описанием такого множества начальных условий u_0 и правых частей $f(t)$ занимались многие исследователи, каждый в своей постановке. Однако для существования обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) согласования входных данных уже не требуется. Таким образом, естественным представляется сначала построить решение в широком классе распределений, а затем, анализируя это обобщенное решение, получить условия, при которых оно окажется классическим (гладким). Успешно реализовать эту программу исследований удается с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции, теорию которой последние годы развивают авторы статьи [2; 20–22]. Данная теория является обобщением на банаховы постранства техники фундаментальных решений интегро-дифференциальных операторов из классической теории распределений [23]. При таком подходе обобщенное решение строится в виде свертки фундаментальной оператор-функции и правой части уравнения. После этого отдельно исследуются сингулярная и регулярная составляющие полученного обобщенного решения. Условия, при которых сингулярная составляющая обращается в нуль, а регулярная составляющая удовлетворяет исходному уравнению и начальным условиям задачи, как раз и будут условиями существования классического решения, при этом обобщенное решение совпадет с классическим. Таким образом, при нашем подходе удается решать задачу построения обобщенных и классических решений комплексно. Отметим, что в случае, когда $g(t) \equiv 0$, $E_1 = E_2 \equiv \mathbb{R}^k$ — конечномерные пространства и $\det B = 0$, наиболее завершенные результаты в этом направлении в свое время были получены научной школой профессора С. Т. Завалищина (см. монографию [24] и библиографию к ней). Однако разработанные ими методы не допускают прямого обобщения на случай бесконечномерных пространств, что отчасти и послужило дополнительным стимулом к построению теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

2. Псевдообращение и жордановы наборы нетеровых операторов

В этом разделе приведены вспомогательные сведения, необходимые в дальнейшем. В сделанных относительно операторов B и A предположениях обозначим $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — базис ядра $N(B)$ оператора B, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ — базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора B^*, тогда по следствию из теоремы Хана — Банаха (см. [25, с. 168, следствие 4]) существует биортогональная к базису ядра $N(B)$ система элементов $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$, соответственно для базиса $N(B^*)$ существует биортогональная к нему система элементов $\{z_j\}_{j=1}^m \subset E_2$ (см. [25, с. 168, лемма 4]), т. е. $\langle \varphi_i,\, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $i,\, k = 1, \ldots, n$ и $\langle z_k,\, \psi_j \rangle = \delta_{kj}$, $k,\, j = 1, \ldots, m$.

Введем проекторы

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\, \gamma_i \rangle\, \varphi_i, \quad \mathcal{Q} = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Q}_j = \sum_{j=1}^{m} \langle \cdot,\, \psi_j \rangle\, z_j$$

пространств E_1 и E_2 соответственно. Базисам $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ и $\{z_j\}_{j=1}^m$ соответствует единственный псевдообратный оператор [26], обозначаемый B^+, который однозначно определяется следующим набором своих свойств:

$$D(B^+) = R(B) \oplus \{z_1, \ldots, z_m\}, \quad R(B^+) = N(\mathcal{P}) \cap D(B),$$

$$BB^+ = I - \mathcal{Q} \ \text{ на } \ D(B^+), \quad B^+B = I - \mathcal{P} \ \text{ на } \ D(B),$$

причем $N(B^+) = \{z_1, \ldots, z_m\}$, $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$.

Соответственно для сопряженных проекторов

$$\mathcal{P}^* = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i^* = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi_i,\, \cdot \rangle\, \gamma_i, \quad \mathcal{Q}^* = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Q}_j^* = \sum_{j=1}^{m} \langle z_j,\, \cdot \rangle\, \psi_j$$

псевдообратный сопряженного оператора B^{*+} удовлетворяет условиям

$$D(B^{*+}) = R(B^*) \oplus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}, \quad R(B^{*+}) = N(\mathcal{Q}^*) \cap D(B^*),$$

$$B^*B^{*+} = I - \mathcal{P}^* \ \text{ на } \ D(B^{*+}), \quad B^{*+}B^* = I - \mathcal{Q}^* \ \text{ на } \ D(B^*),$$

кроме того, $N(B^{*+}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, $B^*B^{*+}B^* = B^*$, $B^{*+}B^*B^{*+} = B^{*+}$, $B^{*+} = B^{+*}$.

Заметим, что в силу нормальной разрешимости оператора B (т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$, согласно критерию Хаусдорфа [25, с. 218]), области определения псевдообратных операторов совпадают с соответствующими пространствами, а именно $D(B^+) = E_2$, $D(B^{*+}) = E_1^*$. Это, в силу теоремы о замкнутом графике [25, с. 157], влечет ограниченность операторов B^+ и B^{*+}. И, кроме того, если оператор A таков, что выполнены условия **(A)**, то суперпозиция AB^+ также является ограниченным оператором.

В дальнейшем изложении вспомогательных сведений будем придерживаться методологии работы [27], краткое содержание которой представлено в статье [28]. Формулы для присоединенных элементов можно также найти в [29]. Итак, введем системы элементов

$$\varphi_i^{(j)} = \left(B^+A\right)^{j-1} \varphi_i^{(1)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \geq 2, \quad \varphi_i^{(1)} = \varphi_i,$$

и функционалов

$$\psi_i^{(j)} = \left(B^{*+}A^*\right)^{j-1} \psi_i^{(1)}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j \geq 2, \quad \psi_i^{(1)} = \psi_i.$$

В силу свойств псевдообратных операторов B^+ и B^{*+} при $j \geq 2$ справедливы включения $\varphi_i^{(j)} \in N(\mathcal{P})$ и $\psi_i^{(j)} \in N(\mathcal{Q}^*)$ соответственно, т. е.

$$\left\langle \varphi_i^{(j)},\, \gamma_k \right\rangle = 0, \quad i,\, k = 1, \ldots, n, \quad j \geq 2, \quad \text{и} \quad \left\langle z_k,\, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0, \quad k,\, i = 1, \ldots, m, \quad j \geq 2.$$

Пусть выполнено условие

(B) Элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют системе уравнений и неравенств

$$B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p_i,$$

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

причем

$$\operatorname{rang}\left\|\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\, \psi_k^{(1)}\right\rangle\right\|_{i=1,\dots,n,\,k=1,\dots,m} = \min(n,m) = l.$$

Это условие означает, что система элементов $\left\{\varphi_i^{(j)},\, i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,p_i\right\}$ образует *полный A-жорданов набор* оператора B [1] и, как показано в работе [30], элементы множеств $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$, $\{z_j\}_{j=1}^m$ можно преобразовать так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\left\langle A\varphi_i^{(j)},\, \psi_k\right\rangle = \begin{cases} 0, & j=1,\dots,p_i-1, \quad i=1,\dots,n, \quad k=1,\dots,m,\\ \delta_{ik}, & j=p_i, \quad i,\,k=1,\dots,l; \end{cases}$$

$$\left\langle \varphi_i,\, A^*\psi_k^{(j)}\right\rangle = \begin{cases} 0, & j=1,\dots,p_i-1, \quad i=1,\dots,n, \quad k=1,\dots,m,\\ \delta_{ik}, & j=p_i, \quad i,\,k=1,\dots,l. \end{cases}$$

Таким образом, при выполнении условия **(B)** без ограничения общности можно считать, что $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$, $\gamma_k = A^*\psi_k^{(p_k)}$, $i,\,k=1,\dots,l$. Условие **(B)** также означает, что система функционалов $\{\varphi_k^{(j)},\, k=1,\dots,m,\, j=1,\dots,p_k\}$ образует полный A^*-жорданов набор оператора B^*. При этом прямоугольные матрицы $\|\langle A\varphi_i^{(p_i)},\, \psi_k^{(1)}\rangle\|_{i=1,\dots,n,\,k=1,\dots,m}$, $\|\langle \varphi_i^{(1)},\, A^*\psi_k^{(p_k)}\rangle\|_{i=1,\dots,n,\,k=1,\dots,m}$ имеют одинаковые ранги, равные l и, значит, обе эквивалентны прямоугольной матрице с единичным ранговым минором l-го порядка и нулями на остальных местах. Далее везде в работе будем считать, что все необходимые перестройки базисов уже выполнены.

3. Фундаментальные оператор-функции интегро-дифференциальных операторов

Для формулировки основных утверждений работы приведем необходимые для этого понятия теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство. К *основному множеству* $K(E^*)$ отнесем все финитные бесконечно дифференцируемые функции $s(t)$ со значениями в E^*. *Носителем* $\operatorname{supp} s(t)$ основной функции $s(t)$ называется замыкание в $\mathbb{R}$ множества значений t, при которых $s(t) \neq 0$. Множество $K(E^*)$ наделяется структурой топологического пространства посредством введения в нем сходимости следующим образом: последовательность $\{s_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится к функции $s(t)$ в пространстве $K(E^*)$, если, во-первых, $\exists\, R>0$ такое, что $\operatorname{supp} s_n(t) \subset [-R;\, R]$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, и, во-вторых, $\forall\,\alpha\in\mathbb{N}$ $\|s_n^{(\alpha)}(t) - s^{(\alpha)}(t)\|_{E^*} \to 0$ при $n\to+\infty$ равномерно на $t\in[-R;\, R]$.

Распределением (*обобщенной функцией*) *со значениями в* E называется всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве $K(E^*)$. Множество таких функционалов будем обозначать $K'(E)$. Сходимость в $K'(E)$ определяется как слабая (поточечная). Стандартные понятия в $K'(E)$ типа носителя обобщенной функции, равенства двух распределений, операции умножения на числовую бесконечно дифференцируемую функцию, дифференцирования обобщенных функций определяются так же, как и в классической теории обобщенных функций [23], поэтому воспроизводить их здесь не будем. Далее в работе, следуя монографии В.С. Владимирова, множество классических обобщенных функций будем обозначать через $\mathfrak{D}'$, а через $\mathfrak{D}'_+$ — множество классических обобщенных функций с ограниченным слева носителем. По аналогии с этим будем обозначать через $K'_+(E)$ множество распределений со значениями в E, имеющих ограниченный слева носитель.

Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $f(t)$ со значениями в пространстве E порождает на $K(E^*)$ *регулярную* обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(f(t),\, s(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f(t),\, s(t)\rangle\, dt \quad \forall\, s(t)\in K(E^*).$$

Для введенных таким образом регулярных обобщенных функций справедлив аналог леммы дю Буа-Реймона. Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными*, и классический пример таковых доставляет дельта-функция Дирака, а именно:

$$(a\delta(t),\, s(t)) = (a,\, s(0))\, \forall\, a \in E \quad \forall\, s(t) \in K(E^*).$$

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $k(t)\colon E_1 \to E_2$ — оператор-функция, тогда выражение вида (формальный символ) $k(t)h(t)$, где $h(t) \in \mathfrak{D}'$ — классическая обобщенная функция, будем называть *обобщенной оператор-функцией.* Далее в работе интегро-дифференциальному оператору уравнения (1.1) поставим в соответствие обобщенную оператор-функцию вида

$$L_1(\delta(t)) = B\delta'(t) - A(\delta(t) + g(t)\theta(t)),$$

которую также будем называть интегро-дифференциальным оператором.

Пусть теперь $k(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ — оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(E_1,\, E_2)$, $h(t) \in \mathfrak{D}'_+$ и $f(t) \in K'_+(E_1)$, тогда *сверткой* обобщенной оператор-функции $k(t)h(t)$ и обобщенной функции $f(t)$ называется распределение, обозначаемое $k(t)h(t) * f(t) \in K'_+(E_2)$ и определяемое равенством

$$(k(t)h(t) * f(t),\, s(t)) = \big(h(t),\, (f(\tau),\, k^*(t)s(t+\tau))\big) \quad \forall\, s(t) \in K(E_2^*). \tag{3.1}$$

Корректность этого определения и существование свертки следует из ограниченности слева носителей функций $h(t)$ и $f(t)$. Непосредственно из формулы (3.1) можно получить следующие естественные равенства:

$$k(t)\theta(t) * u(t)\theta(t) = \left(\int\limits_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)\theta(t), \quad u(t) \in C([0;\, +\infty);\, E_1),$$

$$k(t)h(t) * C\delta^{(i)}(t) * f(t) = (k(t)Ch(t))^{(i)} * f(t)\, \forall\, f(t) \in K'_+(E_0) \quad \forall\, C \in \mathcal{L}(E_0,\, E_1), \tag{3.2}$$

$$D\delta^{(i)}(t) * k(t)h(t) * f(t) = (Dk(t)h(t))^{(i)} * f(t)\, \forall\, f(t) \in K'_+(E_1) \quad \forall\, D \in \mathcal{L}(E_2,\, E_3). \tag{3.3}$$

Для замкнутых операторов C и D равенства (3.2) и (3.3) будем считать выполненными по определению, при этом в дальнейших наших исследованиях фигурируют такие оператор-функции $k(t)$ и операторы C и D, что произведения $Dk(t)$ и $k(t)C$ являются бесконечно дифференцируемыми оператор-функциями ограниченных операторов.

Во введенных терминах можно теперь переписать исходную задачу Коши (1.1), (1.2). Действительно, если функция $u(t) \in C^1([0;\, +\infty);\, E_1)$ является решением задачи Коши (1.1), (1.2), то, будучи продолженной нулем при $t < 0$ по правилу $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$, эта функция удовлетворяет сверточному равенству

$$\big(B\delta'(t) - A(\delta(t) + g(t)\theta(t))\big) * \tilde{u}(t) = Bu_0\delta(t) + f(t)\theta(t). \tag{3.4}$$

Задачу о построении решения уравнения (3.4) в классе $K'_+(E_1)$ (или обобщенного решения начальной задачи (1.1), (1.2)) назовем *обобщенной задачей Коши.*

Теперь введем ключевое понятие нашей работы. *Фундаментальной оператор-функцией* интегро-дифференциального оператора первого порядка $L_1(\delta(t)) = B\delta'(t) - A(\delta(t) + g(t)\theta(t))$ называется обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_1(t)$ такая, что

$$\mathcal{E}_1(t) * L_1(\delta(t)) * u(t) = u(t) \quad \forall\, u(t) \in K'_+(E_1), \tag{3.5}$$

$$L_1(\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * v(t) = v(t) \quad \forall\, v(t) \in K'_+(E_2). \tag{3.6}$$

В силу свойства ассоциативности свертки (см. равенства (3.2) и (3.3)) заключаем, что если известна фундаментальная оператор-функция, то единственным решением уравнения

$$L_1(\delta(t)) * u(t) = f(t), \quad f(t) \in K'_+(E_2),$$

в классе $K'_+(E_1)$ является обобщенная функция

$$u(t) = \mathcal{E}_1(t) * f(t).$$

Действительно, из (3.6) следует, что указанная свертка действительно является решением, а единственность вытекает из следующего простого наблюдения: для любого другого решения $v(t)$ в силу (3.5) справедлива цепочка равенств

$$v(t) = \mathcal{E}_1(t) * L_1(\delta(t)) * v(t) = \mathcal{E}_1(t) * f(t) = u(t).$$

З а м е ч а н и е 1. Аналогичные рассуждения справедливы для интегро-дифференциального оператора N-го порядка вида

$$L_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A(\delta(t) + g(t)\theta(t)).$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* **(A)**, **(B)** *и* $n > m$, *тогда интегро-дифференциальный оператор* N*-го порядка* $L_N(\delta(t))$ *имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = B^+U_N(t)\big[I - \tilde{Q}\big]$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\sum_{k=0}^{p_i-1}\Bigg[\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Bigg]\delta^{(kN)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{k+1}\Bigg\}. \qquad (3.7)$$

Здесь использованы обозначения

$$U_N(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)(AB^+)^{k-1}, \quad \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\Big\langle\cdot,\,\psi_i^{(j)}\Big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},$$

где функционалы $\psi_i^{(j)} \in E_2^*$ *при* $i = m+1,\ldots,n$, $j = 2,\ldots,p_i$ *являются произвольными и* $\psi_i^{(1)} = 0$ *при* $i = m+1,\ldots,n$, $r(t)$ *— резольвента ядра* $(-g(t))$, *степень обобщенной функции* $(\delta(t) + r(t)\theta(t))^{k+1}$ *означает свертку* $(k+1)$*-го экземпляра функций* $(\delta(t) + r(t)\theta(t))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проведем для случая $N = 1$, поскольку в общем случае оно в техническом и принципиальном плане от приведенного ниже ничем не отличается. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции необходимо доказать сверточные равенства (3.5) и (3.6). Действительно,

$$L_1(\delta(t)) * B^+U_1(t)\big[I - \tilde{Q}\big] = (I - \mathcal{Q})(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)AB^+\big[I - \tilde{Q}\big] + (I - \mathcal{Q})\big[I - \tilde{Q}\big]\delta(t)$$
$$- (\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)AB^+\big[I - \tilde{Q}\big] = (I - \tilde{Q})\delta(t) - \mathcal{Q}(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)AB^+\big[I - \tilde{Q}\big],$$

$$L_1(\delta(t)) * \big(\mathcal{E}_1(t) - B^+U_1(t)\big[I - \tilde{Q}\big]\big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\sum_{k=0}^{p_i-2}\Bigg[\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\langle\cdot,\,\psi_i^{(j)}\rangle\big(-B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)} + A\varphi_i^{(p_i-k-j)}\big)\Bigg]\delta^{(k+1)}(t) * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^{k+1}\Bigg\}$$
$$+ \tilde{Q}\delta(t) = \tilde{Q}\delta(t),$$

поэтому

$$L_1(\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) = I\delta(t) - \mathcal{Q}(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)AB^+\big[I - \tilde{Q}\big],$$

здесь $\mathcal{Q} = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{Q}_j = \sum_{j=1}^{m} \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j$ (см. разд. 2). Но при $\nu = 1, \ldots, m$ имеем

$$\mathcal{Q}_\nu(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)AB^+\big[I - \tilde{Q}\big]$$

$$= \Big(\big\langle \cdot, \psi_\nu^{(2)} \big\rangle z_\nu(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * \theta(t) + \big\langle \cdot, \psi_\nu^{(3)} \big\rangle z_\nu(\delta(t) + g(t)\theta(t))^2 * \frac{t}{1!}\theta(t) + \cdots$$

$$+ \big\langle \cdot, \psi_\nu^{(p_\nu)} \big\rangle z_\nu(\delta(t) + g(t)\theta(t))^{p_\nu - 1} * \frac{t^{p_\nu - 2}}{(p_\nu - 2)!}\theta(t)\Big)\big[I - \tilde{Q}\big]$$

$$= - \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \big\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \big\rangle z_\nu \cdot \Big(\big\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_\nu^{(2)} \big\rangle (\delta(t) + g(t)\theta(t)) * \theta(t)$$

$$+ \big\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_\nu^{(3)} \big\rangle (\delta(t) + g(t)\theta(t))^2 * \frac{t}{1!}\theta(t) + \cdots$$

$$+ \big\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_\nu^{(p_\nu)} \big\rangle (\delta(t) + g(t)\theta(t))^{p_\nu - 1} * \frac{t^{p_\nu - 2}}{(p_\nu - 2)!}\theta(t)\Big) = 0,$$

следовательно, равенство (3.6) доказано.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Непосредственно из доказанной теоремы 1 вытекает, что при выполнении ее условий исходная задача Коши (1.1), (1.2) имеет обобщенное решение вида (см. уравнение (3.4))

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (Bu_0\delta(t) + f(t)\theta(t)),$$

которое является многопараметрическим в силу наличия свободных функционалов у $\mathcal{E}_1(t)$, а, следовательно, неединственным. Именно поэтому при доказательстве теоремы 1 мы не проверяем справедливость равенства (3.5). Оно и не выполняется в условиях этой теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* **(A)**, **(B)** *и $n < m$, тогда обобщенная оператор-функция* (3.7) *является фундаментальной для интегро-дифференциального оператора $L_N(\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций $v(t) \in K'_+(E_1)$ таких, что*

$$\mathcal{Q}_\nu U_N(t) * v(t) \equiv 0, \quad \nu = n+1, \ldots, m. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в первой теореме, доказательство проведем для случая $N = 1$. Дублированием рассуждений доказательства теоремы 1 получаем

$$L_1(\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) = I\delta(t) - \sum_{\nu=n+1}^{m} \mathcal{Q}_\nu(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)AB^+\big[I - \tilde{Q}\big].$$

Но $\mathcal{Q}_\nu U_1(t) * (\delta(t) + g(t)\theta(t))AB^+\tilde{Q} = 0$, поэтому в силу условия (3.8) теоремы 2 получаем равенство (3.6).

С другой стороны,

$$\mathcal{E}_1(t) * L_1(\delta(t)) = \Big(B^+(I - \tilde{Q})B + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \big\langle \cdot, A^*\psi_i^{(j)} \big\rangle \varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big)\delta(t)$$

$$+ B^+(\delta(t) + g(t)\theta(t)) * U_1(t)\Big[AB^+\big[I - \tilde{Q}\big]B - \big[I - \tilde{Q}\big]A\Big] = I\delta(t),$$

поскольку

$$AB^+\big[I - \tilde{Q}\big]B - \big[I - \tilde{Q}\big]A = A\big[I - \mathcal{P}\big] - AB^+\tilde{Q}B - A + \tilde{Q}A$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(p_i)}\rangle A\varphi_i^{(1)} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\rangle AB^+A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1} \langle \cdot,\, -B^*\psi_i^{(j+1)} + A^*\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} = 0,$$

$$B^+\big[I-\tilde{Q}\big]B + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \big\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\big\rangle\, \varphi_i^{(p_i+1-j)}$$

$$= I - \mathcal{P} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i} \langle \cdot,\, B^*\psi_i^{(j)}\rangle B^+A\varphi_i^{(p_i+1-j)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \big\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(j)}\big\rangle\, \varphi_i^{(p_i+1-j)}$$

$$= I - \sum_{i=1}^{n} \big\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(p_i)}\big\rangle\, \varphi_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1} \big\langle \cdot,\, -B^*\psi_i^{(j+1)} + A^*\psi_i^{(j)}\big\rangle\, \varphi_i^{(p_i+1-j)} + \sum_{i=1}^{n} \big\langle \cdot,\, A^*\psi_i^{(p_i)}\big\rangle\, \varphi_i^{(1)} = I.$$

Равенство (3.5) доказано.

Теорема 2 доказана.

Как следствие из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 1 $n = m$ (*т. е. оператор* B *окажется фредгольмовым*), *то заменой в формуле* (3.7) *псевдообратного оператора* B^+ *оператором Треногина — Шмидта* Γ [1] *получим представление для фундаментальной оператор-функции и в этом случае.*

Замечание 3. Очевидно, во фредгольмовском случае ($n = \dim N(B) = \dim N(B^*)$) формула (3.7) приобретает наиболее простой вид, если $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, а именно

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (\delta(t) + g(t)\theta(t))^{k-1} * \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}(A\Gamma)^{k-1}\big[I-\tilde{Q}\big] - \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot,\, \psi_i^{(1)}\rangle \varphi_i^{(1)}(\delta(t) + r(t)\theta(t)).$$

В этих предположениях единственным обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) (см. уравнение (3.4)) является регулярная обобщенная функция

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_1(t) * (Bu_0\delta(t) + f(t)\theta(t)). \tag{3.9}$$

Прямыми вычислениями находим

$$\tilde{u}(t)\big|_{t=0} = u_0 - \sum_{i=1}^{n} \big\langle Au_0 + f(0),\, \psi_i^{(1)}\big\rangle \varphi_i^{(1)},$$

отсюда в силу линейной независимости системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ получаем

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 3 *длины всех* A*-жордановых цепочек базисных элементов ядра оператора* B *равны* 1, *то исходная задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное гладкое решение вида* (3.9) *тогда и только тогда, когда*

$$\langle Au_0 + f(0),\, \psi_i\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Замечание 4. По описанной схеме можно исследовать уравнения более высокого порядка. Например, при тех же условиях на операторные коэффициенты задача Коши

$$Bu''(t) = Au(t) + \int_0^t g(t-\tau)Au(\tau)d\tau + f(t), \quad t > 0, \tag{3.10}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{3.11}$$

имеет в условиях следствия 1 единственное обобщенное решение вида

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\mathcal{E}}_2(t) * (Bu_0\delta'(t) + Bu_1\delta(t) + f(t)\theta(t)), \tag{3.12}$$

которое также является регулярной обобщенной функцией. Поскольку

$$\tilde{u}(t)|_{t=0} = u_0 - \sum_{i=1}^{n} \left\langle Au_0 + f(0),\, \psi_i^{(1)} \right\rangle \varphi_i^{(1)},$$

$$\tilde{u}'(t)\big|_{t=0} = u_1 - \sum_{i=1}^{n} \left\langle Au_1 + f'(0) - g(0)f(0),\, \psi_i^{(1)} \right\rangle \varphi_i^{(1)},$$

то получаем еще одно утверждение

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 3 *длины всех A-жордановых цепочек базисных элементов ядра оператора B равны* 1, *то исходная задача Коши* (3.10), (3.11) *имеет единственное решение класса $C^2([0; +\infty); E_1)$ вида* (3.12) *тогда и только тогда, когда*

$$\langle Au_0 + f(0),\, \psi_i \rangle = 0, \quad \left\langle Au_1 + f'(0) - g(0)f(0),\, \psi_i \right\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

З а м е ч а н и е 5. При $g(t) \equiv 0$ формула (3.7) и теоремы 1–3 данной работы полностью согласуются с аналогичными результатами, полученными ранее в [28; 31].

4. Приложения

В этом разделе будут рассмотрены начально-краевые задачи в классических цилиндрических областях для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

П р и м е р 1. Пусть Ω — ограниченная область вещественного векторного пространства $\mathbb{R}^M$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, переменная t принимает неотрицательные действительные значения, т. е. $t \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$. В цилиндре $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ рассмотрим уравнение

$$(\alpha - \Delta)\frac{\partial u}{\partial t}(t, \bar{x}) - \Delta u(t, \bar{x}) - \int\limits_0^t k_1(t - \tau)\Delta u(\tau, \bar{x})d\tau = f(t, \bar{x}), \tag{4.1}$$

которое возникает при изучении динамики наследственно упругих тел [32], в частности, оно является линейной составляющей интегро-дифференциального уравнения, описывающего течение вязкоупругих жидкостей Кельвина — Фойгта [33]. Здесь α — отличная от нуля вещественная постоянная, ядро $k_1(t)\colon \{0\} \cup \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Поставим для уравнения (4.1) задачу Коши — Дирихле, т. е. зададим начальное

$$u(t, \bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega, \tag{4.2}$$

и однородное граничное

$$u(t, \bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0, \quad t \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+, \tag{4.3}$$

условия.

Если в качестве пространств E_1 и E_2 выбрать $\overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega) \equiv \left\{v(\bar{x}) \in \mathcal{L}_2(\Omega)\colon\ v(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0\right\}$ и $\mathcal{L}_2(\Omega)$ соответственно, область определения операторных коэффициентов $B = \alpha - \Delta$ и $A = \Delta$ задать как

$$\overset{\circ}{H}{}^{l+2}(\Omega) \equiv \left\{v(\bar{x}) \in W_2^{l+2}(\Omega)\colon\ v(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial\Omega} = 0\right\}, \quad l \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

а также положить $g(t) = k_1(t)$, то можно заключить, что задача Коши–Дирихле (4.1)–(4.3) является конкретной реализацией абстрактной начальной задачи (1.1), (1.2). Здесь $\mathcal{L}_2(\Omega)$ и $W_2^l(\Omega) \equiv H^l(\Omega)$ обозначают пространства Лебега и Соболева соответственно.

Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$, т.е. однородная задача Дирихле

$$\Delta\phi(\bar{x}) = \alpha\phi(\bar{x}), \quad \phi(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

имеет ненулевые решения, тогда оператор $B = \alpha - \Delta$ фредгольмов в силу самосопряженности оператора Лапласа и конечной кратности его собственных чисел. Для всякого фиксированного $\alpha \in \sigma(\Delta)$ введем показатель $d(\alpha) \in \mathbb{N}$ его кратности, который и является размерностью ядра оператора $B = \alpha - \Delta$. Кроме того, обозначим $\{\phi_i(\bar{x})\}_{i=1}^{d(\alpha)}$ отвечающую собственному числу α систему собственных функций, ортонормированную в смысле скалярного произведения пространства $\mathcal{L}_2(\Omega)$. В качестве элементов базиса $\{\psi_i(\bar{x})\}_{i=1}^{d(\alpha)}$ в $N(B^*)$ выберем следующие функции:

$$\psi_i(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha}\phi_i(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega.$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$\langle A\varphi_i, \psi_j\rangle = \int\limits_\Omega \Delta\phi_i(\bar{x})\psi_j(\bar{x})d\bar{x} = \int\limits_\Omega \phi_i(\bar{x})\phi_j(\bar{x})d\bar{x} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, d(\alpha),$$

которая означает, что длины всех A-жордановых цепочек равны единице. Из следствия 1 предыдущего раздела вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in \sigma(\Delta)$, тогда для того чтобы задача Коши — Дирихле* (4.1)–(4.3) *имела единственное решение класса $C^1([0; +\infty); \mathring{\mathcal{L}}_2(\Omega))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\int\limits_\Omega \left(\alpha u_0(\bar{x}) + f(0,\bar{x})\right)\phi_i(\bar{x})d\bar{x} = 0, \quad i = 1, \ldots, d(\alpha).$$

П р и м е р 2. В обозначениях примера 1 рассмотрим еще одну начально-краевую задачу вида

$$(\beta - \Delta)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\bar{x}) + \Delta^2 u(t,\bar{x}) - \int\limits_0^t k_2(t-\tau)\Delta^2 u(\tau,\bar{x})d\tau = f(t,\bar{x}), \tag{4.4}$$

$$u(t,\bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}(t,\bar{x})\right|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega, \tag{4.5}$$

$$u(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \quad t \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+, \tag{4.6}$$

где β — отличная от нуля вещественная постоянная, ядро $k_2(t)\colon\ \{0\}\cup\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. В случае $M = 2$ и $f(t, x_1, x_2) \equiv 0$ уравнение (4.4) моделирует поперечные колебания вязкоупругой пластины с памятью [32], при этом функция $u = u(t, x_1, x_2)$ задает поперечные перемещения, число β представляет собой нелинейное соотношение между ее постоянными физическими характеристиками, а функция $k_2(t)$ отражает реологические свойства материала (ползучесть).

Задача Коши — Дирихле (4.4)–(4.6) допускает редукцию к начальной задаче (3.10), (3.11) с фредгольмовым оператором B, если $g(t) = -k_2(t)$, пространства E_1 и E_2 выбрать такими же, как и в примере 1, а области определения операторов $B = \beta - \Delta$, $A = -\Delta^2$, $\beta \in \sigma(\Delta)$ одинаковыми $D(B) = D(A) = \mathring{H}^{l+4}(\Omega)$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Длины всех жордановых цепочек, как и в предыдущем случае, равны единице, а, значит в силу следствия 2 справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть $\beta \in \sigma(\Delta)$, тогда для того чтобы задача Коши — Дирихле* (4.4)–(4.6) *имела единственное решение класса $C^2([0; +\infty); \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega))$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\int\limits_{\Omega} \left(f(0,\bar{x}) - \beta^2 u_0(\bar{x})\right) \phi_i(\bar{x}) d\bar{x} = 0, \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(0,\bar{x}) + k_2(0) f(0,\bar{x}) - \beta^2 u_1(\bar{x})\right)\phi_i(\bar{x}) d\bar{x} = 0,$$

$$i = 1, \ldots, d(\beta).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вайнберг М.М., Треногин В.А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. Lyapunov-Schmidt Methods in nonlinear analysis and applications / Sidorov N. [et al.]. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 548 p.
3. **Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.** Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP, 2003. 216 p.
4. **Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И.** Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995. 384 с.
5. **Favini A., Yagi A.** Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999. 313 p.
6. **Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.** Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000. 336 с.
7. **Pyatkov S.G.** Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP, 2002. 216 p.
8. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 338 с.
9. **Fattorini H.O.** Second order linear differential equations in Banach spaces. Amsterdam: Elsevier Science Ltd, 1985. 328 p.
10. **Кожанов А.И.** Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1990. 130 с.
11. **Kozhanov A.I.** Composite type equations and inverse problems. Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP, 1999. 171 p.
12. **Демиденко Г.В., Успенский С.В.** Уравнения и системы уравнений, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998. 438 с.
13. **Далецкий Ю.М., Крейн М.Г.** Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
14. **Крейн С.Г., Хасан М.И.** Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Математический анализ / АН СССР ВИНИТИ. 1983. Т. 21. С. 130–264.
15. **Крейн С.Г.** Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Физматлит, 1971. 104 с.
16. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1967. 275 с.
17. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников [и др.]. М.: Физматлит, 2007. 736 с.
18. **Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О.** Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М.: Научный мир, 2008. 400 с.
19. **Габов С.А.** Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. 448 с.
20. **Фалалеев М.В., Орлов С.С.** Вырожденные интегро-дифференциальные операторы и банаховых пространствах и их приложения // Изв. вузов. 2011. № 10. С. 68–79. (Математика.)
21. **Фалалеев М.В., Орлов С.С.** Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2011. Т. 4, № 1. С. 118–134. (Математика).
22. **Фалалеев М.В., Орлов С.С.** Начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17, вып. 4. С. 597–600.
23. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

24. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
25. **Треногин В.А.** Функциональный анализ: уч. 3-е изд., испр. М.: Физматлит, 2002. 488 с.
26. **Nashed M.Z.** Generalized inverses and applications. New York; San Francisco; London: Academic Press, 1976. 1055 p.
27. **Сидоров Н.А., Благодатская Е.Б.** Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшем дифференциальном выражении: препринт. Иркутск: ИрВЦ СО АН СССР, 1991. 36 с.
28. **Фалалеев М.В., Гражданцева Е.Ю.** Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1393–1406.
29. **Сидоров Н.А., Романова О.А.** О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1526.
30. **Русак Ю.Б.** Некоторые соотношения между жордановыми наборами оператор-функции и сопряженной к ней // Изв. АН СССР. Сер. физ.-мат. 1972. № 2. С. 15–19.
31. **Фалалеев М.В.** Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
32. **Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J.** Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. Vol. 24, no. 14. P. 1043–1053.
33. **Осколков А.П.** Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина — Фойгта и Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.

Фалалеев Михаил Валентинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Институт математики, экономики и информатики
Иркутского государственного университета
e-mail: mihail@ic.isu.ru

Поступила 27.02.2012

Орлов Сергей Сергеевич
аспирант
Институт математики, экономики и информатики
Иркутского государственного университета
e-mail: orlov_sergey@inbox.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 519.6

ЯРУСНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ОСНОВЕ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматриваются вопросы, связанные с решением абстрактных задач о достижимости в топологических пространствах в условиях ограничений асимптотического характера. Существенная часть исследования связана с изучением свойств ярусных отображений (являющихся равномерными пределами ступенчатых) со значениями в полном метрическом пространстве и отображений, имеющих ярусные компоненты.

Ключевые слова: ограничения асимптотического характера, ультрафильтр, ярусное отображение.

A. G. Chentsov. Tier mappings and ultrafilter-based transformations.

We consider issues related to the solution of abstract attainability problems in topological spaces under constrains of asymptotic nature. The substantial part of the research is concerned with studying the properties of tier mappings (which are limits of step mappings) with values in a complete metric space and of mappings with tier components.

Keywords: constrains of asymptotic nature, ultrafilter, tier mapping.

1. Введение

В дальнейшем используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр.

Рассматривается абстрактная задача о достижимости в ТП при наличии ограничений асимптотического характера. Эти ограничения могут задаваться изначально в виде условий на выбор варианта асимптотического поведения, задаваемого в простейшем случае посредством последовательности в пространстве обычных решений, но могут возникать и при ослаблении тех или иных стандартных ограничений, определяющих в упомянутом пространстве множество допустимых элементов. В последнем случае (в рамках секвенциального подхода) реализуются конструкции, подобные в идейном отношении построениям [1, гл. III] для задач управления и [2; 3] для задач математического программирования (в дальнейшем будем опираться на аналогии с [1]). Так или иначе мы сталкиваемся не с одним множеством допустимых элементов, а с непустым семейством множеств, выступающим в роли своеобразных "асимптотических ограничений". В случае, когда ослабляются стандартные ограничения, данное семейство состоит из множеств допустимых элементов для ограничений, ослабленных в той или иной степени в сравнении с исходными (т. е. отвечающими невозмущенной задаче). Разумеется, асимптотический характер ограничений требует редукции самого понятия решения; в этой связи напомним о приближенных решениях Дж. Варги [1, гл. III], определяемых в виде последовательностей со специальным свойством, заключающимся в соблюдении каждого ослабленного ограничения с некоторого момента. В этой же связи уместно отметить конструкции, используемые в работах школы Н.Н. Красовского, связанных с исследованием дифференциальных игр; в частности, при реализации траекторий конфликтно-управляемой системы при соблюдении фазовых ограничений в виде стабильных мостов Н.Н. Красовского допускаются малые люфты в схемах

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10-01-96020, 10-01-00356, 12-01-00537) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проект 12-П-1-1019).

пошагового управления. Отметим, что элементы конструкций, связанные с приближенной реализацией ограничений, сыграли важную роль в обосновании фундаментальной теоремы об альтернативе Н.Н. Красовского, А.И. Субботина; см. [4]. Таким образом, проблема приближенного соблюдения ограничений, а стало быть, и конструкция на основе ограничений асимптотического характера представляют серьезный интерес (см. в этой связи также постановку в [5], где введение "асимптотических ограничений" уже не связывается с ослаблением изначально заданных стандартных ограничений, а отвечает исследованию тенденций, соответствующих специальной и весьма естественной для задач импульсного управления асимптотике областей достижимости; см. также обсуждение в [6]).

Отметим, что в [1] основное внимание уделялось вопросам динамической оптимизации, но содержательные конструкции [1] легко переносятся на случай задач о достижимости. Для последних, однако, весьма естественны обобщения, для которых требуется рассмотрение результатов действия тех или иных управлений как элементов ТП. Так (подобно [5]) можно рассматривать в качестве упомянутого результата саму траекторию либо какое-то ее преобразование. При этом получается элемент бесконечномерного пространства в той или иной топологии (в случае задачи импульсного управления естественное оснащение связано с топологией поточечной сходимости). Возникает задача о достижимости в ТП, которой, применяя вышеупомянутый подход к представлению ограничений, можно придать асимптотический характер. Между тем используемая при этом топология может не определяться сходящимися последовательностями, что требует применения более общего аппарата при формализации предельных переходов. Отметим также, что и сама проблема соблюдения "асимптотических ограничений" может существенно обогащаться при отказе от рассмотрения только секвенциальных вариантов асимптотического поведения (см. в этой связи пример в заключительной части работы [6]; с другой стороны, во многих случаях секвенциальный подход в духе [1, гл. III] оказывается достаточным для (исчерпывающего) построения всех асимптотически достижимых элементов; см., в частности, [7], где рассматривалась асимптотика областей достижимости по скорости для материальной точки при краевом условии на координату). Представляется естественным поэтому при построении МП (в качестве аналогов областей достижимости в задачах теории управления) допускать несеквенциальные аналоги приближенных решений Дж. Варги. По целому ряду причин (см. обсуждение в [6]) в этом качестве целесообразно использовать у/ф пространства обычных решений. При этом оказывается возможным [8] отождествить с (допустимыми в асимптотическом смысле) у/ф аналоги как приближенных, так и обобщенных решений Дж. Варги (см. [1, гл. III]).

Серьезные затруднения возникают, однако, в вопросах, связанных с конструктивным представлением так называемых свободных у/ф (у/ф с пустым пересечением всех своих множеств), ответственных в упомянутых выше конструкциях за реализацию асимптотических эффектов, не сводящихся к действию обычных решений. Дело в том, что само существование и свойства таких у/ф устанавливаются с применением леммы Цорна. Имеется, однако, в ряде случаев выход, связанный с обращением к множествам у/ф широко понимаемых ИП, среди которых наиболее известны пространства Стоуна (компакты Стоуна); их элементами являются у/ф соответствующей алгебры множеств. Данный подход последовательно развивается в настоящей работе, продолжающей цикл исследований автора. Основное содержание составляют конструкции представления МП в классах у/ф ИП и некоторых аналогов ИП.

2. Обозначения и определения общего характера

Используем кванторы, пропозициональные связки. В дальнейшем $\triangleq$ используется для обозначения равенства по определению. Как обычно, $\varnothing$ — пустое множество; def заменяет фразу "по определению", а $\exists!$ — фразу "существует и единственно". Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами (разумеется, использование термина "множество" в этом случае также допускается). Если x —

объект, то $\{x\}$ есть def одноэлементное множество, содержащее x. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества X (тогда $\mathcal{P}'(X) = \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$). Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (для отображений $f \in B^A$ используем также традиционную запись $f\colon A \longrightarrow B$); если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \overset{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ (образ множества C при действии f). Для всяких множеств X и Y, функции $f \in Y^X$ и семейства $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X))$

$$f^1[\mathcal{X}] \overset{\triangle}{=} \{f^1(A)\colon A \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)). \tag{2.1}$$

Интерпретируем (2.1) как “образ” семейства $\mathcal{X}$ при действии f (в дальнейшем (2.1) используется обычно в случаях, когда $\mathcal{X}$ — фильтр или база фильтра).

Специальные семейства множеств. В пределах настоящего пункта фиксируем непустое множество I. Напомним, что

$$\pi[I] \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\ \varnothing \in \mathcal{I}) \ \& \ (I \in \mathcal{I}) \ \& \ (\ A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I})\Big\}. \tag{2.2}$$

Элементы множества (2.2) — суть π-системы п/м I с “нулем” и “единицей” (см. [9, с. 14]). Среди всевозможных π-систем выделяем топологии, алгебры и полуалгебры множеств. В частности,

$$(\mathrm{top})[I] \overset{\triangle}{=} \Big\{\ \tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\}$$

есть множество всех топологий на I. Если $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ (в этом случае (I, τ) есть ТП) и $x \in I$, то семейство $N^0_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \{G \in \tau \mid x \in G\}$ порождает фильтр [10, гл. I] $N_\tau(x) \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(I) \mid \exists G \in N^0_\tau(x)\colon G \subset H\}$ всех окрестностей x в (I, τ);

$$(x\text{-bas})[\tau] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(N_\tau(x)) \mid \forall A \in N_\tau(x) \ \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset A\}$$

есть множество всех локальных баз ТП (I, τ) в точке x. При $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $A \in \mathcal{P}(I)$ через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание [10] множества A в ТП (I, τ). Множество

$$\begin{gathered}(\mathrm{clos})[I] \overset{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\varnothing \in \mathcal{F}) \& (I \in \mathcal{F}) \& (A \cup B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \\ \& \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F} \ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\Big)\Big\}\end{gathered}$$

всех замкнутых топологий [11, с. 98] множества I находится в естественной двойственности с $(\mathrm{top})[I]$, устанавливаемой посредством оператора $\mathbf{C}_I$, действующего в $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ по правилу $\mathbf{C}_I(\mathcal{J}) \overset{\triangle}{=} \{I \setminus J\colon J \in \mathcal{J}\} \ \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$. Итак, $\mathbf{C}_I(\tau) \in (\mathrm{clos})[I]$ при $\tau \in (\mathrm{top})[I]$ и $\mathbf{C}_I(\mathcal{F}) \in (\mathrm{top})[I]$ при $\mathcal{F} \in (\mathrm{clos})[I]$. В вопросах, связанных с аксиомами отделимости, следуем в основном терминологии [12]. Полагаем

$$(\mathcal{D}\text{-top})[I] \overset{\triangle}{=} \{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall x_1 \in I \ \forall x_2 \in I \setminus \{x_1\} \ \exists H \in N_\tau(x_1)\colon x_2 \notin H\},$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{top})_0[I] \overset{\triangle}{=} \big\{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid \forall x_1 \in I \ \forall x_2 \in I \setminus \{x_1\} \\ \exists H_1 \in N_\tau(x_1) \ \exists H_2 \in N_\tau(x_2)\colon H_1 \cap H_2 = \varnothing\big\},\end{gathered}$$

$$(\mathbf{r}\text{-top})[I] \overset{\triangle}{=} \big\{\tau \in (\mathrm{top})[I] \mid N_\tau(x) \cap \mathbf{C}_I(\tau) \in (x\text{-bas})[\tau] \ \ \forall x \in I\big\},$$

$$(\mathbf{top})[I] \overset{\triangle}{=} (\mathcal{D}\text{-top})[I] \cap (\mathbf{r}\text{-top})[I] = (\mathrm{top})_0[I] \cap (\mathbf{r}\text{-top})[I]. \tag{2.3}$$

В (2.3) введено множество всех T_3-топологий I, т. е. множество всех топологий I, превращающих последнее в T_3-пространство. Все метризуемые топологии I содержатся в множестве (2.3).

Если $t \in (\mathrm{top})[I]$, а S есть непустое множество, то $\otimes^S(t) \in (\mathrm{top})[I^S]$ есть def топология тихоновской степени ТП (I,t) с индексным множеством S: $(I^S, \otimes^S(t))$ — тихоновское произведение [10–12] экземпляров ТП (I,τ) при использовании S в качестве множества индексов.

Наряду с топологиями рассмотрим алгебры и полуалгебры п/м I;

$$(\mathrm{alg})[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[I] \mid I \setminus L \in \mathcal{L} \ \ \forall L \in \mathcal{L}\}$$

есть множество всех алгебр п/м I. Для введения аналогичного множества полуалгебр нам потребуются некоторые обозначения. При $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ (здесь и ниже $\mathbb{R}$ — вещественная прямая) полагаем, что $\overline{1,n} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Полагаем в дальнейшем, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами и, с учетом этого, используем традиционное соглашение $Y^n \stackrel{\triangle}{=} Y^{\overline{1,n}}$ при всяком выборе множества Y и числа $n \in \mathbb{N}$. Если $\mathcal{L} \in \pi[I],\ A \in \mathcal{P}(I)$ и $m \in \mathbb{N}$, то через $\Delta_m(A,\mathcal{L})$ обозначаем множество всех кортежей $(L_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{L}^m$, для каждого из которых

$$\Big(A = \bigcup_{i=1}^{m} L_i\Big) \ \& \ \big(\ L_p \cap L_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,m}\ \forall q \in \overline{1,m} \setminus \{p\}\big).$$

Тогда $\Pi[I] \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathcal{L} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(I \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\}$ есть множество всех полуалгебр [13, гл. I] п/м I. Если $\mathcal{L} \in \Pi[I]$, то $a_I^0(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{P}(I) \mid \exists k \in \mathbb{N}\colon \Delta_k(A,\mathcal{L}) \neq \varnothing\}$ есть алгебра п/м I, порожденная [13, гл. I] полуалгеброй $\mathcal{L}$.

Специальные отображения. В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества X и Y. Тогда

$$C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \big\{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \ \forall G \in \tau_2\big\} \ \ \forall \tau_1 \in (\mathrm{top})[X]\ \forall \tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]. \tag{2.4}$$

В (2.4) введено множество всех непрерывных отображений, действующих из одного ТП в другое.

Если $\mathcal{X} \in \pi[X]$, то через $B_0(X,\mathcal{X},Y)$ обозначаем множество всех отображений $f \in Y^X$, для каждого из которых $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists (y_i)_{i\in\overline{1,n}} \in Y^n\ \exists (L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \Delta_n(X,\mathcal{X})$:

$$f(x) = y_j \ \ \forall j \in \overline{1,n}\ \forall x \in L_j.$$

Тем самым введено множество всех ступенчатых отображений $(X,\mathcal{X})$ в Y. Упомянутое множество содержит функции-константы со значениями в Y; оно замкнуто относительно операций склеивания, выполняемых на ячейках разбиений из множеств $\Delta_n(X,\mathcal{X}),\ n \in \mathbb{N}$.

Полагаем до конца настоящего раздела, что $r\colon Y \times Y \longrightarrow [0,\infty[$ есть псевдометрика [12, с. 162] на Y, т. е. (Y,r) есть псевдометрическое пространство. Посредством $\stackrel{r}{\rightrightarrows}$ условимся обозначать равномерную в смысле r сходимость в Y^X (речь идет о сходимости последовательностей в Y^X к отображению из Y^X при оснащении Y псевдометрикой r). Тогда полагаем, что

$$B(X,\mathcal{X},Y,r) \stackrel{\triangle}{=} \big\{f \in Y^X \mid \exists (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_0(X,\mathcal{X},Y)^{\mathbb{N}}\colon (f_i)_{i\in\mathbb{N}} \stackrel{r}{\rightrightarrows} f\big\}. \tag{2.5}$$

Элементы (2.5) называем ярусными отображениями в (Y,r); имеется в виду аналогия с подобным понятием для вещественнозначных функций (см. [14]). В дальнейшем будет особенно важен тот частный случай, когда (Y,r) — полное метрическое пространство.

3. Фильтры и базы фильтров

В пределах настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Полагаем, что

$$\beta_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\ \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbf{I})) \mid \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2\big\}; \tag{3.1}$$

элементы (3.1) — суть БФ множества $\mathbf{I}$; соответственно, в виде

$$\mathfrak{F}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbf{I})) \mid (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall H \in \mathcal{P}(\mathbf{I})\ (F \subset H) \Longrightarrow (H \in \mathcal{F}))\}$$

имеем множество всех фильтров $\mathbf{I}$; см. [10, гл. I]. При этом $N_{\mathbf{t}}(x) \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}]\ \ \forall \mathbf{t} \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\ \forall x \in \mathbf{I}$. Тогда $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}$ — множество всех у/ф в $\mathbf{I}$, см. [10, гл. I]. Пусть

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I} \mid \mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\}\ \ \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})). \tag{3.2}$$

Напомним следующее хорошо известное свойство (см. [10, гл. I]):

$$(\mathbf{I}\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset F\} \in \mathfrak{F}[\mathbf{I}]\ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{I}]. \tag{3.3}$$

С учетом свойства (3.3) определяем, следуя [10, гл. I], понятие сходимости БФ в ТП: $\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[\mathbf{I}]\ \forall x \in \mathbf{I}$

$$\big(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\big) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (I\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B}])\,. \tag{3.4}$$

В связи с (3.4) отметим, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}] \subset \mathfrak{F}[\mathbf{I}] \subset \beta_0[\mathbf{I}]$. Наконец, точки множества $\mathbf{I}$ отождествляются с соответствующими тривиальными у/ф:

$$(\mathbf{I}\text{-ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid x \in F\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[\mathbf{I}]\ \ \forall x \in \mathbf{I}.$$

Фильтры π-систем. В дальнейшем важную роль будут играть фильтры и у/ф широко понимаемых ИП. Фиксируем до конца настоящего пункта $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\ \&\ (\ A \cap B \in \mathcal{F}\ \ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\ \&\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \forall L \in \mathcal{I} \\ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\big\} \tag{3.5}$$

есть множество всех фильтров в $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$, а $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\}$ есть множество всех у/ф в $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$; $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \subset \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \subset \beta_0[\mathbf{I}]$. Полагаем, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I} \mid \mathcal{H}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid \mathcal{H} \subset \mathcal{U}\}\ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}). \tag{3.6}$$

Множества (3.6) играют в дальнейшем важную роль, что связано со следующей интерпретацией: $\mathcal{H}$ определяет ограничения асимптотического характера на выбор точки из $\mathbf{I}$. Полагаем, что $\Phi_{\mathcal{I}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}) \mid L \in \mathcal{U}\}\ \ \forall L \in \mathcal{I}$. Тогда семейство

$$(\mathbb{UF})[\mathbf{I}; \mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{I}}(L)\colon L \in \mathcal{I}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})] \tag{3.7}$$

есть база топологии $\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}] \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})]$, определяемой как семейство объединений всевозможных подсемейств семейства в левой части (3.7); соответственно [15; 16]

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}]) \tag{3.8}$$

есть T_2-пространство (если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, то (3.8) — компакт Стоуна).

4. Элементы притяжения, 1

Всюду в дальнейшем E — непустое множество; в настоящем разделе фиксируем π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$, получая (мультипликативное [16]) пространство $(E, \mathcal{L})$. Фиксируем в дальнейшем непустое множество $\mathbf{H}$ и топологию $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbf{H}]$, получая T_2-пространство $(\mathbf{H}, \tau)$. Тогда (см. разд. 3, [10, гл. I]) $f^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[\mathbf{H}] \quad \forall f \in \mathbf{H}^E \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. С учетом (3.4) введем (непустое) множество

$$\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau] \overset{\triangle}{=} \left\{ f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \exists y \in \mathbf{H} \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} y \right\} \in \mathcal{P}'\left(\mathbf{H}^E\right), \tag{4.1}$$

содержащее функции-константы из $\mathbf{H}^E$. Из (4.1) следует с учетом отделимости $(\mathbf{H}, \tau)$, что при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ корректно определяется оператор $\varphi_{\lim}[f] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$, для которого

$$f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \tag{4.2}$$

Предложение 4.1. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathbb{S} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$, *то*

$$\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S}) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{S} \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (4.3). Если $h_0 \in \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S})$, то для некоторого $\mathcal{U}_0 \in \mathbb{S}$ справедливо равенство $h_0 = \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}_0)$, а потому (см. (4.2)) $f^1[\mathcal{U}_0] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h_0$, где $h_0 \in \mathbf{H}$. Это означает, что $h_0 \in \Omega$, чем завершается проверка вложения $\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S}) \subset \Omega$. Пусть $h^0 \in \Omega$. Тогда $h^0 \in \mathbf{H}$ и для некоторого $\mathcal{U}^0 \in \mathbb{S}$ имеет место сходимость

$$f^1[\mathcal{U}^0] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h^0. \tag{4.4}$$

Поскольку $f^1[\mathcal{U}^0] \overset{\tau}{\Longrightarrow} \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}^0)$ согласно (4.2) (действительно, $\mathcal{U}^0 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$), то из (4.4) следует в силу отделимости $(\mathbf{H}, \tau)$ равенство $h^0 = \varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}^0)$, откуда по выбору $\mathcal{U}^0$ имеем включение $h^0 \in \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S})$. Вложение $\Omega \subset \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S})$, а, соответственно, и равенство $\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{S}) = \Omega$ установлены. □

Следствие 4.1. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$\varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})) = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (3.6) и предложения 4.1. Отметим полезное свойство

$$\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(f^1(L), \tau) \ \ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau] \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall L \in \mathcal{U}. \tag{4.5}$$

С учетом (4.5) по аналогии с [15, предложение 9] устанавливается следующее

Предложение 4.2. *Если* $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, *то*

$$\varphi_{\lim}[f] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau) \ \ \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau].$$

Полагаем до конца настоящего раздела, что

$$\forall L \in \mathcal{L} \ \forall x \in E \setminus L \ \exists \Lambda \in \mathcal{L} \colon (x \in \Lambda) \ \& \ (\Lambda \cap L = \varnothing). \tag{4.6}$$

Тогда $((E, \mathcal{L})\text{-ult})[x] \overset{\triangle}{=} (E\text{-ult})[x] \cap \mathcal{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in E$. С учетом этого определяем $((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]$ как отображение $x \longmapsto ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[x] \colon E \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, реализующее погружение E в T_2-пространство $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$, которое является вариантом (3.8). По аналогии с [16, предложение 7.2] устанавливается свойство плотности:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathrm{cl}(((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1(E), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathrm{cl}(\{((E, \mathcal{L})\text{-ult})[x] \colon x \in E\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]).$$

Здесь же отметим, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ множество $((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^{-1}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}))$ совпадает с пересечением всех множеств из $\mathcal{E}$. Наконец, как легко проверить ($\circ$ — символ композиции [12, с.27] отображений),

$$\varphi_{\lim}[f] \circ ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot] = f \quad \forall f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]. \tag{4.7}$$

Множества притяжения. Следуя [16, следствие 3.1], полагаем, что (см. (3.2)) для всяких ТП (Y, θ), $Y \neq \varnothing$, отображения $g \in Y^E$ и семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathbf{as})[E; Y; \theta; g; \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]\colon g^1[\mathcal{U}] \stackrel{\theta}{\Longrightarrow} y\}. \tag{4.8}$$

В (4.8) у/ф из множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^0[E|\mathcal{E}]$ выступают, по сути дела, в качестве приближенных решений, соблюдающих ограничения асимптотического характера, определяемые посредством $\mathcal{E}$ (здесь можно усмотреть аналогию с приближенными решениями Дж. Варги [1, гл. III]).

Предложение 4.3. *Если* $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то*

$$\varphi_{\lim}[f]^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]; \mathcal{E}]) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}].$$

Доказательство сводится фактически к комбинации предложения 4.2 и (4.8). Тем самым (в последнем предложении) указана возможность для оценивания снизу МП в T_3-пространстве. Относительно f здесь предполагается принадлежность множеству (4.1). Ниже будет приведен соответствующий вариант эффективно проверяемых условий, достаточных для осуществления упомянутого условия принадлежности множеству (4.1).

5. Элементы притяжения, 2

В настоящем разделе мы усиливаем предположения относительно выбора $\mathcal{L}$: полагаем в дальнейшем, что $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ (выполнение условия (4.6) вытекает из аксиом полуалгебры множеств, см. разд. 2). В этом случае ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ — непустой компакт (отделимое компактное [17, с. 196] ТП).

З а м е ч а н и е 5.1. В связи с упомянутым свойством компактности отметим, что при $\mathcal{A} \stackrel{\triangle}{=} a_E^0(\mathcal{L})$ имеем в виде $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ нульмерный компакт [13, с. 26] (см. также [15]), соответствующий ИП $(E, \mathcal{A})$ с алгеброй множеств. При этом [18, предложение 2.4.3]

$$\psi[\mathcal{A}; \mathcal{U}] \stackrel{\triangle}{=} \{A \in \mathcal{A} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset A\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Более того, $\psi[\mathcal{A}; \cdot] \stackrel{\triangle}{=} (\psi[\mathcal{A}; \mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ есть гомеоморфизм ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ на $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E])$ (данное свойство легко следует из определений с учетом того, что $\psi[\mathcal{A}; \cdot]$ есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ на $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$, для которой соответствующая обратная биекция совпадает с отображением $\mathfrak{U} \longmapsto \mathfrak{U} \cap \mathcal{L}\colon \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; дальнейшее рассуждение непосредственно следует из определения топологий $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$ и $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$), что и доставляет требуемое свойство компактности $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$.

Пусть $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$. Таким образом (см. предложение 4.2 и (4.7)), при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ в виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot], \varphi_{\lim}[f])$$

имеем $(\mathbf{H}, \tau, f)$-компактификатор в смысле [19, определение 3.1]. Как следствие получаем (см. [19, предложение 3.2]) следующее

Предложение 5.1. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]; \mathcal{E}]).$$

Полезно выделить для отдельного рассмотрения случай $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, поскольку тогда

$$(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}). \tag{5.1}$$

З а м е ч а н и е 5.2. В связи с (5.1) напомним [15, предложение 11] и свойство, отмеченное в замечании 5.1; следует учесть, что $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])\ \ \forall L \in \mathcal{L}$.

Предложение 5.2. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[f]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (5.1) и предложения 5.1.

Теорема 5.1. *Если* $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ *и* $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, *то*

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] = \{h \in \mathbf{H} \mid \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})\colon f^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} h\}.$$

Доказательство сводится к комбинации следствия 4.1 и предложения 5.2. В свою очередь, предложение 5.2 и теорема 5.1 доставляют при $f \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ следующее важное свойство: у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$ могут одновременно исполнять роль и обобщенных (см. предложение 5.2), и приближенных (см. теорему 5.1) решений задачи об асимптотической достижимости в $(\mathbf{H}, \tau)$ при использовании семейства $\mathcal{E}$ в качестве ограничений асимптотического характера (мы имеем в виду аналогию с подобными по смыслу понятиями в [1, гл. III]); в этой связи полезно сравнить (4.8) и теорему 5.1. Мы указали в настоящем разделе условия, при которых у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$ ведут себя (с точки зрения реализации "в пределе" элементов притяжения) так же, как у/ф множества E, используемые при построении стоун-чеховской компатификации.

6. Ярусные отображения и отображения с ярусными компонентами

Напомним некоторые положения [20], сохраняя предположения разд. 5 в отношении ИП $(E, \mathcal{L})$: рассматриваем случай $\mathcal{L} \in \Pi[E]$.

Заметим с учетом известных свойств пространства Стоуна [13, с. 26] и рассуждений, подобных используемым в замечании 5.1, что

$$\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall m \in \mathbb{N}\ \forall (L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \Delta_n(E, \mathcal{L})\ \exists! j \in \overline{1,n}\colon L_j \in \mathcal{U}. \tag{6.1}$$

В этой связи введем, фиксируя непустое множество $\mathbb{H}$, следующие семейства:

$$\mathfrak{C}[E; \mathcal{L}; \mathcal{U}; f; \mathbf{h}] \overset{\triangle}{=} \{U \in \mathcal{U} \mid f(x) = \mathbf{h}\ \ \forall x \in U\}\ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall f \in \mathbb{H}^E\ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{H}. \tag{6.2}$$

Из (6.1), (6.2) и определений разд. 2, 3 вытекает следующее (весьма очевидное)

Предложение 6.1. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ *и* $f \in B_0(E, \mathcal{L}, \mathbb{H})$, *то* $\exists! \mathbf{h} \in \mathbb{H}\colon \mathfrak{C}[E; \mathcal{L}; \mathcal{U}; f; \mathbf{h}] \neq \varnothing$.

С учетом предложения 6.1 полагаем при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, что

$$\mathbf{l}[\mathcal{U}]\colon B_0(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{H} \tag{6.3}$$

есть def отображение, определяемое правилом

$$\mathfrak{C}[E; \mathcal{L}; \mathcal{U}; f; \mathbf{l}[\mathcal{U}](f)] \neq \varnothing\ \ \forall f \in B_0(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}). \tag{6.4}$$

Посредством (6.3), (6.4) каждый у/ф ИП $(E,\mathcal{L})$ определяет отображение $B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})$ в $\mathbb{H}$. Фиксируем псевдометрику [12, с. 162] $\rho\colon \mathbb{H}\times\mathbb{H}\longrightarrow [0,\infty[$ на множестве $\mathbb{H}$. Пусть $\overrightarrow{n,\infty} \triangleq \{k\in\mathbb{N} \mid n\le k\}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. С учетом этого имеем свойство: если $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ и $f\in\mathbb{H}^E$, то

$$((f_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f) \Longrightarrow (\forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \forall\varepsilon\in]0,\infty[\ \exists n\in\mathbb{N}\colon \rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_p),\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_q))<\varepsilon\ \ \forall p\in\overrightarrow{n,\infty}\ \forall q\in\overrightarrow{n,\infty}). \tag{6.5}$$

Итак, каждый оператор (6.3) переводит равномерно сходящиеся последовательности (в множестве $B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})$) в фундаментальные.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $(\mathbb{H},\rho)$ есть полное метрическое пространство. Тогда из (2.5), (3.5) и (6.5) легко следует, что (см. (6.1),(6.2),(6.4)) $\forall\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ $\forall f\in B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho)$ $\exists!\mathbf{h}\in\mathbb{H}$ $\forall(f_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$

$$((f_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f) \Longrightarrow ((\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_i),\mathbf{h}))_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow 0). \tag{6.6}$$

З а м е ч а н и е 6.1. Свойство (6.6) есть достаточно простое следствие полноты $(\mathbb{H},\rho)$, но все же рассмотрим его доказательство, фиксируя $\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $f\in B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho)$. Используя (2.5), подберем последовательность $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon\mathbb{N}\longrightarrow B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})$, для которой $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f$. Тогда имеем с очевидностью, что

$$\forall\varepsilon\in]0,\infty[\ \exists m\in\mathbb{N}\colon \rho(f_i(x),f(x))<\varepsilon\ \ \forall i\in\overrightarrow{m,\infty}\ \forall x\in E. \tag{6.7}$$

С учетом (6.5) получаем свойство: последовательность $(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_i))_{i\in\mathbb{N}}\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{H}$ фундаментальна и потому является сходящейся. Пусть $h\in\mathbb{H}$ таково, что

$$(\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_i),h))_{i\in\mathbb{N}}\longrightarrow 0. \tag{6.8}$$

Выберем произвольно последовательность $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}\colon\mathbb{N}\longrightarrow B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})$, для которой

$$(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f.$$

Тогда получаем, что справедливо следующее свойство:

$$\forall\varepsilon\in]0,\infty[\ \exists m\in\mathbb{N}\colon \rho(g_i(x),f(x))<\varepsilon\ \ \forall i\in\overrightarrow{m,\infty}\ \forall x\in E. \tag{6.9}$$

Пусть $\kappa\in]0,\infty[$. С учетом (6.7)–(6.9) подберем число $p\in\mathbb{N}$ так, что при этом $\forall j\in\overrightarrow{p,\infty}$

$$\Big(\rho(f_j(x),f(x))<\frac{\kappa}{4}\ \forall x\in E\Big)\ \&\ \Big(\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_j),h)<\frac{\kappa}{4}\Big)\ \&\ \Big(\rho(g_j(x),f(x))<\frac{\kappa}{4}\ \forall x\in E\Big).$$

Выберем произвольно $n\in\overrightarrow{p,\infty}$, получая для $f_n\in B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})$ и $g_n\in B_0(E,\mathcal{L},\mathbb{H})$ следующие неравенства:

$$\Big(\rho(f_n(x),f(x))<\frac{\kappa}{4}\ \forall x\in E\Big)\ \&\ \Big(\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_n),h)<\frac{\kappa}{4}\Big)\ \&\ \Big(\rho(g_n(x),f(x))<\frac{\kappa}{4}\ \forall x\in E\Big). \tag{6.10}$$

Используя (6.4), выбираем $U_*\in\mathfrak{C}[E;\mathcal{L};\mathcal{U};f_n;\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_n)]$ и $U^*\in\mathfrak{C}[E;\mathcal{L};\mathcal{U};g_n;\mathbf{l}[\mathcal{U}](g_n)]$, получая, в частности, что

$$(U_*\in\mathcal{U})\ \&\ (U^*\in\mathcal{U}).$$

При этом $(f_n(x)=\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_n)\ \ \forall x\in U_*)$ & $(g_n(x)=\mathbf{l}[\mathcal{U}](g_n)\ \ \forall x\in U^*)$. Из (3.5) имеем, что $U_*\cap U^*\neq\varnothing$. Пусть $x_0\in U_*\cap U^*$. Тогда с учетом (6.10) следует, что

$$\Big(\rho(f_n(x_0),f(x_0))<\frac{\kappa}{4}\Big)\ \&\ \Big(\rho(f_n(x_0),h)<\frac{\kappa}{4}\Big)\ \&\ \Big(\rho(g_n(x_0),f(x_0))<\frac{\kappa}{4}\Big),$$

поскольку $f_n(x_0) = \mathbf{l}[\mathcal{U}](f_n)$ и $g_n(x_0) = \mathbf{l}[\mathcal{U}](g_n)$. Тогда

$$\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](g_n), h) = \rho(g_n(x_0), h) \le \rho(g_n(x_0), f(x_0)) + \rho(f(x_0), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), h) < \frac{3\kappa}{4} < \kappa.$$

Поскольку выбор n был произвольным, получили, что $\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](g_k), h) < \kappa \ \ \forall k \in \overrightarrow{p, \infty}$. Коль скоро и выбор κ был произвольным, установлено, что

$$(\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](g_i), h))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0.$$

Импликация $((g_i)_{i \in \mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f) \Longrightarrow ((\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](g_i), h))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0)$ установлена, чем и завершается проверка свойства (6.6). □

С учетом установленного свойства (6.6) введем следующее важное

О п р е д е л е н и е 6.1. Если $f \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho)$, то оператор $\mathfrak{L}[f] \in \mathbb{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ определяем посредством правила: $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B_0(E, \mathcal{L}, \mathbb{H})^{\mathbb{N}}$

$$((f_i)_{i \in \mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f) \Longrightarrow ((\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_i), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0).$$

Из (6.4) и определения 6.1 вытекает следующее

Предложение 6.2. *Если $f \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho)$, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$, то*

$$\exists U \in \mathcal{U} \colon \rho(f(x), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})) < \varepsilon \ \ \forall x \in U.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (2.5) подберем последовательность $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B_0(E, \mathcal{L}, \mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ со свойством

$$(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \overset{\rho}{\rightrightarrows} f. \tag{6.11}$$

Тогда (см. определение 6.1) $(\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_i), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0$. Исходя из этого подберем такое число $n \in \mathbb{N}$, что

$$\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_j), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall j \in \overrightarrow{n, \infty}. \tag{6.12}$$

С другой стороны, согласно (6.11) для некоторого $N \in \mathbb{N}$ имеем свойство

$$\rho(f_j(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall j \in \overrightarrow{N, \infty} \ \ \forall x \in E. \tag{6.13}$$

Пусть $r \overset{\triangle}{=} \sup(\{n; N\})$; тогда $r \in \mathbb{N}$ и $f_r \in B_0(E, \mathcal{L}, \mathbb{H})$. Из (6.12) и (6.13) следует, что

$$(\rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_r), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})) < \frac{\varepsilon}{2}) \ \& \ (\rho(f_r(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall x \in E). \tag{6.14}$$

В силу (6.4) $\mathfrak{C}[E; \mathcal{L}; \mathcal{U}; f_r; \mathbf{l}[\mathcal{U}](f_r)] \ne \varnothing$; выберем произвольно $\Phi \in \mathfrak{C}[E; \mathcal{L}; \mathcal{U}; f_r; \mathbf{l}[\mathcal{U}](f_r)]$, получая, что $\Phi \in \mathcal{U}$ (см. (6.2)) и при этом

$$f_r(x) = \mathbf{l}[\mathcal{U}](f_r) \ \ \forall x \in \Phi. \tag{6.15}$$

Тогда из (6.14) и (6.15) следует окончательное утверждение: $\rho(f(x), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})) \le \rho(f_r(x), f(x)) + \rho(\mathbf{l}[\mathcal{U}](f_r), \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})) < \varepsilon \ \ \forall x \in \Phi$. □

Через $\mathcal{T}$ обозначаем в дальнейшем топологию множества $\mathbb{H}$, порожденную метрикой ρ; при этом, конечно, $\mathcal{T} \in (\mathbf{top})[\mathbb{H}]$.

Следствие 6.1. *Если $f \in B(E, \mathcal{L}, \mathbb{H}, \rho)$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то $f^1[\mathcal{U}] \overset{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{h} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{L}[f](\mathcal{U})$. Введем в рассмотрение открытые (в топологии $\mathcal{T}$) шары, полагая

$$\mathbb{B}_{\rho}(\mathbf{h},\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{h \in \mathbf{H} \mid \rho(\mathbf{h},h) < \varepsilon\} \ \ \forall \varepsilon \in]0,\infty[.$$

Тогда $\beta \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{B}_{\rho}(\mathbf{h},\varepsilon) \colon \varepsilon \in]0,\infty[\} \in (\mathbf{h}\text{-bas})[\mathcal{T}]$. Пусть $S \in N_{\mathcal{T}}(\mathbf{h})$. Используя свойства β, подберем $\zeta \in]0,\infty[$ так, что $\mathbb{B}_{\rho}(\mathbf{h},\zeta) \subset S$. С учетом предложения 6.2 имеем для некоторого $U_0 \in \mathcal{U}$ систему неравенств $\rho(f(x),\mathbf{h}) < \zeta \ \ \forall x \in U_0$. Это означает, что $f^1(U_0) \subset \mathbb{B}_{\rho}(\mathbf{h},\zeta)$, а тогда $f^1(U_0) \subset S$ и, как следствие, $S \in (\mathbb{H}\text{-}\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{U}]]$ (см. (3.3)). Поскольку выбор S был произвольным, установлено вложение

$$N_{\mathcal{T}}(\mathbf{h}) \subset (\mathbb{H}\text{-}\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{U}]],$$

что означает (см. (3.4)) сходимость $f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\mathcal{T}}{\Longrightarrow} \mathbf{h}$. □

Из доказанного следствия вытекает с учетом (4.1), что

$$((\mathbf{H} = \mathbb{H}) \ \& \ (\tau = \mathcal{T})) \Longrightarrow (B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho) \subset \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]).$$

Далее мы рассмотрим одно существенное обобщение последнего положения, фиксируя непустое множество Γ, элементы которого играют в дальнейшем роль индексов. Всюду в дальнейшем полагаем, что $\mathbf{H} \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{H}^{\Gamma}$; иными словами, $\mathbf{H}$ отождествляется с множеством всех отображений из Γ в $\mathbb{H}$. Кроме того, полагаем далее, что

$$\tau \stackrel{\triangle}{=} \otimes^{\Gamma}(\mathcal{T});$$

итак, $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{H}]$ есть топология тихоновской степени ТП $(\mathbb{H},\mathcal{T})$ при использовании Γ в качестве индексного множества. Стало быть, всюду в дальнейшем $(\mathbf{H},\tau)$ есть тихоновское произведение экземпляров ТП $(\mathbb{H},\mathcal{T})$ с индексным множеством Γ :

$$(\mathbf{H},\tau) = (\mathbb{H}^{\Gamma},\otimes^{\Gamma}(\mathcal{T})). \tag{6.16}$$

Заметим, что из (6.16) вытекает тот факт, что $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$ (см. [17, 2.3.11]), т. е. (6.16) есть T_3-пространство. Если $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma \in \Gamma$, то, как обычно,

$$f(\cdot)(\gamma) \stackrel{\triangle}{=} (f(x)(\gamma))_{x\in E} \in \mathbb{H}^E$$

является компонентой f, соответствующей индексу γ. Пусть теперь

$$B_{\otimes}[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma] \stackrel{\triangle}{=} \{f \in \mathbf{H}^E \mid f(\cdot)(\gamma) \in B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho) \ \ \forall \gamma \in \Gamma\}. \tag{6.17}$$

В (6.17) введены отображения из E в $\mathbf{H}$ с ярусными компонентами.

Предложение 6.3. *Если $g \in B_{\otimes}[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma]$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то*

$$g^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} (\mathfrak{L}[g(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma}.$$

Доказательство следует из (6.16) с учетом следствия 6.1 и простейших свойств тихоновского произведения (см. [17, с. 127–128]). Из (4.1) и предложения 6.3 вытекает очевидное вложение

$$B_{\otimes}[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma] \subset \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]. \tag{6.18}$$

Тогда (см. определение разд. 4) имеем $\varphi_{\lim}[f] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})} \ \ \forall f \in B_{\otimes}[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma]$. Из предложения 6.3 имеем (см. (4.2)) с учетом отделимости ТП $(\mathbf{H},\tau)$, что

$$\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) = (\mathfrak{L}[f(\cdot)(\gamma)](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma} \ \ \forall f \in B_{\otimes}[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma] \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

З а м е ч а н и е 6.2. Пусть $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in B(E,\mathcal{L},\mathbb{H},\rho)^\Gamma$, а отображение $f \in \mathbf{H}^E$ определяется условием

$$f(x) \overset{\triangle}{=} (f_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma} \ \ \forall x \in E. \tag{6.19}$$

Легко видеть, что $f(\cdot)(\gamma) = f_\gamma \ \ \forall\gamma \in \Gamma$. Поэтому согласно (6.17) $f \in B_\otimes[E;\mathcal{L};\mathbb{H};\rho \mid \Gamma]$. При этом в рассматриваемом случае

$$\varphi_{\lim}[f](\mathcal{U}) = (\mathfrak{L}[f_\gamma](\mathcal{U}))_{\gamma\in\Gamma} \ \ \forall\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Итак, на основе правила (6.19) мы имеем возможность конструировать из ярусных отображений со значениями в $\mathbb{H}$ отображения из множества (6.17), т.е. отображения с ярусными компонентами, а это позволяет применять (см. (6.18)) отображения последнего типа в утверждениях разд. 5 (см., в частности, теорему 5.1).

Заметим, что в качестве Γ можно в простейшем случае использовать $\overline{1,n}$ при $n \in \mathbb{N}$, получая в (6.19) ярусные вектор-функции (в общем же случае Γ — произвольное непустое множество).

7. Пример (пространство-стрелка)

Рассматриваем далее случай, когда $E = [a,b[$, где $a \in \mathbb{R}$ и $b \in]a,\infty[$. Полагаем в дальнейшем, что при всяком выборе упорядоченной пары $z \in [a,b] \times [a,b]$ def $\mathrm{pr}_1(z) \in [a,b]$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in [a,b]$ — суть первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Получаем тогда

$$\mathfrak{P} \overset{\triangle}{=} \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [a,b] \times [a,b]\} \in \Pi[E], \tag{7.1}$$

что согласуется с [21, разд. 6]. С учетом (7.1) получаем, что $(E,\mathfrak{P})$ есть ИП с полуалгеброй множеств; полагаем в дальнейшем, что

$$\mathcal{L} \overset{\triangle}{=} a_E^0(\mathfrak{P}), \tag{7.2}$$

получая в виде $(E,\mathcal{L})$ ИП с алгеброй множеств, так как $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, $\mathfrak{P} \subset \mathcal{L}$. В частности, $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. В [21, разд. 6] указано исчерпывающее описание $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ для данного ИП (см. [21, с. 238]). Для наших целей, однако, более удобным оказывается несколько иное представление, использующее конструкции [22]. В этой связи отметим, что при всяком выборе $\mathcal{I} \in \pi[E]$ элементы множества

$$\beta_{\mathcal{I}}^0[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathfrak{I} \in \beta_0[E] \mid \mathfrak{I} \subset \mathcal{I}\} \tag{7.3}$$

(базы фильтров в $(E,\mathcal{I})$) порождают фильтры из $\mathbb{F}^*(\mathcal{I})$ по стандартному правилу

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{B} \mid \mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{I \in \mathcal{I} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset I\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{I}) \ \ \forall\mathcal{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[E];$$

тогда при условии, что

$$(\mathcal{H}\text{-set})[E \mid \mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{I} \mid L \cap H \neq \varnothing \ \ \forall H \in \mathcal{H}\} \ \ \forall\mathcal{H} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[E], \tag{7.4}$$

имеем [22, разд. 6] следующее представление баз у/ф π-системы $\mathcal{I}$ (реализуемое в терминах семейств вида (7.4)):

$$\begin{aligned}\beta_{\mathcal{I}}^{00}[E] &\overset{\triangle}{=} \{\, \mathfrak{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[E] \mid (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathfrak{B} \mid \mathcal{I}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})\} \\ &= \{\mathfrak{B} \in \beta_{\mathcal{I}}^0[E] \mid \forall L \in (\mathfrak{B}\text{-set})[E \mid \mathcal{I}]\ \exists B \in \mathfrak{B}\colon B \subset L\}.\end{aligned} \tag{7.5}$$

Если $x \in]a,b]$, то условимся, что $\mathcal{J}_x \overset{\triangle}{=} \{[c,x[\colon c \in [a,x[\}$, получая непустое подсемейство полуалгебры $\mathfrak{P}$.

Предложение 7.1. *Справедливо свойство:* $\mathcal{J}_x \in \beta^{00}_{\mathfrak{P}}[E] \ \ \forall x \in \,]a,b]$.

Доказательство. Фиксируем $t \in]a,b]$; тогда $\mathcal{J}_t = \{[c,t[\colon c \in [a,t[\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{P})$ (см. (7.1)). Если при этом $c \in [a,t[$, то $c \in [c,t[$. Поэтому $\mathcal{J}_t \subset \mathcal{P}'(E)$. Если $c_1 \in [a,t[$ и $c_2 \in [a,t[$, то $\mathbf{c} \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{c_1;c_2\}) \in [a,t[$ и $[c_1,t[\cap[c_2,t[=[\mathbf{c},t[\in \mathcal{J}_t$. Поэтому $\forall B_1 \in \mathcal{J}_t\ \forall B_2 \in \mathcal{J}_t\ \exists B_3 \in \mathcal{J}_t\colon B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Следовательно (см. (3.1)), $\mathcal{J}_t \in \beta_0[E]$, а тогда, коль скоро $\mathcal{J}_t \subset \mathfrak{P}$, согласно (7.3) $\mathcal{J}_t \in \beta^0_{\mathfrak{P}}[E]$.

Выберем произвольно $\Lambda \in (\mathcal{J}_t\text{-set})[E \mid \mathfrak{P}]$. Тогда $\Lambda \in \mathfrak{P}$ и при этом

$$\Lambda \cap B \neq \varnothing \ \ \forall B \in \mathcal{J}_t. \tag{7.6}$$

Согласно (7.1) $\Lambda = [p,q[$, где $p \in [a,b]$ и $q \in [a,b]$. С учетом непустоты $\mathcal{J}_t$ имеем из (7.6), что $\Lambda \neq \varnothing$, а тогда $p < q$. Поскольку $[a,t[\in \mathcal{J}_t$, то из (7.6) следует, что $[p,q[\cap[a,t[\neq \varnothing$, откуда вытекает, что $p < t$. Это означает, что $p \in [a,t[$, а потому $[p,t[\in \mathcal{J}_t$. При этом $(q < t) \vee (t \leq q)$.

Пусть $q < t$. Тогда $q \in [a,t[$, а потому $[q,t[\in \mathcal{J}_t$, причем $\Lambda \cap [q,t[=[p,q[\cap[q,t[=\varnothing$, что противоречит (7.6). Данное противоречие означает, что $t \leq q$, а тогда $[p,t[\subset [p,q[$. В итоге $[p,t[\in \mathcal{J}_t\colon [p,t[\subset \Lambda$. Поскольку выбор Λ был произвольным, установлено, что $\forall L \in (\mathcal{J}_t\text{-set})[E \mid \mathfrak{P}]\ \exists B \in \mathcal{J}_t\colon B \subset L$. С учетом (7.5) получаем требуемое свойство $\mathcal{J}_t \in \beta^{00}_{\mathfrak{P}}[E]$. □

Согласно (7.1), (7.2) и [22, предложение 5.5] получаем, что

$$\mathcal{J}_x \in \beta^{00}_{\mathcal{L}}[E] \ \ \forall x \in]a,b]. \tag{7.7}$$

В свою очередь, из (7.5) и (7.7) следует с очевидностью свойство

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})\ \forall x \in \,]a,b].$$

Введем в рассмотрение множество всех свободных у/ф алгебры $\mathcal{L}$:

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \varnothing\Big\}. \tag{7.8}$$

Из (7.5), (7.8) вытекает при $x \in \,]a,b]$, что $\mathcal{J}_x \subset (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}]$, причем пересечение всех множеств из $\mathcal{J}_x$ пусто. В итоге (см. (7.8))

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}] \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in]a,b].$$

Исходя из построений [21, с. 238], при $x \in \,]a,b]$ полагаем, что $\mathfrak{U}^0_x \stackrel{\triangle}{=} \{[\mathrm{pr}_1(z),\mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [a,x[\times[x,b]\}$. Тогда $\mathfrak{U}^0_x \in \mathbb{F}^*_0(\mathfrak{P}) \ \ \forall x \in]a,b]$. Используя конструкцию продолжения у/ф из замечания 5.1, получаем при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathfrak{P})$, что (см. (7.2)) $\{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset L\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$. В качестве $\mathcal{U}$ можно использовать $\mathfrak{U}^0_x$ при $x \in]a,b]$, устанавливая свойство

$$\tilde{\mathfrak{U}}^0_x \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathfrak{U}^0_x\colon U \subset L\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}). \tag{7.9}$$

Заметим, что при $x \in]a,b]$ пересечение всех множеств из $\mathfrak{U}^0_x$ пусто, причем согласно (7.9) $\mathfrak{U}^0_x \subset \tilde{\mathfrak{U}}^0_x$. Как следствие

$$\tilde{\mathfrak{U}}^0_x \in \mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) \ \ \forall x \in]a,b]. \tag{7.10}$$

С учетом (7.2) получаем (см. [21, с. 238]) следующую цепочку равенств

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \{((E,\mathcal{L})\text{-ult})[x]\colon x \in E\} \cup \{\tilde{\mathfrak{U}}^0_x\colon x \in]a,b]\} = ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1(E) \cup \{\tilde{\mathfrak{U}}^0_x\colon x \in \,]a,b]\}. \tag{7.11}$$

Поскольку тривиальные у/ф алгебры $\mathcal{L}$ имеют каждый непустое пересечение всех своих множеств, то согласно (7.10) и (7.11)

$$\mathbb{F}^*_{0,\mathbf{f}}(\mathcal{L}) = \{\tilde{\mathfrak{U}}^0_x\colon x \in \,]a,b]\}. \tag{7.12}$$

Предложение 7.2. *Если* $x \in]a,b]$, *то* $(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}] = \tilde{\mathfrak{U}}_x^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}]$. Тогда $A \in \mathcal{L}$ и при этом $B \subset A$ для некоторого множества $B \in \mathcal{J}_x$, где $\mathcal{J}_x \subset \mathfrak{U}_x^0$ (последнее легко следует из определений). Тогда $B \in \mathfrak{U}_x^0$, а потому $A \in \tilde{\mathfrak{U}}_x^0$ согласно (7.9). Итак,

$$(E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}] \subset \tilde{\mathfrak{U}}_x^0. \tag{7.13}$$

Пусть $M \in \tilde{\mathfrak{U}}_x^0$. Тогда $M \in \mathcal{L}$ и $N \subset M$ для некоторого множества $N \in \mathfrak{U}_x^0$; при этом для некоторых $\alpha \in [a, x[$ и $\beta \in [x, b]$ справедливо равенство $N = [\alpha, \beta[$, причем $[\alpha, x[\subset N$. Поскольку $N \in \mathfrak{P}$ и, в частности, $N \in \mathcal{L}$, то $N \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}]$, так как $[\alpha, x[\in \mathcal{J}_x$. По аксиомам $\mathcal{L}$-фильтра имеем, что $M \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}]$. Итак, $\tilde{\mathfrak{U}}_x^0 \subset (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_x \mid \mathcal{L}]$ и (см. (7.13)) требуемое равенство установлено. □

Фиксируем в дальнейшем семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$; пусть далее

$$T_0[\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{t \in]a,b] \mid \forall L \in \mathcal{E}\ \exists \theta \in [a, t[\colon [\theta, t[\subset L\}. \tag{7.14}$$

Предложение 7.3. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \{\tilde{\mathfrak{U}}_t^0 \colon t \in T_0[\mathcal{E}]\} \cup ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1\Big(\bigcap_{L \in \mathcal{E}} L\Big). \tag{7.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω_1 и Ω_2 первое и второе множества в правой части (7.15) соответственно. Выберем произвольно $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, получая (см. (3.6)) для $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ свойство $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Тогда [15, (6.3)]

$$(\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}))\ \vee\ (\exists x \in E \colon \mathcal{F} = ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[x]). \tag{7.16}$$

Обе возможности в (7.16) рассмотрим отдельно. Пусть сначала:

1) $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$. Тогда согласно (7.8), (7.11) и (7.12) $\mathcal{F} = \tilde{\mathfrak{U}}_\theta^0$, где $\theta \in]a,b]$ (учитываем, что каждый тривиальный у/ф обладает непустым пересечением всех своих множеств). Поэтому $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathfrak{U}}_\theta^0$, откуда в силу предложения 7.2 следует вложение $\mathcal{E} \subset (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_\theta \mid \mathcal{L}]$. Тогда $\forall L \in \mathcal{E}\ \exists B \in \mathcal{J}_\theta \colon B \subset L$. Иными словами, $\forall L \in \mathcal{E}\ \exists c \in [a, \theta[\colon [c, \theta[\subset L$. С учетом (7.14) получаем, что $\theta \in T_0[\mathcal{E}]$. Это означает, что $\mathcal{F} \in \Omega_1$. Итак,

$$(\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})) \Longrightarrow (\mathcal{F} \in \Omega_1). \tag{7.17}$$

2) Имеет место второй случай в (7.16): $\mathcal{F} = ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[x_*]$, где $x_* \in E$. В частности, $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \subset (E\text{-ult})[x_*]$, а тогда x_* содержится в пересечении всех множеств из $\mathcal{E}$ и, следовательно, $\mathcal{F} \in \Omega_2$. Итак,

$$(\exists x \in E \colon \mathcal{F} = ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[x]) \Longrightarrow (\mathcal{F} \in \Omega_2). \tag{7.18}$$

Из (7.16)–(7.18) следует, что $\mathcal{F} \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Тем самым установлено вложение

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{7.19}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega_1$. Тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_{0,\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$ (см. (7.12),(7.14)) и для некоторого $t_0 \in T_0[\mathcal{E}]$ справедливо равенство $\mathcal{V} = \tilde{\mathfrak{U}}_{t_0}^0$. При этом, в частности, $\mathcal{V} = (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_0} \mid \mathcal{L}]$ согласно предложению 7.2, а потому $\forall V \in \mathcal{V}\ \exists B \in \mathcal{J}_{t_0} \colon B \subset V$. Если $\Sigma \in \mathcal{E}$, то, в частности, $\Sigma \in \mathcal{L}$ и в силу (7.14) $[\sigma, t_0[\subset \Sigma$ для некоторого $\sigma \in [a, t_0[$; при этом $[\sigma, t_0[\in \mathcal{J}_{t_0}$. Поэтому $\exists B \in \mathcal{J}_{t_0} \colon B \subset \Sigma$. Это означает, что $\Sigma \in (E\text{-}\mathbf{fi})[\mathcal{J}_{t_0} \mid \mathcal{L}]$, т. е. $\Sigma \in \mathcal{V}$. Тем самым установлено вложение $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$ и, стало быть (см. (3.6)), $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Итак,

$$\Omega_1 \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}). \tag{7.20}$$

Пусть $\mathcal{W} \in \Omega_2$. Тогда $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, и при этом для некоторого $t_* \in \bigcap_{L \in \mathcal{E}} L$

$$\mathcal{W} = ((E, \mathcal{L})\text{-ult})[t_*]. \tag{7.21}$$

Поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, имеем по свойствам t_*, что $\mathcal{E} \subset ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[t_*]$, а тогда $\mathcal{E} \subset \mathcal{W}$ согласно (7.21), т. е. $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, чем и завершается проверка вложения $\Omega_2 \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. С учетом (7.20) имеем, что $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, а тогда, используя (7.19), получаем требуемое равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \Omega_1 \cup \Omega_2$. □

Полагаем в дальнейшем, что $\mathbf{H}$ есть непустое множество и $\tau \in (\text{top}_0[\mathbf{H}]$; итак, $(\mathbf{H},\tau)$ есть T_2-пространство. Фиксируем, кроме того, $\Psi \in \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]$.

Предложение 7.4. *Если* $t \in\,]a,b]$, *то* $\exists!\mathbf{h} \in \mathbf{H}\ \forall S \in N_\tau(\mathbf{h})\ \exists\delta \in\,]0,\infty[$:

$$\Psi(x) \in S \ \ \forall x \in\,]t-\delta, t[\, \cap E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагаем для краткости $h \stackrel{\triangle}{=} \varphi_{\lim}[\Psi](\tilde{\mathfrak{U}}_t^0)$. Тогда $h \in \mathbf{H}$. Согласно (4.2) получаем, что

$$\Psi^1[\tilde{\mathfrak{U}}_t^0] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} h. \tag{7.22}$$

С учетом (2.1), (3.4) и (7.22) получаем, что $\forall S \in N_\tau(h)\ \exists U \in \tilde{\mathfrak{U}}_t^0$: $\Psi^1(U) \subset S$. Тогда согласно предложению 7.2 $\forall S \in N_\tau(h)\ \exists c \in [a,t[$: $\Psi^1([c,t[) \subset S$. Последнее означает, в частности, что $\forall S \in N_\tau(h)\ \exists\delta \in\,]0,\infty[$:

$$\Psi(x) \in S \ \ \forall x \in\,]t-\delta, t[\, \cap E. \tag{7.23}$$

Пусть теперь $\tilde{h} \in \mathbf{H}$ обладает тем свойством, что $\forall\tilde{S} \in N_\tau(\tilde{h})\ \exists\tilde{\delta} \in\,]0,\infty[$:

$$\Psi(x) \in \tilde{S} \ \ \forall x \in\,]t-\tilde{\delta}, t[\, \cap E. \tag{7.24}$$

Покажем, что $h = \tilde{h}$. В самом деле, допустим противное: $h \neq \tilde{h}$. Используя отделимость ТП $(\mathbf{H},\tau)$ подберем окрестности $\mathbb{S} \in N_\tau(h)$ и $\tilde{\mathbb{S}} \in N_\tau(\tilde{h})$, для которых $\mathbb{S} \cap \tilde{\mathbb{S}} = \varnothing$. С учетом (7.23) имеем для некторого $\delta_1 \in]0,\infty[$, что

$$\Psi(x) \in \mathbb{S} \ \ \forall x \in\,]t-\delta_1, t[\, \cap E. \tag{7.25}$$

В свою очередь, используя (7.24), подберем $\delta_2 \in\,]0,\infty[$ так, что

$$\Psi(x) \in \tilde{\mathbb{S}} \ \ \forall x \in\,]t-\delta_2, t[\, \cap E. \tag{7.26}$$

При этом $\eta_1 \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\delta_1; t-a\}) \in\,]0,\infty[$ и $\eta_2 \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\delta_2; t-a\}) \in\,]0,\infty[$. Заметим, что $]t-\eta_1, t[\subset\,]a,t[\subset E$ и $]t-\eta_2, t[\subset]a,t[\subset E$; заметим также, что $\eta \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{\eta_1;\eta_2\}) \in]0,\infty[$ и

$$\theta \stackrel{\triangle}{=} t - \frac{\eta}{2} \in\,]t-\eta_1, t[\cap]t-\eta_2, t[.$$

Тогда $\theta \in E$ и определено значение $\Psi(\theta) \in \mathbf{H}$. При этом по выбору η_1 и η_2 имеем, что $\theta \in\,]t-\delta_1, t[\cap]t-\delta_2, t[\cap E$, а потому из (7.25) и (7.26) следует включение $\Psi(\theta) \in \mathbb{S} \cap \tilde{\mathbb{S}}$. Последнее невозможно по выбору $\mathbb{S}$ и $\tilde{\mathbb{S}}$. Противоречие доказывает равенство $h = \tilde{h}$. Итак, $\forall\hat{h} \in \mathbf{H}$

$$(\forall S \in N_\tau(\hat{h})\ \exists\delta \in]0,\infty[: \Psi(x) \in S \ \ \forall x \in]t-\delta, t[\, \cap E) \Longrightarrow (h = \hat{h}).$$

С учетом (7.23) получаем требуемое положение. □

В силу предложения 7.4 корректно следующее определение: если $t \in]a,b]$, то

$$(\tau\text{-}\lim_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)] \in \mathbf{H} \tag{7.27}$$

есть def такой единственный элемент $\mathbf{H}$, что

$$\forall S \in N_\tau((\tau\text{-}\lim_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)])\ \exists\delta \in]0,\infty[: \Psi(x) \in S \ \ \forall x \in\,]t-\delta, t[\, \cap E.$$

Из (4.2) вытекает (с учетом отделимости $(\mathbf{H},\tau)$), что

$$(\tau\text{-}\lim_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)] = \varphi_{\lim}[\Psi](\tilde{\mathfrak{U}}_t^0) \ \ \forall t \in]a,b]. \tag{7.28}$$

Рассуждения, связанные с проверкой (7.28), повторяют первую часть доказательства предложения 7.4. Разумеется, элемент (7.27) определен при $t \in T_0[\mathcal{E}]$.

Предложение 7.5. *Если* $\tau \in (\mathbf{top})[\mathbf{H}]$, *то справедливо равенство*

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}] = \Big\{(\tau\text{-}\lim_{\xi\uparrow t})[\Psi(\xi)]\colon t \in T_0[\mathcal{E}]\Big\} \cup \Psi^1\Big(\bigcap_{L\in\mathcal{E}} L\Big). \tag{7.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим соответственно через A_1 и A_2 первое и второе множества в правой части (7.29). Выберем произвольно $h_* \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}]$. Тогда из предложения 5.2 вытекает,что $h_* = \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_*)$ для некоторого у/ф $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Согласно предложению 7.3 имеем

$$\big(\mathcal{U}_* \in \big\{\tilde{\mathfrak{U}}_t^0\colon t \in T_0[\mathcal{E}]\big\}\big) \ \vee\ \Big(\mathcal{U}_* \in ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1\Big(\bigcap_{L\in\mathcal{E}} L\Big)\Big). \tag{7.30}$$

Оба случая в (7.30) рассмотрим отдельно:

1) Пусть $\mathcal{U}_*$ есть элемент первого множества в правой части (7.15). Тогда $\mathcal{U}_* = \tilde{\mathfrak{U}}_{t_*}^0$ для некоторого $t_* \in T_0[\mathcal{E}]$. В частности, $t_* \in]a,b]$ (см. (7.14)). При этом (см. (7.28))

$$(\tau\text{-}\lim_{\xi\uparrow t_*})[\Psi(\xi)] = \varphi_{\lim}[\Psi](\tilde{\mathfrak{U}}_{t_*}^0) = \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{U}_*) = h_*,$$

следовательно, $h_* \in A_1$. Итак, установлена импликация

$$(\mathcal{U}_* \in \{\tilde{\mathfrak{U}}_t^0\colon t \in T_0[\mathcal{E}]\}) \Longrightarrow (h_* \in A_1). \tag{7.31}$$

2) Пусть $\mathcal{U}_* \in ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1(\bigcap_{L\in\mathcal{E}} L)$. Тогда $\mathcal{U}_* = ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[x_*]$, где $x_* \in \bigcap_{L\in\mathcal{E}} L$. В частности, $x_* \in E$. В этом случае из (4.7) следует, что

$$h_* = \varphi_{\lim}[\Psi](((E,\mathcal{L})\text{-ult})[x_*]) = \Psi(x_*) \in A_2.$$

Итак, установлена следующая импликация:

$$\Big(\mathcal{U}_* \in ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1\Big(\bigcap_{L\in\mathcal{E}} L\Big)\Big) \Longrightarrow (h_* \in A_2).$$

С учетом (7.30) и (7.31) получаем, что $h_* \in A_1 \cup A_2$. Поскольку выбор h_* был произвольным, установлено, что

$$(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}] \subset A_1 \cup A_2. \tag{7.32}$$

Пусть $h_1 \in A_1$. Тогда для некоторого $t_1 \in T_0[\mathcal{E}]$ справедливо равенство

$$h_1 = (\tau\text{-}\lim_{\xi\uparrow t_1})[\Psi(\xi)]. \tag{7.33}$$

В частности, $t_1 \in]a,b]$. В силу предложения 7.3 $\mathcal{V} \overset{\triangle}{=} \tilde{\mathfrak{U}}_{t_1}^0 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, причем согласно (7.28) и (7.33)

$$h_1 = \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{V}) \in \varphi_{\lim}[\Psi]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})),$$

а потому с учетом предложения 5.2 $h_1 \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}]$, чем и завершается проверка вложения

$$A_1 \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}]. \tag{7.34}$$

Выберем произвольно $h_2 \in A_2$. Тогда $h_2 = \Psi(t_0)$, где $t_0 \in \bigcap_{L\in\mathcal{E}} L$. В частности, $t_0 \in E$ и

$$\mathcal{W} \overset{\triangle}{=} ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[t_0] \in ((E,\mathcal{L})\text{-ult})[\cdot]^1\Big(\bigcap_{L\in\mathcal{E}} L\Big). \tag{7.35}$$

Из предложения 7.3 имеем (см. (7.35)), что $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$, а потому согласно предложению 5.2 получаем (см. также (4.7)), что

$$h_2 = \varphi_{\lim}[\Psi](((E,\mathcal{L})\text{-ult})[t_0]) = \varphi_{\lim}[\Psi](\mathcal{W}) \in (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}].$$

Итак, $A_2 \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}]$, откуда с использованием (7.34) получаем вложение $A_1 \cup A_2 \subset (\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}]$. С учетом (7.32) имеем, что $(\mathbf{as})[E;\mathbf{H};\tau;\Psi;\mathcal{E}] = A_1 \cup A_2$. □

З а м е ч а н и е 7.1. С учетом построений разд. 6 можно получить важную конкретизацию предложения 7.5. Речь идет о случае (6.16), где $(\mathbb{H}, \mathcal{T})$ есть метризуемое полной метрикой ТП (имеется в виду метрика ρ). В этом случае можно с учетом (6.18) полагать, что $\Psi \in B_{\otimes}[E; \mathcal{L}; \mathbb{H}; \rho \mid \Gamma]$; напомним, что Γ — непустое множество индексов (см. (6.16)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.:Наука, 1977. 624 с.
2. **Даффин Р.Дж.** Бесконечные программы // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Иностр. литература, 1959. С. 263–267.
3. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 351 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Скворцова А.В., Ченцов А.Г.** О построении асимптотического аналога пучка траекторий линейной системы с одноимпульсным управлением // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1645–1657.
6. **Ченцов А.Г.** Ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения: задача соблюдения ограничений асимптотического характера // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1047–1064.
7. **Ченцов А.Г.** О корректности некоторых задач управления материальной точкой // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 3. С. 127–141. (Математика. Механика. Компьютерные науки).
8. **Ченцов А.Г.** Некоторые конструкции асимптотического анализа, связанные с компактификацией Стоуна — Чеха // Современная математика и ее приложения / АН Грузии. Ин-т кибернетики. 2005. Т. 26. С. 119–150.
9. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
10. **Бурбаки Н.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 272 с.
11. **Александров П.С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 368 с.
12. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.
13. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
14. **Меленцов А.А., Байдосов В.А., Змеев Г.М.** Элементы теории меры и интеграла. Свердловск: УрГУ, 1980. 100 с.
15. **Ченцов А.Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
16. **Ченцов А.Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
17. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
18. **Chentsov A.G., Morina S.I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 408 с.
19. **Ченцов А.Г.** Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 184–217.
20. **Ченцов А.Г.** Конструирование операций предельного перехода с использованием ультрафильтров измеримых пространств // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 208–222.
21. **Ченцов А.Г.** Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
22. **Ченцов А.Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.

Поступила 1.02.2012

Ченцов Александр Георгиевич
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

УДК 517.5

О ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СРЕДНИХ ν-ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов

В работе найдены точные значения различных ν-поперечников классов, дифференцируемых на всей оси $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ функций f, принадлежащих $L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ и удовлетворяющих ограничению

$$\left(\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)},t)dt\right)^{1/q} \le \Phi(h),$$

где r, $m\in\mathbb{N}$; $1/r<q\le 2$; $0<h\le\pi$, а $\Omega_m(f^{(r)},t)_2$ — обобщенный модуль непрерывности m-го порядка производной $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{R})$; $\Phi(t)$ — произвольная непрерывная, возрастающая при $t\ge 0$ функция, такая что $\Phi(0)=0$.

Ключевые слова: пространства измеримых функций, целая функция экспоненциального типа σ, модуль непрерывности m-го порядка, точная константа.

M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov. On the exact values of mean ν-widths of some classes of entire functions.

We find the exact values of various ν-widths for some classes of functions $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$ differentiable on the axis $\mathbb{R}=(-\infty;+\infty)$ and satisfying the condition

$$\left(\int_0^h \Omega_m^q(f^{(r)},t)dt\right)^{1/q} \le \Phi(h),$$

where r, $m\in\mathbb{N}$, $1/r<q\le 2$, $0<h\le\pi$, $\Omega_m(f^{(r)},t)_2$ is the generalized modulus of continuity of mth order of the derivative $f^{(r)}\in L_2(\mathbb{R})$, and $\Phi(t)$ is an arbitrary continuous function increasing on $t\ge 0$ and such that $\Phi(0)=0$.

Keywords: spaces of measurable function, entire functions of exponential type σ, modulus of continuity of mth order, exact constant.

Введение

Начало исследований, связанных с аппроксимацией функций на прямой $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, было положено в работах С.Н. Бернштейна, использовавшего для этого в качестве аппарата приближения пространства целых функций конечной степени. В дальнейшем этой проблематике посвящено много работ, из которых укажем фундаментальные работы Н. Винера, Н.И. Ахиезера, М.Г. Крейна, С.М. Никольского, А.Ф. Тимана, Р. Боаса, И.И. Ибрагимова и др. (см., например, монографии [1–4]). В восьмидесятых годах прошлого столетия появились работы [5–7] по приближению функций суммируемыми с квадратом на всей оси целыми функциями, в которых найдены точные константы, и сравнительно недавно опубликованы работы, в которых вычислены точные значения средних ν-поперечников для различных классов целых функций (см., например, [8–16] и приведенную там литературу). Отметим, что теория поперечников в их традиционном определении освещена в монографиях В.М. Тихомирова [17, гл. IV, с. 217–264], Н.П. Корнейчука [18, гл. VIII, с. 340–390], а также в специально посвященной этой теории монографии А. Пинкуса [19], где подробно изложены почти все результаты о поперечниках, полученные до конца восьмидесятых годов прошлого века.

Определение средних поперечников (по Колмогорову, Бернштейну, Гельфанду и линейных) дано Г.Г. Магарил-Ильяевым [8; 9], и им же вычислены точные значения этих величин для соболевских классов функций на $\mathbb{R}$, а также указаны соответствующие экстремальные подпространства и операторы.

Рассматриваемые в данной работе классы функций определяются следующим образом. Пусть $t > 0$, $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, $\Delta^1_{h_j} f(x) = f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1, m}$; $\Delta^m_{\overline{h}} = \Delta^1_{h_1} \circ \Delta^1_{h_2} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_m}$,

$$\Omega_m(f;t)_2 = \left\{ t^{-m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta^m_{\overline{h}} f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2},$$

$\Phi(t)$ — произвольная непрерывная возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, $\Phi(0) = 0$,

$$W_q(\Phi) := W(q, r, m; \Phi) = \left\{ f \in L^{(r)}_2(\mathbb{R}) : \ \left(\int\limits_0^h \Omega^q_m(f^{(r)}; t) dt \right)^{1/q} \leq \Phi(h) \ \ \forall h \in (0, \pi] \right\}.$$

При выполнении ряда ограничений относительно параметров r, q, h и мажоранты Φ найдены точные значения вышеперечисленных средних поперечников класса $W_q(\Phi)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ и указаны соответствующие экстремальные подпространства. Полученные результаты являются продолжением и обобщением результатов работ [15; 16].

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе мы приведем необходимые определения, обозначения общего характера, постановки задач и известные результаты, имеющие непосредственное отношение к исследуемой теме. Во втором разделе рассмотрена одна экстремальная задача для установления неулучшаемых неравенств типа Джексона — Стечкина, связывающих наилучшие приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ посредством целых функций $g_\sigma \in B_{\sigma,2}$ с модулями непрерывности высших порядков указанных функций или их производных. Полученный результат позволил нам в третьем разделе вычислить точные значения средних поперечников для класса $W_q(\Phi)$ в $L_2(\mathbb{R})$.

1. Определения и обозначения общего характера, постановки задач

Всюду далее под $L_p(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$, будем понимать пространство измеримых на всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = ess\,sup\big\{|f(x)| \colon x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Через $L^{(r)}_p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty;\ r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty;\ 1 \leq p \leq \infty)$ обозначим сужение на $\mathbb{R}$ множества всех целых функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину

$$A_\sigma(f)_p := \inf\big\{\|f - g_\sigma\|_p \colon g_\sigma \in B_{\sigma,p}\big\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

называют наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ элементами множества $B_{\sigma,p}$. Модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\omega_m(f,t)_p \stackrel{def}{=} \sup\big\{\|\Delta^m_h f(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})} \colon |h| \leq t\big\} \quad (0 \leq t < +\infty),$$

где $\Delta^m_h f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C^k_m f(x + kh)$ — m-я разность функции f в точке x с шагом h.

Прежде чем привести полученные нами результаты в этом направлении, приведем нужные нам в дальнейшем определения и обозначения общего характера из работ Г.Г. Магарил-Ильяева [8; 9].

Общеизвестно, что до недавнего времени подпространство $B_{\sigma,p}$ $(0<\sigma<\infty; 1\le p\le\infty)$ было в некотором смысле единственным аппаратом приближения в $L_p(\mathbb{R})$ и только лишь с конца прошлого века все чаще в качестве аппроксимирующего множества используются сплайны (см., например, [10; 11; 20; 21]). Если рассматривать задачу приближения $f\in L_p(\mathbb{R})$, то целые функции и сплайны являются бесконечномерными образованиями и величины, характеризующие соответствующие приближения, выражаются в терминах, отражающих внутреннюю структуру аппарата аппроксимации, например: степень целой функции экспоненциального типа, плотность распределения узлов сплайна. Возникает естественный вопрос: как сравнивать между собой подобные способы приближения?

Введение Г.Г. Магарил-Ильяевым [8;9] определения средней размерности, являющейся определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее В.М. Тихомировым [22], позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где роль размерности играет средняя размерность. В результате этого оказалось возможным сравнить аппроксимативные свойства подпространства $B_{\sigma,p},\ 1\le p\le\infty$, с аналогичными характеристиками иных подпространств из $L_p(\mathbb{R}),\ 1\le p\le\infty$, той же размерности и решать в $L_p(\mathbb{R}),\ 1\le p\le\infty$, экстремальные задачи теории аппроксимации вариационного содержания.

Пусть $\mathbb{B}L_p(\mathbb{R})=\{\varphi\in L_p(\mathbb{R})\colon \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R})}\le 1\}$ — единичный шар в $L_p(\mathbb{R})$; $Lin(L_p(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_p(\mathbb{R})$;

$$Lin_n(L_p(\mathbb{R}))\overset{def}{=}\big\{\mathcal{J}\in Lin(L_p(\mathbb{R}))\colon dim\mathcal{J}\le n\big\},\quad n\in\mathbb{Z}_+;$$

$$d(\mathfrak{M},\mathfrak{N},L_p(\mathbb{R}))\overset{def}{=}\sup\big\{\inf\{\|f-\varphi\|_p\colon \varphi\in\mathfrak{N}\}\colon f\in\mathfrak{M}\big\}$$

— наилучшее приближение множества $\mathfrak{M}\subset L_p(\mathbb{R})$ множеством $\mathfrak{N}\subset L_p(\mathbb{R})$. Под $\mathfrak{N}_T, T>0$ понимаем сужение множества $\mathfrak{N}\subset L_p(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T,T]$, а через $Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{J}\in Lin(L_p(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{J}\cap\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_p([-T,T])$ при любом $T>0$. Если $\mathcal{J}\in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $T,\ \varepsilon>0$, то существуют такие $n\in\mathbb{Z}_+$ и $M\in Lin_n(L_p([-T,T])$, для которых $d((\mathcal{J}\cap\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T,M,L_p([-T,T]))<\varepsilon$.

Пусть

$$D_\varepsilon(T,\mathcal{J},L_p(\mathbb{R}))$$

$$\overset{def}{=}\min\Big\{n\in\mathbb{Z}_+ : \exists M\in Lin_n(L_p([-T,T])), d((\mathcal{J}\cap\mathbb{B}L_p(\mathbb{R}))_T,M,L_p([-T,T]))<\varepsilon\Big\}.$$

В [8] доказано, что данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{dim}(\mathcal{J},L_p(\mathbb{R}))\overset{def}{=}\lim\big\{\liminf\{D_\varepsilon(T,\mathcal{J},L_p(\mathbb{R}))/(2T)\colon T\to\infty\}\colon \varepsilon\to 0\big\},$$

где $\mathcal{J}\in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{J}$ в $L_p(\mathbb{R})$. В работах [8; 9] доказано, что $\overline{dim}(B_{\sigma,p};L_p(\mathbb{R}))=\sigma/\pi,\ (1\le p\le\infty)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — центрально-симметричное подмножество из $L_p(\mathbb{R})$ и $\nu>0$ — произвольное число. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(\mathfrak{M},L_p(\mathbb{R}))$$

$$\overset{def}{=}\inf\Big\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|_p\colon \varphi\in\mathcal{J}\}\colon f\in\mathfrak{M}\}\colon \mathcal{J}\in Lin_c(L_p(\mathbb{R})),\overline{dim}(\mathcal{J},L_p(\mathbb{R}))\le\nu\Big\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называют экстремальным. Средним линейным ν-поперечником множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M},L_p(\mathbb{R}))\overset{def}{=}\inf\{\sup\{\|f-\Lambda f\|\colon f\in\mathfrak{M}\}\colon (X,\Lambda)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_p(\mathbb{R})$; $\mathfrak{M} \subset X$; $\Lambda\colon X \longrightarrow L_p(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $Im\,\Lambda \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{dim}(Im\,\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \le \nu$. Пару (X^*, Λ^*), на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_p(\mathbb{R}))$$

$$\overset{def}{=} \sup\Big\{ \sup\{\rho > 0\colon \mathcal{J} \cap \rho\, \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}\}\colon \mathcal{J} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}), \overline{dim}(\mathcal{J}, L_p(\mathbb{R})) > \nu,$$

$$\overline{d}_\nu(\mathcal{J} \cap \mathbb{B}L_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R})) = 1\Big\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества $\mathfrak{M}$ в $L_p(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{J}$ при вычислении внешней точной верхней грани, означает, что рассматриваются только те пространства, для которых верен аналог теоремы В.М.Тихомирова о поперечнике шара [18, с. 341]. В [8; 9] доказывается, что указанному требованию удовлетворяет, например, пространство $B_{\sigma,p}$, если $\sigma > \nu\pi$.

Между вышеперечисленными экстремальными характеристиками множества $\mathfrak{M}$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства [9; 13]

$$\overline{b}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \le \overline{d}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})) \le \overline{\delta}_\nu(\mathfrak{M}, L_2(\mathbb{R})). \tag{1.1}$$

Отметим, что точные значения и асимптотически точные значения средних поперечников для некоторых классов функций вычислены Г.Г. Магарил-Ильяевым [8; 9], С.Б. Вакарчуком [12; 13] и в работах [15; 16].

2. Наилучшее приближение целыми функциями

Известно [4, с. 64–70], что любая функция вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{izu} \varphi(u)du, \quad \varphi(u) \in L_2(-\sigma; \sigma)$$

принадлежит пространству $B_{\sigma,2}$, причем $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{L_2(-\sigma;\sigma)}$, а также известно [5; 6], что если

$$F(f; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$$

— преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, то целая функция

$$F_\sigma(f; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(f, t) e^{-ixt} dt$$

принадлежит классу $B_{\sigma,2}$ и наименее отклоняется от f в смысле метрики $L_2(\mathbb{R})$. При этом

$$A_\sigma(f)_2 = \|f - F_\sigma(f)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \Bigg(\int\limits_{|t| \ge \sigma} |F(f,t)|^2 dt \Bigg)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что для любого $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$

$$A_\sigma(f^{(r)})_2 = \Bigg(\int\limits_{|t| \ge \sigma} |F(f,t)|^2 t^{2r} dt \Bigg)^{1/2} \ge \sigma^r A_\sigma(f)_2.$$

В [6] доказано, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то имеет место равенство

$$\omega_m^2(f;t)_2 = 2^m \sup_{|h|\le t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(f;x)|^2 (1-\cos hx)^m dx. \tag{2.2}$$

С.Б. Вакарчук [13] при решении экстремальных задач теории приближения $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями использовал следующую характеристику гладкости:

$$\Omega_m(f;t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \tag{2.3}$$

где $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$, $\Delta_{h_j}^1 f = f(\cdot + h_j) - f(\cdot)$, $j = \overline{1,m}$, и, в частности, показал, что

$$\Xi_{\sigma,r,m}(t) \overset{def}{=} \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})\\ f^{(r)}\neq\mathrm{const}}} \frac{\sigma^r A_\sigma(f)}{\Omega_m(f^{(r)}; t/\sigma)_2} = \left\{ 2\Big(1 - \frac{\sin t}{t}\Big) \right\}^{-m/2}. \tag{2.4}$$

Отметим, что задача (2.4) для модуля непрерывности (2.2) также решена С.Б.Вакарчуком [12].

В данной работе с целью обобщения (2.4) мы введем в рассмотрение следующую экстремальную характеристику:

$$\chi_{\sigma,r,m,q}(h) \overset{def}{=} \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})\\ f^{(r)}\neq\mathrm{const}}} \frac{\sigma^r A_\sigma(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}; t/\sigma)_2 dt \right)^{1/q}}, \tag{2.5}$$

где $r, m \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$, $0 < h \le \pi/2$. Имеет место следующая

Теорема 2.1. *Для произвольных чисел $r, m \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$ и всех $0 < h \le \pi/2$ справедливо равенство*

$$\chi_{\sigma,r,m,q}(h) = 2^{-m/2} \left(\int\limits_0^h \Big(1 - \frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2} dt \right)^{-1/q}. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше мы отметили, что для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ существует только одна целая функция $F_\sigma(f,x) \in B_{\sigma,2}$ [5–7], которая наименее уклоняется от f в метрике $L_2(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$F_\sigma(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \chi_\sigma(t) F(f;t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{+\sigma} e^{ixt} F(f;t) dt,$$

где $F(f;t)$ — преобразование Фурье функции f, а $\chi_\sigma(t)$ — характеристическая функция интервала $(-\sigma, \sigma)$. Поскольку

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) = f(x+h_j) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(e^{ith_j} - 1\big) F(f;t) e^{ixt} dt \quad (j = \overline{1,m}),$$

то мы имеем

$$\Delta_{\overline{h}}^m f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^m \big(e^{ith_j} - 1\big) F(f;t) e^{ixt} dt. \tag{2.7}$$

Из (2.7), используя свойства преобразования Фурье и равенство Парсеваля, получаем

$$\left\|\Delta_{h}^{m} f(\cdot)\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = 2^m \left\| F(f;\cdot)\prod_{j=1}^{m}(1-\cos(\cdot)h_j)^{1/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = 2^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(f;t)|^2 \prod_{j=1}^{m}(1-\cos th_j)\,dt. \tag{2.8}$$

Для фиксированного $\tau,\ 0<\tau\le\pi/(2\sigma)$, используя соотношение (2.8), находим

$$\Omega_m^2(f^{(r)};\tau)_2 = \left(\frac{2}{\tau}\right)^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2r}\,|F(f;t)|^2 \left[\prod_{j=1}^{m}\int\limits_0^{\tau}(1-\cos th_j)\,dh_j\right]dt$$

$$= 2^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2r}\,|F(f;t)|^2 \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt \ge 2^m \int\limits_{|t|\ge\sigma} t^{2r}\,|F(f;t)|^2 \left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^m dt. \tag{2.9}$$

Воспользуясь континуальным аналогом неравенства Минковского [23, с. 32]

$$\left[\int\limits_0^h\left(\int\limits_{|t|\ge\sigma}|\varphi(t,\tau)|^2 d\tau\right)^{q/2}dt\right]^{1/q} \ge \left[\int\limits_{|t|\ge\sigma}\left(\int\limits_0^h|\varphi(t,\tau)|^q dt\right)^{2/q}d\tau\right]^{1/2},\ 0<q\le 2,$$

из (2.9) получаем

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)},\tau)_2 d\tau\right)^{1/q} \ge \left[\int\limits_0^h\left(2^m\int\limits_{|t|\ge\sigma} t^{2r}|F(f;t)|^2\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^m dt\right)^{q/2}d\tau\right]^{1/q}$$

$$= 2^{m/2}\left[\int\limits_0^h\left(\int\limits_{|t|\ge\sigma} t^{2r}|F(f;t)|^2\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^m dt\right)^{q/2}d\tau\right]^{1/q}$$

$$\ge 2^{m/2}\left[\int\limits_{|t|\ge\sigma}\left(\int\limits_0^h t^{rq}|F(f;t)|^q\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}d\tau\right)^{2/q}dt\right]^{1/2}$$

$$= 2^{m/2}\left[\int\limits_{|t|\ge\sigma}|F(f;t)|^2\left(t^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}d\tau\right)^{2/q}dt\right]^{1/2}. \tag{2.10}$$

Докажем, что функция

$$\psi(t) = t^{rq}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}d\tau \tag{2.11}$$

в области $Q=\{t:\ |t|\ge\sigma\}$ является монотонно возрастающей и $\min\{\psi(t):\ t\in Q\}=\psi(\sigma)$.

Дифференцируя функцию (2.11), получаем

$$\psi'(t) = rqt^{rq-1}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}d\tau + t^{rq}\int\limits_0^h\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}d\tau. \tag{2.12}$$

Воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2} = \frac{\tau}{t}\,\frac{d}{d\tau}\left(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\right)^{mq/2}$$

и выполнив интегрирование по частям во втором интеграле правой части равенства (2.12) с учетом условия теоремы получаем

$$\psi'(t)=rqt^{rq-1}\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\Big)^{mq/2}d\tau+t^{rq-1}\int\limits_0^h\tau\frac{d}{dt}\Big(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\Big)^{mq/2}d\tau$$

$$=t^{rq-1}\left[h\Big(1-\frac{\sin th}{th}\Big)^{mq/2}+(rq-1)\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin\tau t}{\tau t}\Big)^{mq/2}d\tau\right]\geq 0.$$

Поэтому из неравенства (2.10) следует, что

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)},\tau)_2d\tau\right)^{1/q}\geq 2^{m/2}\left(\sigma^{rq}\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\Big)^{mq/2}d\tau\right)^{1/q}\left(\int\limits_{|t|\geq\sigma}|F(f;\tau)|^2dt\right)^{1/2}$$

$$=2^{m/2}\sigma^rA_\sigma(f)\left(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\Big)^{mq/2}d\tau\right)^{1/q}. \tag{2.13}$$

В неравенстве (2.13), заменяя h на h/σ и сделав замену переменной $t=\sigma\tau$, имеем

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^q(f^{(r)},t/\sigma)_2d\tau\right)^{1/q}\geq 2^{m/2}\sigma^rA_\sigma(f)\left(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{1/q}. \tag{2.14}$$

С учетом определения величины (2.5) из неравенства (2.14) получаем оценку сверху

$$\chi_{\sigma,r,m,q}(h)\leq 2^{-m/2}\left(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}. \tag{2.15}$$

Для получения оценки снизу величины (2.5) рассмотрим целую функцию экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$ следующего вида [13]

$$g_\varepsilon(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big\{\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)x}{x}-\frac{\sin\sigma x}{x}\Big\},\quad 0<\varepsilon\leq\sigma(\pi/h-1).$$

Поскольку преобразование Фурье функции $\varphi(x)=\dfrac{\sin ax}{x}$, $(a>0)$ равна

$$F(\varphi,x)=\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \text{если } |x|<a;\quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \text{если } |x|=a;\quad 0,\ \text{если } |x|>a\right\},$$

то преобразование Фурье $g_\varepsilon(x)$ имеет вид

$$F(g_\varepsilon,x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \sigma<|x|<\sigma+\varepsilon\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если}\quad |x|=\sigma+\varepsilon\quad\text{или}\quad |x|=\sigma\\ 0, & \text{если}\quad |x|>\sigma+\varepsilon\quad\text{или}\quad |x|<\sigma.\end{cases}$$

Из (2.1) следует, что

$$A_\sigma^2(g_\varepsilon)=\int\limits_{|t|\geq\sigma}|F(g_\varepsilon,t)|^2dt=\int\limits_{-(\sigma+\varepsilon)}^{-\sigma}|F(g_\varepsilon,t)|^2dt+\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon}|F(g_\varepsilon,t)|^2dt=2\varepsilon.$$

Очевидно, что $g_\varepsilon \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, и так как функция $\sin x/x$ на отрезке $[0,\pi]$ является монотонно убывающей и имеет место формула $F(g_\varepsilon^{(r)},x) = (ix)^r F(g_\varepsilon,x)$, то, используя левую сторону неравенства (2.9), запишем

$$\Omega_m^2(g_\varepsilon^{(r)},t/\sigma)_2 = 2^{m+1}\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon} x^{2r}\Big(1-\frac{\sin(xt/\sigma)}{xt/\sigma}\Big)^m dx$$

$$\leq 2^{m+1}\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}\Big(1-\frac{\sin t(1+\varepsilon/\sigma)}{t(1+\varepsilon/\sigma)}\Big)^m = 2^m A_\sigma^2(g_\varepsilon)(\sigma+\varepsilon)^{2r}\Big(1-\frac{\sin t(1+\varepsilon/\sigma)}{t(1+\varepsilon/\sigma)}\Big)^m. \tag{2.16}$$

Из неравенства (2.16) для любых $\sigma > 0, m, r \in \mathbb{N}, 1/r < q \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/2$ получаем

$$\bigg(\int\limits_0^h \Omega_m^q(g_\varepsilon^{(r)},t/\sigma)_2 dt\bigg)^{1/q} \leq 2^{m/2}A_\sigma(g_\varepsilon)(\sigma+\varepsilon)^r\bigg(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin t(1+\varepsilon/\sigma)}{t(1+\varepsilon/\sigma)}\Big)^{mq/2}dt\bigg)^{1/q}. \tag{2.17}$$

Неравенство (2.17) запишем в виде

$$\frac{A_\sigma(g_\varepsilon)(\sigma+\varepsilon)^r}{\bigg(\int\limits_0^h \Omega_m^q(g_\varepsilon^{(r)},t/\sigma)_2 dt\bigg)^{1/q}} \geq 2^{-m/2}\bigg(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin t(1+\varepsilon/\sigma)}{t(1+\varepsilon/\sigma)}\Big)^{mq/2}dt\bigg)^{-1/q}$$

и, устремляя ε к нулю и переходя к верхней грани по всем функциям $g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, получаем

$$\chi_{\sigma,r,m,q}(h) \geq 2^{-m/2}\bigg(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\bigg)^{-1/q}. \tag{2.18}$$

Теперь из сопоставления неравенств (2.15) и (2.18) выводим равенство (2.6), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.

3. Значения средних ν-поперечников класса $W_q(\Phi)$

Пусть $\Phi(t)$, $t \geq 0$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_q(\Phi) := W(r,m,q;\Phi)$, где $r,m \in \mathbb{Z}_+$, $1/r < q \leq 2$, обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, r-е производные которых удовлетворяют условию

$$\bigg(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)},t)dt\bigg)^{1/q} \leq \Phi(h) \quad \forall h \in (0,\pi].$$

Следуя работам [13;14], через t_* обозначим величину аргумента $x \in (0,\infty)$ функции $\sin x/x$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $x = \operatorname{tg} x$. Простые вычисления показывают, что $4.49 < t_* < 4.51$. Полагаем

$$\Big(1-\frac{\sin x}{x}\Big)_* := \Big\{1-\frac{\sin x}{x},\ \text{если } 0 < x < t_*;\ 1-\frac{\sin t_*}{t_*},\ \text{если } x \geq t_*\Big\}, \tag{3.1}$$

$$A_\sigma(W_q(\Phi))_{L_2(\mathbb{R})} = \sup\big\{A_\sigma(f):\ f \in W_q(\Phi)\big\}.$$

В формулировке нижеследующей теоремы через $\overline{\pi}_\nu(\cdot)$ обозначим любой из средних поперечников: бернштейновский $\overline{b}_\nu(\cdot)$, колмогоровский $\overline{d}_\nu(\cdot)$ или линейный $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$.

Теорема 3.1. *Если для всех $\mu > 0$, $0 < h \le \pi$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$ мажоранта $\Phi(u)$ удовлетворяет условию*

$$\Phi^q\Big(\frac{h}{\mu}\Big)\int\limits_0^{\mu\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)_*^{mq/2}dt \le \Phi^q(h)\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt, \tag{3.2}$$

то для любого $\nu > 0$ имеют место равенства

$$\overline{\pi}_\nu(W_q(\Phi), L_2(\mathbb{R})) = A_{\nu\pi}(W_q(\Phi))_{L_2(\mathbb{R})} = 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi(1/\nu), \tag{3.3}$$

При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}f)$, где $\Lambda_{\nu\pi}f$ определяется из условия

$$F(\Lambda_{\nu\pi}f, \cdot) = \chi_{\nu\pi}(\cdot)F(f, \cdot),$$

$\big(F$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\nu\pi}$ — характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)\big)$, будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(\cdot)$.

Доказательство. Из результатов работы [8] следует, что $\overline{dim}(B_{\nu\pi,2}; L_2(\mathbb{R})) = \nu$. Из неравенства (2.13) для произвольного $f \in L_2(\mathbb{R})$ имеем

$$A_\sigma(f) \le 2^{-m/2}\sigma^{-r}\left(\int\limits_0^h \Omega_m^q(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/q}\left(\int\limits_0^h\Big(1-\frac{\sin\sigma t}{\sigma t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}. \tag{3.4}$$

Полагая в правой части (3.4) $h = \pi/\sigma$ и используя определение класса $W_q(\Phi)$, получаем оценку сверху среднего линейного поперечника

$$\overline{\delta}_\nu(W_q(\Phi), L_2(\mathbb{R})) \le A_{\nu\pi}(W_q(\Phi))_{L_2(\mathbb{R})} \le 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi(1/\nu). \tag{3.5}$$

Получим оценку снизу для среднего ν-поперечника по Бернштейну класса $W_q(\Phi)$. Для этого положим $\sigma_1 \overset{def}{=} \nu\pi(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, и рассмотрим шар

$$S_{\sigma_1,\rho_1} \overset{def}{=} B_{\sigma_1,2} \cap \rho_1\,\mathbb{B}L_2(\mathbb{R}) = \Big\{g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2} \colon \|g_{\sigma_1}\| \le \rho_1\Big\}$$

радиуса

$$\rho_1 = 2^{-m/2}\sigma_1^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/\sigma_1}\Big(1-\frac{\sin\sigma_1 t}{\sigma_1 t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi(\pi/\sigma_1).$$

При этом, как вытекает из результатов работы [8; 9],

$$\overline{d}_\nu(B_{\sigma_1,2} \cap \mathbb{B}L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1.$$

Согласно теореме Винера — Пэли [4, с. 66], произвольный элемент $g_{\sigma_1} \in B_{\sigma_1,2}$ представим в следующем виде:

$$g_{\sigma_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1} e^{ixt}\varphi(t)dt.$$

Имеет место равенство

$$\|g_{\sigma_1}\|^2=\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1}|\varphi(t)|^2dt:=\|\varphi\|^2_{L_2[-\sigma_1,\sigma_1]}.$$

Поскольку

$$\Delta^m_{\overline{h}}(g_{\sigma_1},x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1}e^{ixt}\prod_{j=1}^{m}(e^{ih_jt}-1)\varphi(t)dt,$$

то мы получаем

$$\|\Delta^m_{\overline{h}}g_{\sigma_1}(\cdot)\|^2=2^m\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\prod_{j=1}^{m}(1-\cos h_jt)|\varphi(t)|^2dt. \tag{3.6}$$

Из (3.6), согласно определению величины (2.3) с учетом равенства (3.1), имеем

$$\Omega_m(g_{\sigma_1},u)=\left[\frac{2^m}{u^m}\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\left(\prod_{j=1}^{m}\int\limits_0^u(1-\cos h_jt)dh_j\right)|\varphi(t)|^2dt\right]^{1/2}$$

$$=2^{m/2}\left(\int\limits_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\left(1-\frac{\sin ut}{ut}\right)^m|\varphi(t)|^2dt\right)^{1/2}\le 2^{m/2}\left(1-\frac{\sin\sigma_1u}{\sigma_1u}\right)^{m/2}\|g_{\sigma_1}\|^2. \tag{3.7}$$

Используя известное неравенство $\|g^{(r)}_{\sigma_1}\|\le\sigma_1^r\|g_{\sigma_1}\|$ [2, с. 137], верное для любого $g_{\sigma_1}\in B_{\sigma_1,2}$, из (3.7) получаем

$$\Omega_m(g^{(r)}_{\sigma_1},u)\le 2^{m/2}\sigma_1^r\left(1-\frac{\sin\sigma_1u}{\sigma_1u}\right)^{m/2}\|g_{\sigma_1}\|. \tag{3.8}$$

Покажем, что шар S_{σ_1,ρ_1} принадлежит классу $W_q(\Phi)$. С этой целью обе части неравенства (3.8) возведем в степень $q\,(1/r<q\le 2)$ и проинтегрируем по u в пределах от 0 до h:

$$\int\limits_0^h\Omega_m^q(g^{(r)}_{\sigma_1},u)du\le 2^{mq/2}\sigma_1^{rq}\|g_{\sigma_1}\|^q\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma_1u}{\sigma_1u}\right)_*^{mq/2}du. \tag{3.9}$$

Учитывая, что $g_{\sigma_1}\in S_{\sigma_1,\rho_1}$, из (3.9) получаем

$$\int\limits_0^h\Omega_m^q(g^{(r)}_{\sigma_1},u)du\le\frac{\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin\sigma_1u}{\sigma_1u}\right)_*^{mq/2}du}{\int\limits_0^{\pi/\sigma_1}\left(1-\frac{\sin\sigma_1u}{\sigma_1u}\right)^{mq/2}du}\Phi^q\left(\frac{\pi}{\sigma_1}\right). \tag{3.10}$$

Сделаем в правой части (3.10) замену переменной $\sigma_1u=v$:

$$\int\limits_0^h\Omega_m^q(g^{(r)}_{\sigma_1},u)du\le\frac{\int\limits_0^{\sigma_1h}\left(1-\frac{\sin v}{v}\right)_*^{mq/2}dv}{\int\limits_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin v}{v}\right)^{mq/2}dv}\Phi^q\left(\frac{\pi}{\sigma_1}\right). \tag{3.11}$$

Полагая $\pi/h\sigma_1 = 1/\mu$, из (3.11) и ограничения (3.2) получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^q(g_{\sigma_1}^{(r)}, u)du \le \frac{\int\limits_0^{\mu\pi}\Big(1-\dfrac{\sin v}{v}\Big)_*^{mq/2}dv}{\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\dfrac{\sin v}{v}\Big)^{mq/2}dv}\Phi^q\Big(\frac{h}{\mu}\Big) \le \Phi^q(h),$$

а это означает, что $S_{\sigma_1,\rho_1} \subset W_q(\Phi)$. Воспользовавшись определением ν-поперечника по Бернштейну, запишем

$$\overline{b}_\nu(W_q(\Phi), L_2(\mathbb{R})) \ge \overline{b}_\nu(S_{\sigma_1,\rho_1}, L_2(\mathbb{R}))$$

$$\ge \frac{\Phi(1/\nu(1+\varepsilon))(\nu(1+\varepsilon))^{-r}}{2^{m/2}\pi^r\left(\int\limits_0^{1/(\nu(1+\varepsilon))}\Big(1-\dfrac{\sin\nu\pi(1+\varepsilon)t}{\nu\pi(1+\varepsilon)t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{1/q}}. \tag{3.12}$$

Левая часть неравенства (3.12) не зависит от $\varepsilon > 0$, которое в силу нашего выбора является произвольным числом. Устремляя ε к нулю, из (3.12) имеем

$$\overline{b}_\nu(W_q(\Phi), L_2(\mathbb{R})) \ge 2^{-m/2}\pi^{-r}\nu^{-r}\left(\int\limits_0^{1/\nu}\Big(1-\frac{\sin\nu\pi t}{\nu\pi t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi\Big(\frac{1}{\nu}\Big)$$

$$= 2^{-m/2}(\pi\nu)^{-r+1/q}\left(\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1/q}\Phi\Big(\frac{1}{\nu}\Big). \tag{3.13}$$

Сопоставляя неравенства (3.5) и (3.13), с учетом соотношений (1.1) получаем равенство (3.3). Теорема 3.1 доказана.

Условие (3.2) теоремы 3.1 выглядит неестественным. Однако это не так. Покажем, что среди степенных функций $\Phi_*(u) = u^{\alpha/q}$, возрастающих на положительной полуоси, существует та, для которой выполняется неравенство (3.2) при любых значениях $\mu > 0$, $h \in (0,\pi]$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Для того чтобы неравенство* (3.2) *имело место с любыми заданными* $\mu > 0$, $0 < h \le \pi$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1/r < q \le 2$, *необходимо и достаточно, чтобы число* $\alpha = \alpha(m,q)$ *определялось по формуле*

$$\alpha = \pi\left(\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1}. \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha/q}$, где α определяется из (3.14), удовлетворяет ограничению (3.2). Для числа $\alpha := \alpha(m,q)$ имеем следующую границу значений:

$$1 < \alpha < mq + 1. \tag{3.15}$$

Подставляя Φ_* в (3.2), получим следующее неравенство:

$$\mu^\alpha \ge \int\limits_0^{\mu\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)_*^{mq/2}dt\left(\int\limits_0^{\pi}\Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2}dt\right)^{-1}. \tag{3.16}$$

С учетом (3.14) неравенство (3.16) примет вид

$$\frac{\pi}{\alpha}\mu^{\alpha} \geq \int\limits_{0}^{\mu\pi} \Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)_{*}^{mq/2} dt, \quad 0 \leq \mu < +\infty.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha}\mu^{\alpha} - \int\limits_{0}^{\mu\pi} \left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_{*}^{mq/2} dt \tag{3.17}$$

и покажем, что для всех $\mu \in [0,+\infty)$ функция $\varphi(\mu) \geq 0$. Рассуждения проведем для трех случаев: $0 \leq \mu \leq 1$, $\quad 1 < \mu \leq t_*/\pi$, $\quad t_*/\pi < \mu < +\infty$.

Пусть сначала $0 \leq \mu \leq 1$. Запишем функцию φ в окрестности нуля

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha}\mu^{\alpha}\Big[1-\Big(\frac{\pi^2}{6}\Big)^{mq/2}\frac{2}{mq+1}O(\mu^{mq+1-\alpha})\Big]. \tag{3.18}$$

Из (3.18) в связи с неравенством (3.15) следует, что в бесконечно малой окрестности нуля функция φ является положительной. Покажем, что на интервале $(0,1)$ функция φ знакопостоянна. Рассуждая методом от противного, предположим, что существует точка $\xi \in (0,1)$, в которой функция φ меняет знак. Поскольку из (3.17) следует, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, в силу теоремы Ролля заключаем, что производная

$$\varphi'(\mu) = \pi\Big[\mu^{\alpha-1} - \Big(1-\frac{\sin \pi\mu}{\pi\mu}\Big)^{mq/2}\Big] \tag{3.19}$$

должна иметь не менее двух различных нулей на интервале $(0,1)$ и, кроме того, $\varphi'(1) = 0$. Но это невозможно, поскольку $\varphi'(\mu)$ является разностью двух функций, одна из которых выпукла вниз, а другая выпукла вверх. Из геометрических соображений очевидно, что φ' может иметь на $(0,1)$ не более двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(\mu) \geq 0$ для любого $\mu \in [0,1]$.

Пусть теперь $1 < \mu \leq t_*/\pi$. В этом случае из (3.19) сразу следует, что $\varphi'(\mu) > 0$ на отрезке $(1, t_*/\pi]$. Таким образом, и в этом случае неравенство (3.16) доказано.

Наконец, пусть $t_*/\pi < \mu < +\infty$. Используя соотношение (3.1), из (3.17) получаем

$$\varphi(\mu) = \frac{\pi}{\alpha}\mu^{\alpha} - \int\limits_{0}^{t_*} \Big(1-\frac{\sin t}{t}\Big)^{mq/2} dt - (\mu\pi - t_*)\Big(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\Big)^{mq/2}.$$

Отсюда имеем

$$\varphi'(\mu) = \pi\Big[\mu^{\alpha-1} - \Big(1-\frac{\sin t_*}{t_*}\Big)^{mq/2}\Big] > 0, \quad \mu \in [t_*/\pi;\ +\infty).$$

Это означает, что на рассматриваемом промежутке $t_*/\pi < \mu < +\infty$ неравенство (3.16) также выполняется. Теорема 3.2 доказана.

Авторы благодарят рецензента за ценные советы и замечания, использованные в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.:Наука, 1969. 480 с.

3. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
4. **Ибрагимов И.И.** Теория приближения целыми функциями. Баку: Элм, 1979. 468 с.
5. **Ибрагимов И.И., Насибов Ф.Г.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.
6. **Попов В.Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. № 6. С. 65–73.
7. **Насибов Ф.Г.** О приближении в L_2 целыми функциями // Докл. АН Азербайджанской ССР. 1986. Т. XLII, № 4. С. 3–6.
8. **Магарил-Ильяев Г.Г.** Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1635–1656.
9. **Магарил-Ильяев Г.Г.** Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. СССР. 1991. Т. 318, № 1. С. 35–38.
10. **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** О приближении классов функций на прямой сплайнами и целыми функциями // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ: сб. тр. М.: Изд-во Ун-та Дружбы народов, 1991. С. 116–129.
11. **de Boor C., Schoenberg I.J.** Cardinal interpolation and spline functions VIII // Lect. Notes Math. 1976. Vol. 501. P. 1–79.
12. **Вакарчук С.Б.** О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журнал. 1994. Т. 47, № 9. С. 1123–1133.
13. **Vakarchuk S.B.** Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 27–39.
14. **Vakarchuk S.B., Zabutna V.I.** Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East J. Approx. 2008. Vol. 14, no. 4. P. 411–421.
15. **Шабозов М.Ш., Мамадов Р.** Наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ // Вестн. Хорог. гос. ун-та. 2001. Сер. 1, № 4. С. 76–81.
16. **Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Мамадов Р.** О точных значениях средних n-поперечников некоторых классов функций // Докл. АН Респ. Таджикистан. 2009. Т. 52, № 4. С. 247–254.
17. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Моск. гос. ун-та, 1976. 325 с.
18. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
19. **Pinkus A.** n-Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 252 p.
20. **Sun Yong Sheng.** On optimal interpolation for differentiable function class. I // Approx. Theory Appl. 1986. Vol. 2, no. 4. P. 49–54.
21. **Сунь Юн-шен, Ли Чунь.** Наилучшее приближение некоторых классов гладких функций на действительной оси сплайнами высшего порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 48, № 4. С. 100–109.
22. **Тихомиров В.М.** Об аппроксимативных характеристиках гладких функций // Тр. конф. по дифференц. уравнениям и вычисл. математике. Новосибирск: Наука, 1980. С. 183–188.
23. **Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G.** Inequality. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952. 346 p.

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
академик АН Республики Таджикистан
зав. отделом
Институт математики АН Республики Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Поступила 23.11.11

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич
канд. физ.-мат. наук
Таджикский национальный университет
e-mail: G_7777@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 18 № 4 2012

ИЗ ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

И. Е. Симонов

В томе 17, № 3 опубликована моя статья “Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_p, L_1 на отрезке”.

В ней допущены следующие неточности.

(1) Формулы для точной константы (1.3) на с. 283 должны выглядеть следующим образом:

$$C_p(n) = \begin{cases} \dfrac{2^n n!}{e}, & p = 0, \\ \dfrac{2^n n!}{(1+p)^{1/p}}, & p \in (0, 2n^2-1], \\ \dfrac{2^n n!}{1+c_*^2} \left\| t + \dfrac{c_*}{n} \right\|_p, & p \in (2n^2-1, \infty), \\ \dfrac{2^{n-1}(n-1)!}{\sqrt{n^2+1}-n}, & p = \infty. \end{cases} \tag{0.1}$$

(2) На с. 283 в 5-й строке снизу в предположении леммы должны быть более строгие ограничения на n: $n \in \mathbb{R},\ n \geq 2$.

(3) В формулировке теоремы 2 на с. 289 в связи с различным определением норм в формуле для нормы многочлена допущена неточность, данная формула должна выглядеть следующим образом:

$$\min_{\{a_k\}_{k=0}^{n-2}} \left\| t^n + c\, t^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k\, t^k \right\|_1 = \begin{cases} \dfrac{1+c^2}{2^n}, & \text{если } |c| \leq 1, \\ \dfrac{|c|}{2^{n-1}}, & \text{если } |c| \geq 1. \end{cases}$$

(4) Последняя формула используется для вычисления $C_p(n)$ на с. 289 в 7-й строке снизу, поэтому следует исправить

$$C_p(n) = 2^{n-1} n! \max\left\{ \max_{|c|\leq 1} \frac{2\left\| t + \frac{c}{n} \right\|_p}{1+c^2},\ \sup_{|c|\geq 1} \frac{\left\| t + \frac{c}{n} \right\|_p}{|c|} \right\},$$

(5) С учетом п. (3) формула в последней строке с. 289 должна выглядеть следующим образом:

$$C_p(n) = 2^n n! \max_{c\in[0,1]} \frac{\left\| t + \frac{c}{n} \right\|_p}{1+c^2}.$$

Поступило 15.05.2012

Том 18 № 4 2012

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ КРАСОВСКИЙ

4 апреля 2012 г. на 88-м году скончался Николай Николаевич Красовский, академик РАН, крупнейший математик современности.

Николай Николаевич родился 7 сентября 1924 г. в Свердловске в семье известного в городе врача. В 1949 г. окончил металлургический факультет Уральского политехнического института. В течение последующих 10 лет работал на кафедре высшей математики УПИ, в 1959–1970 гг. — в Уральском государственном университете. В 1964 г. был избран членом-корреспондентом, а в 1968 г. — действительным членом Академии наук СССР, ныне Российской академии наук. С 1970 по 1977 г. возглавлял Институт математики и механики Уральского научного центра АН СССР. Был членом Президиума РАН, бюро Отделения механики и процессов управления АН СССР, Президиума УрО РАН, входил в состав Президиума Национального комитета по теоретической и прикладной механике. В последние годы был главным научным сотрудником отдела динамических систем ИММ УрО РАН.

Фундаментальные труды Николая Николаевича по ключевым проблемам теории устойчивости и стабилизации движения, теории оптимального управления, теории управления в условиях неопределенности и конфликта внесли выдающийся вклад в сокровищницу мировой науки и послужили отправным пунктом для многих исследований в стране и за рубежом. Н. Н. Красовский — автор более 300 научных публикаций, в том числе 6 монографий. Он являлся продолжателем уральской научной школы по теории устойчивости движения, основателем и главой уральской научной школы по математической теории управления. Среди его учеников — инженеры и преподаватели, кандидаты и доктора наук, члены-корреспонденты и академики РАН. В школе Н. Н. Красовского получен ряд научных результатов мирового уровня.

Деятельность Н. Н. Красовского в должности директора Института математики и механики, его авторитет и энергия способствовали утверждению Института как ведущего научного центра в области математики и механики в нашей стране, обеспечили качественно новый уровень развития Института. Он инициировал и поддерживал многие направления прикладных исследований по механике и новой технике. Большое значение Николай Николаевич придавал оснащению Института первоклассной вычислительной техникой, развитию вычислительного дела в Уральском регионе.

Весомый вклад внес Н. Н. Красовский в математическое образование на Урале и как крупный организатор, и как блестящий лектор. В частности, в 60-е годы им были созданы в Уральском госуниверситете две новые кафедры под новые специализации: вычислительной математики и прикладной математики. Много времени и сил Николай Николаевич отдавал пропаганде достижений фундаментальной науки среди учёных-прикладников, инженеров, медиков. Для них он разработал и прочитал ряд курсов, содержащих в доступной форме идеи и новейшие методы в математике, механике и информатике. Символично, что американский Институт инженеров электротехники и электроники (IEEE), присуждая ему премию 2003 г., отметил его “новаторские идеи, которые были восприняты как теоретиками, так и инженерами-практиками”.

Научные достижения и преподавательская деятельность Н. Н. Красовского высоко оценены государством (Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, кавалер орденов Советского Союза и России) и научной общественностью (Большая золотая медаль РАН им. М. В. Ломоносова, Золотая медаль им. А. М. Ляпунова, Демидовская премия в области физико-математических наук, золотая медаль УрО РАН имени академика С. В. Вонсовского, доктор Honoris causa Венгерской академии наук, награда Международного общества инженеров электриков и электронщиков, лауреат премии программы Фонда содействия отечественной науки “Выдающиеся учёные”).

Николай Николаевич имел безоговорочный авторитет и в среде школьных учителей и работников народного просвещения. В 1985 г. именно он внес решающий вклад в компьютеризацию школ Свердловской области, принял активнейшее участие во внедрении в школьную программу курса информатики. Николай Николаевич всегда оставался настоящим уральцем, патриотом родного города и края.

Все знали высочайшую требовательность Николая Николаевича к себе, его скромность и приверженность нравственным ценностям.

Светлая память о блестящем ученом, замечательном человеке, Учителе навсегда останется в наших сердцах, его уроки останутся для нас непреходящей ценностью.

Том 18 № 4 2012

БАЛАГАНСКИЙ ВЛАДИМИР СЕРГЕЕВИЧ

7 апреля 2012 г. на 62-м году ушел из жизни ведущий научный сотрудник отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики УрО РАН Владимир Сергеевич Балаганский. В 1974 г. он окончил Уральский госуниверситет и в 1978 г. был принят в аспирантуру ИММ УрО РАН. Его научным руководителем был известный специалист по геометрической теории приближений Л.П. Власов. В.С. Балаганский внес значительный вклад в развитие общей теории аппроксимативных свойств множеств в банаховых пространствах, где им получены глубокие и, в основном, окончательные результаты. Ему принадлежит наиболее существенное на сегодняшний день продвижение в знаменитой и нерешенной до сих пор проблеме Н.В. Ефимова, С.Б. Стечкина и В. Кли о выпуклости чебышевских множеств в гильбертовых пространствах. В 1982 г. В.С. Балаганский защитил кандидатскую диссертацию, а в 1998 г. — докторскую. Он является автором более 70 научных работ как по фундаментальной, так и по прикладной математике. Владимир Сергеевич активно участвовал в разработке эффективных по затратам машинного времени итерационных методов формирования широких диаграмм направленности гибридных зеркальных антенн с фазовым управлением. Ему принадлежат тонкие исследования по антипроксиминальным множествам в банаховых пространствах.

В.С. Балаганский был талантливым математиком, он прекрасно владел как геометрическими, так и аналитическими методами. Ярким примером тому является разработанный им и содержащий оба этих начала метод доказательства непрерывности точной “константы” в неравенстве Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ как функции от аргумента старшего модуля непрерывности.

Владимир Сергеевич Балаганский был очень доброжелательным, щедрым и отзывчивым человеком, светлая память о нем навсегда сохранится в наших сердцах.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 18, 2012 г.

	№	Стр.
B. Amberg, L. S. Kazarin. ABA-groups with cyclic subgroup B	3	10–22
N. S. Chernikov. Three S. N. Chernikov's questions	3	23–25
A. Hasanov. Some new classes of inverse coefficient problems in nonlinear mechanics	1	20–33
B. Hofmann, P. Mathé. Some note on the modulus of continuity for ill-posed problems in Hilbert space	1	34–41
V. I. Trofimov. A note on the extendability of an isomorphism of subgraphs of a graph to an automorphism of the graph	3	26–29
Y. F. Wang. Sparse optimization methods for seismic wavefields recovery	1	42–55
А. Л. Агеев, Т. В. Антонова. О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации	1	56–68
А. Л. Агеев, В. В. Арестов, В. В. Васин. Международная конференция “Алгоритмический анализ неустойчивых задач (ААНЗ-2011)”	1	329–333
Р. Р. Акопян. Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций	4	3–13
Р. А. Алиев, А. Ф. Амрахова. Конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта	4	14–25
М. А. Альшанский. *см.* И. В. Мельникова	1	251–267
А. Ф. Амрахова. *см.* Р. А. Алиев	4	14–2
С. А. Аникин. О статистической устойчивости задач идентификации входов динамических систем	2	9–21
Н. Ю. Антонов. О порядке роста последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье функций из классов $\varphi(L)$	4	26–34
Т. В. Антонова. *см.* А. Л. Агеев	1	56–68
А. С. Апарцин. Полиномиальные интегральные уравнения Вольтерра I рода и функция Ламберта	1	69–81
В. В. Арестов, М. А. Филатова. О приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на классе дважды дифференцируемых функций в пространстве $L_2(0,\infty)$	4	35–50
В. В. Арестов. *см.* А. Л. Агеев	1	329–333
А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, В. А. Юдин. Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами	1	82–95
А. Г. Бабенко, Н. В. Долматова, Ю. В. Крякин. Точное неравенство Джексона со специальным модулем непрерывности	4	51–67
В. М. Бадков. Тригонометрические аналоги теоремы равносходимости Сегё для рядов Фурье — Якоби	4	68–79
Н. В. Байдакова. Оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных в конечном элементе Сие — Клафа — Точера	4	80–89
А. Б. Бакушинский, М. М. Кокурин, М. Ю. Кокурин. О схеме полной дискретизации некорректной задачи Коши в банаховом пространстве	1	96–108
В. С. Балаганский. Об антипроксиминальных множествах в пространстве Гротендика	4	90–103

Балаганский Владимир Сергеевич 4 331

Н. А. Барабошкина, В. М. Плещев, Н. И. Черных. Синтез электромагнитного поля на антенной решетке, I 4 104–109

В. А. Белоногов. К гипотезе о полупропорциональных характерах в группах $\mathrm{Sp}_4(q)$ 3 30–46

В. В. Беляев. Группы финитарных подстановок и топология поточечной сходимости 3 47–55

Ю. И. Бердышев. О некоторых задачах выбора очередности сближения управляемой системы с группой объектов 3 56–66

В. И. Бердышев. Характеристики скрытости движущегося объекта 4 110–119

М. С. Близорукова, В. И. Максимов. Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием 1 109–122

Д. И. Борисов. О $\mathcal{PT}$-симметричном волноводе с парой малых отверстий 2 22–37

А. Б. Бредихина. *см.* В. П. Танана 1 281–288

Д. С. Быков, Ю. Ф. Долгий. Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием 2 38–47

В. В. Васин. *см.* А. Л. Агеев 1 329–333

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей 1 123–138

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой невязкой сплошной среде 4 120–134

Ю. С. Волков, Е. Г. Пыткеев, В. Т. Шевалдин. Порядки аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами 4 135–144

Ю. С. Волков, В. Т. Шевалдин. Условия формосохранения при интерполяции сплайнами второй степени по Субботину и по Марсдену 4 145–152

Н. Н. Воробьев. О прямых произведениях классов конечных групп 3 67–74

М. Р. Габдуллин. Оценка среднего геометрического производной многочлена через его равномерную норму на отрезке 4 153–161

Р. Р. Гадыльшин, Е. А. Шишкина. О неравенствах Фридрихса для круга 2 48–61

Р. Н. Гарифуллин. Авторезонансное возбуждение солитона нелинейного уравнения Шредингера 2 62–66

Е. И. Грибанова. *см.* А. И. Короткий 2 154–169

С. Ю. Дадикина. *см.* А. М. Липанов 1 213–221

А. Р. Данилин, А. П. Зорин. Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления в ограниченной области 3 75–82

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстродействия 2 67–79

М. В. Дейкалова, В. В. Рогозина. Неравенство Джексона—Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраических многочленов на евклидовой сфере 4 162–171

А. М. Денисов. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент 1 139–146

Н. В. Долматова. *см.* А. Г. Бабенко 4 51–67

Ю. Ф. Долгий. *см.* Д. С. Быков 2 38–47

К. В. Емельянов. Разностная схема подгонки для сингулярно возмущенной задачи с точкой поворота 2 80–91

И. И. Еремин, А. А. Махнев. К столетию со дня рождения Сергея Николаевича Черникова 3 5–9

И. И. Еремин, Л. Д. Попов. Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании 3 83–89

А. А. Ершов. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле с уравнением Лапласа вне тонкого диска 2 92–107

К. С. Ефимов. Классификация вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ 3 90–98

А. В. Ефимов. Аналог теоремы Рудина для непрерывных радиальных положительно определенных функций нескольких переменных 4 172–179

С. В. Захаров. Регулярная асимптотика обобщенного решения стационарной системы Навье — Стокса 2 108–113

А. А. Зимовец. *см.* В. Н. Ушаков 4 271–285

М. Р. Зиновьева, В. Д. Мазуров. О конечных группах с несвязным графом простых чисел 3 99–105

А. П. Зорин. *см.* А. Р. Данилин 3 75–82

В. И. Зоркальцев. Октаэдрические и евклидовы проекции точки на линейное многообразие 3 106–118

Н. Д. Зюляркина. О графе коммутирования TI-подгрупп в унитарных группах 3 119–124

Е. Е. Иванко. Критерий устойчивости оптимальных решений минимаксной задачи о разбиении на произвольное число подмножеств при изменении мощности исходного множества 4 180–194

С. И. Кабанихин, М. А Шишленин. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений 1 147–164

В. В. Кабанов, А. В. Митянина. Реберные точные графы Деза 1 165–177

А. Л. Казаков. Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением 2 114–122

Л. А. Калякин. Анализ уравнений Блоха для модели ядерной намагниченности 2 123–140

Т. С. Камалтдинова. *см.* В. П. Танана 1 281–288

К семидесятилетию Владимира Васильевича Васина 1 5–19

К восмидесятилетию академика Российской академии наук Арлена Михайловича Ильина 2 5–8

О. М. Киселев. Оссциляции около сепаратрисы в уравнении Дюффинга 2 141–153

В. Н. Княгина, В. С. Монахов. О перестановочности n-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта 3 125–130

О. О. Коврижных. *см.* А. Р. Данилин 2 67–79

М. М. Кокурин. *см.* А. Б. Бакушинский 1 96–108

М. Ю. Кокурин. *см.* А. Б. Бакушинский 1 96–108

А. С. Кондратьев. Конечные группы с графом простых чисел, как у группы $Aut(J_2)$ 3 131–138

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов. Вполне приводимость некоторых $GF(2)A_7$ -модулей 3 139–143

А. И. Короткий, Е. И. Грибанова. Восстановление граничных управлений в гиперболических системах	2	154–169
А. И. Короткий, Д. О. Михайлова. Восстановление граничных управлений в параболических системах	1	178–197
М. Р. Королева. *см.* А. М. Липанов	1	213–221
Е. К. Костоусова. О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью	4	195–210
Ю. В. Крякин. *см.*А. Г. Бабенко	1	82–95
С. В. Кузнецов, К. С. Тихановцева. Множество неотрицательности наименьшей меры многочленов с нулевым взвешенным средним значением на отрезке	4	211–223
Н. А. Куклин. Метод Дельсарта в задаче о контактных числах пространств больших размерностей	4	224–239
Красовский Николай Николаевич	4	329–330
Ю. В. Крякин. *см.* А. Г. Бабенко	4	51–67
Е. Ф. Леликова. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром при части старших производных	2	170–178
А. С. Леонов. Полные вариации высших порядков для функций многих переменных и их применение в теории некорректных задач	1	198–212
А. М. Липанов, М. Р. Королева, С. Ю. Дадикина. Адаптированные цилиндрические координаты для внутренних объемов элементов конструкции РДТТ	1	213–221
Д. В. Лукьяненко, А. Г. Ягола. Использование многопроцессорных систем для решения обратных задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма 1-го рода	1	222–234
В. Д. Мазуров, А. И. Смирнов. Интерпретация противоречивых изображений на основе систем линейных неравенств	3	144–154
В. Д. Мазуров. *см.* М. Р. Зиновьева	3	99–105
В. И. Максимов. *см.* М. С. Близорукова	1	109–122
Дж. И. Мамедханов. О неравенствах разных метрик типа С.М. Никольского	4	240–248
А. А. Махнев. *см.* И. И. Еремин	3	5–9
А. А. Махнев, Д. В. Падучих. Графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Матье	3	155–163
А. А. Махнев, Л. Ю. Циовкина. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35,32,8;1,2,28\}$	1	235–241
Н. В. Медведев, С. С. Титов. О топологии эллиптических кривых	1	242–250
И. В. Мельникова, М. А. Альшанский. Обобщенная корректность задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения с мультипликативным шумом	1	251–267
А. В. Митянина. *см.* В. В. Кабанов	1	165–177
Д. О. Михайлова. *см.* А. И. Короткий	1	178–197
В. С. Монахов. *см.* В. Н. Княгина	3	125–130
И. Т. Мухаметьянов. О дистанционно-регулярных графах на множестве неединичных p-элементов группы $L_2(p^n)$	3	164–178
А. Л. Мыльников. Графы скрученных подмножеств	3	179–186
М. С. Нирова. О сильно регулярных графах с $b_1 < 24$	3	187–194

С. И. Новиков. Интерполяция на квадрате с минимальным значением равномерной нормы оператора Лапласа	4	249–257
В. Ю. Новокшенов. Специальные решения первого и второго уравнений Пенлеве и особенности многообразия данных монодромии	2	179–190
Я. Н. Нужин. Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца	3	195–200
С. С. Орлов. *см.* М. В. Фалалеев	4	286–297
А. В. Осипов. О свойствах типа полноты C-компактно-открытой топологии на $C(X)$	2	191–198
В. Н. Павленко, Т. А. Петраш. Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью	2	199–204
Д. В. Падучих. *см.* А. А. Махнев	3	155–163
Г. П. Панасенко. Частичная асимптотическая декомпозиция области для уравнения диффузии — дискретной абсорбции	2	205–211
В. С. Парфененкова. Исследование стохастических задач математической физики	2	212–221
И. В. Першин. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе	1	268–272
Т. А. Петраш. *см.* В. Н. Павленко	2	199–204
В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью	2	222–231
В. М. Плещев. *см.* Н. А. Барабошкина	4	104–109
М. И. Поберий. *см.* М. Ю. Хачай	3	247–260
Л. Д. Попов. Итеративные методы нахождения равновесия в частной модели обмена Эрроу — Дебре — Стоуна	3	201–207
Л. Д. Попов. *см.* И. И. Еремин	3	83–89
А. Л. Попович. Представление решеток решетками конгруэнций полугрупп без идемпотентов	3	208–217
Е. Г. Пыткеев. *см.* Ю. С. Волков	4	135–144
В. В. Рогозина. *см.* М. В. Дейкалова	4	162–171
Е. А. Рогозинников. О возможности построения кривой по заданной группе гомеоморфизмов	3	218–229
В. Г. Романов. Двумерная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения электродинамики	1	273–280
Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом	2	265–280
В. М. Селькин. О факторизациях подформаций однопорожденных наследственных ω-насыщенных формаций	2	232–237
Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров. О последовательных приближениях решений вырожденной задачи Коши	2	238–244
Д. Н. Сидоров. *см.* Н. А. Сидоров	2	238–244
И. Е. Симонов. Из письма в редакцию	4	328
В. Д. Скарин. О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования	3	230–241

А. И. Смирнов. *см.* В. Д. Мазуров.	3	144–154
С. А. Стасюк. Наилучшее приближение периодических функций нескольких переменных из классов $MB^{\omega}_{p,\theta}$ в равномерной метрике	4	258–266
Ю. Н. Субботин. Односторонние поперечники классов гладких функций	4	267–270
Ю. Н. Субботин. *см.* В. П. Верещагин.	1	123–138
Ю. Н. Субботин. *см.* В. П. Верещагин.	4	120–134
Б. И. Сулейманов. Асимптотика универсального специального решения Гуревича — Питаевского уравнения Кортевега — де Вриза при $\lvert x\rvert \to \infty$	2	245–253
О. А. Султанов. Устойчивость моделей авторезонанса при постоянно действующих возмущениях	2	254–264
В. П. Танана, А. Б. Бредихина, Т. С. Камалтдинова. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций	1	281–288
Е. Е. Таширова. *см.* В. Г. Пименов.	2	222–231
С. С. Титов. *см.* Н. В. Медведев.	1	242–250
К. С. Тихановцева. *см.* С. В. Кузнецов.	4	211–223
А. А. Трофимук. О фиттинговых подгруппах конечной разрешимой группы	3	242–246
О. Н. Ульянов. *см.* Л. И. Рубина.	2	265–280
В. Н. Ушаков, А. А. Зимовец. К вопросу о слабой инвариантности множеств относительно дифференциального включения, порожденного управляемой системой	4	271–285
М. В. Фалалеев, С. С. Орлов. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения	4	286–297
М. А. Филатова. *см.* В. В. Арестов.	4	35–50
М. Ю. Хачай, М. И. Поберий. Вычислительная сложность и аппроксимируемость серии геометрических задач о покрытии	3	247–260
И. В. Храмцов. *см.* А. С. Кондратьев.	3	139–143
А. П. Хромов, Г. В. Хромова. О сходимости метода М. М. Лаврентьева для интегрального уравнения первого рода с инволюцией	1	289–297
Г. В. Хромова. *см.* А. П. Хромов.	1	289–297
И. А. Цепелев. Аппроксимация негладких решений ретроспективной задачи для модели конвекции-диффузии	2	281–290
Л. Ю. Циовкина. *см.* А. А. Махнев.	1	235–241
А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов. Об одной задаче маршрутизации с внутренними работами	1	298–317
А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов. Об одной итерационной процедуре решения задачи маршрутизации с ограничениями	3	261–281
А. Г. Ченцов. *см.* А. А. Ченцов.	1	298–317
А. Г. Ченцов. *см.* А. А. Ченцов.	3	261–281
А. Г. Ченцов. Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров	4	298–314
Н. И. Черных. *см.* Н. А. Барабошкина.	4	104–109
Н. И. Черных. *см.* В. П. Верещагин.	1	123–138
Н. И. Черных. *см.* В. П. Верещагин.	4	120–134

П. А. Чистяков. Многошаговый итерационный метод решения линейных операторных уравнений в банаховых пространствах 1 318–328

М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов. О точных значениях средних ν-поперечников некоторых классов целых функций 4 315–327

В. Ю. Шапрынский. Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп 3 282–286

В. Т. Шевалдин. *см.* Ю. С. Волков. 4 135–144

В. Т. Шевалдин. *см.* Ю. С. Волков. 4 145–152

Г. И. Шишкин. Обусловленность разностной схемы метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии 2 291–304

Е. А. Шишкина. *см.* Р. Р. Гадыльшин. 2 48–61

М. А Шишленин. *см.* С. И. Кабанихин. 1 147–164

А. Е. Эльберт. Асимптотический анализ уравнения диффузии-поглощения с быстро и сильно осциллирующим коэффициентом поглощения в двумерном случае 2 305–311

В. А. Юдин. *см.*А. Г. Бабенко. 1 82–95

Г. А. Юсупов. *см.* М. Ш. Шабозов. 4 315–327

А. Г. Ягола. *см.* Д. В. Лукьяненко. 1 222–234

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН
им. Н. Н. Красовского

Том 18 № 4 2012

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 15.11.12. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 39, 5. Уч.-изд. л. 32,2. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226

M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. On a reconstruction algorithm for the trajectory and control in a delay system 1 109–122

D. I. Borisov. On a $\mathcal{PT}$-symmetric waveguide with a pair of small holes 2 22–37

D. S. Bykov, Yu. F. Dolgii. Error estimate for approximations of an optimal stabilizing control in a delay system 2 38–47

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. On a routing problem with internal tasks. 1 298–317

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. On an iterative procedure for solving a routing problem with constraints 3 261–281

A. G. Chentsov. Tier mappings and ultrafilter-based transformations 4 298–314

N. S. Chernikov. Three S. N. Chernikov's questions 3 23–25

P. A. Chistiakov. Multistep iterative method for solving linear operator equations in Banach spaces 1 318–328

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotic representation of a solution to a singular perturbation linear time-optimal problem 2 67–79

A. R. Danilin, A. P. Zorin. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem in a bounded domain 3 75–82

M. V. Deikalova, V. V. Rogozina. Jackson — Nikol'skii inequality between the uniform and integral norms of algebraic polynomials on a Euclidean sphere 4 162–171

A. M. Denisov. Inverse problem for a hyperbolic equation with a nonlocal boundary condition containing a delay argument 1 139–146

K. S. Efimov. Classification of amply regular graphs with $b_1 = 6$ 3 90–98

A. V. Efimov. An analog of Rudin's theorem for continuous radial positive definite functions of several variables 4 172–179

A. E. El'bert. Asymptotic analysis of the diffusion–absorption equation with fast and strongly oscillating absorbtion coefficient in the two-dimensional case .. 2 305–311

K. V. Emel'yanov. Difference fitting scheme for a singularly perturbed problem with turning point 2 80–91

I. I. Eremin,A. A. Makhnev. On the 100th Birthday of Sergei Nikolaevich Chernikov 3 5–9

I. I. Eremin, L. D. Popov. Interior penalty functions and duality in linear programming 3 83–89

A. A. Ershov. Asymptotic expansion of the Dirichlet problem with Laplace equation outside a thin disk 2 92–107

M. V. Falaleev, S. S. Orlov. Generalized solutions of singular integro-differential equations in Banach spaces and their applications 4 286–197

M. R. Gabdullin. An estimate of the geometric mean of the derivative of a polynomial in terms of its uniform norm on a closed interval 4 153–161

R. N. Garifullin. Autoresonance excitation of a soliton of the nonlinear Schrödinger equation 2 62–66

A. Hasanov. Some new classes of inverse coefficient problems in nonlinear mechanics 1 20–33

B. Hofmann, P. Mathé. Some note on the modulus of continuity for ill-posed problems in Hilbert space	1	34–41
I. I. Ivanko. A stability criterion for optimal solutions of a minimax problem about a partition into an arbitrary number of subsets under varying cardinality of the initial set	4	180-194
S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin. On the use of a priori information in coefficient inverse problems for hyperbolic equations	1	147–164
V. V. Kabanov, A. V. Mityanina. Strictly Deza line graphs	1	165–177
L. A. Kalyakin. Analysis of the Bloch equations for the nuclear magnetization model	2	123–140
A. L. Kazakov. Application of characteristic series for constructing solutions of nonlinear parabolic equations and systems with degeneracy	2	114–122
M. Yu. Khachai, M. I. Poberii. The computational complexity and approximability of a series of geometric covering problems	3	247–260
A. P. Khromov, G. V. Khromova. On the convergence of the Lavrent'ev method for an integral equation of the first kind with involution	1	289–297
O. M. Kiselev. Oscillations near a separatrix in the Duffing equation	2	141–153
V. N. Knyagina, V. S. Monakhov. On the permutability of n-maximal subgroups with Schmidt subgroups	3	125–130
A. S. Kondrat'ev. Finite groups having the same prime graph as the group $Aut(J_2)$	3	131–138
A. S. Kondrat'ev, I. V. Khramtsov. The complete reducibility of some $GF(2)A_7$-modules	3	139–143
A. I. Korotkii, E. I. Gribanova. Reconstruction of boundary controls in hyperbolic systems	2	154–169
A. I. Korotkii, D. O. Mikhailova. Reconstruction of boundary controls in parabolic systems	1	178–197
E. K. Kostousova. On polyhedral estimates for reachable sets of differential systems with bilinear uncertainty	4	195–210
N. A. Kuklin. Delsarte method in the problem on kissing numbers in high-dimensional spaces	4	224–239
S. V. Kuznetsov, K. S. Tikhanovtseva. Nonnegativity set of smallest measure for polynomials with zero weighted mean value on a closed interval	4	211–223
E. F. Lelikova. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter at some of the highest derivatives	2	170–178
A. S. Leonov. Higher-order total variations for functions of several variables and their application in the theory of ill-posed problems	1	198–212
A. M. Lipanov, M. R. Koroleva, S. Yu. Dadikina. Adapted cylindrical coordinates for internal volumes of structural elements of a solid-propellant rocket engine	1	213–221
D. V. Luk'yanenko, A. G. Yagola. Application of multiprocessor systems for solving inverse problems leading to Fredholm integral equations of the first kind	1	222–234

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Mathieu graph 3 155–163

A. A. Makhnev, L. Yu. Tsiovkina. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ 1 235–241

J. I. Mamedkhanov. On S.M. Nikol'skii type inequalities between different metrics 4 240–248

V. D. Mazurov, A. I. Smirnov. Interpretation of contradictory images by means of systems of linear inequalities 3 144–154

N. V. Medvedev, S. S. Titov. On the topology of elliptic curves 1 242–250

I. V. Melnikova, M. A. Alshanskiy. The generalized well-posedness of the Cauchy problem for an abstract stochastic equation with multiplicative noise . . . 1 251–267

I. T. Mukhamet'yanov. On distance-regular graphs on the set of nontrivial p-elements of the group $L_2(p^n)$ 3 164–178

A. L. Myl'nikov. Graphs of twisted subsets 3 179–186

M. S. Nirova. On strongly regular graphs with $b_1 < 24$ 3 187–194

S. I. Novikov. Interpolation on a square with a minimum value of the uniform norm of the Laplace operator 4 249–257

V. Yu. Novokshenov. Special solutions of the first and second Painlevé equations and singularities of the monodromy data manifold 2 179–190

Ya. N. Nuzhin. Lie rings defined by the root system and family of additive subgroups of the main ring 3 195–200

A. V. Osipov. On the completeness properties of the C-compact-open topology on $C(X)$ 2 191–198

G. P. Panasenko. Partial asymptotic decomposition of the domain for the diffusion–discrete absorption equation 2 205–211

V. S. Parfenenkova. Investigation of stochastic problems of mathematical physics 2 212–221

V. N. Pavlenko, T. A. Petrash. Periodic solutions of the vibrating string equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions and a discontinuous nonlinearity 2 199–204

I. V. Pershin. Asymptotics of a solution to the heat equation with a singularity at the boundary 1 268–272

V. G. Pimenov, E. E. Tashirova. Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type 2 222–231

L. D. Popov. Iterative methods for equilibrium search in the partial Arrow–Debreu–Stone exchange model . . . . . . 3 201—207

A. L. Popovich. Representation of lattices by congruence lattices of semigroups without idempotents 3 208–217

E. A. Rogozinnikov. On the possibility of constructing a curve for a given group of homeomorphisms 3 218–229

V. G. Romanov. Two-dimensional problem for an integrodifferential equation of electrodynamics 1 273–280

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. Solution of nonlinear partial differential equations by the geometric method	2	265–280
V. M. Selkin. Factorizations theory of one-generated Bear ω-local formations	2	232–237
M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov. On the exact values of mean ν-widths of some classes of entire functions	4	315–327
V. Yu. Shaprynskii. The periodicity of special elements in the lattice of semigroup varieties	3	282–286
G. I. Shishkin. Conditioning of a difference scheme of the solution decomposition method for a singularly perturbed convection–diffusion equation	2	291–304
N. A. Sidorov, D. N. Sidorov. On successive approximations of solutions of a singular Cauchy problem	2	238–244
I. E. Simonov. From a Letter to the Editor	4	328
V. D. Skarin. On the application of a regularization method for the correction of improper problems of convex programming	3	230–241
S. A. Stasyuk. Best approximation of periodic functions of several variables from the classes $MB^{\omega}_{p,\theta}$ in the uniform metric	4	258–266
Yu. N. Subbotin. One-sided widths of classes of smooth functions	4	267–270
B. I. Suleimanov. Asymptotics of the Gurevich–Pitaevskii universal special solution of the Korteweg–de Vries equation as $\lvert x\rvert \to \infty$	2	245–253
O. A. Sultanov. Stability of autoresonance models under persistent disturbances	2	254–264
V. P. Tanana, A. B. Bredikhina, T. S. Kamaltdinova. On an error estimate for an approximate solution or an inverse problem in the class of piecewise smooth functions	1	281–288
V. I. Trofimov. A note on the extendability of an isomorphism of subgraphs of a graph to an automorphism of the graph	3	26–29
A. A. Trofimuk. On fitting subgroups of a finite solvable group	3	242–246
I. A. Tsepelev. Approximation of nonsmooth solutions of a retrospective problem for an advection–diffusion model	2	281–290
V. N. Ushakov, A. A. Zimovets. On the question of the weak invariance of sets with respect to a differential inclusion generated by a control system	4	271–285
V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Statement and solution of a boundary value problem in the class of planar–helical vector fields	1	123–138
V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. On the mechanics of helical flows in an ideal incompressible viscous continuous medium	4	120–134
Yu. S. Volkov, E. G. Pytkeev, V. T. Shevaldin. Orders of approximation by local exponential splines	4	135–144
Yu. S. Volkov, V. T. Shevaldin. Shape preserving conditions for quadratic spline interpolation in the sense of Subbotin and Marsden	4	145–152
N. N. Vorob'ev. On direct products of classes of finite groups	3	67–74
Y. F. Wang. Sparse optimization methods for seismic wavefields recovery	1	42–55