РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 16, № 4 2010

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

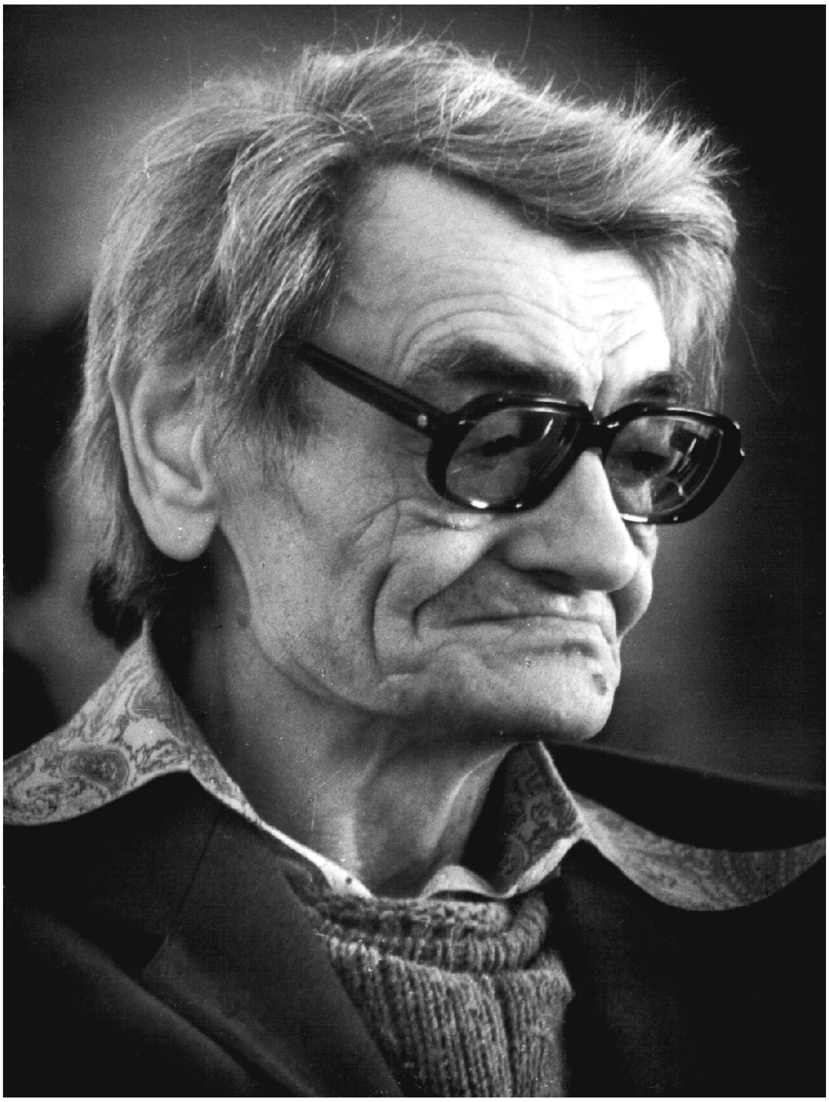
ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 16 № 4 2010

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, № 4. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. 318 с.

ISSN 0134–4889



Стечкин Сергей Борисович

(1920 – 1995)

Том 16 № 4 2010

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.5

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАБОТАХ С. Б. СТЕЧКИНА И ИХ РАЗВИТИЕ

В. И. Иванов

Излагается история развития важного направления теории приближения периодических функций, посвященного прямым и обратным теоремам, существенный вклад в которое внес С. Б. Стечкин. Ставятся новые задачи.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, неравенство Джексона — Стечкина, обратное неравенство.

V. I. Ivanov. Direct and inverse theorems in approximation theory for periodic functions in S.B. Stechkin's papers and the development of these theorems.

S.B. Stechkin made a considerable contribution to an important aspect of approximation theory for periodic functions concerned with direct and inverse theorems. We present the history of development of this research area and pose new problems.

Keywords: best approximation, module of continuity, Jackson–Stechkin inequality, inverse inequality.

Моему учителю С. Б. Стечкину
посвящается

Предисловие

Настоящая работа написана на основе доклада, сделанного автором на Международной конференции "Теория приближений", посвященной 90-летию Сергея Борисовича Стечкина и проходившей 23 – 26 августа в Москве, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

С. Б. Стечкин был моим учителем. Наше общение продолжалось 25 лет. В 1970 г. меня, студента 3-го курса механико-математического факультета Московского университета, он ввел в чудесный мир теории приближений и заботливо вел по тернистому пути обретения новых знаний до защиты кандидатской диссертации в 1977 г. И в дальнейшем он внимательно отслеживал и поддерживал мои научные исследования вплоть до защиты докторской диссертации в 1994 г. В 1995 г. Сергея Борисовича не стало. Я бесконечно благодарен своему учителю за все, что он для меня сделал.

Когда оргкомитет конференции предложил мне сделать доклад о работах С. Б. Стечкина по теории приближения функций, я не сразу оценил сложность поставленной задачи. Его благодарные ученики, особенно старшее поколение, прекрасно популяризировали научные достижения Сергея Борисовича. Вышли его избранные труды [30] с содержательными комментариями, выпуски журналов "Успехи математических наук" [31], "Труды Института математики и механики УрО РАН" [32], "Фундаментальная и прикладная математика" [33] с прекрасными обзорами по основным направлениям научной деятельности Сергея Борисовича, в том числе и по теории приближения функций. Чтобы не повторяться, мною для доклада были выбраны, ставшие классическими, результаты С. Б. Стечкина, посвященные прямым и обратным теоремам теории приближения периодических функций. При подготовке доклада я следовал известному принципу Сергея Борисовича. Вначале рассказать, что было известно до Сергея Борисовича, затем — что сделал Сергей Борисович, и, наконец, что сделано уже после него и следовало бы, на мой взгляд, еще сделать. Сергей Борисович работал только в пространстве непрерывных функций. Мною будет отслеживаться вся шкала пространств L_p, $0 < p \le \infty$, но я не буду касаться результатов для производных и сопряженных функций.

Результаты, которые будут затронуты, Сергей Борисович получил в период с 1947 г. по 1956 г. в достаточно молодом возрасте. Они позволили ему сразу стать признанным специалистом по теории приближений и в дальнейшем оставаться лидером, определявшим направление развития теории приближений, осуществлявшим экспертизу получаемых результатов, плодотворно работавшим до конца своих дней.

Основные определения и обозначения

В работе будут использоваться стандартные обозначения:
$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ — множества действительных, целых и натуральных чисел;
$\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ — одномерный тор;
$L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < \infty$, — пространство действительных 2π-периодических измеримых по Лебегу функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty$;
$L_\infty(\mathbb{T}) = \mathrm{C}(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных функций с нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : \ x \in \mathbb{T}\}$;
$T_n = \left\{t(x) : \ t(x) = \sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}, \ c_{-k} = \overline{c_k}\right\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — подпространство тригонометрических полиномов порядка n;
$E_n(f)_p = \inf\left\{\|f - t\|_p : \ t \in T_{n-1}\right\}$, $0 < p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$, — величина наилучшего приближения функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами из T_{n-1};
$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$, $\Delta_t^k f(x) = \Delta_t(\Delta_t^{k-1} f(x)) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \binom{k}{i} f(x+it)$, $k \in \mathbb{N}$, — первая и k-я разности функции f;
$\omega(\delta, f)_p = \sup\left\{\|\Delta_t f(x)\|_p : \ |t| \le \delta\right\}$, $\omega_k(\delta, f)_p = \sup\left\{\left\|\Delta_t^k f(x)\right\|_p : \ |t| \le \delta\right\}$ — первый и k-й модули непрерывности функции $f \in L_p(\mathbb{T})$;
$(f * g)(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt$ — свертка периодических функций f и g;
$a_n = O(b_n)$ для положительных последовательностей a_n, b_n, если для некоторой постоянной $c > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $a_n \le c\,b_n$;
$a_n \asymp b_n$, если $a_n = O(b_n)$ и $b_n = O(a_n)$;
$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ — биномиальные коэффициенты;
c — абсолютная положительная постоянная, $c_{p,k}$ — положительная постоянная, зависящая от указанных параметров.

Понятие величины наилучшего приближения принадлежит П. Л. Чебышеву, первый модуль непрерывности ввел А. Лебег, а k-й модуль непрерывности — С. Н. Бернштейн [5].

Прямые теоремы

В теории приближения функций принято выделять аппроксимативные свойства функции, определяемые скоростью ее приближения, и структурные гладкостные свойства функции, отражающие ее внутренние свойства. Под прямыми теоремами понимают неравенства, в которых аппроксимативные свойства функции оцениваются через ее структурные свойства. В нашем случае аппроксимативные свойства функции будут характеризоваться величиной наилучшего приближения или скоростью приближения линейным методом, а структурные свойства функции — ее модулями непрерывности.

Первая прямая теорема была доказана Д. Джексоном [48] в 1911 г.

Теорема 1. *Для любой $f \in C(\mathbb{T})$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_\infty \le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_\infty. \tag{1}$$

Неравенства подобного типа с первым модулем непрерывности принято называть неравенствами Джексона. В 1937 г. в работе Е. Кваде [49] неравенство Джексона было распространено на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$.

Теорема 2. *Для любой* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{2}$$

Для доказательства (1) Д. Джексон использовал линейный метод приближения, известный как метод Джексона:

$$J_{m,2}(x,f) = (f * J_{m,2})(x) \in T_{n-1},$$

где

$$J_{m,2}(t) = c_m\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} J_{m,2}(t)dt = 1, \quad m = \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

— ядро Джексона.

Для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, справедлива оценка

$$\|f(x) - J_{m,2}(x,f)\|_p \le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p,$$

из которой вытекают неравенства (1), (2).

В 1945 г. А. Зигмунд [55] установил, что если $\omega_2(\delta, f)_\infty = O(\delta)$, то $E_n(f)_\infty = O(1/n)$.

В общем случае прямую теорему со вторым модулем непрерывности опубликовал в 1947 г. Н. И. Ахиезер в монографии [1].

Теорема 3. *Для любой* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c\,\omega_2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{3}$$

Неравенство (3) можно также доказать с помощью метода Джексона.

В 1947 г. С. Н. Бернштейн [6] установил, что если $\omega_k(\delta, f)_\infty = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \le k$, то $E_n(f)_\infty = O(1/n^\alpha)$. Таким образом, возникала твердая уверенность, что неравенство (3) справедливо и для модулей непрерывности произвольного порядка. Основная трудность этого обобщения состояла в том, что метод Джексона, будучи положительным, не может приближать нетривиальные функции со скоростью большей, чем $O(1/n^2)$, в то время как модуль непрерывности $\omega_k(\pi/n, f)_p$ может стремиться к нулю с большей скоростью. Позже Р. М. Тригуб [43] полностью охарактеризовал аппроксимативные возможности метода Джексона:

$$\|f(x) - J_{m,2}(x,f)\|_p \asymp \omega_2\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Возникшую трудность смог преодолеть С. Б. Стечкин, работая над кандидатской диссертацией “ О порядке наилучших приближений непрерывных функций ”, защищенной им в 1948 г. Ему удалось построить необходимый метод приближения. Назовем его методом Стечкина. Хотя С. Б. Стечкин доказывает неравенство (3) для модуля непрерывности произвольного порядка в пространстве непрерывных функций, но его рассуждения справедливы и для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, поэтому сформулируем утверждение с наибольшей полнотой.

Теорема 4. *Для любой* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, $k \ge 3$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c_k\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{4}$$

Неравенства вида (4) с модулем непрерывности произвольного порядка принято называть неравенствами Джексона — Стечкина. Неравенство (4) при $p = \infty$ было опубликовано С. Б. Стечкиным без доказательства в 1949 г. в [24] и с полным доказательством — в 1951 г. в [25].

Автору при работе над кандидатской диссертацией С. Б. Стечкиным была поставлена задача распространить неравенство (2) на пространства $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$. Над аналогичной задачей параллельно работали одесские математики Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов и П. Освальд. В 1975 г. вышли работы [10] и [34], в которых независимо доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c_p\, \omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{5}$$

Для доказательства (5) было использовано промежуточное приближение кусочно-постоянными функциями. Полный аналог неравенства Джексона — Стечкина в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, получен Э. А. Стороженко и П. Освальдом [35] в 1978 г. Они использовали промежуточное приближение кусочно-многочленными функциями и опирались на установленное ими обобщение теоремы Уитни для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$.

Теорема 6. *Для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $k \ge 2$ выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \le c_{p,k}\, \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p.$$

Таким образом, прямые теоремы для наилучших приближений периодических функций и модулей непрерывности произвольного порядка были установлены с максимальной полнотой.

Согласно известной теореме Бернштейна $E_n(f)_p$ — левая часть неравенства (4) может быть любой монотонно убывающей к нулю последовательностью. В то время как последовательность $\omega_k(\pi/n, f)_p$ в правой части неравенства (4) имеет более регулярное поведение и не может стремиться к нулю для нетривиальной функции быстрее, чем $O(n^{-k})$. Возникает предположение, что (4) можно усилить, поставив в левую часть этого неравенства некоторое среднее из наилучших приближений. Это действительно так. Отметим два результата.

В 1965 г. М. Ф. Тиман [39; 41] для $1 < p < \infty$ доказал неравенство

$$\frac{1}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma k-1} E_\nu^\gamma(f)_p\right\}^{1/\gamma} \le c_{p,k}\, \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p, \quad \gamma = \max(2, p). \tag{6}$$

В 1979 г. Г. И. Натансон и М. Ф. Тиман [18] доказали, что для $1 \le p \le \infty$

$$\left(\prod_{\nu=1}^{n} E_\nu(f)_p\right)^{1/n} \le c_k\, \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{7}$$

Неравенство (7) справедливо и для $0 < p < 1$.

Вернемся вновь к неравенству Джексона — Стечкина (4). Линейный метод приближения Стечкина имеет вид

$$S_{m,q}(x, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \bigl(f(x) - \Delta_t^{2q-2} f(x)\bigr) J_{m,q}(t)\,dt \in T_{n-1},$$

где

$$J_{m,q}(t) = c_m\left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right)^{2q}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} J_{m,q}(t)\,dt = 1, \quad m = \left[\frac{n-1}{q} + 1\right],$$

— обобщенное ядро Джексона.

Для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, $q \ge 2$ справедлива оценка

$$\|f(x) - S_{m,q}(x,f)\|_p \le c_q\, \omega_{2q-2}\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p,$$

из которой вытекает неравенство (4).

Обсудим аппроксимативные возможности метода Стечкина.

З а д а ч а 1. Доказать, что для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, $q \ge 2$ справедливо порядковое равенство

$$\|f(x) - S_{m,q}(x,f)\|_p \asymp \omega_{2q-2}\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p.$$

Метод Стечкина может быть записан в виде свертки

$$S_{m,q}(x,f) = (f * S_{m,q})(x)$$

с ядром Стечкина

$$S_{m,q}(t) = \sum_{l=1}^{2q-2} (-1)^{l+1} \binom{2q-2}{l} S^l_{2q-2}(t),$$

где

$$S^l_{2q-2}(t) = \frac{1}{l} \sum_{s=0}^{l-1} J_{m,q}\left(\frac{t + 2\pi s}{l}\right).$$

Определим семейство линейных полиномиальных операторов Стечкина

$$S_{m,q}(x,\lambda,f) = \frac{1}{2q(m-1)+1} \sum_{k=0}^{2q(m-1)} f(\lambda + t_k) S_{m,q}(\lambda - x + t_k),$$

где $t_k = 2\pi k/(2q(m-1)+1)$. Функция $S_{m,q}(x,\lambda,f)$ по переменному x есть полином порядка $n-1$; по параметру λ она имеет период $2\pi/(2q(m-1)+1)$.

Конструкция таких семейств операторов принадлежит К. В. Руновскому [20]. С помощью такой конструкции с другим ядром в 1993 г. ему удалось [21; 22] получить простое доказательство неравенства Джексона — Стечкина в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$.

Для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \le \infty$, справедливо неравенство

$$E_n(f)_p \le \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \|f(x) - S_{m,q}(x,\lambda,f)\|_p^p d\lambda\right)^{1/p}.$$

З а д а ч а 2. Доказать, что для любой $f \in L_p(\mathbb{T})$, $p > 1/(2q)$, $q \ge 2$ справедливо порядковое равенство

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \|f(x) - S_{m,q}(x,\lambda,f)\|_p^p \, d\lambda\right)^{1/p} \asymp \omega_{2q-2}\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p.$$

Рассмотрим задачу о величине константы в неравенстве Джексона — Стечкина. Пусть

$$D_{p,q}(n,\delta) = \sup_{f \in L_p(\mathbb{T})} \frac{E_n(f)_p}{\omega_k(\delta,f)_p} \quad (1 \le p \le \infty, \quad 0 < \delta \le \pi)$$

— точная константа в неравенстве Джексона — Стечкина

$$E_n(f)_p \le c(n,\delta,p,k)\, \omega_k(\delta,f)_p.$$

Назовем ее константой Джексона — Стечкина. Она является функцией многих параметров, и ее вычисление — сложная задача. С. Б. Стечкин, в частности, интересовался зависимостью этой константы от порядка модуля непрерывности.

Определим числа

$$\alpha_{p,k} = \left(\sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s}^{R}\right)^{-1/R}, \quad R = \max(p,\, p'), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 < p < \infty,$$

$$\alpha_{1,k} = \alpha_{\infty,k} = \binom{k}{[k/2]}^{-1}, \quad \beta_{p,k} = \frac{k^{1/(2r)}}{2^k}, \quad r = \min(p, p'), \quad 1 \le p \le \infty.$$

Равномерно по $1 \le p \le \infty$ и $k \ge 1$

$$\alpha_{p,k} \asymp \beta_{p,k}.$$

Нам представляются важными следующие задачи.

З а д а ч а 3. Доказать, что при $1 \le p < \infty$, $k \ge 1$

$$D_{p,k}(n, \pi) \ge \alpha_{p,k}. \tag{8}$$

З а д а ч а 4. Доказать, что при $1 \le p < \infty$, $k \ge 1$

$$D_{p,k}\left(n, \frac{2\pi}{n}\right) \le \alpha_{p,k}. \tag{9}$$

З а д а ч а 5 [47]. Доказать, что при $k \ge 1$, $l \ge 1$

$$D_{\infty,k}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) \le \alpha_{\infty,k}, \quad D_{\infty,2l}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) = \alpha_{\infty,2l}, \quad \sup_n D_{\infty,2l-1}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) = \alpha_{\infty,2l-1}.$$

З а д а ч а 6. Доказать, что при $1 \le p \le \infty$, $k \ge 1$

$$D_{p,k}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) \asymp \beta_{p,k}. \tag{10}$$

З а м е ч а н и е 1. Более просто, чем неравенство (8), доказать неравенство

$$D_{p,k}\,(n, \delta) \ge \alpha_{p,k} \quad \text{при} \quad 0 < \delta < \frac{2\pi}{k}. \tag{11}$$

В 1967 г. Н. И. Черных [45] установил (11) при $p = 2$. При $2 \le p < \infty$ неравенство (11) было доказано автором [12]. Другой способ доказательства неравенства (11) при $p = 2$ предложен в работе А. Г. Бабенко [2]. Справедливость неравенства (8) была под сомнением до работы А. И. Козко и А. В. Рождественского [14], в которой (8) доказывается при $p = 2$. При $1 \le p < 2$ хорошие оценки константы Джексона — Стечкина снизу отсутствуют, кроме случая $k = 1$, поэтому для этих p вначале следует попытаться доказать (11).

З а м е ч а н и е 2. В задаче 5 оценку сверху нужно доказывать только для четных $k = 2l$, так как

$$2\alpha_{\infty,2l} = \alpha_{\infty,2l-1}, \qquad \omega_{2l}\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_\infty \le 2\omega_{2l-1}\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_\infty.$$

З а м е ч а н и е 3. Пример функции $f_0(x) = \cos nx$, для которой при $1 \le p \le \infty$, $0 < a < 1$

$$\frac{E_n(f_0)_p}{\omega_k\left(\dfrac{\pi a}{n}, f\right)_p} = \frac{1}{\left(2\sin\dfrac{\pi a}{2}\right)^k} \ge \beta_{p,k}\, c_a^k, \quad c_a > 1,$$

показывает, что аргумент π/n в модуле непрерывности — наименьший среди аргументов вида $\pi a/n$, для которого справедливо (10).

Сформулированные гипотезы основаны на известных частных результатах.

Первым точным результатом стало равенство

$$\sup_n D_{\infty,1}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) = 1 = \alpha_{\infty,1},$$

которое вытекает из неравенств

$$1 - \frac{1}{2n} \leq D_{\infty,1}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) \leq 1,$$

доказанных Н. П. Корнейчуком [16] в 1962 г. Таким образом, в задаче 5 можно считать $k \geq 2$.

В настоящее время наиболее изучен случай $p = 2$. Задачи 3, 4, 6 решены полностью учениками и научными "внуками" С. Б. Стечкина. Неравенство (8) при $k = 1$ доказано Н. И. Черных [44] и В. И. Бердышевым [4] в 1967 г., а при $k \geq 2$ — А. И. Козко и А. В. Рождественским [14] в 2004 г. В 1967 г. Н. И. Черных [44] доказал неравенство

$$D_{2,1}\left(n, \frac{\pi}{n}\right) \leq \alpha_{2,1},$$

более сильное, чем (9) при $k = 1$. В этом же году он доказал неравенство (9) для всех $k \geq 2$ [45]. Оценка сверху (10) в задаче 6 была получена в 2001 г. С. Н. Васильевым [7].

В 1967 г. В. И. Бердышев [4] получил неравенство (8) при $1 \leq p < \infty$ и $k = 1$. В 1992 г. Н. И. Черных [46] доказал неравенство (9) при $1 \leq p < 2$ и $k = 1$. Что касается оценки сверху константы Джексона — Стечкина при $2 < p < \infty$, $k = 1$, то наилучшей на сегодня является оценка $D_{p,1}(n, \pi/n) \leq 3/2$, которая принадлежит С. Б. Стечкину [29]. Автором [11] доказаны оценки

$$D_{p,k}\left(n, \frac{k^{3/2}}{n}\right) \leq c\,\beta_{p,k} \quad (1 \leq p \leq \infty), \qquad D_{p,k}\left(n, \frac{k^{3/2}}{n}\right) \asymp \beta_{p,k} \quad (2 < p \leq \infty).$$

В 2009 г. появилась интересная работа С. Фукара, Ю. Крякина и А. Шадрина [47], посвященная оценкам константы Джексона — Стечкина в пространстве непрерывных функций. В работе поставлена задача 5, для которой получены правильные оценки снизу, а также доказаны оценки

$$D_{\infty,k}\left(n, \frac{2\pi}{n}\right) \asymp \beta_{\infty,k}, \qquad D_{1,k}\left(n, \frac{2\pi}{n}\right) \leq c\,\beta_{1,k}.$$

Обратные теоремы

В обратных теоремах структурные свойства периодических функций характеризуются с помощью их аппроксимативных свойств. Первые результаты здесь принадлежат С. Н. Бернштейну [5] и Ш. Валле Пуссену [54]. В 1912 г. С. Н. Бернштейн доказывает, в частности, утверждение: если $E_n(f)_\infty = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, то $\omega(\delta, f)_\infty = O(\delta^\alpha)$.

Основным техническим аппаратом для доказательства обратных теорем стало неравенство Бернштейна [5] для производной тригонометрического полинома

$$\left\|t'\right\|_\infty \leq n\,\|t\|_\infty\,, \quad t \in T_n.$$

Первая общая обратная теорема была доказана Р. Салемом [53] в 1935 г.

Теорема 7. *Если* $f \in C(\mathbb{T})$, *то*

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_\infty \leq \frac{c}{n}\sum_{\nu=1}^{n} E_\nu(f)_\infty.$$

Сформулированное выше утверждение С. Н. Бернштейна для $\alpha = 1$ не верно. А. Зигмунд [55] в 1945 г. дополнил его утверждением: если $E_n(f)_\infty = O(n^{-1})$, то $\omega_2(\delta, f)_\infty = O(\delta)$, а С. Н. Бернштейн [6] в 1947 г. придал этому наблюдению общий характер: если $E_n(f)_\infty = O(n^{-\alpha})$, $0 < \alpha < k$, то $\omega_k(\delta, f)_\infty = O(\delta^\alpha)$.

Теорема 7 является обратным утверждением к неравенству Джексона (1). Естественно возник вопрос об обратной теореме к неравенству Джексона — Стечкина (4).

В 1950 г. вышла работа А. Ф. Тимана и М. Ф. Тимана [37], в которой доказано утверждение: если $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, то

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p \le \frac{c_{p,k}}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(f)_p.$$

Ограничение $1 < p < \infty$ было существенным, так как доказательство использовало базисность тригонометрической системы в $L_p(\mathbb{T})$.

В 1951 г. С. Б. Стечкин [25] опубликовал доказательство обратного неравенства для k-го модуля непрерывности в пространстве $C(\mathbb{T})$, причем его метод доказательства годился сразу для всех пространств $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$. Сформулируем утверждение в общем виде.

Теорема 8. *Если $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p \le \frac{c_k}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(f)_p. \tag{12}$$

Обратное неравенство (12) по форме сильно отличается от прямого неравенства (4). Возник вопрос о степени его точности. С. Б. Стечкин [27] в 1956 г. определил класс функций

$$L_p(\varepsilon) = \{f \in L_p(\mathbb{T}) :\ E_n(f)_p \le \varepsilon_n,\ \varepsilon_n \downarrow 0,\ \varepsilon = \{\varepsilon_n\}\} \quad (\text{при} \quad p = \infty),$$

оказавшийся естественным для проверки точности обратных неравенств.

В 1965 г. М. Ф. Тиман [40] доказал, что

$$\sup_{f \in C(\varepsilon)} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_\infty \asymp \frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\varepsilon_\nu. \tag{13}$$

Аналогичный результат для пространства $L_1(\mathbb{T})$ получил В. Э. Гейт [8]:

$$\sup_{f \in L_1(\varepsilon)} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_1 \asymp \frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}\varepsilon_\nu. \tag{14}$$

Таким образом, неравенство (12) на классах $L_p(\varepsilon)$ при $p = 1, \infty$ является точным.

Принципиальным моментом при доказательстве (13), (14) является построение крайних (экстремальных) функций. Оказалось, что при $p = \infty$ в качестве крайней функции можно взять функцию, конструкция которой была предложена С. Б. Стечкиным [28] ранее для доказательства точности оценок для уклонения линейного метода Фейера

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu+1})\cos\nu x.$$

Конструкция крайней функции В. Э. Гейта для $p = 1$ была новой.

При $1 < p < \infty$ неравенство (12) можно усилить. В 1958 г. М. Ф. Тиман [38] доказал следующее утверждение.

Теорема 9. *Если* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, $\gamma = \min(2,p)$, $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p \le \frac{c_{p,k}}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma k-1} E_\nu^\gamma(f)_p\right)^{1/\gamma}. \tag{15}$$

Общей теореме 9 предшествовали частные результаты, которые помогли прояснить вид неравенства (15). В 1950 г. А. Ф. Тиман и М. Ф. Тиман [37] показали, что если $E_n(f)_2 = O(n^{-1})$, то $\omega(\delta, f)_2 = O\left(\delta\sqrt{\ln \delta^{-1}}\right)$. В этом же году А. Зигмунд [56] доказал, что если $E_n(f)_p = O(n^{-1})$, $1 < p < \infty$, то $\omega(\delta, f)_p = O\left(\delta(\ln\delta^{-1})^{1/\gamma}\right)$, $\gamma = \min(2,p)$. Наконец, в 1953 г. С. Б. Стечкин [26] доказал неравенство

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_2 \le \frac{c}{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu^2(f)_2\right)^{1/2}.$$

В случае пространства $L_2(\mathbb{T})$ из (6) и (15) вытекает порядковое соотношение

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_2 \asymp \frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2k-1} E_\nu^2(f)_2\right)^{1/2}.$$

Точность неравенства (15) на классах $L_p(\varepsilon)$, $1 < p < \infty$, была установлена М. Ф. Тиманом (см. [42]):

$$\sup_{f\in L_p(\varepsilon)} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p \asymp \frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma k-1} \varepsilon_\nu^\gamma\right)^{1/\gamma}.$$

Подход к построению крайних функций можно найти в работе А. Зигмунда [56]. По поводу точности неравенства (15) см. также работу Н. А. Ильясова [13].

Обратная теорема в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, была установлена в 1975 г. автором [10] и независимо Э. А. Стороженко, В. Г. Кротовым, П. Освальдом [34].

Теорема 10. *Если* $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p \le \frac{c_{p,k}}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{pk-1} E_\nu^p(f)_p\right)^{1/p}.$$

З а д а ч а 7. Доказать, что при $0 < p < 1$

$$\sup_{f\in L_p(\varepsilon)} \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p \asymp \frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{pk-1} \varepsilon_\nu^p\right)^{1/p}.$$

Точное обращение неравенства Джексона — Стечкина

Из сформулированных выше результатов Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда вытекает, что

$$E_n(f)_\infty = O(n^{-\alpha}), \quad 0<\alpha<1, \quad \Leftrightarrow \quad \omega(\delta, f)_\infty = O(\delta^\alpha),$$

$$E_n(f)_\infty = O(n^{-1}) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_2(\delta, f)_\infty = O(\delta),$$

$$E_n(f)_\infty = O(n^{-\alpha}), \quad 0<\alpha<k, \quad \Leftrightarrow \quad \omega_k(\delta, f)_\infty = O(\delta^\alpha).$$

Эти результаты говорят о совпадении классов функций, определяемых аппроксимативными и структурными свойствами.

В кандидатской диссертации С. Б. Стечкин приводит общую постановку задачи о совпадении аппроксимативных и структурных классов функций.

Пусть функция $\omega \in C[0,\pi]$, не убывает, $\omega(0)=0$. При каких условиях на функцию ω справедливы следующие соотношения:

(1) $E_n(f)_\infty = O(\omega(1/n)) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_k(\delta,f)_\infty = O(\omega(\delta))$,

(2) $E_n(f)_\infty \asymp \omega(1/n) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_k(\delta,f)_\infty \asymp \omega(\delta)$?

Если постановка задачи о выполнении первого соотношения была понятна и ожидаема, то постановка задачи о выполнении второго соотношения была оригинальной и новой.

С. Б. Стечкин в [24; 25] определяет условие (S_k) на функцию ω: существует $0<\varepsilon<k$ такое, что функция $\omega(\delta)/\delta^{k-\varepsilon}$ почти убывает, т. е. для некоторого $A>0$ и всех $0<\delta_1<\delta_2$ $\omega(\delta_1)/\delta_1^{k-\varepsilon} \ge A\omega(\delta_2)/\delta_2^{k-\varepsilon}$, и доказывает, что это условие достаточно для выполнения соотношений (1), (2). При доказательстве этого утверждения он использует установленное им в 1948 г. в [23] изящное обобщение неравенства Бернштейна

$$\left\|t^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{n}{2\sin(nh/2)}\right)^r \|\Delta_h^r t\|_\infty, \quad t\in T_n, \quad 0<h<\frac{2\pi}{n}. \tag{16}$$

Отметим, что частный случай этого неравенства при $r=1$, $h=\pi/n$ был получен в 1914 г. М. Риссом [52, § 4]. Аналог неравенства (16) для целых функций экспоненциального типа степени ρ при $r\ge 1$, $h=\pi/\rho$ установил в 1948 г. С. М. Никольский [19].

В 1952 г. С. М. Лозинский [17] получает, что необходимым и достаточным условием для справедливости соотношений (1), (2) является условие (L_k): существует $C>1$ такое, что

$$\varlimsup_{\delta\to 0+0} \frac{\omega(C\delta)}{\omega(\delta)} < C^k.$$

Возникал вопрос, как соотносятся условия (S_k) и (L_k). На этот вопрос в 1956 г. дали ответ Н. К. Бари и С. Б. Стечкин [3]. Они ввели еще два условия:

$$(B_k): \quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1}\omega(1/\nu) = O\Big(n^k\omega\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big),$$

$$(Z_k): \quad \int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^{k+1}}dt = O\Big(\frac{\omega(\delta)}{\delta^k}\Big),$$

и доказали, что условия (S_k), (L_k), (B_k), (Z_k) — эквивалентные.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 11. *Соотношения* (1), (2) *справедливы тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий* (S_k), (L_k), (B_k), (Z_k).

Теорема 11 справедлива и для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$, (см. [36]).

З а д а ч а 8. Исследовать соотношения (1), (2) для пространств $L_p(\mathbb{T})$, $0<p<1$. Показать, что в определениях условий (S_k), (L_k), (B_k), (Z_k) параметр k необходимо заменить на $k-1+1/p$.

Нетрудно видеть, что если в условиях (S_k), (L_k), (B_k), (Z_k) функцию $\omega(\delta)$ заменить на $\omega_k(\delta,f)_p$, $1\le p\le\infty$, то каждое из них будет необходимым и достаточным условием для точного обращения неравенства Джексона — Стечкина

$$E_n(f)_p \asymp \omega_k\left(\frac{\pi}{n}, f\right)_p. \tag{17}$$

В 1994 г. R. K. S. Rathore [51] предложил новое простое необходимое и достаточное условие для справедливости (17):

$$\omega_k(\delta,f)_p \asymp \omega_{k+1}(\delta,f)_p. \tag{18}$$

Условие (18) можно было бы назвать условием (R_k). В 2007 г. Ю. С. Коломойцев [15] нашел необходимое и достаточное условие для справедливости (17) при $0 < p < 1$:

$$\omega_k(\delta, f)_p \asymp \omega_r(\delta, f)_p\,, \quad r = k + [1/p]\,.$$

Рассмотрим задачу об условиях непустоты структурных классов функций, определяемых условием $\omega_k(\delta, f)_p \asymp \omega(\delta)$, $0 < p \le \infty$, т. е. задачу о порядках модулей непрерывности в пространствах $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \le \infty$.

Пусть $\Omega_{k,p}$ — класс всех модулей непрерывности порядка k функций из $L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \le \infty$, $\mu > 0$, Φ_μ — класс неотрицательных, ограниченных на $[0, \pi]$ функций $\phi(t)$, для которых

1) $\phi(t) \to 0$ $(t \to 0 + 0)$,

2) $\phi(t)$ — не убывает,

3) $\phi(t)/t^\mu$ — не возрастает.

Описание порядков модулей непрерывности дается в двух утверждениях.

Теорема 12. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$. Если $\omega_k \in \Omega_{k,p}$, то для некоторой $\phi \in \Phi_k$*

$$\phi(t) \asymp \omega_k(t). \tag{19}$$

Обратно, если $\phi \in \Phi_k$, то существует $\omega_k \in \Omega_{k,p}$, для которой выполнено (19).

Теорема 13. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$. Если $\omega_k \in \Omega_{k,p}$, то для некоторой $\phi \in \Phi_{k-1+1/p}$ справедливо соотношение* (19). *Обратно, если $\phi \in \Phi_k$, то существует $\omega_k \in \Omega_{k,p}$, для которой выполнено* (19).

Теорему 12 для $p = 1, \infty$ в 1971 г. доказал В. Э. Гейт [8; 9]. Теорему 12 при $1 < p < \infty$ и теорему 13 в 1979 г. доказала Т. В. Радославова [50].

В заключение я хочу поблагодарить всех, кто способствовал улучшению этой статьи и, прежде всего, В. В. Арестова, А. Г. Бабенко, Н. А. Ильясова, Р. М. Тригуба, Н. И. Черных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Гостехиздат, 1947. 323 с.
2. **Бабенко А.Г.** О неравенстве Джексона — Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 1. С. 30–46.
3. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
4. **Бердышев В.И.** О теореме Джексона в L_p // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 3–16.
5. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. 1912. Т. 13 (2). С. 49–144.
6. **Бернштейн С.Н.** О свойствах однородных функциональных классов // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 2. С. 111–114.
7. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона — Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 1. С. 75–84.
8. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, вып. 5. С. 571–582.
9. **Гейт В.Э.** Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. 1972. № 4. С. 67–77.
10. **Иванов В.И.** Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып 5. С. 641–658.
11. **Иванов В.И.** О приближении функций в пространствах L_p // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 2. С. 15–40.
12. **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: ТулГУ, 1995. 192 с.

13. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для некоторых классов периодических функций в L_p, $1 \leq p \leq \infty$ // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276, № 6. С. 1301–1304.
14. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.
15. **Коломойцев Ю.С.** О модулях гладкости и мультипликаторах Фурье в L_p, $0 < p < 1$ // Укр. мат. журн. 2007. Т. 59, № 9. С. 1221–1238.
16. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в неравенстве Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.
17. **Лозинский С.М.** Обращение теоремы Джексона // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 645–647.
18. **Натансон Г.И., Тиман М.Ф.** Средние геометрические последовательности наилучших приближений // Вестн. ЛГУ. 1979. Т. 3, № 19. С. 50–52.
19. **Никольский С. М.** Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1507–1510.
20. **Руновский К.В.** О семействах линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 2. С. 33–42.
21. **Руновский К.В.** Прямая и обратная теоремы теории приближений в пространствах L_p с $0 < p < 1$ // Докл. РАН. 1993. Т. 331, № 5. С. 684–686.
22. **Руновский К.В.** О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 81–102.
23. **Стечкин С.Б.** Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511–1514.
24. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Докл. СССР. 1949. Т. 65, № 2. С. 135–137.
25. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
26. **Стечкин С.Б.** О теореме Колмогорова — Селиверстова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. Т. 17, № 6. С. 499–512.
27. **Стечкин С.Б.** О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами// Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 2. С. 197–206.
28. **Стечкин С.Б.** О приближении периодических функций суммами Фейера // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 62. С. 48–60.
29. **Стечкин С.Б.** Замечание к теореме Джексона // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 17–19.
30. **Стечкин С.Б.** Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1998. 384 с.
31. Сергей Борисович Стечкин / О. В. Бесов [и др.] // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 3–10.
32. С. Б. Стечкин и теория приближений / В. В. Арестов, В. И. Бердышев, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. Т. 4. С. 3–16.
33. Памяти Сергея Борисовича Стечкина / С. В. Конягин, С. А. Теляковский // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, № 4. С. 955–960.
34. **Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.** Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. 1975. Т. 98, № 3. С. 395–415.
35. **Стороженко Э.А., Освальд П.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 4. С. 888–901.
36. **Тиман А.Ф.** Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
37. **Тиман А.Ф., Тиман М.Ф.** Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. С. 17–19.
38. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p // Мат. сб. 1958. Т. 46, № 1. С. 125–132.
39. **Тиман М.Ф.** Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p // Исслед. по соврем. пробл. конструктивной теории функций. Баку: АН Азерб. ССР, 1965. С. 18–25.
40. **Тиман М.Ф.** О порядковой точности мажоранты модуля гладкости непрерывных функций // Науч. конф. ДСХИ. Днепропетровск: Промінь, 1965. С. 62–65.
41. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах L_p // Укр. мат. журн. 1966. № 1. С. 134–137.
42. **Тиман М.Ф.** Аппроксимация и свойства периодических функций. Киев: Наук. думка, 2009. 376 с.

43. **Тригуб Р.М.** Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 3. С. 615–630.
44. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.
45. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
46. **Черных Н.И.** Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 232–241.
47. **Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A.** On the exact constant in the Jackson — Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. Vol. 29. P. 157–179.
48. **Jackson D.** Über die Genauigkeit der Annaheruny stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Frades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung: Diss. Göttingen, 1911.
49. **Quade E.S.** Trigonometric approximation in the mean // Duke Math. J. 1937. Vol. 3. P. 529–543.
50. **Radoslavova T.V.** Decrease orders of the L^p-moduli of continuity $(0 < p \leq \infty)$ // Anal. Math. 1979. Vol. 5. P. 219–234.
51. **Rathore R.K.S.** The problem of A. F. Timan on the precise order of decrease of the best approximation // J. Approx. Theory. 1994. Vol. 77. P. 153–166.
52. **Riesz M.** Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 1914. Bd. 23. S. 354–368.
53. **Salem R.** Sur certaines fonctions continues et le propriétés de leur séries de Fourier // Comptes Rendus Acad. Sci. 1935. Vol. 201. P. 703–705.
54. **Vallée Poussin C. de la .** Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, 1919. 151 p.
55. **Zygmund A.** Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12. P. 47–76.
56. **Zygmund A.** A remark on the modules of continuity // Unic. Nac. Tucuman Revista. 1950. A-7. P. 259–269.

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
декан
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступила 1.10.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.977

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССА ХАРДИ — СОБОЛЕВА АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА[1]

Р. Р. Акопян

Изучена величина $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p}$ наилучшего приближения по норме пространства Харди $H^p, 1 \le p \le \infty$, класса Харди — Соболева H_n^p аналитических в полуплоскости функций, имеющих ограниченную H^p-норму производной порядка n, целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ. Доказано равенство $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p} = \sigma^{-n}$. Построен линейный метод, обеспечивающий наилучшее приближение класса.

Ключевые слова: класс Харди, приближение функций, целые функции экспоненциального типа.

R. R. Akopyan. Approximation of the Hardy–Sobolev class of functions analytic in a half-plane by entire functions of exponential type.

We study the value $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p}$ of the best approximation in the norm of the Hardy space H^p for $1 \le p \le \infty$ of the Hardy–Sobolev class H_n^p of functions analytic in a half-plane with bounded H^p-norm of the nth-order derivative by entire functions of exponential type not exceeding σ. The equality $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p} = \sigma^{-n}$ is proved. A linear method providing the best approximation of the class is constructed.

Keywords: Hardy class, approximation of functions, entire functions of exponential type.

1. Введение

Обозначим через $H^p = H^p(\Pi)$, $1 \le p \le \infty$, *пространство Харди* функций, аналитических в верхней полуплоскости $\Pi = \{z\colon\ \Im z > 0\}$, с конечной нормой

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{y>0} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup_{y>0} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\,dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty;$$

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\Pi} |f(z)|.$$

Для натурального n обозначим через H_n^p *класс Харди — Соболева* функций из H^p, у которых производная порядка n также принадлежит H^p и ее норма ограничена единицей, т. е.

$$H_n^p = \left\{ f \in H^p\colon\ f^{(n)} \in H^p, \quad \|f^{(n)}\|_{H^p} \le 1 \right\}.$$

Целыми функциями экспоненциального типа называют [1, гл. 4] целые функции f, которые (в комплексной плоскости $\mathbb{C}$) удовлетворяют неравенству

$$|f(z)| \le \alpha e^{\beta|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

где числа α, $\beta > 0$ не зависят от точки z. Нижнюю грань σ констант β, при которых имеет место неравенство (1.1), называют типом функции f; известно, что

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|\to\infty}}\ \frac{\ln|f(z)|}{|z|}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213).

Совокупность всех целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, принято обозначать E_σ. Пусть $E_\sigma^p = E_\sigma \bigcap H^p$ — множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, принадлежащих пространству H^p.

Везде далее мы предполагаем, что параметр p удовлетворяет условиям $1 \le p \le \infty$, число σ — положительное и n — натуральное.

Обозначим через $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p}$ наилучшее приближение по норме пространства H^p класса Харди — Соболева H_n^p целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, т. е. величину

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p} = \sup_{f\in H_n^p} e_\sigma(f)_{H^p}, \qquad e_\sigma(f)_{H^p} = \inf_{q\in E_\sigma^p} \|f-q\|_{H^p}, \tag{1.2}$$

где нижняя грань берется по всем целым функциям q экспоненциального типа, не превосходящего σ, из пространства H^p. Относительно величины $\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p}$ в настоящей статье получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{H^p} = \sigma^{-n}. \tag{1.3}$$

Пусть $E_\sigma^p(y) = E_\sigma \bigcap L^p(\mathbb{R}+iy),\ y>0$, есть множество целых функций экспоненциального типа, не превосходящего σ, след которых на прямой $\mathbb{R}+iy$ принадлежит пространству L^p. При любом $y>0$ имеет место вложение $E_\sigma^p \subset E_\sigma^p(y)$. Для функции $f \in H_n^p$ положим

$$e_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf_{q\in E_\sigma^p(y)} \|f-q\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}, \qquad \widetilde{e}_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf_{q\in E_\sigma^p} \|f-q\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

Наряду с (1.2) в работе изучены величины

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup_{f\in H_n^p} e_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}, \qquad \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sup_{f\in H_n^p} \widetilde{e}_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \tag{1.4}$$

наилучшего приближения по норме пространства $L^p(\mathbb{R}+iy)$ класса Харди — Соболева H_n^p целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, и соответственно целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, из пространства H^p. Ясно, что величины (1.4) связаны неравенством

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

На самом деле в этом неравенстве имеет место равенство; точнее говоря, в статье доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\ y > 0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{1.5}$$

При доказательстве теорем 1 и 2 будут построены линейные методы, реализующие наилучшее приближение в задачах (1.2) и (1.4).

Целые функции экспоненциального типа являются классическим аппаратом приближения функций как вещественной, так и комплексной переменной. Таким приближениям посвящена обширная литература (см., например, монографии [1; 2] и приведенную там библиографию).

Хорошо известно (см., например, [1, гл. 5]), что для наилучшего приближения на числовой оси класса Соболева $Q_n^p = \{f \in L^p(\mathbb{R}) : f^{(n)} \in L^p(\mathbb{R}),\ \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 1\}$ целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ, справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_\sigma(Q_n^p)_{L^p(\mathbb{R})} \le \mathcal{K}_n\, \sigma^{-n}, \quad \text{где} \quad \mathcal{K}_n = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(n+1)}}{(2k+1)^{n+1}}.$$

В случаях $p=\infty$ и $p=1$ в последнем неравенстве имеет место равенство.

Близкая к исследуемым задача для функций, аналитических в круге, хорошо изучена. Пусть $H^p(D)$ — пространство Харди функций, аналитических в единичном круге D, и $H^p_n(D)$ — класс Харди — Соболева функций из $H^p(D)$, у которых производная порядка n также принадлежит $H^p(D)$ и ее норма ограничена единицей. Для наилучшего приближения по норме пространства $H^p(D)$ класса $H^p_n(D)$ алгебраическими многочленами степени не более чем $N-1$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{N-1}(H^p_n(D))_{H^p(D)} = \frac{(N-n)!}{N!}, \qquad n < N, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{1.6}$$

В случае $p = \infty$ это доказано в работе К. И. Бабенко [3]; в случае $1 \le p < \infty$ — в работе Л. В. Тайкова [4], где также показано, что величина (1.6) является N-мерным поперечником класса $H^p_n(D)$ в пространстве $H^p(D)$, $1 \le p \le \infty$.

2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе вводится конкретный оператор свертки в H^∞(и, следовательно, в H^p, $1 \le p \le \infty$) и изучаются его свойства. Впоследствии будет показано, что этот оператор определяет метод наилучшего приближения класса Харди — Соболева H^p_n целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего σ.

В дальнейшем потребуется следующее известное (см., например, [5, гл. 6, C]) утверждение.

Лемма 1. *Пусть $f \in H^p$, $1 \le p \le \infty$. Тогда для почти всех $\zeta \in \mathbb{R}$ существует (некасательный) предел*

$$f(\zeta) = \lim_{z \to \zeta} f(z),$$

при этом $f \in L^p(\mathbb{R})$, и для точек $z = x + iy \in \Pi$ справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z})}\, d\zeta. \tag{2.1}$$

Для функции g переменной $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию $g(t)\, e^{-\eta t} \in L^1(\mathbb{R})$, будем задавать преобразование Фурье $\widehat{g}$ в точках $\zeta \in \mathbb{R} + i\eta$ следующей формулой:

$$\widehat{g}(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{i\zeta t}\, dt.$$

Если при этом функция $\widehat{g}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R}+i\eta)$, то на прямой $\mathbb{R}+i\eta$ определена свертка $\widehat{g} * f$ функций $\widehat{g}$ с функциями $f \in H^\infty$, задаваемая соотношением

$$(\widehat{g} * f)(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(z - \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \qquad z = x + i\eta.$$

При $y > 0$ определим на числовой прямой функцию $\epsilon = \epsilon_y$ формулой

$$\epsilon(t) = \epsilon_y(t) = \begin{cases} e^{2yt}, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Функция $\epsilon(t) e^{-\eta t}$ суммируема на прямой $\mathbb{R}$ при $0 < \eta < 2y$. Поэтому преобразование Фурье $\widehat{\epsilon}$ функции ϵ определено в полосе $\varpi_y = \{z\colon\, 0 < \Im z < 2y\}$ и, как нетрудно проверить,

$$\widehat{\epsilon}(z) = \frac{1}{\pi}\, \frac{y}{z(z - 2iy)}\,.$$

Ясно, что $\widehat{\epsilon}$ принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R} + iy)$.

Свертка $\widehat{\epsilon}*f$ функции $\widehat{\epsilon}$ и произвольной ограниченной аналитической в верхней полуплоскости функции f в точке $z=x+iy$ совпадает с правой частью формулы (2.1). Таким образом, интегральное представление (2.1) функций $f\in H^\infty$ можно записать в виде

$$f(z)=(\widehat{\epsilon}*f)(z),\quad z=x+iy,\quad y>0. \tag{2.3}$$

Пусть $y\ge 0$, $\sigma>0$ и n — натуральное число. Определим функцию l переменной $t\in\mathbb{R}$ соотношением

$$l(t)=l(t;y)=\begin{cases} 1-(-t)^n(2\sigma+t)^{-n}\,e^{-2y(\sigma+t)}, & -\sigma\le t\le 0,\\ 1-t^n(2\sigma-t)^{-n}\,e^{-2y(\sigma-t)}, & 0<t\le\sigma,\\ 0, & t\notin[-\sigma,\sigma]. \end{cases} \tag{2.4}$$

В следующем утверждении обсуждаются свойства преобразования Фурье $\widehat{l}$ функции l и ее свертки с функциями из пространства Харди H^p, $1\le p\le\infty$. В частности, доказано, что оператор свертки

$$Af=\widehat{l}*f,\quad f\in H^p, \tag{2.5}$$

отображает пространство H^p, $1\le p\le\infty$, в пространство $E^p_\sigma=H^p\cap E_\sigma$.

Лемма 2. *При $y\ge 0$, $\sigma>0$ и $n\in\mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

(a) *функция $\widehat{l}$ является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего σ;*

(b) *функция $\widehat{l}$ суммируема на любой прямой $\mathbb{R}+iv$, $v\in\mathbb{R}$, параллельной вещественной оси, при этом существует константа M такая, что справедливо неравенство*

$$\|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R}+iv)}\le M\,e^{|v|\sigma},\quad v\in\mathbb{R}; \tag{2.6}$$

(c) *свертка $q=Af=\widehat{l}*f$ функции $\widehat{l}$ с произвольной функцией $f\in H^p$, $1\le p\le\infty$, является целой функцией экспоненциального типа, не превосходящего σ, из пространства H^p, т. е. $Af\in E^p_\sigma$;*

(d) *формулой* (2.5) *определен линейный ограниченный оператор A в пространстве H^p, $1\le p\le\infty$, для нормы которого имеет место оценка*

$$\|A\|_{H^p\to H^p}\le\|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (a) представляет собой хорошо известный факт, который с учетом определения (2.4) функции l следует из оценок

$$|\widehat{l}(z)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}l(t)\,e^{izt}\,dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{+\sigma}l(t)\,e^{-vt}\,dt\le\sigma\pi^{-1}e^{|v|\sigma},\quad z=u+iv\in\mathbb{C}. \tag{2.8}$$

Для доказательства утверждения (b) рассмотрим функцию l_2, определяемую равенством

$$l_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{izt}dl'(t).$$

Дважды взяв по частям интеграл в правой части, учитывая четность l и свойство $l(\sigma)=l(-\sigma)=0$, получим представление

$$l_2(z)=c(z)-\frac{z^2}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}l(t)\,e^{izt}\,dt=c(z)-z^2\,\widehat{l}(z),$$

где
$$c(z) = \pi^{-1}\left(l'(\sigma-0)\cos\sigma z - l'(+0)\right),$$
откуда имеем
$$\widehat{l}(z) = z^{-2}(c(z) - l_2(z)). \tag{2.9}$$
Функция l' нечетная, на отрезке $[0,\,\sigma]$ неположительная и невозрастающая. Поэтому, используя обозначение
$$L = \max\{|l'(t)|\colon\ t\in[0,\,\sigma]\} = -l'(\sigma-0) = 2(n\sigma^{-1}+y),$$
получаем следующие оценки:
$$|l_2(z)| \le -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} e^{-vt}dl'(t) \le \pi^{-1}e^{|v|\sigma}(l'(+0)-l'(\sigma-0)) \le \pi^{-1}Le^{|v|\sigma}, \tag{2.10}$$
$$|c(z)| \le \pi^{-1}\left|l'(\sigma-0)\,\cos\sigma z + l'(+0)\right| \le \pi^{-1}L\left(e^{|v|\sigma}+1\right) \le 2\pi^{-1}L\,e^{|v|\sigma}. \tag{2.11}$$
Используя равенство (2.9) и неравенства (2.10), (2.11), получаем следующее уточнение оценки (2.8) для функции $\widehat{l}$:
$$|\widehat{l}(u+iv)| \le \pi^{-1}\,\mu(u)\,e^{|v|\sigma}, \quad \mu(u) = \min\{3L\,u^{-2},\,\sigma\}. \tag{2.12}$$
Отсюда следует неравенство (2.6) с константой
$$M = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(u)\,du = 4\pi^{-1}\sqrt{3L\sigma}.$$

Обратимся к доказательству утверждения (c). Так как функция $\widehat{l}$ целая и удовлетворяет неравенству (2.12), то для целой функции $q = Af = \widehat{l} * f$ имеет место представление
$$q(z) = \int\limits_{-\infty+i\alpha}^{+\infty+i\alpha}\widehat{l}(z-\zeta)f(\zeta)d\zeta, \quad \alpha\ge 0.$$

Покажем, что $q = Af\in E_\sigma$. Используя определение функции q и неравенство (2.6), получим оценку модуля значения функции q в произвольной точке $z = u+iv$:
$$|q(z)| \le \|f\|_{H^\infty}\|\widehat{l}\|_{L^1(\mathbb{R}+iv)} \le \|f\|_{H^\infty}\,Me^{|v|\sigma}.$$

Убедимся, что $q\in H^p$. Используя обобщенное неравенство Минковского (см., например, [1, гл. 1, п. 5]), для $v\ge 0$ получаем
$$\|q\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)} = \left\|\int\limits_{-\infty+iv}^{+\infty+iv}\widehat{l}(z-\zeta)f(\zeta)d\zeta\right\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)} \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{l}(w)|\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)}\,dw$$
$$= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}+iv)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\widehat{l}(w)|\,dw \le \|f\|_{H^p}\|\widehat{l}\,\|_{L^1(\mathbb{R})}, \tag{2.13}$$
так что, действительно, $q\in H^p$ и, следовательно, $q = Af\in E^p_\sigma$ для любой функции $f\in H^p$, $1\le p\le\infty$.

Относительно утверждения (d) заметим, что оценка (2.7) содержится в (2.13); впрочем, эта оценка, как и (2.13), хорошо известны. Лемма 2 доказана. □

В дальнейшем будут использоваться функции u_1, u_2, u_3 переменной $t \in \mathbb{R}$, определяемые соотношениями:

$$u_1(t) = u_1(t; y) = \begin{cases} \phi(t), & t < \sigma, \\ t^{-n}, & t \geq \sigma; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$u_2(t) = u_2(t; y) = \begin{cases} e^{2yt}, & t < -\sigma, \\ (-t)^n \phi(-t) + e^{2yt} - 1, & -\sigma \leq t < 0, \\ t^n u_1(t), & t \geq 0; \end{cases} \tag{2.15}$$

$$u_3(t) = u_3(t; y) = \begin{cases} t^n \phi(t) - e^{2yt}, & t < -\sigma, \\ t^n \phi(t) - (-t)^n \phi(-t) + (1 - e^{2yt}), & -\sigma \leq t < 0, \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

в которых $\phi(t) = (2\sigma - t)^{-n}\, e^{-2y(\sigma - t)}$. Видно, что

$$\epsilon(t) - l(t) = u_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

где функции ϵ и l заданы формулами (2.2) и (2.4), и

$$t^n u_1(t) - u_2(t) = u_3(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Далее в разделе рассматриваются свойства преобразований Фурье $\widehat{u}_j$ функций u_j, $j = 1, 2, 3$, определенных соотношениями (2.14)–(2.16).

Лемма 3. *При $y > 0$, $\sigma > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ для преобразований Фурье $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ функций u_1, u_2 справедливы следующие утверждения:*

(a) *функции $\widehat{u}_1$ и $\widehat{u}_2$ являются аналитическими в полосе $\varpi_y = \{z\colon\, 0 < \Im z < 2y\}$;*

(b) *для произвольного η, $0 < \eta < 2y$, функции $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$ и их производные суммируемы на прямой $\mathbb{R} + i\eta$ и, более того, на прямой стремятся к нулю не медленнее, чем $|z|^{-2}$ при $z \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем утверждение (a). Из определений (2.14), (2.15) следует, что функции u_j, $j = 1, 2$, на отрицательной полуоси удовлетворяют неравенству

$$|u_j(t)| \leq C e^{2yt}, \quad t \in (-\infty, 0),$$

где C — константа, и ограничены на неотрицательной полуоси $[0, +\infty)$. Поэтому, как хорошо известно, преобразования Фурье $\widehat{u}_1, \widehat{u}_2$ функций u_1, u_2 определены и являются аналитическими функциями в полосе $\varpi_y = \{z\colon\, 0 < \Im z < 2y\}$.

Докажем утверждение (b). Обозначим $u = u_{jk}$ функцию, задаваемую формулой $u(t) = u_{jk}(t) = t^k u_j(t)$, $j = 1, 2$; $k \in \mathbb{Z}_+$. Функция u — непрерывная на $\mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемая на всей прямой, кроме (может быть) трех точек: $t_1 = -\sigma$, $t_2 = 0$ и $t_3 = \sigma$, в каждой из которых производная имеет разрыв первого рода с (конечными) скачками s_l, $l = 1, 2, 3$. Величина

$$M(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{t_1} e^{-\eta t} |u''(t)| dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-\eta t} |u''(t)| dt + \int\limits_{t_2}^{t_3} e^{-\eta t} |u''(t)| dt + \int\limits_{t_3}^{+\infty} e^{-\eta t} |u''(t)| dt$$

конечна для всех η, $0 < \eta < 2y$. Определим в полосе ϖ_y функцию U формулой

$$U(z) = \int\limits_{-\infty}^{t_1} e^{izt} du'(t) + \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{izt} du'(t) + \int\limits_{t_2}^{t_3} e^{izt} du'(t) + \int\limits_{t_3}^{+\infty} e^{izt} du'(t), \quad z \in \varpi_y.$$

Дважды интегрируя по частям, получим для функции U выражение

$$U(z)=\sum_{l=1}^{3}e^{it_lz}s_l-z^2\widehat{u}(z),$$

а из него — представление для преобразования Фурье $\widehat{u}$ функции u:

$$\widehat{u}(z)=z^{-2}\biggl(\sum_{l=1}^{3}e^{it_lz}s_l-U(z)\biggr). \tag{2.19}$$

Следовательно, для $z\in\mathbb{R}+i\eta$ имеет место неравенство

$$|\widehat{u}(z)|\le\widetilde{M}(\eta)|z|^{-2},\qquad \widetilde{M}(\eta)=\sum_{l=1}^{3}|s_l|e^{-t_l\eta}+M(\eta). \tag{2.20}$$

Последнее неравенство, в частности, означает, что функция $\widehat{u}$ суммируемая на прямой $\mathbb{R}+i\eta$. Для завершения доказательства леммы 3 осталось отметить, что $\widehat{u}=\widehat{u}_{jk}=(-i)^k\widehat{u}_j^{(k)}$. □

Лемма 4. *При $y>0$, $\sigma>0$ и $n\in\mathbb{N}$ для преобразования Фурье $\widehat{u}_3$ функции u_3 справедливы следующие утверждения*:

(a) *функция $\widehat{u}_3$ является аналитической в полуплоскости $\Pi_{2y}^-=\{z\colon \Im z<2y\}$;*

(b) *для произвольного η, $\eta<2y$, функция $\widehat{u}_3$ суммируема на прямой $\mathbb{R}+i\eta$ и, более того, в полуплоскости $\Pi_\eta^-=\{z\colon \Im z<\eta\}$ стремится к нулю не медленнее, чем $|z|^{-2}$ при $z\to\infty$.*

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3. Дополнительного обоснования требует лишь утверждение (b). Функция u_3 равна нулю на неотрицательной полуоси, следовательно, неравенство (2.20) примет вид

$$|\widehat{u}_3(z)|\le\widetilde{M}(\eta)|z|^{-2},\quad z=x+i\eta,\quad \eta<2y,$$

$$\widetilde{M}(\eta)=|s_2|+|s_1|e^{\sigma\eta}+M(\eta),\qquad M(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{-\sigma}e^{-\eta t}|u_3''(t)|dt+\int\limits_{-\sigma}^{0}e^{-\eta t}|u_3''(t)|dt.$$

При этом величины $M(\eta)$ и $\widetilde{M}(\eta)$ не возрастают с ростом $-\eta$. □

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\|\widehat{u}_1\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)}=\sigma^{-n}e^{-y\sigma}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $u_1(t-\sigma)\,e^{-yt}$ переменной t является четной. Поэтому для преобразования Фурье $\widehat{u}_1$ функции u_1 в точке $z=x+iy$ имеет место представление

$$\widehat{u}_1(z)=e^{i\sigma x}\,\mathcal{I}(x),\qquad \mathcal{I}(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(t+\sigma)^{-n}\,e^{-y(t+\sigma)}\cos xt\,dt.$$

Дважды взяв по частям последний интеграл, получим представление функции $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}(x)=\frac{1}{\pi x^2}\int\limits_0^{+\infty}\psi''(t+\sigma)\,(1-\cos xt)\,dt.$$

Откуда, учитывая неотрицательность второй производной функции $\psi(t)=t^{-n}\,e^{-yt}$ на полупрямой $(\sigma,+\infty)$, заключаем, что функция $\mathcal{I}(x)$ является неотрицательной. Поэтому

$$\|\widehat{u}_1\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bigl|\,e^{i\sigma x}\,\mathcal{I}(x)\bigr|\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{I}(x)\,dx=\sigma^{-n}e^{-y\sigma}.$$

Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Для произвольной функции* $f \in H_n^p$, $1 \le p \le \infty$, *имеет место равенство*

$$(\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z) = i^n\,(\widehat{u}_2 * f)(z), \quad z = x+iy, \quad y>0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4 функция $\widehat{u}_3$ суммируема на прямой $\mathbb{R}+iy$ и является в полуплоскости $\Pi_y^- = \{z\colon \Im z < y\}$ аналитической функцией, стремящейся к нулю не медленнее, чем $|z|^{-2}$ при $z \to \infty$. Из интегральной теоремы Коши следует (см., например, [6, гл. 5, § 2]), что для любой функции f, аналитической и ограниченной в верхней полуплоскости Π, выполняется равенство

$$(\widehat{u}_3 * f)(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_3(z-x) f(x)dx = 0, \quad z = x+iy. \tag{2.21}$$

С другой стороны, из равенства (2.18) имеем соотношение

$$(\widehat{u}_3 * f)(z) = \Big(\big((-i)^n \widehat{u}_1^{(n)} - \widehat{u}_2\big) * f \Big)(z) = (-i)^n (\widehat{u}_1^{(n)} * f)(z) - (\widehat{u}_2 * f)(z).$$

Отсюда с учетом (2.21) следует равенство

$$(\widehat{u}_1^{(n)} * f)(z) = i^n\,(\widehat{u}_2 * f)(z), \quad z = x+iy. \tag{2.22}$$

Из свойства свертки

$$(\widehat{u}_1^{(n-k)} * f^{(k)})(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(\zeta)\, d\widehat{u}_1^{(n-k-1)}(z-\zeta)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_1^{(n-k-1)}(z-\zeta)\, df^{(k)}(\zeta) = (\widehat{u}_1^{(n-k-1)} * f^{(k+1)})(z), \quad k \in \mathbb{N},$$

получим равенство

$$(\widehat{u}_1^{(n)} * f)(z) = (\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z), \quad z = x+iy.$$

Последнее равенство и (2.22) дают утверждение леммы 6.

3. Оценка сверху

В данном разделе будет вычислено (теорема 3 и следствие 1) приближение класса Харди — Соболева линейным оператором A, задаваемым формулой (2.5). Как следствие, получены оценки сверху величин (1.2) и (1.4) (следствие 2).

Теорема 3. *При* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $y > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *для оператора свертки* (2.5) *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in H_n^p} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что для уклонения $f - Af$, где f — произвольная функция из класса Харди — Соболева H_n^p, справедливо представление

$$(f - Af)(z) = (-i)^n\,(\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z), \quad z = x+iy. \tag{3.2}$$

Для этого применим к обеим частям равенства (2.17) преобразование Фурье:

$$\widehat{\epsilon}(z) - \widehat{l}(z) = \widehat{u}_2(z), \quad z = x+iy.$$

Далее, используя свертку обеих частей полученного равенства с произвольной функцией $f \in H^p_n$ и применяя лемму 6, получаем

$$\Big((\widehat{\epsilon} - \widehat{l}) * f\Big)(z) = (\widehat{u}_2 * f)(z) = (-i)^n (\widehat{u}_1 * f^{(n)})(z), \quad z = x + iy.$$

Отсюда с учетом представления (2.3) и определения (2.5) получим представление (3.2).

Из равенства (3.2) и обобщенного неравенства Минковского (аналогично (2.13)) следует оценка сверху для нормы уклонения

$$\|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|\widehat{u}_1 * f^{(n)}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{u}_1\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} \|f^{(n)}\|_{H^p}.$$

Подставляя значение нормы u_1, вычисленное в лемме 5, имеем

$$\|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma} \|f^{(n)}\|_{H^p},$$

т. е. для класса Харди — Соболева справедлива оценка

$$\sup_{f \in H^p_n} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n} e^{-y\sigma}.$$

Теперь для доказательства равенства (3.1) осталось получить оценку снизу

$$\sup_{f \in H^p_n} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \sigma^{-n} e^{-y\sigma}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию $f_\sigma(z) := \sigma^{-n} e^{i\sigma z}$. Ясно, что $f_\sigma \in H^\infty_n$. Так как $l(\sigma) = 0$, то для f_σ имеет место равенство

$$Af_\sigma(z) = (\widehat{l} * f_\sigma)(z) = \sigma^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{l}(w)\, e^{i\sigma(z-w)}\, dw = \sigma^{-n}\, e^{i\sigma z}\ l(\sigma) \equiv 0.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\sup_{f \in H^\infty_n} \|f - Af\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \|f_\sigma - Af_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \|f_\sigma\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Для обоснования оценки снизу (3.3) при $1 \le p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h} \int_\sigma^{\sigma+h} \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\sigma z} \int_0^1 \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt, \quad h > 0,$$

где φ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $[0,1]$. Нетрудно понять, что $f_{\sigma,h}(z) \in H^p$, $p \ge 1$, и $\|f_{\sigma,h}(z)\|_{H^p} \to \infty$ при $h \to 0$.

Так как носителем функции l является отрезок $[-\sigma, \sigma]$, то

$$Af_{\sigma,h} = \frac{1}{h} \int_\sigma^{\sigma+h} l(t)\, \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt \equiv 0.$$

Для $f^{(n)}_{\sigma,h}$ имеет место представление

$$f^{(n)}_{\sigma,h}(z) = \frac{1}{h} \int_\sigma^{\sigma+h} (it)^n \varphi\left(\frac{t-\sigma}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\sigma z}\Big((i\sigma)^n f_{0,1}(hz) + \sum_{k=1}^{n} C^k_n h^k (i\sigma)^{n-k} f^{(k)}_{0,1}(hz)\Big).$$

Следовательно, справедливы соотношения

$$\sup_{f\in H_n^p} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \geq \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h} - Af_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f^{(n)}_{\sigma,h}\|_{H^p}} = \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f^{(n)}_{\sigma,h}\|_{H^p}}$$

$$\geq \lim_{h\to+0} \frac{e^{-\sigma y}\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}}{\sigma^n \|f_{0,1}\|_{H^p} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \sigma^{n-k} h^k \|f^{(k)}_{0,1}\|_{H^p}} = \sigma^{-n} e^{-y\sigma}.$$

Теорема 3 доказана. □

Обозначим через A_0 оператор свертки (2.5) в случае $y=0$, т. е. оператор свертки с преобразованием Фурье функции $l(t;0)$.

Следствие 1. *Для произвольного* $1\leq p\leq\infty$, $\sigma>0$, $n\in\mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in H_n^p} \|f - A_0 f\|_{H^p} = \sigma^{-n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что для произвольной функции $f\in H^p$ выполняется равенство

$$\lim_{y\to+0} \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|f - A_0 f\|_{H^p}\,. \tag{3.4}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\big|\|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} - \|f - A_0 f\|_{H^p}\big| \\ &= \big|\|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \pm \|f - A_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} - \|f - A_0 f\|_{H^p}\big| \\ &\leq \|Af - A_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} + \big|\|f - A_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} - \|f - A_0 f\|_{H^p}\big|\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь для доказательства (3.4) достаточно показать, что оба слагаемых в правой части неравенства (3.5) стремятся к нулю при $y\to+0$.

Для первого слагаемого имеет место оценка сверху

$$\|Af - A_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \leq \|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{H^p}, \tag{3.6}$$

где $\widehat{v}$ — преобразование Фурье функции v, задаваемой формулой

$$v(t) = v(t;y) = l(t;0) - l(t;y) = \begin{cases} \phi(-t)\,(1 - e^{-2y(\sigma+t)}), & -\sigma\leq t\leq 0,\\ \phi(\,t\,)\,(1 - e^{-2y(\sigma-t)}), & 0 < t\leq\sigma,\\ 0, & t\notin[-\sigma,\sigma], \end{cases}$$

в которой $\phi(t) = t^n(2\sigma - t)^{-n}$. Аналогично (2.19) можно получить представление функции $\widehat{v}$:

$$\widehat{v}(x) = \pi^{-1}x^{-2}\Bigg(v'(\sigma)\cos xt - v'(0) - \int\limits_0^\sigma v''(t)\cos xt\,dt\Bigg), \quad x\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, для $x\in\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{v}(z)| \leq \pi^{-1}\min\left\{M_1,\, x^{-2}M_2\right\},$$

где

$$M_1 = \|v\|_{L^1(0,\sigma)} \leq (1 - e^{-2y\sigma})\sigma,$$

$$M_2 = |v'(\sigma)| + |v'(0)| + \|v''\|_{L^1(0,\sigma)} \leq (2n(n-1) + 8n\sigma^{-1})(1 - e^{-2y\sigma}) + (8n+4)y + 4\sigma^{-1}y^2.$$

Откуда получим оценку
$$\|\widehat{v}\|_{L^1(\mathbb{R})} \le 4\pi^{-1}\sqrt{M_1 M_2},$$
в которой правая часть (и, следовательно, правая часть (3.6)) стремится к нулю при $y \to +0$.

Для второго слагаемого в (3.5) стремление к нулю при $y \to +0$ следует из определения пространства H^p. Точнее, по утверждению (c) леммы 2 если $f \in H^p$, то $A_0 f \in H^p$, а тогда и функция $f - A_0 f \in H^p$ и, следовательно,

$$\lim_{y\to+0} \|f - A_0 f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|f - A_0 f\|_{H^p}.$$

Используя (3.4) и (3.1), для произвольной функции $f \in H^p_n$ получим оценку сверху

$$\|f - A_0 f\|_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Оценку снизу можно получить аналогично оценке снизу в теореме 3, используя функции f_σ и $f_{\sigma,h}$, а именно:
$$\sup_{f\in H^\infty_n} \|f - A_0 f\|_{H^\infty} \ge \|f_\sigma - A_0 f_\sigma\|_{H^\infty} = \|f_\sigma\|_{H^\infty} = \sigma^{-n},$$

$$\sup_{f\in H^p_n} \|f - A_0 f\|_{H^p} \ge \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h} - A_0 f_{\sigma,h}\|_{H^p}}{\|f^{(n)}_{\sigma,h}\|_{H^p}} = \lim_{h\to+0} \frac{\|f_{\sigma,h}\|_{H^p}}{\|f^{(n)}_{\sigma,h}\|_{H^p}} = \sigma^{-n}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Следствие 1 доказано. □

Следствие 2. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty$, $\sigma > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы неравенства*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_\sigma(H^p_n)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}, \quad y > 0, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{H^p} \le \sigma^{-n}. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По утверждению (c) леммы 2 если $f \in H^p$, то $Af \in E^p_\sigma$, и тогда из теоремы 3 для произвольной функции $f \in H^p_n$ вытекает неравенство

$$\widetilde{e}_\sigma(f)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|f - Af\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma},$$

а из следствия 1 — неравенство

$$e_\sigma(f)_{H^p} \le \|f - A_0 f\|_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Откуда следуют (3.7) и (3.8) соответственно.

4. Оценка снизу

В этом разделе будет получена оценка снизу величины (1.4) и доказаны теоремы 1 и 2.

Лемма 7. *Для произвольных* $1 \le p \le \infty,\ y > 0,\ \sigma > 0,\ n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть τ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\sigma < \tau$, и число δ задается равенством $\delta = (\tau - \sigma)/2$. Рассмотрим функцию $g = g_{\tau,\delta,y}$, определяемую равенством

$$g(t) = e^{yt} \begin{cases} (t + \delta - \tau)\delta^{-1}, & t \in [\tau - \delta, \tau], \\ (\tau + \delta - t)\delta^{-1}, & t \in (\tau, \tau + \delta], \\ \qquad 0, & t \notin [\tau - \delta, \tau + \delta]. \end{cases}$$

Для произвольной функции $f \in H^p$, $1 \le p \le \infty$, справедливо (точное) неравенство

$$\|\widehat{g} * f\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} \|f\|_{H^p}, \tag{4.2}$$

в котором преобразование Фурье $\widehat{g}$ функции g имеет представление

$$\widehat{g}(x+iy) = 2\, e^{i\tau x}\, \frac{1-\cos\delta x}{\delta\, x^2}.$$

Откуда следует равенство

$$\|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}+iy)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(x+iy)\, e^{-i\tau x} dx = g(\tau)\, e^{-y\tau} = 1.$$

Кроме того, так как носителем функции g является отрезок $[\tau-\delta, \tau+\delta]$, не пересекающийся с отрезком $[-\sigma, \sigma]$, то для любой функции $q \in E_\sigma$ справедливо тождество $\widehat{g} * q \equiv 0$.

Убедимся, что в случае $p = \infty$ для функции $f_\tau(z) = \tau^{-n}\, e^{i\tau z}$ элементом наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа σ при любом $\tau > \sigma$ является нуль. Для произвольной функции f из H^∞ вида $f(z) = e^{i\tau z} - q(z)$, где $q \in E_\sigma$, имеет место равенство

$$(\widehat{g} * f)(z) = e^{i\tau z}. \tag{4.3}$$

Используя неравенство (4.2) и равенство (4.3), для произвольной функции $q \in E_\sigma$ получим соотношения

$$\|f_\tau - q\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \|\widehat{g} * (f_\tau - q)\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \|f_\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \tau^{-n}\, e^{-y\tau}.$$

Следовательно, $e_\sigma(f_\tau)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \tau^{-n}\, e^{-y\tau}$, что влечет оценку снизу:

$$\mathcal{E}_\sigma(H^p_n)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{\tau\to\sigma+0} e_\sigma(f_\tau)_{L^\infty(\mathbb{R}+iy)} = \lim_{\tau\to\sigma+0} \tau^{-n}\, e^{-y\tau} = \sigma^{-n}\, e^{-y\sigma}.$$

Для обоснования (4.1) при $1 \le p < \infty$ рассмотрим функцию

$$f_{\tau,h}(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{\tau}^{\tau+h} \varphi\left(\frac{t-\tau}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\tau z} \int\limits_0^1 \varphi(t)\, e^{ihzt}\, dt,$$

где φ — неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $[0,1]$. Для любой функции $f \in H^p$ вида $f = f_{\tau,h} - q$, где $q \in E_\sigma$, имеет место равенство

$$\widehat{g} * f = \widehat{g} * f_{\tau,h}.$$

Откуда, используя неравенство (4.2), получаем

$$e(f_{\tau,h})_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \inf_{q\in E_\sigma} \|f_{\tau,h} - q\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \inf_{q\in E_\sigma} \|\widehat{g} * (f_{\tau,h} - q)\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)} = \|\widehat{g} * f_{\tau,h}\|_{L^p(\mathbb{R}+iy)}.$$

Имеют место представления:

$$\left(\widehat{g} * f_{\tau,h}\right)(z) = e^{i\tau z} \int\limits_0^1 \varphi(u) \left(1 - \frac{uh}{\delta}\right) e^{izuh}\, du = e^{i\tau z} \left(f_{0,1}(hz) + \frac{ih}{\delta} f'_{0,1}(hz)\right),$$

$$f^{(n)}_{\tau,h}(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{\tau}^{\tau+h} (it)^n \varphi\left(\frac{t-\tau}{h}\right) e^{izt} dt = e^{i\tau z} \left((i\tau)^n f_{0,1}(hz) + \sum_{k=1}^n C_n^k h^k (i\tau)^{n-k} f^{(k)}_{0,1}(hz)\right).$$

Используя эти представления, для произвольных $1 \le p < \infty$ и $\tau > \sigma$ приходим к неравенствам

$$\mathcal{E}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \ge \lim_{h\to+0} \frac{e(f_{\tau,h})_{L^p(\mathbb{R}+iy)}}{\|f_{\tau,h}^{(n)}\|_{H^p}}$$

$$\ge \lim_{h\to+0} \frac{e^{-\tau y}\left(\|f_{0,1}\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)} - h\,\delta^{-1}\,\|f_{0,1}'\|_{L^p(\mathbb{R}+iyh)}\right)}{\tau^n\,\|f_{0,1}\|_{H^p} + \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k\,\tau^{n-k}\,h^k\,\|f_{0,1}^{(k)}\|_{H^p}} = \tau^{-n}\,e^{-y\tau}. \tag{4.4}$$

Переходя в (4.4) к пределу при $\tau \to \sigma + 0$, получим оценку (4.1). □

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 1 и 2. Неравенство (3.7) следствия 2 и неравенство (4.1) леммы 7 дают цепочку неравенств

$$\sigma^{-n}\,e^{-y\sigma} \le \mathcal{E}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \widetilde{\mathcal{E}}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \sigma^{-n}\,e^{-y\sigma},$$

откуда следует равенство (1.5) теоремы 2. Соответственно, неравенство (3.8) следствия 2 и неравенство (4.1) леммы 7 дают для произвольного $y > 0$ цепочку неравенств

$$\sigma^{-n}\,e^{-y\sigma} \le \widetilde{\mathcal{E}}(H_n^p)_{L^p(\mathbb{R}+iy)} \le \mathcal{E}(H_n^p)_{H^p} \le \sigma^{-n}.$$

Отсюда следует равенство (1.3) теоремы 1. □

Автор выражает благодарность профессору В. В. Арестову за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. **Ибрагимов И.И.** Теория приближения целыми функциями. Баку: ЭЛМ, 1979. 465 с.
3. **Бабенко К.И.** О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 22, № 55. С. 631–640.
4. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.
5. **Кусис П.** Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984. 368 с.
6. **Свешников А.Г., Тихонов А.Н.** Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970. 304 с.

Акопян Роман Размикович
Поступила 11.01.2010
канд. физ.-мат. наук
зав. кафедрой
Озёрский технологический институт НИЯУ МИФИ
e-mail: R.Akopyan@vm.oti.ru

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518

О СКОРОСТИ РОСТА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДВОЙНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СУММ ФУРЬЕ[1]

Н. Ю. Антонов

Доказана теорема о том, что для произвольной последовательности $\{S_{m_k,n_k}(f,x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ двойных прямоугольных сумм Фурье любой функции из класса $L(\ln^+ L)^2([0,2\pi)^2)$ почти всюду выполняется соотношение $S_{m_k,n_k}(f,x,y)=o(\ln k)$.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, сходимость почти всюду.

N. Yu. Antonov. On the growth rate of arbitrary sequences of double rectangular Fourier sums.

The theorem is proved that an arbitrary sequence $\{S_{m_k,n_k}(f,x,y)\}_{k=1}^{\infty}$ of double rectangular Fourier sums of any function from the class $L(\ln^+ L)^2([0,2\pi)^2)$ satisfies almost everywhere the relation $S_{m_k,n_k}(f,x,y)=o(\ln k)$.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, almost everywhere convergence.

Пусть d — натуральное число, $\mathbb{T}^d=[0,2\pi)^d$ — d-мерный тор, $\mathbb{Z}^d$ — целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx}=k_1x_1+\ldots+k_dx_d$,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kx}} \tag{1}$$

— кратный тригонометрический ряд Фурье 2π-периодической по каждой переменной и суммируемой на $\mathbb{T}^d$ функции f и для $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_d)$, $n_j\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant d$,

$$S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})=\sum_{\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d):\ |k_j|\leqslant n_j,1\leqslant j\leqslant d} a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kx}}$$

— $\mathbf{n}$-я прямоугольная частичная сумма ряда (1).

Пусть $\varphi\colon\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определенных на $\mathbb{T}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(|f(\mathbf{t})|)d\mathbf{t}<\infty.$$

Будем полагать для $u\geqslant 0\quad \ln^+u=\ln(u+e)$.

В случае $d=1$ Л. Карлесон [1] доказал, что если $f\in L^2(\mathbb{T})$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду. Р. Хант [2] обобщил это утверждение о сходимости почти всюду рядов Фурье на функции из классов $L^p(\mathbb{T})$, $p>1$, и $L(\ln^+L)^2(\mathbb{T})$, а П. Шёлин [3] — на функции из класса $L(\ln^+L)(\ln^+\ln^+L)(\mathbb{T})$. Автором [4] было установлено, что условие $f\in L(\ln^+L)(\ln^+\ln^+\ln^+L)(\mathbb{T})$ также является достаточным для сходимости почти всюду ряда Фурье функции f.

А. Н. Колмогоровым [5] было показано, что для произвольной функции $f\in L(\mathbb{T})$ сходимость почти всюду, вообще говоря, не имеет места: существует функция $f\in L(\mathbb{T})$ такая, что

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-Т-1-1004); а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00320).

ее ряд Фурье неограниченно расходится почти всюду. С другой стороны, имеет место полученная Г. Харди [6] оценка порядка роста частичных сумм тригонометрических рядов Фурье: для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$ почти всюду выполняется соотношение

$$S_n(f,x) = o(\ln n). \tag{2}$$

К. И. Осколкову [7] принадлежит следующее обобщение оценки (2): для любой функции $f \in L(\mathbb{T})$ и любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива оценка

$$S_{n_k}(f,x) = o(\ln k) \quad \text{п.в.}$$

Отметим, что наилучший на сегодня результат о расходимости рядов Фурье на множестве положительной меры принадлежит С. В. Конягину [8]: для любой неубывающей функции φ: $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u\sqrt{\ln u/\ln\ln u})$ при $u \to \infty$, найдется функция из класса $\varphi(L)(\mathbb{T})$ такая, что ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду на $\mathbb{T}$.

Пусть $d \geqslant 2$. Ряд (1) называется сходящимся по кубам (в случае $d = 2$ — по квадратам) в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, если последовательность кубических частичных сумм, т. е. последовательность $S_n(f,\mathbf{x}) = S_{\mathbf{n}}(f,\mathbf{x})$, где $\mathbf{n} = (n, n, \ldots, n)$, имеет предел при $n \to \infty$.

Сходимость почти всюду по квадратам рядов Фурье функций из $L^2(\mathbb{T}^2)$ была установлена Н. Р. Тевзадзе [9]. Ч. Фефферман [10] распространил этот результат на функции $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$, $p > 1$, $d \geqslant 2$, а затем П. Шёлин [11] доказал, что если функция f принадлежит классу $L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+ L)(\mathbb{T}^d)$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду.

Наилучший в настоящий момент результат, касающийся расходимости по кубам кратных рядов Фурье функций из $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, $d \geqslant 2$, как и в одномерном случае, принадлежит С. В. Конягину [12]: для любой функции $\varphi(u) = o(u(\ln u)^{d-1}\ln\ln u)$ при $u \to \infty$ существует $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ с расходящимся всюду по кубам рядом Фурье.

Пусть последовательность $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$ представима в виде

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ — неотрицательные вещественные числа, а $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел. Автором показано, что в этом случае для любой функции f из класса $L(\ln^+ L)^d(\ln^+\ln^+\ln^+ L)(\mathbb{T}^d)$ последовательность $S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})$ сходится почти всюду [13], а если $f \in L(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$ [14], то при почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\ln k).$$

Заметим, что результат работы [13] усиливает цитированный выше результат П. Шёлина [11].

При $d = 2$ Г. А. Карагулян [15] доказал, что для любой последовательности $\mathbf{n}_k = (m_k, n_k)$ и для каждой функции $f(\mathbf{x}) = f(x,y) \in L\ln^+ L(\mathbb{T}^2)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = S_{m_k,n_k}(f,x,y) = o(\ln^2 k) \quad \text{п.в.}$$

Цель настоящей работы — установить справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Пусть* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— произвольные последовательности натуральных чисел, функция* f *принадлежит классу* $L(\ln^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$. *Тогда для почти всех точек* $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ *справедлива оценка*

$$S_{m_k,n_k}(f,x,y) = o(\ln k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L(\ln^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$. Обозначим через $D_k(t)$ ядро Дирихле

$$D_k(t) = \frac{\sin\left(k+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}.$$

Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{T}$ имеем

$$S_{m,n}(f,x,y) = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{T}\,\mathbb{T}} D_m(u-x) D_n(v-y) f(u,v)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)(u-x)}{2\sin\dfrac{u-x}{2}} \Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv\Big) du.$$

Отсюда, используя тригонометрическое тождество

$$\frac{\sin\Big(m+\dfrac{1}{2}\Big)(u-x)}{2\sin\dfrac{u-x}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}(\sin mu\,\cos mx - \cos mu\,\sin mx) + \frac{1}{2}\cos m(u-x),$$

получаем

$$S_{m,n}(f,x,y) = \cos mx \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\sin mu \Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv\Big) du$$

$$- \sin mx \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\cos mu \Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv\Big) du$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos m(u-x) \Big(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_n(v-y) f(u,v)dv\Big) du$$

$$= \cos mx \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\sin mu\, S_n(f(u,\cdot),y)du$$

$$- \sin mx \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\cos mu\, S_n(f(u,\cdot),y)du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos m(u-x)\, S_n(f(u,\cdot),y)du, \qquad (3)$$

где внешние интегралы понимаются в смысле главного значения, т. е. как предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла по множеству $\mathbb{T}\backslash(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, а $S_n(f(u,\cdot),y)$ есть значение в точке y n-й частичной суммы (однократного) ряда Фурье функции $f(u,\cdot)$ как функции одного переменного при фиксированном u.

Пусть $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольные последовательности натуральных чисел. Из (3) для произвольной точки $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ следует, что

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{m_k,n_k}(f,x,y)|}{\ln(k+1)} \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Big|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\sin m_k u\, S_{n_k}(f(u,\cdot),y)du\Big|}{\ln(k+1)}$$

$$+ \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\Big|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}\,\cos m_k u\, S_{n_k}(f(u,\cdot),y)du\Big|}{\ln(k+1)} + \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} |S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|du}{\ln(k+1)}. \qquad (4)$$

Покажем, что каждое из слагаемых в правой части (4) конечно для почти всех $(x,y) \in \mathbb{T}^2$.

Рассмотрим первое слагаемое. Обозначим

$$F_k(u,y) = \sin m_k u\, S_{n_k}(f(u,\cdot),y), \qquad F(u,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|.$$

Лемма A [2, теорема 2]. *Пусть* $g \in L(\ln^+ L)^2(\mathbb{T})$. *Тогда мажоранта* $\sup\{|S_n(g,x)| : n \in \mathbb{N}\}$ *частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции* g *интегрируема и*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(g,x)|dx \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}} |g(x)|(\ln^+ |g(x)|)^2 dx,$$

где $C > 0$ *— некоторая абсолютная константа.*

Зафиксируем $u \in \mathbb{T}$. Используя лемму A, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}} F(u,y)dy = \int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|dy \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}} |f(u,y)| \left(\ln^+ |f(u,y)|\right)^2 dy. \tag{5}$$

Проинтегрируем (5) по $u \in \mathbb{T}$. Получим

$$\iint\limits_{\mathbb{T}^2} F(u,y)dy\,du \leqslant \iint\limits_{\mathbb{T}^2} |f(u,y)| \left(\ln^+ |f(u,y)|\right)^2 dy\,du. \tag{6}$$

Согласно условиям нашей теоремы правая часть (6) конечна. Отсюда, используя теорему Фубини, получаем, что для почти всех $y \in \mathbb{T}$

$$\int\limits_{\mathbb{T}} F(u,y)du < +\infty. \tag{7}$$

Лемма B [7, доказательство теоремы 1]. *Пусть* $g \in L(\mathbb{T})$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность измеримых функций на периоде* $\mathbb{T}$ *таких, что* $|g_k(x)| \leqslant |g(x)|$,

$$\widetilde{g}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} g_k(u)du, \quad k \in \mathbb{N},$$

— функции, тригонометрически сопряженные к функциям g_k. *Тогда функция*

$$G(x) = G(g,\{g_k\},x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\widetilde{g}_k(x)|}{\ln(k+1)}$$

конечна для почти всех $x \in \mathbb{T}$.

Зафиксируем точку $y \in \mathbb{T}$, удовлетворяющую условию (7). Применяя лемму B к функциям $g_k = F_k(\cdot,y)$, $k \in \mathbb{N}$, и $g = F(\cdot,y)$, получаем

$$G(F,\{F_k(\cdot,y)\},x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\widetilde{F}_k(x,y)|}{\ln(k+1)} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} \, \sin m_k u \, S_{n_k}(f(u,\cdot),y)du\right|}{\ln(k+1)} < \infty \quad \text{п.в.}$$

Отсюда, учитывая, что (7) выполняется для почти всех $y \in \mathbb{T}$, заключаем, что первое слагаемое в правой части (4) конечно для почти всех $(x,y) \in \mathbb{T}^2$. Конечность почти всюду второго слагаемого в правой части (4) доказывается аналогично.

Рассмотрим третье слагаемое. Используя неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} |S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|du}{\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |S_{n_k}(f(u,\cdot),y)|dy$$

и (6), получаем, что при почти всех y независимо от x третье слагаемое в правой части (4) конечно почти всюду.

Таким образом, все три слагаемые в правой части (4) конечны почти всюду. Следовательно, левая часть (4) также конечна при почти всех $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, или

$$S_{m_k,n_k}(f, x, y) = O(\ln k) \quad \text{п.в.} \tag{8}$$

Нам осталось доказать, что O-большое в последней оценке можно заменить на o-малое. Для этого воспользуемся следующими стандартными рассуждениями.

Оператор $V : L(\mathbb{T}^d) \to L(\mathbb{T}^d)$ называется оператором типа (φ, φ), если существует константа $A > 0$ такая, что для всех $f \in \varphi(L)$

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|V(f, x)|)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(A|f(x)|)dx.$$

Оператор V инвариантен относительно сдвига, если

$$V(f(\cdot + s), x) = V(f(\cdot), x + s), \quad x, s \in \mathbb{T}^d.$$

Лемма С [16, с. 154, теорема 3]. *Пусть $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность линейных операторов из $L(\mathbb{T}^d)$ в $L(\mathbb{T}^d)$, каждый из которых является оператором типа (φ, φ) и инвариантен относительно сдвига. Пусть φ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(u) \ \ \text{выпуклая и возрастающая на } [0, +\infty),$$
$$\varphi(u^{1/2}) \ \ \text{вогнутая на } [0, +\infty).$$

Предположим, что для каждой функции $g \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$

$$\limsup_{k\to\infty} |V_k(g, \mathbf{x})| < \infty \tag{9}$$

для всех $\mathbf{x}$ из некоторого (зависящего от g) множества положительной меры. Пусть

$$V^*(g, \mathbf{x}) = \sup_{k \geqslant 1} |V_k(g, \mathbf{x})|.$$

Тогда найдется положительное число K такое, что для всех $g \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$

$$\operatorname{mes}\{\mathbf{x} : V^*(g, \mathbf{x}) > z\} \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi\left(\frac{K|g(\mathbf{x})|}{z}\right) d\mathbf{x}, \quad z > 0.$$

Согласно (8) последовательность операторов

$$V_k(f, x, y) = \frac{S_{m_k,n_k}(f, x, y)}{\ln(k + 1)}$$

удовлетворяет условию (9) леммы С. Ясно, что операторы V_k инвариантны относительно сдвига. Используя неравенство Иенсена, нетрудно показать, что для выпуклых φ операторы V_k являются операторами типа (φ, φ). В самом деле, если $f \in \varphi(L)$, то

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} \varphi(|V_k(f, x, y)|)dx\, dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^2} \varphi\left(\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} D_{m_k}(u - x)D_{n_k}(v - y)f(u, v)du\, dv\right|\right) dxdy$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{T}^2} \varphi\left(\frac{(m_k + 1)(n_k + 1)}{\pi^2}|f(u, v)|\right) dudv\, dxdy = \int\limits_{\mathbb{T}^2} \varphi(A|f(x)|)dx,$$

где $A=(m_k+1)(n_k+1)\pi^{-2}$. Из леммы C, примененной к этой последовательности операторов и функции $\varphi(u)=u(\ln^+u)^2$, $u\geqslant 0$, вытекает оценка

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_{m_k,n_k}(f,x,y)|}{\ln(k+1)}>z\right\}\leqslant\iint\limits_{\mathbb{T}^2}\frac{K|f(x,y)|}{z}\left(\ln^+\left(\frac{K|f(x,y)|}{z}\right)\right)^2dx\,dy$$

$$\leqslant\frac{K}{z}\iint\limits_{\mathbb{T}^2}|f(x,y)|(\ln^+|f(x,y)|)^2dx\,dy,\quad z>K. \tag{10}$$

Пусть $z>0$. Для сколь угодно большого $\alpha>0$ найдется тригонометрический полином $h(x,y)$ такой, что

$$\frac{K}{z}\iint\limits_{\mathbb{T}^2}|\alpha f(x,y)-h(x,y)|(\ln^+|\alpha f(x,y)-h(x,y)|)^2dx\,dy<1.$$

Отсюда, замечая, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|S_{m_k,n_k}(h,x,y)|}{\ln(k+1)}=0\quad\text{для всех}\quad(x,y)\in\mathbb{T}^2,$$

и применяя (10) к функции $\alpha f(x,y)-h(x,y)$, получаем

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\ \limsup_{k\to\infty}\frac{|S_{m_k,n_k}(f,x,y)|}{\ln(k+1)}>z\right\}$$

$$=\operatorname{mes}\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\ \limsup_{k\to\infty}\frac{|S_{m_k,n_k}(\alpha f-h,x,y)|}{\ln(k+1)}>\alpha z\right\}$$

$$\leqslant\operatorname{mes}\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\ \sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{|S_{m_k,n_k}(\alpha f-h,x,y)|}{\ln(k+1)}>\alpha z\right\}<\frac{K}{\alpha z},\qquad\alpha z>K.$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha\to\infty$, получаем

$$\operatorname{mes}\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\ \limsup_{k\to\infty}\frac{|S_{m_k,n_k}(f,x,y)|}{\ln(k+1)}>z\right\}=0$$

для всех $z>0$, откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}S_{m_k,n_k}(f,x,y)/\ln(k+1)=0$ для почти всех $(x,y)\in\mathbb{T}^2$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Carleson L.** On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. Vol. 116. P. 135–157.
2. **Hunt R.A.** On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues: proc. conf. Edwardsville (Ill., 1967). Carbondale, Illinois: SIU Press, 1968. P. 235–255.
3. **Sjölin P.** An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series // Ark. Mat. 1969. Vol. 7, no. 6. P. 551–570.
4. **Antonov N.Yu.** Convergence of Fourier series // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 187–196.
5. **Kolmogoroff A.** Une série de Fourier–Lebesgue divergente preque partout // Fund. Math. 1923. Vol. 4. P. 324–328.
6. **Hardy G.H.** On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. 1913. Vol. 12. P. 365–372.
7. **Осколков К.И.** Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.
8. **Конягин С.В.** О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 1. С. 103–126.

9. **Тевзадзе Н.Р.** О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообщ. АН ГССР. 1970. Т. 58, № 2. С. 277–279.
10. **Fefferman C.** On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77, no. 5. P. 744–745.
11. **Sjölin P.** Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Ark. Mat. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 65–90.
12. **Konyagin S.V.** On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. 1995. Vol. 61, no. 1-4. P. 305–329.
13. **Антонов Н.Ю.** О сходимости почти всюду последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 3–18.
14. **Антонов Н.Ю.** О скорости роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 2. С. 10–29.
15. **Карагулян Г.А.** Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 3. С. 55–74.
16. **Stein E.M.** On limits of sequences of operators // Ann. Math. 1961. Vol. 74, no. 1. P. 140–170.

Антонов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Поступила 30.11.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.86

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ[1]

В. В. Арестов

Обсуждается задача о точных неравенствах для линейных операторов на множестве тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов $\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)\,dx$. Приведено решение задачи о тригонометрических полиномах с заданной старшей гармоникой, наименее уклоняющихся от нуля относительно таких функционалов по множеству всех функций φ, определенных, неотрицательных и неубывающих на полуоси $[0,+\infty)$.

Ключевые слова: точные неравенства для тригонометрических полиномов, интегральный функционал, тригонометрические полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля.

V. V. Arestov. Sharp Inequalities for Trigonometric Polynomials With Respect to Integral Functionals.

The problem on sharp inequalities for linear operators on the set of trigonometric polynomials with respect to integral functionals $\int_0^{2\pi} \varphi(|f(x)|)\,dx$ is discussed. A solution of the problem on trigonometric polynomials with given leading harmonic that deviate the least from zero with respect to such functionals over the set of all functions φ determined, nonnegative, and nondecreasing on the semi-axis $[0,+\infty)$ is given.

Keywords: sharp inequalities for trigonometric polynomials, integral functional, trigonometric polynomials that deviate the least from zero.

1. Введение. Предыстория

1.1. Пусть $C_{2\pi} = C_{2\pi}(\mathbb{P})$ есть пространство непрерывных 2π-периодических функций со значениями в поле $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ вещественных чисел или в поле $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ комплексных чисел; это есть банахово пространство относительно равномерной нормы

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f(t)| :\ t \in [0, 2\pi]\}.$$

Обозначим через $\mathscr{T}_n(\mathbb{P})$ множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.1}$$

порядка $n \geq 0$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P}$. В дальнейшем для полиномов (1.1) будет использоваться также экспоненциальная форма записи

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Во множестве $\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ выполняется известное неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{C_{2\pi}} \leq n\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C}); \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213).

все экстремальные полиномы неравенства (1.2) имеют вид $ae^{int} + be^{-int}$, где a, b — произвольные комплексные числа. С. Н. Бернштейн получил неравенство (1.2) для полиномов с вещественными коэффициентами [1, п. 10]. Более того, в первоначальном варианте [2] работы [1] он доказал это неравенство с константой n для нечетных и четных тригонометрических полиномов и, как следствие, с константой $2n$ на классе всех полиномов (1.1) из $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$. В авторских комментариях [3, п. 3.4] С. Н. Бернштейна к работе [1] имеется следующая фраза: “Приведенный здесь вывод, показывающий, что общее неравенство является элементарным следствием того же неравенства для суммы синусов, сообщенный мне Э. Ландау вскоре после появления диссертации [2], впервые был опубликован в [4, § 10]”. Отметим, что работа [2] вышла в 1912 г., а монография [4] — в 1926 г.

В 1914 г. М. Рисс [5; 6] (см. также, к примеру, [7, т. 2, гл. 10]) получил неравенство (1.2) с наилучшей константой n (как на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$, так и на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$) с помощью известной интерполяционной формулы для производной тригонометрического полинома, а именно М. Рисс доказал такое утверждение.

Теорема 1. *Для производной произвольного тригонометрического полинома $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ порядка $n \geq 1$ имеет место формула*

$$f_n'(t) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \alpha_k f_n(t + \tau_k), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{1.3}$$

в которой

$$\tau_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, \qquad \alpha_k = \frac{1}{n\left(2\sin\dfrac{\tau_k}{2}\right)^2}, \qquad 1 \leq k \leq 2n.$$

Для коэффициентов формулы (1.3) выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_k = n,$$

поэтому из формулы (1.3) следует неравенство (1.2) (с константой n).

Как следствие (1.2) при любых натуральных n и r имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_{C_{2\pi}} \leq n^r \|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.4}$$

В дальнейшем неравенства (1.2) и (1.4) обобщались в разных направлениях. На множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим функционал $\|f\|_p$ для $0 \leq p \leq +\infty$, определенный в зависимости от значений p соотношениями

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \max\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{R}\} = \|f\|_{C_{2\pi}},$$

$$\|f\|_0 = \lim_{p\to+0} \|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(t)| dt\right).$$

В 1933 г. А. Зигмунд с помощью интерполяционной формулы М. Рисса (1.3) доказал следующее утверждение (см. [7, т. 2, гл. 10, теорема (3.16)]).

Теорема 2. *Для каждой функции φ, неотрицательной, неубывающей и выпуклой на полуоси $[0,+\infty)$, имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f_n'(t)|)dt \le \int\limits_0^{2\pi} \varphi(n|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) *точное и на функциях*

$$f_n(t) = A\cos(nt+\xi), \qquad A,\xi \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

обращается в равенство. Если функция φ строго возрастает на $[0,+\infty)$, то равенство в (1.5) *достигается лишь на полиномах* (1.6).

Как видно из доказательства этой теоремы в [7, т. 2, гл. 10], неравенство (1.6) выполняется на самом деле на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$.

Функции $\varphi(u) = u^p,\ u \in [0,+\infty)$, при $p \ge 1$ удовлетворяют условиям теоремы 2 Зигмунда. Поэтому теорема 2 содержит, в частности, неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{L_p} \le n\|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}), \tag{1.7}$$

в пространствах $L_p,\ p \ge 1$. Как следствие, для любых натуральных n, r при $1 \le p \le +\infty$ имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_{L_p} \le n^r\|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.8}$$

В 1975 г. В. И. Иванов [8] и Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд [9] построили теорию приближения 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$. В частности, они изучили неравенство Бернштейна в $L_p,\ 0 < p < 1$, и доказали, что для любого $p,\ 0 < p < 1$, найдется константа $c(p)$ такая, что при $n \ge 1$

$$\|f_n'\|_{L_p} \le c(p)\, n\, \|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.9}$$

Доказательство этого результата в работах [8; 9] основано на специально подобранных интегральных представлениях тригонометрических полиномов. П. Освальд в [10] для обоснования неравенства (1.9) применил соответствующие квадратурные формулы. Явных выражений для величины $c(p)$ в (1.9) в работах [8–10] нет. П. Неваи в работе [11], опубликованной в 1979 г., доказал неравенство (1.9) с константой

$$c(p) = \left(\frac{8}{p}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < 1.$$

На самом деле, как оказалось, наилучшей в неравенстве (1.9) является константа $c(p) = 1$, т. е. неравенство (1.7) справедливо при всех $p,\ 0 \le p < +\infty$. Этот результат был получен автором в 1978–1981 гг.; в работе [13] приведены формулировки и описан метод исследования, в работе [14] изложены полные доказательства. Более подробно результаты работы [14] будут обсуждаться ниже.

В 1980 г. была опубликована работа А. Мате и П. Неваи [12], в которой тонкими методами теории ортогональных полиномов, в частности, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть φ — неотрицательная, неубывающая и выпуклая функция, определенная на $[0,\infty)$, и пусть $0 < p < 1$. Тогда на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ тригонометрических полиномов f_n порядка n справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi\left(\left|\frac{f_n'(t)}{n}\right|^p\right)dt \le \int\limits_0^{2\pi} \varphi(4e|f_n(t)|^p)dt.$$

Из этого утверждения, в частности, следует, что неравенство (1.9) выполняется с константой $c(p)$, удовлетворяющей условию

$$c(p) \le (4e)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < 1.$$

Статья [12] опубликована позже работы [13]. Однако сдана в печать статья [12] была раньше, чем вышла статья [13]. Следует сказать, что методы работ [13; 14] и работы [12] — существенно различные.

1.2. В работах автора [13; 14] изучались неравенства типа (1.5) для более широкого класса функций φ и более широкого класса операторов в пространстве полиномов.

Пусть Φ^+ — множество функций φ, неубывающих, локально абсолютно непрерывных на $(0, +\infty)$ и таких, что функция $\varphi(e^v)$ является выпуклой вниз на $(-\infty, \infty)$ или, что то же самое, функция $u\varphi'(u)$ не убывает на $(0, +\infty)$. Этому классу принадлежат функции φ, которые не убывают и выпуклы вниз на $[0, +\infty)$, а также конкретные функции $\ln u$, $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\} = \ln \max(1, u)$, u^p при всех $p > 0$.

В [13; 14] изучались на самом деле неравенства не для тригонометрических полиномов на торе, а для алгебраических многочленов на единичной окружности комплексной плоскости. Для этого использовался известный факт, что формула

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}) \tag{1.10}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка n и множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов порядка $2n$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ — множество алгебраических многочленов степени $n \ge 0$ с комплексными коэффициентами. Для многочленов

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \binom{n}{k} z^k, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k} z^k$$

многочлен

$$(\Lambda_n P_n)(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \binom{n}{k} z^k \tag{1.11}$$

называется композицией Сеге многочленов Λ_n и P_n. Свойства композиции Сеге можно найти в [15, отд. V; 16, гл. IV], см. также работы [17; 18] и приведенную в них библиографию. При фиксированном Λ_n композиция Сеге (1.11) является линейным оператором в $\mathscr{P}_n$. Именно такие операторы рассматривались в работах [13; 14].

Пусть Ω_n^+ и Ω_n^- — множества операторов (1.11), порожденных многочленами Λ_n, все n нулей которых лежат в единичном круге $|z| \le 1$ или в области $|z| \ge 1$ соответственно. Положим $\Omega_n^0 = \Omega_n^+ \bigcap \Omega_n^-$. Операторы из Ω_n^+, Ω_n^- и $\Omega_n^+ \bigcap \Omega_n^-$ характеризуются тем, что многочлены P_n, все n нулей которых лежат соответственно в единичном круге $|z| \le 1$, области $|z| \ge 1$ и на единичной окружности $|z| = 1$, отображаются по формуле (1.11) в полиномы с тем же самым расположением нулей (см. [15, отд. V, задачи 151, 152, 116, 117] и библиографию в [14]).

Одним из основных в работах [13; 14] является следующее утверждение.

Теорема 4. *Для операторов $\Lambda_n \in \Omega_n = \Omega_n^+ \cap \Omega_n^-$ и функций $\varphi \in \Phi^+$ на множестве $\mathscr{P}_n$ выполняется неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|) dt \le \int_0^{2\pi} \varphi(c_n |P_n(e^{it})|) dt, \qquad P_n \in \mathscr{P}_n, \tag{1.12}$$

$$c_n = c_n(\Lambda_n) = \max\{|\lambda_n|, |\lambda_0|\}. \tag{1.13}$$

Неравенство (1.12) *точное и, в соответствии с тем, будет ли* Λ_n *принадлежать множеству* Ω_n^+, Ω_n^- *или* $\Omega_n^+\bigcap\Omega_n^-$, *на многочленах*

$$az^n, \qquad b=const, \qquad az^n+b, \qquad (a,b\in\mathbb{C}) \tag{1.14}$$

оно обращается в равенство.

При определенных условиях на Λ_n и φ других экстремальных многочленов в (1.12), кроме (1.14), нет [14, теорема 5].

Как частный случай результатов работы [14] справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Для функций* $\varphi\in\Phi^+$ *выполняется следующее точное неравенство*:

$$\int\limits_0^{2\pi}\varphi(|f_n'(t)|)dt\le\int\limits_0^{2\pi}\varphi(n|f_n(t)|)dt, \qquad f_n\in\mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.15}$$

На полиномах $f_n(t)=ae^{-int}+be^{int}$, $a,b\in\mathbb{C}$, *неравенство* (1.15) *обращается в равенство*; *если функция* $u\varphi'(u)$ *строго возрастает на* $(0,+\infty)$, *то других экстремальных полиномов нет.*

Метод исследования точных неравенств (1.12)–(1.13) в [13; 14] можно весьма коротко и схематично охарактеризовать следующими тремя этапами.

1. Рассматриваются линейные операторы, имеющие вид композиции Сеге (1.11). Используются известные свойства композиции Сеге, связанные с расположением нулей многочленов. Новых свойств композиции Сеге в работах [13; 14] нет.

2. Неравенство (1.12)–(1.13) для функции $\varphi(u)=\ln u$, $u\in(0,+\infty)$, обосновывается с помощью теории субгармонических функций. При этом используется следующее известное утверждение (см., например, [15, отд. III, задача 175; 19, гл. VI, § 2]). Если функция h мероморфна в круге $|z|\le1$, аналитична и отлична от нуля в центре круга, то имеет место *формула Йенсена*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|h(e^{it})|\,dt=\ln|h(0)|+\sum_{\nu=1}^{r}\ln\frac{1}{|z_\nu|}-\sum_{\nu=1}^{s}\ln\frac{1}{|\zeta_\nu|}, \tag{1.16}$$

где $z_1,\ldots,z_r$ — нули, а $\zeta_1,\ldots,\zeta_s$ — полюсы функции h в круге $|z|\le1$, причем нуль или полюс кратности m выписан m раз. Для многочлена

$$P_n(z)=A\prod_{k=1}^{n}(z-z_k), \qquad A\ne0,$$

порядка $n\ge1$ с отличным от нуля старшим коэффициентом A формулу (1.16) можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|P_n(e^{it})|\,dt=\ln\Big(|A|\prod_{k=1}^{n}\max(1,|z_k|)\Big). \tag{1.17}$$

3. С функции $\varphi(u)=\ln u$, $u\in(0,+\infty)$, на произвольные функции $\varphi\in\Phi^+$ неравенство (1.12)–(1.13) распространяется в два шага. Вначале с помощью формулы Йенсена (1.17) неравенство распространяется на функцию $\varphi(u)=\ln^+u=\ln\max(1,u)$, $u\in(0,+\infty)$. Затем строится специальное интегральное представление функции $\varphi\in\Phi^+$ через функцию $\ln^+u$ и применяется полученное на предыдущем этапе неравенство для функции $\ln^+u$.

Недавно П. Ю. Глазырина [20] показала, что в неравенстве (1.12)–(1.13) множество функций Φ^+ является естественным. Более точно, она показала, что если неравенство (1.12)–(1.13) выполняется для оператора $\Lambda_n\in\Omega_n$, отличного от поворота комплексной плоскости, и неубывающей, достаточно гладкой функции φ, то $\varphi\in\Phi^+$. В частности, если неравенство (1.15) имеет место на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка $n \geq 1$ (с комплексными коэффициентами) для неубывающей, достаточно гладкой на полуоси $(0, +\infty)$ функции φ, то функция φ принадлежит множеству Φ^+.

Исследования работы [14] были продолжены в работах автора [21–24]. В частности, в [21] доказано следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ при любом $n \geq 1$ для композиции Сеге* (1.11) *произвольных многочленов Λ_n, $P_n \in \mathscr{P}_n$ имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leq \int_0^{2\pi} \varphi(\|\Lambda_n\|_{H_0}|P_n(e^{it})|)dt; \tag{1.18}$$

здесь

$$\|\Lambda_n\|_{H_0} = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\Lambda_n(e^{it})|\,dt\right). \tag{1.19}$$

С помощью формулы Йенсена (1.17) нетрудно убедиться, что если многочлен Λ_n принадлежит множеству $\Omega_n = \Omega_n^+ \bigcup \Omega_n^-$ (и только для таких многочленов), величина (1.19) имеет следующее значение:

$$\|\Lambda_n\|_{H_0} = \max\{|\lambda_n|,\, |\lambda_0|\}.$$

Следовательно, неравенство (1.12)–(1.13) содержится в неравенстве (1.18).

М. Голичек и Дж. Лоренц в работе [25] 1989 г. рассматривали неравенство типа (1.15) для формально более общего оператора

$$Af_n + \frac{B}{n}f_n' \tag{1.20}$$

в сравнении с оператором дифференцирования f_n' в пространстве тригонометрических полиномов. Один из главных результатов их работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 7. *Для функции $\varphi \in \Phi^+$ при любых вещественных A и B выполняется точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left|Af_n(t) + \frac{B}{n}f_n'(t)\right|\right)dt \leq \int_0^{2\pi} \varphi\left(\sqrt{A^2+B^2}|f_n(t)|\right)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.21}$$

Этот результат не является новым; он содержится в работе [14, следствие 2]. В самом деле, в соответствии с формулой (1.10) для комплексных A, B имеем

$$Af_n(t) + \frac{B}{n}f_n'(t) = e^{-int}i\left(\frac{B}{n}\zeta P_{2n}'(\zeta) - (B+iA)P_{2n}(\zeta)\right), \qquad \zeta = e^{it}.$$

Рассмотрим оператор

$$(\mathcal{D}_n P_n)(z) = \frac{2B}{n}zP_n'(z) - (B+iA)P_n(z) \tag{1.22}$$

на множестве $\mathscr{P}_n$ алгебраических многочленов порядка n. Оператор (1.22) является композицией Сеге (1.11), построенной с помощью многочлена

$$\mathcal{D}_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2B}{n}k - (B+iA)\right)\binom{n}{k}z^k = (1+z)^{n-1}((B-iA)z - (B+iA)).$$

В зависимости от того, какое из условий

$$|B - iA| > |B + iA|, \qquad |B - iA| < |B + iA|, \qquad |B - iA| = |B + iA|$$

выполняется, оператор (1.22) будет принадлежать соответственно множеству Ω_n^+, Ω_n^- или $\Omega_n^0 = \Omega_n^+ \bigcap \Omega_n^-$ (детали см. в [15, отд. V, задачи 116, 117]). Поэтому для оператора (1.22) справедливы утверждения теорем 4 и 5, а значит, и следствия 2 работы [14]. В данном случае величина (1.13) имеет следующее значение: $c_n = \max\{|B - iA|, |B + iA|\}$. Предположим, что коэффициенты A, B вещественные. Тогда все нули многочлена $\mathcal{D}_n$ лежат на единичной окружности, т. е. $\mathcal{D}_n \in \Omega_n^+ \bigcap \Omega_n^-$. В этом случае $c_n = |B - iA| = |B + iA| = \sqrt{A^2 + B^2}$. Для оператора $\mathcal{D}_{2n}$ на множестве $\mathscr{P}_{2n}$ многочленов порядка $2n$ неравенство (1.12)–(1.13) превращается в неравенство (1.21) теоремы 7. При обосновании неравенства (1.21) авторы работы [25] следуют схеме рассуждений работы [14]. Следует сказать, что работа [25] является более короткой в сравнении с работой [14]. Этому есть, по крайней мере, две причины. (1) В [25] в сравнении с [14] обсуждается конкретный оператор (1.20) (с вещественными коэффициентами A, B). (2) Нужное свойство нулей полиномов при отображении оператором (1.20) доказывается непосредственно в работе [25, лемма 1] с помощью довольно прозрачных соображений, без использования эквивалентного, известного [15, отд. V, задачи 116, 117] свойства оператора (1.22).

1.3. Для некоторых классических операторов во множестве тригонометрических полиномов соответствующий оператор Λ_n композиции Сеге не принадлежит множеству $\Omega_n = \Omega_n^+ \bigcup \Omega_n^-$. Для таких операторов теорема 4 неприменима. Теорема 6, конечно, будет применима, но неравенство (1.18) будет точным, вообще говоря, лишь для функции $\varphi(u) = \ln u$, $u \in (0, +\infty)$. Но даже в последнем случае остается проблема исследования поведения величины (1.19). Обсудим два классических случая: неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома и неравенство Стечкина — Никольского между нормой производной полинома и нормой его первой разности.

В 1928 г. Г. Сеге [26] доказал, что при любом вещественном α имеет место точное неравенство

$$\|f_n' \cos\alpha - \widetilde{f}_n' \sin\alpha\|_C \le n\|f_n\|_C, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}), \tag{1.23}$$

в котором

$$\widetilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)$$

есть полином, сопряженный полиному f_n. Неравенство (1.23) было получено в [26] с помощью следующей квадратурной формулы, подобной формуле М. Рисса (1.3).

Теорема 8. *При любом вещественном α для произвольного тригонометрического полинома $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ порядка $n \ge 1$ имеет место формула*

$$f_n'(t)\cos\alpha - \widetilde{f}_n'(t)\sin\alpha = \sum_{k=1}^{2n} \beta_k f_n(t + \tau_k), \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{1.24}$$

в которой

$$\tau_k = \tau_k(\alpha) = \frac{2k-1}{2n}\pi + \frac{\alpha}{n}, \qquad \beta_k = \frac{(-1)^{k-1} + \sin\alpha}{4n\Big(\sin\dfrac{\tau_k}{2}\Big)^2}.$$

Для коэффициентов формулы (1.24) имеет место равенство $\sum_{k=1}^{2n} |\beta_k| = n$, поэтому из формулы (1.24) следует неравенство (1.23).

Следует сказать, что в работе [26] доказаны точные неравенства типа (1.23) для существенно более широкого класса операторов в сравнении с оператором $f_n'(t)\cos\alpha - \widetilde{f}_n'(t)\sin\alpha$.

Эти результаты на еще более широкий класс операторов (и, в некотором смысле, окончательный) распространил С. Н. Бернштейн [27]; соответствующую квадратурную формулу недавно получил А. В. Парфененков (см. работу [28] в настоящем номере журнала).

А. Зигмунд в 1933 г. [7, т. II, гл. X, (3.25)] с помощью формулы (1.24) получил следующее утверждение.

Теорема 9. *Если функция φ на полуоси $[0,\infty)$ выпукла вниз и не убывает, то для любого вещественного α имеет место точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f_n'(t)\cos\alpha - \widetilde{f}_n'(t)\sin\alpha|)dt \le \int_0^{2\pi} \varphi(n|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.25}$$

Неравенство (1.25) *точное и на полиномах $ae^{int}+be^{-int}$, $a,b\in\mathbb{C}$, обращается в равенство; если же функция φ строго возрастает на $[0,+\infty)$, то других экстремальных полиномов нет.*

Взяв в (1.25) функцию $\varphi(u)=u^p$, $p\ge 1$, получаем неравенство

$$\|f_n'\cos\alpha - \widetilde{f}_n'\sin\alpha\|_{L_p} \le n\|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}), \tag{1.26}$$

в пространстве L_p, $1\le p<+\infty$. Из (1.23), (1.26) и (1.7) следует, что для любых натуральных n,r и $1\le p\le\infty$ справедливо не только неравенство (1.8), но также и (точное) неравенство

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_{L_p} \le n^r\|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.27}$$

Неравенство (1.8) справедливо при всех p, $0\le p\le+\infty$. Однако, как показано в [24], неравенство (1.27) на случай $0\le p<1$, вообще говоря, уже не переносится. Если $r\ge n\ln 2n$, то соответствующий оператор композиции Сеге принадлежит классу $\Omega_{2n}^0=\Omega_{2n}^+\bigcap\Omega_{2n}^-$ и, как следствие, (при $r\ge n\ln 2n$) для любой функции $\varphi\in\Phi^+$ имеет место точное неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\widetilde{f}_n^{(r)}(t)|)dt \le \int_0^{2\pi} \varphi(n^r|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C});$$

в частности, неравенство (1.27) справедливо при всех $p\ge 0$. У автора есть гипотеза, что необходимое и достаточное условие для этого состоит в том, что $r\ge n-1$. Для фиксированного r при $n\to\infty$ наилучшая константа $K_0(n,r)$ в аналоге неравенства (1.27) в пространстве L_0

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_{L_0} \le K_0(n,r)\|f_n\|_{L_0}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

обладает свойством $K_0(n,r)=4^{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_n=n+o(n)$. Видно, что рост этой константы по n существенно больше, чем константы n^r в (1.27) при $1\le p\le\infty$.

Одним из обобщений неравенства Бернштейна (1.4) является известное неравенство Стечкина — Никольского

$$\|f_n^{(r)}\|_{C_{2\pi}} \le \left(\frac{n}{2\sin nh/2)}\right)^r \|\Delta_h^r f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.28}$$

между равномерными нормами производной порядка $r\ge 1$ полинома и его r-й разности $\Delta_h^r f_n(t)=\sum_{\nu=0}^r(-1)^{k+\nu}\binom{r}{\nu}f_n(x+\nu t)$ с шагом h, доказанное при $0<h<2\pi/n$ С. Б. Стечкиным [29], а при $h=\pi/n$ С. М. Никольским [30]; отметим, что частный случай неравенства (1.28) для $r=1$ при $h=\pi/n$ был получен еще в 1914 г. М. Риссом [6]. Э. А. Стороженко нашла [31] наилучшую константу в аналоге неравенства (1.28) в пространстве L_0 для случая $r=1$; оказалось, что поведение этой константы иное в сравнении с соответствующей константой в (1.28).

1.4. Наряду с оператором дифференцирования существует ряд других важных классических операторов в пространстве тригонометрических полиномов. Таковым, в частности, является оператор G_n, который полиному (1.1) сопоставляет его старшую гармонику, так что

$$G_n(f_n)(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt. \tag{1.29}$$

Свойства этого оператора относительно функционалов

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)\, dt$$

для $\varphi \in \Phi$ будут обсуждаться в последнем разделе работы.

1.5. Точные неравенства для тригонометрических полиномов – обширный раздел теории функций. Приведенный здесь обзор является далеко не полным; он лишь отражает интересы автора. Довольно полный обзор тематики можно найти в [32].

2. Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов. Общие соображения

2.1. На множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ вещественных тригонометрических полиномов (1.1) порядка (не выше) $n \geq 1$ определим функционал

$$\mu(f_n) = \operatorname{mes}\{t \in [0, 2\pi] : \ |f_n(t)| \geq 1\}, \tag{2.1}$$

значение которого есть мера Лебега множества точек тора $\mathbb{T}$, в которых модуль полинома больше или равен 1. Для линейного оператора F_n на множестве полиномов $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ обозначим через $B_n(F_n)$ наименьшую возможную константу в неравенстве

$$\mu(F_n f_n) \leq B_n(F_n)\ \mu(f_n), \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{2.2}$$

Такие неравенства изучал А. Г. Бабенко [33] в 1992 г. и получил двусторонние оценки константы $B_n(F_n)$ для довольно широкого класса операторов; в частности для оператора старшей гармоники (1.29) и оператора дифференцирования

$$D_n f_n = \frac{1}{n} f_n'. \tag{2.3}$$

Для оператора (2.3) им были получены оценки

$$\frac{2}{\pi} \ln(2n+1) \leq B_n(D_n) \leq 2n.$$

Значение величины $B_n(D_n)$ до настоящего времени неизвестно.

Если $F_n \not\equiv 0$, то

$$B_n(F_n) \geq 1. \tag{2.4}$$

В самом деле, предположим, что полином $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ обладает свойством $F_n f_n \not\equiv 0$. Рассмотрим семейство полиномов $\{uf_n,\ u > 0\}$. Имеем

$$\mu(uf_n) = \operatorname{mes}\Big\{t \in \mathbb{T} : \ |f_n(t)| \geq \frac{1}{u}\Big\} \to 2\pi, \qquad u \to +\infty.$$

Таким же свойством обладает и величина $\mu(F_n(uf_n)) = \mu(uF_n(f_n))$. Подставляя функции $\{uf_n,\ u > 0\}$ в (2.2), получаем неравенство (2.4).

Отметим еще, что если норма оператора F_n в пространстве $C_{2\pi}$ больше единицы: $\|F_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} > 1$, то $B_n(F_n) = +\infty$. Действительно, при сделанном предположении существует полином $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ со свойствами $\|f_n\|_{C_{2\pi}} < 1$, $\|F_n f_n\|_{C_{2\pi}} > 1$. Отсюда и следует, что $B_n(F_n) = +\infty$.

2.2. Пусть Φ есть множество функций φ, заданных, неотрицательных и неубывающих на полуоси $[0,+\infty)$. Для линейного оператора F_n на $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ и функции $\varphi \in \Phi$ обозначим через $A_n(F_n,\varphi)$ наименьшую возможную константу в неравенстве

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|(F_n f_n)(t)|)dt \le A_n(F_n,\varphi) \int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}).$$

Исследование величины $A_n(F_n,\varphi)$ для конкретной функции $\varphi \in \Phi$ является, скорее всего, неразрешимой задачей. Рассмотрим величину

$$A_n(F_n) = \sup\{A_n(F_n,\varphi) : \ \varphi \in \Phi\}. \tag{2.5}$$

Классу Φ принадлежит, в частности, функция φ^*, определенная соотношениями

$$\varphi^*(u) = \begin{cases} 0, & u \in [0,1), \\ 1, & u \in [1,+\infty). \end{cases} \tag{2.6}$$

Для этой функции

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi^*(|f_m(x)|)dx = \mu(f_n).$$

Поэтому $A_n(F_n,\varphi^*) = B_n(F_n)$, а следовательно, наименьшая константа в (2.2) и величина (2.5) связаны неравенством

$$B_n(F_n) \le A_n(F_n). \tag{2.7}$$

На самом же деле, как сейчас будет доказано, имеет место равенство

$$A_n(F_n) = B_n(F_n). \tag{2.8}$$

Лемма 1. *При любом $n \ge 1$ для любого линейного оператора F_n в $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ имеет место равенство* (2.8).

Доказательство. Если $F_n \equiv 0$, то обе величины в (2.8) равны нулю. Будем считать, что $F_n \not\equiv 0$. На данном этапе в силу (2.4) и (2.7) имеем $1 \le B_n(F_n) \le A_n(F_n)$. Для обоснования леммы осталось доказать, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо неравенство

$$A_n(F_n,\varphi) \le B_n(F_n),$$

или, что то же самое, доказать неравенство

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|F_n f_n(t)|))dt \le B_n(F_n) \int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

При этом можно считать, что $B_n(F_n) < +\infty$.

Обозначим через Φ_c множество функций φ, непрерывных, неотрицательных и неубывающих на полуоси $[0,\infty)$, а через Φ_c^0 — множество функций $\varphi \in \Phi_c$ со свойством $\varphi(0) = 0$. Предположим вначале, что $\varphi \in \Phi_c^0$. Пусть f — измеримая, ограниченная функция на $[0,2\pi]$, к примеру $f = f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$. Рассмотрим характеристическую функцию

$$\lambda(u) = \lambda(u;f) = \operatorname{mes}\{t \in [0,2\pi] : \ |f(t)| \ge u\}, \qquad u \in [0,\infty), \tag{2.10}$$

функции f. Как известно (см., например, [34, § 10.12], впрочем, это легко проверить самостоятельно), имеет место формула

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(t)|)dt = -\int_0^{\infty} \varphi(u)d\lambda(u).$$

Взяв последний интеграл по частям, получаем представление

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f(t)|)dt = \int_0^{\infty} \lambda(u)d\varphi(u). \tag{2.11}$$

При любом $u > 0$ имеем (см. (2.10))

$$\lambda(u; f) = \lambda\left(1; \frac{f}{u}\right) = \mu\left(\frac{f}{u}\right).$$

Поэтому для любого полинома $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ при любом $u > 0$ справедливо неравенство

$$\lambda(u; F_n f_n) \le B_n(F_n) \cdot \lambda(u; f_n); \tag{2.12}$$

поскольку $B_n(F_n) \ge 1$, то это неравенство имеет место и при $u = 0$. В силу (2.11) и (2.12) имеем

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|F_n f_n(t)|)dt = \int_0^{\infty} \lambda(u; F_n f_n)d\varphi(u)$$

$$\le B_n(F_n)\int_0^{\infty} \lambda(u; f_n)d\varphi(u) = B_n(F_n)\int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)dt.$$

Следовательно, если $\varphi \in \Phi_c^0$, то неравенство (2.9) выполняется.

Произвольную функцию $\varphi \in \Phi_c$ представим в виде

$$\varphi = \varphi(0) + (\varphi - \varphi(0)).$$

Функция $\varphi_0 = \varphi - \varphi(0)$ принадлежит множеству Φ_c^0 и потому для этой функции имеет место (2.9). Умножая неравенство (2.4) на величину $2\pi\varphi(0) \ge 0$ и складывая результат с неравенством (2.9) для функции φ_0, получаем (2.9) уже для φ. Итак, для функций $\varphi \in \Phi_c$ неравенство (2.9) проверено.

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \Phi$. Сгладим эту функцию с помощью оператора Стеклова с шагом $h > 0$:

$$\varphi_h(u) = \frac{1}{h}\int_0^{h} \varphi(u+v)dv.$$

Функция φ_h всюду на $[0,\infty)$ непрерывна. В каждой точке $u \in [0,\infty)$ будем иметь $\varphi_h(u) \to \varphi^+(u) = \varphi(u+0)$ при $h \to +0$. Функция φ^+ непрерывна справа на полуоси $[0,+\infty)$, совпадает с функцией φ в тех точках, где φ непрерывна справа, и всюду на полуоси $[0,\infty)$ имеет место неравенство $\varphi \le \varphi^+$. Вместе с функцией φ функция φ^+ неотрицательна и не убывает на $[0,+\infty)$, т. е. $\varphi^+ \in \Phi$.

При любом $h > 0$ функция φ_h принадлежит множеству Φ_c. Поэтому в силу предыдущего этапа рассуждений имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi_h(|F_n f_n(t)|)dt \le B_n(F_n)\int_0^{2\pi} \varphi_h(|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}).$$

Для каждого полинома f_n подынтегральные функции в последнем неравенстве ограничены по h и имеют поточечные пределы при $h \to +0$. В силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости можно перейти к пределу под знаком каждого из двух интегралов. В результате получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi^+(|F_n f_n(t)|)dt \le B_n(F_n) \int_0^{2\pi} \varphi^+(|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

Функция $\varphi \in \Phi$ имеет не более чем счетное множество точек разрыва; обозначим это множество через $U = U(\varphi)$. Если модуль $|f_n|$ полинома $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ не есть тождественная константа, то для любого $u \ge 0$ может существовать лишь конечное число (а точнее, самое большое, $4n$) точек $t \in \mathbb{T}$ тора, в которых $|f_n(t)| = u$. Поэтому, за исключением не более чем счетного множества точек $t \in \mathbb{T}$ тора, имеет место равенство $\varphi^+(|f_n(t)|) = \varphi(|f_n(t)|)$ и, как следствие, справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi^+(|f_n(t)|)dt = \int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)dt.$$

Следовательно, если у полинома $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ его модуль $|f_n|$ не есть тождественная константа, то неравенство (2.13) превращается в неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi^+(|F_n f_n(t)|)dt \le B_n(F_n) \int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{2.14}$$

Поскольку функция φ не превосходит функцию φ^+, то неравенство (2.14) влечет неравенство (2.9).

Мы предполагаем, что $B_n(F_n) < +\infty$ и, значит, $\|F_n\|_{C_{2\pi}\to C_{2\pi}} \le 1$. Поэтому если модуль полинома $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ есть константа, то имеем $|(F_n f_n)(t)| \le |f_n(t)|,\ t \in \mathbb{T}$. В этом случае неравенство (2.9), очевидно, также выполняется. Лемма доказана полностью.

3. Тригонометрические полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля относительно интегральных функционалов

3.1. Во множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ тригонометрических полиномов порядка n рассмотрим линейный оператор G_n, который полиному (1.1) сопоставляет его старшую гармонику:

$$G_n(f_n)(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Хорошо известно, что норма оператора G_n на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ в пространстве $C_{2\pi}$ равна единице или, что то же самое, в $C_{2\pi}$ гармоника $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ младшими гармониками не приближается. Этот же факт имеет место и в пространствах $L^p_{2\pi},\ 0 \le p < \infty$ (см. работу [14] и приведенную там библиографию).

На самом деле справедлив более общий факт. Напомним, что через Φ^+ выше обозначено множество функций φ, определенных, неубывающих, локально абсолютно непрерывных на $(0, \infty)$, для которых функция $u\varphi'(u),\ u \in (0, \infty)$, также не убывает. Как следствие более общих результатов работы [14], для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|a_n \cos nt + b_n \sin nt|)dt \le \int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)\, dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Этот результат также означает, что для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ относительно функционала

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)\,dt \tag{3.2}$$

гармоника порядка $n \geq 1$ младшими гармониками не приближается.

Рассмотрим эту проблему на множестве Φ функций φ, определенных, неотрицательных, неубывающих на полуоси $[0, +\infty)$. Для функции $\varphi \in \Phi$ обозначим через $A_n(\varphi) = A_n(G_n, \varphi)$ наименьшую константу в неравенстве

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|a_n \cos nt + b_n \sin nt|)dt \leq A_n(\varphi) \int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)\,dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}).$$

Полиномы $f_n(t) = a\cos nt + b\sin nt$ дают оценку $A_n(\varphi) \geq 1$. Неравенство (3.1) означает, что если $\varphi \in \Phi^+$, то $A_n(\varphi) = 1$. Существуют функции $\varphi \in \Phi$, для которых $A_n(\varphi) > 1$; в силу результата А. Г. Бабенко (3.5) этим свойством обладает функция (2.6).

Нас интересует величина

$$A_n^* = \sup\{A_n(\varphi) : \ \varphi \in \Phi\}. \tag{3.3}$$

3.2. В силу леммы 1 величина (3.3) совпадает с наилучшей константой $\beta_n = B_n(G_n)$ в неравенстве

$$\mu(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \leq \beta_n\, \mu(f_n), \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{3.4}$$

В 1992 г. А. Г.Бабенко доказал, что при любом $n \geq 1$ справедливы следующие неравенства:

$$\sqrt{2n} \leq \beta_n \leq n\sqrt{2}. \tag{3.5}$$

Ниже, в теореме 11, будет выписано точное значение величины β_n, а значит и A_n^*. А именно будет показано, что $\beta_n = \sqrt{2n}$. Таким образом, именно нижняя оценка в (3.5) является верной.

3.3. Обсудим задачу в некотором смысле более "тонкую" в сравнении с задачей о точной константе в неравенстве (3.4). Для фиксированного $y \geq 0$ с помощью функционала (2.1) определим величину

$$\sigma_n(y) = \inf\{\mu\,(y\cos nt - f_{n-1}(t)) : \ f_{n-1} \in \mathscr{F}_{n-1}(\mathbb{R})\}, \tag{3.6}$$

которую можно интерпретировать как величину наилучшего приближения функции $y \cos nt$ множеством $\mathscr{F}_{n-1}(\mathbb{R})$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$ относительно функционала (2.1). Величину (3.6) можно записать в несколько иной форме. Пусть $\mathscr{F}_n(y)$ есть множество тригонометрических полиномов порядка n вида

$$f_n(t) = y\cos nt + f_{n-1}(t), \qquad f_{n-1} \in \mathscr{F}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Тогда

$$\sigma_n(y) = \inf\{\mu\,(f_n) : \ f_n \in \mathscr{F}_n(y)\}; \tag{3.7}$$

это уже есть вариант задачи о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля. Легко заметить, что задача (3.6), (3.7) нетривиальна лишь при $y > 1$. Историю исследования задачи (3.6), (3.7) и ее связь с другими экстремальными задачами можно найти в совместных работах автора и А. С. Менделева [35–37]; там же доказано следующее утверждение. В этом утверждении через T_n обозначен многочлен Чебышева первого рода, который для $x \in [-1, 1]$ определен формулой $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Теорема 10. *При $y > 1$, $n \geq 1$ имеет место равенство*

$$\sigma_n(y) = 4 \arccos \frac{1}{y^{\frac{1}{2n}}}.$$

Более того, для любого целого $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$ полином

$$f_n(t) = f_{n,k}(t) = (-1)^k T_n\Big(y^{\frac{1}{n}} \cos\Big(t + \frac{\pi k}{n}\Big) - y^{\frac{1}{n}} + 1\Big)$$

принадлежит множеству $\mathscr{F}_n(y)$ и является экстремальным полиномом в задаче (3.7) (*полиномом, наименее уклоняющимся от нуля*), *и только такие полиномы решают задачу* (3.7).

Теорема 10 позволяет выписать значение наилучшей константы β_n в неравенстве (3.4).

Теорема 11. *При любом $n \geq 1$ для наилучшей константы β_n в неравенстве* (3.4) *имеет место формула*

$$\beta_n = \sqrt{2n}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Старшую гармонику тригонометрического полинома (1.1) можно записать в виде $a_n \cos nt + b_n \sin nt = y \cos(nt + t_n)$, где $y = y(f_n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, а t_n — соответствующий сдвиг аргумента. Функционал (2.1) инвариантен относительно сдвига аргумента полинома, поэтому можно считать, что старшая гармоника полинома f_n есть $y \cos nt$, т.е. $f_n \in \mathscr{F}_n(y)$. При изучении неравенства (3.4) следует ограничиться лишь полиномами с $y = y(f_n) > 1$; при этом младшие гармоники полинома целесообразно выбрать так, чтобы функционал (2.1) имел наименьшее значение. В результате приходим к следующему представлению наилучшей константы β_n в неравенстве (3.4):

$$\beta_n = \sup_{y>1} \frac{\mu(y \cos(nt))}{\sigma_n(y)}.$$

Имеем

$$\mu(y \cos(nt)) = 4 \arccos \frac{1}{y}.$$

Применяя теперь утверждение теоремы 10, получаем

$$\beta_n = \sup_{y>1} \frac{4 \arccos \frac{1}{y}}{4 \arccos \frac{1}{y^{\frac{1}{2n}}}} = \sup_{0 \leq t < 1} \frac{\arccos t^{2n}}{\arccos t} = \lim_{t \to 1-0} \frac{\arccos t^{2n}}{\arccos t} = \sqrt{2n}.$$

Утверждение (3.8) доказано.

3.4. Утверждения (3.8) и (2.8) влекут равенство

$$A_n^* = \sqrt{2n}.$$

Последний результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 12. *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ при любом $n \geq 1$ во множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f_n(t)|)\, dt \geq \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^{2\pi} \varphi(|a_n \cos nt + b_n \sin nt|)\, dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{3.9}$$

По множеству всех функций $\varphi \in \Phi$ при любом $n \geq 1$ неравенство (3.9) *неулучшаемо.*

Этот результат означает, что для функций $\varphi \in \Phi$ относительно функционала (3.2) старшая гармоника $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ младшими гармониками может уже приближаться, но не более чем в $\sqrt{2n}$ раз в сравнении со значением функционала (3.2) на старшей гармонике.

Аналоги рассмотренных в этой работе задач для алгебраических многочленов на отрезке исследованы в [38].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 11–104.
2. **Bernstein S.** Sur l'ordre de la mailleure approximation des fonctions continues par des polynômesde degré donné. Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. 1912. Vol. 2, no. 4. P. 1–103.
3. **Бернштейн С.Н.** Авторские комментарии // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 526–562.
4. **Bernstein S.** Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Collection Borel. Paris: Gauthier-Villar, 1926. 213 p.
5. **Riesz M.** Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci., 1914. Vol. 158. P. 1152–1154.
6. **Riesz M.** Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1914. B. 23. S. 354–368.
7. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
8. **Иванов В.И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 489–498.
9. **Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.** Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Мат. сб. 1975. Т. 98, № 140. С. 395–415.
10. **Освальд П.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов в метрике L_p, $0 < p < 1$ // Изв. вузов. Математика. 1976. № 7. С. 65–75.
11. **Nevai P.G.** Bernstein's inequality in L^p for $0 < p < 1$ // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 27, no. 3. P. 239–243.
12. **Mate A. and Nevai P.G.** Bernsten's inequality in L_p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ Bounds for Ortogonal Polynomials // Ann. Math. 2nd Ser. 1980. Vol. 111, no. 1. P. 145–154.
13. **Арестов В.В.** О неравенствах С. Н. Бернштейна для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
14. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических многочленов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
15. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 432 с.
16. **Marden M.** The geometry of the zeros of a polynomials in a complex variable. New York: Amer. Math. Soc., 1949. (Math. Survey, no. 3.). 184 p.
17. **De Bruijn N.G., Springer T.A.** On the zeros of composition-polynomials // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 1947. Vol. 50. P. 895–903 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 406–414).
18. **De Bruijn N.G.** Inequlities concerning polynomials in the complex domain // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 1947. Vol. 50. P. 1265–1272 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 591–598).
19. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 703 с.
20. **Glazyrina P.Yu.** Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 6. P. 1204–1210.
21. **Арестов В.В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 7–18.
22. **Arestov V.V.** Integral inequalities for algebraic polynomials with a restriction on their zeros // Anal. Math. 1991. Vol. 17, no. 1. P. 11–20.
23. **Арестов В.В.** Об одном неравенстве Сеге для алгебраических многочленов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 27–33.
24. **Арестов В.В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 10–26.
25. **Golitschek M.V. and Lorentz G.G.** Bernstein inequalities in $L_p,\ 0 \le p \le +\infty$ // Rocky Mountain J. Mathematics. 1989. Vol. 19, no. 1. P. 145–156.
26. **Szegö G.** Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. J. 5, H. 4. S. 59–70.
27. **Бернштейн С.Н.** Об одной теореме Сеге // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. Ст. 62. С. 173–177.
28. **Парфененков А.В.** Точное неравенство между равномерными нормами алгебраического многочлена и его вещественной части на концентрических окружностях комплексной плоскости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 254–263.

29. **Стечкин С.Б.** Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511–1514.
30. **Никольский С.М.** Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1507–1510.
31. **Стороженко Э.А.** Неравенство Никольского — Стечкина для тригонометрических полиномов в L_0 // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 421–428.
32. **Rahman Q.I. and Schmeisser G.** Les Inégalités de Markoff et de Bernshtein. Les Presses de l'Universite de Montréal, 1983.
33. **Бабенко А.Г.** Неравенства слабого типа для тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 34–41.
34. **Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г.** Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
35. **Арестов В.В., Менделев А.С.** О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля // Докл. РАН. 2009. Т. 425, № 6. С. 733–736.
36. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials deviating the least from zero in measure and related problems [Электронная публ.]. 2009. URL: http://arxiv.org/abs/0912.3670.
37. **Arestov V.V., Mendelev A.S.** Trigonometric polynomials of least deviation from zero in measure and related problems // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 10. P. 1852–1878.
38. **Арестов В.В.** Алгебраические многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля по мере на отрезке // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 292–301.

Арестов Виталий Владимирович
Поступила 10.08.2010
д-р. физ.-мат. наук, профессор
Уральский государственный университет им. А. М. Горького
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vitalii.Arestov@usu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.51

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ ГЕРОНИМУСА[1]

А. Г. Бабенко, Ю. В. Крякин, В. А. Юдин

В 1935 г. Я. Л. Геронимус нашел наилучшее интегральное приближение на периоде $[-\pi,\pi)$ функции $\sin(n+1)t - 2q\sin nt$, $q \in \mathbb{R}$, подпространством тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$. Этот результат представляет собой интегральный аналог известной теоремы Е. И. Золотарева (1868). В настоящее время имеется несколько способов доказательства указанного факта. Здесь предлагается еще один вариант доказательства. При этом в случае $|q| \geq 1$ применяются $(2\pi/n)$-периодизация и ортогональность функции $|\sin nt|$ гармонике $\cos t$ на периоде, а в случае $|q| < 1$ — соотношения двойственности для теоремы П. Л. Чебышева (1859) о рациональной функции, наименее уклоняющейся от нуля на отрезке в равномерной метрике.

Ключевые слова: интегральное и равномерное приближение индивидуальных функций полиномами.

A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin, V. A. Yudin. On one of Geronimus's results.

In 1935, Ya. L. Geronimus found for the function $\sin(n+1)t - 2q\sin nt$, $q \in \mathbb{R}$, the best integral approximation on the period $[-\pi,\pi)$ by the subspace of trigonometric polynomials of degree at most $n-1$. The result was an integral analog of the known theorem by E. I. Zolotarev (1868). At present, there are several methods of proving the mentioned fact. We propose one more variant of the proof. In the case $|q| \geq 1$, we apply the $(2\pi/n)$-periodization as well as the orthogonality of the function $|\sin nt|$ and the harmonic $\cos t$ on the period. In the case $|q| < 1$, we use the duality relations for P. L. Chebyshev's theorem (1859) on a rational function least deviating from zero on a segment in the uniform metric.

Keywords: integral and uniform approximation of individual functions by polynomials.

1. Обозначения

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических многочленов $P(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_nx^n$ степени не выше n с вещественными коэффициентами; $\mathcal{T}_n$ — подпространство вещественнозначных тригонометрических полиномов степени не выше n

$$\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{i\nu t} \qquad (1.1)$$

$$(a_0 = c_0 \in \mathbb{R}, \quad c_\nu = \overline{c}_{-\nu} = (a_\nu - ib_\nu)/2, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{R}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n).$$

В случае, когда один из старших коэффициентов a_n или b_n полинома (1.1) отличен от нуля, степень $\deg\tau$ полинома τ в точности равняется n. Через $\mathbb{T}$ обозначим период длины 2π (т. е. полуинтервал $[\alpha, \alpha+2\pi)$ с отождествленными концами, где α есть произвольное вещественное число); через $\chi_{(a,b)}$ — 2π-периодическое продолжение на $\mathbb{R}$ характеристической функции открытого интервала (a,b) длины $b-a \leq 2\pi$. Ниже используется следующее определение (см. [21, определение 2; 16, гл. 3, § 10, (10.7); 2, определения 1, 2]).

Определение. *Сигнум-функцией, отвечающей набору* точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2r}$ из $[t_1, t_1+2\pi)$, называют функцию $\sigma(t) = \varepsilon\sum_{k=1}^{2r}(-1)^k\chi_{(t_k,t_{k+1})}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm1$, здесь $t_{2r+1} := t_1 + 2\pi$. Указанный набор $\{t_k\}_{k=1}^{2r}$ называется *каноническим* для $\mathcal{T}_{n-1}$, если отвечающая ему сигнум-функция σ ортогональна $\mathcal{T}_{n-1}$, т. е. $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \sigma(t)\,\tau(t)\,dt = 0$ при всех $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$.

[1]Исследования поддержаны РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00598) и УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 09-С-1-1007.

З а м е ч а н и е 1. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы набор точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2r}$ из $[t_1, t_1 + 2\pi)$ был каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$, следующие:

$$\sum_{j=1}^{r} t_{2j} - \sum_{j=1}^{r} t_{2j-1} = \pi, \qquad \sum_{j=1}^{r} e^{i\nu t_{2j}} - \sum_{j=1}^{r} e^{i\nu t_{2j-1}} = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1.2}$$

При этом первое условие в (1.2) равносильно ортогональности соответствующей сигнум-функции σ константам, а остальные условия эквивалентны ортогональности σ всем полиномам $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ с нулевым средним значением на периоде. Действительно, пусть сигнум-функция σ, отвечающая набору точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_{2r}$ из $[t_1, 2\pi + t_1)$, ортогональна $\mathcal{T}_{n-1}$. Это эквивалентно каждому из утверждений

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^k \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{i\nu t}\, dt = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \quad (t_{2r+1} := t_1 + 2\pi),$$

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^k \left(t_{k+1} - t_k\right) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{2r} (-1)^k \left(e^{i\nu t_{k+1}} - e^{i\nu t_k}\right) = 0 \quad \text{при} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$

последнее из которых равносильно (1.2).

В дальнейшем применяются следующие обозначения: $C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C(\mathbb{T})} = \max\{|f(t)| : t \in \mathbb{T}\}$; $L = L(\mathbb{T})$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций $f : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ с интегральной нормой $\|f\|_L = \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, dt$.

Величиной наилучшего интегрального приближения функции $f \in L$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ называется $E_{n-1}(f)_L := \min\{\|f - \tau\|_L : \tau \in \mathcal{T}_{n-1}\}$; элемент $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$, на котором достигается минимум в правой части этого равенства, называется полиномом *наилучшего интегрального приближения* для f.

2. Результат Чебышева

Приведем один из результатов П. Л. Чебышева, который вместе с замечанием С. Н. Бернштейна будет использоваться в данной работе.

В 1859 г. П. Л. Чебышев [15, разд. 9–11] при каждом $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2 \ldots\}$ нашел дробь

$$\big(x^{n+1} - P^*(x)\big)/Q(x), \tag{2.1}$$

наименее уклоняющуюся от нуля в метрике пространства $C[-1, 1]$ среди всех дробей вида

$$\big(x^{n+1} - P(x)\big)/Q(x), \quad P \in \mathcal{P}_n, \tag{2.2}$$

где Q — фиксированный многочлен степени $\ell \le n+1$ с вещественными коэффициентами, не имеющий нулей на $[-1, 1]$.

В частном случае, когда знаменатель Q имеет вид

$$Q(x) = x - a \quad (a > 1),$$

числитель экстремальной дроби (2.1) удовлетворяет равенству [15, разд. 11, § 38]

$$2^n \left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) \left(x^{n+1} - P^*(x)\right)$$

$$= \Big(ax - 1 + S(a)S(x)\Big)\Big(x + S(x)\Big)^n + \Big(ax - 1 - S(a)S(x)\Big)\Big(x - S(x)\Big)^n, \quad S(x) := \sqrt{x^2 - 1}.$$

С. Н. Бернштейн (1912) [4, ст. 7] обратил внимание, что приведенный выше результат П. Л. Чебышева содержит в себе решение задачи о многочлене $P_a \in \mathcal{P}_n$ наилучшего равномерного приближения на $[-1,1]$ для простейшей дроби $F_a(x) := 1/(x-a)$, т. е. о многочлене, реализующем минимум

$$\min_{P\in\mathcal{P}_n} \|F_a - P\|_{C[-1,1]} = \|F_a - P_a\|_{C[-1,1]} = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}. \tag{2.3}$$

Действительно, выберем коэффициент γ так, чтобы выполнялось равенство

$$\gamma\frac{x^{n+1}-P^*(x)}{x-a} = \frac{1}{x-a} - R_a(x), \quad R_a \in \mathcal{P}_n. \tag{2.4}$$

В силу (2.1), (2.2) левая часть в (2.4) имеет $(n+2)$-точечный альтернанс на $[-1,1]$, поэтому многочлен R_a совпадает с P_a, т. е. является многочленом наилучшего равномерного приближения на $[-1,1]$ для дроби $1/(x-a)$. Умножив обе части равенства (2.4) на $x-a$, а затем положив $x=a$, придем к соотношениям $\gamma\left(a^{n+1}-P^*(a)\right)=1$, $\gamma = \dfrac{2^{n-1}}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^{n-1}}$.

3. Вспомогательные утверждения

Сделав замену $x=\cos t$ в (2.1), (2.2), легко понять, что П. Л. Чебышев при каждом $n\in\mathbb{Z}_+$ фактически нашел дробь

$$\left(\cos(n+1)t - \tau^*(t)\right)/\vartheta(t), \tag{3.1}$$

наименее уклоняющуюся от нуля в равномерной метрике на периоде $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$ среди всех дробей вида[2]

$$\left(\cos(n+1)t - \tau(t)\right)/\vartheta(t), \quad \tau\in\mathcal{T}_n, \tag{3.2}$$

где ϑ — фиксированный косинус-полином степени $\ell \le n+1$, не имеющий вещественных нулей.

Замечание 2. Экстремальная дробь (3.1) имеет $2(n+1)$-точечный альтернанс на периоде $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$. Поэтому числитель этой дроби имеет $2(n+1)$ простых нулей на $\mathbb{T}$. Знаменатель ϑ не имеет нулей на $\mathbb{T}$. Следовательно, при делении числителя $\cos(n+1)t-\tau^*(t)$ на $\vartheta(t)$ получится остаток $f^*(t)$, отличный от тождественного нуля, если $\deg\vartheta\ge 1$, т. е.

$$(\cos(n+1)t-\tau^*(t))/\vartheta(t) = f^*(t) - g^*(t),$$

где

$$f^*(t) = h^*(t)/\vartheta(t) \not\equiv 0, \quad h^*\in\mathcal{T}_{\ell-1}, \quad \ell=\deg\vartheta\ge 1, \quad g^*\in\mathcal{T}_{n+1-\ell}\subseteq\mathcal{T}_n;$$

при этом $g^*\in\mathcal{T}_n$ является единственным полиномом наилучшего равномерного приближения на $\mathbb{T}$ для f^*. Если знаменатель $\vartheta\equiv\mathrm{const}\ne 0$, то, как установил[3] П. Л. Чебышев (1854) [14], полином $\tau^*\equiv 0$ и остаток $f^*\equiv 0$.

Рассмотрим подробнее результат (3.1), (3.2) для знаменателя

$$\vartheta(t) = 1+q^2-2q\cos t, \quad q\in(-1,1). \tag{3.3}$$

[2] Утверждение (3.1), (3.2) равносильно результату (2.1), (2.2) П. Л. Чебышева при условии четности полиномов $\tau\in\mathcal{T}_n$. Однако это условие можно отбросить, так как для экстремальной дроби (3.1) оно выполняется автоматически в силу известных соображений (см. [6, гл. 1, § 4, лемма]), основанных на выделении четной части.

[3] Указанный факт был получен П. Л. Чебышевым в терминах алгебраических многочленов. Здесь этот факт сформулирован в тригонометрической форме с учетом соображений, о которых говорилось выше (см. сноску 2).

В этом случае в силу замечания 2 остаток $f^* = f_q^*$ приобретает вид

$$f_q^*(t) = \frac{c(q,n)}{1+q^2-2q\cos t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где величина $c(q,n)$ зависит только от q и n, причем

$$c(q,n) = 0 \quad \text{при} \quad q = 0, \qquad c(q,n) \neq 0 \quad \text{при} \quad 0 < |q| < 1.$$

Используя соображения, которые упоминались выше (см. сноски 2, 3), несложно понять, что утверждение (2.3) влечет решение задачи о величине

$$E_n(f_q) := \min_{\tau \in \mathcal{T}_n} \|f_q - \tau\|_{C(\mathbb{T})} = \|f_q - \tau_q\|_{C(\mathbb{T})} = \frac{4|q|^{n+2}}{(1-q^2)^2}$$

наилучшего равномерного приближения на $[-\pi,\pi)$ дроби

$$f_q(t) = \frac{1}{\beta - \cos t}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right),$$

подпространством $\mathcal{T}_n$. В [4, ст. 7–9] указано представление для разности

$$f_q(t) - \tau_q(t) = s_q\, B(t),$$

в котором величина[4] $s_q \geq 0$ не зависит от t,

$$B(t) = \frac{\cos(n+1)t - 2q\cos nt + q^2\cos(n-1)t}{1+q^2-2q\cos t} = -\cos\left[nt - \arccos\frac{2q-(1+q^2)\cos t}{1+q^2-2q\cos t}\right]. \quad (3.4)$$

Последнее равенство в (3.4) определено для $t \in [0,\pi]$. Приведем представление дроби B, которое определено уже на $[-\pi,\pi)$:

$$B(t) = \cos\psi(t) \quad \text{при} \quad t \in [-\pi,\pi), \quad \text{где} \quad \psi(t) = nt + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+q}{1-q}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right); \quad (3.5)$$

значение функции $\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1+q}{1-q}\,\mathrm{tg}\dfrac{t}{2}\right)$ в точке $t=-\pi$ считается равным $-\pi/2$, т.е. ее одностороннему пределу справа. Функция ψ является возрастающей на $[-\pi,\pi)$, поскольку

$$\psi'(t) = n + \frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t} > 0, \quad t \in [-\pi,\pi). \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что, когда t пробегает полуинтервал $[-\pi,\pi)$, значение функции $\psi(t)$, строго возрастая, пробегает полуинтервал $[-(n+1)\pi,(n+1)\pi)$. Следовательно, B имеет на периоде $\mathbb{T} = [-\pi,\pi)$ альтернанс A, состоящий из $2(n+1)$ точек:

$$A = \big\{ -\pi = t_{-(n+1)} < t_{-n} < \ldots < t_{-2} < t_{-1} < 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \big\}. \quad (3.7)$$

Поэтому в силу теоремы Чебышева (см. [6, гл. 1, § 2, 5]) дробь B является наименее уклоняющейся от нуля в равномерной метрике на $\mathbb{T}$ среди всех дробей вида (3.2) со знаменателем $\vartheta(t)$, определенным формулой (3.3).

Обозначим через Φ_n подпространство

$$\Phi_n = \mathrm{Lin}\left\{\frac{1}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\cos t}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\sin t}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\cos 2t}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\sin 2t}{\vartheta(t)}, \quad \ldots, \quad \frac{\cos nt}{\vartheta(t)}, \quad \frac{\sin nt}{\vartheta(t)}\right\}; \quad (3.8)$$

[4]Из приведенных ниже рассуждений будет видно, что $s_q = E_n(f_q)$.

оно является чебышевским на $\mathbb{T}$, поскольку $\vartheta(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, справедливы равенства

$$\min_{Y\in\Phi_n}\left\|\frac{\cos(n+1)t}{\vartheta(t)} - Y(t)\right\|_{C(\mathbb{T})} = \|B\|_{C(\mathbb{T})} = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Опишем свойства альтернанса (3.7), которые будут использоваться в разд. 5, 6. Поскольку

$$B'(t) = -\psi'(t)\sin\psi(t) = -\left(n + \frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t}\right)\sin\psi(t), \quad t \in [-\pi,\pi),$$

то альтернанс A совпадает с набором нулей на $[-\pi,\pi)$ функции

$$\sin\psi(t) = \frac{\sin(n+1)t - 2q\sin nt + q^2\sin(n-1)t}{\vartheta(t)}, \tag{3.10}$$

т. е. с набором нулей на $[-\pi,\pi)$ синус-полинома

$$\widetilde{\tau}(t) := \sin(n+1)t - 2q\sin nt + q^2\sin(n-1)t. \tag{3.11}$$

Следовательно, множество (3.7) обладает свойством $t_{-k} = -t_k$ при $k = 1,2,\ldots,n$. Иначе говоря, альтернанс A имеет следующую структуру[5]:

$$A = \big\{ -\pi,\ -t_n,\ \ldots,\ -t_2,\ -t_1,\ 0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n \big\}. \tag{3.12}$$

В [17, теорема 2] Я. Л. Геронимус привел формулу

$$\|\widetilde{\tau}\|_L = 4(1+q^2), \quad q \in (-1,1). \tag{3.13}$$

Эта формула является частным случаем утверждения[6] (3.14) леммы 1, которая, в свою очередь, содержится в более общем утверждении, доказанном в [9, теорема 1].

Лемма 1 (Я. Л. Геронимус). *Пусть* $\xi \in \mathbb{R}$, $r,n \in \mathbb{N}$, $n \le r < 3n$, $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, *и задан тригонометрический полином* $\tau(t) := \mathrm{Re}\big\{e^{i\xi}z^{2n-r}p^2(z)\big\}$, *где*[7] $p(z) = \prod_{j=1}^{r-n}(z - z_j)$, $z_j \in \mathbb{C}$, *все* $|z_j| < 1$. *Тогда*

$$\|\tau\|_L = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{it})|^2\,dt. \tag{3.14}$$

Ниже понадобится лемма 2, в формулировке которой используются точки из множества A (см. (3.10)–(3.12)), обозначения (3.3), (3.8) и дробь

$$\mathcal{R}(t) = \frac{\vartheta(t)}{\vartheta_a(t)}, \quad \text{где} \quad \vartheta_a(t) = 1 - a\cos t, \quad a = \frac{2qn}{1-q^2+n(1+q^2)}.$$

Нетрудно проверить, что при всех $q \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|a| < 1, \qquad 0 < \vartheta(t), \qquad 0 < \vartheta_a(t), \qquad 0 < \mathcal{R}(t).$$

Лемма 2. *Пусть* $q \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для всех* $Y \in \Phi_n$ *выполняется формула*

$$(-1)^{n+1}\mathcal{R}(-\pi)\,Y(-\pi) + \mathcal{R}(0)\,Y(0) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,\mathcal{R}(t_k)\big\{Y(-t_k) + Y(t_k)\big\} = 0. \tag{3.15}$$

Доказательство леммы 2 приведено в разд. 6, там же (для полноты изложения) приведено доказательство леммы 1, которое отличается от оригинального.

[5] Отметим, что множество $e^{iA} := \{z = e^{it} : t \in A\}$, расположенное на единичной окружности комплексной плоскости, является симметричным относительно вещественной оси, т. е. самосопряженным.

[6] Положив $p(z) := z - q$, перепишем выражения (3.3) и (3.11): $\vartheta(t) = 1 + q^2 - 2q\cos t = |p(z)|^2$, $\widetilde{\tau}(t) = \mathrm{Re}\big\{e^{-i\pi/2}z^{n-1}p^2(z)\big\}$, где $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$. Применив лемму 1, придем к равенству (3.13).

[7] Здесь и далее, если нижний индекс у знака произведения больше верхнего, произведение считается равным единице.

4. Теорема Геронимуса

Я. Л. Геронимус [17, теорема 2; 18; 9] установил следующее утверждение.

Теорема (Я. Л. Геронимус). *Пусть* $f_{n,q}(t) := \sin(n+1)t - 2q\sin nt,\ \ n \in \mathbb{N},\ \ q \in \mathbb{R}.$ *Тогда*

$$E_{n-1}(f_{n,q})_L = \|f_{n,q}(t) + \sin(n-1)t)\|_L = 8|q| \quad \text{при} \quad |q| \geq 1, \tag{4.1}$$

$$E_{n-1}(f_{n,q})_L = \|f_{n,q}(t) + q^2\sin(n-1)t)\|_L = 4(1+q^2) \quad \text{при} \quad |q| < 1. \tag{4.2}$$

Напомним, что в силу теоремы Джексона [19] (см. [1, гл. 2, п. 49, теорема; 16, гл. 3, теорема 10.9]) полином наилучшего интегрального приближения для $f_{n,q}$ является единственным.

В настоящее время, помимо первоначального доказательства [9; 17; 18] теоремы, имеется еще несколько различных способов обоснования утверждений (4.1), (4.2) (см. [7; 20; 8; 13, гл. 2, § 2.2, п. 2.2.4; 2, теорема 4]).

Ниже приводится еще один вариант доказательства теоремы Геронимуса. При этом для обоснования утверждения (4.1) применяется ортогональность функции $|\sin nt|$ гармонике $\cos t$ на периоде, а также оператор

$$\Lambda F(t) := \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k F\left(t + \frac{k\pi}{n}\right), \tag{4.3}$$

который оставляет без изменения гармоники степени $(2m-1)n$, где m — произвольное натуральное число, а остальные гармоники аннулирует. Этот оператор неявно использовался в [5, ст. 51, гл. 1, п. 3], а явно в [10]. Доказательство утверждения (4.2) основано на представлении (3.5) полинома $\cos(n+1)t - \tau^*(t),\ \tau^* \in \mathcal{T}_n,$ наименее уклоняющегося от нуля в равномерной метрике на $\mathbb{T}$ с весом $w(t) = 1/(1+q^2-2q\cos t),\ q \in (-1,1)$, а также на соотношениях двойственности [13, гл. 2, § 2.7, п. 2.7.4] и классических приемах теории интерполирования. Иными словами, (3.5) содержит в себе *нелинейную* составляющую решения задачи, т. е. информацию об *альтернансе — предполагаемом расположении точек канонического набора.* Для обоснования предположения остается решить *линейную* задачу о коэффициентах линейной комбинации дельта-функций с носителями в точках альтернанса.

5. Доказательство теоремы Геронимуса

Докажем сначала утверждение (4.1). Пусть $|q| \geq 1$. Рассмотрим полином

$$F_q(t) = \sin(n+1)t + 2q\sin nt + \tau(t), \quad \tau \in \mathcal{T}_{n-1}.$$

Подействуем на F_q оператором Λ (см. (4.3)), в результате получим

$$\Lambda F_q(t) = 2q\sin nt, \quad \|2q\sin nt\|_L = \|\Lambda F_q(t)\|_L = \left\|\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k F_q\Big(t+\frac{k\pi}{n}\Big)\right\|_L \leq \|F_q\|_L. \tag{5.1}$$

Функция $|\sin nt|$ ортогональна гармонике $\cos t$ на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$. Поскольку $|q| \geq 1$, то функция $|q| \pm \cos t$ является неотрицательной, а функция $q + \cos t$ знакопостоянна; следовательно,

$$8|q| = \|2q\sin nt\|_L = \int\limits_{\mathbb{T}} |2\sin nt|\,|q|\,dt = \int\limits_{\mathbb{T}} |2\sin nt|\big\{(\operatorname{sign} q)\,q + (\operatorname{sign} q)\cos t\big\}\,dt$$

$$= \int\limits_{\mathbb{T}} |2(q+\cos t)\sin nt|\,dt = \int\limits_{\mathbb{T}} |\sin(n+1)t + 2q\sin nt + \sin(n-1)t|\,dt.$$

Отсюда и из (5.1) получаем соотношения

$$8|q| = \|\sin(n+1)t + 2q\sin nt + \sin(n-1)t\|_L \le \|F_q\|_L, \tag{5.2}$$

которые остаются верными после замены q на $-q$. Учитывая также произвольность выбора полинома $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ в определении F_q, приходим к выводу, что (5.2) влечет (4.1).

Теперь докажем утверждение (4.2). Применив формулу (3.15) леммы 2 к функции

$$Y(t) = \vartheta_a(t)\tau(t)/\vartheta(t) \in \Phi_n, \quad \tau \in \mathcal{T}_{n-1},$$

получим

$$(-1)^{n+1}\tau(-\pi) + \tau(0) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\big\{\tau(-t_k) + \tau(t_k)\big\} = 0, \quad \tau \in \mathcal{T}_{n-1},$$

где узлы $-\pi,\ 0,\ \pm t_1,\ \pm t_2,\ \ldots,\ \pm t_n$ суть нули на $[-\pi,\pi)$ полинома $\widetilde{\tau}$, определенного формулой (3.11). Отсюда следует (см. вторую группу условий в (1.2)) ортогональность функции $\operatorname{sign}\widetilde{\tau}(t)$ всем тригонометрическим полиномам из $\mathcal{T}_{n-1}$ с нулевым средним значением на периоде $\mathbb{T}$. Функция $\operatorname{sign}\widetilde{\tau}(t)$ нечетная, поэтому она ортогональна и константам. Таким образом, функция $\operatorname{sign}\widetilde{\tau}(t)$ ортогональна всему подпространству $\mathcal{T}_{n-1}$.

Следовательно, набор нулей на $\mathbb{T}$ полинома $\widetilde{\tau}(t) = \sin(n+1)t - 2q\sin nt + q^2\sin(n-1)t$ является каноническим для $\mathcal{T}_{n-1}$. Отсюда с помощью теоремы Маркова (см., например, [2, теорема 1]) и равенства (3.13) приходим к утверждению (4.2). Теорема доказана.

6. Приложение

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Соотношения двойственности [13, гл. 2, § 2.7, п. 2.7.4] для (3.9) влекут существование $2(n+1)$ вещественных чисел

$$\mu(-\pi),\ \mu(-t_n),\ \ldots,\ \mu(-t_1),\ \mu(0),\ \mu(t_1),\ \ldots,\ \mu(t_n)$$

таких, что

$$\mu(-\pi)Y(-\pi) + \mu(0)Y(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\mu(-t_k)Y(-t_k) + \mu(t_k)Y(t_k)\big) = 0, \quad Y \in \Phi_n. \tag{6.1}$$

Утверждение (6.1) позволит обосновать совпадение функций $\mathcal{R}$ (с точностью до постоянного ненулевого множителя) и μ на альтернансе (см. (3.12))

$$A = \big\{-\pi,\ -t_n,\ \ldots, -t_1,\ 0,\ t_1,\ \ldots,\ t_n\big\}. \tag{6.2}$$

Построим несколько тригонометрических дробей из Φ_n, зануляющихся почти во всех точках альтернанса. Такие дроби аналогичны фундаментальным интерполяционным полиномам.

Рассмотрим следующую четную функцию из Φ_n:

$$Y^*(t) := \frac{\sin\psi(t)}{\sin t} = \frac{\sin(n+1)t - 2q\sin nt + q^2\sin(n-1)t}{(1 - 2q\cos t + q^2)\sin t}. \tag{6.3}$$

Она обращается в ноль во всех точках альтернанса A, за исключением точек 0 и $-\pi$. Найдем значения функции Y^* в этих двух точках, используя правило Лопиталя:

$$Y^*(0) = \lim_{t\to0}\frac{\sin\psi(t)}{\sin t} = \lim_{t\to0}\frac{\psi'(t)\cos\psi(t)}{\cos t} = n + d, \quad \text{где} \quad d := \frac{1+q}{1-q}; \tag{6.4}$$

$$Y^*(-\pi) = (-1)^n(n + 1/d). \tag{6.5}$$

Применив (6.1) к Y^*, получим $\mu(-\pi)Y^*(-\pi)+\mu(0)Y^*(0)=0$, что вместе с (6.4), (6.5) влечет равенство

$$(-1)^n(n+1/d)\mu(-\pi)+(n+d)\mu(0)=0. \tag{6.6}$$

Для заданного $k\in\{1,2,\dots,n\}$ рассмотрим функцию

$$Y_k(t):=\frac{\sin\psi(t)}{\cos t-\cos t_k}=\frac{\tau_k(t)}{\vartheta(t)},\quad \text{где}\quad \tau_k(t)=\frac{\sin(n+1)t-2q\sin nt+q^2\sin(n-1)t}{\cos t-\cos t_k}; \tag{6.7}$$

τ_k есть синус-полином степени n; поэтому Y_k принадлежит Φ_n и зануляется во всех точках альтернанса (6.2), за исключением точек $\pm t_k$. Функция Y_k является нечетной, подставим ее в (6.1), получим $\mu(-t_k)Y_k(t_k)=\mu(t_k)Y_k(t_k)$, что вместе с неравенством $Y_k(t_k)\neq 0$ влечет равенство $\mu(-t_k)=\mu(t_k)$. Это равенство и (6.6) позволяют преобразовать (6.1):

$$\left((-1)^{n+1}\,\frac{n+d}{n+1/d}\,Y(-\pi)+Y(0)\right)\mu(0)+\sum_{k=1}^{n}\big(Y(-t_k)+Y(t_k)\big)\mu(t_k)=0,\quad Y\in\Phi_n. \tag{6.8}$$

Для четных функций $Y\in\Phi_n$ формулу (6.8) можно упростить:

$$\left((-1)^{n+1}\,\frac{n+d}{n+1/d}\,Y(-\pi)+Y(0)\right)\mu(0)+2\sum_{k=1}^{n}Y(t_k)\mu(t_k)=0. \tag{6.9}$$

Рассмотрим четную функцию $Y_k^*(t):=\dfrac{Y_k(t)}{\sin t}=\dfrac{Y^*(t)}{\cos t-\cos t_k}\in\Phi_n$, $k=1,2,\dots,n$, где Y^*, Y_k определены выше (см. (6.3), (6.7)). Функция Y_k^* зануляется во всех точках альтернанса (6.2), за исключением точек $-\pi$, $-t_k$, 0, t_k. С помощью (6.4) и (6.5), приходим к равенствам

$$Y_k^*(-\pi)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1/d)}{1+\cos t_k},\qquad Y_k^*(0)=\frac{n+d}{1-\cos t_k}.$$

Используя правило Лопиталя и учитывая (3.6), находим

$$Y_k^*(-t_k)=Y_k^*(t_k)=\frac{(-1)^{k+1}\psi'(t_k)}{\sin^2 t_k}=\frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2 t_k}\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t_k}\right).$$

Применив (6.9) к Y_k^*, получим

$$(n+d)\left(\frac{1}{1+\cos t_k}+\frac{1}{1-\cos t_k}\right)\mu(0)=2\frac{(-1)^k}{\sin^2 t_k}\left(n+\frac{1-q^2}{1+q^2-2q\cos t_k}\right)\mu(t_k).$$

Отсюда при $k=1,2,\dots,n$ следуют равенства

$$(n+d)\,\mu(0)=(-1)^k\left(n+\frac{1-q^2}{\vartheta(t_k)}\right)\mu(t_k),\qquad \mu(t_k)=(-1)^k\,\frac{\gamma\,\vartheta(t_k)}{\vartheta_a(t_k)}\,\mu(0),$$

где $\quad\vartheta_a(t)=1-a\cos t,\qquad a=\dfrac{2qn}{1-q^2+n(1+q^2)},\qquad \gamma=\dfrac{n+d}{1-q^2+n(1+q^2)}.$

Подставив выражение для $\mu(t_k)$ в (6.8), после элементарных преобразований получим формулу, равносильную (3.15). Лемма 2 доказана. □

В доказательствах приведенных ниже лемм 3 и 4 используются соображения, аналогичные тем, которые применялись в [12, гл. 2, п. 2.6, теорема 2.6] (см. также [3, гл. 2, § 9, теорема 9.1]) и в [1, дополнения и задачи, задача 15; 21, теорема 1].

Лемма 3. *Пусть* $\xi \in \mathbb{R}$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $\ell \geq m$, *и задан многочлен* $G(z) = e^{i\xi} z^{2m-\ell} h^2(z)$, *где* $h(z) = \prod_{j=1}^{\ell-m} (z - z_j)$, $z, z_j \in \mathbb{C}$, *все* $|z_j| < 1$. *Тогда дробь* $\dfrac{G(z)}{|G(z)|}$ *удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности на единичной окружности* $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{G(z)}{|G(z)|}\, z^k\, dt = e^{i\xi} \int_0^{2\pi} \frac{z^{2m-\ell} h^2(z)}{|h(z)|^2}\, z^k\, dt = 0 \quad \text{для всех целых} \quad k \geq 1 - (m + s), \tag{6.10}$$

где s *— количество* z_j, *равных нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что достаточно рассмотреть лишь случай, когда все z_j отличны от нуля (т. е. $s = 0$). Положим $\gamma = e^{i\xi}$. При $z = e^{it}$, где $t \in \mathbb{R}$, имеем

$$\frac{G(z)}{|G(z)|} = \frac{\gamma z^{2m-\ell} h^2(z)}{|\gamma z^{2m-\ell} h^2(z)|} = \frac{\gamma z^{2m-\ell} h^2(z)}{|h(z)|^2} = \frac{\gamma z^{2m-\ell} h^2(z)}{h(z)\overline{h(z)}} = \frac{\gamma z^{2m-\ell} h(z)}{\overline{h(z)}} = \frac{\gamma z^{2m-\ell} h(z)}{\prod_{j=1}^{\ell-m} (\overline{z} - \overline{z}_j)}$$

$$= \frac{\gamma z^{2m-\ell} h(z)}{\prod_{j=1}^{\ell-m} \left(\dfrac{1}{z} - \overline{z}_j\right)} = \frac{\gamma z^m h(z)}{\prod_{j=1}^{\ell-m} (1 - z\overline{z}_j)} = \frac{\gamma z^m}{\prod_{j=1}^{\ell-m} \overline{z}_j} \frac{h(z)}{\prod_{j=1}^{\ell-m} \left(\dfrac{1}{\overline{z}_j} - z\right)} = \frac{\gamma z^m R(z)}{\prod_{j=1}^{\ell-m} \overline{z}_j}, \quad R(z) = \frac{h(z)}{\prod_{j=1}^{\ell-m} \left(\dfrac{1}{\overline{z}_j} - z\right)}.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае для доказательства утверждения (6.10) достаточно показать, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{k+m} R(z)\, dt = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 1 - m, \quad z = e^{it}. \tag{6.11}$$

При целых $k \geq -m$ функция $z^{k+m} R(z)$ аналитична в единичном круге $|z| \leq 1$ (включая его границу); поэтому (см. [11, отдел 3, гл. 3, § 2, задача 118]) ее среднее значение на единичной окружности совпадает с ее значением в точке $z = 0$. Следовательно, утверждение (6.11) справедливо. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $\xi \in \mathbb{R}$, $r, n \in \mathbb{N}$, $r \geq n$, $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, *и задана дробь*

$$M(t) := \frac{\operatorname{Re}\{e^{i\xi} z^{2n-r} P(z)\}}{|P(z)|}, \quad \text{где} \quad P(z) = \prod_{j=1}^{2(r-n)} (z - z_j), \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad \text{все} \quad |z_j| < 1.$$

Тогда функция $F(t) := |M(t)| - 2/\pi$ *ортогональна подпространству* $\mathcal{T}_{2n-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем функцию $M(t)$:

$$M(t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{Q(z)}{|P(z)|}\right\} = \operatorname{Re}\left\{e^{i\xi} z^{2n-r} \frac{P(z)}{|P(z)|}\right\} = \operatorname{Re}\bigl\{e^{i\varphi(t)}\bigr\} = \cos\varphi(t), \tag{6.12}$$

здесь

$$Q(z) := e^{i\xi} z^{2n-r} P(z), \quad \varphi(t) = \arg\{Q(z)\}, \quad z = e^{it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дальнейшие рассуждения строятся на представлении функции $|\cos\varphi(t)|$ в виде ряда:

$$|\cos\varphi(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{4\nu^2 - 1} \cos 2\nu\varphi(t). \tag{6.13}$$

Зафиксируем произвольное натуральное число ν и рассмотрим функцию

$$\cos 2\nu\varphi(t) = \mathrm{Re}\{e^{i2\nu\varphi(t)}\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{e^{i\xi}z^{2n-r}P(z)}{|P(z)|}\right)^{2\nu}\right\}. \tag{6.14}$$

Введем обозначения

$$m = 2\nu n, \qquad \ell = 2\nu r, \qquad h(z) = P^{\nu}(z) = \prod_{j=1}^{2(r-n)}(z - z_j)^{\nu}. \tag{6.15}$$

Многочлен h представим в виде

$$h(z) = \prod_{\mu=1}^{\ell-m}(z - \zeta_\mu) \qquad \big(\zeta_\mu \in \mathbb{C}, \quad \text{все} \quad |\zeta_\mu| < 1\big). \tag{6.16}$$

Перепишем формулу (6.14) в терминах (6.15)–(6.16):

$$\cos 2\nu\varphi(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i2\nu\xi}z^{2m-\ell}h^2(z)}{|h(z)|^2}\right\}. \tag{6.17}$$

По лемме 3 выполняются следующие соотношения ортогональности на единичной окружности $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i2\nu\xi}z^{2m-\ell}h^2(z)}{|h(z)|^2}\, z^k\, dt = 0 \quad \text{для всех целых} \quad k \geq 1 - m = 1 - 2\nu n \geq 1 - 2n.$$

Поэтому (см. (6.17)) при любом $\nu \in \mathbb{N}$ функция $\cos 2\nu\varphi(t)$ ортогональна подпространству $\mathcal{T}_{2n-1}$. Отсюда с помощью (6.12) и (6.13) получаем утверждение леммы. □

Доказательство леммы 1 следует из леммы 4 и из того факта, что функция $f(t) := |p(e^{it})|^2$ является тригонометрическим полиномом степени $\deg f = r - n \leq 2n - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
3. **Бадков В.М.** Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. 132 с.
4. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). 581 с.
5. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2: Конструктивная теория функций (1931–1953). 629 с.
6. **Бернштейн С.Н.** Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л.; М.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. 204 с.
7. **Галеев Э.М.** Задача Золотарева в метрике $L_1([-1,1])$ // Мат. заметки. 1975. Т. 17, вып. 1. С. 13–20.
8. **Гейт В.Э.** О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в метрике $L[-1,1]$ (3-е сообщ.) // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 3. С. 223–238.
9. **Геронимус Я.Л.** Об одной задаче F. Riesz'а и обобщенной задаче Чебышева — Коркина — Золотарева // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 279–288.
10. **Крейн М.** К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
11. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978. 392 с.

12. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
13. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
14. **Чебышев П.Л.** Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2: Математический анализ. С. 23–51.
15. **Чебышев П.Л.** Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций // Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2: Математический анализ. С. 151–235.
16. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 446 p.
17. **Geronimus J.** Sur quelques propriétés extrémales polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. 1935. Т. 12. С. 49–59.
18. **Geronimus J.** On some extremal properties of polynomials // Ann. Math. 1936. Vol. 37, no. 2. P. 483–517.
19. **Jackson D.** A general class of problems in approximation // Amer. J. Math. 1924. Vol. 46, no. 4. P. 215–234.
20. **Peherstorfer F.** Trigonometric polynomials approximation in L^1-norm // Mat. Ztschr. 1979. Vol. 169, no. 3. P. 261–269.
21. **Peherstorfer F.** On the representation of extremal functions in the L^1-norm // J. Approx. Theory. 1979. Vol. 27, no. 1. P. 61–75.

Поступила 10.02.2010

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Kryakin, Yuriy
dr hab.
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Юдин Владимир Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский энергетический институт
(технический университет)
e-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Том 16 № 4 2010

УДК 517.5

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ[1]

В. М. Бадков

Пусть $\{\psi_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — система многочленов Якоби, ортонормированная на окружности $|z|=1$ с весом $(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2}$ $(\alpha,\beta>-1)$; $\psi_n^{(\alpha,\beta)\,*}(z):=z^n\overline{\psi_n^{(\alpha,\beta)}(1/\overline{z})}$. В работе устанавливается связь многочлена $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ с n-м $(C,\alpha-1/2)$-средним ряда Маклорена функции $(1-z)^{-\alpha-3/2}$, а также многочлена $\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z)$ — с n-м $(C,\alpha+1/2)$-средним ряда Маклорена функции $(1-z)^{-\alpha-1/2}$. С учетом этой связи для $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ выводится асимптотическая формула, равномерная внутри круга $|z|<1$. Из этой формулы следует, что при фиксированных $\rho\in(0,1)$ и $\alpha>-1$ и достаточно большом n многочлен $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)\neq 0$ в круге $|z|\le\rho$.

Ключевые слова: многочлены Якоби, средние Чезаро, асимптотическая формула, нули.

V. M. Badkov. Some properties of Jacobi polynomials orthogonal on a circle.

Let $\{\psi_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be a system of Jacobi polynomials that is orthonormal on the circle $|z|=1$ with respect to the weight $(1-\cos\tau)^{\alpha+1/2}(1+\cos\tau)^{\beta+1/2}$ $(\alpha,\beta>-1)$, and let $\psi_n^{(\alpha,\beta)\,*}(z):=z^n\overline{\psi_n^{(\alpha,\beta)}(1/\overline{z})}$. We establish relations between the polynomial $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ and the nth $(C,\alpha-1/2)$-mean of the Maclaurin series for the function $(1-z)^{-\alpha-3/2}$ and also between the polynomial $\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z)$ and the nth $(C,\alpha+1/2)$-mean of the Maclaurin series for the function $(1-z)^{-\alpha-1/2}$. We use these relations to derive an asymptotic formula for $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$; the formula is uniform inside the disk $|z|<1$. It follows that $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)\neq 0$ in the disk $|z|\le\rho$ for fixed $\rho\in(0,1)$ and $\alpha>-1$ if n is sufficiently large.

Keywords: Jacobi polynomials, Cesàro means, asymptotic formula, zeros.

1. Введение

Всюду ниже $\mathbb{R}:=(-\infty,\infty)$, $\mathbb{Z}_+:=\{0,1,\dots\}$, $\mathbb{N}:=\{1,2,\dots\}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При $1\le r\le\infty$ через $L^r[a,b]$ обозначается пространство измеримых комплекснозначных функций F с конечной нормой $\|F\|_{L^r[a,b]}$, где

$$\|F\|_{L^r[a,b]}:=\left\{\int_a^b |F(\tau)|^r d\tau\right\}^{1/r}\quad(1\le r<\infty),\qquad \|F\|_{L^\infty[a,b]}:=\operatorname*{ess\,sup}_{a\le\tau\le b}|F(\tau)|.$$

Для 2π-периодической функции F полагаем $L^r:=L^r[0,2\pi]$, $\|F\|_r:=(2\pi)^{-1/r}\|F\|_{L^r[0,2\pi]}$.

Будем пользоваться обозначением

$$A_n^\alpha:=\binom{n+\alpha}{n}\tag{1.1}$$

для n-го $(n\in\mathbb{Z}_+)$ коэффициента биномиального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n^\alpha x^n=\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\qquad(\alpha\neq-1,-2,\dots).$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проект 09-Т-1-1004); а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213).

Если $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ — n-я частная сумма ряда $u_0 + u_1 + \ldots$, то величина

$$\sigma_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} s_k \tag{1.2}$$

называется n-м средним Чезаро, или n-м (C,α)-средним для последовательности $s_0, s_1, \ldots$ (или ряда $u_0 + u_1 + \ldots$). Наряду с (1.2) имеет место равенство (см. [1, разд. 2.1.3])

$$\sigma_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} u_k. \tag{1.3}$$

Весом называется суммируемая неотрицательная не эквивалентная нулю функция. Если $\varphi(\tau)$ — 2π-периодический вес, для которого $\ln\varphi(\tau) \in L^1$, то имеет смысл функция Сегё

$$\pi(\varphi; z) := \exp\biggl\{-\frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} \ln\varphi(\tau)\, d\tau\biggr\} \quad (|z| < 1). \tag{1.4}$$

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортонормальная на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(t)$, а $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ — система многочленов, ортонормальная на окружности $\Gamma_1 := \{z : |z| = 1\}$ с 2π-периодическим весом $\varphi(\tau)$ (см. [12; 13]); предполагается, что

$$p_n(t) = k_n^{(p)} t^n + \ldots + p_n(0) \quad (k_n^{(p)} > 0,\ n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$\varphi_n(z) = \kappa_n(\varphi) z^n + \ldots + \varphi_n(0) \quad (\kappa_n(\varphi) > 0,\ n \in \mathbb{Z}_+).$$

Если $\varphi(\tau) = |\sin\tau| p(\cos\tau)$, то имеет место формула Сегё (см. [13, разд. 11.5])

$$p_n(2^{-1}(z + z^{-1})) = (2\pi)^{-1/2}\{1 - a_{2n-1}^{(\varphi)}\}^{-1/2}\{z^{-n}\varphi_{2n}(z) + z^n\varphi_{2n}(z^{-1})\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+,\ z \neq 0). \tag{1.5}$$

Весу $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$ соответствует ортонормированная система многочленов Якоби $\{\widehat{p}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^\infty$. Через $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ обозначается многочлен Якоби, нормированный условием

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}. \tag{1.6}$$

Многочленами Якоби, ортогональными на окружности, будем называть многочлены, ортогональные на Γ_1 с весом

$$\psi^{\alpha,\beta}(\tau) := (1 - \cos\tau)^{\alpha+1/2}(1 + \cos\tau)^{\beta+1/2} \quad (\alpha, \beta > -1).$$

При этом для ортонормированной системы будем пользоваться обозначением $\{\psi_n^{(\alpha,\beta)}(z)\}_{n=0}^\infty$, а вместо $\kappa_n(\varphi)$ писать $\kappa_n^{\alpha,\beta}$. Некоторые свойства этих многочленов были рассмотрены в [4]. В частности, в [4, разд. 2] было установлено следующее

Предложение 1. *Коэффициенты $c_{n,\nu}^{(\alpha)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ разложения*

$$\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n,\nu}^{(\alpha)} z^n \quad (\alpha > -1,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ z \in \mathbb{C}) \tag{1.7}$$

вычисляются по формуле

$$c_{n,\nu}^{(\alpha)} := \frac{2^{\alpha/2+1/4}}{\Gamma(\alpha+1/2)} \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\alpha+2)}} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+3/2)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\Gamma(n-\nu+\alpha+1/2)}{\Gamma(n-\nu+1)}. \tag{1.8}$$

В [4, разд. 2] приведена лишь краткая схема доказательства предложения 1. Ввиду важной роли, которую играет это предложение в настоящей работе, в разд. 2 приводится более подробное (и притом другое) доказательство формулы (1.8). На основании (1.8) в разд. 3 устанавливается связь многочлена $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ с n-м $(C,\alpha-1/2)$-средним ряда Маклорена функции $(1-z)^{-\alpha-3/2}$, а также многочлена

$$\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z) := z^n\overline{\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(1/\overline{z})} = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n,n-\nu}^{(\alpha)} z^n \tag{1.9}$$

с n-м $(C,\alpha+1/2)$-средним ряда Маклорена функции $(1-z)^{-\alpha-1/2}$. С учетом этой связи в разд. 4 для $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ выводится асимптотическая формула (при $n\to\infty$), равномерная внутри круга $D := \{z:\ |z|<1\}$. Из этой формулы следует, что для фиксированных $\rho\in(0,1)$ и $\alpha>-1$ найдется число $N>0$, зависящее от ρ и α, такое, что для всех $n>N$ многочлен $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)\neq 0$ в круге $|z|\le\rho$.

2. Доказательство предложения 1

Сначала докажем справедливость формулы (1.8) при $n=2m$ $(m\in\mathbb{N})$. Для этого воспользуемся соотношением (см. [4, формула (2.17)])

$$e^{-im\tau}\psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)}(e^{i\tau}) = a(\alpha,m)\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2}(\cos\tau) + ib(\alpha,m)\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2}(\cos\tau)\sin\tau, \tag{2.1}$$

где

$$a(\alpha,m) = \{\pi(m+\alpha+1/2)/(2m+\alpha+1/2)\}^{1/2}, \qquad b(\alpha,m) = \{\pi m/(2m+\alpha+1/2)\}^{1/2}. \tag{2.2}$$

Разлагая входящие в (2.1) многочлены $\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2}$ и $\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2}$ по многочленам Чебышева первого и второго рода соответственно, получаем равенства

$$\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2}(\cos\tau) = \sum_{k=0}^{m} c_k^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2})\,\widehat{p}_k^{\,-1/2,-1/2}(\cos\tau), \tag{2.3}$$

$$\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2}(\cos\tau) = \sum_{k=1}^{m} c_{k-1}^{1/2,1/2}(\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2})\,\widehat{p}_{k-1}^{\,1/2,1/2}(\cos\tau), \tag{2.4}$$

в которых используется обозначение

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{p}_\nu^{\,\gamma,\beta}) := \int_{-1}^{1}\widehat{p}_\nu^{\,\gamma,\beta}(t)\widehat{p}_k^{\,\alpha,\beta}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt.$$

Учитывая (2.3), (2.4) и соотношения $\widehat{p}_0^{\,-1/2,-1/2}(\cos\tau)=\pi^{-1/2}$,

$$\widehat{p}_k^{\,-1/2,-1/2}(\cos\tau) = (2/\pi)^{1/2}\cos k\tau, \qquad \widehat{p}_{k-1}^{\,1/2,1/2}(\cos\tau)\sin\tau = (2/\pi)^{1/2}\sin k\tau \quad (k\in\mathbb{N}),$$

переписываем (2.1) в виде

$$e^{-im\tau}\psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)}(e^{i\tau}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}a(\alpha,m)c_0^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2})$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{m}\Big\{a(\alpha,m)c_k^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2})\cos k\tau + ib(\alpha,m)c_{k-1}^{1/2,1/2}(\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2})\sin k\tau\Big\}. \tag{2.5}$$

С другой стороны, в соответствии с (1.7)

$$e^{-im\tau}\psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)}(e^{i\tau})=\sum_{k=1}^{m}c_{2m,m-k}^{(\alpha)}e^{-ik}+c_{2m,m}^{(\alpha)}+\sum_{k=1}^{m}c_{2m,m+k}^{(\alpha)}e^{ik}$$

$$=c_{2m,m}^{(\alpha)}+\sum_{k=1}^{m}\big(c_{2m,m+k}^{(\alpha)}+c_{2m,m-k}^{(\alpha)}\big)\cos k\tau+i\sum_{k=1}^{m}\big(c_{2m,m+k}^{(\alpha)}-c_{2m,m-k}^{(\alpha)}\big)\sin k\tau. \tag{2.6}$$

Сравнивая правые части (2.5) и (2.6), находим, что

$$c_{2m,m-k}^{(\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\{a(\alpha,m)c_k^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2})-b(\alpha,m)c_{k-1}^{1/2,1/2}(\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2})\Big\}\quad(k=1,\dots,m), \tag{2.7}$$

$$c_{2m,m}^{(\alpha)}=\pi^{-1/2}a(\alpha,m)c_0^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2}), \tag{2.8}$$

$$c_{2m,m+k}^{(\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big\{a(\alpha,m)c_k^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2})+b(\alpha,m)c_{k-1}^{1/2,1/2}(\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2})\Big\}\quad(k=1,\dots,m). \tag{2.9}$$

Известно (см. [2, формула (15)], а также [9, теорема 31.1]), что если $k,\nu\in\mathbb{Z}_+$; $\nu\ge k$; $\alpha,\beta,\gamma>-1$; $(\alpha-\gamma)\,\overline{\in}\,\mathbb{Z}_+$, то

$$c_k^{\alpha,\beta}(\widehat{p}_\nu^{\,\gamma,\beta})=\frac{2^{(\alpha-\gamma)/2}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}u_\nu^{\beta,\gamma}\,v_k^{\alpha,\beta}\,w_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma}, \tag{2.10}$$

где

$$u_\nu^{\beta,\gamma}:=\bigg\{(2\nu+\gamma+\beta+1)\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\gamma+\beta+1)\Gamma(\nu+\gamma+1)}\bigg\}^{1/2},$$

$$v_k^{\alpha,\beta}:=\bigg\{(2k+\alpha+\beta+1)\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\beta+1)}\bigg\}^{1/2},$$

$$w_{\nu,k}^{\alpha,\beta,\gamma}:=\frac{\Gamma(\nu+k+\gamma+\beta+1)}{\Gamma(\nu+k+\alpha+\beta+2)}\,\frac{\Gamma(\nu-k+\gamma-\alpha)}{\Gamma(\nu-k+1)}.$$

Заменив в (2.10) ν на m, α и β на $-1/2$, а γ на α, с учетом формул $z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$ и

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2)=2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z) \tag{2.11}$$

найдем, что

$$2^{-\alpha/2-1/4}\Gamma(\alpha+1/2)c_k^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_m^{\,\alpha,-1/2})$$

$$=\bigg\{(2m+\alpha+1/2)\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+2\alpha+1)}\bigg\}^{1/2}\frac{\Gamma(m+k+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+k+1)}\frac{\Gamma(m-k+\alpha+1/2)}{\Gamma(m-k+1)}. \tag{2.12}$$

Аналогично, заменив в (2.10) ν на $m-1$, k на $k-1$, α и β на $1/2$, а γ на $\alpha+1$, получим

$$2^{-\alpha/2-1/4}\Gamma(\alpha+1/2)c_k^{-1/2,-1/2}(\widehat{p}_{m-1}^{\,\alpha+1,1/2})$$

$$=\bigg\{(2m+\alpha+1/2)\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(2m+2\alpha+2)}\bigg\}^{1/2}2k\frac{\Gamma(m+k+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+k+1)}\frac{\Gamma(m-k+\alpha+1/2)}{\Gamma(m-k+1)}. \tag{2.13}$$

Из (2.7), (2.9), (2.2), (2.12) и (2.13) следует, что при $k=1,\dots,m$ выполняются соотношения

$$c_{2m,m-k}^{(\alpha)}=\frac{2^{\alpha/2+1/4}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\sqrt{\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+2\alpha+2)}}\,\frac{\Gamma(m+k+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+k+1)}\,\frac{\Gamma(m-k+\alpha+3/2)}{\Gamma(m-k+1)}, \tag{2.14}$$

$$c_{2m,m+k}^{(\alpha)}=\frac{2^{\alpha/2+1/4}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\sqrt{\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+2\alpha+2)}}\,\frac{\Gamma(m+k+\alpha+3/2)}{\Gamma(m+k+1)}\,\frac{\Gamma(m-k+\alpha+1/2)}{\Gamma(m-k+1)}. \tag{2.15}$$

Пользуясь (2.8), (2.2) и (2.10), получаем также равенство

$$c_{2m,m}^{(\alpha)} = \frac{2^{\alpha/2+1/4}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\sqrt{\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+2\alpha+2)}}\,\frac{\Gamma(m+\alpha+3/2)}{\Gamma(m+1)}\,\frac{\Gamma(m+\alpha+1/2)}{\Gamma(m+1)}. \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.15) и (2.16) следует справедливость формулы (1.8) при $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Теперь докажем справедливость формулы (1.8) при $n = 2m-1$ ($m \in \mathbb{N}$). Для этого воспользуемся соотношением (см. [9, формула (7.5)] или [13, формула (11.4.6)])

$$\kappa_n(\varphi)z\varphi_n(z) = \kappa_{n+1}\varphi_{n+1}(z) - \varphi_{n+1}(0)\varphi_{n+1}^*(z) \quad (n \in \mathbb{Z}_+,\ z \in \mathbb{C}). \tag{2.17}$$

Применяя (2.17) при $n = 2m-1$ к системе $\{\psi_k^{(\alpha,-1/2)}(z)\}_{k=0}^{\infty}$, получаем, что

$$\kappa_{2m-1}^{\alpha,-1/2} z\psi_{2m-1}^{(\alpha,-1/2)}(z) = \kappa_{2m}^{\alpha,-1/2}\psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)}(z) - \psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)}(0)\psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)\,*}(z). \tag{2.18}$$

Учитывая равенство $\kappa_{n+1}^2(\varphi) - \kappa_n^2(\varphi) = |\varphi_{n+1}(0)|^2$ (см. [12, формула (1.5)]) и вводя обозначение $a_n^{\alpha,\beta} := -\psi_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(0)/\kappa_{n+1}^{\alpha,\beta}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), замечаем, что $\kappa_{2m-1}^{\alpha,-1/2}/\kappa_{2m}^{\alpha,-1/2} = \bigl\{1 - \bigl[a_{2m-1}^{\alpha,-1/2}\bigr]^2\bigr\}^{1/2}$. Поэтому (2.18) можно переписать в виде

$$\bigl\{1 - \bigl[a_{2m-1}^{\alpha,-1/2}\bigr]^2\bigr\}^{1/2} z\psi_{2m-1}^{(\alpha,-1/2)}(z) = \psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)}(z) + a_{2m-1}^{\alpha,-1/2}\psi_{2m}^{(\alpha,-1/2)\,*}(z). \tag{2.19}$$

В силу (1.7) и (1.9) из (2.19) следуют равенства

$$\bigl\{1 - \bigl[a_{2m-1}^{\alpha,-1/2}\bigr]^2\bigr\}^{1/2} c_{2m-1,\nu-1}^{(\alpha)} = c_{2m,\nu}^{(\alpha)} + a_{2m-1}^{\alpha,-1/2} c_{2m,2m-\nu}^{(\alpha)} \quad (\nu = 1,2,\ldots,2m). \tag{2.20}$$

Как известно (см. [4, формула (2.2)]),

$$a_n^{\alpha,\beta} = -[\alpha + 1/2 + (-1)^{n+1}(\beta+1/2)]/(n+\alpha+\beta+2) \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \tag{2.21}$$

Пользуясь (2.21), убеждаемся в справедливости соотношений

$$a_{2m-1}^{\alpha,-1/2} = -(\alpha+1/2)/(2m+\alpha+1/2), \tag{2.22}$$

$$\bigl\{1 - \bigl[a_{2m-1}^{\alpha,-1/2}\bigr]^2\bigr\}^{1/2} = 2\{m(m+\alpha+1/2)\}^{1/2}/(2m+\alpha+1/2). \tag{2.23}$$

Из (2.20), (2.22), (2.23) и доказанной выше формулы (1.8) при $n = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) вытекает равенство

$$c_{2m-1,\nu-1}^{(\alpha)} = \frac{2^{\alpha/2+1/4}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\sqrt{\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(2m+2\alpha+1)}}\,\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1/2)}{\Gamma(\nu)}\,\frac{\Gamma(2m-\nu+\alpha+1/2)}{\Gamma(2m-\nu+1)},$$

из которого следует справедливость формулы (1.8) при $n = 2m-1$ ($m \in \mathbb{N}$).

При $n = 0$ справедливость формулы (1.8) проверяется следующим образом. В силу (1.5)

$$\psi_0^{(\alpha,-1/2)}(1) = \pi^{1/2}\widehat{p}_0^{\,\alpha,-1/2}(1). \tag{2.24}$$

При этом выполняется равенство (см. (1.6) и [13, формула (4.3.4)])

$$\widehat{p}_0^{\,\alpha,-1/2}(1) = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+3/2)}{2^{\alpha+1/2}\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1)}}. \tag{2.25}$$

Из (2.24), (2.25) и (2.11) следует, что

$$c_{0,0}^{(\alpha)} = \psi_0^{(\alpha,-1/2)}(1) = \frac{2^{\alpha/2+1/4}}{\Gamma(\alpha+1/2)}\frac{1}{\sqrt{\Gamma(2\alpha+2)}}\,\Gamma(\alpha+3/2)\Gamma(\alpha+1/2).$$

Такой же результат получим, если в формуле (1.8) положим $n = \nu = 0$.

3. Связь многочлена $\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z)$ с n-м $(C,\alpha+1/2)$-средним ряда Маклорена соответствующей функции Сегё

Пусть $\varphi_n^*(z) := z^n\overline{\varphi_n(1/\overline{z})}$ и $\delta_n(\varphi) := \inf\limits_{c_0,\dots,c_n\in\mathbb{C}} \|[\pi(\varphi;e^{i\tau}) - c_0 - c_1e^{i\tau} - \ldots - c_ne^{in\tau}]\sqrt{\varphi(\tau)}\|_2$, где $\pi(\varphi;z)$ — функция Сегё, определяемая формулой (1.4) для веса φ, суммируемого вместе с логарифмом на отрезке $[0,2\pi]$. Имеют место равенства (см. [12, формула (2.8)])

$$\delta_n(\varphi) = \left\|\left[\pi(\varphi;e^{i\tau}) - \frac{\kappa_n(\varphi)}{\pi(\varphi;0)}\varphi_n^*(e^{i\tau})\right]\sqrt{\varphi(\tau)}\right\|_2 = \frac{1}{\pi(\varphi;0)}\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|\varphi_\nu(0)|^2\right\}^{1/2}, \tag{3.1}$$

где $\kappa_n(\varphi) \to \pi(\varphi;0)$ при $n\to\infty$. Таким образом, $\varphi_n^*(z)$ отличается от многочлена наилучшего приближения функции $\pi(\varphi;e^{i\tau})$ в пространстве $L^2_\varphi(\Gamma_1)$ лишь постоянным множителем, стремящимся к единице при $n\to\infty$.

На основании (1.9), (1.8), (1.6) и (1.1) выполняется равенство

$$\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z) = l(\alpha,n)Q_{\alpha,n}(z), \tag{3.2}$$

где

$$Q_{\alpha,n}(z) := \frac{1}{A_n^{\alpha+1/2}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha+1/2}2^{\alpha/2+1/4}A_\nu^{\alpha-1/2}z^\nu, \tag{3.3}$$

$$l(\alpha,n) := \frac{\Gamma(n+\alpha+3/2)}{\sqrt{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+2)}} = 1 + O(n^{-1}) \quad (n\to\infty). \tag{3.4}$$

Полагая $u_\nu := A_\nu^{\alpha-1/2}z^\nu$, замечаем, что $u_0+u_1+u_2+\ldots = 2^{\alpha/2+1/4}(1-z)^{-\alpha-1/2}$. Поэтому в силу (1.3) и (3.3) можем утверждать, что многочлен $Q_{\alpha,n}(z)$ есть n-е $(C,\alpha+1/2)$-среднее ряда Маклорена функции $2^{\alpha/2+1/4}(1-z)^{-\alpha-1/2}$, а $\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z)$ в силу (3.2) и (3.4) отличается от этого среднего лишь постоянным множителем, стремящимся к единице при $n\to\infty$.

Г. Сегё (см. [13, формула (12.3.16)]) установил справедливость следующего результата.

Предложение 2. *Если выполняется условие $\ln\varphi(\tau)\in L^1$, то равномерно внутри единичного круга D*

$$\varphi_n^*(z) = \pi(\varphi;z) + o(1) \quad (n\to\infty). \tag{3.5}$$

Из этого результата, в частности, следует, что при фиксированном $\alpha > -1$ равномерно внутри D выполняется предельное соотношение $\psi_n^{(\alpha,-1/2)\,*}(z) \to \pi(\psi^{\alpha,-1/2};z)$, из которого в силу формул (3.2)–(3.4) вытекает следующая

Лемма 3.1. *При любом $\alpha > -1$ n-е $(C,\alpha+1/2)$-среднее ряда Маклорена функции Сегё $\pi(\psi^{\alpha,-1/2};z)$ сходится к ней равномерно внутри D.*

Заметим, что из (3.1)–(3.4) также следует, что при любом $\alpha > -1$ n-е $(C,\alpha+1/2)$-среднее ряда Маклорена функции Сегё $\pi(\psi^{\alpha,-1/2};z)$ сходится к ней в метрике пространства $L^2_\varphi(\Gamma_1)$.

На основании (1.7), (1.8), (1.6) и (1.1) выполняется равенство (при $\alpha\neq -1/2$)

$$\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z) = l_1(\alpha,n)q_{\alpha,n}(z), \tag{3.6}$$

где

$$q_{\alpha,n}(z) := \frac{1}{A_n^{\alpha-1/2}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1/2}A_\nu^{\alpha+1/2}z^\nu, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} l_1(\alpha,n) &:= 2^{\alpha/2+1/4}(\alpha+1/2)\Gamma(n+\alpha+1/2)[\Gamma(n+1)\Gamma(n+2\alpha+2)]^{-1/2} \\ &= 2^{\alpha/2+1/4}(\alpha+1/2)n^{-1}[1+O(n^{-1})] \quad (n\to\infty). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Полагая $u_\nu := A_\nu^{\alpha+1/2}z^\nu$, замечаем, что $u_0+u_1+u_2+\ldots = (1-z)^{-\alpha-3/2}$. Поэтому в силу (1.3) и (3.7) можем утверждать, что многочлен $q_{\alpha,n}(z)$ есть n-е $(C,\alpha-1/2)$-среднее ряда Маклорена функции $(1-z)^{-\alpha-3/2}$. В частности, $q_{1/2,n}(z)$ есть n-я сумма Маклорена функции $(1-z)^{-2}$.

4. Асимптотическое поведение $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ внутри единичного круга

Из формулы (3.5) вытекает справедливость равномерной внутри области $|z|>1$ асимптотической формулы

$$\varphi_n(z) = z^n[\overline{\pi(\varphi;1/\overline{z})} + o(1)] \quad (n\to\infty). \tag{4.1}$$

Известно много результатов о справедливости формулы (4.1) на единичной окружности Γ_1 или на ее дуге (например, см. [3–5; 7; 12; 13]), но до настоящего времени отсутствуют более или менее общие результаты об асимптотическом поведении $\varphi_n(z)$ внутри единичного круга. В этом разделе рассматривается асимптотическое поведение $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ внутри D.

С использованием (3.6)–(3.8) доказывается следующая

Теорема 4.1. *При фиксированном $\alpha>-1$ $(\alpha\neq-1/2)$ имеет место равномерная внутри единичного круга D асимптотическая формула*

$$\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z) = l_1(\alpha,n)[(1-z)^{-\alpha-3/2}+o(1)] \quad (n\to\infty), \tag{4.2}$$

где $l_1(\alpha,n)$ определяется формулой (3.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.6)–(3.8) для доказательства теоремы достаточно установить, что $q_{\alpha,n}(z)$, т. е. n-е $(C,\alpha-1/2)$-среднее ряда Маклорена функции $(1-z)^{-\alpha-3/2}$ сходится к ней при $n\to\infty$ равномерно внутри D. Воспользуемся соотношением (см. [1, формула (27)])

$$\sigma_n^{\mu}-\sigma_n^{\mu+1} = \frac{1}{(1+\mu)A_n^{1+\mu}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\mu} k u_k, \tag{4.3}$$

где σ_n^{μ} и $\sigma_n^{\mu+1}$ — n-е (C,μ)- и $(C,\mu+1)$-средние ряда $u_0+u_1+\dots$ Полагая $u_k := A_k^{\alpha+1/2}z^k$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$, в силу (4.3) имеем равенства

$$\sigma_n^{\alpha-1/2}-\sigma_n^{\alpha+1/2} = \frac{1}{(\alpha+1/2)A_n^{\alpha+1/2}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1/2} k A_k^{\alpha+1/2} z^k, \tag{4.4}$$

$$\sigma_n^{\alpha+1/2}-\sigma_n^{\alpha+3/2} = \frac{1}{(\alpha+3/2)A_n^{\alpha+3/2}}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha+1/2} k A_k^{\alpha+1/2} z^k. \tag{4.5}$$

При $|z|\le\rho<1$ и $\alpha\neq-1/2$ из (4.4) и (4.5) вытекают неравенства

$$|\sigma_n^{\alpha-1/2}-\sigma_n^{\alpha+1/2}| \le \frac{C_1(\alpha)}{n^{\alpha+1/2}}\Bigg\{\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} n^{\alpha-1/2}k^{\alpha+3/2}\rho^k + \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}(n+1-k)^{\alpha-1/2}n^{\alpha+3/2}\rho^{[\sqrt{n}]}\Bigg\},$$

$$|\sigma_n^{\alpha+1/2}-\sigma_n^{\alpha+3/2}| \le \frac{C_2(\alpha)}{n^{\alpha+3/2}}\Bigg\{\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]} n^{\alpha+1/2}k^{\alpha+3/2}\rho^k + \sum_{k=[\sqrt{n}]+1}^{n}(n+1-k)^{\alpha+1/2}n^{\alpha+3/2}\rho^{[\sqrt{n}]}\Bigg\},$$

в силу которых

$$|\sigma_n^{\alpha-1/2}-\sigma_n^{\alpha+3/2}| \le C_3(\alpha,\rho)n^{-1} + C_4(\alpha)n^{\max\{1,\ \alpha+3/2\}}\rho^{\sqrt{n}}. \tag{4.6}$$

Из (1.3) и леммы 3.1 следует, что при фиксированном $\alpha>-2$ равномерно внутри D

$$\sigma_n^{\alpha+3/2} := \frac{1}{A_n^{\alpha+3/2}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha+3/2}A_\nu^{\alpha+1/2}z^\nu \to (1-z)^{-\alpha-3/2} \quad (n\to\infty). \tag{4.7}$$

На основании (4.6), (4.7) и (3.7) при фиксированном $\alpha > -1$ ($\alpha \neq -1/2$) равномерно внутри D

$$q_{\alpha,n}(z) \to (1-z)^{-\alpha-3/2} \quad (n \to \infty). \tag{4.8}$$

Из (3.6), (3.7) и (4.8) следует справедливость доказываемой теоремы. □

При $\alpha = 1/2$ формула (1.7) приобретает наиболее простой вид:

$$\psi_n^{(1/2,-1/2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1) z^\nu. \tag{4.9}$$

В этом частном случае имеет место следующая, уточняющая теорему 4.1 (при $\alpha = 1/2$)

Теорема 4.2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\psi_n^{(1/2,-1/2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \, \frac{1}{(1-z)^2} \, [1 + \varepsilon_n(z)], \tag{4.10}$$

где

$$|\varepsilon_n(z)| \le 2(n+2)|z|^{n+1} \qquad (|z| < 1). \tag{4.11}$$

Доказательство. В самом деле, в силу (4.9)

$$\psi_n^{(1/2,-1/2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \left\{ \frac{1}{(1-z)^2} - E_n(z) \right\}, \tag{4.12}$$

где

$$E_n(z) := \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\nu+1) z^\nu = \frac{d}{dz} \sum_{\nu=n+2}^{\infty} z^\nu = \frac{d}{dz} \frac{z^{n+2}}{1-z} = \frac{(n+2)z^{n+1}}{(1-z)^2} \left(1 - \frac{n+1}{n+2} z\right). \tag{4.13}$$

Из (4.12) и (4.13) вытекает формула (4.10) с оценкой остаточного члена (4.11). □

Заметим, что для $\rho \in (0,1)$ величина $\varepsilon_n(-\rho) = [1 + (n+1)(n+2)^{-1}\rho](n+2)\rho^{n+1}$. Поэтому постоянный множитель 2 в правой части (4.11) нельзя заменить на меньший.

5. О нулях многочленов Якоби, ортогональных на окружности

Из асимптотической формулы (4.2) легко следует

Теорема 5.1. *Для фиксированных $\rho \in (0,1)$ и $\alpha > -1$ найдется число $N > 0$, зависящее от ρ и α, такое, что для всех $n > N$ многочлен $\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z)$ не имеет нулей в круге $|z| \le \rho$.*

Известно (см. [6]), что $\psi_{2n}^{(\alpha,\alpha)}(z) = \psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z^2)$ и $\psi_{2n+1}^{(\alpha,\alpha)}(z) = z\psi_n^{(\alpha,-1/2)}(z^2)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Поэтому теорема 5.1 верна также и для многочленов $\psi_{2n}^{(\alpha,\alpha)}(z)$ и $\psi_{2n+1}^{(\alpha,\alpha)}(z)/z$.

Заметим, что теорема 5.1 дополняет исследования автора [8–11] о нулях тригонометрических ортогональных полиномов и алгебраических многочленов, ортогональных на отрезке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексич Г.** Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: ИЛ, 1963. 360 с.
2. **Бадков В.М.** Приближение функций частными суммами ряда Фурье по обобщенным многочленам Якоби // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 6. С. 671–682.
3. **Бадков В.М.** Асимптотическое поведение ортогональных многочленов // Мат. сб. 1979. Т. 109 (151), № 1. С. 46–51.
4. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных полиномов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 6–36.
5. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных многочленов // Приближение функций полиномами и сплайнами / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1985. С. 41–53.
6. **Бадков В.М.** О системах ортогональных многочленов, выражающихся в явном виде через многочлены Якоби // Мат. заметки. 1987. Т. 42, вып. 5. С. 650–659.
7. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.
8. **Бадков В.М.** О нулях ортогональных многочленов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 2. С. 30–46.
9. **Бадков В.М.** Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. 132 с.
10. **Бадков В.М.** Асимптотика наибольшего нуля многочлена, ортогонального на отрезке с неклассическим весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 38–42.
11. **Бадков В.М.** Поточечные оценки многочленов, ортогональных на окружности с весом, не принадлежащим пространствам L^r $(r > 1)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 66–78.
12. **Геронимус Я.Л.** Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958. 240 с.
13. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

Бадков Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник, профессор
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Поступила 11.02.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА ТИПА СВЕРТКИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЯДРОМ И ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

Н. В. Байдакова, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Для интегрального уравнения первого рода типа свертки с ядром $b/(b^2+x^2)$ разработан алгоритм нахождения приближенного решения при наличии априорной информации о принадлежности правой части специальному классу функций.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода, свертка, преобразование Фурье.

N. V. Baidakova, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Solution of a first-kind convolution integral equation with a special kernel and a right-hand side.

For a first-kind convolution integral equation with kernel $b/(b^2+x^2)$, an algorithm is developed for finding an approximate solution under the a priori information that the right-hand side belongs to a special class of functions.

Keywords: first-kind integral equation, convolution, Fourier transform.

Рассматриваем интегральное уравнение следующего вида:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)u(t)\,dt = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

где

$$\varphi(x) = \varphi(b,x) = \frac{b}{b^2+x^2},$$

а относительно $f(x)$ возможны случаи:

1) функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{s=1}^{n} \frac{A_s b_s^2}{b_s^2 + (x-x_s)^2}, \tag{2}$$

при этом натуральное число n и числа $A_s,\ b_s,\ x_s$ известны. Далее считаем, что $b,\ b_s > 0,\ s = 1,2,\ldots,n$;

2) функция $f(x)$ известна и имеет вид (2), но параметры $n,\ x_s,\ b_s,\ A_s$ неизвестны.

Рассмотрим вначале первый случай.

Теорема 1. *Пусть все параметры в правой части* (2) *известны,* $b, b_s > 0,\ b_s > b$ $(s = 1,2,\ldots,n)$, *тогда решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *имеет вид*

$$u(t) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\overline{A}_s \overline{b}_s^2}{\overline{b}_s^2 + (t-\overline{x}_s)^2},$$

где

$$\overline{x}_s = x_s, \qquad \overline{b}_s = b_s - b, \qquad \overline{A}_s = \frac{A_s b_s}{\pi(b_s-b)} \quad (s=1,\ldots,n).$$

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке Президиума УрО РАН (проект 09-Т-1-1004); а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00320) и УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 09-С-1-1007.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение будем искать в виде

$$u(t)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\overline{A}_s\overline{b}_s^2}{\overline{b}_s^2+(t-\overline{x}_s)^2}. \tag{3}$$

Положим

$$\varphi_s(x)=\frac{A_sb_s^2}{b_s^2+(x-x_s)^2}.$$

Тогда, используя теорию вычетов или прямое и обратное преобразование Фурье для сверток, легко показать, что

$$(\varphi*\varphi_s)(x)=\frac{\pi A_sb_s(b+b_s)}{(x-x_s)^2+(b_s+b)^2}. \tag{4}$$

Для полноты картины этот факт будет установлен ниже.

Подставляя (3) в (1), учитывая, что правая часть (1) в рассматриваемом случае совпадает с известной правой частью (2), а также равенства (4), получаем

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\overline{A}_s\overline{b}_s\pi(b+\overline{b}_s)}{(\overline{b}_s+b)^2+(x-\overline{x}_s)^2}=\sum_{s=1}^{n}\frac{A_sb_s^2}{b_s^2+(x-x_s)^2}. \tag{5}$$

Из (5) находим

$$\overline{x}_s=x_s,\qquad \overline{b}_s=b_s-b,\qquad \overline{A}_s=\frac{A_sb_s}{\pi(b_s-b)}\qquad (s=1,\ldots,n).$$

Если решение $u(t)$ искать в $L(-\infty,\infty)$, то оно единственно (см. [1, гл. 1, п. 3.2] и [2, п. 2.5.6, формула 15]). □

Рассмотрим второй (основной) случай. Здесь задача сводится к рассмотренной, если по известной функции $f(x)$ удастся найти все параметры в правой части равенства (2).

Пусть $\Phi_s(t)=\Phi_s(t,b)=\varphi*\varphi_s$ — свертка функций φ и φ_s, тогда

$$\Phi_s(t)=\Phi_s(t,b)=\frac{A_sb_s\pi(b+b_s)}{(b+b_s)^2+(t-x_s)^2}\qquad (s=1,\ldots,n). \tag{6}$$

Равенство (6) известно и легко доказывается с помощью теории вычетов или с использованием прямого и обратного преобразования Фурье для сверток. Например,

$$\Phi_s(t)=(\varphi*\varphi_s)(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\varphi_s(t-x)\,dx$$

$$=A_sbb_s^22\pi i\left\{\underset{x=bi}{\text{Выч}}\ \frac{1}{[b_s^2+(t-x_s-x)^2](x^2+b^2)}+\underset{x=t-x_s+b_si}{\text{Выч}}\ \frac{1}{[b_s^2+(t-x_s-x)^2](x^2+b^2)}\right\}$$

$$=A_sbb_s^22\pi i\left\{\frac{1}{2bi[b_s^2+(t-x_s-bi)^2]}+\frac{1}{[b^2+(t-x_s+ib_s)^2]2b_si)}\right\}$$

$$=\frac{A_sb_s\pi}{ib_s+t-x_s-ib}\left[\frac{b_s}{-ib_s+t-x_s-ib}+\frac{b}{ib+t-x_s+ib_s}\right]=\frac{\pi A_sb_s(b+b_s)}{(t-x_s)^2+(b+b_s)^2}. \tag{7}$$

Учитывая (1) и (7), имеем

$$(\varphi*f)(t)=\sum_{s=1}^{n}\Phi_s(t)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\pi A_sb_s(b+b_s)}{(t-x_s)^2+(b+b_s)^2}.$$

Лемма. *Справедливы равенства*

$$\max_t \Big|\frac{d^k\Phi_s(t,b)}{db^k}\Big| = \frac{\pi|A_s|b_s k!}{(b+b_s)^{k+1}} \qquad (s=1,2,\dots,n, \quad k\in\mathbb{N}), \tag{8}$$

при этом знак равенства достигается лишь при $t = x_s$.

Доказательство. Воспользуемся следующими соотношениями:

$$\frac{p}{p^2+\xi^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p-i\xi} + \frac{1}{p+i\xi}\Big), \tag{9}$$

$$\frac{d^k}{dp^k}\,\frac{p}{p^2+\xi^2} = \frac{(-1)^k k!}{2}\Big[\frac{1}{(p-i\xi)^{k+1}} + \frac{1}{(p+i\xi)^{k+1}}\Big] = (-1)^k \frac{k!}{(p^2+\xi^2)^{(k+1)/2}}\cos\theta(\xi,p), \tag{10}$$

где $\theta(\xi,p) = \arcsin(\xi/(p^2+\xi^2)^{1/2})$. Из (10) следует, что

$$\max_\xi \Big|\frac{d^k}{dp^k}\,\frac{p}{p^2+\xi^2}\Big| = \Big|\frac{d^k}{dp^k}\,\frac{p}{p^2+\xi^2}\Big|_{\xi=0} = \frac{k!}{p^{k+1}}. \tag{11}$$

Знак равенства достигается лишь при $\xi = 0$.

Полагая в (9)–(11) $p = b + b_s,\ \xi = t - x_s$ (при $\xi = 0,\ t = x_s$) и учитывая (7), выводим (8). Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \infty,\ a > 0,$ *тогда*

$$\max_t \Big|\frac{d^k}{db^k}[\varphi * f]\Big|\frac{(b+a)^{k+1}}{\pi a k!} = \frac{|A_1|b_1}{(b+b_1)^{k+1}}[1+o(1)]\frac{(b+a)^{k+1}}{a}$$

$$\to \begin{cases} \infty, & \text{если } \ a > b_1, \\ |A_1|, & \text{если } \ a = b_1, \\ 0, & \text{если } \ 0 < a < b_1, \end{cases} \qquad \text{при } \ k\to\infty. \tag{12}$$

Доказательство. Из (4), (2) и леммы имеем

$$\max_t \Big|\frac{d^k}{db^k}[\varphi * f]\Big|\frac{(b+a)^{k+1}}{\pi a k!} = \max_t \Big|\sum_{s=1}^{n}\frac{d^k}{db^k}\Phi_s(t,b)\Big|\frac{(b+a)^{k+1}}{\pi a k!}$$

$$\le \Big[\frac{\pi|A_1|b_1}{(b+b_1)^{k+1}} + \sum_{s=2}^{n}\frac{|A_s|b_s}{(b+b_s)^{k+1}}\Big]\frac{(b+a)^{k+1}}{a}$$

$$= \frac{b_1(b+a)^{k+1}|A_1|}{a(b+b_1)^{k+1}}\Big[1 + \sum_{s=2}^{n}\frac{|A_s|b_s}{|A_1|b_1}\Big(\frac{b+b_1}{b+b_s}\Big)^{k+1}\Big]. \tag{13}$$

С другой стороны,

$$\max_t \Big|\frac{d^k}{db^k}[\varphi * f]\Big|\frac{(b+a)^{k+1}}{\pi a k!} \ge \frac{b_1(b+a)^{k+1}|A_1|}{a(b+b_1)^{k+1}}\Big[1 - \sum_{s=2}^{n}\frac{|A_s|b_s}{|A_1|b_1}\Big(\frac{b+b_1}{b+b_s}\Big)^{k+1}\Big]. \tag{14}$$

Учитывая ограничения на b_s $(0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_n)$, выводим (12). При этом сумма по s от 2 до n в (13) при $k\to\infty$ стремится к нулю, а максимум первого слагаемого $(s = 1)$ достигается при $t = x_1$ в силу леммы. Отсюда следует, что точка, в которой достигается максимум левой части (13), близка к x_1, т. е. x_1 можно приближенно найти, если найти точку, в которой при достаточно большом k достигается максимум по t левой части (13).

Из неравенств (13), (14) вычисляются пределы в (12). Теорема доказана. □

Численный алгоритм для случая $A_s > 0$ $(s = 1, 2, \dots, n)$. Пусть $f(x)$ имеет единственный максимум. Находим точку максимума. Обозначим ее x_1 и вычисляем $A_1 = f(x_1)$. Находим точки, в которых $f(x) = (1/2)A_1$. Если $f(x) = (A_1 b_1^2)/(b_1^2 + (x - x_1)^2)$, то это выполняется в двух точках $\overline{x}_1 = x_1 + b_1$ и $\overline{x}_2 = x_1 - b_1$ и, следовательно, $b_1 = 1/2(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$. Полагаем $\varphi_1(x) = (f(x_1)b_1^2)/(b_1^2 + (x - x_1)^2)$. Если $f(x) - \varphi_1(x) \equiv 0$ или достаточно мало, то считаем, что $n = 1$ и $f(x) = \varphi_1(x)$.

В противном случае при достаточно большом k находим максимум левой части (13). Точку, в которой этот максимум достигается, принимаем за приближенное значение x_1.

Далее, используя (12), находим числа $a_1^{(1)}$ и $a_2^{(1)}$ и такое $k^{(1)}$, что левая часть (12) при $a = a_2^{(1)}$ больше, например, $\|f\|$ (заметим, что $A_1 < \|f\|$, если $n > 1$), а при $a = a_1^{(1)}$ левая часть (12) меньше $\varepsilon > 0$, где ε достаточно мало и связано с точностью вычисления A_1. Пусть $[a_1^{(2)}, a_2^{(2)}]$ — один из отрезков $[a_1^{(1)}, 1/2(a_1^{(1)} + a_2^{(1)})]$ или $[1/2(a_1^{(1)} + a_2^{(1)}), a_2^{(1)}]$, для которого существует такое $k^{(2)}$, что левая часть (12) при $a_2^{(2)}$ больше $\|f\|$, а при $a_1^{(2)}$ меньше ε и т. д. В итоге построим последовательность отрезков $[a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}]$ такую, что $a_1^{(\nu)} \le b_1 \le a_2^{(\nu)}$ и $a_2^{(\nu)} - a_1^{(\nu)} < (a_2^{(1)} - a_1^{(1)})/2^\nu$. Таким образом, можно найти b_1 с большой точностью.

Далее, учитывая (12), (13) и (14), получаем ($|\theta| < 1$)

$$\max_t \Big| \frac{d^\nu}{db^\nu}[\varphi * f] \Big| \frac{(b + a_1^{(\nu)})^{k+1}}{\pi a_1^{(\nu)} k!} = \frac{b_1 (b + a_1^{(\nu)})^{\nu+1} A_1}{a_1^{(\nu)} (b + b_1)^{\nu+1}} \Big[1 + \theta \sum_{s=2}^{n} \frac{A_s b_s}{A_1 b_1} \Big(\frac{b + b_1}{b + b_s} \Big)^{\nu+1} \Big]$$

при достаточно больших ν. Отсюда

$$\ln \max_t \Big| \frac{d^\nu}{db^\nu}[\varphi * f] \Big| \frac{(b + a_1^{(\nu)})^{k+1}}{\pi a_1^{(\nu)} k!} = \ln \frac{b_1}{a_1^{(\nu)}} + (\nu + 1) \ln \Big(\frac{b + a_1^{(\nu)}}{b + b_1} \Big)$$
$$+ \ln \Big[1 + \theta \sum_{s=2}^{n} \frac{A_s b_s}{A_1 b_1} \Big(\frac{b + b_1}{b + b_s} \Big)^{\nu+1} \Big] + \ln A_1.$$

Так как первое, второе и третье слагаемые стремятся к нулю при $\nu \to \infty$, то отсюда при достаточно большом ν находим приближенное значение A_1.

При найденных x_1, b_1, A_1 вводим функцию $f_1(x) = f(x) - \varphi_1(x)$. Далее проделываем с $f_1(x)$ те же операции, что и с $f(x)$, находим x_2, A_2, b_2 и т. д.

Отметим, что в алгоритме применяется операция дифференцирования. При дифференцировании экспериментальных данных, известных с погрешностью, эта операция некорректна и требуется регуляризация. В предлагаемом алгоритме дифференцируются не экспериментальные данные, а пробная функция $\varphi(x, b)$. При этом производные $d^k \varphi(x, b)/db^k$ вычисляются аналитически. А после этого используется более регулярная операция — интегрирование.

Выпишем явно эти формулы, учитывая (10) и подставляя соответствующие значения p и ξ. Получаем

$$\max_t \Big| \frac{d^k}{db^k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \frac{b\,dx}{b^2 + x^2} \Big| \frac{(b + a)^{k+1}}{\pi a k!} = \frac{(b + a)^{k+1}}{\pi a k!} \max_t \Big| \frac{d^k}{db^k} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \frac{1}{2} \Big(\frac{1}{b - ix} + \frac{1}{b + ix} \Big) dx \Big|$$
$$= \frac{(b + a)^{k+1}}{2\pi a} \max_t \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \Big[\frac{1}{(b - ix)^{k+1}} + \frac{1}{(b + ix)^{k+1}} \Big] dx \Big|$$
$$= \frac{(b + a)^{k+1}}{2\pi a} \max_t \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \Big[\frac{(b + ix)^{k+1} + (b - ix)^{k+1}}{(b^2 + x^2)^{k+1}} \Big] dx \Big|$$
$$= \frac{(b + a)^{k+1}}{\pi a} \max_t \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \frac{1}{(b^2 + x^2)^{k+1}} \sum_{s=0}^{[(k+1)/2]} (-1)^s C_{k+1}^{2s} x^{2s} b^{k+1-2s}\, dx \Big|.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
2. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Поступила 8.04.2010

Байдакова Наталия Васильевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Baidakova@imm.uran.ru

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ В L ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЯДРА ПУАССОНА И ЕГО СОПРЯЖЕННОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ[1]

Н. А. Барабошкина

Рассматривается линейная комбинация $\Pi_{q,\alpha} = \cos(\alpha\pi/2)P + \sin(\alpha\pi/2)Q$ ядра Пуассона $P(t) = 1/2 + q\cos t + q^2\cos 2t + \ldots$ и его сопряженного $Q(t) = q\sin t + q^2\sin 2t + \ldots$ при значениях параметров $\alpha \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$. Найдена новая явная формула для величины $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ наилучшего приближения в пространстве $L = L_{2\pi}$ функции $\Pi_{q,\alpha}$ подпространством тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$. А именно показано, что $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \dfrac{|q|^n(1-q^2)}{1-q^{4n}} \left\| \dfrac{\cos(nt-\alpha\pi/2) - q^{2n}\cos(nt+\alpha\pi/2)}{1+q^2-2q\cos t} \right\|_L$. Кроме того, дано представление величины $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ в виде быстро сходящегося ряда.

Ключевые слова: тригонометрическая аппроксимация, ядро Пуассона.

N. A. Baraboshkina. L-approximation of a linear combination of the Poisson kernel and its conjugate kernel by trigonometric polynomials.

A linear combination $\Pi_{q,\alpha} = \cos(\alpha\pi/2)P + \sin(\alpha\pi/2)Q$ of the Poisson kernel $P(t) = 1/2 + q\cos t + q^2\cos 2t + \ldots$ and its conjugate kernel $Q(t) = q\sin t + q^2\sin 2t + \ldots$ is considered for $\alpha \in \mathbb{R}$ and $|q| < 1$. A new explicit formula is found for the value $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ of the best approximation in the space $L = L_{2\pi}$ of the function $\Pi_{q,\alpha}$ by the subspace of trigonometric polynomials of order at most $n-1$. Namely, it is shown that $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \dfrac{|q|^n(1-q^2)}{1-q^{4n}} \left\| \dfrac{\cos(nt-\alpha\pi/2) - q^{2n}\cos(nt+\alpha\pi/2)}{1+q^2-2q\cos t} \right\|_L$. Besides, the value $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ is represented as a rapidly converging series.

Keywords: trigonometric approximation, Poisson kernel.

1. Постановка задачи. История вопроса

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество тригонометрических полиномов

$$\tau(t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t)$$

степени не выше n с вещественными коэффициентами. Зафиксируем произвольное вещественное число $q:\ |q| < 1$. Функции

$$P(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1-q^2}{2(1-2q\cos t + q^2)}, \qquad Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t + q^2}$$

называются ядром Пуассона и сопряженным ядром Пуассона соответственно (см. [8, гл. 3, § 6, формулы (6.2), (6.3)]). При фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию

$$\Pi_{q,\alpha}(t) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\Big(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\Big) = \cos\frac{\alpha\pi}{2}P(t) + \sin\frac{\alpha\pi}{2}Q(t)$$

$$= \frac{(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{2(1-2q\cos t + q^2)} + \frac{q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin t}{1-2q\cos t+q^2}. \tag{1.1}$$

[1]Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00325).

Данная статья посвящена задаче интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}$ по норме

$$\|f\|_L = \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt$$

пространства $L = L_{2\pi}$ суммируемых 2π-периодических функций множеством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$, т. е. задаче нахождения величины

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \min_{\tau \in \mathcal{T}_{n-1}} \|\Pi_{q,\alpha} - \tau\|_L = \|\Pi_{q,\alpha} - \tau^*\|_L \tag{1.2}$$

и полинома $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения для функции $\Pi_{q,\alpha}$.

Задача интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}(t)$ в случае $q = 0$ тривиальна, а для $-1 < q < 0$ сводится к случаю $0 < q < 1$ с помощью замены t на $t - \pi$, поскольку

$$\Pi_{q,\alpha}(t-\pi) = \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - k\pi - \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k q^k \cos\left(kt - \frac{\alpha\pi}{2}\right) = \Pi_{-q,\alpha}(t).$$

Поэтому в дальнейшем будет обсуждаться лишь случай $0 < q < 1$.

С. Н. Бернштейн (1930) [6, ст. 51, ч. 1, введение, п. 6] фактически указал полином τ^*, который реализует минимум в (1.2) в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$. Величина наилучшего приближения при $\alpha = 0$ была найдена М. Г. Крейном (1938) [9]:

$$E_{n-1}(\Pi_{q,0}) = 4 \operatorname{arctg} q^n; \tag{1.3}$$

при $\alpha = 1$ — Б. Надем (1938) [16] (см. [10, § 7, п. 3]):

$$E_{n-1}(\Pi_{q,1}) = 2 \ln \frac{1+q^n}{1-q^n}. \tag{1.4}$$

Две последние формулы дают значение величины $E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})$ для всех целых α.

В общем случае ($\alpha \in \mathbb{R}$) А. В. Бушанский (1978) [7] показал, что существует вещественное число $\xi = \xi(\alpha, q, n)$ такое, что экстремальный полином τ^* интерполирует функцию $\Pi_{q,\alpha}$ в нулях функции $\sin n(t-\xi)$, при этом

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = 4\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)\xi - \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|,$$

где ξ является корнем уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{(2\nu+1)n} \cos\left((2\nu+1)t - \frac{\alpha\pi}{2}\right) = 0.$$

В. Т. Шевалдин (1992) [13, теорема 3] переоткрыл этот результат, получив его иным способом. Кроме того, он доказал [13, § 3, формула (7)], что указанный параметр ξ является решением уравнения

$$\sin\left(nt - \frac{\alpha\pi}{2}\right) = q^{2n} \sin\left(nt + \frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

В данной работе для построения полинома наилучшего интегрального приближения функции $\Pi_{q,\alpha}(t)$ применен метод, основанный на представлении неправильной тригонометрической дроби

$$\frac{\gamma \sin n(t-\xi)}{1 + q^2 - 2q\cos t}$$

в виде суммы ее "целой" части — некоторого тригонометрического полинома и остатка. Реализация этого способа заключается в подборе параметров ξ, γ, зависящих от q, α и n, таким образом, чтобы остаток равнялся $\Pi_{q,\alpha}(t)$. В этом случае из критерия Маркова (см. [1, гл. 2, п. 50; 14, гл. 3, § 10, теорема 10.5; 2, теорема 1]) будет следовать, что целая часть является полиномом наилучшего интегрального приближения для остатка; в силу теоремы Джексона [15] (см. [1, гл. 2, п. 49, теорема; 14, гл. 3, теорема 10.9] этот полином будет единственным.

Предложенный подход основан на идеях П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна. П. Л. Чебышев (1859) [12, разд. 9–11] нашел рациональную дробь (числитель которой является многочленом заданной степени с фиксированным старшим коэффициентом, а знаменатель — фиксированный многочлен, не обращающийся в ноль на $[-1,1]$), наименее уклоняющуюся от нуля в метрике пространства $C[-1,1]$. С. Н. Бернштейн (1912) [5, ст. 7] обратил внимание, что результат П. Л. Чебышева в случае, когда знаменатель рациональной дроби имеет вид $x-a$, $|a|>1$, содержит в себе решение задачи равномерного приближения на $[-1,1]$ дроби $1/(x-a)$ множеством алгебраических многочленов заданной степени (подробнее см. [3, разд. 2]).

Основные результаты данной работы анонсированы в [4].

2. Вспомогательный результат

Докажем вспомогательное утверждение. Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов

$$f(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_n x^n$$

степени не выше $n \geq 0$ с вещественными коэффициентами, для удобства полагаем $\mathcal{P}_{-1} := \{0\}$;

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad U_n(x) = \frac{\sin\{(n+1)\arccos x\}}{\sin(\arccos x)}, \qquad x \in [-1,1],$$

— многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Лемма 1. *При любых $q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\frac{\cos nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{c(n)}{1+q^2-2q\cos t} + R_{n-1}(\cos t),$$

$$\frac{\sin nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{d(n)\sin t}{1+q^2-2q\cos t} + (\sin t) Q_{n-2}(\cos t),$$

в которых

$$c(n) = \frac{1+q^{2n}}{2q^n}, \qquad d(n) = \frac{1-q^{2n}}{(1-q^2)q^{n-1}} = \frac{1}{q^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k}, \tag{2.1}$$

$R_{n-1}(x)$ и $Q_{n-2}(x)$ — некоторые алгебраические многочлены степени $n-1$ и $n-2$ соответственно, причем $R_0(x) \equiv -1/(2q)$, $Q_{-1}(x) \equiv 0$.

Доказательство. С помощью замены $\cos t = x$, $t = \arccos x$, получаем

$$\cos nt = \cos(n\arccos x) = T_n(x), \qquad \sin nt = \sin(\arccos x)\, U_{n-1}(x),$$

$$\frac{\cos nt}{1+q^2-2q\cos t} = \frac{T_n(x)}{1+q^2-2qx} = \frac{c(n)}{1+q^2-2qx} + R_{n-1}(x), \quad R_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}. \tag{2.2}$$

Домножив обе части второго равенства в (2.2) на $1+q^2-2qx$, придем к соотношению

$$T_n(x) = c(n) + (1+q^2-2qx)R_{n-1}(x).$$

В точке
$$\beta = \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right),$$
являющейся корнем полинома $1 + q^2 - 2qx$, имеем (см. [11, гл. 1, § 1, формулы (20), (21)])
$$T_n(\beta) = \frac{1}{2}\left(q^n + \frac{1}{q^n}\right) = c(n).$$

Аналогично
$$\frac{\sin nt}{1 + q^2 - 2q\cos t} = \frac{U_{n-1}(x)\sin(\arccos x)}{1 + q^2 - 2qx} = \frac{d(n)\sin(\arccos x)}{1 + q^2 - 2qx} + \sin(\arccos x)Q_{n-2}(x),$$
$$\sin(\arccos x)U_{n-1}(x) = d(n)\sin(\arccos x) + (1 + q^2 - 2qx)\sin(\arccos x)Q_{n-2}(x), \quad Q_{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2},$$
и
$$U_{n-1}(\beta) = d(n) = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = \frac{1 - q^{2n}}{(1 - q^2)q^{n-1}} = \frac{1}{q^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} q^{2k}.$$

Лемма доказана.

3. Основные результаты

Опишем кратко полученные в работе результаты. В лемме 2 и теореме 1 выписаны две новые формулы для разности $\Pi_{q,\alpha} - \tau^*$ между функцией $\Pi_{q,\alpha}$ и полиномом $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$ ее наилучшего интегрального приближения (т. е. полиномом, реализующим минимум в (1.2)). В теореме 2 дается представление величины (1.2) в виде быстро сходящегося ряда.

Лемма 2. *Пусть $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$ — полином наилучшего интегрального приближения для функции $\Pi_{q,\alpha}$. Тогда имеет место представление*
$$\Pi_{q,\alpha}(t) - \tau^*(t) = \frac{\gamma \sin n(t - \xi)}{1 + q^2 - 2q\cos t}, \tag{3.1}$$
в котором параметры γ и ξ определены соотношениями
$$\gamma = \frac{q^n(1 - q^2)}{(1 - q^{4n})}\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos\alpha\pi + q^{4n}}, \qquad \xi = -\frac{1}{n}\,\arcsin\frac{(1 - q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\sqrt{1 - 2q^{2n}\cos\alpha\pi + q^{4n}}}. \tag{3.2}$$

Доказательство. На самом деле мы убедимся, что существует полином $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$ такой, что имеет место представление (3.1). В силу рассуждений, приведенных в конце первого раздела, отсюда будет следовать, что τ^* — полином наилучшего интегрального приближения для функции $\Pi_{q,\alpha}$.

Для произвольных пока вещественных параметров γ, ξ имеем
$$\frac{\gamma \sin n(t - \xi)}{1 + q^2 - 2q\cos t} = \frac{-\gamma \sin n\xi \cos nt}{1 + q^2 - 2q\cos t} + \frac{\gamma \cos n\xi \sin nt}{1 + q^2 - 2q\cos t}.$$
Воспользовавшись леммой 1, получим
$$\frac{\gamma \sin n(t - \xi)}{1 + q^2 - 2q\cos t} = F_{\gamma,\xi}(t) + g_{n-1}(t), \qquad g_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1},$$
где
$$F_{\gamma,\xi}(t) = \frac{-\gamma\, c(n)\sin n\xi}{1 + q^2 - 2q\cos t} + \frac{\gamma\, d(n)\cos n\xi \sin t}{1 + q^2 - 2q\cos t}.$$

Убедимся, что найдутся числа $\gamma, \xi \in \mathbb{R}$ такие, что выполняется равенство

$$\Pi_{q,\alpha} = F_{\gamma,\xi}; \tag{3.3}$$

более того, мы докажем, что как раз числа (3.2) и обладают этим свойством. В силу (1.1) последнее соотношение имеет место в том и только в том случае, если числа γ и ξ удовлетворяют следующей системе двух уравнений:

$$\begin{cases} -\gamma\, c(n) \sin n\xi = \dfrac{1}{2}(1-q^2)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}, \\ \gamma\, d(n)\cos n\xi = q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}. \end{cases}$$

Принимая во внимание (2.1), эту систему можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \gamma \sin n\xi = -\dfrac{q^n(1-q^2)}{1+q^{2n}}\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}, \\ \gamma\cos n\xi = \dfrac{q^n(1-q^2)}{1-q^{2n}}\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Просуммировав квадраты уравнений системы (3.4), после элементарных преобразований придем к равенству

$$\gamma^2 = \frac{q^{2n}(1-q^2)^2}{(1-q^{4n})^2}(1+q^{4n}-2q^{2n}\cos\alpha\pi).$$

Поскольку $1+q^{4n}-2q^{2n}\cos\alpha\pi > 0$, то можно положить

$$\gamma = \frac{q^n(1-q^2)}{(1-q^{4n})}\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}. \tag{3.5}$$

Первое уравнение в (3.4) и равенство (3.5) влекут соотношения

$$\sin n\xi = -\frac{1}{\gamma}\,\frac{q^n(1-q^2)}{1+q^{2n}}\cos\frac{\alpha\pi}{2} = -\frac{1-q^{4n}}{1+q^{2n}}\frac{1}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$= -\frac{1-q^{2n}}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}}\cos\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{3.6}$$

Имеем

$$\left|\frac{(1-q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}}\right| \le 1.$$

Следовательно, в качестве ξ можно взять

$$\xi = -\frac{1}{n}\ \arcsin\frac{(1-q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}}.$$

Таким образом, показано, что для чисел γ, ξ, определенных формулами (3.2), выполняется равенство (3.3). Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. *Пусть $\tau^* \in \mathcal{T}_{n-1}$ — полином наилучшего интегрального приближения для функции $\Pi_{q,\alpha}$. Тогда имеет место представление*

$$\Pi_{q,\alpha}(t) - \tau^*(t) = M_q\frac{\cos\left(nt-\dfrac{\alpha\pi}{2}\right) - q^{2n}\cos\left(nt+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)}{1+q^2-2q\cos t}, \quad \textit{где} \quad M_q = \frac{q^n(1-q^2)}{1-q^{4n}}. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем разность

$$\cos\left(nt-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-q^{2n}\cos\left(nt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)=\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos nt+\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin nt-q^{2n}\left[\cos\frac{\alpha\pi}{2}\cos nt-\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin nt\right]$$

$$=A\cos nt+B\sin nt,\quad \text{где}\quad A=\left(1-q^{2n}\right)\cos\frac{\alpha\pi}{2},\quad B=\left(1+q^{2n}\right)\sin\frac{\alpha\pi}{2}. \tag{3.8}$$

Несложно убедиться в том, что $A^2+B^2=1+q^{4n}-2q^{2n}\cos\alpha\pi$. Отсюда с учетом (3.6) получаем

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1-q^{2n}}{\sqrt{1+q^{4n}-2q^{2n}\cos\alpha\pi}}\cos\frac{\alpha\pi}{2}=-\sin n\xi,\qquad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos n\xi,$$

$$A\cos nt+B\sin nt=\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos nt+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin nt\right]$$

$$=\sqrt{1+q^{4n}-2q^{2n}\cos\alpha\pi}\,[\cos n\xi\sin nt-\sin n\xi\cos nt]=\sqrt{1+q^{4n}-2q^{2n}\cos\alpha\pi}\,\sin n(t-\xi).$$

Последняя цепочка равенств, с учетом (3.8) и определения γ (см. первое равенство в (3.2)), приводит к соотношению

$$M_q\left[\cos\left(nt-\frac{\alpha\pi}{2}\right)-q^{2n}\cos\left(nt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right]=\gamma\sin n(t-\xi),$$

которое вместе с (3.1) влечет утверждение (3.7). Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е. С помощью формул (1.1) и (3.7) несложно получить следующие явные выражения полинома $\tau^*\in\mathcal{T}_{n-1}$ наилучшего интегрального приближения для функции $\Pi_{q,\alpha}$:

$$\tau^*(t)=\frac{\dfrac{1-q^2}{2}\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}+q\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}\sin t-\dfrac{q^n(1-q^2)}{1-q^{4n}}\left[\cos\left(nt-\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)-q^{2n}\cos\left(nt+\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)\right]}{1-2q\cos t+q^2}$$

$$=\frac{1-q^{2n}}{2(1+q^{2n})}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}q^k\left(1-q^{2(n-k)}\right)\left(\frac{\cos kt}{1+q^{2n}}\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\sin kt}{1-q^{2n}}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $0<q<1,\ \alpha\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})=\frac{8\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}}{1-q^{4n}}\left(\frac{q^n}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\cos 2kn\xi\right), \tag{3.9}$$

где

$$\xi=-\frac{1}{n}\arcsin\frac{(1-q^{2n})\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}}. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha})=\|\Pi_{q,\alpha}-\tau^*\|_L=\left\|\frac{\gamma\sin n(t-\xi)}{1+q^2-2q\cos t}\right\|_L=\gamma\int_0^{2\pi}\frac{|\sin n(t-\xi)|}{1-2q\cos t+q^2}\,dt. \tag{3.11}$$

Используя формулу

$$|\sin n(t-\xi)|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kn(t-\xi),$$

продолжим равенства (3.11):

$$E_{n-1}(\Pi_{q,\alpha}) = \frac{2\gamma}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2q\cos t+q^2} - \frac{4\gamma}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos 2kn(t-\xi)}{1-2q\cos t+q^2}\,dt$$

$$= \frac{4\gamma}{1-q^2} - \frac{4\gamma}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kn\xi\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos 2knt}{1-2q\cos t+q^2}\,dt$$

$$= \frac{4\gamma}{1-q^2} - \frac{8\gamma}{1-q^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}q^{2kn}\cos 2kn\xi = \frac{8\gamma}{1-q^2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2kn}}{4k^2-1}\cos 2kn\xi\right)$$

$$= \frac{8q^n}{1-q^{4n}}\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{2kn}}{4k^2-1}\cos 2kn\xi\right)$$

$$= \frac{8}{1-q^{4n}}\sqrt{1-2q^{2n}\cos\alpha\pi+q^{4n}}\left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\cos 2kn\xi\right).$$

Теорема доказана.

4. Согласованность теоремы 2 с результатами М. Г. Крейна и Б. Надя

Покажем, что в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ утверждение теоремы 2 совпадает с результатами М. Крейна (1.3) и Б. Надя (1.4) соответственно.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда в силу (3.9), (3.10) имеем

$$n\xi = -\arcsin 1 = -\frac{\pi}{2},$$

$$E_{n-1}(\Pi_{q,0}) = \frac{8}{1-q^{4n}}\sqrt{1-2q^{2n}+q^{4n}}\left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\cos 2kn\xi\right)$$

$$= \frac{8}{1+q^{2n}}\left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\cos 2k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{1+q^{2n}}\left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\right).$$

Преобразуем второе слагаемое в скобках:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k-1} - \frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{2n}q^{(2k-1)n}}{2k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{2n}q^{(2k+1)n}}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k+1} = -\frac{1}{2}q^{3n} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k+1}(q^{2n}+1)$$

и подставим его в выражение для $E_{n-1}(\Pi_{q,0})$. Имеем

$$E_{n-1}(\Pi_{q,0}) = \frac{4q^n}{1+q^{2n}} + \frac{4q^{3n}}{1+q^{2n}} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k+1} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{(2k+1)n}}{2k+1} = 4\operatorname{arctg} q^n,$$

что совпадает с результатом (1.3) М. Крейна.

Пусть теперь $\alpha = 1$. Имеем

$$n\xi = \arcsin 0 = 0,$$

$$E_{n-1}(\Pi_{q,1}) = \frac{8}{1-q^{4n}}\sqrt{1+2q^{2n}+q^{4n}}\left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\right)$$

$$= \frac{8}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^n}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{4k^2-1}\right) = \frac{4}{1-q^{2n}}\left(q^n - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{q^{(2k+1)n}}{2k-1} - \frac{q^{(2k+1)n}}{2k+1}\right]\right)$$

$$= \frac{4}{1-q^{2n}}\left(q^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{2n}q^{(2k+1)n}}{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{4q^n}{1-q^{2n}} - \frac{4q^{2n}}{1-q^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{2k+1} + \frac{4}{1-q^{2n}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{2k+1} = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{(2k+1)n}}{2k+1} = 2\ln\frac{1+q^n}{1-q^n},$$

что совпадает с результатом (1.4) Б. Надя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
3. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Об одном результате Геронимуса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 54–64.
4. **Барабошкина Н.А.** Интегральное приближение линейной комбинации ядра Пуассона и его сопряженного // Approximation Theory and Applications: Abstracts of Intern. Conf. dedicated N. P. Korneichuk memory / Dnepropetrovsk National University. Dnepropetrovsk, 2010. P. 21–22.
5. **Бернштейн С.Н.** Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). 581 с.
6. **Бернштейн С.Н.** Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2: Конструктивная теория функций (1931–1953). 629 с.
7. **Бушанский А.В.** О наилучшем в среднем гармоническом приближении некоторых функций // Исследования по теории приближения функций и их приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. С. 2–37.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
9. **Крейн М.Г.** К теории наилучшего приближения // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 245–249.
10. **Никольский С.М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 207–256.
11. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: пер. с польск. М.: Наука, 1983. 384 с.
12. **Чебышев П.Л.** Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций // Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2: Математический анализ. С. 151–235.
13. **Шевалдин В.Т.** Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. 1992. Т. 51, вып. 6. С. 126–136.
14. **DeVore R.A., Lorentz G.G.** Constructive approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 446 p.
15. **Jackson D.** A general class of problems in approximation // Amer. J. Math. 1924. Vol. 46, no. 4. P. 215–234.
16. **Sz. Nagy B.** Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall // Ber. Verh. sächs. Akad., Leipzig. 1938. Bd. 90. S. 103–134.

Барабошкина Наталья Алексеевна
ведущий математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: nata-npc@2-u.ru

Поступила 20.05.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.62

ОБЪЕКТ И ГРУППА НАБЛЮДАТЕЛЕЙ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

В. И. Бердышев

Для движущегося объекта и наблюдателя в гладком строго выпуклом банаховом пространстве введена функция, характеризующая видимость объекта для наблюдателя. Местоположение наблюдателя задано с погрешностью. Исследуется свойство дифференцируемости этой функции; в случае конечномерного пространства найдено выражение для производной по любому направлению. Изучается характеристика видимости для группы наблюдателей.

Ключевые слова: навигация движущегося объекта, характеризация видимости объекта, дифференцируемость по направлению.

V. I. Berdyshev. Moving object and observer in a Banach space.

For a moving object and an observer in a smooth strictly convex Banach space, a function characterizing the visibility of the object to the observer is introduced. The position of the observer is given inaccurately. The differentiability property of this function is investigated; in the case of a finite-dimensional space, an expression is found for the derivative in any direction. The visibility characteristic for a group of observers is studied.

Keywords: navigation of a moving object, characterization of the visibility of an object, directional differentiability.

1. Введение

Пусть X — банахово пространство с дифференцируемой строго выпуклой нормой $\|\cdot\|$, G — множество из X, являющееся замыканием открытого множества, t — движущаяся точка (объект), $t\in X\backslash G$, f — наблюдатель, $f\in X$. Объект t видим для f, если $(t,f)\cap G=\varnothing$. Будем считать, что местонахождение наблюдателя задано с погрешностью $h>0$, т. е. известно лишь, что он принадлежит шару

$$V'_h(f)=\bigl\{x\in X:\ \|f-x\|'\le h\bigr\},$$

где $\|\cdot\|'$ — дифференцируемая норма, может быть, отличная от $\|\cdot\|$. Для наблюдателя предпочтительна такая позиция, что из любой точки шара $V'_h(f)$ видна любая точка шара

$$V_r(t)=\{x\in X:\ \|t-x\|\le r\}$$

для возможно большего числа $r>0$, т. е. когда для усеченного конуса

$$K_r(t,f)=K_r(t,f,h)=\mathrm{conv}\bigl[V_r(t)\cup V'_h(f)\bigr]\backslash V'_h(f)$$

выполняется соотношение

$$K_r(t,f,h)\cap G=\varnothing$$

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” и ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проекты 09-П-1-1013, 09-Т-1-1004).

при наибольшем r, здесь conv обозначает выпуклую оболочку множества. Следующая функция

$$r(t,f) = r_h(t,f,G) = \min\{r:\ K_r(t,f,h)\cap G \neq \varnothing\}$$

характеризует видимость объекта t для наблюдателя f.

При планировании маршрута движения объекта t важно знать свойства функции $r(t,f)$, направления ее роста или убывания. Легко проверить, что выполняется неравенство

$$|r(t,f) - r(T,f)| \le \|t-T\| \qquad \bigl(T \in V_{\|t-f\|}(t)\bigr).$$

В настоящей работе устанавливаются формулы для производных функции $r(t,f)$

$$\frac{\partial r(t,f)}{\partial \widetilde{t}} = \lim_{\lambda\to+0}\frac{r(t+\lambda\widetilde{t},f) - r(t,f)}{\lambda}$$

по направлениям $\widetilde{t}\in X$, $\|\widetilde{t}\| = 1$. Эта задача рассматривалась в [1; 2] для евклидовой нормы $\|\cdot\|$. Часто имеется возможность за счет выбора нормы $\|\cdot\|$ получить функцию $r_h(t,f,G)$, позволяющую учесть особенности множества G, препятствующего видимости объекта. Поэтому представляет интерес случай произвольной нормы $\|\cdot\|$.

2. Дифференцирование функции $r(t,f)$

В дальнейшем используется известная теорема В. Ф. Демьянова [3, гл. 4, § 2].

Теорема 1 (В. Ф. Демьянов). *Пусть $\mathcal{T}$ — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, G — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$ $(n,m = 1,2,\dots)$, $R(t,g)$ — непрерывно дифференцируемая по t на $\mathcal{T}\times G$ функция,*

$$r(t) = \max\{R(t,g):\ g\in G\}.$$

Функция $r(t)$ имеет в каждой точке $t\in\mathcal{T}$ производную по любому направлению $\widetilde{t}$, $\|\widetilde{t}\| = 1$, причем

$$\frac{\partial r}{\partial \widetilde{t}} = \max\left\{\frac{\partial R(t,g)}{\partial\widetilde{t}}:\ g\in G(t)\right\}, \quad \textit{где} \quad G(t) = \bigl\{g\in G:\ R(t,g) = r(t)\bigr\}.$$

В нашем случае функция $r(t,f)$ выражается через функцию

$$R(t,f,g) = R_h(t,f,g) = \min\bigl\{r:\ g\in K_r(t,f,h)\bigr\}$$

следующим образом:

$$r(t,f) = \min\bigl\{R(t,f,g):\ g\in G\bigr\}.$$

Найдем производную по направлению функции $R(t,f,g)$. Будем использовать понятие опорного функционала l_x для нормы $\|\cdot\|$ в точке $x\in X$ (см., например, [4, гл. 2, § 1]). Опорный функционал определяется условиями:

- если $\|x\| = 1$, то $\|l_x\| = 1 = f_x(x)$,
- если $\lambda \ge 0$, то $l_{\lambda x} = \lambda l_x$.

Если норма $\|\cdot\|$ дифференцируема, то

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\|x+\lambda y\| - \|x\|}{\lambda} = \frac{l_x(y)}{\|x\|}. \tag{1}$$

В случае, когда шар $V_h'(f)$ не содержится в $V_r(t)$, граница усеченного конуса $K_r(t,f,h)$ состоит из двух сферических частей и конической части. Коническую часть границы конуса обозначим через $k_r = k_r(t,f) = k_r(t,f,h)$, а через $s_r(t)$ — часть границы, лежащую на сфере $S_r(t) = \{x:\ \|t-x\| = r\}$.

Пусть $g \in V_{\|t-f\|}(t) \setminus \operatorname{conv}\bigl(V_h'(f) \cup t\bigr)$ и $R = R(t) = R(t,f,g)$, тогда $g \in s_R(t) \cup\ k_R(t,f)$. В случае, когда $g \in k_R(t,f)$, через $L = L(g) = L(g,t)$ будем обозначать образующую конической поверхности, содержащую точку g. Ввиду строгой выпуклости нормы $\|\cdot\|$ имеется единственная точка $p = p(g) = p(g,t)$ в пересечении $V_R(t)$ и $L(g)$. Справедлива

Теорема 2. *Функция $R(t) = R(t,f,g)$ дифференцируема по Гато по переменной t, и для любого $\widetilde{t}$, $\|\widetilde{t}\| = 1$, выполняется равенство*

$$-R\lim_{\lambda\to 0}\frac{R(t+\lambda\widetilde{t}) - R(t)}{\lambda} = \begin{cases} l_{g-t}(\widetilde{t}) & \textit{при} \quad g \in s_R(t), \\ l_{p(g)-t}(\widetilde{t}) & \textit{при} \quad g \in k_R(t,f,h), \end{cases} \tag{2}$$

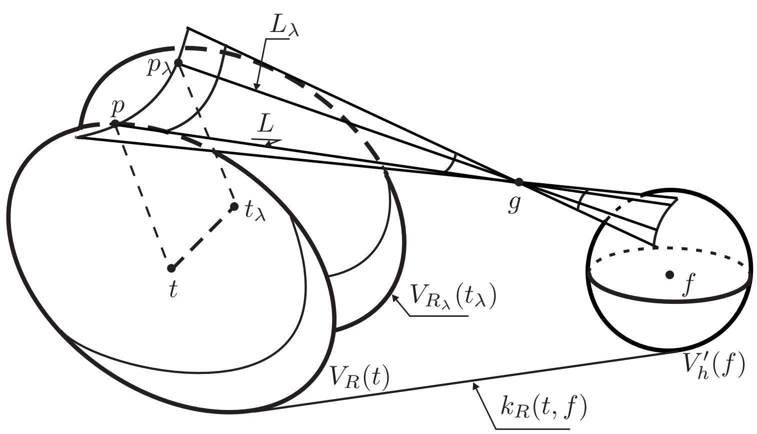
где l — опорный функционал нормы $\|\cdot\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $g \in s_R(t)$ и $g \in s_{R_\lambda}(t_\lambda)$, где $R_\lambda = R(t+\lambda\widetilde{t})$, $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$, то

$$R(t+\lambda\widetilde{t}, f, g) = \|g - t - \lambda\widetilde{t}\|, \qquad R(t,f,g) = \|g-t\|$$

и в силу (1)

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{R(t+\lambda\widetilde{t},f,g) - R(t,f,g)}{\lambda} = \frac{l_{g-t}(\widetilde{t})}{\|g-t\|}.$$



К доказательству теоремы 2: случай $g \in k_R(t,f)$, $g \neq p(g)$.

Пусть теперь $g \in k_R(t,f)$, $g \neq p(g)$, тогда $g \in k_{R_\lambda}(t_\lambda, f)$ для $|\lambda| < \lambda_0$ при некотором $\lambda_0 > 0$. Обозначим через $L^*(g,t_\lambda)$ луч с вершиной g такой, что $p_\lambda = p(g,t_\lambda) \in L^*(g,t_\lambda) \subset L(g,t_\lambda) = L_\lambda$, и через D выпуклую оболочку пучка лучей: $D = \operatorname{conv}\bigl\{L^*(g,t_\lambda):\ |\lambda| \le \lambda_0\bigr\}$. Пучок прямых $L(g,t_\lambda)$ "обкатывает" гладкое выпуклое тело $V_h'(f)$, поэтому пучок лучей $\bigl\{L^*(g,t_\lambda):\ |\lambda| < \lambda_0\bigr\}$ образует вогнутую гладкую поверхность, являющуюся частью границы тела D (см. рисунок). Гиперплоскость, касающаяся одновременно $V_{R_\lambda}(t_\lambda)$ и $V_h'(f)$ и содержащая прямую $L(g,t_\lambda)$, разделяет множества D и $V_h'(f)$. В частности, для функционала $l = l_{p-t}$, опорного для нормы $\|\cdot\|$ в точке $p-t$, имеют место соотношения

$$\sup l\bigl(V_R(t)\bigr) = \inf l(D) = f(p), \quad p = p(g,t),$$

$$R = \|t-p\| = \rho(t, L(g,t)) = \rho(t, D).$$

Выберем точку $p'_\lambda \in d = \{x \in X:\ l(x) = l(p)\}$ так, что отрезки $[p,t]$, $[p'_\lambda, t_\lambda]$ параллельны, тогда

$$\rho\,(t_\lambda, d) = \|t_\lambda - p'_\lambda\|, \qquad l(p-p'_\lambda) = 0,$$

$$\rho(t,d) = \frac{1}{\|p-t\|}\ l(p-t), \qquad \rho\,(t_\lambda, d) = \frac{1}{\|p-t\|}\ l\left(p'_\lambda - t_\lambda\right)$$

$$= \frac{1}{\|p-t\|}\Big[l\left(p'_\lambda - p - (t_\lambda - t)\right) + l(p-t)\Big] = \frac{1}{\|p-t\|}\Big[l(p-t) - l(t_\lambda - t)\Big]$$

$$= \frac{1}{\|p-t\|}\Big[l(p-t) - \lambda l(\widetilde{t})\Big].$$

Ввиду гладкости тела D имеем

$$\rho(t_\lambda, D) - \rho(t_\lambda, d) = o(\lambda) \qquad (\lambda \to 0)$$

и, далее,

$$R_\lambda - R = \rho(t_\lambda, D) - \rho(t, D) = \rho(t_\lambda, D) - \rho(t_\lambda, d) + \rho(t_\lambda, d) - \rho(t, d)$$

$$= \rho(t_\lambda, d) - \rho(t,d) + o(\lambda) = \frac{1}{\|p-t\|}\Big[l(p-t) - \lambda\, l(\widetilde{t}) - l(p-t)\Big] + o(\lambda)$$

$$= -\frac{\lambda}{\|p-t\|}\ l(\widetilde{t}) + o(\lambda).$$

Поэтому

$$\lim \frac{R_\lambda - R}{\lambda} = -\frac{l(\widetilde{t})}{\|p-t\|}.$$

Формула (2) установлена. Из нее следует линейность отображения $t \mapsto \partial R/\partial\widetilde{t}$ и, значит, дифференцируемость по Гато функции $R(t,f,g)$ по переменной t. Теорема доказана. □

Поскольку норма $\|\cdot\|$ дифференцируема, то опорное отображение $x \mapsto l_x$ сильно-слабо непрерывно. Очевидно, что отображение $g \mapsto p(g,t)$ непрерывно. Отсюда и из предыдущей теоремы следует

Теорема 3. *Производная $\partial R(t,f,g)/\partial t$ сильно-слабо непрерывна по всем переменным.*

При определении функции $r(t,f,G)$ достаточно рассматривать ограниченную часть множества G. Из теорем 1, 2, 3 и этого замечания вытекает

Теорема 4. *Пусть X — гладкое строго выпуклое конечномерное пространство, тогда функция $r(t,f,g)$ дифференцируема по любому направлению $\widetilde{t}$, $\|\widetilde{t}\| = 1$, и*

$$\frac{\partial r(t,f,G)}{\partial\widetilde{t}} = \min\left\{\frac{\partial R(t,f,g)}{\partial\widetilde{t}}:\ g \in G(t)\right\},$$

где

$$G(t) = \{g \in G:\ R(t,f,g) = r(t,f,G)\}.$$

З а м е ч а н и е. Рассмотрим случай движущегося наблюдателя. Пусть выбраны направление $\widetilde{t}$, $\|\widetilde{t}\| = 1$, движения объекта t и направление $\widetilde{f}$, $\|\widetilde{f}\| = 1$, движения наблюдателя. Будем предполагать, что если объект t перемещается в точку $t_\lambda = t + \lambda\widetilde{t}$ ($\lambda > 0$), то наблюдатель перемещается в точку $f_\lambda = f + c(\lambda)\widetilde{f}$, при этом погрешность h определения местоположения наблюдателя может измениться, приняв значение $h(\lambda) = h(f_\lambda)$, а функции $c(\lambda)$, $h(\lambda)$ таковы, что тело

$$\bigcup_{|\lambda|\le\lambda_0} V'_{h(\lambda)}(f_\lambda), \qquad \lambda_0 > 0,$$

является гладким и выпуклым. Тогда при дополнительном условии $l_{p-t}(\widetilde{t}) \le 0$ справедлив аналог теоремы 2.

3. Случай нескольких наблюдателей

Пусть в конечномерном гладком строго выпуклом пространстве X задано компактное множество $\mathcal{F} = \{f\}$ наблюдателей f,

$$\mathcal{R}(t) = \max_{f\in\mathcal{F}} r(t,f,G), \qquad \mathcal{R}_*(t) = \min_{f\in\mathcal{F}} r(t,f,G).$$

Представляют интерес задача поиска направлений $\widetilde{t}$ убывания функции $\mathcal{R}(t)$, т. е. таких направлений, для которых $\mathcal{R}(t+\lambda\widetilde{t}) < \mathcal{R}(t)$ при малых $\lambda > 0$, и задача поиска направлений возрастания функции $\mathcal{R}_*(t)$. Введя “переменную” $(f,g) \in \mathcal{F}\times G$ и представив функцию $\mathcal{R}_*(t)$ в виде

$$\mathcal{R}_*(t) = \min_{f\in\mathcal{F}} \min_{g\in G} R(t,f,g) = \min_{(f,g)\in\mathcal{F}\times G} R(t,f,g),$$

можем применить теоремы 1, 2 и установить, что верна

Теорема 5. *Функция $\mathcal{R}_*(t)$ дифференцируема по любому направлению $\widetilde{t}$, $\|\widetilde{t}\| = 1$, и*

$$\frac{\partial R_*(t)}{\partial\widetilde{t}} = \min\Big\{ \frac{\partial R(t,f,g)}{\partial\widetilde{t}} :\ (f,g) \in \mathcal{F}_*(t)\times G_*(t,f) \Big\},$$

где

$$\mathcal{F}_*(t) = \Big\{ f\in\mathcal{F} :\ r(t,f,G) = R_*(t) \Big\}, \qquad G_*(t,f) = \Big\{ g\in G :\ R(t,f,g) = \mathcal{R}_*(t) \Big\}.$$

Следствие. *Если $\widetilde{t} \in X$ и для всех $(f,g) \in \mathcal{F}_*(t)\times G_*(t,f)$ выполняется неравенство*

$$\frac{\partial R(t,f,g)}{\partial\widetilde{t}} > 0,$$

то функция $\mathcal{R}_*(t)$ возрастает в направлении $\widetilde{t}$.

Следующий пример показывает, что функция $\partial r(t,f,G)/\partial\widetilde{t}$ может быть разрывной, поэтому прямое применение теоремы В. Ф. Демьянова для вычисления производной $\partial\mathcal{R}(t)/\partial\widetilde{t}$ не обоснованно.

П р и м е р. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $t(\alpha) = (\alpha,0)$, $f = (-2,0)$, $\widetilde{t} = (1,0)$, $G = \{(x,y) :\ x\ge 1, y \ge 1\}$. В силу теоремы 3

$$\frac{\partial r(t(\alpha),f,G)}{\partial\widetilde{t}} = \begin{cases} \ \ 0 & \text{при} \quad \alpha < 0, \\ -1 & \text{при} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Однако функция $\mathcal{R}(t)$ представима в виде

$$\mathcal{R}(t) = \min_{f\in\mathcal{F}(t)} \min_{g\in G} R(t,f,g) = \min_{(f,g)\in\mathcal{F}(t)\times G} R(t,f,g),$$

где $\mathcal{F}(t) = \{f \in \mathcal{F}:\ r(t,f,G) = \mathcal{R}(t)\}$. Поэтому применима теорема 1, и с ее помощью устанавливается, что справедлива

Теорема 6. *Функция $\mathcal{R}(t)$ дифференцируема по любому направлению $\widetilde{t}$, $\|\widetilde{t}\| = 1$, и*

$$\frac{\partial\mathcal{R}(t)}{\partial\widetilde{t}} = \min\left\{\frac{\partial R(t,f,g)}{\partial\widetilde{t}}:\ (f,g)\in\mathcal{F}(t)\times G(t,f)\right\},$$

где

$$G(t,f) = \Big\{g \in G:\ R(t,f,G) = \mathcal{R}(t)\Big\}.$$

Обозначим $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$,

$$Z(t) = \bigcup_g \Big\{x:\ l_{g-t}(x) > 0,\ g \in S_{\mathcal{R}}(t)\cap G(t)\Big\},$$

$$Y(t) = \bigcap_{f:\ r(t,f,G)=\mathcal{R}} \bigcup_g \Big\{x:\ l_{p(g)-t}(x) > 0,\ g \in k_{\mathcal{R}}(t,f)\cap G\Big\}.$$

Непосредственной проверкой устанавливается

Теорема 7. *Любое $\widetilde{t} \in Z(t)\cup Y(t)$ является направлением убывания функции $\mathcal{R}(t)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В. И.** Характеристика видимости движущейся точки // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 5. С. 588–590.
2. **Бердышев В. И.** Видимость объекта для наблюдателя с неточно заданными координатами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 21–28.
3. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
4. **Дистель Д.** Геометрия банаховых пространств: избр. главы: пер. с англ. Киев: Вища школа, 1980. 216 с.

Бердышев Виталий Иванович
чл.-корр. РАН
директор
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 1.03.2010

Том 16 № 4 2010

УДК 517.1

НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В $L_2(\mathbb{R}^N)$ С ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ[1]

С. Н. Васильев

Для пространства целых функций многих переменных со среднеквадратичной нормой доказано точное неравенство Джексона в случае произвольного модуля непрерывности, порожденного разностным оператором с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: неравенство Джексона, обобщенный модуль непрерывности, многомерная аппроксимация.

S. N. Vasil'ev. Jackson inequality in $L_2(\mathbb{R}^N)$ with generalized modulus of continuity.

The sharp Jackson inequality is proved for the space of entire functions of many variables with mean-square norm for an arbitrary modulus of continuity generated by a difference operator with constant coefficients.

Keywords: Jackson inequality, generalized modulus of continuity, multidimensional approximation.

Введение

Рассмотрим пространство $L_2 = L_2(\mathbb{R}^N)$ комплекснозначных функций N переменных, суммируемых с квадратом. Далее векторы (точки) пространства $\mathbb{R}^N$ будем обозначать жирным шрифтом: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$, при этом, как обычно,

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_Ny_N \qquad \text{и} \qquad |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{xx}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2},$$

$$B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\colon\ |\mathbf{x}| \le r\}, \qquad \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0).$$

Символом $M = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обозначим набор комплексных чисел μ_j такой, что

$$0 < \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j| < \infty, \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j = 0. \tag{1}$$

Данному набору M и вектору $\mathbf{t}$ сопоставим разностный оператор $\Delta_{\mathbf{t}}^M\colon\ L_2 \to L_2$ вида

$$\Delta_{\mathbf{t}}^M f(\mathbf{x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k f(\mathbf{x} + k\mathbf{t}).$$

Рассмотрим множество $T \subset \mathbb{R}^N$, содержащее окрестность нуля. Для $\delta \in \mathbb{R}$ обозначим $\delta T = \{\delta\mathbf{x} :\ \mathbf{x} \in T\}$ и введем модуль непрерывности для $f \in L_2$:

$$\omega_M(f, \delta) = \sup_{\mathbf{t}\in\delta T} \|\Delta_{\mathbf{t}}^M f\|, \quad \delta \ge 0. \tag{2}$$

Из условий (1) следует, что разностный оператор и модуль непрерывности обращаются в ноль на функциях, тождественно равных константе.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления" при поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1013); при поддержке УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 09-С-1-1007; а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00325).

Отметим, что набору

$$M_m = \left\{ \mu_j = (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \text{ при } j = 0, \dots, m, \quad \mu_j = 0 \text{ при } j < 0,\ j > m \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и множеству $T = B(\mathbf{0}, 1)$ соответствует классический модуль непрерывности $\omega_{M_m}(f, \delta) = \omega_m(f, \delta)$ порядка m.

Пусть

$$\widehat{f}(\mathbf{y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \mathbf{t}\mathbf{y}} d\mathbf{t}$$

— преобразование Фурье функции f из L_2. Рассмотрим Λ — некоторое подмножество $\mathbb{R}^N$, содержащее окрестность начала координат. Обозначим через G_Λ множество функций, спектр которых сосредоточен на множестве Λ, т. е. $G_\Lambda = \left\{ f \in L_2 : \ \widehat{f}(\mathbf{s}) = 0 \text{ при } \mathbf{s} \notin \Lambda \right\}$. Для $\Lambda = B(\mathbf{0}, \rho)$ класс G_Λ будет совпадать с классом G_σ функций экспоненциального типа $\sigma = 2\pi\rho$.

Обозначим через $E_\Lambda(f)$ величину наилучшего приближения функции $f \in L_2$ элементами из G_Λ, через $E_\sigma(f)$ — величину наилучшего приближения классом функций экспоненциального типа σ:

$$E_\Lambda(f) = \inf_{g \in G_\Lambda} \|f - g\|, \qquad E_\sigma(f) = \inf_{g \in G_\sigma} \|f - g\|.$$

Неравенства вида $E(f) < K\omega(f, \tau)$, в которых величина наилучшего приближения функции оценивается через значение ее модуля непрерывности в некоторой точке, называются неравенствами Джексона или Джексона — Стечкина.

Подробная история, связанная с неравенствами рассматриваемого вида, содержится в [14]. Здесь мы отметим несколько результатов, касающихся точной константы в неравенстве Джексона — Стечкина. В 1967 г. Н. И. Черных [1;2] нашел точную константу K в неравенстве Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ с классическим модулем непрерывности порядка $m \in \mathbb{N}$. Универсальную оценку снизу точной константы в неравенстве Джексона — Стечкина для одномерного случая с модулем непрерывности, порожденным конечно разностным оператором довольно общего вида, получил А. Г. Бабенко [3]. В 1981 г. В. А. Юдин [4] в случае первого модуля непрерывности распространил результат Н. И. Черных на приближение функций на многомерном торе $\mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, тригонометрическими полиномами заданного сферического порядка. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ точное неравенство Джексона с модулем непрерывности первого порядка было доказано И. И. Ибрагимовым и Ф. Г. Насибовым [5] для $N = 1$, В. Ю. Поповым [6;7] для $N = 1, 2, 3$, А. Г. Бабенко [8] и А. В. Московским [9] для всех N.

В данной работе получено неравенство Джексона с наименьшей точной константой в пространстве L_2 между величиной наилучшего приближения функций многих переменных функциями с ограниченным спектром и модулем непрерывности, порожденным произвольным разностным оператором с постоянными коэффициентами. Периодический аналог указанного результата был получен автором ранее в работе [10].

1. Вспомогательное утверждение

Для $\mathbf{s} \neq 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ обозначим через $H(\mathbf{s}, \tau) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{s}\mathbf{t} = |\mathbf{s}|\tau\}$ гиперплоскость, ортогональную $\mathbf{s}$. Рассмотрим преобразование Радона

$$\mathcal{R}_N\,[v]\,(\mathbf{s}, \tau) = \int\limits_{H(\mathbf{s}, \tau)} v(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}, \tag{3}$$

где v — интегрируемая вещественнозначная функция.

Условимся в дальнейшем называть *весом* неотрицательную интегрируемую по Лебегу функцию $v\colon\ \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ с носителем на множестве T такую, что $\int_{\mathbb{R}^N} v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} > 0$.

Ниже понадобится лемма, аналогичная доказанной ранее автором в [10]. Здесь мы сформулируем и докажем эту лемму принципиально иным, более коротким способом.

Лемма. *Пусть $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $m > N/2+1$ и $\rho > 0$ таково, что $B(\mathbf{0}, \rho) \subset T$. Тогда существует вес $v(\mathbf{t})$, сосредоточенный на $B(\mathbf{0}, \rho)$, для которого $\mathcal{R}_N\,[v]\,(\mathbf{s}, \tau)$ не зависит от $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$, причем функция $u(\tau) = \mathcal{R}_N\,[v]\,(\mathbf{s}, \tau)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(a) $u(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq \rho$,

(b) $u(\tau) = u(-\tau)$ при всех $\tau \in R$,

(c) $u(\tau)$ непрерывно дифференцируема $2m-2$ раза на $\mathbb{R}$ и $2m$ раз на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(d) $u^{(2m-1)}(+0) = \sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную четную неотрицательную функцию u_0, удовлетворяющую условиям (a)–(d) и равную нулю вне отрезка $[-\rho/2, \rho/2]$. Покажем, что существует функция v_0, для которой при всех $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ верно равенство $u_0(\tau) = \mathcal{R}_N\,[v_0]\,(\mathbf{s}, \tau)$. Рассмотрим преобразование Фурье функции $u_0(\tau) = \mathcal{R}_N\,[v_0]\,(\mathbf{s}, \tau)$ по переменной τ:

$$\widehat{u}_0(w) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_N\,[v_0]\,(\mathbf{s}, \tau) e^{-2\pi i \tau w} d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{H(\mathbf{s},\tau)} v_0(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \tau w}\, d\mathbf{t} d\tau$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{H(\mathbf{s},\tau)} v_0(\mathbf{t}) e^{-2\pi i \frac{\mathbf{s}\mathbf{t}}{|\mathbf{s}|} w}\, d\mathbf{t} d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^N} v_0(\mathbf{t}) e^{-2\pi i w \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}\mathbf{t}}\, d\mathbf{t} = \widehat{v}_0\left(w \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}\right).$$

Функция u_0 непрерывно дифференцируема $2m-2$ раза, т. е. не менее $N+1$ раза. Следовательно, $\widehat{u}_0(w)$ как преобразование Фурье дифференцируемой $N+1$ раз функции убывает как $o(|w|^{-N-1})$. Отсюда получаем, что функция $\widehat{v}_0(\mathbf{y}) = o(\|\mathbf{y}\|^{-N-1})$ суммируема на $\mathbb{R}^N$. Поэтому можно определить v_0 как обратное преобразование Фурье $\widehat{v}_0$. В силу суммируемости $\widehat{v}_0$ функция v_0 ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^N$. Осталось отметить, что по теореме Пэли — Винера — Шварца (см. [11, теорема 7.3.1]) функция u_0, носитель которой содержится в отрезке $[-\rho/2, \rho/2]$, является функцией экспоненциального типа $\pi\rho$, значит, и функция $\widehat{v}_0$ имеет тот же экспоненциальный тип $\pi\rho$. Отсюда по теореме Пэли — Винера — Шварца находим, что носитель функции v_0 сосредоточен на множестве $B(\mathbf{0}, \rho/2)$.

Возьмем четную бесконечно дифференцируемую неотрицательную функцию $g\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, равную единице на отрезке $[-\rho/2, \rho/2]$ и тождественно равную нулю вне отрезка $[-\rho, \rho]$. Из представления (3) следует, что $\mathcal{R}_N\,[g(|\mathbf{t}|)]\,(\mathbf{s}, \tau)$ — четная бесконечно дифференцируемая по τ функция, тождественно равная нулю вне отрезка $[-\rho, \rho]$. В силу четности и дифференцируемости $\mathcal{R}_N\,[g]\,(\mathbf{s}, \tau)$ в точке $\tau = 0$ все производные нечетного порядка равны нулю, а при $|\tau| \geq \rho$ функция $\mathcal{R}_N\,[g]\,(\mathbf{s}, \tau)$ и все ее производные тождественно равны нулю.

Определим функцию $v(\mathbf{t}) = v_0(\mathbf{t}) + \max\{|v_0(\mathbf{t})|\, g(|\mathbf{t}|)\colon\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N\}$. По построению v непрерывна и неотрицательна на $\mathbb{R}^N$ и равна нулю вне $B(\mathbf{0}, \rho)$. В силу линейности преобразования Радона функция

$$u(\tau) = \mathcal{R}_N\,[v]\,(\mathbf{s}, \tau) = u_0(\tau) + \max_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N} |v_0(\mathbf{t})|\, \mathcal{R}_N\,[g]\,(\mathbf{s}, \tau)$$

удовлетворяет условиям (a)–(d). Доказательство леммы завершено.

2. Основной результат

Положим $r(\Lambda) = \inf_{\mathbf{s} \notin \Lambda} |\mathbf{s}|$. Заметим, что $r(\Lambda) > 0$, если Λ содержит окрестность нуля.

Теорема. *Пусть заданы набор $M = \{\mu_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющий (1), модуль непрерывности ω_M, определенный в (2). Тогда найдется число $\gamma > 0$ такое, что для любой $f \in L_2$*

и для любого множества Λ, содержащего окрестность нуля, выполняется неравенство

$$E_\Lambda(f) \le \frac{1}{\Big(\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j|^2\Big)^{1/2}}\,\omega_M\Big(f, \frac{\gamma}{r(\Lambda)}\Big). \tag{4}$$

Доказательство. В силу равенства Парсеваля

$$E^2_\Lambda(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} |\widehat{f}(\mathbf{s})|^2 d\mathbf{s}.$$

Заметим, что при любом $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^N$ для $f\in L_1(\mathbb{R}^N)\cap L_2(\mathbb{R}^N)$ справедливы равенства

$$\widehat{\Delta^M_{\mathbf{t}}} f(\mathbf{s}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k f(\mathbf{x}+k\mathbf{t}) e^{-2\pi i \mathbf{x}\mathbf{s}} d\mathbf{x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}+k\mathbf{t}) e^{-2\pi i \mathbf{x}\mathbf{s}} d\mathbf{x}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (\mathbf{x}-k\mathbf{t})\mathbf{s}} d\mathbf{x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{2\pi i k \mathbf{t}\mathbf{s}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x}\mathbf{s}} d\mathbf{x} = \widehat{f}(\mathbf{s}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{2\pi i k \mathbf{t}\mathbf{s}}.$$

Так как преобразование Фурье продолжается по непрерывности с $L_1(\mathbb{R}^N)\cap L_2(\mathbb{R}^N)$ на все пространство $L_2(\mathbb{R}^N)$, для всех $f\in L_2$ верно равенство

$$\widehat{\Delta^M_{\mathbf{t}}} f(\mathbf{s}) = \widehat{f}(\mathbf{s}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{2\pi i k \mathbf{t}\mathbf{s}}.$$

В силу равенства Парсеваля отсюда получаем

$$\big\|\Delta^M_{\mathbf{t}} f\big\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\mathbf{s})|^2 \phi(\mathbf{t}\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad \text{где} \quad \phi(\tau) = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{2\pi i k \tau}\Big|^2.$$

Из условия $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| < \infty$ следует, что ϕ является непрерывной периодической функцией.

Для любого веса v верны неравенства

$$\omega^2_M(f,\delta) \int\limits_T v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \ge \int\limits_T \big\|\Delta^M_{\delta\mathbf{t}} f\big\|^2 v(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

$$= \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(\mathbf{s})|^2 \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{s} d\mathbf{t} \ge \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} |\widehat{f}(\mathbf{s})|^2 \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{s} d\mathbf{t}$$

$$\ge \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} |\widehat{f}(\mathbf{s})|^2 \inf_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} \int\limits_T \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} d\mathbf{s} = E^2_\Lambda(f) \inf_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^N\setminus\Lambda} \int\limits_T \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \tag{5}$$

Для периодической функции g с периодом $\mathcal{T}$ введем обозначение

$$I(g) = \frac{1}{\mathcal{T}} \int\limits_{t=0}^{\mathcal{T}} g(t) dt$$

для ее среднего значения на периоде. Несложно подсчитать, что

$$I(\phi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k|^2.$$

Покажем, что можно подобрать вес $v(\mathbf{t})$ и число $\gamma > 0$ такие, что при всех $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих условию $\delta|\mathbf{s}| \geq \gamma$, выполняется неравенство

$$\int\limits_T \phi(\delta \mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \geq I(\phi) \int\limits_T v(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \tag{6}$$

откуда будет следовать неравенство (4).

Обозначим

$$\psi(t) = \frac{\phi(t) + \phi(-t)}{2}.$$

Ясно, что ψ — четная функция и для четного веса v с центрально-симметричным носителем справедливы равенства

$$I(\phi) = I(\psi), \qquad \int\limits_T \phi(\delta \mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int\limits_T \psi(\delta \mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Разделим переменные интегрирования так, чтобы выделить гиперплоскость, перпендикулярную $\mathbf{s}$:

$$\int\limits_T \psi(\delta \mathbf{s}\mathbf{t}) v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{H(\mathbf{s},\tau)} \psi(\delta|\mathbf{s}|\tau) v(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} d\tau$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\delta|\mathbf{s}|\tau) \int\limits_{H(\mathbf{s},\tau)} v(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(\delta|\mathbf{s}|\tau) \mathcal{R}_N\left[v\right](\mathbf{s},\tau) d\tau.$$

Здесь используется преобразование Радона $\mathcal{R}_N\left[v\right]$ (см. определение (3)). Очевидно, что при каждом $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ носитель функции $u(\tau) = \mathcal{R}_N\left[v\right](\mathbf{s},\tau)$ конечен и выполнено равенство

$$\int\limits_T v(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \int\limits_{\mathbb{R}} u(t)\, dt,$$

следовательно, обозначив $\xi = \delta|\mathbf{s}|$, можно переписать неравенство (6) в виде

$$\int\limits_T \psi(\xi t) u(t) dt \geq I(\psi) \int\limits_{\mathbb{R}} u(t)\, dt. \tag{7}$$

Положим

$$\psi_0(t) = I(\psi) - \psi(t), \qquad \psi_k(t) = \int\limits_0^t I(\psi_{k-1}) - \psi_{k-1}(\tau) d\tau, \qquad k \in \mathbb{N},$$

тогда (7) эквивалентно условию

$$\int\limits_0^1 \psi_0(\xi t) u(t) dt \leq 0.$$

Отметим, что все функции ψ_k периодичны. Кроме того, поскольку ψ_0 — четная функция, то для всех $k \in \mathbb{N}$ функции ψ_{2k} — четные, а ψ_{2k-1} — нечетные. Из нечетности и периодичности функций ψ_{2k-1} следует, что $I(\psi_{2k-1}) = 0$ при всех натуральных k.

Покажем, что существуют сколь угодно большие натуральные m, для которых $I(\psi_{2m}) \neq 0$. Действительно, если при некотором k для любого натурального l выполняется равенство $I(\psi_{k+l}) = 0$, то при l-кратном интегрировании функции ψ_k с переменным верхним пределом будут получаться периодические функции с нулевым значением интеграла по периоду.

Это равносильно ортогональности ψ_k всем алгебраическим полиномам на отрезке $[0,1]$, следовательно, функция ψ_k тождественно равна нулю. Но $\psi_k^{(k)} = (-1)^k\psi_0$, а для ненулевого набора коэффициентов M функция ψ_0 не может быть тождественно равной нулю.

Выберем $m > N/2+1$ такое, что $I(\psi_{2m}) \neq 0$. По доказанной выше лемме для $\sigma = I(\psi_{2m})$ существует вес v, для которого определенная в (3) функция u не зависит от $\mathbf{s}$ и удовлетворяет требованиям (a)–(d), перечисленным в лемме. Без ограничения общности будем считать, что носитель функции u содержится в отрезке $[-1,1]$ (для этого достаточно в лемме выбрать $\rho \leq 1$). Из условий леммы следует, что $u(t)$ дифференцируема $2m$ раз на $[0,1]$ и $u^{(k)}(1) = 0$ при $k \leq 2m$. Отсюда при $k \leq 2m$ и $k > 1$ имеем

$$\int\limits_0^1 \psi_k(\xi t)u^{(k)}(t)dt = u^{(k-1)}(1)\psi_k(\xi) - u^{(k-1)}(0)\psi_k(0) - \xi\int\limits_0^1 \psi_k'(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt$$

$$= -\xi\int\limits_0^1 \left(I(\psi_{k-1}) - \psi_{k-1}(\xi t)\right)u^{(k-1)}(t)dt = \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt - \xi I(\psi_{k-1})\int\limits_0^1 u^{(k-1)}(t)dt$$

$$= \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt - \xi I(\psi_{k-1})(u^{(k-2)}(1) - u^{(k-2)}(0))$$

$$= \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt + \xi I(\psi_{k-1})u^{(k-2)}(0).$$

Если k четно, то $I(\psi_{k-1}) = 0$, а если k нечетно и $k < 2m$, то в силу четности и дифференцируемости функции u имеем $u^{k-2}(0) = 0$. Учитывая равенства $I(\psi_1) = I(\psi_0) = 0$, получим, что

$$\int\limits_0^1 \psi_k(\xi t)u^{(k)}(t)dt = \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt$$

$$= \xi^2\int\limits_0^1 \psi_{k-2}(\xi t)u^{(k-2)}(t)dt = \ldots = \xi^{k-1}\int\limits_0^1 \psi_1(\xi t)u'(t)dt = \xi^k\int\limits_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt.$$

По лемме Фейера (см., например, [12]) при $\xi \to \infty$

$$\int\limits_0^1 \psi_{2m}(\xi t)u^{(2m)}(t)dt \to I(\psi_{2m})\int\limits_0^1 u^{(2m)}(t)dt = I(\psi_{2m})\left(u^{(2m-1)}(1) - u^{(2m-1)}(0)\right),$$

т. е.

$$\xi^{2m}\int\limits_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt \to -I(\psi_{2m})u^{(2m-1)}(0). \tag{8}$$

Так как $u^{(2m-1)}(0) = I(\psi_{2m}) \neq 0$ по построению функции u, правая часть в (8) равна $-(I(\psi_{2m}))^2 < 0$. Следовательно, для некоторого γ при всех $\xi > \gamma$ величина $\xi^{2m}\int_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt$ будет отрицательной. Отсюда следует, что при $\xi > \gamma$ выполняется неравенство (7), т. е. при $\delta|\mathbf{s}| > \gamma$ верно неравенство (6).

По определению $r(\Lambda)$ если $\mathbf{s} \notin \Lambda$, то $|\mathbf{s}| > r(\Lambda)$, значит, если в (5) положить $\delta = \gamma/r(\Lambda)$, получим

$$\omega_M^2(f,\delta)\int\limits_T v(\mathbf{t})d\mathbf{t} \geq I(\psi)E_\Lambda^2(f)\int\limits_T v(\mathbf{t})d\mathbf{t},$$

откуда следует неравенство (4). Теорема доказана. □

Необходимо отметить, что из результатов, полученных для приближения периодических функций тригонометрическими полиномами [13; 14], следует, что константа $1/\big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu_j|^2\big)^{1/2}$ является минимальной среди всех точных констант в неравенстве Джексона — Стечкина в рассматриваемом случае. Отсюда, в частности, следует, что в доказанной здесь теореме константу перед модулем непрерывности нельзя уменьшить с сохранением неравенства одновременно для всех $f \in L_2$.

В работе [15] Д. В. Горбачев и С. А. Странковский исследуют значение "точки Черных" — аргумента модуля непрерывности, начиная с которого точная константа в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ становится минимальной, т. е. наименьшее значение величины γ в (4). Для указанной величины ими получено несколько оценок для классических модулей непрерывности при $N = 1$ и $N = 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
3. **Бабенко А.Г.** Минимальная константа Джексона — Стечкина в L^2 // Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы "Казахстан в третьем тысячелетии": тр. Междунар. конф. / Ин-т математики, Алматы: 2001. С. 72–76.
4. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 309–315.
5. **Ибрагимов Н.И., Насибов В.Г.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.
6. **Попов В.Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. № 6. С. 65–73.
7. **Попов В.Ю.** О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Математика. 1981. № 12. С. 67–78.
8. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 183–198.
9. **Московский А.В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 4, вып. 1. С. 44–70.
10. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{T}^N)$ с обобщенным модулем непрерывности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 102–110.
11. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 464 с.
12. **Fejer L.** Lebeguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. Reine Angew. Math. 1910. Vol. 138. P. 22–53.
13. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 11–14.
14. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.
15. **Горбачев Д.В., Странковский С.А.** Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 5. С. 712–717.

Васильев Станислав Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Stanislav.Vasilyev@imm.uran.ru

Поступила 15.09.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.982.256

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА КУБЕ[1]

А. А. Васильева

В работе получены асимптотические оценки поперечников по Колмогорову весовых классов Соболева на кубе в метрике L_p с весом.

Ключевые слова: весовые классы Соболева, колмогоровские поперечники.

A. A. Vasil'eva. Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a cube.

Asymptotic estimates are obtained for Kolmogorov widths of weighted Sobolev classes on a cube in the weighted L_p metric.

Keywords: weighted Sobolev classes, Kolmogorov widths.

Введение

Пусть K — куб в $\mathbb{R}^d$ с ребрами, параллельными осям координат; $\mathcal{K}$ — множество всех таких кубов; $g,\, v:\ K\to\mathbb{R}_+$ — измеримые функции. Для каждой измеримой векторнозначной функции $\varphi:\ K\to\mathbb{R}^m$, $\varphi=(\varphi_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$, и для каждого $q\in[1,\,\infty]$ положим

$$\|\varphi\|_{L_q(K)}=\Bigl\|\max_{1\leqslant k\leqslant m}|\varphi_k|\Bigr\|_q.$$

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d:=(\mathbb{N}\cup\{0\})^d$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_d$. Для каждой обобщенной функции f на K обозначим $D^rf=(\partial^rf/\partial x^\alpha)_{|\alpha|=r}$ (здесь частные производные берутся в обобщенном смысле), m_r — число компонент обобщенной вектор-функции D^rf. Положим

$$W^r_{q,g}(K)=\bigl\{f:\ K\to\mathbb{R}\bigr|\ \exists\varphi:\ K\to\mathbb{R}^{m_r}:\ \|\varphi\|_{L_q(K)}\leqslant 1,\ D^rf=g\cdot\varphi\bigr\}$$

$\Bigl($соответствующую функцию φ будем обозначать $\dfrac{D^rf}{g}\Bigr)$,

$$\|f\|_{p,v}=\|fv\|_{L_p(K)},\qquad L_{p,v}(K)=\Bigl\{f:\ \|f\|_{p,v}<\infty\Bigr\}.$$

Заметим, что $W^r_q(K)=W^r_{q,1}(K)$.

Пусть X — банахово пространство, $M\subset X$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Как известно, *колмогоровским n-поперечником* множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M,\,X)=\inf_{L_n\in\mathcal{L}_n}\sup_{x\in M}\inf_{y\in L_n}\|x-y\|_X,$$

где $\mathcal{L}_n$ — множество всех подпространств в X размерности не больше n.

Теория поперечников изложена в монографиях [1; 2] и в обзорной статье [3].

В работе оценивается величина $d_n(W^r_{q,g}(K),\,L_{p,v}(K))$ при достаточно больших значениях n. Случай $g=1$, $v=1$ был исследован в работах [4–8] ($d=1$) и в [9–14] ($d>1$). Для непостоянных

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 06-01-00160) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-3233.2008.1).

весов при $d = 1$ изучались похожие задачи оценки аппроксимативных и колмогоровских чисел оператора типа Харди [15–17] и оценки аппроксимативных и энтропийных чисел оператора Римана — Лиувилля для $g = 1$ [18]. В случае $d > 1$ задача оценки колмогоровских и аппроксимативных чисел оператора вложения классов Соболева в L_p рассматривалась в [19–21; 23].

Введем некоторые обозначения. Пусть X, Y — множества, $f_1, f_2 : X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Мы пишем

$$f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y), \text{ если } \forall y \in Y \ \exists c(y) > 0 : \ \forall x \in X \ f_1(x, y) \leqslant c(y) f_2(x, y);$$

$$f_1(x, y) \underset{y}{\asymp} f_2(x, y), \text{ если } f_1(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_2(x, y) \text{ и } f_2(x, y) \underset{y}{\lesssim} f_1(x, y).$$

Будем обозначать через $\overline{A}$, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{mes} A$ или $|\mathrm{A}|$, $\operatorname{card} A$ соответственно замыкание, внутренность, лебегову меру, мощность множества A. Мы говорим, что множества $A, B \subset \mathbb{R}^d$ не перекрываются, если $\operatorname{int} \overline{A} \cap \operatorname{int} \overline{B} = \varnothing$.

Через l_p^n обозначим n-мерное пространство с нормой $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_{l_p^n} = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$, через B_p^n — единичный шар в l_p^n.

Пусть $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}$. Положим

$$L_s(X, Y) = \{f \in L_s(X) : \ \forall x \in X \ \ f(x) \in Y\}.$$

Для куба $K \subset \mathbb{R}^d$, $K \in \mathcal{K}$, и $s \in \mathbb{Z}_+$ обозначим $\Xi_s(K)$ разбиение K на 2^{sd} равных, замкнутых в K, неперекрывающихся кубов, $\Xi(K)$ — семейство кубов $\bigcup_{s \in \mathbb{Z}_+} \Xi_s(K)$.

Через $\mathcal{R}$ обозначим совокупность множеств вида $K \backslash K'$, где $K \in \mathcal{K}$, $K' \in \Xi(K)$.

В теореме 3 получена оценка сверху величины $d_n(W^r_{q,g}(K), L_{p,v}(K))$ для достаточно больших n при некоторых ограничениях на интегрируемость функций g и v. В теореме 4 получена оценка снизу.

1. Вспомогательные утверждения

Мы применяем обозначения: $\lceil x \rceil$ ($\lfloor x \rfloor$) — целое число, ближайшее сверху (снизу) к x, $(x)_+ := \max\{x, 0\}$.

Сразу заметим следующее свойство семейства кубов $\Xi(K)$, $K \in \mathcal{K}$: если $\Delta_1, \Delta_2 \in \Xi(K)$, то либо Δ_1 и Δ_2 не перекрываются, либо $\Delta_1 \in \Xi(\Delta_2)$, либо $\Delta_2 \in \Xi(\Delta_1)$.

Пусть Φ — неотрицательная функция, определенная на измеримых по Лебегу подмножествах $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая условиям:

$$\Phi(A_1) + \Phi(A_2) \leqslant \Phi(A_1 \cup A_2), \quad \text{где} \quad A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^d \quad \text{не перекрываются}; \tag{1.1}$$

$$\text{если } \operatorname{mes} A_n \to 0, \text{ то } \Phi(A_n) \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{1.2}$$

В следующих леммах определяются разбиения $Q(K, \gamma)$ и $P(K, \gamma)$ куба K.

Лемма 1. *Для любого $\gamma > 0$ и любого $K \in \mathcal{K}$ такого, что $\Phi(K) > 3\gamma$, существует единственное разбиение $Q(K, \gamma) = \{R, \Delta_1, \ldots, \Delta_{2^d}\}$ куба K на неперекрывающиеся подмножества со следующими свойствами:*

$$R \in \mathcal{R}, \quad \widehat{\Delta} := \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j \in \Xi(K), \quad \Delta_j \in \Xi_1(\widehat{\Delta}), \quad j = 1, \ldots, 2^d, \tag{1.3}$$

$$\Phi(\widehat{\Delta}) > \Phi(K) - \gamma, \tag{1.4}$$

$$\Phi(\Delta_j) \leqslant \Phi(K) - \gamma. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество S чисел $s \in \mathbb{Z}_+$ таких, что существует куб $\Delta_*^{s,\gamma} \in \Xi_s(K)$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(\Delta_*^{s,\gamma}) > \Phi(K) - \gamma. \tag{1.6}$$

Множество S конечно в силу соотношений $\Phi(K) > 3\gamma$, (1.2) и (1.6) и содержит 0 ($\Delta_*^{0,\gamma} = K$). Положим $s_* = \max S$, $\widehat{\Delta} = \Delta_*^{s_*,\gamma}$, $R = K \backslash \widehat{\Delta}$, $\{\Delta_1, \dots, \Delta_{2^d}\} = \Xi_1(\widehat{\Delta})$. Тогда свойство (1.3) выполнено по построению, неравенство (1.4) следует из условия $s_* \in S$, неравенство (1.5) — из условия $s_* + 1 \notin S$. Существование $Q(K, \gamma)$ доказано.

Докажем единственность. Пусть существует другое разбиение $\{R', \Delta'_1, \dots, \Delta'_{2^d}\}$ с теми же свойствами, $\widehat{\Delta}' = \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta'_j$, $\widehat{\Delta}' \neq \widehat{\Delta}$. Из (1.4) и (1.5) следует, что случаи $\widehat{\Delta}' \in \Xi(\widehat{\Delta})$ и $\widehat{\Delta} \in \Xi(\widehat{\Delta}')$ невозможны. Поэтому остался случай, когда $\widehat{\Delta}$ и $\widehat{\Delta}'$ не перекрываются. Тогда

$$\Phi(K) \overset{(1.1)}{\geqslant} \Phi(\widehat{\Delta}) + \Phi(\widehat{\Delta}') \overset{(1.4)}{>} 2\Phi(K) - 2\gamma,$$

откуда $\Phi(K) < 2\gamma$ — противоречие. □

Лемма 2. *Для любых $K \in \mathcal{K}$ и $\gamma > 0$ существует разбиение $P(K, \gamma)$ куба K на неперекрывающиеся подмножества со следующими свойствами*:

(1) *если $\Delta \in P(K, \gamma)$, то $\Delta \in \Xi(K)$ или $\Delta \in \mathcal{R}$*;

(2) *$\Phi(\Delta) \leqslant 3\gamma$ для любого $\Delta \in P(K, \gamma)$, при этом если $\Delta \in \mathcal{R}$, то $\Phi(\Delta) < \gamma$*;

(3) *если $\lceil \Phi(K)\gamma^{-1} \rceil \leqslant m \in \mathbb{Z}_+$, то разбиение $P(K, \gamma)$ содержит не более $1 + 2^d(m-3)_+$ элементов*; *в частности, если $\Phi(K) \leqslant 3\gamma$, то $P(K, \gamma) = \{K\}$*;

(4) *если $R \in \mathcal{R} \cap P(K, \gamma)$, то существует куб $\Delta \in \Xi(K)$ такой, что $R \in Q(\Delta, \gamma)$ и $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$*;

(5) *если $\Delta \in \Xi(K)$, $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$, $\Phi(\Delta) > 3\gamma$, то для любого куба $\Delta' \in Q(\Delta, \gamma)$ выполнено $P(\Delta', \gamma) \subset P(K, \gamma)$*;

(6) *если $\Phi(K) > 3\gamma$, $R \in Q(K, \gamma) \cap \mathcal{R}$, то $R \in P(K, \gamma)$*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(\gamma)$ множество кубов $K \in \mathcal{K}$ таких, что $\lceil \Phi(K)\gamma^{-1} \rceil = m$. Пусть также $\mathcal{K}'_m = \bigcup_{l=0}^{m} \mathcal{K}_l$, т. е. $\mathcal{K}'_m = \{K \in \mathcal{K} \colon \lceil \Phi(K)\gamma^{-1} \rceil \leqslant m\}$. В частности, $\mathcal{K}_0 = \{K \in \mathcal{K} : \Phi(K) = 0\}$.

Разбиение $P(K, \gamma)$ строится по индукции. Положим в соответствии с (3) $P(K, \gamma) = \{K\}$ для всех $K \in \mathcal{K}'_3$. Пусть $P(K, \gamma)$ со свойствами (1)–(4) построено для всех $K \in \mathcal{K}'_{m-1}$, $m \geqslant 4$. Построим $P(K, \gamma)$ для всех $K \in \mathcal{K}_m$. Рассмотрим разбиение $Q(K, \gamma) = \{R, \Delta_1, \dots, \Delta_{2^d}\}$. Тогда в силу (1.5)

$$\Phi(\Delta_j) \leqslant \Phi(K) - \gamma \leqslant m\gamma - \gamma = (m-1)\gamma, \quad \text{т. е.} \quad \Delta_j \in \mathcal{K}'_{m-1}. \tag{1.7}$$

Значит, для каждого $j = 1, \dots, 2^d$ в силу предположения индукции определено разбиение $P(\Delta_j, \gamma) = \{\Delta_{j,k}\}_{1 \leqslant k \leqslant n_j}$, удовлетворяющее свойствам (1)–(4). Положим

$$P(K, \gamma) = \{R\} \cup P(\Delta_1, \gamma) \cup \ldots \cup P(\Delta_{2^d}, \gamma) = \{R, \Delta_{j,k}, j = 1, \dots, 2^d, k = 1, \dots, n_j\}.$$

Покажем, что для $P(K, \gamma)$ выполнены свойства (1)–(4). Свойство (1) выполнено по построению. В силу предположения индукции

$$\Phi(\Delta_{j,k}) \leqslant 3\gamma, \quad j = 1, \dots, 2^d, \quad k = 1, \dots, n_j,$$

а если $\Delta_{j,k} \in \mathcal{R}$, то $\Phi(\Delta_{j,k}) < \gamma$. Кроме того,

$$\Phi(R) \overset{(1.1)}{\leqslant} \Phi(K) - \Phi\Big(\bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j\Big) \overset{(1.4)}{<} \gamma.$$

Значит, выполнено (2).

Докажем по индукции, что выполнено свойство (3). Предположение индукции записывается в следующем виде: если $\Delta \in \mathcal{K}$ и $\lceil \Phi(\Delta)\gamma^{-1} \rceil \leqslant l \in \mathbb{Z}_+$ $(3 \leqslant l \leqslant m-1)$, то разбиение $P(\Delta, \gamma)$ содержит не более $1+2^d(l-3)$ элементов. Исходя из этого, мы должны доказать, что

$$\operatorname{card} P(K, \gamma) = 1 + \sum_{j=1}^{2^d} \operatorname{card} P(\Delta_j, \gamma) \leqslant 1 + 2^d(m-3) \quad \text{для} \quad K \in \mathcal{K}_m.$$

Так как $\Delta_j \in \mathcal{K}'_{m-1}$, то $\operatorname{card} P(\Delta_j, \gamma) \leqslant 1+2^d(m-4)$ $(m \geqslant 4)$. Обозначим через J множество тех j, для которых $\Phi(\Delta_j) > 3\gamma$, и пусть $\theta = \operatorname{card} J$. Если $\theta = 0$, то $P(\Delta_j, \gamma) = \{\Delta_j\}$ и $\operatorname{card} P(K, \gamma) = 1 + 2^d \leqslant 1 + 2^d(m-3)$. Если $\theta = 1$, $J = \{j'\}$, то $\operatorname{card} P(\Delta_{j'}, \gamma) \leqslant 1 + 2^d(m-4)$ в силу (1.7) и предположения индукции. Значит, $P(K, \gamma)$ содержит не более $1 + (2^d - 1) + 1 + 2^d(m-4) = 1 + 2^d(m-3)$ элементов. Пусть $\theta \geqslant 2$ и $m_j = \lfloor \Phi(\Delta_j)\gamma^{-1} \rfloor$. Так как $\lceil \Phi(\Delta_j)\gamma^{-1} \rceil \leqslant m_j + 1$, то $\operatorname{card} P(\Delta_j, \gamma) \leqslant 1 + 2^d(m_j - 2)$ в силу предположения индукции. Поскольку

$$\sum_{j \in J} m_j \gamma \leqslant \Phi(R) + \sum_{j=1}^{2^d} \Phi(\Delta_j) \overset{(1.1)}{\leqslant} \Phi(K) \leqslant m\gamma,$$

то

$$\sum_{j \in J} m_j \leqslant m. \tag{1.8}$$

Значит, число элементов $P(K, \gamma)$ не превосходит

$$1 + (2^d - \theta) + \sum_{j \in J} \big(1 + 2^d(m_j - 2)\big) = 1 + 2^d - \theta + \theta(1 - 2 \cdot 2^d) + 2^d \sum_{j \in J} m_j$$

$$\overset{(1.8)}{\leqslant} 1 + 2^d - 2 \cdot 2^d \theta + 2^d m \leqslant 1 + 2^d(m-3).$$

Последнее неравенство вытекает из того, что $\theta \geqslant 2$. Таким образом, свойство (3) доказано.

Докажем (4). Пусть $R' \in \mathcal{R} \cap P(K, \gamma)$. Тогда либо $R' = R$ и в качестве Δ можно взять K, либо $R' \in P(\Delta_j, \gamma)$ для некоторого $j = 1, \dots, 2^d$. Во втором случае по предположению индукции существует куб $\Delta \in \Xi(\Delta_j)$ такой, что $R' \in Q(\Delta, \gamma)$ и $P(\Delta, \gamma) \subset P(\Delta_j, \gamma)$. Но $P(\Delta_j, \gamma) = \{\Delta_{j,k}\}_{1 \leqslant k \leqslant n_j} \subset P(K, \gamma)$ по построению, так что $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$. Таким образом, корректность индукционного перехода полностью доказана.

Покажем, что для $P(K, \gamma)$ выполнено (5). Пусть $\Delta \in \Xi(K)$, $\Phi(\Delta) > 3\gamma$ и $P(\Delta, \gamma) \subset P(K, \gamma)$, $\Delta' \in Q(\Delta, \gamma)$. Тогда в силу индукционного построения разбиения куба Δ выполнено $P(\Delta', \gamma) \subset P(\Delta, \gamma)$, откуда следует утверждение.

Свойство (6) также сразу следует из индукционного построения $P(K, \gamma)$. □

Лемма 3. *Пусть $K \in \mathcal{K}$, $\Phi(K) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $T_n = T_n(K) := P\big(K, n^{-1}\Phi(K)\big)$. Тогда выполнены следующие утверждения*:

(1) *число элементов разбиения T_n не превосходит $2^d n$;*

(2) *при $l \leqslant 2m$ $(l, m \in \mathbb{N})$ существует $C(d) \in \mathbb{N}$ такое, что любой элемент разбиения T_m содержит не более $C(d)$ элементов разбиения*

$$T_{l,m} := \{\Delta' \cap \Delta'' : \ \Delta' \in T_l, \, \Delta'' \in T_m, \, \operatorname{int}(\Delta' \cap \Delta'') \neq \varnothing\}.$$

Доказательство. Утверждение (1) следует из свойства (3) (см. лемму 2) разбиения $P(K, n^{-1}\Phi(K))$.

Докажем утверждение (2). Оно эквивалентно следующему: существует $C(d) \in \mathbb{N}$ такое, что любой элемент разбиения T_m перекрывается не более, чем с $C(d)$ элементами разбиения T_l.

Для каждого $\Delta \in \Xi(K)$ построим куб K_Δ со свойствами:

(a) $\Delta \subset K_\Delta$;

(b) $P\bigl(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr) \subset T_l = P\bigl(K,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$;

(c) если $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$, то ни один из кубов, принадлежащих $Q\bigl(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$, не содержит Δ.

Для этого рассмотрим семейство кубов $K' \in \Xi(K)$ со следующими свойствами:

(a$'$) $\Delta \subset K'$;

(b$'$) $P\bigl(K',\, l^{-1}\Phi(K)\bigr) \subset T_l$.

Это семейство непусто (так как содержит K) и конечно. В качестве K_Δ возьмем его минимальный по включению элемент. Свойства (a) и (b) тогда выполнены автоматически. Свойство (c) докажем от противного. Пусть $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$ и куб $\Delta' \in Q\bigl(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$ содержит Δ. В силу свойства (5) разбиения $P(K,\, l^{-1}\Phi(K))$

$$P(\Delta',\, l^{-1}\Phi(K)) \subset P(K,\, l^{-1}\Phi(K)),$$

т. е. Δ' удовлетворяет свойствам (a$'$) и (b$'$) и K_Δ — не минимальный.

Сразу заметим, что если элемент T_m содержится в объединении k элементов T_l, то он перекрывается не более, чем с k элементами T_l.

Пусть $\Delta \in T_m$ является кубом. Если $\Phi(K_\Delta) \leqslant 3l^{-1}\Phi(K)$, то $K_\Delta \in T_l$.

Пусть $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$. Рассмотрим разбиение $Q\bigl(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$, состоящее из кубов Δ_j, $j = 1,\, \dots,\, 2^d$, и множества $R \in \mathcal{R}$. В силу свойства (6) $R \in T_l$. Возможны три случая:

• $\Delta' := \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta_j$ и Δ не перекрываются. Тогда $\Delta \subset R \in T_l$, поэтому Δ перекрывается ровно с одним элементом T_l.

• $\Delta \subset \Delta'$, причем включение строгое. Тогда $\Delta \subset \Delta_j$ для некоторого j, что противоречит определению K_Δ, т. е. этот случай невозможен.

• $\Delta \supset \Delta'$. Тогда $\Delta \backslash \Delta' \subset R \in T_l$. Для любого $j = 1, \dots, 2^d$ имеем $\Phi(\Delta_j) \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant 3m^{-1}\Phi(K) \leqslant 6l^{-1}\Phi(K)$ (так как $m \geqslant l/2$). В силу утверждения (3) леммы 2 разбиение $P\bigl(\Delta_j,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$ содержит не более $1 + 2^d 3 \leqslant 2^{d+2}$ элементов. Значит, Δ перекрывается не более, чем с $1 + 2^d\, 2^{d+2}$ элементами T_l.

Таким образом, любой куб из T_m перекрывается не более, чем с $1 + 2^d\, 2^{d+2}$ элементами T_l.

Пусть $R \in \mathcal{R}$ является элементом T_m. В силу свойства (4) разбиения $P\bigl(K,\, m^{-1}\Phi(K)\bigr)$ существует куб Δ такой, что $R \in Q\bigl(\Delta,\, m^{-1}\Phi(K)\bigr)$ и элементы $P\bigl(\Delta,\, m^{-1}\Phi(K)\bigr)$ являются элементами T_m. Обозначим через Δ_j ($j = 1,\, \dots,\, 2^d$) кубы из $Q\bigl(\Delta,\, m^{-1}\Phi(K)\bigr)$.

Пусть $\Phi(K_\Delta) \leqslant 3l^{-1}\Phi(K)$. Тогда $K_\Delta \in T_l$, и Δ перекрывается ровно с одним элементом T_l.

Пусть $\Phi(K_\Delta) > 3l^{-1}\Phi(K)$. Обозначим элементы разбиения $Q\bigl(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$ через Δ'_j, $j = 1, \dots, 2^d$, и $R' \in \mathcal{R}$. Из свойств (5) и (6) разбиения $P\bigl(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\bigr)$ получаем $R' \in T_l$ и

$$P\left(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\right) \subset T_l. \tag{1.9}$$

Аналогично предыдущему имеем три случая:

• $\Delta \subset R' \in T_l$, т. е. Δ перекрывается ровно с одним элементом T_l;

• $\Delta \subset \Delta'_j$ для некоторого j; это невозможно, так как противоречит определению K_Δ;

• $\Delta \supset \bigcup_{j=1}^{2^d} \Delta'_j$.

Рассмотрим третий случай. Для каждого Δ'_j есть три возможности:

• Δ'_j и $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ не перекрываются;

• $\Delta'_j \subset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$;

• $\Delta'_j \supset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ (причем включение строгое).

Оценим число элементов T_l, перекрывающихся с $\Delta'_j \cap R$. В первом случае $\Delta'_j \subset R$, поэтому

$$\Phi(\Delta'_j) \leqslant m^{-1}\Phi(K) \overset{l \leqslant 2m}{\leqslant} 3l^{-1}\Phi(K),$$

откуда $\Delta'_j \in T_l$. Значит, $\Delta'_j \cap R$ перекрывается ровно с одним элементом T_l. Во втором случае $\Delta'_j \cap R = \varnothing$. Рассмотрим третий случай (он возможен не более, чем для одного куба Δ'_j). Можно считать, что $\Phi(\Delta'_j) > 3l^{-1}\Phi(K)$ (иначе $\Delta'_j \in T_l$). Из (1.4), неравенства $l \leqslant 2m$ и включения $\Delta \supset \Delta'_j$ следует, что

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\Big) > \Phi(\Delta) - m^{-1}\Phi(K) \geqslant \Phi(\Delta'_j) - 2l^{-1}\Phi(K). \tag{1.10}$$

Обозначим элементы разбиения $Q\left(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\right)$ через $\Delta'_{j,s}$, $s = 1, \ldots, 2^d$, и $R'_j \in \mathcal{R}$. В силу свойства (6) разбиения $P\left(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\right)$ и включения (1.9) выполнено $R'_j \in T_l$. Зафиксируем s. Если $\Delta'_{j,s} \subset R$, то в силу утверждения (2) леммы 2

$$\Phi(\Delta'_{j,s}) \leqslant \Phi(R) \leqslant m^{-1}\Phi(K) \overset{l\leqslant 2m}{\leqslant} 3l^{-1}\Phi(K), \quad \text{поэтому} \quad \Delta'_{j,s} \in T_l.$$

Если $\Delta'_{j,s} \subset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$, то $\Delta'_{j,s} \cap R = \varnothing$. Пусть $\Delta'_{j,s} \supset \bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i$ и включение является строгим. Так как $\Phi(\Delta'_{j,s}) \leqslant \Phi(\Delta'_j) - l^{-1}\Phi(K)$, то из (1.10) получаем, что

$$\Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\Big) > \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K). \tag{1.11}$$

Отсюда следует, что $\Delta'_{j,s} \cap R$ содержится в элементе T_l. В самом деле, пусть $S_1 = \{s \in \{1, \ldots, 2^d\} : \ \Delta'_{j,s} \in T_l\}$. Для $s \in S_1$ утверждение тривиально. Пусть $s \notin S_1$. Напомним, что в силу свойства (5)

$$P\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset P\big(\Delta'_j,\, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset P\big(K_\Delta,\, l^{-1}\Phi(K)\big) \subset T_l. \tag{1.12}$$

Поэтому $\Phi(\Delta'_{j,s}) > 3l^{-1}\Phi(K)$, иначе $P\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big) = \{\Delta'_{j,s}\}$ и $\Delta'_{j,s} \in T_l$. Рассмотрим разбиение $Q\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big)$, состоящее из кубов $\Delta'_{j,s,t}$, $t = 1, \ldots, 2^d$, и дополнения $R'_{j,s} \in \mathcal{R}$. В силу (1.12) и свойства (6) разбиения $P\big(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K)\big)$ выполнено $R'_{j,s} \in T_l$. Докажем, что $\Delta'_{j,s} \cap R \subset R'_{j,s}$. Для этого достаточно проверить включение $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i \supset \bigcup_{t=1}^{2^d} \Delta'_{j,s,t}$. Если оно не выполнено, то возможны два случая:

- $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i \subset \Delta'_{j,s,t_*}$ для некоторого t_*. С другой стороны, для любого t имеем $\Phi(\Delta'_{j,s,t}) \leqslant \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K)$ $\big($в силу (1.5) для $Q(\Delta'_{j,s},\, l^{-1}\Phi(K))\big)$, так что $\Phi\big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\big) \leqslant \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K)$, что противоречит (1.11).
- $\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i \subset R'_{j,s}$. Тогда

$$l^{-1}\Phi(K) \geqslant \Phi(R'_{j,s}) \geqslant \Phi\Big(\bigcup_{i=1}^{2^d} \Delta_i\Big) \overset{(1.11)}{>} \Phi(\Delta'_{j,s}) - l^{-1}\Phi(K),$$

откуда $\Phi(\Delta'_{j,s}) \leqslant 2l^{-1}\Phi(K)$, что противоречит неравенству $\Phi(\Delta'_{j,s}) > 3l^{-1}(K)$.

Тем самым показано, что $\Delta'_{j,s} \cap R \subset R'_{j,s} \in T_l$. Отсюда следует, что R перекрывается не более, чем с $1 + 2^d + 2^d$ элементами T_l: R', Δ'_ν $(\nu \neq j)$, R'_j, $\Delta'_{j,s}$ $(s \in S_1)$, $R'_{j,s}$ $(s \notin S_1)$. Лемма доказана. □

З а м е ч а н и е 1. В случае $d = 2$ похожее разбиение было построено в [22].

Предложение 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $k_j \leqslant 2^m - 1$, $j = 1, \ldots, d$. Пусть*

$$A = \prod_{j=1}^{d} \Big(\frac{k_j}{2^m},\, \frac{k_j+1}{2^m}\Big), \qquad B = \overline{(0,\, 1)^d \backslash A}.$$

Тогда существует не более $2d$ *параллелепипедов* $\Pi_i = \prod_{j=1}^d [a_{ij},\, b_{ij}]$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ *таких, что* $\bigcup_{i=1}^k \Pi_i = B$ *и для любых* $i,\, j,\, s$

$$|b_{ij} - a_{ij}| \leqslant 2|b_{is} - a_{is}|. \tag{1.13}$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $k_j + 1 \leqslant 2^{m-1}$ для любого j (т. е. $A \subset [0,\, 1/2]^d$, иначе сделаем отражение) и $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_d$. Положим $d_0 = \max\{j = 1,\, \ldots,\, d:\ k_j > 0\}$,

$$\Pi_j = [0,\, 1]^{j-1} \times \left[\frac{k_j + 1}{2^m},\, 1\right] \times [0,\, 1]^{d-j}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant d,$$

$$\Pi_{d+j} = \prod_{s=1}^{j-1} \left[\frac{k_s}{2^m},\, \frac{k_s + k_j}{2^m}\right] \times \left[0,\, \frac{k_j}{2^m}\right] \times \prod_{s=j+1}^{d} \left[0,\, \frac{k_j + 1}{2^m}\right], \qquad 1 \leqslant j \leqslant d_0.$$

Так как $1 - \dfrac{k_j + 1}{2^m} \geqslant \dfrac{1}{2}$ и $k_j \geqslant 1$ при $j \leqslant d_0$, то выполняется (1.13). Кроме того, $\dfrac{k_s + k_j}{2^m} \leqslant \dfrac{2^{m-1} + 2^{m-1}}{2^m} = 1$. Если $x = (x_1,\, \ldots,\, x_d) \in A$, то для любого j имеем $\dfrac{k_j}{2^m} < x_j < \dfrac{k_j + 1}{2^m}$, поэтому $x \notin \Pi_j$ и $x \notin \Pi_{d+j}$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Пусть $x \in B$. Если $x_j \geqslant \dfrac{k_j + 1}{2^m}$ для некоторого j, то $x \in \Pi_j$. Пусть $x_j < \dfrac{k_j + 1}{2^m}$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Тогда множество J индексов j, для которых $x_j \leqslant \dfrac{k_j}{2^m}$ и $k_j > 0$, непусто. Положим $l = \min\{j:\ j \in J\}$. Тогда

$$x_s \geqslant \frac{k_s}{2^m} \quad \text{при} \quad s < l, \quad \text{т. е.} \quad \frac{k_s}{2^m} \leqslant x_s < \frac{k_s + 1}{2^m} \leqslant \frac{k_l + k_s}{2^m};$$

$$x_l \leqslant \frac{k_l}{2^m} \quad \text{и} \quad \text{при} \quad s > l \quad 0 \leqslant x_s < \frac{k_s + 1}{2^m} \leqslant \frac{k_l + 1}{2^m};$$

так что $x \in \Pi_{d+l}$. Предложение доказано. □

Пусть $A \subset \mathbb{R}^d$. Скажем, что $A \in \mathcal{P}$, если $\prod_{i=1}^d (a_i,\, b_i) \subset A \subset \prod_{i=1}^d [a_i,\, b_i]$ для некоторых a_i, $b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Пересечение конечного числа множеств из $\mathcal{P}$ также принадлежит $\mathcal{P}$.

Предложение 2. *Пусть параллелепипеды* Π_i *определяются так же, как в предложении* 1. *Положим* $\widetilde{\Pi}_1 = \Pi_1$,

$$\widetilde{\Pi}_{i+1} = \Pi_{i+1} \backslash \bigcup_{j=1}^{i} \Pi_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant d + d_0 - 1.$$

Тогда $\widetilde{\Pi}_i \in \mathcal{P}$ *для любого* $i = 1,\, \ldots,\, d + d_0$.

Доказательство. Для $i = 1$ утверждение очевидно. Пусть $2 \leqslant i \leqslant d$. Тогда $\widetilde{\Pi}_i = \bigcap_{j=1}^{i-1} (\Pi_i \backslash \Pi_j)$, при этом

$$\Pi_i \backslash \Pi_j = [0,\, 1]^{i-1} \times \left[\frac{k_i + 1}{2^m},\, 1\right] \times [0,\, 1]^{d-i} \backslash [0,\, 1]^{j-1} \times \left[\frac{k_j + 1}{2^m},\, 1\right] \times [0,\, 1]^{d-j}$$

$$= [0,\, 1]^{j-1} \times \left[0,\, \frac{k_j + 1}{2^m}\right) \times [0,\, 1]^{i-j-1} \times \left[\frac{k_i + 1}{2^m},\, 1\right] \times [0,\, 1]^{d-i} \in \mathcal{P}$$

для любого $j = 1,\, \ldots,\, i - 1$. Положим $\Pi = [0,\, 1]^d \backslash \bigcup_{s=1}^d \Pi_s = \prod_{s=1}^d \left[0,\, \dfrac{k_s + 1}{2^m}\right)$. Тогда для любого $i = 1,\, \ldots,\, d_0$

$$\widetilde{\Pi}_{d+i} = (\Pi \cap \Pi_{d+i}) \backslash \bigcup_{j=1}^{i-1} \Pi_{d+j} = \bigcap_{j=1}^{i-1} \Big((\Pi \cap \Pi_{d+i}) \backslash (\Pi \cap \Pi_{d+i} \cap \Pi_{d+j}) \Big).$$

Множество $\Pi \cap \Pi_{d+i} \cap \Pi_{d+j}$ имеет вид

$$\prod_{s=1}^{j-1}\left[\frac{k_s}{2^m}, \frac{k_s+1}{2^m}\right) \times \left\{\frac{k_j}{2^m}\right\} \times \prod_{s=j+1}^{i-1}\left[\frac{k_s}{2^m}, \frac{k_s+1}{2^m}\right) \times \left[0, \frac{k_i}{2^m}\right] \times \prod_{s=i+1}^{d}\left[0, \frac{k_s+1}{2^m}\right),$$

поэтому оно содержится в границе параллелепипеда $\Pi \cap \Pi_{d+i}$, откуда следует, что

$$(\Pi \cap \Pi_{d+i}) \setminus (\Pi \cap \Pi_{d+i} \cap \Pi_{d+j}) \in \mathcal{P}.$$

Предложение доказано.

2. Оценки колмогоровских поперечников

Пусть $\Delta = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$, при этом

$$|b_j - a_j| \leqslant 2|b_s - a_s| \tag{2.1}$$

для любых $j, s = 1, \ldots, d$, P_Δ — ортогональный проектор из $L_1(\Delta)$ на пространство полиномов на Δ степени не выше $r-1$.

Пусть $f \in W^r_{q,g}(\Delta)$, $g \in L_s(\Delta)$, $v \in L_\beta(\Delta)$, $\beta \geqslant p \geqslant 1$, $s \geqslant \dfrac{q}{q-1}$. Тогда в силу неравенства Гельдера

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_{p,v}(\Delta)} \leqslant \|v\|_{L_\beta(\Delta)} \|f - P_\Delta f\|_{L_{\frac{p\beta}{\beta-p}}(\Delta)}, \tag{2.2}$$

$$\|D^r f\|_{L_{\frac{sq}{s+q}}(\Delta)} \leqslant \|g\|_{L_s(\Delta)} \left\|\frac{D^r f}{g}\right\|_{L_q(\Delta)}. \tag{2.3}$$

Воспользуемся теоремами вложения [24; 25]. Обозначим

$$\omega = r/d.$$

Пусть $\alpha \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 1$ и выполняется одно из следующих условий:

$$\text{(a)}\ \ \gamma = 1, \quad \omega \geqslant 1 \ \text{ и } \ \alpha = \infty, \qquad \text{(b)}\ \ \gamma > 1, \quad \gamma\omega > 1 \ \text{ и } \ \alpha = \infty,$$

$$\text{(c)}\ \ \gamma\omega < 1 \ \text{ и } \ \alpha \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma\omega}, \qquad \text{(d)}\ \ \gamma > 1, \quad \gamma\omega = 1 \ \text{ и } \ \alpha < \infty.$$

Тогда существует такое $C_{r,\,d,\,\gamma,\,\alpha}$, что для любой функции $f \in W^r_\gamma([0,\,1]^d)$

$$\|f - P_{[0,\,1]^d} f\|_\alpha \leqslant C_{r,\,d,\,\gamma,\,\alpha} \|D^r f\|_\gamma.$$

Для $\alpha = \dfrac{p\beta}{\beta-p}$, $\gamma = \dfrac{sq}{s+q}$ условия (a)–(d) переписываются в виде

$$\text{(a}'\text{)}\ \ \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1,\ \ \omega \geqslant 1 \ \text{ и } \ p = \beta, \qquad \text{(b}'\text{)}\ \ p = \beta \ \text{ и } \ \frac{1}{q} + \frac{1}{s} < \min\{\omega,\, 1\},$$

$$\text{(c}'\text{)}\ \ \beta > p,\ \ \omega < \frac{1}{q} + \frac{1}{s} \leqslant 1 \ \text{ и } \ \frac{1}{s} + \frac{1}{\beta} \leqslant \omega + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \qquad \text{(d}'\text{)}\ \ \beta > p,\ \ \omega = \frac{1}{s} + \frac{1}{q} < 1.$$

Если одно из этих условий выполнено, то для произвольного параллелепипеда $\Delta = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$, удовлетворяющего (2.1), справедливо неравенство

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_{\frac{p\beta}{\beta-p}}(\Delta)} \underset{d}{\lesssim} C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}} |\Delta|^{\omega+1/p-1/q-1/s-1/\beta} \|D^r f\|_{L_{\frac{sq}{s+q}}(\Delta)}. \tag{2.4}$$

Нам понадобятся следующие известные теоремы, дающие оценки колмогоровских поперечников конечномерных шаров и классов Соболева.

Теорема 1 (Б. С. Кашин, Е. Д. Глускин [3; 26]). *Если $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, то*

$$d_n(B_q^\nu,\, l_p^\nu) \underset{p,q}{\asymp} \Phi(n,\, \nu,\, q,\, p), \tag{2.5}$$

где

$$\Phi(n,\, \nu,\, q,\, p) = \begin{cases} \min\left\{1,\, \left(\nu^{1/p}\, n^{-1/2}\right)^{(1/q-1/p)/(1/2-1/p)}\right\}, & 2 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty, \\ \min\left\{1,\, \max\left(\nu^{1/p-1/q},\, \nu^{1/p-1/2}\,(\nu/n-1)^{1/2}\right)\right\}, & 1 \leqslant q < 2 \leqslant p \leqslant \infty, \\ \max\left\{\nu^{1/p-1/q},\, (1-n/\nu)^{(1/p-1/q)/(1-2/q)}\right\}, & 1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2. \end{cases}$$

Оценка снизу выполняется и при $p = \infty$. Если $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, то

$$d_n(B_q^\nu,\, l_p^\nu) = (\nu - n)^{1/p-1/q}.$$

Обозначим

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{1/q - 1/p}{1/2 - 1/p}\right).$$

Теорема 2 (В. М. Тихомиров, Р. С. Исмагилов, Б. С. Кашин и др. [3]). *Положим*

$$\theta = \begin{cases} \omega, \quad \text{если } \ p \leqslant q \ \text{ или } \ (2 \leqslant q < p \leqslant \infty,\ \omega > \eta), \\ \omega + 1/p - 1/q, \quad \text{если } \ 1 \leqslant q < p \leqslant 2, \\ \omega + 1/2 - 1/q, \quad \text{если } \ 1 < q < 2 < p \leqslant \infty \ \text{ и } \ q\omega > 1, \\ (\omega + 1/p - 1/q)(p/2), \quad \text{если } \ (1 < q < 2 < p \leqslant \infty,\ q\omega < 1) \ \text{ или } \ (2 \leqslant q < p \leqslant \infty,\ \omega < \eta). \end{cases}$$

Пусть $\omega + 1/p - 1/q > 0$. Тогда

$$d_n(W_q^r[0,\,1]^d,\, L_p[0,\,1]^d) \underset{r,d,p,q}{\asymp} n^{-\theta}.$$

Всюду далее будем обозначать $\varkappa = \dfrac{1}{r/d + 1/p - 1/q}$.

Теорема 3. *Пусть $d,\, r \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ — куб, $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, $1 \leqslant s < \infty$, $1 \leqslant \beta < \infty$, $v \in L_\beta(K,\, \mathbb{R}_+)$, $g \in L_s(K,\, \mathbb{R}_+)$. Предположим, что если $1 < q < 2 < p < +\infty$, то $q\omega \neq 1$, если $2 \leqslant q < p < +\infty$, то $\omega \neq \eta$. Кроме того, пусть выполняется одно из условий* (a′)–(d′). *Тогда*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{d_n(W_{q,g}^r(K),\, L_{p,v}(K))}{d_n\big(W_q^r([0,\,1]^d),\, L_p([0,\,1]^d)\big)} \underset{r,d,q,p}{\lesssim} C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}} \|gv\|_\varkappa. \tag{2.6}$$

Заметим, что зависимость от r и d должна входить как в константу вложения $C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}}$, так и в константу из порядкового неравенства, не зависящую от s и β.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, число d_0 и множества B и Π_i определяются, как в предложении 1,

$$\Delta = \lambda B + x_0, \tag{2.7}$$

$\Delta_i = \lambda \Pi_i + x_0$. Положим $\widetilde{\Delta}_1 = \Delta_1$, $\widetilde{\Delta}_{i+1} = \Delta_{i+1} \backslash (\bigcup_{j=1}^{i} \Delta_j)$ при $1 \leqslant i \leqslant d + d_0 - 1$. Из предложения 2 следует, что множества $\widetilde{\Delta}_j$ принадлежат классу $\mathcal{P}$, так что их замыкания являются прямоугольными параллелепипедами. Положим $P_\Delta f(x) = P_{\Delta_i} f(x)$ при $x \in \widetilde{\Delta}_i$. Так как для любого Δ_i выполняется (2.4) и число параллелепипедов Δ_i не превосходит $2d$, то (2.4) справедливо и для Δ; кроме того, выполнены (2.2) и (2.3).

Пусть Δ или определено с помощью (2.7), или является кубом. Тогда в силу (2.4) и (2.3)

$$\|f - P_\Delta f\|_{L_{\frac{p\beta}{\beta-p}}(\Delta)} \leqslant C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}} |\Delta|^{\omega+1/p-1/q-1/s-1/\beta} \|g\|_{L_s(\Delta)} \left\| \frac{D^r f}{g} \right\|_{L_q(\Delta)}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию множества

$$\Phi(A)=\Phi_{g,v}(A)=|A|^{\frac{\omega+1/p-1/q-1/\beta-1/s}{\omega+1/p-1/q}}\Bigl(\int\limits_A |g(x)|^s\,dx\Bigr)^{\frac{1/s}{\omega+1/p-1/q}}\Bigl(\int\limits_A |v(x)|^\beta\,dx\Bigr)^{\frac{1/\beta}{\omega+1/p-1/q}},$$

где A — измеримое подмножество K. В силу неравенства Гельдера и абсолютной непрерывности интеграла Лебега выполнены условия (1.1) и (1.2).

Для любого $\delta>0$ существуют разбиение K на кубы K_i, $i=1,\,\dots,\,i_0$, и функции $g_0\geqslant 0$, $v_0\geqslant 0$, постоянные на K_i, $g_0|_{K_i}=c_i$, $v_0|_{K_i}=a_i$, и такие, что $\|g-g_0\|_s\leqslant\delta$ и $\|v-v_0\|_\beta\leqslant\delta$.

Пусть $n\geqslant i_0$, $m\in\mathbb{Z}_+$. Положим

$$n_{i,m}=2^m\Bigl(\Bigl[\frac{\Phi(K_i)}{\sum\limits_j\Phi(K_j)}n\Bigr]+1\Bigr).$$

Тогда $\sum_i n_{i,m}\leqslant 2^m(n+i_0)\leqslant 2^{m+1}n$. Для каждого i такого, что $\Phi(K_i)>0$, в соответствии с леммой 2 возьмем разбиение

$$P\Bigl(K_i,\,\frac{\Phi(K_i)}{n_{i,m}}\Bigr)=\{\Delta_{ij}^m,\;\;1\leqslant j\leqslant j_{i,m}\}.$$

В силу леммы 2 $\Phi(\Delta_{ij}^m)\leqslant 3n_{i,m}^{-1}\Phi(K_i)$. В силу леммы 3 $j_{i,m}\leqslant 2^dn_{i,m}$ для любого $i=1,\dots,i_0$. Обозначим через T_m разбиение куба K, состоящее из элементов Δ_{ij}^m, $i=1,\dots,i_0$, $j=1,\dots,j_{i,m}$. Тогда число элементов T_m не больше $2^{d+m+1}n$. Для каждого разбиения $T=\{\Delta_l\}$ положим

$$\|f\|_{p,q,\beta,v,T}=\Bigl(\sum_l\|v\|^\sigma_{L_\beta(\Delta_l)}\|f\|^\sigma_{L_{\frac{p\beta}{\beta-p}}(\Delta_l)}\Bigr)^{1/\sigma},$$

где $\sigma=\min\{p,\,q\}$. Заметим, что $\|f\|_{p,q,\beta,v,T}\geqslant\|f\|_{p,v}$. Положим $(P_mf)|_{\Delta_{ij}^m}=P_{\Delta_{ij}^m}f$. Тогда

$$\|f-P_mf\|_{p,q,\beta,v,T_m}=\Bigl(\sum_{i,j}\|v\|^\sigma_{L_\beta(\Delta_{ij}^m)}\|f-P_{\Delta_{ij}^m}f\|^\sigma_{L_{\frac{p\beta}{\beta-p}}(\Delta_{ij}^m)}\Bigr)^{1/\sigma}$$

$$\underset{d}{\overset{(2.8)}{\lesssim}} C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}}\Bigl(\sum_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{\sigma(\omega+1/p-1/q)}\Bigl\|\frac{D^rf}{g}\Bigr\|^\sigma_{L_q(\Delta_{ij}^m)}\Bigr)^{1/\sigma}=:C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}}M_\sigma.$$

Пусть $f\in W^r_{q,g}(K)$. Если $p\leqslant q$, то в силу неравенства Гельдера

$$M_p=\Bigl(\sum_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{p(\omega+1/p-1/q)}\Bigl\|\frac{D^rf}{g}\Bigr\|^p_{L_q(\Delta_{ij}^m)}\Bigr)^{1/p}\leqslant\Bigl(\sum_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{\frac{pq\omega}{q-p}+1}\Bigr)^{\frac{q-p}{qp}}$$

$$\underset{\omega}{\lesssim}\Biggl(\sum_i n_{i,m}^{-\frac{pq\omega}{q-p}}\Phi(K_i)^{\frac{pq\omega}{q-p}+1}\Biggr)^{\frac{q-p}{qp}}\leqslant(2^mn)^{-\omega}\Bigl(\sum_i\Phi(K_i)\Bigr)^{\omega+1/p-1/q}.$$

Если $p>q$, то

$$M_q=\Bigl(\sum_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{q(\omega+1/p-1/q)}\Bigl\|\frac{D^rf}{g}\Bigr\|^q_{L_q(\Delta_{ij}^m)}\Bigr)^{1/q}\leqslant\max_{i,j}\Phi(\Delta_{ij}^m)^{\omega+1/p-1/q}$$

$$\underset{\omega}{\lesssim}\max_i n_{i,m}^{-\omega-1/p+1/q}\Phi(K_i)^{\omega+1/p-1/q}\leqslant(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}\Bigl(\sum_i\Phi(K_i)\Bigr)^{\omega+1/p-1/q}.$$

Оценим сверху $\sum_i \Phi(K_i)$. Положим $v_1 = v - v_0$, $g_1 = g - g_0$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, i_0$

$$\|g\|^{\varkappa}_{L_s(K_i)} \|v\|^{\varkappa}_{L_\beta(K_i)} \leqslant 4^{\max(0, \varkappa - 1)} \sum_{j,l=0}^{1} \|g_j\|^{\varkappa}_{L_s(K_i)} \|v_l\|^{\varkappa}_{L_\beta(K_i)},$$

поэтому

$$\Bigl(\sum_i \Phi(K_i)\Bigr)^{\omega+1/p-1/q} \leqslant 4\Bigl(\sum_i \sum_{j,l=0}^{1} \Phi_{g_j, v_l}(K_i)\Bigr)^{\omega+1/p-1/q}$$

$$\leqslant 4\Bigl(\sum_i |K_i|^{1-\varkappa(1/\beta+1/s)} (c_i^s |K_i|)^{\varkappa/s} (a_i^\beta |K_i|)^{\varkappa/\beta} + \Phi_{g_0,v_1}(K) + \Phi_{g_1,v_0}(K) + \Phi_{g_1,v_1}(K)\Bigr)^{\omega+1/p-1/q}$$

$$= 4\left(\|g_0 v_0\|^{\varkappa}_{L_\varkappa(K)} + \Phi_{g_0,v_1}(K) + \Phi_{g_1,v_0}(K) + \Phi_{g_1,v_1}(K)\right)^{\omega+1/p-1/q} = 4\|gv\|_{L_\varkappa(K)} + o(1), \quad \delta \to 0.$$

Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение K на кубы K_i такое, что

$$\Bigl(\sum_i \Phi(K_i)\Bigr)^{\omega+1/p-1/q} \leqslant 4\left(\|gv\|_{L_\varkappa(K)} + \varepsilon\right),$$

так что

$$\|f - P_m f\|_{p,q,\beta,v,T_m} \underset{r,d}{\lesssim} C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}} (2^m n)^{-\omega+(1/q-1/p)_+} \left(\|gv\|_{L_\varkappa(K)} + \varepsilon\right). \tag{2.9}$$

Так как множество $\{P_0 f |\, f \in L_{p,v}(K)\}$ является подпространством, размерность которого не превосходит $2^{d+1}\, 2d\, r^d n$, то из (2.9) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^{\omega-(1/q-1/p)_+} d_n(W^r_{q,g}(K),\, L_{p,v}(K)) \underset{r,d}{\lesssim} C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}} \|gv\|_{L_\varkappa(K)}.$$

Таким образом, (2.6) доказано для случаев $p \leqslant q$ и $2 \geqslant p > q$, когда

$$d_n(W^r_q([0,\,1]^d),\, L_p([0,\,1]^d)) \underset{p,q,r,d}{\asymp} n^{-\omega+(1/q-1/p)_+}$$

(последняя оценка известна; в частности, оценка снизу выводится, например, методом дискретизации Майорова [4] из оценок поперечников конечномерных шаров [3]).

В остальных случаях также применим метод дискретизации [4]. Из (2.9) следует, что если $f \in W^r_{q,g}(K)$, то $f = \sum_{m=0}^{\infty} (P_m f - P_{m-1} f)$, где ряд суммируется в метрике $L_{p,v}(K)$, а $P_{-1} := 0$.

Пусть $\Delta^m_l \in T_m$. Тогда Δ^m_l разбивается на не более, чем $2d$ прямоугольных параллелепипедов $\Pi^m_{l,j}$ таких, что $P_m f|_{\Pi^m_{l,j}}$ является полиномом степени не выше $r-1$. Обозначим через $\widetilde{T}_m$ разбиение K на параллелепипеды $\Pi^m_{l,s,j,k} = \Pi^m_{l,j} \cap \Pi^{m-1}_{s,k}$ с непустой внутренностью. Оценим количество $\Pi^m_{l,s,j,k}$, содержащихся в Δ^m_l. В силу леммы 3 $\operatorname{card}\{s\colon\ \operatorname{int}(\Delta^m_l \cap \Delta^{m-1}_s) \neq \varnothing\} \leqslant C(d)$, поэтому $\operatorname{card}\{s\colon\ \operatorname{int}(\Pi^m_{l,j} \cap \Delta^{m-1}_s) \neq \varnothing\} \leqslant C(d)$ для любого j. Отсюда следует, что Δ^m_l разбивается на не более, чем $(2d)^2 C(d)$ параллелепипедов $\Pi^m_{l,s,j,k}$. Аналогично Δ^{m-1}_s разбивается на не более, чем $(2d)^2 C(d)$ параллелепипедов $\Pi^m_{l,s,j,k}$.

Пусть $\nu(m)$ — число элементов $\widetilde{\Pi}^m_l$ разбиения $\widetilde{T}_m$. Тогда $\nu(m) \leqslant 4d^2 C(d)\, 2^{d+m+1} n$. Положим $I = \{l \in \{1, \ldots, \nu(m)\} :\ \|v\|_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} > 0\}$, $\widetilde{\nu}(m) = \operatorname{card} I$, $\widetilde{K} = \widetilde{K}_m = \bigcup_{l\in I} \widetilde{\Pi}^m_l$. Обозначим через $S_{d,r,\widetilde{T}_m}(\widetilde{K})$ множество функций φ таких, что для любого $l \in I$ ограничение $\varphi|_{\widetilde{\Pi}^m_l}$ является полиномом, степень которого по каждой переменной не превосходит $r-1$. Пусть $\widetilde{\Pi}^m_l = \prod_{j=1}^d (a^m_{l,j},\, b^m_{l,j})$. Для любого $s = (s_1, \ldots, s_d) \in \{1, \ldots, r\}^d$ положим

$$\tau^m_{l,s} = \left(a^m_{l,j} + (b^m_{l,j} - a^m_{l,j}) \frac{s_j}{r+1}\right)_{j=1}^d.$$

Определим оператор $A_m: \ S_{d,r,\widetilde{T}_m}(\widetilde{K}) \to \mathbb{R}^{r^d\widetilde{\nu}(m)}$ по формуле

$$A_m f = \left(f(\tau^m_{l,s}) \|v\|_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{1/p-1/\beta} \right)_{l\in I,\, s\in\{1,\dots,r\}^d}.$$

Тогда $(a_{l,s})_{l\in I,\, s\in\{1,\dots,r\}^d} \overset{A_m^{-1}}{\mapsto} \varphi$, где $\varphi|_{\widetilde{\Pi}^m_l}$ является интерполяционным полиномом Лагранжа, равным $a_{l,s}\|v\|^{-1}_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{1/\beta-1/p}$ в точке $\tau^m_{l,s}$.

Пусть B — оператор, сопоставляющий последовательности $(c_s)_{s\in\{1,\dots,r\}^d} \in \mathbb{R}^{r^d}$ интерполяционный полином Лагранжа на $[0,\,1]^d$, равный c_s в точке $\dfrac{s}{r+1}$. Тогда B — линейный изоморфизм между $\mathbb{R}^{r^d}$ и множеством $\mathcal{P}_{r,d}$ полиномов на $[0,\,1]^d$, степень которых по каждой переменной не выше $r-1$.

Для любой функции $\varphi \in S_{p,q,\widetilde{T}_m}(\widetilde{K})$

$$\|\varphi\|^p_{L_{p,v}(\widetilde{K})} = \sum_{l\in I} \int\limits_{\widetilde{\Pi}^m_l} |\varphi(x)v(x)|^p\,dx \leqslant \sum_{l\in I} \|v\|^p_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{1-p/\beta} \|\varphi\|^p_{C(\widetilde{\Pi}^m_l)}$$

$$\leqslant \sum_{l\in I} \|v\|^p_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{1-p/\beta} \|B\|^p_{l_p^{r^d}\to C([0,\,1]^d)} \sum_{s\in\{1,\dots,r\}^d} |\varphi(\tau^m_{l,s})|^p = \|B\|^p_{l_p^{r^d}\to C([0,\,1]^d)} \|(a_{l,s})\|^p_{l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}},$$

поэтому

$$\|A_m^{-1}\|_{l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}\to L_{p,v}(\widetilde{K})} \leqslant \|B\|_{l_p^{r^d}\to C([0,\,1]^d)}. \tag{2.10}$$

Пусть $\widehat{c}_{r,d} = \sup\{\|\psi\|_{C([0,\,1]^d)}/\|\psi\|_{L_1([0,\,1]^d)},\ \psi\in\mathcal{P}_{r,d}\}$. Тогда

$$\|(a_{l,s})\|^q_{l_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)}} = \sum_{l\in I} \sum_{s\in\{1,\dots,r\}^d} |\varphi(\tau^m_{l,s})|^q \|v\|^q_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{q/p-q/\beta}$$

$$\leqslant r^{qd} \sum_{l\in I} \|\varphi\|^q_{C(\widetilde{\Pi}^m_l)} \|v\|^q_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{q/p-q/\beta}$$

$$\leqslant \widehat{c}^{\,q}_{r,d}\, r^{qd} \sum_{l\in I} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{q/\beta-q/p} \|\varphi\|^q_{L_{\frac{p\beta}{\beta-p}}(\widetilde{\Pi}^m_l)} \|v\|^q_{L_\beta(\widetilde{\Pi}^m_l)} |\widetilde{\Pi}^m_l|^{q/p-q/\beta} = \widehat{c}^{\,q}_{r,d}\, r^{qd} \|\varphi\|^q_{p,q,\beta,v,\widetilde{T}_m}.$$

Значит,

$$\alpha_m := \|A_m\|_{L_{p,q,\beta,v,\widetilde{T}_m}(\widetilde{K})\cap S_{d,r,\widetilde{T}_m}(\widetilde{K}) \to l_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)}} \underset{r,d}{\lesssim} 1. \tag{2.11}$$

Теперь оценим величину $d_n(W^r_{q,g}(K),\, L_{p,v}(K))$. Пусть $\{k(m)\}_{m\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{Z}_+$ — некоторая последовательность, $\sum_{m=0}^\infty k(m) < \infty$, Λ_m — экстремальное подпространство для $d_{k(m)}\big(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)},\, l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}\big) =: \gamma_m$, E_m — метрический проектор на Λ_m. Пусть I_m — тождественный оператор на $l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}$, $J_m: \ L_{p,v}(\widetilde{K}_m) \to L_{p,v}(K)$ — оператор продолжения функции нулем на $K\backslash\widetilde{K}_m$. Определим отображение

$$\widetilde{E}: \ f \mapsto \sum_{m=0}^\infty J_m A_m^{-1} E_m A_m (P_m f - P_{m-1} f)|_{\widetilde{K}_m}.$$

Так как сумма ряда конечная, а множество $\widetilde{E}(L_{p,v}(K))$ содержится в подпространстве размерности не больше $N := \sum\limits_m k(m)$, то $d_N(W^r_{q,g}(K),\, L_{p,v}(K)) \leqslant \sup_{f\in W^r_{q,g}(K)} \|f - \widetilde{E}f\|_{L_{p,v}(K)}$. Если $f\in W^r_{q,g}(K)$, то

$$\|f - \widetilde{E}f\|_{L_{p,v}(K)} \leqslant \sum_{m=0}^\infty \|J_m A_m^{-1}(I_m - E_m) A_m (P_m f - P_{m-1} f)|_{\widetilde{K}_m}\|_{L_{p,v}(K)}$$

$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \|A_m^{-1}\|_{l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}\to L_{p,v}(\widetilde{K}_m)}\gamma_m\alpha_m\|P_mf-P_{m-1}f\|_{L_{p,q,\beta,v,\widetilde{T}_m}(\widetilde{K}_m)}$$

$$\underset{r,d}{\overset{(2.10),\,(2.11)}{\lesssim}} \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\bigl(\|f-P_{m-1}f\|_{L_{p,q,\beta,v,\widetilde{T}_m}}+\|f-P_mf\|_{L_{p,q,\beta,v,\widetilde{T}_m}}\bigr)$$

$$\underset{d}{\lesssim} \sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\bigl(\|f-P_{m-1}f\|_{L_{p,q,\beta,v,T_{m-1}}}+\|f-P_mf\|_{L_{p,q,\beta,v,T_m}}\bigr)$$

$$\underset{r,d}{\overset{(2.9)}{\lesssim}} C_{r,\,d,\,\frac{sq}{s+q},\,\frac{p\beta}{\beta-p}}n^{-\omega+1/q-1/p}\left(\|gv\|_{L_\varkappa(K)}+\varepsilon\right)\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m2^{-m(\omega+1/p-1/q)}.$$

Итак, осталось подобрать такую последовательность $k(m)$, чтобы выполнялось неравенство $\sum_{m=0}^\infty k(m)\underset{p,q,r,d}{\lesssim} n$, и получить оценку для $\sum_{m=0}^\infty d_{k(m)}\bigl(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)},\, l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}\bigr)(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}$.

Обозначим

$$\zeta=\frac{1/2-1/p}{1/q-1/p}\,.$$

Пусть $1<q<2<p<\infty$, $\omega>1/q$ или $2\leqslant q<p<\infty$, $\omega>\eta$. Положим

$$m_0=\left[\frac{\min\{1/2,1/q\}-1/p}{\omega+1/p-1/q}\log_2 n\right],\ \ k(m)=0\ \text{ при }\ m>m_0,\ \ k(m)=[n\sigma^m]\ \text{ при }\ 1\leqslant m\leqslant m_0,$$

где $\sigma=\sigma(p,\,q,\,\omega)\in(0,\,1)$ будет выбрано ниже. Тогда

$$\sum_{m=0}^{\infty}k(m)=\sum_{m=0}^{m_0}[n\sigma^m]\underset{q,\omega}{\asymp} n.$$

Пусть $1<q<2<p<\infty$ и $\sigma(p,\,q,\,\omega):=(1+4^{1/q-\omega})/2$. Тогда

$$\sum_{m>m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)},\,l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)})=\sum_{m>m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}\underset{p,q,\omega}{\asymp} n^{-\omega-1/2+1/q};$$

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)},\,l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)})\underset{p,q,\omega}{\overset{(2.5)}{\lesssim}}\sum_{0\leqslant m\leqslant m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}n^{1/p-1/2}\,2^{m/p}\sigma^{-m/2}$$

$$=n^{-\omega-1/2+1/q}\sum_{m=0}^{m_0}\frac{1}{\bigl(2^{\omega-1/q}\sigma^{1/2}\bigr)^m}\underset{p,q,\omega}{\asymp} n^{-\omega-1/2+1/q}\underset{p,q,r,d}{\asymp} d_n(W_q^r([0,\,1]^d),\,L_p([0,\,1]^d)).$$

Пусть $2\leqslant q<p<\infty$ и $\sigma(p,\,q,\,\omega):=(1+4^{-\omega\zeta+1/2})/2$. Тогда

$$\sum_{m>m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)},\,l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)})=\sum_{m>m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}\asymp n^{-\omega};$$

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)},\,l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)})$$

$$\underset{p,q,\omega}{\overset{(2.5)}{\lesssim}}\sum_{0\leqslant m\leqslant m_0}(2^mn)^{-\omega-1/p+1/q}\,n^{1/p-1/q}\,\left(2^{m/p}\sigma^{-m/2}\right)^{\frac{1/q-1/p}{1/2-1/p}}$$

$$\underset{p,q,\omega}{\lesssim} n^{-\omega}\underset{p,q,r,d}{\asymp} d_n(W_q^r([0,\,1]^d),\,L_p([0,\,1]^d)).$$

Теперь рассмотрим случаи $1<q<2<p<\infty$, $\omega<1/q$ и $2\leqslant q<p<\infty$, $\omega<\eta$. Положим

$$m_0=\left[\left(\frac{p}{2}-1\right)\log_2 n\right],\ \ k(m)=0\ \text{ при }\ m>m_0,\ \ k(m)=\bigl[(m_0-m+1)^{-2}n\bigr]\ \text{ при }\ m\leqslant m_0.$$

Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} k(m) \lesssim n,$$

$$\sum_{m>m_0} (2^m n)^{-\omega-1/p+1/q} d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)}, l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)}) = \sum_{m>m_0} (2^m n)^{-\omega-1/p+1/q} \underset{p,q,\omega}{\asymp} n^{-p(\omega+1/p-1/q)/2}.$$

Если $1 < q < 2 < p < \infty$, то

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant m_0} (2^m n)^{-\omega-1/p+1/q} d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)}, l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)})$$

$$\underset{p,q,r,d}{\overset{(2.5)}{\lesssim}} \sum_{0\leqslant m\leqslant m_0} (2^m n)^{-\omega-1/p+1/q}\, n^{1/p-1/2}\, 2^{m/p}(m_0 - m + 1)$$

$$= \sum_{0\leqslant m\leqslant m_0} 2^{m(1/q-\omega)}\, n^{-\omega-1/2+1/q}(m_0 - m + 1) = n^{-\omega-1/2+1/q}\, 2^{m_0(1/q-\omega)} \sum_{0\leqslant l\leqslant m_0} 2^{-l(1/q-\omega)}(l+1)$$

$$\underset{q,\omega}{\lesssim} n^{-p(\omega+1/p-1/q)/2} \underset{p,q,r,d}{\asymp} d_n(W_q^r([0,\,1]^d),\, L_p([0,\,1]^d)).$$

Если $2 \leqslant q < p < \infty$, то аналогично получаем

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant m_0} (2^m n)^{-\omega-1/p+1/q} d_{k(m)}(B_q^{r^d\widetilde{\nu}(m)}, l_p^{r^d\widetilde{\nu}(m)})$$

$$\underset{p,q,\omega}{\overset{(2.5)}{\lesssim}} \sum_{0\leqslant m\leqslant m_0} (2^m n)^{-\omega-1/p+1/q}\, n^{1/p-1/q}\, 2^{m/(p\zeta)}(m_0 - m + 1)^{1/\zeta}$$

$$= n^{-\omega}\, 2^{m_0(1/(2\zeta)-\omega)} \sum_{0\leqslant l\leqslant m_0} 2^{-l(1/(2\zeta)-\omega)}(l+1)^{1/\zeta} \underset{p,q,\omega}{\lesssim} n^{-p(\omega+1/p-1/q)/2}$$

$$\underset{p,q,r,d}{\asymp} d_n(W_q^r([0,\,1]^d),\, L_p([0,\,1]^d)).$$

Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Если $1/p - 1/\beta - 1/s - 1/q + \omega > 0$, то разбиение K_i можно строить так же, как в [24]. В этом случае функция множества

$$F(\Delta) = |\Delta|^{1/p-1/\beta-1/s-1/q+\omega}\left(\int\limits_{\Delta} |v(x)|^\beta\, dx\right)^{1/\beta}\left(\int\limits_{\Delta} |g(x)|^s\, dx\right)^{1/s}$$

имеет вид $F(\Delta) = (|\Delta|^a J(\Delta))^{1/\beta+1/s}$, где $a > 0$ и $J(\Delta_1) + J(\Delta_2) \leqslant J(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ для любых неперекрывающихся множеств Δ_1, Δ_2. Поэтому существует разбиение K_i на не более, чем n_i кубов Δ_{ij} таких, что $|\Delta_{ij}|^a J(\Delta_{ij}) \leqslant C(a,\, d)|K_i|^a J(K_i) n_i^{-a-1}$, так что

$$F(\Delta_{ij}) \leqslant C(a,\, d)^{1/\beta+1/s} F(K_i) n_i^{-\omega-1/p+1/q}.$$

При этом $C(a,\, d) \to \infty$ при $a \to 0$, так что если значение $1/p-1/\beta-1/s-1/q+\omega$ близко к 0, то для такого разбиения приближение соответствующими кусочно-полиномиальными функциями дает бóльшую константу в (2.6), чем для разбиения, описанного в лемме 2.

З а м е ч а н и е 3. Если предварительно не проводить деление K на кубы K_i, то можно получить оценку

$$d_n(W_{q,g}^r(K),\, L_{p,v}(K)) \underset{p,q,r,d}{\lesssim} C_{r,\, d,\, \frac{sq}{s+q},\, \frac{p\beta}{\beta-p}} \|v\|_{L_\beta(K)} \|g\|_{L_s(K)} d_n(W_q^r(K),\, L_p(K)),$$

которая справедлива для всех n (а не только для достаточно больших).

Обозначим через $L^+(K)$ класс функций μ таких, что существует последовательность функций μ_n со следующими свойствами:

1. $0 \leqslant \mu_n(x) \leqslant \mu(x)$ для любого $x \in K$.
2. Существует конечное разбиение K на кубы K_i^n такое, что $\mu_n|_{K_i^n} = \mathrm{const}$.
3. $\mu_n(x) \to \mu(x)$ почти всюду на K.

Теорема 4. *Пусть $g, v \in L^+(K)$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $gv \in L_\varkappa(K)$. Предположим, что $\omega + 1/p - 1/q > 0$, при этом если $1 < q < 2 < p < \infty$, то $\omega \neq 1/q$, если $2 \leqslant q < p < \infty$, то $\omega \neq \eta$. Тогда*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{d_n(W^r_{q,g}(K),\, L_{p,v}(K))}{d_n(W^r_q([0,\,1]^d),\, L_p([0,\,1]^d))} \underset{r,d,q,p}{\gtrsim} \|gv\|_\varkappa.$$

Доказательство. Можно считать, что существует разбиение K на кубы Δ_i, $1 \leqslant i \leqslant i_0$, такое, что $v|_{\Delta_i} = a_i$, $g|_{\Delta_i} = c_i$. Пусть $J = \{i = 1, \ldots, i_0 : a_i c_i \neq 0\} \neq \varnothing$, $\widetilde{K} = \bigcup_{i\in J} \Delta_i$, $N \geqslant n$. Для каждого $i \in J$ положим

$$n_i = \left(\left[\left(\frac{(a_ic_i)^\varkappa|\Delta_i|}{\sum\limits_{j\in J}(a_jc_j)^\varkappa|\Delta_j|}2N\right)^{1/d}\right] + 1\right)^d, \qquad m := \sum_{i\in J} n_i\,.$$

Тогда при достаточно больших N

$$2\frac{(a_ic_i)^\varkappa|\Delta_i|}{\sum\limits_{j\in J}(a_jc_j)^\varkappa|\Delta_j|}N \leqslant n_i \leqslant 4\frac{(a_ic_i)^\varkappa|\Delta_i|}{\sum\limits_{j\in J}(a_jc_j)^\varkappa|\Delta_j|}N, \quad 2N \leqslant m \leqslant 4N.$$

Пусть функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ имеет носитель в $(0,\,1)$, $\varphi_0 \not\equiv 0$. Положим $\varphi(x) = c\prod_{l=1}^d \varphi_0(x^l)$, где x^l — l-я координата точки $x \in \mathbb{R}^d$, а c выбирается так, чтобы $\int_{[0,\,1]^d} |D^r\varphi(x)|^q\,dx = 1$. Тогда $\int_{[0,\,1]^d} \varphi(x)\,dx \underset{r,d}{\asymp} 1$. Разделим Δ_i на n_i равных кубов

$$\Delta_{i,j} = x_{ij} + \left(\frac{|\Delta_i|}{n_i}\right)^{1/d}[0,\,1]^d$$

и положим

$$\varphi_{ij}(x) = \varphi\left(\left(\frac{n_i}{|\Delta_i|}\right)^{1/d}(x - x_{ij})\right), \quad V = \left\{\sum_{i\in J}\sum_{j=1}^{n_i} \xi_{ij}\varphi_{ij}, \quad \xi_{ij} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Оценим снизу поперечник множества $W^r_{q,g}(K) \cap V$. Рассмотрим оператор $A : L_{p,v} \to l_p^m$,

$$Af = (\xi_{ij})_{i\in J,\, 1\leqslant j\leqslant n_i}, \qquad \xi_{ij} = \frac{1}{c_i|\Delta_{i,j}|^{r/d-1/q+1}}\int\limits_{\Delta_{i,j}} f(t)\,dt.$$

Тогда при $p < \infty$

$$\sum_{i,j}|\xi_{ij}|^p = \sum_{i,j}\frac{1}{c_i^p|\Delta_{i,j}|^{rp/d-p/q+p}}\left(\int\limits_{\Delta_{i,j}} f(x)\,dx\right)^p$$

$$\leqslant \sum_{i,j}\frac{n_i^{rp/d-p/q+1}}{|\Delta_i|^{rp/d-p/q+1}}\frac{1}{(a_ic_i)^p}\int\limits_{\Delta_{i,j}} a_i^p|f(x)|^p\,dx \leqslant 4^{pr/d+1}\left(\frac{N^{r/d-1/q+1/p}}{\|gv\|_\varkappa}\right)^p\|f\|^p_{L_{p,v}(K)}\,.$$

Значит,

$$\|A\|_{L_{p,v}(K)\to l_p^m} \underset{r,d}{\lesssim} \frac{N^{r/d-1/q+1/p}}{\|gv\|_\varkappa}.$$

Аналогичное неравенство выполняется при $p = \infty$.

Пусть $f \in V$, $f = \sum\limits_{i,j} \beta_{ij}\varphi_{ij}$. Тогда при $q < \infty$

$$\|Af\|_{l_q^m}^q = \sum_{i,j} \frac{1}{c_i^q|\Delta_{i,j}|^{rq/d-1+q}}|\beta_{ij}|^q \Bigg(\int\limits_{\Delta_{i,j}} \varphi_{ij}(x)\,dx\Bigg)^q = \sum_{i,j} \frac{|\beta_{ij}|^q}{c_i^q|\Delta_{i,j}|^{rq/d-1}} \Bigg(\int\limits_{[0,\,1]^d} \varphi(y)\,dy\Bigg)^q$$

$$= \|\varphi\|_1^q \sum_{i,j} \frac{|\beta_{ij}|^q}{c_i^q|\Delta_{i,j}|^{rq/d-1}} \int\limits_{[0,\,1]^d} |D^r\varphi(y)|^q\,dy$$

$$= \|\varphi\|_1^q \sum_{i,j} \frac{|\beta_{ij}|^q}{c_i^q} \int\limits_{\Delta_{i,j}} |D^r\varphi_{ij}(x)|^q\,dx = \|\varphi\|_1^q \|f\|_{W_{q,g}^r}^q.$$

Отсюда и из условия $\|\varphi\|_1 \underset{r,d}{\asymp} 1$ следует, что $\|Af\|_{l_q^m} \underset{r,d}{\asymp} \|f\|_{W_{q,g}^r}$. При $q = \infty$ аналогично доказывается, что $\|Af\|_{l_\infty^m} \underset{r,d}{\asymp} \|f\|_{W_{\infty,g}^r}$. Поэтому $\|A|_V\|_{W_{q,g}^r\to l_q^m} \underset{r,d}{\asymp} 1$, $\ker A|_V = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = l_q^m$, т. е. $A|_V : V \to l_q^m$ обратим. Обозначим обратный оператор через B.

Пусть $\Lambda_n \subset L_{p,v}$ — n-мерное подпространство, $E_n : W_{q,g}^r(K) \to \Lambda_n$ — метрический проектор. Рассмотрим отображение $C: l_q^m \to l_p^m$, $C = AE_nB$. Его образ лежит в подпространстве $A(\Lambda_n)$ размерности не больше n. Пусть I — оператор вложения $W_{q,g}^r(K)$ в $L_{p,v}(K)$. Тогда для любого $x \in B_q^m$

$$\|x - Cx\|_{l_p^m} = \|A(I - E_n)B\|_{l_q^m\to l_p^m}$$

$$\leqslant \|B\|_{l_q^m\to W_{q,g}^r}\|I - E_n\|_{W_{q,g}^r\to L_{p,v}}\|A\|_{L_{p,v}\to l_p^m} \underset{r,d}{\lesssim} \frac{N^{r/d-1/q+1/p}}{\|gv\|_\varkappa}\|I - E_n\|_{W_{q,g}^r\to L_{p,v}}.$$

В силу произвольности Λ_n отсюда следует, что

$$d_n(W_{q,g}^r(K),\, L_{p,n}(K)) \underset{r,d}{\gtrsim} \frac{\|gv\|_\varkappa}{N^{r/d-1/q+1/p}} d_n(B_q^m,\, l_p^m).$$

В случаях $p \leqslant \min\{2, q\}$; $1 < q < 2 < p \leqslant \infty$ и $\omega > 1/q$; $2 \leqslant q < p < \infty$ и $\omega > \eta$ положим $N = n$. В случаях $1 < q < 2 < p \leqslant \infty$ и $\omega < 1/q$; $2 \leqslant q < p < \infty$ и $\omega < \eta$ положим $N = \left[n^{p/2}\right]$. Воспользовавшись (2.5), получим, что

$$\frac{\|gv\|_\varkappa}{N^{r/d-1/q+1/p}} d_n(B_q^m,\, l_p^m) \underset{p,q,r,d}{\gtrsim} \|gv\|_\varkappa d_n(W_q^r([0,\,1]^d),\, L_p([0,\,1]^d)).$$

Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору И. Г. Царькову, а также доценту А. С. Кочурову, Е. М. Скорикову и члену-корреспонденту РАН Б. С. Кашину за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихомиров В.М.** Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 304 с.
2. **Pinkus A.** n-widths in approximation theory. Berlin: Springer, 1985. 291 с.
3. **Тихомиров В.М.** Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1987. Т. 14. С. 103–260. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР.)

4. **Майоров В.Е.** Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи мат. наук. 1975. Т. 30, № 6. С. 179–180.
5. **Маковоз Ю.И.** Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве // Мат. сб. 1972. Т. 87 (129), № 1. С. 136–146.
6. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.
7. **Исмагилов Р.С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 3. С. 161–178.
8. **Кашин Б.С.** Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 2. С. 234–251.
9. **Темляков В.Н.** О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 3. С. 544–548.
10. **Темляков В.Н.** Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 314–317.
11. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 1. С. 171–186.
12. **Галеев Э.М.** Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\widetilde{L}_q$ // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 4. С. 251–252.
13. **Галеев Э.М.** Приближение суммами Фурье класса функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки. 1978. Т. 22, вып. 2. С. 197–211.
14. **Куланин Е.Д.** Оценки поперечников функциональных классов малой гладкости: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 1986. 68 с.
15. **Lang J., Mendez O., Nekvinda A.** Asymptotic behavior of the approximation numbers of the Hardy-type operator from L^p to L^q (case $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ or $2 \leqslant p \leqslant q < \infty$) // J. Ineq. Pure Appl. Math. 2004. Vol. 5, no. 1. Article 18. 36 p.
16. **Lifshits M.A., Linde W.** Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Mem. Amer. Math. Soc. 2002. Vol. 157, no. 745. 87 p.
17. **Edmunds D.E., Lang J.** Approximation numbers and Kolmogorov widths of Hardy-type operators in a non-homogeneous case // Math. Nachr. 2006. Vol. 297, no. 7. P. 727–742.
18. **Ломакина Е.Н., Степанов В.Д.** Асимптотическая оценка аппроксимативных и энтропийных чисел одновесового оператора Римана — Лиувилля // Мат. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 52–100.
19. **Отелбаев М.О.** Оценки поперечников по Колмогорову для одного класса весовых пространств // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1270–1273.
20. **Айтенова М.С., Кусаинова Л.К.** Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. I // Мат. журн. Алматы, 2002. Т. 2, № 1. С. 3–9.
21. **Айтенова М.С., Кусаинова Л.К.** Об асимптотике распределения аппроксимативных чисел вложений весовых классов Соболева. II // Мат. журн. Алматы, 2002. Т. 2, № 2. С. 7–14.
22. **Cohen A., DeVore R., Petrushev P., Hong Xu.** Nonlinear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$ // Amer. J. Math. 1999. Vol. 121, no. 3. P. 587–628.
23. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 664 с.
24. **Бирман М.Ш., Соломяк М.З.** Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α // Мат. сб. 1967. Т. 73, № 3. С. 331–355.
25. **Мазья В.Г.** Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 415 с.
26. **Глускин Е.Д.** Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. 1983. Т. 120 (162), № 2. С. 180–189.

Поступила 11.03.2008

Васильева Анастасия Андреевна
канд. физ.-мат. наук
младший науч. сотрудник
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: vasilyeva_nastya@inbox.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 514.7

К ПОСТРОЕНИЮ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНО ВИХРЕВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ЛИНИЯМИ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Строятся классы всех гладких единичных потенциальных векторных полей в областях $R^3, R^3\backslash R^0, R^3\backslash R^1$ на основе метода отображений с учетом особенностей геометрического строения таких полей. Найдены расширения этих классов до классов всех гладких неединичных потенциальных и непотенциальных (поперечно вихревых) полей, линии которых прямолинейны. Обсуждается их связь с гладкими решениями соответствующих систем уравнений.

Ключевые слова: скалярные, векторные, тензорные поля, ротор, потенциальные и поперечно вихревые векторные поля.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. On the construction of potential and transverse vortex vector fields with lines of zero curvature.

Classes of all smooth potential unit vector fields in the domains R^3, $R^3\backslash R^0$, and $R^3\backslash R^1$ are constructed based on the method of mappings with account taken of the special geometric properties of such fields. Extensions of these classes to classes of all smooth nonunit potential and nonpotential (transverse vortex) fields with straight field lines are found. Their connection with smooth solutions of the corresponding systems of equations is discussed.

Keywords: scalar fields, vector fields, tensor fields, curl, potential and transverse vortex vector fields.

Задача работы состоит в том, чтобы найти класс $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$ всех гладких единичных векторных полей $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})$, потенциальных в области D евклидова пространства R^3, при

$$D = R^3, \qquad D = R^3\backslash R^0, \qquad D = R^3\backslash R^1. \tag{1}$$

Здесь поле (скалярное, векторное, тензорное) считается гладким, если оно непрерывно дифференцируемо; через R^0 и R^1 обозначаются соответственно некоторая точка $R^0 \in R^1$ и некоторая прямая в R^3; через $\mathbf{r}$ — радиус-вектор произвольной точки из R^3 относительно R^0, а также и сама точка.

Решение этой задачи представляет интерес для расширения возможностей геометрического подхода (см. [1–3]) к построению векторных полей $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$, исчерпывающих класс всех гладких в D решений системы уравнений

$$|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})| = 1, \qquad \oint\limits_{\mathfrak{L}} (\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}), d\mathbf{r}) = 0 \quad \text{для любого} \quad \mathfrak{L}, \tag{2}$$

в тех случаях, когда полю $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$ можно поставить в соответствие регулярное семейство поверхностей, ортогональных полю, где $\mathfrak{L}$ — замкнутый спрямляемый контур в D. Второе уравнение из (2) в случае односвязных областей D сводится к дифференциальному уравнению.

Вместе с тем описание всех полей класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$ позволяет найти классы всех гладких в D векторных полей, не обязательно единичных и не обязательно потенциальных, но линии которых прямолинейны и ортогональны (в случае непотенциальных полей) их вихревым линиям.

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы математической математики” при финансовой УрО РАН (проект 09-T-1-1004); а также при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00014, 08-01-00213).

1. Линии векторных полей, образующих класс $\mathfrak{T}_{\text{up}}(D)$, как известно (см., например, [1;3;4]) прямолинейны. Различия между полями класса $\mathfrak{T}_{\text{up}}(D)$ обусловлены лишь различиями во взаимной ориентации их линий. Поэтому для построения класса $\mathfrak{T}_{\text{up}}(D)$ можно использовать теорему из [1] и замечание к ней, относящееся к потенциальным полям. Такой подход, однако, достаточно трудоемок даже при $D = R^3$ (см., например, [1; 5; 6]), и его непосредственное использование не оправданно, если строятся потенциальные в D поля. Дело в том, что геометрическое строение гладкого единичного потенциального векторного поля $\boldsymbol{\beta}$, в отличие от продольно вихревого, таково, что полю $\boldsymbol{\beta}$ можно поставить в соответствие регулярное семейство поверхностей, ортогональных линиям поля $\boldsymbol{\beta}$ (см., например, [4]). Взаимная ориентация линий поля $\boldsymbol{\beta}$, совместимая с существованием такого семейства поверхностей, должна подчиняться дополнительным ограничениям (см., например, [7]). Это семейство образовано эквипотенциальными поверхностями $U(\mathbf{r}) = \text{const}$ скалярного поля $U = U(\mathbf{r})$ класса $C^{(2)}(D)$ — потенциала векторного поля $\boldsymbol{\beta}$. Соответствие $\boldsymbol{\beta} \to U$ и обратное соответствие $U \to \boldsymbol{\beta}$ устанавливаются правилами

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} (\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}'), d\mathbf{r}'), \qquad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla} U(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\mathbf{r}_0$ — некоторая фиксированная точка, $\mathbf{r}$ — произвольная точка D, $\mathbf{r}'$ — произвольная точка на пути интегрирования, $\boldsymbol{\nabla}$ — дифференциальный оператор Гамильтона. Первая из формул (3) определяет U как однозначную функцию $\mathbf{r} \in D$, поскольку циркуляция поля $\boldsymbol{\beta}$ по любому замкнутому контуру в силу потенциальности поля $\boldsymbol{\beta}$ (см. (2)) равна нулю.

Установим геометрическое строение единичного потенциального векторного поля $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$, гладкого в R^3 за исключением некоторого множества точек меры ноль, исходя из того, что каждая из линий поля прямолинейна и ортогональна каждой из эквипотенциальных поверхностей скалярного поля $U = U(\mathbf{r})$.

2. Будем полагать сначала, что $\boldsymbol{\beta} \in C^{(1)}(R^3)$, т. е. непрерывно дифференцируемо всюду в R^3. Пусть T — произвольная точка R^3. Линия Γ поля $\boldsymbol{\beta}$, проходящая через точку T, — это прямая. Прямая Γ ортогональна гладкой эквипотенциальной поверхности $\Sigma = \Sigma(T)$ поля $\boldsymbol{\beta}$, проходящей через точку T, и плоскости $\Pi = \Pi(T, \Sigma(T))$, касательной к Σ в точке T (рис. 1). Проведем через прямую Γ пучок плоскостей $M(\Gamma)$. Пусть $\mathcal{P}$ — произвольная плоскость из $M(\Gamma)$, а $\gamma = \gamma(\mathcal{P}, \Sigma(T))$ — линия пересечения $\mathcal{P}$ и $\Sigma(T)$. По построению линия γ проходит через точку T, а прямая $\tau = \mathcal{P} \cap \Pi(T, \Sigma(T))$ как линия пересечения плоскостей $\mathcal{P}$ и Π совпадает с касательной к γ в точке T. Тогда мыслимы две возможности: 1) $\gamma = \gamma(\mathcal{P}, \Sigma(T))$ — не прямая и 2) $\gamma = \gamma(\mathcal{P}, \Sigma(T))$ — прямая, совпадающая с $\tau = \mathcal{P} \cap \Pi(T, \Sigma(T))$. Обсудим эти возможности и установим, к каким именно следствиям приводит реализация каждой из них.

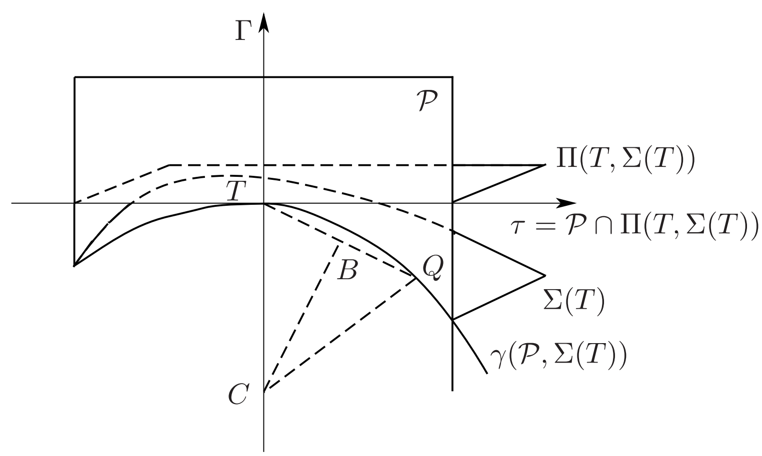


Рис. 1. Иллюстрация к обсуждению геометрического строения единичных векторных полей, потенциальных в R^3.

Пусть γ — плоская кривая, отличная от τ. Возьмем на кривой γ произвольную точку Q, не совпадающую с любой из точек, общих для γ и τ. Построим в $\mathcal{P}$ равнобедренный треугольник CTQ, основание которого — хорда TQ, а вершина $C \in \Gamma$. Возьмем замкнутый контур L, образованный дугой γ_{TQ} кривой γ и сторонами QC, CT треугольника CTQ, имеющими одинаковую длину a. Тогда в силу потенциальности поля $\boldsymbol{\beta}$ справедливо равенство $\oint_L (\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}'), d\mathbf{r}') = 0$. С другой стороны, $\oint_L = \int_{\gamma_{TQ}} + \int_Q^C + \int_C^T$. Здесь первый интеграл в правой части равен нулю, так как поле $\boldsymbol{\beta}$ ортогонально γ, третий равен длине a стороны CT, поскольку $\overrightarrow{CT}$ — отрезок линии Γ поля $\boldsymbol{\beta}$, а $\int_Q^C = -\int_C^Q$. Поэтому $\oint_L = a - \int_C^Q$. Стало быть, циркуляция поля $\boldsymbol{\beta}$ по контуру L равна нулю лишь при $\int_C^Q = a$, т. е. тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{CQ}$ — отрезок линии поля $\boldsymbol{\beta}$. Однако выполнение этого условия предполагает пересечение в точке C линий поля $\boldsymbol{\beta}$, проходящих через точки T и Q (напомним, что $Q \overline{\in} \tau$), а значит и разрыв поля $\boldsymbol{\beta}$ в точке C. Отсюда выводим следующие утверждения.

Следствие 1. *Единичное потенциальное векторное поле $\boldsymbol{\beta}$ не может быть непрерывным в R^3, если существуют линия Γ поля $\boldsymbol{\beta}$, плоскость $\mathcal{P}$, содержащая Γ, и эквипотенциальная поверхность Σ поля $\boldsymbol{\beta}$ такие, что линия пересечения $\mathcal{P} \cap \Sigma$ отлична от прямой.*

Следствие 2. *Линии поля $\boldsymbol{\beta}$, взятого в точках плоскости $\mathcal{P} \subset R^3$, пересекаются в единственной точке $R^0 \in \mathcal{P}$, если линии пересечения эквипотенциальных поверхностей поля $\boldsymbol{\beta}$ плоскостью $\mathcal{P}$ — окружности с центром в точке R^0.*

Следствие 3. *Точка R^0 будет единственной точкой пересечения линий поля $\boldsymbol{\beta}$ в R^3, если эквипотенциальные поверхности поля $\boldsymbol{\beta}$ — сферы с центром в точке R^0, и наоборот, если векторное поле $\boldsymbol{\beta}$ терпит разрыв только в одной точке $R^0 \in R^3$, то его эквипотенциальные поверхности — сферы с центром в точке R^0.*

Допустим теперь, что $\gamma(\mathcal{P}, \Sigma(T)) = \mathcal{P} \cap \Sigma(T)$ — прямая, совпадающая с $\tau = \mathcal{P} \cap \Pi(T, \Sigma(T))$.

Пусть T' — произвольная точка линии Γ поля $\boldsymbol{\beta}$, отличная от T (рис. 2). Если поле $\boldsymbol{\beta}$ непрерывно в плоскости $\mathcal{P}$, то линия пересечения $\gamma' = \gamma'(\mathcal{P}, \Sigma(T')) = \mathcal{P} \cap \Sigma(T')$ плоскости $\mathcal{P}$ и эквипотенциальной поверхности $\Sigma(T')$ поля $\boldsymbol{\beta}$, проходящей через точку T', есть в силу следствия 1 прямая, параллельная прямой γ. На прямой γ' возьмем произвольную точку Q', а на прямой γ — точку Q так, чтобы Q и Q' лежали на прямой, параллельной линии Γ поля $\boldsymbol{\beta}$. Рассмотрим в $\mathcal{P}$ замкнутый контур L, образованный направленными отрезками $\overrightarrow{TT'}$, $\overrightarrow{T'Q'}$, $\overrightarrow{Q'Q}$, $\overrightarrow{QT}$, и возьмем циркуляцию $\oint_L = \int_T^{T'} + \int_{T'}^{Q'} + \int_{Q'}^{Q} + \int_Q^T$ поля $\boldsymbol{\beta}$ по контуру L. Здесь второй и четвертый интегралы равны нулю, поскольку отрезки $\overrightarrow{T'Q'}$, $\overrightarrow{QT}$ принадлежат эквипотенциальным поверхностям $\Sigma(T')$, $\Sigma(T)$ поля $\boldsymbol{\beta}$, первый интеграл равен расстоянию $|TT'|$ между точками TT', поскольку $\overrightarrow{TT'}$ — отрезок линии поля $\boldsymbol{\beta}$, поэтому $\oint_L = |TT'| + \int_{Q'}^{Q} (\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}), d\mathbf{r})$. Стало быть, $\oint_L = 0$, если и только если $\overrightarrow{QQ'}$ — отрезок линии поля $\boldsymbol{\beta}$. Последнее возможно в силу произвольности точек T', Q' тогда и только тогда, когда линии поля $\boldsymbol{\beta}$ в плоскости $\mathcal{P}$ — сонаправленные параллельные прямые. Отсюда выводим

Следствие 4. *Если единичное потенциальное векторное поле $\boldsymbol{\beta}$ непрерывно в некоторой плоскости $\mathcal{P} \subset R^3$, содержащей хотя бы одну линию поля, то линии поля $\boldsymbol{\beta}$ в $\mathcal{P}$ — сонаправленные параллельные прямые.*

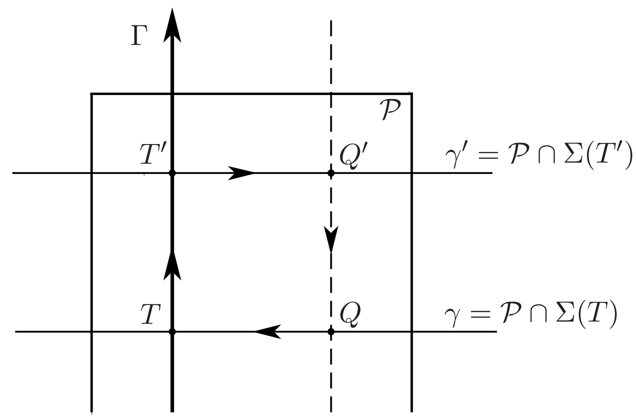


Рис. 2. Иллюстрация к обсуждению геометрического строения гладких единичных векторных полей, потенциальных в R^3.

Следствие 5. *Если единичное потенциальное векторное поле* $\boldsymbol{\beta} \in C^{(1)}(R^3)$, *то линии поля* $\boldsymbol{\beta}$ *— сонаправленные параллельные прямые. Поле* $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{T}_{\rm up}(R^3)$, *если и только если* $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\beta}_0$, *где* $\boldsymbol{\beta}_0$ *— любой единичный вектор.*

Предложение 1. *Если единичное векторное поле* $\boldsymbol{\beta}$ *определено, непрерывно и потенциально в окрестности некоторой плоскости* $\mathcal{P}$, *содержащей линию поля* $\boldsymbol{\beta}$, *то все линии поля, проходящие через точки плоскости* $\mathcal{P}$, *— сонаправленные прямые.*

3. Итак, от формы линий $\gamma = \mathcal{P} \cap \Sigma$, где $\mathcal{P} \in M(\Gamma)$, зависят не только взаимная ориентация линий единичного потенциального векторного поля, но и свойства непрерывности поля. Учитывая это обстоятельство, можно сформулировать ряд предложений относительно геометрического строения единичных потенциальных векторных полей, непрерывно дифференцируемых и в остальных областях D, указанных в (1).

Во-первых, в силу следствия 3 справедливо

Предложение 2. *Класс* $\mathfrak{T}_{\rm up}(R^3 \backslash R^0)$ *векторных полей из* $C^{(1)}(R^3 \backslash R^0)$ *исчерпывается полями описываемых ниже семейств:* $\mathfrak{T}_{\rm up\,ss}(R^3 \backslash R^0)$ *и* $\mathfrak{T}_{\rm up\,as}(R^3 \backslash R^0)$, *принадлежащих* $C^{(1)}(R^3 \backslash R^0)$. *Первое образовано сферически симметричными полями, линии которых — полупрямые, только выходящие из точки* $R^0 \in R^3$, *или только входящие в* R^0. *Второе образовано полями* $\boldsymbol{\beta}$ *класса* $\mathfrak{T}_{\rm up}(R^3)$ *с выколотой точкой* R^0, *лежащей на линии поля, которая проходит через* R^0; *эти поля аксиально симметричны относительно этой линии поля.*

Во-вторых, для описания полей $\boldsymbol{\beta}$, непрерывно дифференцируемых в $D = R^3 \backslash R^1$, множество таких полей разобьем на два описываемых ниже семейства: $\mathfrak{T}^1_{\rm up} = \mathfrak{T}^1_{\rm up}(R^3 \backslash R^1)$ и $\mathfrak{T}^2_{\rm up} = \mathfrak{T}^2_{\rm up}(R^3 \backslash R^1)$, вложенных в $C^{(1)}(R^3 \backslash R^1)$. Поле $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{T}^1_{\rm up}$, если среди линий поля $\boldsymbol{\beta}$ найдется линия, не пересекающая прямую R^1. В противном случае, когда каждая линия поля $\boldsymbol{\beta}$ лежит на прямой, пересекающей R^1, поле $\boldsymbol{\beta}$ относится к семейству $\mathfrak{T}^2_{\rm up}$.

Пусть $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{T}^1_{\rm up}$ и пусть Γ — такая линия поля $\boldsymbol{\beta}$, что $\Gamma \cap R^1 = \varnothing$. Тогда Γ и R^1 лежат в параллельных плоскостях $\mathcal{P}(\Gamma)$ и $\mathcal{P}(R^1)$ (рис. 3). Поскольку $\boldsymbol{\beta}$ непрерывно в $\mathcal{P}(\Gamma)$, то линии поля $\boldsymbol{\beta}$ в $\mathcal{P}(\Gamma)$ в силу предложения 1 — сонаправленные прямые, параллельные Γ. Учитывая непрерывность поля $\boldsymbol{\beta}$ в $R^3 \backslash R^1$, заключаем, что линии поля $\boldsymbol{\beta}$ в $R^3 \backslash R^1$ лежат в плоскостях, параллельных $\mathcal{P}(\Gamma)$, и в каждой такой плоскости являются сонаправленными прямыми.

Если линии поля $\boldsymbol{\beta}$, лежащие в плоскостях, параллельных $\mathcal{P}(\Gamma)$, повернуты относительно линий в плоскости $\mathcal{P}(\Gamma)$ на некоторый угол ψ, зависящий от расстояния до плоскости $\mathcal{P}(\Gamma)$, то эта зависимость описывается гладкой функцией расстояния в силу гладкости поля $\boldsymbol{\beta}$ в $R^3 \backslash R^1$.

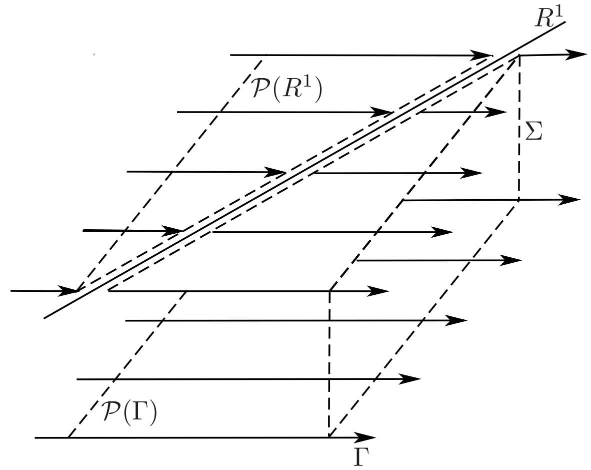


Рис. 3. Иллюстрация к обсуждению геометрического строения полей семейства $\mathfrak{L}^1_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$.

Геометрическое строение такого поля изучено в [3, разд. 2, с. 112]. Полагая там в качестве области D полупространство, ограниченное плоскостью $\mathcal{P}(R^1)$ и содержащее $\mathcal{P}(\Gamma)$, получаем, что поле $\boldsymbol{\beta}$ является потенциальным в D тогда и только тогда, когда $\psi \equiv 0$ в D и, значит, когда в D все линии поля сонаправлены. Что же касается плоскости $\mathcal{P}(R^1)$, то здесь геометрическое строение поля $\boldsymbol{\beta}$ в силу непрерывности $\boldsymbol{\beta}$ в $R^3\backslash R^1$ повторяет строение поля $\boldsymbol{\beta}$ в $\mathcal{P}(\Gamma)$ с исключенной прямой R^1 (рис. 3). Следовательно, в $\mathcal{P}(R^1)$ поле $\boldsymbol{\beta}$ поддается доопределению на прямой R^1 по непрерывности. Стало быть, проведенные выше рассуждения и выводы, основанные на работе [3], остаются в силе и в $D = R^3$.

Резюмируя сказанное, сформулируем следующее

Предложение 3. *Семейство $\mathfrak{T}^1_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1) \subset C^{(1)}(R^3\backslash R^1)$ векторных полей исчерпывается сужениями полей класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(R^3)$ на область $D = R^3\backslash R^1$.*

Что же касается полей семейства $\mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}$, то к этому семейству, по определению, относится поле $\boldsymbol{\beta}$, если каждая его линия Γ принадлежит прямой, пересекающей R^1, и не имеет точек пересечения с другими линиями поля $\boldsymbol{\beta}$ вне прямой R^1. Детальное описание способа построения таких полей отложим до п. 5. Здесь же приведем лишь следующее замечание.

З а м е ч а н и е 1. Некоторое представление о геометрическом строении полей семейства $\mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}$ можно получить, взяв пучок плоскостей, проходящих через R^1, а затем каждую плоскость пучка заполнить двумя семействами непересекающихся полупрямых, начинающихся на прямой R^1.

4. Для описания полей в области $D = R^3\backslash R^0$, а затем (см. ниже п. 5) и в области $D = R^3\backslash R^1$ используем декартову систему координат с началом в точке R^0 и базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, орт $\mathbf{e}_3$ которого направлен вдоль некоторой прямой R^1, проходящей через R^0. Через (r_1, r_2, r_3) обозначим декартовы координаты произвольной точки пространства R^3 относительно этой системы координат, через (ρ, θ, z) — цилиндрические координаты точки, а через $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ — соответствующий ортонормированный базис, где

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos\theta + \mathbf{e}_2 \sin\theta, \qquad \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_1 \sin\theta + \mathbf{e}_2 \cos\theta, \qquad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_3. \tag{4}$$

Для перехода к цилиндрическим координатам используем формулы $r_1 = \rho\cos\theta$, $r_2 = \rho\sin\theta$, $r_3 = z$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \theta, z) = \rho\mathbf{e}_\rho(\theta) + z\mathbf{e}_z$. Через $\widehat{\Omega}(\psi(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r}))$ здесь обозначим тензорное поле вращений на угол $\psi(\mathbf{r})$ вокруг оси, проходящей через точку $\mathbf{r}$ в направлении $\mathbf{l}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1 \cos\Phi(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_2 \sin\Phi(\mathbf{r})$. Отображаемое поле возьмем в виде $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{e}_3$ в R^3.

Следствие 5, предложение 2 и теорема из [3, с. 15] позволяют сформулировать нижеследующую теорему с описанием всех полей, порождающих класс всех гладких в $D = R^3\backslash R^0$ решений системы уравнений (2), в терминах гладких отображений.

Теорема 1. *Соответствие* $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$ *определяет в* $R^3\backslash R^0$ *векторное поле класса* $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^0)$, *если и только если*

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \widehat{\Omega}(\psi(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r}))\mathbf{e}_3$$

и при этом или $\{\psi(\mathbf{r}) \equiv \psi_0,\ \Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi_0,\ \psi_0,\ \Phi_0$ *— произвольные постоянные*$\}$, *или* $\{\psi(\mathbf{r})$ *определяется уравнениями* $\cos\psi(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{r})\backslash|\mathbf{r}|$, $\sin\psi(\mathbf{r}) = |[\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]|/|\mathbf{r}|$; $\Phi(\mathbf{r})$ *при* $\mathbf{r} \neq \pm|\mathbf{r}|\mathbf{e}_3$ *определяется уравнениями* $\cos\Phi(\mathbf{r}) = -(\mathbf{e}_2, \mathbf{r})/|[\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]|$, $\sin\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{r})/|[\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]|$, *а при* $\mathbf{r} = \pm|\mathbf{r}|\mathbf{e}_3$ *следует положить* $\Phi(\mathbf{r}) \equiv \Phi_0$, *где* Φ_0 *— произвольная постоянная*$\}$.

5. Займемся описанием полей семейства $\mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}$. Принимая во внимание их геометрическое строение (см. замечание 1) и следуя методу отображений, введем тензорное поле вращений $\widehat{\Omega}(\mathbf{r}) = \widehat{\Omega}(\psi(\mathbf{r}), \mathbf{l}(\mathbf{r}))$ на угол $\psi(\mathbf{r})$ теперь вокруг оси, проходящей через точку $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \theta, z)$ в направлении

$$\mathbf{l}(\mathbf{r}) = [\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]/|[\mathbf{e}_3, \mathbf{r}]| = \mathbf{e}_\theta(\theta). \tag{5}$$

Тогда из формулы (26) работы [3] вытекает следующее

Предложение 4. *Векторное поле* $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$ *принадлежит семейству* $\mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$ *тогда и только тогда, когда* 1) $\boldsymbol{\beta}$ *как функция* $\mathbf{r} \in R^3\backslash R^1$ *есть гладкое отображение поля* $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \widehat{\Omega}(\mathbf{r})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_3 \cos\psi(\mathbf{r}) + [\mathbf{l}(\mathbf{r}), \mathbf{e}_3] \sin\psi(\mathbf{r}); \tag{6}$$

2) *циркуляция поля* $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$ *по любому замкнутому контуру в* $R^3\backslash R^1$ *равна нулю.*

Выразим поле (6) в цилиндрических координатах, используя формулы (4), (5) и принимая обозначение

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}(\rho, \theta, z)) = \psi(\rho, \theta, z). \tag{7}$$

Получим

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}(\rho, \theta, z)) = \boldsymbol{\beta}(\theta, \psi(\rho, \theta, z)) = \boldsymbol{\beta}(\rho, \theta, z) = \mathbf{e}_z \cos\psi(\rho, \theta, z) + \mathbf{e}_\rho(\theta) \sin\psi(\rho, \theta, z). \tag{8}$$

Заметим, что последнее из условий предложения 4 в случае произвольного стягиваемого в точку контура в $R^3\backslash R^1$ эквивалентно в силу теоремы Стокса (см., например, [8]) условию

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}(\rho, \theta, z) = [\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\beta}(\rho, \theta, z)] = 0 \quad \text{в} \quad R^3\backslash R^1, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_\rho(\theta)\partial/\partial\rho + \rho^{-1}\mathbf{e}_\theta(\theta)\partial/\partial\theta + \mathbf{e}_z\partial/\partial z$. Ротор поля (8) в явном виде выражается формулой

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}(\rho, \theta, z) = -\frac{1}{\rho}\big(\mathbf{e}_\rho(\theta)\sin\psi(\rho, \theta, z) + \mathbf{e}_z\cos\psi(\rho, \theta, z)\big)\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(\rho, \theta, z)$$

$$+\,\mathbf{e}_\theta(\theta)\Big(\sin\psi(\rho, \theta, z)\frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\psi(\rho, \theta, z)\frac{\partial}{\partial z}\Big)\psi(\rho, \theta, z).$$

Стало быть, выбор скалярного поля $\psi(\mathbf{r})$ (7) должен в силу (9) подчиняться требованиям

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(\rho, \theta, z) = 0, \qquad \Big(\sin\psi(\rho, \theta, z)\frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\psi(\rho, \theta, z)\frac{\partial}{\partial z}\Big)\psi(\rho, \theta, z) = 0 \tag{10}$$

в $R^3\backslash R^1$. Первое из них удовлетворяется, если скалярное поле (7) аксиально симметрично относительно прямой R^1, т. е.

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}(\rho, \theta, z)) = \psi(\rho, z). \tag{11}$$

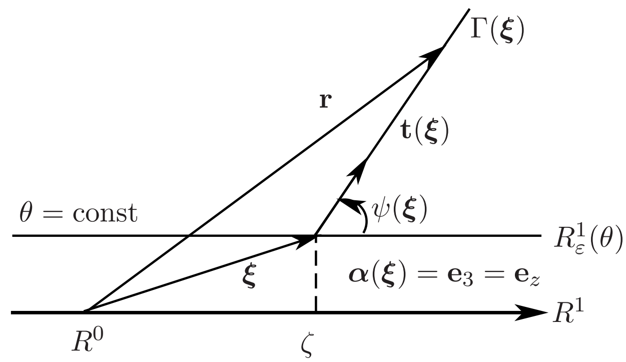


Рис. 4. Иллюстрация к построению векторных полей семейства $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{up}}(R^3 \backslash R^1)$.

Поле (8) при таком ψ определяется формулой

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}(\rho,\theta,z)) = \boldsymbol{\beta}(\theta,\psi(\rho,z)) = \boldsymbol{\beta}(\rho,\theta,z) = \mathbf{e}_z \cos\psi(\rho,z) + \mathbf{e}_\rho(\theta)\sin\psi(\rho,z), \tag{12}$$

описывающей аксиально симметричное векторное поле, т. е. самосовместимое при повороте на любой угол вокруг прямой R^1. Второе из требований (10) удовлетворяется, если производная скалярного поля (11) по направлению $\boldsymbol{\beta}(\rho,\theta,z)$ при фиксированном θ равна нулю, т. е. когда линии поля (12) в плоскости $\theta = \mathrm{const}$ прямолинейны.

Отметим также, что при непрерывном в $R^3 \backslash R^1$ поле (11) циркуляция поля (12) по любому нестягиваемому в $R^3 \backslash R^1$ контуру $\mathfrak{L}$ равна нулю, поскольку $\oint_{\mathfrak{L}} = \oint_{\mathfrak{L}_\varepsilon}$, где $\mathfrak{L}_\varepsilon = \{\mathbf{r}' :\ \mathbf{r}' = \varepsilon\mathbf{e}_\rho(\theta') + z\mathbf{e}_z,\ 0 \le \theta' \le 2\pi\}$ — окружность радиуса ε в плоскости $z = \mathrm{const}$ с центром в точке $C = R^1 \cap (z = \mathrm{const})$, а циркуляция по контуру $\mathfrak{L}_\varepsilon$ равна нулю, так как $(\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}'), d\mathbf{r}') = \varepsilon(\boldsymbol{\beta}(\varepsilon,\theta',z), \mathbf{e}_\theta(\theta'))d\theta' = 0$ при любом $\theta' \in [0, 2\pi]$.

Таким образом, векторное поле (12) при заданном достаточно гладком скалярном поле ψ (11), удовлетворяющем второму из требований (10), есть гладкое решение системы уравнений (2) в области $D = R^3 \backslash R^1$. Вместе с тем второе из требований (10) как ограничение (11) на само поле ψ затрудняет его использование для выбора ψ. Поэтому оправданным представляется несколько иной подход к заданию поля (12), аналогичный предложенному в [1], в рамках которого непосредственно учитываются форма линий, симметрия поля (12) и ограничения (11) на поле ψ выражаются проще.

6. Пусть $R^1_\varepsilon(\theta)$ — прямая в полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$, параллельная прямой R^1 и отстоящая от R^1 на достаточно малое расстояние ε (рис. 4). Через $\boldsymbol{\xi}$ обозначим радиус-вектор произвольной точки прямой $R^1_\varepsilon(\theta)$ и саму точку, где

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\varepsilon,\theta,\zeta) = \varepsilon\mathbf{e}_\rho(\theta) + \zeta\mathbf{e}_z. \tag{13}$$

На прямой $R^1_\varepsilon(\theta)$ зададим векторное поле

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\xi}}, \tag{14}$$

используя отображение (6) при $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi}$. В цилиндрических же координатах поле (14) выражается в силу (12), (13) формулой

$$\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}(\varepsilon,\theta,\zeta)) = \mathbf{t}(\theta,\psi(\varepsilon,\zeta)) = \mathbf{t}(\varepsilon,\theta,\zeta) = \mathbf{e}_z\cos\psi(\varepsilon,\zeta) + \mathbf{e}_\rho(\theta)\sin\psi(\varepsilon,\zeta). \tag{15}$$

Через каждую точку $\boldsymbol{\xi} \in R^1_\varepsilon(\theta)$ в направлении $\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi})$ проведем полупрямую $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ (см. рис. 4), лежащую в полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$ и определяемую в этой полуплоскости уравнением

$$[\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}, \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi})] = 0, \tag{16}$$

которое при заданном $\boldsymbol{\xi}$ устанавливает соответствие между точкой $\boldsymbol{\xi} \in R^1_\varepsilon(\theta)$ и точками $\mathbf{r}$ этой полуплоскости. Уравнение (16) эквивалентно скалярному уравнению

$$(z-\zeta)\sin\psi(\varepsilon,\zeta) - (\rho-\varepsilon)\cos\psi(\varepsilon,\zeta) = 0. \tag{17}$$

Пусть

$$\psi(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\boldsymbol{\xi}(\varepsilon,\theta,\zeta)) = \psi(\varepsilon,\zeta) \tag{18}$$

такая функция, что через каждую точку $\mathbf{r}$ полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$ проходит и только одна полупрямая $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. Тогда уравнение (16) устанавливает неявно и обратное соответствие $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})$, так как с каждой точкой $\mathbf{r}$ полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$ оно связывает точку $\boldsymbol{\xi} \in R^1_\varepsilon(\theta)$ посредством полупрямой $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$. Полупрямые $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$ можно рассматривать как линии единичного векторного поля $\mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}))$. Учитывая это, а также формулы (15), каждой точке $\mathbf{r}(\rho,\theta,z)$ полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$ поставим в соответствие единичный вектор

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \mathbf{t}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r})) = \mathbf{t}(\theta,\psi(\varepsilon,\zeta(\mathbf{r}))) \tag{19}$$

и зададим тем самым в полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$ единичное векторное поле $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$. Линии его прямолинейны по построению, если $\mathbf{t}$ как функция $\boldsymbol{\xi}$ выражается формулами (15), а зависимость $\zeta = \zeta(\mathbf{r}) = \zeta(\varepsilon,\rho,z)$ координаты ζ вектора $\boldsymbol{\xi}$ (13) от $\mathbf{r}(\rho,\theta,z)$ при заданной функции $\psi(\boldsymbol{\xi})$ (18) определяется неявно векторным уравнением (16) или скалярным уравнением (17).

Установим свойства функции $\psi(\boldsymbol{\xi})$ (18), необходимые и достаточные для того, чтобы поле $\boldsymbol{\beta}$, определяемое по правилу (19), принадлежало семейству $\mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$.

Во-первых, приведем

З а м е ч а н и е 2. Линии поля $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$ в силу определения семейства $\mathfrak{T}^2_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$ лежат на прямых, пересекающих прямую R^1, поэтому выбор функций $\psi(\boldsymbol{\xi})$ (18) должен подчиняться одному из ограничений

$$0 < \psi(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\varepsilon,\zeta) < \pi; \tag{20}$$

$$\pi < \psi(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\varepsilon,\zeta) < 2\pi. \tag{21}$$

Во-вторых, сформулируем и докажем

Предложение 5. *Через каждую точку* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho,\theta,z)$ *полуплоскости* $\theta = \mathrm{const}$ *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *и* $\rho \ge \varepsilon$ *проходит не более одной полупрямой*:

$$\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \{(\rho,\theta,z)\colon\ \rho \ge \varepsilon,\ z = \zeta + (\rho-\varepsilon)\operatorname{ctg}\psi(\varepsilon,\zeta)\}, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\varepsilon,\theta,\zeta)$, *если и только если* $\psi(\boldsymbol{\xi}) = \psi(\varepsilon,\zeta)$ *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *удовлетворяет ограничениям* (20) (*ограничениям* (21)), *и как функция переменного* ζ *не возрастает.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что для справедливости утверждения в предложении 4 нужно, чтобы полупрямые $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$, $\Gamma(\boldsymbol{\xi}')$ при любых $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}' \in R^1_\varepsilon(\theta)$, $\boldsymbol{\xi} \ne \boldsymbol{\xi}'$ в полуплоскости $\theta = \mathrm{const}$ не пересекались. Ясно также, что условия предложения 5 необходимы и достаточны для выполнения этого требования. □

В третьих, в качестве следствия предложения 5 сформулируем

Предложение 6. *Для гладких функций* $\psi(\varepsilon,\zeta)$ *при условиях предложения* 5 *через каждую точку* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho,\theta,z)$, *где* $\rho \ge \varepsilon$, *полуплоскости* $\theta = const$ *проходит единственная полупрямая* $\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = \Gamma(\boldsymbol{\xi}(\varepsilon,\theta,\zeta))$ (22) *тогда и только тогда, когда функция* $\psi(\varepsilon,\zeta)$ *при любом фиксированном* ε *и любом* $\zeta \in R$ *имеет непрерывную неположительную производную* $\psi'(\varepsilon,\zeta)$.

При условиях предложения 6 уравнение

$$z - u(\varepsilon, \zeta, \rho) = 0, \tag{23}$$

где $u(\varepsilon,\zeta,\rho) = \zeta + (\rho - \varepsilon)\operatorname{ctg}\psi(\varepsilon,\zeta)$, при любом фиксированном ε и любых фиксированных $\rho \geq \varepsilon$, $z \in R$ имеет единственное решение $\zeta = \zeta(\varepsilon,\rho,z)$, поскольку для любой точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho,\theta,z)$, где $\rho \geq \varepsilon$, найдется единственная полупрямая $\Gamma(\boldsymbol{\xi})$, проходящая через точку $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\varepsilon,\theta,\zeta)$. Учитывая это и теорему об обратной функции, заключаем, что справедливо

Предложение 7. *При условиях предложения* 6 *зависимость* ζ *от переменных* $\rho \geq \varepsilon$, $z \in R$, *определяемая уравнением* (17) *или эквивалентным ему уравнением* (23), *описывается непрерывной функцией* $\zeta = \zeta(\varepsilon,\rho,z)$ *своих аргументов, имеющей при* $\rho \geq \varepsilon$, $z \in R$ *непрерывные производные*:

$$\zeta'_\rho(\varepsilon,\rho,z) = -\frac{u'_\rho(\varepsilon,\zeta,\rho)}{u'_\zeta(\varepsilon,\zeta,\rho)}\bigg|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)}, \qquad \zeta'_z(\varepsilon,\rho,z) = \frac{1}{u'_\zeta(\varepsilon,\zeta,\rho)}\bigg|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)},$$

где

$$u'_\rho(\varepsilon,\zeta,\rho) = \operatorname{ctg}\psi(\varepsilon,\zeta),$$
$$u'_\zeta(\varepsilon,\zeta,\rho) = 1 - (\rho-\varepsilon)[1+\operatorname{ctg}^2\psi(\varepsilon,\zeta)]\psi'(\varepsilon,\zeta).$$

Отметим также, что функция

$$\psi(\rho,\theta,z) = \psi(\rho,z) = \psi(\varepsilon,\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)}$$

удовлетворяет равенствам, выражающим требования (10), при любом фиксированном ε и любых $\rho \geq \varepsilon$, $\theta \in [0,2\pi)$, $z \in R$. В этом нетрудно убедиться путем непосредственной проверки, подставляя в равенства (10) выражения $\partial\psi(\rho,\theta,z)/\partial\theta = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\psi(\rho,\theta,z) = \zeta'_\rho(\varepsilon,\rho,z)\psi'(\varepsilon,\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)} = -\frac{u'_\rho(\varepsilon,\zeta,\rho)\psi'(\varepsilon,\zeta)}{u'_\zeta(\varepsilon,\zeta,\rho)}\bigg|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi(\rho,\theta,z) = \zeta'_z(\varepsilon,\rho,z)\psi'(\varepsilon,\zeta)\Big|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)} = \frac{\psi'(\varepsilon,\zeta)}{u'_\zeta(\varepsilon,\zeta,\rho)}\bigg|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)}.$$

Формулы (19), (15) и предложения 3–7 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Соответствие* $\mathbf{r} \to \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})$ *определяет в* $R^3\backslash R^1$ *векторное поле класса* $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$ *тогда и только тогда, когда оно устанавливается правилом*

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\beta}_0 \quad \textit{в} \quad R^3\backslash R^1,$$

где $\boldsymbol{\beta}_0$ — *фиксированный единичный вектор, либо правилом*

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}(\rho,\theta,z)) = \boldsymbol{\beta}(\rho,\theta,z) = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big\{[\mathbf{e}_z\cos\psi(\varepsilon,\zeta) + \mathbf{e}_\rho(\theta)\sin\psi(\varepsilon,\zeta)]\Big|_{\zeta=\zeta(\varepsilon,\rho,z)}\Big\},$$

при условиях:

(1) *функция* $\psi(\varepsilon,\zeta)$ *независимой переменной* ζ *определена, непрерывна, имеет непрерывную неположительную производную при* $\zeta \in R$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *ограничена*: $\psi(\varepsilon,\zeta) \in (0,\pi)$ *или* $\psi(\varepsilon,\zeta) \in (\pi,2\pi)$;

(2) *функция* $\zeta(\varepsilon,\rho,z)$ *переменных* ρ, z *при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *и любых* $\rho \geq \varepsilon$, $z \in R$ *определяется неявно уравнением*

$$z - \zeta - (\rho-\varepsilon)\operatorname{ctg}\psi(\varepsilon,\zeta) = 0;$$

(3) *существует предел* $\lim_{\varepsilon\to+0}\psi(\varepsilon,\zeta(\varepsilon,\rho,z))$, *отличный от* $0,\pi,2\pi$.

Примером полей из класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(R^3\backslash R^1)$ могут служить поля

$$\boldsymbol{\beta}(\rho,\theta,z)=(-1)^n[\mathbf{e}_z\cos\psi_0+\mathbf{e}_\rho(\theta)\sin\psi_0] \qquad (n=0,1),$$

сконструированные посредством функций $\psi(\varepsilon,\zeta)\equiv\psi_0+n\pi$, где ψ_0 — произвольная постоянная из интервала $(0,\pi)$, а также поля

$$\boldsymbol{\beta}(\rho,\theta,z)=\frac{(-1)^n[z\mathbf{e}_z+(\rho+a)\mathbf{e}_\rho(\theta)]}{\sqrt{z^2+(\rho+a)^2}} \qquad (n=0,1),$$

сконструированные посредством функций

$$\psi(\varepsilon,\zeta)=\operatorname{arcctg}\left[\frac{\zeta}{\varepsilon+a}\right]+n\pi,$$

где a — неотрицательная постоянная.

7. Поля класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$, описание которых приводится в теоремах 1–3 при D, определяемых формулами (1), исчерпывают класс всех гладких в каждой из этих областей решений системы уравнений (2). Система (2) нелинейна из-за условия единичности искомого поля $\boldsymbol{\beta}$. Нелинейность задачи обычно затрудняет ее решение, если исходить из функциональных подходов к решению подобных уравнений. Иное дело, когда подход основывается на использовании специфики геометрического строения, свойственного единичному потенциальному векторному полю, в рамках которого условие $|\boldsymbol{\beta}|=1$ упрощает, а не усложняет задачу. В каких-то случаях, в зависимости от задаваемой области D, решение получается путем непосредственного конструирования полей с помощью метода отображений, в каких-то, например как в теореме 2, сводится к решению нелинейного функционального уравнения, а не уравнения (или уравнений) с частными производными. Кроме того, найденные классы полей можно расширить до классов $\mathfrak{T}_{\mathrm{op}}(D)$ и $\mathfrak{T}_{\mathrm{o}}(D)$ всех гладких потенциальных, а также непотенциальных[2] поперечно вихревых в D полей $\mathbf{b}$, не обязательно единичных, но линии которых прямолинейны.

Действительно, если σ — знакоопределенное достаточно гладкое скалярное поле в D, то преобразование $\sigma\boldsymbol{\beta}$ не изменяет форму и взаимное расположение линий поля $\boldsymbol{\beta}\in\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$, но вихревые свойства поля $\mathbf{b}=\sigma\boldsymbol{\beta}$ могут отличаться от вихревых свойств поля $\boldsymbol{\beta}$. Реализация этого подхода и позволяет описать указанные расширения следующими теоремами.

Теорема 3. *Для любой из областей D, определенных в* (1), *соответствие $\mathbf{r}\to\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{r})$ определяет в D потенциальное поле класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{op}}(D)$, линии которого прямолинейны, если и только если это соответствие устанавливается правилом*

$$\mathbf{b}(\mathbf{r})=\sigma(\mathbf{r})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}),$$

где

(1) $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})\in\mathfrak{T}_{\mathrm{up}}(D)$;

(2) $\sigma(\mathbf{r})=\mu(U)\Big|_{U=U(\mathbf{r})}$ *в случае* $D=R^3$, $D=R^3\backslash R^0$;

$\sigma(\mathbf{r})=d\mu(U)/dU\Big|_{U=U(\mathbf{r})}$ *в случае* $D=R^3\backslash R^1$ *и поле σ как функция переменной $\mathbf{r}$ определено всюду в D, не меняет знак, непрерывно дифференцируемо, отлично от нуля почти всюду в D, а скалярное поле $U=U(\mathbf{r})\in C^{(2)}(D)$ есть скалярный потенциал поля $\boldsymbol{\beta}$.*

Теорема 4. *Для любой из областей D, определенных в* (1), *соответствие $\mathbf{r}\to\mathbf{b}=\mathbf{b}(\mathbf{r})$ определяет в D поперечно вихревое векторное поле класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{o}}(D)$, линии которого прямолинейны, если и только если это соответствие устанавливается правилом*

$$\mathbf{b}(\mathbf{r})=\sigma(\mathbf{r})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}),$$

[2]Под полем $\mathbf{b}\in\mathfrak{T}_{\mathrm{o}}(D)$ здесь подразумевается векторное поле $\mathbf{b}$, линии которого всюду в D ортогональны линиям поля $\operatorname{rot}\mathbf{b}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{b}\neq 0$ почти всюду в D.

где

(1) $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{up}}(D)$;

(2) *скалярное поле* $\sigma(\mathbf{r})$ *всюду в* D *определено, не меняет знак, непрерывно дифференцируемо, причем* $\sigma(\mathbf{r})$ *и* $[\boldsymbol{\nabla}\sigma(\mathbf{r}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})]$ *отличны от нуля почти всюду в* D.

Поля класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{op}}(D)$ исчерпывает класс всех решений системы уравнений

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\nabla})\frac{\mathbf{b}(\mathbf{r})}{|\mathbf{b}(\mathbf{r})|} = 0, \qquad \oint\limits_{\mathfrak{L}} (\mathbf{b}(\mathbf{r}), d\mathbf{r}) = 0 \text{ для любого } \mathfrak{L}$$

при условиях $\mathbf{b}(\mathbf{r}) \in C^{(1)}(D)$, $|\mathbf{b}(\mathbf{r})| \neq 0$ почти всюду в D, где $\mathfrak{L}$ — спрямляемый замкнутый контур в D. А поля класса $\mathfrak{T}_{\mathrm{o}}(D)$ исчерпывают класс всех решений системы уравнений

$$(\mathbf{b}(\mathbf{r}), \boldsymbol{\nabla})\frac{\mathbf{b}(\mathbf{r})}{|\mathbf{b}(\mathbf{r})|} = 0, \qquad (\mathbf{b}(\mathbf{r}), \operatorname{rot}\mathbf{b}(\mathbf{r})) = 0$$

при тех же условиях на $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ и дополнительном условии $\operatorname{rot}\mathbf{b}(\mathbf{r}) \neq 0$ почти всюду в D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 82–91.
2. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Способ построения векторных полей с определенными вихревыми свойствами с помощью гладких отображений // Материалы Уфимской междунар. математической конф., посвященной памяти А. Ф. Леонтьева. Уфа: ИМВЦ, 2007. Т. 1. С. 48–49.
3. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 15, № 1. С. 111–121.
4. **Аминов Ю.А.** Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.
5. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Продольно вихревые единичные векторные поля из класса аксиально симметричных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 92–98.
6. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R^3 // Изв. Сарат. ун-та. Новая сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 11–23.
7. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Класс всех гладких единичных векторных полей, потенциальных в R^3 // Тр. X Междунар. науч. конф. “Современные проблемы математики, механики, информатики”. Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. С. 20–22.
8. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Российский государственный профессионально-педагогический университет,
г. Екатеринбург

Поступила 22.01.2010

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 514.7

КЛАСС СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ПЛОСКОВИНТОВЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В рамках метода отображений построен класс соленоидальных векторных полей, линии которых лежат в плоскостях, параллельных плоскости R^2, исчерпывающий класс всех гладких плосковинтовых решений задачи И. С. Громеки в некоторой области $D \subset R^3$. В случае областей D с цилиндрическими границами, образующие которых ортогональны R^2, показано, что выбор конкретного решения этой задачи из построенного класса предусматривает решение задач Дирихле относительно двух гармонически сопряженных в $D^2 = D \cap R^2$ функций, т. е. решение нелинейной задачи И. С. Громеки сводится по существу к решению линейных краевых задач. В качестве примера приводится конкретное решение задачи для аксиально симметричного слоя, основанное на решениях задач Дирихле в виде равномерно сходящихся в $\overline{D}^2$ разложений в ряды по системе всплесков, образующих базисы различных пространств гармонических в D^2 функций.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. The class of solenoidal planar–helical vector fields.

The class of solenoidal vector fields whose lines lie in planes parallel to R^2 is constructed by the method of mappings. This class exhausts the set of all smooth planar–helical solutions of Gromeka's problem in some domain $D \subset R^3$. In the case of domains D with cylindrical boundaries whose generators are orthogonal to R^2, it is shown that the choice of a concrete solution from the constructed class is reduced to the Dirichlet problem with respect to two functions that are harmonically conjugate in $D^2 = D \cap R^2$; i.e., Gromeka's nonlinear problem is reduced to linear boundary value problems. As an example, a concrete solution of the problem for an axially symmetric layer is presented. The solution is based on solving Dirichlet problems in the form of series uniformly convergent in $\overline{D}^2$ in terms of wavelet systems that form bases of various spaces of functions harmonic in D^2.

Keywords: scalar fields, vector fields, tensor fields, curl, wavelets, Gromeka's problem.

Найдем класс $\mathfrak{L}_{\text{ph}}(D) = \{\mathbf{b}\}$ непотенциальных векторных полей

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}), \tag{1}$$

исчерпывающий класс всех гладких[2] в некоторой области D евклидова пространства R^3 решений системы уравнений

$$[\mathbf{b}(\mathbf{X}),\ \operatorname{rot}\mathbf{b}(\mathbf{X})] = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{b}(\mathbf{X}) = 0, \qquad (\mathbf{n}, \mathbf{b}(\mathbf{X})) = 0 \tag{2}$$

при дополнительном условии

$$\operatorname{rot}\mathbf{b}(\mathbf{X}) \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ D. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{X}$ — радиус-вектор произвольной точки из D, определяющий ее положение относительно некоторой точки $O \in R^3$, и сама точка; $\mathbf{n}$ — любой фиксированный единичный вектор.

Поле $\mathbf{b}$, удовлетворяющее системе уравнений (2), соленоидально в D; линии поля $\mathbf{b}$ образуют семейство гладких плоских кривых, лежащих в параллельных плоскостях с нормалью $\mathbf{n}$, и всюду в D совпадают с его вихревыми линиями — линиями поля $\operatorname{rot}\mathbf{b}$ (в [1] такие поля для краткости называются продольно вихревыми в D). Последнее из свойств поля $\mathbf{b}$ будет обусловлено тем, что его геометрическое строение в каждой из указанных плоскостей будет повторяться с точностью до поворота каждого вектора поля вокруг оси, коллинеарной $\mathbf{n}$, на угол, зависящий только от расстояния между плоскостями. Принимая во внимание это обстоятельство, а также принятую в [2] терминологию, продольно вихревое поле $\mathbf{b}$, удовлетворяющее

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00014) и УрО РАН в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

[2]Поле (скалярное, векторное) считается здесь гладким, если оно непрерывно дифференцируемо.

в частности системе (2), можно называть соленоидальным плосковинтовым в D векторным полем.

1. Возьмем в R^3 декартову систему координат $OX_1X_2X_3$ с началом в точке O и базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}\}$. Тогда поле (1), удовлетворяющее последнему уравнению в (2), можно задать посредством двух достаточно гладких в D скалярных полей

$$\sigma = \sigma(\mathbf{X}), \qquad \psi = \psi(\mathbf{X}), \tag{4}$$

полагая

$$\mathbf{b} = \sigma\boldsymbol{\beta}, \tag{5}$$

где

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\psi) = \mathbf{e}_1 \cos\psi + \mathbf{e}_2 \sin\psi. \tag{6}$$

2. Установим, при каких σ и ψ (4) векторное поле (5) удовлетворяет первому уравнению системы (2) и условию (3). Для этого выразим $\operatorname{rot}\mathbf{b}$ в виде разложения по векторам

$$\boldsymbol{\beta},\ [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}],\ \mathbf{e}_3, \tag{7}$$

образующим в каждой точке области D правый ортонормированный базис:

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = (\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\mathbf{b})\boldsymbol{\beta} + ([\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}], \operatorname{rot}\mathbf{b})[\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}] + (\mathbf{e}_3, \operatorname{rot}\mathbf{b})\mathbf{e}_3. \tag{8}$$

Коэффициенты преобразуем, используя тождество[3] $\operatorname{div}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] \equiv (\mathbf{d}, \operatorname{rot}\mathbf{c}) - (\mathbf{c}, \operatorname{rot}\mathbf{d})$, к виду

$$(\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}), \tag{9}$$

$$([\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}], \operatorname{rot}\mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}[\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}]) + \operatorname{div}[\mathbf{b}, [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}]], \tag{10}$$

$$(\mathbf{e}_3, \operatorname{rot}\mathbf{b}) = -\operatorname{div}[\mathbf{e}_3, \mathbf{b}]. \tag{11}$$

Первое слагаемое в формуле (10) равно нулю в силу ортогональности векторов $\mathbf{b}$ (см. (5)) и

$$\operatorname{rot}[\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}] = \mathbf{e}_3 \operatorname{div}\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\beta}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{\nabla}$ — дифференциальный оператор Гамильтона, а (12) получено с помощью тождества

$$\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{d}] \equiv \mathbf{c} \operatorname{div}\mathbf{d} - \mathbf{d} \operatorname{div}\mathbf{c} + (\mathbf{d}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{c} - (\mathbf{c}, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{d} \tag{13}$$

(см. примечание 3). Правую часть в (10) можно упростить, замечая, что $[\mathbf{b}, [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}]] = (\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b})\mathbf{e}_3$, $\operatorname{div}((\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b})\mathbf{e}_3) = (\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}), \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b})$. В результате будем иметь

$$([\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}], \operatorname{rot}\mathbf{b}) = (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}). \tag{14}$$

Подстановка (9), (14), (11) в (8) приводит с учетом (5) к выражению

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = \nu\mathbf{b} + [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}](\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}) - \mathbf{e}_3 \operatorname{div}[\mathbf{e}_3, \mathbf{b}], \tag{15}$$

где через ν обозначается скалярное поле

$$\nu = \nu(\mathbf{X}) = (\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}), \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})). \tag{16}$$

З а м е ч а н и е 1. Принимая во внимание формулу (15), будем называть скалярное поле (16) полем коэффициентов продольности (или кратко, продольностью) вихревых линий поля $\mathbf{b}$ и писать $\nu(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X}; \mathbf{b})$.

Исходя из выражения (15), сформулируем следующее

[3] См., например, таблицу 5.5–1 в [3], где приведены правила действий с оператором $\boldsymbol{\nabla}$.

Предложение 1. *Векторное поле* $\mathbf{b}$ (5) *будет продольно вихревым в* D (*удовлетворяет первому из уравнений системы* (2) *и условию* (3)), *если и только если*

$$(\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}) = 0 \quad \textit{и} \quad \operatorname{div}[\mathbf{e}_3, \mathbf{b}] = 0, \tag{17}$$

$$(\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}) \neq 0 \quad \textit{п. в. в} \quad D. \tag{18}$$

Вместе с тем, векторное поле $\mathbf{b}$ (5) конструируется посредством скалярных полей (4). Выразим условия (17), (18) как ограничения на выбор полей (4), сформулировав следующее

Предложение 2. *Векторное поле* $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\sigma(\mathbf{X}), \psi(\mathbf{X}))$ (5) *будет продольно вихревым в* D, *если и только если скалярные поля* $\sigma(\mathbf{X})$, $\psi(\mathbf{X})$ *подчиняются в* D *ограничениям*

$$\frac{\partial\sigma(\mathbf{X})}{\partial X_3} = 0, \tag{19}$$

$$-\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma(\mathbf{X})\sin\psi(\mathbf{X})) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma(\mathbf{X})\cos\psi(\mathbf{X})) = 0 \tag{20}$$

и

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{X})}{\partial X_3} \neq 0 \quad \textit{п. в. в} \quad D. \tag{21}$$

Из формулы (19) вытекает, что $\sigma(\mathbf{X}) = \sigma(X_1, X_2)$ и, следовательно, функция $\sigma(X_1, X_2)$ определена всюду в области D^2 — проекции D на плоскость X_1OX_2.

3. Поле $\mathbf{b}$ (5) будет продольно вихревым в D и соленоидальным, если поля (4), наряду с ограничениями (19)–(21), подчиняются также и ограничению

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma(\mathbf{X})\cos\psi(\mathbf{X})) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma(\mathbf{X})\sin\psi(\mathbf{X})) = 0. \tag{22}$$

В этом нетрудно убедиться, подставляя (5) во второе уравнение системы (2).

4. Введем векторное поле $\mathbf{b}^*$, сопряженное полю $\mathbf{b}$ (5), в смысле правила

$$\mathbf{b}^* = [\mathbf{e}_3, \mathbf{b}] \tag{23}$$

и установим его свойства, полагая, что $\mathbf{b}$ (5) есть решение системы (2) при условии (3), т. е.

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = \nu\mathbf{b}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{b} = 0, \qquad \nu = -\frac{\partial\psi}{bX_3} \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ D. \tag{24}$$

Нетрудно показать, что разложение ротора поля (23) — $\operatorname{rot}\mathbf{b}^* = \mathbf{e}_3\operatorname{div}\mathbf{b} - (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})\mathbf{b}$ (см. тождество (13)) по векторам (7) выражается формулой

$$\operatorname{rot}\mathbf{b}^* = -\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{b}) + \nu^*\mathbf{b}^* + \mathbf{e}_3\operatorname{div}\mathbf{b}. \tag{25}$$

Здесь

$$\nu^* = (\boldsymbol{\beta}^*, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}^*) \tag{26}$$

— продольность вихревых линий поля (23), где $\boldsymbol{\beta}^*$ — единичное векторное поле, сопряженное полю $\boldsymbol{\beta}$ (6) в смысле правила

$$\boldsymbol{\beta}^* = [\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\beta}] = \frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\psi}. \tag{27}$$

Заметим далее, что

$$\nu^* = \nu, \tag{28}$$

поскольку $\nu^* = -(\boldsymbol{\beta}^*, (\mathbf{e}_3, \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\beta}^*, \partial\boldsymbol{\beta}/\partial\psi)\partial\psi/\partial X_3 = -\partial\psi/\partial X_3$ (см. формулы (12), (27), (24)). Из (25), (17) и (28) видно, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{b}^* = \nu\mathbf{b}^*, \qquad \operatorname{div}\mathbf{b}^* = 0, \qquad \nu \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ D \tag{29}$$

при условиях (18) и $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$ (напомним, что поле $\mathbf{b}$ предполагается удовлетворяющим системе (2) и условию (3)). Вместе с тем, линии поля (23) лежат, очевидно, в тех же плоскостях, что и линии поля $\mathbf{b}$ (5). Учитывая это и формулы (29), заключаем, что поле (23) есть также решение системы (2) при условии (3) с той же продольностью вихревых линий, что и у решения $\mathbf{b}$ (5).

Справедливо и обратное утверждение: если $\mathbf{b}^*$ (23) — решение системы уравнений (2) при условии (3), то и поле (5) — $\mathbf{b} = -[\mathbf{e}_3, \mathbf{b}^*]$, есть также решение системы (2) при условии (3).

Резюмируя полученные результаты, сформулируем следующее

Предложение 3. *Векторные поля* $\mathbf{b}$ (5) *и* $\mathbf{b}^*$ (23) *образуют пару* $(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*)$ *взаимно ортогональных векторных полей, принадлежащих классу* $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$ *и имеют одинаковую продольность вихревых линий, если классу* $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$ *принадлежит одно из этих полей*: $\mathbf{b}$, *или* $\mathbf{b}^*$.

Пара $(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*)$ гладких соленоидальных продольно вихревых в D векторных полей $\mathbf{b}$ (5) и $\mathbf{b}^*$ (23), обладающих свойствами

$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{b}^*|, \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{b}^*) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{b} = \operatorname{div}\mathbf{b}^* = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{b} = \nu\mathbf{b}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{b}^* = \nu\mathbf{b}^*, \tag{30}$$

задается посредством одной и той же пары (σ, ψ) скалярных полей (4), удовлетворяющих ограничениям (19)–(22), причем продольности ν и $\nu^* = \nu$ (см. (26), (28)) вихревых линий полей $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}^*$ определяются только вторым из полей (4) (см. (6) и (16)). Вместе с тем, множество всех решений системы (2) при условии (3), задаваемое некоторой парой (σ, ψ) полей (4), удовлетворяющих ограничениям (19)–(22), не исчерпывается парой

$$(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*)\Big|_{(\sigma,\psi)} = (\mathbf{b}(\sigma, \psi); \mathbf{b}^*(\sigma, \psi)) \tag{31}$$

полей $\mathbf{b}$ (5) и $\mathbf{b}^*$ (23). Действительно, всякое векторное поле $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\sigma, \psi, \lambda, \lambda^*) = \lambda\mathbf{b}(\sigma, \psi) + \lambda^*\mathbf{b}^*(\sigma, \psi)$ при любых вещественных постоянных λ, λ^*, удовлетворяющих условию

$$\lambda^2 + \lambda^{*2} \neq 0, \tag{32}$$

будет гладким соленоидальным продольно вихревым в D векторным полем с той же продольностью вихревых линий, что и у полей пары (31), поскольку (см. формулы (30))

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \lambda\operatorname{rot}\mathbf{b} + \lambda^*\operatorname{rot}\mathbf{b}^* = \lambda\nu\mathbf{b} + \lambda^*\nu\mathbf{b}^* = \nu\mathbf{V},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \lambda\operatorname{div}\mathbf{b} + \lambda^*\operatorname{div}\mathbf{b}^* = 0, \qquad \nu(\mathbf{X}; \mathbf{b}) = \nu(\mathbf{X}; \mathbf{b}^*).$$

Отсюда выводим следующее

Предложение 4. *Если* (σ, ψ) *— пара заданных в* D *скалярных полей* (4), *удовлетворяющих ограничениям* (19)–(22), *то линейная оболочка системы векторных полей* $\mathbf{b}(\sigma, \psi)$ (5) *и* $\mathbf{b}^*(\sigma, \psi) = [\mathbf{e}_3, \mathbf{b}(\sigma, \psi)]$ *над полем* R *вещественных чисел принадлежит классу* $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$, *за исключением векторного поля тождественно равного нулю в* D, *причем поля ее имеют ту же продольность* $\nu = -\partial\psi/\partial X_3$ *вихревых линий, что и поля системы.*

5. Перейдем к анализу ограничений (19)–(22). Так, легко видеть, что первое из полей (4) удовлетворяет ограничению (19), если это плоское[4] скалярное поле в D :

$$\sigma(\mathbf{X}) = \sigma(X_1, X_2). \tag{33}$$

[4]Под плоским скалярным полем в области $D \subset R^3$ здесь подразумевается поле, производная которого в направлении, нормальном к некоторой фиксированной плоскости, равна нулю в D.

Что же касается второго из полей (4), то при гладком в D поле σ (33) с ограничениями (20)–(22) совместимо только скалярное поле

$$\psi(\mathbf{X}) = -\Phi(\mathbf{X}) - \vartheta(\mathbf{X}), \tag{34}$$

где знак минус вводится для удобства, а

$$\Phi(\mathbf{X}) = \Phi(X_1, X_2), \tag{35}$$

$$\vartheta(\mathbf{X}) = \vartheta(X_3) \tag{36}$$

— гладкие в D скалярные поля, причем

$$\frac{d\vartheta(X_3)}{dX_3} \neq 0 \ \text{ п. в. в } \ D. \tag{37}$$

Чтобы убедиться в этом, выразим ограничения (20), (22) в виде

$$-(\sigma_1' + \sigma\psi_2') \sin\psi + (\sigma_2' - \sigma\psi_1') \cos\psi = 0 \tag{38}$$

$$(\sigma_1' + \sigma\psi_2') \cos\psi + (\sigma_2' - \sigma\psi_1') \sin\psi = 0. \tag{39}$$

Здесь аргументы для сокращения записи опускаются и принимаются обозначения

$$\sigma_k' = \frac{\partial\sigma}{\partial X_k}, \qquad \psi_k' = \frac{\partial\psi}{\partial X_k}, \qquad k = 1, 2.$$

Система ограничений (38), (39) совместна тогда и только тогда, когда

$$\sigma_1' + \sigma\psi_2' = 0, \qquad \sigma_2' - \sigma\psi_1' = 0. \tag{40}$$

Здесь производные σ_1', σ_2', а значит, и производные ψ_1', ψ_2', не зависят от X_3. Переписывая условие (40) в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial X_1} = \frac{\partial \ln\sigma}{\partial X_2}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial X_2} = -\frac{\partial \ln\sigma}{\partial X_1}$$

в подобластях D, где гладкая функция σ положительная, видим, что при каждом X_3 из D^1 — проекции области D на ось OX_3 гладкие функции ψ и $\ln\sigma$, как функции X_1, X_2, удовлетворяют в $D_{X_3} = \{(X_1, X_2) : \ (X_1, X_2, X_3) \in D, \ \sigma(X_1, X_2) > 0\}$ условиям Коши — Римана и, следовательно, являются там гармоническими сопряженными. Поэтому зависимость ψ от X_3 описывается формулами (34)–(36), где $\vartheta(X_3)$ — гладкая функция, т. к. $\Phi(X_1, X_2)$ — гармоническая функция. При этом, накладывая на $\vartheta(X_3)$ ограничение (37) соблюдаем условие (21).

Установим ограничения на выбор скалярного поля (33) и поля (35) в формуле (34). Для этого вернемся к ограничениям (20), (22) и выразим их, исключив ψ с помощью (34), в виде

$$\Big[\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma\cos\Phi) - \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma\sin\Phi)\Big]\sin\vartheta + \Big[\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma\sin\Phi) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma\cos\Phi)\Big]\cos\vartheta = 0,$$

$$\Big[\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma\cos\Phi) - \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma\sin\Phi)\Big]\cos\vartheta - \Big[\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma\sin\Phi) + \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma\cos\Phi)\Big]\sin\vartheta = 0.$$

Эта система ограничений совместна тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma(X_1, X_2)\cos\Phi(X_1, X_2)) - \frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma(X_1, X_2)\sin\Phi(X_1, X_2)) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial X_2}(\sigma(X_1, X_2)\cos\Phi(X_1, X_2)) + \frac{\partial}{\partial X_1}(\sigma(X_1, X_2)\sin\Phi(X_1, X_2)) = 0. \tag{41}$$

Итак, для построения класса $\mathfrak{L}_{\rm ph}(D)$ необходимы такие поля σ (33) и Φ (35), которые подчиняются ограничениям (41).

Вместе с тем, вид ограничений (41) указывает на возможность использования методов теории функций комплексного переменного (ТФКП) также и для решения задачи о построении класса $\mathfrak{L}_{\rm ph}(D)$ при соответствующей ее переформулировке. Такая переформулировка и будет предметом дальнейшего обсуждения.

6. Введем в D пару (u, v) плоских скалярных полей

$$u(\mathbf{X}) = u(X_1, X_2), \qquad v(\mathbf{X}) = v(X_1, X_2),$$

гладких в D, полагая

$$u(X_1, X_2) = \sigma(X_1, X_2)\cos\Phi(X_1, X_2), \tag{42}$$

$$v(X_1, X_2) = \sigma(X_1, X_2)\sin\Phi(X_1, X_2), \tag{43}$$

и выразим через них систему ограничений (41) и поле $\mathbf{b}$ (5), учитывая (6), (34)–(36). Получим

$$\frac{\partial}{\partial X_1}u(X_1, X_2) - \frac{\partial}{\partial X_2}v(X_1, X_2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial X_2}u(X_1, X_2) + \frac{\partial}{\partial X_1}v(X_1, X_2) = 0; \tag{44}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = u(X_1, X_2)\Big[\mathbf{e}_1\cos\vartheta(X_3) - \mathbf{e}_2\sin\vartheta(X_3)\Big] - v(X_1, X_2)\Big[\mathbf{e}_1\sin\vartheta(X_3) + \mathbf{e}_2\cos\vartheta(X_3)\Big]. \tag{45}$$

Поле $\mathbf{b}$ (45) — гладкое в D поле, так как ϑ предполагается гладким в D, а u и v в силу (44) — гармонические в области их определения функции.

Отождествим функции (42) и (43) с вещественной и мнимой частями функции

$$f = f(z) \tag{46}$$

комплексного переменного $z = X_1 + iX_2$. Условия (44) необходимы и достаточны для аналитичности функции $f(z)$ в области D^2 плоскости $\mathbb{C}$ переменного z, соответствующей области определения (обозначим ее также D^2) функций u и v. Функции u и v в рассматриваемом случае есть плоские скалярные поля, задаваемые в области D трехмерного евклидова пространства R^3. Поэтому за область D^2 их определения примем подмножество

$$D^2 = \{(X_1, X_2) : \ \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) \in D\} \tag{47}$$

множества точек плоскости $X_3 = 0$, а за область определения функции $f(z)$ — множество

$$D^2 = \{z = X_1 + iX_2 : \ (X_1, X_2) \in D^2 \ (47)\} \subset \mathbb{C}. \tag{48}$$

Что же касается скалярного поля ϑ (36), зависящего только от координаты X_3 точки $\mathbf{X} \in D$, то область его определения есть подмножество

$$D^1 = \{(\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3 : \ \mathbf{X} \in D\} \subset R^1. \tag{49}$$

Зависимость поля $\mathbf{b}$ (45) от координат $X_1,\ X_2$ точки $\mathbf{X}$ и координаты X_3 удобно разделить. Для этого введем плоское векторное поле

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(X_1, X_2) = u(X_1, X_2)\mathbf{e}_1 - \vartheta(X_1, X_2)\mathbf{e}_2 \tag{50}$$

и тензорное поле вращений

$$\widehat{\Omega}(\mathbf{X}) = \widehat{\Omega}(\theta(\mathbf{X}), \mathbf{e}_3)$$

на угол $\theta(\mathbf{X})$ вокруг оси, проходящей через точку $\mathbf{X}$ в направлении $\mathbf{e}_3$. Поле $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ (45) зададим как гладкое отображение поля $\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(X_1, X_2)$ (50), полагая

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \widehat{\Omega}(-\vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(X_1, X_2), \tag{51}$$

что явным образом указывает на плосковинтовое строение поля $\mathbf{b}$ (см. вводную часть статьи).

Замечание 2. Выбор функций $f(z) = u(X_1, X_2) + iv(X_1, X_2)$, $\vartheta(X_3)$ ограничим следующими условиями:

1) $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в области D^2 (48) (что эквивалентно в силу (41)–(44) условию $\sigma(X_1, X_2) > 0$ в D^2);

2) $\vartheta(X_3)$ — гладкая в D^1 (49) функция и $d\vartheta(X_3)/dX_3 \neq 0$ п. в. в D^1.

Принимая во внимание предложение 3 (см. разд. 4), выразим векторное поле $\mathbf{b}^*(\mathbf{X})$, сопряженное полю $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ (51) по правилу (23), в виде

$$\mathbf{b}^*(\mathbf{X}) = \widehat{\Omega}(-\vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}^*(\mathbf{X}), \tag{52}$$

где

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{X}) = [\mathbf{e}_3, \mathbf{a}(\mathbf{X})] = \mathbf{a}^*(X_1, X_2) = v(X_1, X_2)\mathbf{e}_1 + u(X_1, X_2)\mathbf{e}_2$$

есть также плоское векторное поле. Следуя предложению 4 (см. разд. 4), образуем множество

$$\{\mathbf{V}(\mathbf{X})\} \subset \operatorname{span}(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*) \tag{53}$$

векторных полей

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \lambda\mathbf{b}(\mathbf{X}) + \lambda^*\mathbf{b}^*(\mathbf{X}), \tag{54}$$

где λ, λ^* — произвольные вещественные постоянные, удовлетворяющие условию (32), $\operatorname{span}(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*)$ — линейная оболочка системы векторных полей $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ (51), $\mathbf{b}^*(\mathbf{X})$ (52) над полем R вещественных чисел. Сформулируем следующее

Предложение 5. *Поля* $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ (54), *задаваемые посредством функций* $f(z)$ (46), $\vartheta(X_3)$ *при условиях замечания* 2, *есть соленоидальные, т. е.* $\operatorname{div}\mathbf{V}(\mathbf{X}) = 0$, *продольно вихревые, т. е.* $\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X})\mathbf{V}(\mathbf{X})$ *векторные поля в области*

$$\widetilde{D} = D^2 \times D^1, \qquad \widetilde{D} \supseteq D, \tag{55}$$

где D^2 *и* D^1 *определяются соответственно формулами* (47) *и* (49),

$$\nu(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X}; \mathbf{V}) = \frac{d\vartheta(X_3)}{dX_3};$$

следовательно, поля $V(\mathbf{X}) \in \mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(\widetilde{D})$ *и имеют одинаковую продольность вихревых линий.*

Поля (54), образующие множество (53), как и поля системы $(\mathbf{b}; \mathbf{b}^*)$ имеют плосковинтовое строение. Действительно, подстановка (51), (52) в (54) приводит к выражению

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \widehat{\Omega}(-\vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)[\lambda\mathbf{a}(\mathbf{X}) + \lambda^*\mathbf{a}^*(\mathbf{X})]. \tag{56}$$

Отображаемое поле в правой части можно представить в виде

$$\lambda\mathbf{a}(\mathbf{X}) + \lambda^*\mathbf{a}^*(\mathbf{X}) = \delta[\mathbf{a}(\mathbf{X})\cos\alpha + \mathbf{a}^*(\mathbf{X})\sin\alpha] = \delta\widehat{\Omega}(\alpha, \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\mathbf{X}), \tag{57}$$

полагая $\lambda = \delta\cos\alpha$, $\lambda^* = \delta\sin\alpha$, где $\delta = \sqrt{\lambda^2 + \lambda^{*2}}$. Подставляя, наконец,(57) в (56) и учитывая (50), придем к формуле

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \delta\widehat{\Omega}(\alpha - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(X_1, X_2),$$

где поле $\mathbf{a}$ задается посредством вещественной и мнимой частей функции $f(z)$ (46), описываемой в замечании 2, и обладает свойствами

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(X_1, X_2) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{a}(X_1, X_2) = 0 \ \text{ в } \ \widetilde{D}.$$

Принимая во внимание полученные результаты, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Соответствие* $\mathbf{X} \to \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X})$ *определяет в области* $\widetilde{D}$ (55) *векторное поле класса* $\mathfrak{L}_{\rm ph}(\widetilde{D})$, *т. е.* $\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X})\mathbf{V}(\mathbf{X}) \neq 0$ *п. в. в* $\widetilde{D}$ *и* $\operatorname{div}\mathbf{V}(\mathbf{X}) = 0$, $(\mathbf{e}_3, \mathbf{V}(\mathbf{X})) = 0$ *в* $\widetilde{D}$, *если и только если*

1) $\mathbf{V}$ *как функция* $\mathbf{X} = \mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) \in \widetilde{D}$ *есть гладкое отображение*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \delta\widehat{\Omega}(\alpha - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \delta\Big\{\mathbf{a}(\mathbf{X})\cos[\alpha - \vartheta(X_3)] + [\mathbf{e}_3, \mathbf{a}(\mathbf{X})]\sin[\alpha - \vartheta(X_3)]\Big\} \tag{58}$$

плоского потенциального и соленоидального в $\widetilde{D}$ *векторного поля*

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{a}(X_1, X_2) = u(X_1, X_2)\mathbf{e}_1 - v(X_1, X_2)\mathbf{e}_2,$$

где δ, α — *произвольные вещественные числа, причем* $\delta > 0$,

$$u(X_1, X_2) = \operatorname{Re} f(z), \qquad v(X_1, X_2) = \operatorname{Im} f(z);$$

2) $f(z)$ — *однозначная аналитическая функция в области* D^2 (48);

3) $\vartheta(X_3)$ — *гладкая в* D^1 (49) *функция и* $d\vartheta(X_3)/dX_3 \neq 0$ *п. в. в* D^1.

При этом продольность

$$\nu(\mathbf{X}) = \nu(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = d\vartheta(X_3)/dX_3$$

вихревых линий поля $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ *не зависит от* X_1, X_2.

Формулировка теоремы допускает использование аппарата ТФКП в задаче об интегрировании системы уравнений (2) при условии (3), хотя решение этой системы, ни априори, ни апостериори, не принадлежит классу плоских векторных полей. Класс $\mathfrak{L}_{\rm ph}(\widetilde{D})$ образован полями в области $\widetilde{D}$ (55), где $\widetilde{D} \supset D$. Учитывая это, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Класс* $\mathfrak{L}_{\rm ph}(D)$ *всех гладких решений системы уравнений* (2) *при условии* (3) *исчерпывается сужениями на область* D *класса* $\mathfrak{L}_{\rm ph}(\widetilde{D})$, *охарактеризованного в теореме* 1.

7. Теоремы 1 и 2 содержат рецепт построения векторных полей класса $\mathfrak{L}_{\rm ph}(D)$, исчерпывающего класс всех гладких решений системы уравнений (2) при условии (3). Перейдем теперь к обсуждению одной из задач, которые можно ставить для этой системы уравнений при условии (3), понимая под задачей совокупность дополнительных условий, которые требуется задать, чтобы выделить конкретное частное решение

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(X_1, X_2, \alpha - \vartheta(X_3)) = \delta\widehat{\Omega}(\alpha - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(X_1, X_2) \tag{59}$$

из класса векторных полей $\mathfrak{L}_{\rm ph}(D)$.

Рассмотрим некоторую область $D \subset R^3$ и предположим, что D удовлетворяет условиям одного из следующих положений.

П о л о ж е н и е 1. Граница ∂D области D в каждом сечении области D плоскостью $X_3 = \mathrm{const}$ есть звездный контур (см. [4, с. 48]), если D односвязна.

П о л о ж е н и е 2. Если D многосвязна, то граница ∂D области D в каждом сечении области D плоскостью $X_3 = \mathrm{const}$ есть объединение звездных контуров.

Обозначим теперь через ξ_1, ξ_2, ξ_3 декартовы координаты произвольной точки, принадлежащей границе ∂D области D, через

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

обозначим радиус-вектор этой точки и саму точку, а через $\overline{D}$ — замыкание области D. Через $\xi_3^{(1)}$ и $\xi_3^{(2)}$ обозначим наименьшее и наибольшее значения координаты ξ_3 точек $\boldsymbol{\xi} \in \partial D$ и заметим, что для любой пары точек

$$\boldsymbol{\xi} \in (\partial D \cap \Pi) \neq \varnothing, \qquad \mathbf{X} \in \overline{D} \cap \Pi$$

где $\Pi = \{\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) :\ X_3 = \mathrm{const}\}$, справедливо очевидное равенство $\xi_3 = X_3$. Стало быть, замыкание $\overline{D^1}$ области D^1 (49) можно задать формулой

$$\overline{D^1} = \Big\{(\mathbf{e}_3, \mathbf{X}) = X_3 :\ X_3 \in [\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}]\Big\} \tag{60}$$

и использовать координату $X_3 \in \overline{D^1}$ в качестве одного из параметров при задании границы ∂D. Здесь для определенности считается, что $\xi_3^{(1)}$, $\xi_3^{(2)}$ конечны; при бесконечных $\xi_3^{(1)}$ и (или) $\xi_3^{(2)}$ отрезок $[\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}]$ в (60) следует заменить на интервал или полуинтервал. В качестве второго параметра возьмем двугранный угол γ между полуплоскостями $\mathcal{P}_0 = \{(X_1, 0, X_3) :$ $X_1 \geq 0,\ X_3 \in R\}$ и $\mathcal{P}_\gamma$, исходящими из оси OX_3, отсчитываемый от $\mathcal{P}_0$ к $\mathcal{P}_\gamma$ в направлении "против хода часовой стрелки", если смотреть навстречу оси OX_3. Будем полагать, что при заданной области D начало системы координат $OX_1X_2X_3$ выбрано так, что значения γ изменяются в пределах полуинтервала $[0, 2\pi)$.

Для задания границы ∂D области D с помощью параметров

$$(\gamma, X_3) \in [0, 2\pi) \times \big[\xi_3^{(1)}, \xi_3^{(2)}\big] \tag{61}$$

используем следующие функции от $\gamma,\ X_3$:

$$\xi_1 = \xi_1(\gamma, X_3) = r(\gamma, X_3)\cos\gamma, \quad \xi_2 = \xi_2(\gamma, X_3) = r(\gamma, X_3)\sin\gamma, \quad \xi_3 = \xi_3(\gamma, X_3) = X_3, \tag{62}$$

$$r = r(\gamma, X_3), \tag{63}$$

где $r(\gamma, X_3)$ — расстояние от оси OX_3 до точек границы ∂D, соответствующих заданным γ и X_3. Тогда уравнение границы ∂D будет выражаться вектор-функцией от γ и X_3:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\gamma, X_3) = r(\gamma, X_3)(\mathbf{e}_1\cos\gamma + \mathbf{e}_2\sin\gamma) + X_3\mathbf{e}_3. \tag{64}$$

Что же касается однозначности и непрерывности функций, описывающих границу, то эти свойства оговариваются в следующих замечаниях.

З а м е ч а н и е 3. При условиях положения 1 функция $r(\gamma, X_3)$ однозначна и непрерывна при любых значениях своих аргументов (см. (61)).

З а м е ч а н и е 4. При условиях положения 2 каждый из контуров, принадлежащих границе $\partial D \cap\ \Pi$, где $\Pi = \{\mathbf{X}(X_1, X_2, X_3) :\ X_3 = \mathrm{const} \in \overline{D^1}\ (60)\}$, задается, вообще говоря, относительно своей, подходящей оси, сонаправленной оси OX_3, по правилам (62)–(64), удовлетворяющим требованиям однозначности и непрерывности при всех значениях их аргументов.

Ниже в этом разделе во избежание чрезмерно громоздких обозначений и формул имеется в виду область D, удовлетворяющая условиям положения 1, граница которой задается в силу замечания 3 однозначными и непрерывными функциями (62)–(64). Результаты и выводы, полученные для таких областей, при необходимости можно распространить на случаи многосвязных областей D.

В точках $\boldsymbol{\xi}$ (64) границы ∂D области D зададим вектор-функцию

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}(\gamma, X_3)) = \mathbf{W}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3), X_3) \tag{65}$$

и будем искать поле $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ (59), которое подчинялось бы условиям

$$\lim_{\mathbf{X}'\to\boldsymbol{\xi}(\gamma, X_3)} \mathbf{V}(X_1', X_2', \alpha - \vartheta(X_3')) = \mathbf{V}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3), \alpha - \vartheta(X_3)), \tag{66}$$

$$\mathbf{V}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3), \alpha - \vartheta(X_3)) = \mathbf{W}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3), X_3), \tag{67}$$

где

$$\mathbf{V}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3), \alpha - \vartheta(X_3)) = \delta\widehat{\Omega}(\alpha - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3)). \tag{68}$$

Условие (66) выражает требование непрерывности поля $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ (59) в $\overline{D} = D \cup \partial D$. Условие (67) требует равенства векторов этого поля и векторов вектор-функции (65) в каждой точке $\boldsymbol{\xi}$ (64) границы ∂D области D, которое может иметь место в силу плосковинтового строения поля $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ (59), при условиях следующего положения.

П о л о ж е н и е 3. Вектор-функция $\mathbf{W}$ (65), задаваемая на границе ∂D области D, или на частях границы, когда этого достаточно (см. ниже) при всех значениях ее аргументов непрерывно дифференцируема, отлична от нуль-вектора, ортогональна $\mathbf{e}_3$.

Подстановка (68) в (67) приводит с учетом (58) к равенствам

$$\mathbf{W}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3), X_3) = \delta\widehat{\Omega}(\alpha - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3))$$

$$= \delta\Big\{\mathbf{a}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3))\cos[\alpha - \vartheta(X_3)] + [\mathbf{e}_3, \mathbf{a}(\xi_1(\gamma, X_3), \xi_2(\gamma, X_3))]\sin[\alpha - \vartheta(X_3)]\Big\}, \quad (69)$$

выражающим требование (67) через векторы плоского поля $\mathbf{a}(X_1, X_2)$ (50), взятого в точках (64) границы ∂D, и через скалярное поле $\alpha - \vartheta(X_3)$ — параметр ортогонального преобразования $\widehat{\Omega}$.

Далее упростим исследование, обратившись к случаю цилиндрических областей $D = \widetilde{D}$.

8. Пусть D — цилиндрическая область в R^3, удовлетворяющая условиям положения 1, а ее граница ∂D задается с помощью параметров

$$\gamma \in [0, 2\pi), \qquad X_3 \in R \quad (70)$$

следующими скалярными функциями

$$\xi_1 = \xi_1(\gamma) = r(\gamma)\cos\gamma, \qquad \xi_2 = \xi_2(\gamma) = r(\gamma)\sin\gamma, \qquad \xi_3 = X_3 \quad (71)$$

или вектор-функцией

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\gamma, X_3) = r(\gamma)(\mathbf{e}_1\cos\gamma + \mathbf{e}_2\sin\gamma) + X_3\mathbf{e}_3. \quad (72)$$

Вектор-функция (65) в случае таких областей выражается формулой

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}(\gamma, X_3)) = \mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), X_3), \quad (73)$$

а равенства (69) принимают вид

$$\mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), X_3) = \delta\widehat{\Omega}(\alpha - \vartheta(X_3), \mathbf{e}_3)\mathbf{a}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma))$$

$$= \delta\Big\{\mathbf{a}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma))\cos[\alpha - \vartheta(X_3)] + [\mathbf{e}_3, \mathbf{a}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma))]\sin[\alpha - \vartheta(X_3)]\Big\} \quad (74)$$

и могут выполняться при условиях следующего положения.

П о л о ж е н и е 4. Вектор-функция $\mathbf{W}$ (73), задаваемая на границе ∂D односвязной цилиндрической области D, или на частях границы ∂D, при всех значениях ее аргументов удовлетворяет условиям положения 3 и условию $\partial|\mathbf{W}|/\partial X_3 = 0$.

Из (74) при $X_3 = 0$, $\delta = 1$ и $\alpha = \vartheta(0)$ выводим

$$\mathbf{a}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma)) = \mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), 0). \quad (75)$$

Затем, умножая (74) скалярно на $\mathbf{W}$ и $[\mathbf{e}_3, \mathbf{W}]$, взятые при $X_3 = 0$, при том же $\alpha = \vartheta(0)$ и $\mathbf{a}$ (75) выводим

$$\cos[\vartheta(0) - \vartheta(X_3)] = \frac{(\mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), 0), \mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), X_3))}{|\mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), 0)|^2},$$

$$\sin[\vartheta(0) - \vartheta(X_3)] = \frac{(\mathbf{e}_3, [\mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), 0), \mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), X_3)])}{|\mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), 0)|^2}. \quad (76)$$

Теперь, имея в виду постановку рассматриваемой здесь задачи, можно утверждать, что для ее разрешимости в случае односвязных цилиндрических областей D не обязательно задавать вектор-функцию (73) на всей поверхности границы ∂D области D. Действительно, левые части в (76) не зависят от γ. Поэтому формулы (76) определяют неявно параметр $\alpha - \vartheta(X_3)$ ортогонального преобразования $\widehat{\Omega}$ при $\alpha = \vartheta(0)$ по векторам заданной на ∂D (см. формулы (70)–(72)) вектор-функции (73), взятым только в точках прямой

$$\Gamma_{\gamma_0} = \partial^2 D \cap \mathcal{P}_{\gamma_0},$$

где $\mathcal{P}_{\gamma_0}$ — полуплоскость, образующая с полуплоскостью $\mathcal{P}_0$ некоторый фиксированный угол $\gamma_0 \in [0, 2\pi)$. В результате остается выделить конкретное плоское векторное поле $\mathbf{a}(X_1, X_2)$ (50), которое должно удовлетворять в силу (66), (67) двум условиям. Во-первых, условию

$$\lim \mathbf{a}(X_1, X_2) = \mathbf{a}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma)) \quad \text{при} \quad (X_1, X_2) \to (\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma)),$$

требующему непрерывности этого поля в замыкании $\overline{D^2}$ области

$$D^2 = D \cap R^2, \tag{77}$$

где R^2 — плоскость $X_3 = 0$. Во-вторых, условию (75), требующему равенства только в точках

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\gamma, 0) = r(\gamma)(\mathbf{e}_1 \cos\gamma + \mathbf{e}_2 \sin\gamma)$$

границы $\partial D^2 = \partial D \cap R^2$ области D^2 (77) векторов $\mathbf{a}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma))$ поля (50) и векторов $\mathbf{W}(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), 0)$ вектор-функции (73).

Наконец отметим, что это утверждение остается в силе и в случае неодносвязных цилиндрических областей D, удовлетворяющих условиям положения 2.

Таким образом, чтобы выделить конкретное решение $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ (59) из класса векторных полей $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$ в случае цилиндрических областей D, удовлетворяющих условиям положений 1 или 2, нужно следующее.

Во-первых, нужно найти скалярное поле $\alpha - \vartheta(X_3)$ (параметр ортогонального преобразования $\widehat{\Omega}$) по векторам вектор-функции

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}), \tag{78}$$

заданной в точках прямой, проходящей через некоторую фиксированную точку $\boldsymbol{\xi}(\xi_1, \xi_2, 0)$ границы

$$\partial D^2 = \partial D \cap R^2 \tag{79}$$

области D^2 параллельно оси OX_3, используя для этого формулы (76), или их модификации, возможные в случае многосвязной области D.

Во-вторых, нужно найти решения задач Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(X_1, X_2) = 0, \\ u\Big|_{\partial D^2} = \varphi(\xi_1, \xi_2), \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta v(X_1, X_2) = 0, \\ v\Big|_{\partial D^2} = -\eta(\xi_1, \xi_2) \end{cases} \tag{80}$$

относительно гармонически сопряженных функций $u = u(X_1, X_2)$, $v = v(X_1, X_2)$, через которые выражается плоское векторное поле $\mathbf{a}$ (50), при заданной в точках границы ∂D^2 (79) вектор-функции (78), где Δ — дифференциальный оператор Лапласа, $(X_1, X_2) \in D^2$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}))\Big|_{\partial D^2}, \qquad \eta(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}))\Big|_{\partial D^2}. \tag{81}$$

Для решения задачи Дирихле используются различные подходы. Одни основаны на интегральном представлении решения, другие — на представлении решения в виде ряда. Эти подходы однако не вполне удовлетворительны, поскольку не позволяют обычно найти решение, свойства которого в задаваемой области D^2 и ее замыкании $\overline{D^2}$ предусматриваются постановкой (см., например, [4, с. 202]) задачи Дирихле. Так, при интегральном представлении решения не обеспечивается его непрерывность в каждой точке границы ∂D^2 по любому направлению из D^2. А представление в виде ряда не всегда обеспечивает сходимость в замыкании $\overline{D^2}$. Можно ожидать однако, что недостатки последнего подхода преодолимы, если для разложения решений брать подходящие системы функций, которые являются базисами различных пространств, гармонических в D^2 функций. Об этом свидетельствуют, например, работы [5;6], в которых используются системы всплесков, позволяющие в случае специальных областей D^2 строить ряды, равномерно сходящиеся в $\overline{D^2}$.

Принимая во внимание сказанное выше, вернемся к задачам (80) и рассмотрим их решение в упрощенной постановке, полагая, что φ и $(-1)\eta$ в (80) — значения в точках границы ∂D^2 двух гармонически сопряженных в D^2 и непрерывных в $\overline{D^2}$ функций, и найдем частное решение системы уравнений (2) при условии (3) в случае, когда D — двухсвязная область, сечение D^2 которой плоскостью $X_3 = 0$ есть открытое кольцо.

9. Пусть D — аксиально симметричный относительно оси OX_3 цилиндрический слой, а $\partial D = Y_\rho \cup Y_1$ — его граница, где Y_ρ и Y_1 — цилиндрические поверхности радиуса ρ $(0 < \rho < 1)$ и радиуса 1. Обозначим через $\boldsymbol{\zeta} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2$ радиус-вектор произвольной точки плоскости $X_3 = 0$ и саму точку. Координаты X_1, X_2 точки выразим в виде

$$X_1 = \zeta\cos\gamma, \qquad X_2 = \zeta\sin\gamma, \tag{82}$$

используя угол γ, который вводился ранее в разд. 7, и расстояние $\zeta = |\boldsymbol{\zeta}|$ от точки до начала координат. Тогда будем иметь $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\zeta, \gamma)$,

$$D^2 = \Big\{\boldsymbol{\zeta}(\zeta,\gamma):\ \zeta \in (\rho, 1),\ \gamma \in [0, 2\pi)\Big\}, \tag{83}$$

$$\partial D^2 = \partial K_\rho \cup \partial K_1, \tag{84}$$

где

$$\partial K_\rho = \Big\{\boldsymbol{\zeta}(\rho,\gamma):\ \gamma \in [0,2\pi)\Big\}, \qquad \partial K_1 = \Big\{\boldsymbol{\zeta}(1,\gamma):\ \gamma \in [0,2\pi)\Big\}. \tag{85}$$

Следуя [5], будем использовать системы функций[5]

$$\Big\{1,\ \ln\zeta,\ \alpha_n(\zeta,\gamma),\ \widetilde{\alpha}_n(\zeta,\gamma),\ \alpha_n\Big(\frac{\rho}{\zeta}, -\gamma\Big),\ \widetilde{\alpha}_n\Big(\frac{\rho}{\zeta}, -\gamma\Big):\ n \in \mathbb{Z}_+\Big\}, \tag{86}$$

которые являются базисами различных пространств, гармонических в кольце (83) функций. Здесь $\alpha_n(\zeta,\gamma) = \mathrm{Re}\chi_n(z)$, $\widetilde{\alpha}_n(\zeta,\gamma) = \mathrm{Im}\chi_n(z)$, $\alpha_n\Big(\dfrac{\rho}{\zeta}, -\gamma\Big) = \mathrm{Re}\chi_n\Big(\dfrac{\rho}{z}\Big)$, $\widetilde{\alpha}_n\Big(\dfrac{\rho}{\zeta}, -\gamma\Big) = \mathrm{Im}\chi_n\Big(\dfrac{\rho}{z}\Big)$, где $z = \zeta e^{i\gamma}$, $\chi_0(z) = z$, а при $n = 2^j + k$ $(0 \le k < 2^j,\ j \in \mathbb{Z}_+)$ —

$$\chi_n(z) = 2^{-(j-1)/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_\varepsilon}\widehat{\theta}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)\cos\Big[\frac{2\pi\nu(k+1/2)}{2^{j+1}}\Big]z^\nu. \tag{87}$$

Через $\mathbb{Z}_\varepsilon$ в (87) обозначено множество

$$\mathbb{Z}_\varepsilon = \{\nu \in \mathbb{N}:\ 2^j(1-\varepsilon) < \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)\}, \tag{88}$$

через $\widehat{\theta}_\varepsilon = \widehat{\theta}_\varepsilon(\omega)$ — введенные в [7] для $\varepsilon = 1/3$ и в [8] для $0 < \varepsilon < 1/3$ неотрицательные гладкие функции, обладающие свойствами:

$$\widehat{\theta}_\varepsilon(\omega) \equiv 1 \ \text{ при } \ \frac{1+\varepsilon}{2} < \omega < 1-\varepsilon,$$

[5]Обозначения здесь и ниже не всегда совпадают с обозначениями в [5].

$$\widehat{\theta}_\varepsilon^2(1-\omega)+\widehat{\theta}_\varepsilon^2(1+\omega)\equiv 1 \ \text{ при } \ 0\le\omega\le\varepsilon,$$
$$\widehat{\theta}_\varepsilon^2\Big(\frac{\omega}{2}\Big)+\widehat{\theta}_\varepsilon^2(\omega)\equiv 1 \ \text{ при } \ 1-\varepsilon<\omega<1+\varepsilon,$$
$$\widehat{\theta}_\varepsilon(\omega)\equiv 0 \ \text{ при } \ 0\le\omega\le\frac{1-\varepsilon}{2} \ \text{ и } \ 1+\varepsilon\le\omega<+\infty.$$

Пусть

$$\varphi_\rho(\gamma)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}))\Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\zeta}(\rho,\gamma)\in\partial K_\rho},\qquad \varphi_1(\gamma)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}))\Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\zeta}(1,\gamma)\in\partial K_1},\tag{89}$$

$$-\eta_\rho(\gamma)=-(\mathbf{e}_2,\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}))\Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\zeta}(\rho,\gamma)\in\partial K_\rho},\qquad -\eta_1(\gamma)=-(\mathbf{e}_2,\mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}))\Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\zeta}(1,\gamma)\in\partial K_1}\tag{90}$$

(см. (80), (81)) — непрерывные вещественные 2π-периодические функции — значения в точках границы ∂D^2 (84) гармонически сопряженных в D^2 (83) функций, непрерывных в $\overline{D^2}$ (см. разд. 8).

Систему (86), согласно [5], можно использовать для представления решения задач Дирихле

$$\begin{cases}\Delta u(\boldsymbol{\zeta}(\zeta,\gamma))=0,\\ u\Big|_{\partial K_\rho}=\varphi_\rho(\gamma),\\ u\Big|_{\partial K_1}=\varphi_1(\gamma),\end{cases}\qquad \begin{cases}\Delta v(\boldsymbol{\zeta}(\zeta,\gamma))=0,\\ v\Big|_{\partial K_\rho}=-\eta_\rho(\gamma),\\ v\Big|_{\partial K_1}=-\eta_1(\gamma),\end{cases},\tag{91}$$

где $\Delta=(1/\zeta)(\partial/\partial\zeta)\zeta(\partial/\partial\zeta)+(1/\zeta^2)(\partial^2/\partial\gamma^2)$, для кольца D^2 (83) в виде рядов

$$u=u_0(\zeta)+\sum_{n=0}^{\infty}U_n(\zeta,\gamma),\qquad v=v_0(\zeta)+\sum_{n=0}^{\infty}V_n(\zeta,\gamma).\tag{92}$$

Здесь

$$u_0(\zeta)=a_{-1}+\widetilde{a}_{-1}\frac{\ln\zeta}{\ln\rho},\qquad v_0(\zeta)=c_{-1}+\widetilde{c}_{-1}\frac{\ln\zeta}{\ln\rho},\tag{93}$$

где

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(\gamma)\,d\gamma,\qquad \widetilde{a}_{-1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_\rho(\gamma)\,d\gamma-a_{-1},\tag{94}$$

а формулы для c_{-1}, $\widetilde{c}_{-1}$ получаются из формул (94) путем замен

$$a\to c,\qquad \widetilde{a}\to\widetilde{c},\qquad \varphi_1(\gamma)\to-\eta_1(\gamma),\qquad \varphi_\rho(\gamma)\to-\eta_\rho(\gamma);\tag{95}$$

$$U_n(\zeta,\gamma)=a_n\alpha_n(\zeta,\gamma)+\widetilde{a}_n\widetilde{\alpha}_n(\zeta,\gamma)+a_{n\rho}\alpha_n\Big(\frac{\rho}{\zeta},-\gamma\Big)+\widetilde{a}_{n\rho}\widetilde{\alpha}_n\Big(\frac{\rho}{\zeta},-\gamma\Big),\tag{96}$$

$$V_n(\zeta,\gamma)=c_n\alpha_n(\zeta,\gamma)+\widetilde{c}_n\widetilde{\alpha}_n(\zeta,\gamma)+c_{n\rho}\alpha_n\Big(\frac{\rho}{\zeta},-\gamma\Big)+\widetilde{c}_{n\rho}\widetilde{\alpha}_n\Big(\frac{\rho}{\zeta},-\gamma\Big),\tag{97}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(\gamma)\alpha_n^{(\rho)}(1,\gamma)\,d\gamma-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_\rho(\gamma)\alpha_n^{(\rho)}(\rho,\gamma)\,d\gamma,\tag{98}$$

$$\widetilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(\gamma)\widetilde{\alpha}_n^{(\rho)}(1,\gamma)\,d\gamma-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_\rho(\gamma)\widetilde{\alpha}_n^{(\rho)}(\rho,\gamma)\,d\gamma,\tag{99}$$

$$a_{n\rho}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_\rho(\gamma)\alpha_n^{(\rho)}(1,-\gamma)\,d\gamma-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(\gamma)\alpha_n^{(\rho)}(\rho,-\gamma)\,d\gamma,\tag{100}$$

$$\widetilde{a}_{n\rho} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_\rho(\gamma)\widetilde{\alpha}_n^{(\rho)}(1,-\gamma)\,d\gamma - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi_1(\gamma)\widetilde{\alpha}_n^{(\rho)}(\rho,-\gamma)\,d\gamma, \tag{101}$$

$n \in \mathbb{Z}_+$, а формулы для коэффициентов c_n, $\widetilde{c}_n$, $c_{n\rho}$, $\widetilde{c}_{n\rho}$ получаются из (98)–(101) путем замен (95). В формулы (98)–(101) входят значения функций

$$\alpha_n^{(\rho)}(\zeta,\gamma) = \operatorname{Re}\chi_n^{(\rho)}(z), \qquad \widetilde{\alpha}_n^{(\rho)}(\zeta,\gamma) = \operatorname{Im}\chi_n^{(\rho)}(z), \tag{102}$$

$$\alpha_n^{(\rho)}\Big(\frac{\rho}{\zeta},-\gamma\Big) = \operatorname{Re}\chi_n^{(\rho)}\Big(\frac{\rho}{z}\Big), \qquad \widetilde{\alpha}_n^{(\rho)}\Big(\frac{\rho}{\zeta},-\gamma\Big) = \operatorname{Im}\chi_n^{(\rho)}\Big(\frac{\rho}{z}\Big), \tag{103}$$

взятых в точках окружностей (85). Здесь

$$\chi_0^{(\rho)}(z) = \frac{z\sqrt{2}}{1-\rho^2}, \tag{104}$$

а при $n = 2^j + k$ $(0 \le k < 2^j,\ j \in \mathbb{Z}_+)$

$$\chi_n^{(\rho)}(z) = 2^{-(j-1)/2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_\varepsilon} \widehat{\theta}_\varepsilon\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)\cos\Big[\frac{2\pi\nu(k+1/2)}{2^{j+1}}\Big]\frac{z^\nu}{1-\rho^{2\nu}}, \tag{105}$$

где $\mathbb{Z}_\varepsilon$ определяется формулой (88).

Ряды (92) равномерно сходятся в замыкании $\overline{D^2}$ кольца D^2 (83) к функциям

$$u(\boldsymbol{\zeta}(\zeta,\gamma)) = u(\zeta,\gamma) \ \text{ и } \ v(\boldsymbol{\zeta}(\zeta,\gamma)) = v(\zeta,\gamma). \tag{106}$$

Скорость сходимости частичных сумм $S_n(\zeta,\gamma;u)$ и $S_n(\zeta,\gamma;v)$ рядов (92) определяется в [5, теорема 2]. Так, согласно этой теореме, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in [\rho,1]$ справедлива оценка

$$\|u(\zeta,\gamma) - S_n(\zeta,\gamma;u)\|_{C(\zeta=r)} \le \frac{K(\widehat{\theta}_\varepsilon)}{1-[(4/\pi)\operatorname{arctg}\rho^{N+1}]^2}\Big[r^N E_N(\varphi_1) + \Big(\frac{\rho}{r}\Big)^N E_N(\varphi_\rho)\Big],$$

где $C\ (\zeta = r)$ — пространство вещественных непрерывных функций с равномерной нормой на окружности радиуса r с центром в начале координат, $N = N(n,\varepsilon) = [2^j(1-\varepsilon)]$ $(n = 2^j + k,\ 0 \le k < 2^j)$, $K(\widehat{\theta}_\varepsilon)$ — константа, значения которой зависят от выбора $\widehat{\theta}_\varepsilon$, а от выбора значений r и N не зависят, через $E_N(\varphi_1)$ и $E_N(\varphi_\rho)$ обозначены наилучшее приближение функций $\varphi_1(\gamma)$ и $\varphi_\rho(\gamma)$ в равномерной метрике на периоде тригонометрическими полиномами порядка N. Аналогичная оценка характеризует скорость сходимости частичных сумм $S_n(\zeta,\gamma;\vartheta)$ и второго из рядов (92).

Отметим также, что предположение относительно свойств функций φ и $(-1)\eta$ в D^2 и $\overline{D^2}$ (см. пояснение к формулам (89), (90)), используемое в постановке задач (91), требует выполнимости следующих условий

$$\widetilde{c}_{-1} = \widetilde{a}_{-1} = 0, \qquad c_n = -\widetilde{a}_n, \qquad \widetilde{c}_n = a_n, \qquad c_{n\rho} = -\widetilde{a}_{n\rho}, \qquad \widetilde{c}_{n\rho} = a_{n\rho}, \tag{107}$$

вытекающих из условий Даламбера – Эйлера, которым должны удовлетворять функции (106) как вещественная и мнимая части аналитической в кольце D^2 (83) функции.

Итак, конкретное плоское векторное поле

$$\mathbf{a}(X_1,X_2) = \mathbf{a}(X_1(\zeta,\gamma),X_2(\zeta,\gamma)) = \mathbf{a}(\zeta,\gamma)$$

(см. (50), (82)), выделенное дополнительными условиями (см. (91), (89), (90)) на границе ∂D^2 (84) области D^2 (83), в переменных ζ, γ будет выражаться формулой

$$\mathbf{a}(\zeta,\gamma) = u(\zeta,\gamma)\mathbf{e}_1 - v(\zeta,\gamma)\mathbf{e}_2,$$

где $u(\zeta,\gamma),\ v(\zeta,\gamma)$ определяются формулами (92)–(105).

Что же касается параметра ортогонального преобразования $\widehat{\Omega}$ в (59), то в случае рассматриваемого цилиндрического слоя D, он определяется при $\alpha = \vartheta(0)$ единственным образом по векторам

$$\mathbf{W}(\xi_1(0), \xi_2(0), X_3)\Big|_{\xi_1(0)=\rho,\ \xi_2(0)=0} = \mathbf{W}(\rho, X_3)$$

вектор-функции (73), заданной, например, в точках прямой[6]

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{X} = \rho\mathbf{e}_1 + X_3\mathbf{e}_3 :\ X_3 \in R\}, \tag{108}$$

следующими из (76) формулами

$$\cos[\vartheta(0) - \vartheta(X_3)] = \frac{(\mathbf{W}(\rho,0), \mathbf{W}(\rho, X_3))}{|\mathbf{W}(\rho,0)|^2}, \quad \sin[\vartheta(0) - \vartheta(X_3)] = \frac{(\mathbf{e}_3, [\mathbf{W}(\rho,0), \mathbf{W}(\rho, X_3)])}{|\mathbf{W}(\rho,0)|^2}. \tag{109}$$

Резюмируя сказанное, сформулируем следующее

Предложение 6. *Частное решение системы уравнений* (2) *при условии* (3) *в цилиндрическом аксиально симметричном относительно оси* OX_3 *слое* D, *выделенное из класса* $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$ *дополнительными условиями на части* ∂D^2 (84) *границы* ∂D *слоя* D, *указанными в задачах* (91) *и условиями* (109) *на части* Γ_0 (108) *границы* ∂D, *определяется формулой*

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}(X_1(\zeta,\gamma), X_2(\zeta,\gamma), X_3) = \mathbf{V}(\zeta,\gamma,X_3)$$
$$= |\mathbf{W}(\rho,0)|^{-2}\Big\{(\mathbf{W}(\rho,0), \mathbf{W}(\rho,X_3))[u(\zeta,\gamma)\mathbf{e} - v(\zeta,\gamma)\mathbf{e}_2]$$
$$+ (\mathbf{e}_3, [\mathbf{W}(\rho,0), \mathbf{W}(\rho,X_3)])[v(\zeta,\gamma)\mathbf{e}_1 + u(\zeta,\gamma)\mathbf{e}_2]\Big\},$$

если:

1) *вектор-функция* $\mathbf{W}$ (73), *заданная на* $\partial D^2 \cup \Gamma_0$, *непрерывно дифференцируема, удовлетворяет на* $\partial D^2 \cup \Gamma_0$ *условиям* $(\mathbf{e}_3, \mathbf{W}) = 0,\ \mathbf{W} \neq 0$ *и условиям* $\partial|\mathbf{W}|/\partial X_3 = 0$ *на* Γ_0, $\partial\mathbf{W}/\partial X_3 \neq 0$ *п. в. на* Γ_0;

2) $(\mathbf{e}_1, \mathbf{W}),\ -(\mathbf{e}_2, \mathbf{W})$ *в точках* ∂D^2 *есть значения гармонически сопряженных в* D^2 *и непрерывных в* $\overline{D^2}$ *функций, удовлетворяющих в силу* (89), (90) *на* ∂D^2 *условиям* (107), *а* $u(\zeta,\gamma),\ v(\zeta,\gamma)$ *определяются формулами* (92)–(105).

10. В заключение уместно обратить внимание на следующие обстоятельства.

Во-первых, теоремы 1 и 2 (см. разд. 6) содержат рецепт решения известной задачи И. С. Громеки [2] о нахождении соленоидального векторного поля в области D, линии которого всюду в D совпадают с его вихревыми линиями, в классе плосковинтовых полей. Решение ее в этом классе в постановке самого И. С. Громеки предусматривает интегрирование системы уравнений (2) с частными производными (первое из которых нелинейно) при условии (3). Использование метода отображений [1] в настоящей работе позволило избежать трудностей, возникающих при непосредственном интегрировании этой системы, и свести решение рассматриваемой нелинейной задачи И. С. Громеки к решению более простой линейной задачи о нахождении плоского соленоидального векторного поля, потенциального в D.

Во-вторых, с точки зрения приложений, немаловажной представляется возможность применения аппарата ТФКП к решению указанной линейной задачи и возможность расширения на класс $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$ уже известных решений задач (в том числе и краевых) в классе $\mathfrak{T}_{\mathrm{pps}}(D)$ всех плоских потенциальных и соленоидальных в D векторных полей.

В-третьих, дополнительные условия, выделяющие конкретное поле $\mathbf{V}$ из класса $\mathfrak{L}_{\mathrm{ph}}(D)$, не исчерпываются условиями, которые рассматривались в случае цилиндрических областей D в

[6]В качестве Γ_0 можно взять и прямую, принадлежащую цилиндрической поверхности Y_1.

разд. 8 и приводят к задачам Дирихле относительно двух гармонически сопряженных функций. Теоремы 1 и 2 допускают и другие разновидности дополнительных условий как для цилиндрических, так и нецилиндрических областей D.

В-четвертых, перспективы использования всплесков для решения задач Дирихле указывают на целесообразность конструирования новых систем всплесков, которые могли бы служить базисами различных пространств, гармонических в областях D^2 функций, при D^2, отличных от областей, рассматриваемых в работах [5; 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Преобразование, изменяющее геометрическое строение векторного поля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 111–121.
2. **Громека И.С.** Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1881. 107 с. в книге “Собрание сочинений”. М.: Из-во АН СССР, 1952. 296 с.
3. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.
4. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1988. 736 с.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 41, № 15. С. 17–30.
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. летней мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: изд-во ТулГУ, 2007. С. 129.
7. **Meyer Y.** Ondelettes et opérateurs. I. Ondelettes. Paris: Herman, 1990.
8. **Offin D. and Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1963. Vol. 9. P. 319–325.

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Российский государственный профессионально-педагогический университет,
г. Екатеринбург

Поступила 22.01.2010

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.86

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ШАПОЧКИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ[1]

М. В. Дейкалова

Решена задача о наилучшем приближении в пространстве $L(\mathbb{S}^2)$ на единичной сфере $\mathbb{S}^2$ трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ характеристической функции сферической шапочки множеством алгебраических многочленов заданной степени (по совокупности переменных) от трех вещественных переменных с вещественными коэффициентами.

Ключевые слова: евклидова сфера, характеристическая функция сферической шапочки, приближение алгебраическими многочленами.

M. V. Deikalova. The Integral Approximation of the Characteristic Function of a Spherical Cap By Algebraic Polynomials.

In the space $L(\mathbb{S}^2)$ on the unit sphere $\mathbb{S}^2$ of the three-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$, the problem on the best approximation of the characteristic function of a spherical cap by the set of algebraic polynomials of given (total) degree in three real variables with real coefficients is solved.

Keywords: Euclidean sphere, characteristic function of a spherical cap, approximation by algebraic polynomials.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}^m,\ m \ge 2$, есть m-мерное вещественное евклидово пространство; $\mathbb{S}^{m-1}$ — его единичная сфера; $\mathcal{P}_{n,m}$ — множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \le n,\\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x^\alpha,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}, \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

степени не выше n от m вещественных переменных с вещественными коэффициентами c_α. С помощью числа $h,\ -1 < h < 1$, определим сферическую шапочку

$$\mathbb{C}(h) = \mathbb{C}(h, e_m) = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1} :\ x_m \ge h\} \subset \mathbb{S}^{m-1}$$

с центром в “северном полюсе” $e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ сферы.

Основная цель данной работы состоит в исследовании наилучшего приближения в пространстве $L(\mathbb{S}^{m-1})$ характеристической функции

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{C}(h), \\ 0, & x \notin \mathbb{C}(h) \end{cases} \qquad (1.1)$$

сферической шапочки $\mathbb{C}(h)$ подпространством многочленов $\mathcal{P}_{n,m}$, а именно в исследовании величины

$$e_{n,m}(\chi_h) = \inf\{\|\chi_h - P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} :\ P_n \in \mathcal{P}_{n,m}\}. \qquad (1.2)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213).

А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякин [1; 2] исследовали величину наилучшего интегрального приближения на периоде $[-\pi, \pi)$ характеристической функции интервала $(-h, h)$ тригонометрическими полиномами. Используя идеи работы [1] и идеи более ранних работ Л. В. Тайкова [3; 4], автор вычислил [5] величину $e_{n,m}(\chi_h)$ при любых $m \geq 3$ для значений параметра h, совпадающих с нулями многочлена одного переменного порядка $n+1$, наименее уклоняющегося от нуля в пространстве $L_1^\phi(-1,1)$ функций, суммируемых на интервале $(-1,1)$ с ультрасферическим весом

$$\phi(u) = (1-u^2)^\alpha, \qquad \alpha = \frac{m-3}{2}. \tag{1.3}$$

Как частный случай, при $m = 3$ задача (1.2) была решена для значений параметра

$$h = \cos\frac{\ell\pi}{n+2}, \qquad 1 \leq \ell \leq n+1.$$

В настоящей работе будет дано решение задачи (1.2) при $m = 3$ для остальных значений параметра $h \in (-1,1)$.

2. Редукция к одномерной задаче

Функция (1.1) является зональной, а точнее,

$$\chi_h(x) = \zeta_h(x_m), \qquad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{(m-1)},$$

где ζ_h — характеристическая функция отрезка $[h, 1]$:

$$\zeta_h(u) = \begin{cases} 0, & u \in [-1, h), \\ 1, & u \in [h, 1]. \end{cases}$$

Пусть $L_1^\phi(-1,1)$ есть пространство функций, суммируемых на $(-1,1)$ с весом (1.3), наделенное нормой

$$\|f\|_{L_1^\phi(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |f(u)|\,\phi(u)\,du. \tag{2.1}$$

Рассмотрим наилучшее приближение

$$E_n^\phi(\zeta_h) = E_{n,m}(h) = \inf\{\|\zeta_h - p_n\|_{L_1^\phi(-1,1)} : \quad p_n \in \mathcal{P}_n\} \tag{2.2}$$

“ступеньки” ζ_h в пространстве $L_1^\phi(-1,1)$ множеством $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,1}$ алгебраических многочленов (одного переменного). В работе автора [5, лемма 5] доказано следующее утверждение; в этом утверждении через $|\mathbb{S}^{m-2}|$ обозначена “площадь” единичной сферы $\mathbb{S}^{m-2} \subset \mathbb{R}^{m-1}$.

Лемма 1. *При любых $m \geq 3$, $n \geq 0$, $h \in (-1,1)$ имеет место формула*

$$e_{n,m}(\chi_h) = |\mathbb{S}^{m-2}|\, E_n^\phi(\zeta_h) \tag{2.3}$$

и, если многочлен p_n^* одного переменного является экстремальным в задаче (2.2) (*т. е. на нем достигается нижняя грань в* (2.2)), *то зональный многочлен $P_n^*(x) = p_n^*(x_m)$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, является экстремальным в задаче* (1.2).

Нетрудно понять, что величина (2.2) — четная по $h \in (-1,1)$; более того, если многочлен p_n^* является экстремальным в задаче (2.2) при некотором значении $h \in (-1,1)$, то многочлен $1 - p_n^*(-t)$ будет экстремальным в задаче (2.2) для параметра $-h$. Это же свойство имеет место и для задачи (1.2). Следовательно, задачи (2.2) и (1.2) достаточно решить для $h \in [0,1)$.

Относительно задачи о наилучшем приближении

$$E_n^{\phi}(\zeta) = \inf\{\|\zeta - p_n\|_{L_1^{\phi}(-1,1)} : \quad p_n \in \mathcal{P}_n\} \tag{2.4}$$

функции $\zeta \in L_1^{\phi}(-1,1)$ множеством $\mathcal{P}_n$ по норме (2.1) хорошо известен и часто используется следующий результат (см., например, [6, гл. 1, § 6]).

Лемма 2 (А. А. Марков). *Для того чтобы многочлен $p_n^* \in \mathcal{P}_n$ являлся экстремальным в задаче* (2.4), *достаточно, а если функция ζ и многочлен p_n^* не совпадают почти всюду на $(-1,1)$, то и необходимо, чтобы выполнялось соотношение*

$$\int\limits_{-1}^{1} \Big(\operatorname{sign}\big(\zeta(u) - p_n^*(u)\big)\Big)\, p_n(u)\phi(u)\, du = 0, \qquad p_n \in \mathcal{P}_n.$$

При этом

$$E_n^{\phi}(\zeta) = \left| \int\limits_{-1}^{1} \Big(\operatorname{sign}\big(\zeta(u) - p_n^*(u)\big)\Big)\, \zeta(u)\phi(u)\, du \right|.$$

Пусть $\mathcal{P}_{n+1}^1$ есть множество многочленов (одного переменного) порядка $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1. Рассмотрим задачу об исследовании величины

$$E_{n+1}^{\phi} = \inf\{\|g_{n+1}\|_{L_1^{\phi}(-1,1)} : \ g_{n+1} \in \mathcal{P}_{n+1}^1\}, \tag{2.5}$$

т. е. задачу о многочлене (одного переменного) порядка $n+1$ с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющемся от нуля по норме пространства $L_1^{\phi}(-1,1)$. Обозначим через q_{n+1}^* экстремальный многочлен (решение) задачи (2.5); этот многочлен существует и единственный. В силу леммы Маркова он характеризуется свойством ортогональности

$$\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign}\Big(q_{n+1}^*(u)\Big)\phi(u)p_n(u)\, du = 0, \qquad p_n \in \mathcal{P}_n. \tag{2.6}$$

Все $n+1$ нулей многочлена q_{n+1}^* простые и лежат на интервале $(-1,1)$. Обозначим через $h(k) = h(k,m) = h(k,m,n+1)$, $1 \le k \le n+1$, эти нули, занумерованные в порядке убывания индекса k; так что $h(1,m) > h(2,m) > \ldots > h(n+1,m)$. Вес ϕ является четной функцией, поэтому нули $h(k)$, $1 \le k \le n+1$, расположены симметрично относительно точки 0, т. е. $h(n+2-k) = -h(k)$, $1 \le k \le n+1$.

В работе автора [5] с использованием соображений работ Л. В. Тайкова [3; 4] и работы А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякина [1] выписано решение задачи (2.2), а в силу (2.3) и решение задачи (1.2) для значений $h = h(k,m,n+1)$, $1 \le k \le n+1$. Сейчас с использованием соображений работ [1; 2] это будет сделано для значений параметра h, удовлетворяющих условию $h(1) = h(1,m,n+1) \le |h| < 1$.

Теорема 1. *При всех $m \ge 2$, $n \ge 1$, $h(1) \le |h| < 1$ справедливы следующие утверждения.*
1) *Имеет место равенство*

$$E_n^{\phi}(\zeta_h) = \int\limits_{|h|}^{1} \phi(u)\, du. \tag{2.7}$$

2) *В случае $h(1) \le h < 1$ многочлен $p_n \equiv 0$ является экстремальным в задаче* (2.2); *в случае $-1 < h \le h(n+1,m,n+1) = -h(1)$ экстремальным является многочлен $p_n \equiv 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать утверждения теоремы при

$$1 > h \geq h(1) = h(1, m, n+1). \tag{2.8}$$

Многочлен $p_n \equiv 0$ дает для величины (2.2) оценку сверху

$$E_n^{\phi}(\zeta_h) \leq \|\zeta_h\|_{L_1^{\phi}(-1,1)} = \int\limits_h^1 \phi(u)\,du.$$

С другой стороны, для любого многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеем

$$\|\zeta_h - p_n\|_{L_1^{\phi}(-1,1)} = \int\limits_{-1}^1 |\zeta_h(u) - p_n(u)|\phi(u)dt \geq \left|\int\limits_{-1}^1 \operatorname{sign}\Big(q_{n+1}^*(u)\Big)(\zeta_h(u) - p_n(u))\phi(u)du\right|.$$

Применяя теперь свойство (2.6) и условие (2.8), делаем вывод, что

$$\|\zeta_h - p_n\|_{L_1^{\phi}(-1,1)} \geq \int\limits_h^1 \phi(u)du.$$

Отсюда следуют утверждения теоремы в предположении (2.8). Теорема 1 доказана. □

Соотношение (2.3) между задачами (1.2) и (2.2) приводит к следующему утверждению.

Теорема 2. *При всех $m \geq 2$, $n \geq 1$ для значений параметра h, удовлетворяющих условию $h(1) = h(1, m, n+1) \leq |h| < 1$, справедливы следующие утверждения.*

1) *Имеет место равенство*

$$e_{n,m}(h) = |\mathbb{S}^{m-2}| \int\limits_{|h|}^1 \phi(t)\,dt = |\mathbb{C}(|h|)|.$$

2) *В случае $h(1) = h(1, m, n+1) \leq h < 1$ многочлен $P_n \equiv 0$ является экстремальным в задаче* (1.2); *в случае $-1 < h \leq -h(1)$ экстремальным является многочлен $P_n \equiv 1$.*

Теорема 1, а значит, и теорема 2 при $m = 2$ доказаны А. Г. Бабенко и Ю. В. Крякиным [1].

Детализируем только что приведенные результаты для размерности $m = 3$. В этом случае $\phi \equiv 1$. Наименее уклоняющимся от нуля в пространстве $L(-1,1)$ с единичным весом является многочлен

$$\frac{U_{n+1}(z)}{2^{n+1}}, \tag{2.9}$$

полученный нормировкой многочлена Чебышева второго рода

$$U_{n+1}(z) = \frac{\sin(n+2)t}{\sin t}, \qquad t = \arccos z, \qquad z \in [-1, 1], \tag{2.10}$$

и величина наилучшего уклонения равна 2^{-n} (см., например, [6, гл. 1, § 6] или [7, гл. 3, § 6]). В силу представления (2.10) нулями многочлена (2.9) являются точки

$$h(k) = \cos\frac{k\pi}{n+2}, \qquad 1 \leq k \leq n+1.$$

Теорема 2 при $m = 3$ принимает следующий вид.

Теорема 3. *При $m = 3$, $n \ge 1$ для значений параметра h, удовлетворяющих условию*

$$h(1) = \cos\frac{\pi}{n+2} \le |h| < 1,$$

справедливы следующие утверждения.

1) *Имеет место равенство*

$$e_{n,3}(h) = 2\pi(1 - |h|).$$

2) *В случае $h(1) \le h < 1$ многочлен $P_n \equiv 0$ является экстремальным в задаче* (1.2); *в случае $-1 < h \le -h(1)$ экстремальным является многочлен $P_n \equiv 1$.*

Оставшаяся часть работы в основном будет посвящена решению задачи (1.2) при $m = 3$ для значений параметра h, удовлетворяющих условию

$$|h| \le h(1) = \cos\frac{\pi}{n+2}.$$

3. Вспомогательные результаты

Сопоставим тройке чисел $n \ge 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $q \in [-1, 1]$ полином (см. [2])

$$R_{q,\xi}(t) = \cos[(n+3)t + \xi] - 2q\cos[(n+2)t + \xi] + q^2\cos[(n+1)t + \xi]. \tag{3.1}$$

Полиномы такого вида встречались в исследованиях С. Н. Бернштейна (1912) в случае $\xi = 0$, Я. Л. Геронимуса (1935) в случае $\xi = -\pi/2$, а в общем случае ($\xi \in \mathbb{R}$) — в исследованиях Я. Л. Геронимуса (1939), а также Ф. Пейерсторфера (1979). Приведем известные (см. [2]) свойства полинома $R_{q,\xi}$.

Лемма 3. *При $q \in (-1, 1)$, $\xi \in \mathbb{R}$ полином $R_{q,\xi}$ обладает следующими свойствами.*

1) *Полином $R_{q,\xi}$ имеет $2n + 6$ различных нулей на торе $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$.*

2) *Нули $t_j(q, \xi)$ полинома $R_{q,\xi}$, расположенные в интервале $(0, \pi)$, являются убывающими функциями параметра $q \in (-1, 1)$.*

Следующая теорема в случае $q = \pm 1$ принадлежит А. А. Маркову, а в случае $|q| < 1$ содержится в более общем утверждении, которое доказал в 1939 г. Я. Л. Геронимус [8, теорема 1].

Теорема 4 (А. А. Марков, Я. Л. Геронимус). *При любых $n \ge 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, $q \in [-1, 1]$ выполняется соотношение ортогональности*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bigl(\operatorname{sign} R_{q,\xi}(t)\bigr)\, g_{n+1}(t)\, dt = 0, \qquad g_{n+1} \in \mathcal{T}_{n+1}.$$

В дальнейших рассуждениях для нас важен полином (3.1) при $\xi = -\pi/2$; в этом случае имеем

$$R_q(t) = R_{q,-\pi/2}(t) = \sin(n+3)t - 2q\sin(n+2)t + q^2\sin(n+1)t. \tag{3.2}$$

Для значений $q = \pm 1$ полином (3.2) принимает вид

$$R_{-1}(t) = 2(\cos t + 1)\sin(n+2)t, \qquad R_1(t) = 2(\cos t - 1)\sin(n+2)t. \tag{3.3}$$

Поскольку (3.2) — нечетный тригонометрический полином порядка $n + 3$, то отношение

$$Y_q(t) = \frac{R_q(t)}{\sin t} \tag{3.4}$$

является четным тригонометрическим полиномом порядка $n+2$. Для этого полинома справедлива формула

$$Y_q(t) = F_q(\cos t), \tag{3.5}$$

где $F_q = F_{q,n+2}$ — алгебраический многочлен порядка $n+2$. В силу (3.2) многочлен F_q имеет вид

$$F_q(z) = U_{n+2}(z) - 2qU_{n+1}(z) + q^2 U_n(z); \tag{3.6}$$

здесь $U_\nu,\ \nu \geq 0,$ — многочлены Чебышева второго рода, определенные на отрезке $[-1,1]$ формулой

$$U_\nu(z) = \frac{\sin(\nu+1)t}{\sin t}\Big|_{t=\arccos z}, \qquad z \in [-1,1].$$

В силу формул (3.3) при $q = \pm 1$ будем иметь

$$F_{-1}(z) = 2(z+1)U_{n+1}(z), \qquad F_1(z) = 2(z-1)U_{n+1}(z). \tag{3.7}$$

Как следствие теоремы 4 справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *При любых $n \geq 0,\ q \in [-1,1]$ выполняется свойство ортогональности*

$$\int_{-1}^{1} \big(\operatorname{sign} F_q(u)\big)\, p_n(u)\, du = 0, \qquad p_n \in \mathcal{P}_n. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n$ в интеграле левой части (3.8) сделаем замену $u = \cos t$; в результате получаем

$$\int_{-1}^{1} \big(\operatorname{sign} F_q(u)\big)\, p_n(u)\, du = \int_{0}^{\pi} \big(\operatorname{sign} R_q(t)\big)\, p_n(\cos t)\, \sin t\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\operatorname{sign} R_q(t)\big)\, p_n(\cos t)\, \sin t\, dt.$$

Второе равенство здесь имеет место в силу четности подынтегральной функции. Произведение $p_n(\cos t)\sin t$ является тригонометрическим полиномом порядка $n+1$, поэтому в силу теоремы 4 последний интеграл равен нулю. Лемма 4 доказана. □

Уточним необходимые нам в дальнейшем свойства нулей многочлена F_q, определенного формулой (3.6) и связанного с полиномом (3.1) соотношениями (3.2), (3.4), (3.5). При $-1 < q < 1$ в силу леммы 3 полином R_q имеет $n+2$ нуля $t_j = t_j(q)$, $j = 1, 2, \dots, n+2$, в интервале $(0,\pi)$; все они простые (различные между собой). Занумеруем эти нули в порядке возрастания:

$$0 < t_1 = t_1(q) < t_2 = t_2(q) < \ldots < t_{n+2} = t_{n+2}(q) < \pi.$$

Точки

$$h_j = h_j(q) = \cos t_j(q), \qquad j = 1, 2, \dots, n+2, \tag{3.9}$$

являются нулями многочлена F_q; поскольку этот многочлен имеет порядок $n+2$, то других нулей нет, все они простые и лежат на интервале $(-1,1)$. При $q = \pm 1$ в силу (3.7) нули многочлена F_q задаются формулами

$$h_j(1) = \cos\frac{(j-1)\pi}{n+2}, \qquad h_j(-1) = \cos\frac{j\pi}{n+2}, \qquad j = 1, 2, \dots, n+2; \tag{3.10}$$

все они лежат на отрезке $[-1,1]$. Введем обозначения

$$t_j(1)=\frac{(j-1)\pi}{n+2},\qquad t_j(-1)=\frac{j\pi}{n+2},\qquad j=1,2,\ldots,n+2.$$

Тогда нули (3.10) также можно записать в виде (3.9).

Сформулированные выше результаты работы [2] о нулях полинома R_q приводят к следующему утверждению о нулях многочлена $F_q=F_{q,n+2}$.

Лемма 5. *При любом $n\ge 0$ каждый из нулей*

$$h_j=h_j(q),\qquad 1\le j\le n+2,$$

многочлена F_q непрерывно зависит от параметра $q\in[-1,1]$ и с возрастанием q от -1 до $+1$ непрерывно возрастает от точки $h_j(-1)=\cos\dfrac{j\pi}{n+2}$ до точки $h_j(1)=\cos\dfrac{(j-1)\pi}{n+2}$, пробегая, таким образом, отрезок $\left[\cos\dfrac{j\pi}{n+2},\cos\dfrac{(j-1)\pi}{n+2}\right]$.

Доказательство. При $q\in[-1,1]$ многочлен (3.6) имеет $n+2$ простых нуля $h_j=h_j(q)=\cos t_j(q),\ j=1,2,\ldots,n+2$, лежащих на отрезке $[-1,1]$ и убывающих с возрастанием индекса j. К тому же каждый из нулей $h_j(q)$ возрастает по $q\in(-1,1)$.

Убедимся, что каждый из нулей $h_j(q),\ j=1,2,\ldots,n+2$, непрерывен по $q\in[-1,1]$ в любой точке $q_0\in[-1,1]$; в концевых точках $q_0=\pm1$ непрерывность понимается соответствующей односторонней. Для обоснования этого факта воспользуемся теоремой Гурвица о нулях аналитических функций (см., например, [9, гл. 8, § 2]). Из формулы (3.6) видно, что при $q\to q_0$ многочлен $F_q(z)$ сходится к многочлену $F_{q_0}(z)$ равномерно по z на любом компактном подмножестве комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Многочлен F_{q_0} имеет $n+2$ (простых) нуля $h_j(q_0),\ j=1,2,\ldots,n+2$, и все они лежат на отрезке $[-1,1]$. Обозначим через ε_0 наименьшее расстояние между парами этих нулей; поскольку нули различные, то $\varepsilon_0>0$. При любом ε, удовлетворяющем условию $0<\varepsilon<\varepsilon_0/2$, ε-окрестность $O_j(\varepsilon)=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-h_j(q_0)|<\varepsilon\}\subset\mathbb{C}$ нуля $h_j(q_0)$ содержит и лишь один этот нуль многочлена F_{q_0}. В силу теоремы Гурвица отсюда следует, что существует число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для каждого $q\in[-1,1]$ со свойством $|q-q_0|<\delta$ и при любом $j,\ 1\le j\le n+2$, в окрестности $O_j(\varepsilon)$ обязательно лежит и только один нуль многочлена F_q. Поскольку нули многочленов F_{q_0} и F_q одинаково упорядочены, то мы делаем вывод, что (при $|q-q_0|<\delta$, $q\in[-1,1]$) для любого $j,\ 1\le j\le n+2$, выполняется неравенство $|h_j(q)-h_j(q_0)|<\varepsilon$. Тем самым проверено, что действительно все нули многочлена F_q непрерывны по q на отрезке $[-1,1]$.

Поскольку к тому же каждый из нулей многочлена F_q возрастает по $q\in(-1,1)$, то заключаем, что уже на отрезке $q\in[-1,1]$ каждый из нулей $h_j=h_j(q),\ j=1,2,\ldots,n+2$, многочлена F_q непрерывно возрастает от значения $h_j(-1)=\cos\dfrac{j\pi}{n+1}$ до значения $h_j(1)=\cos\dfrac{(j-1)\pi}{n+1}$. Все утверждения леммы 5 обоснованы.

4. Исследование одномерной задачи

При $n\ge1,\ -1\le q\le1,\ 2\le\ell\le n+1$ обозначим через $G_{q,\ell}=G_{n,q,\ell}$ алгебраический многочлен порядка n, который в точках $h_j=h_j(q)=\cos t_j(q),\ 1\le j\le n+2,\ j\ne\ell$, интерполирует характеристическую функцию ζ_{h_ℓ} отрезка $[h_\ell,1]$.

Обсудим более детально случай $q=\pm1$. В силу (3.10) многочлены $F_{\pm1}$ имеют общие нули

$$h_{j+1}(1)=h_j(-1)=\cos\frac{j\pi}{n+2},\qquad j=1,2,\ldots,n+1,$$

кроме того, нулем многочлена F_1 является точка $h_1(1) = 1$, а нулем многочлена F_{-1} — точка $h_{n+2}(1) = -1$. В частности, это означает, что при $n \geq 2$ значению параметра

$$h = h_{\ell+1}(1) = h_\ell(-1) = \cos\frac{\ell\pi}{n+2}, \qquad \ell = 2, \dots, n, \tag{4.1}$$

соответствуют два несовпадающих между собой многочлена $G_{1,\ell+1}$ и $G_{-1,\ell}$. Первый из них интерполирует функцию ζ_h, $h = h_{\ell+1}(1) = h_\ell(-1)$, в точке $h_0 = 1$ и точках

$$h_j = \cos\frac{j\pi}{n+2}, \qquad j = 1, 2, \dots, n+1, \qquad j \neq \ell. \tag{4.2}$$

Второй многочлен интерполирует эту функцию в точках (4.2) и точке $h_{n+2} = -1$.

Теорема 5. *При* $n \geq 1$, $-1 \leq q \leq 1$ *для значений параметра*

$$h = h_\ell(q) = \cos t_\ell(q), \qquad 2 \leq \ell \leq n+1,$$

многочлен $G_{q,\ell}$ *является экстремальным в задаче* (2.2) (*в случае* $m = 3$), *причем*

$$E_n^\phi(\zeta_h) = \left|\int\limits_{h_\ell(q)}^{1} \operatorname{sign}\Big(F_q(u)\Big)du\right| = \left|\int\limits_0^{t_\ell(q)} \big(\operatorname{sign} R_q(t)\big)\sin t\,dt\right|. \tag{4.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отрезки

$$[h_{j+1}, h_j], \qquad 1 \leq j \leq n+1, \qquad j \neq \ell - 1, \quad j \neq \ell;$$

таких отрезков $n-1$, если $n > 1$, и их нет совсем, если $n = 1$. Многочлен $G_{q,\ell}$ принимает в концевых точках этих отрезков одинаковые значения (либо нулевые, либо равные единице). Поэтому внутри каждого из этих отрезков производная $G'_{q,\ell}$ имеет по крайней мере один нуль. Поскольку $G'_{q,\ell}$ есть алгебраический многочлен порядка $n-1$, то других нулей у него на отрезке $[-1,1]$ нет. Отсюда заключаем, что на отрезке $[h_{\ell+1}, h_{\ell-1}]$ производная $G'_{q,\ell}$ не обращается в нуль. Поэтому многочлен $G_{q,\ell}$ на этом отрезке возрастает от значения $G_{q,\ell}(h_{\ell+1}) = 0$ до значения $G_{q,\ell}(h_{\ell-1}) = 1$. В точке разрыва h_ℓ функции ζ_{h_ℓ} многочлен $G_{q,\ell}$ принимает положительное значение, меньшее единицы. Следовательно, всюду на $(-1,1)$, за исключением конечного числа точек, выполняется равенство

$$\operatorname{sign}(\zeta_{h_\ell} - G_{q,\ell}) = (-1)^{\ell+1}\operatorname{sign} F_q.$$

В силу леммы 4 знак разности $\zeta_{h_\ell} - G_{q,\ell}$ ортогонален множеству $\mathcal{P}_n$, а точнее, имеет место свойство (3.8). Отсюда и из леммы 2 следует, что многочлен $G_{q,\ell} \in \mathcal{P}_n$ является многочленом наилучшего приближения для функции ζ_h при $h = h_\ell$ в пространстве $L(-1,1)$. При этом

$$\begin{aligned} E_n^\phi(\zeta_h) &= \|\zeta_h - G_{q,\ell}\|_{L(-1,1)} \\ &= \int\limits_{-1}^{1} \big(\zeta_h(u) - G_{q,\ell}(u)\big)\operatorname{sign}\big(\zeta_h(u) - G_{q,\ell}(u)\big)\,du \\ &= \left|\int\limits_{-1}^{1} \zeta_h(u)\,\big(\operatorname{sign} F_q(u)\big)\,du - \int\limits_{-1}^{1} G_{q,\ell}(t)\,\big(\operatorname{sign} F_q(u)\big)\,du\right|. \end{aligned}$$

Согласно (3.8) последний интеграл равен нулю. Следовательно, имеет место (4.3). $\square$

З а м е ч а н и е 1. Согласно лемме 5 теорема 5 дает решение задачи (2.2) при $m = 3$, $n \ge 1$ для значений параметра h, удовлетворяющих условию

$$h_{n+1}(-1) = -\cos\frac{\pi}{n+2} \le h \le h_2(1) = \cos\frac{\pi}{n+2}. \tag{4.4}$$

З а м е ч а н и е 2. При $n \ge 2$ для значений (4.1) параметра h задачу (2.2) решают и многочлен $G_{1,\ell+1}$, и многочлен $G_{-1,\ell}$. Впрочем, в этом случае, как показано в [5, лемма 8], экстремальным является также и многочлен $H_\ell = H_{\ell,n-1}$ порядка $n-1$, который интерполирует функцию ζ_{h_ℓ} в n точках (4.2).

5. Основной результат

Теперь можно выписать решение задачи (1.2) при $n \ge 1,\ q \in [-1,1]$ для значений параметра $h = h_\ell(q),\ \ 2 \le \ell \le n+1$, где $h_j(q),\ \ 1 \le j \le n+2$, — нули многочлена $F_{q,n+2}$ порядка $n+2$, определенного формулой (3.6).

Теорема 6. *Пусть* $m = 3,\ \ n \ge 1,\ \ -1 \le q \le 1$. *Тогда для значений*

$$h = h_\ell(q) = \cos t_\ell(q), \qquad 2 \le \ell \le n+1,$$

справедливы следующие утверждения.

1) *Имеют место формулы*

$$e_{n,3}(h) = \left|\int\limits_{\mathbb{C}(h)} \operatorname{sign} F_q(x_3)\,dx\right| = 2\pi\left|\int\limits_{h_\ell(q)}^{1} \operatorname{sign} F_q(u)\,du\right|$$
$$= 2\pi\left|\int\limits_{0}^{t_\ell(q)} \big(\operatorname{sign} R_q(t)\big)\sin t\,dt\right|.$$

2) *Многочлен* $G_{q,\ell}$ *(порядка* n*) как зональный многочлен одного переменного* $t = x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, *является экстремальным в задаче* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения теоремы 6 следуют из леммы 1 и теоремы 5. $\square$

В силу замечания 2 при $m = 3$, $n \ge 2$ для значений (4.1) параметра h задачу (1.2) решают (зональные) многочлены $G_{1,\ell+1}$, $G_{-1,\ell}$ порядка n и многочлен $H_\ell = H_{\ell,n-1}$ порядка $n-1$, а следовательно, и произвольная выпуклая комбинация этих трех многочленов.

Теорема 6 дает решение задачи (1.2) при $m = 3$ для значений параметра h, удовлетворяющих условию (4.4). Таким образом, теоремы 3 и 6 вместе дают решение задачи (1.2) при $m = 3$ для всех значений $h \in (-1,1)$.

6. Обсуждение результатов

Обсудим полученные в этой работе и работе автора [5] результаты относительно величины (1.2) при $m = 3$; точнее, обсудим свойства этой величины как функции параметра $h \in [-1,1]$ (при фиксированном $n \ge 1$). В силу леммы 1 достаточно сделать это для величины (2.2), т. е. исследовать свойства функции

$$E(h) = E_n(h) = E_{n,3}(h), \qquad h \in [-1,1]. \tag{6.1}$$

Функция (6.1) является четной и непосредственно из определения (2.2) следует, что

$$E_n(-1) = E_n(1) = 0. \tag{6.2}$$

Помимо того, как частный случай (2.7) справедлива формула

$$E_n(h) = 1 - |h|, \qquad \cos\frac{\pi}{n+2} \le |h| \le 1. \tag{6.3}$$

Как было сказано выше, при $q \in [-1,1]$ все $n+2$ нуля многочлена (3.6) простые и лежат на отрезке $[-1,1]$ (и более того, на интервале $(-1,1)$, если $q \in (-1,1)$). Для нулей многочлена (3.6) (и как частный случай, (3.7)) будем использовать обозначение $h(\ell) = h_\ell(q) = h(\ell,q)$, $1 \le \ell \le n+2$; предполагается, что нули упорядочены по убыванию. Положим $h(0) = 1$.

В силу теоремы 5 при $n \ge 1$, $-1 \le q \le 1$ для значений параметра $h = h(\ell,q)$, $2 \le \ell \le n+1$, имеет место формула

$$E_n(h) = \left|\int\limits_{h(\ell,q)}^{1} \operatorname{sign}\Big(F_q(u)\Big)du\right|.$$

Поскольку нули $\{h(k)\}_{k=1}^{n+2}$ многочлена F_q простые, то имеем

$$E_n(h(\ell)) = \left|\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k-1}\left(h(k-1) - h(k)\right)\right|.$$

Преобразуя последнее выражение, получаем

$$E_n(h(\ell)) = \left|\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k-1}h(k-1) - \sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k-1}h(k)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{\ell-1}(-1)^k h(k) + \sum_{k=1}^{\ell}(-1)^k h(k)\right| = \left|h(0) + 2\sum_{k=1}^{\ell-1}(-1)^k h(k) + (-1)^\ell h(\ell)\right|.$$

И, окончательно,

$$E_n(h(\ell)) = \left|1 + 2\sum_{k=1}^{\ell-1}(-1)^k h(k) + (-1)^\ell h(\ell)\right|. \tag{6.4}$$

Рассмотрим более детально эту формулу при $q = -1$ и $q = 1$. Исходя из формул (3.10), положим

$$h^*(k) = h_{k+1}(1) = h_k(-1) = \cos\frac{k\pi}{n+2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1.$$

В силу (6.4) (при $1 \le \ell \le n+1$) имеем

$$E_n(h^*(\ell)) = \left|1 + 2\left(\sum_{k=1}^{\ell-1}(-1)^k \cos\frac{k\pi}{n+2}\right) + (-1)^\ell \cos\frac{\ell\pi}{n+2}\right|$$

$$= \left|1 + 2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos k\Big(\pi - \frac{\pi}{n+2}\Big) + \cos\ell\Big(\pi - \frac{\pi}{n+2}\Big)\right| = \left|1 + 2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos ky + \cos\ell y\right|;$$

здесь

$$y = y_n = \pi - \frac{\pi}{n+2}.$$

Применяя известную формулу для ядра Дирихле, находим (см., например, [10, гл. 2, § 5])

$$\mathcal{D}_\ell(y) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\ell-1}\cos ky + \cos\ell y = \frac{\sin\Big(\ell + \dfrac{1}{2}\Big)y}{\sin\dfrac{y}{2}} - \cos\ell y$$

$$= \frac{\sin\left(\ell + \dfrac{1}{2}\right)y - \cos\ell y \, \sin\dfrac{y}{2}}{\sin\dfrac{y}{2}} = \frac{\sin\ell y\cos\dfrac{y}{2}}{\sin\dfrac{y}{2}} = \frac{\sin\ell y}{\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}}.$$

В точке $y = y_n$ будем иметь

$$\mathcal{D}_\ell(y_n) = \frac{\sin\ell y_n}{\operatorname{tg}\dfrac{y_n}{2}} = \frac{\sin\ell y_n}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(n+2)}} = (-1)^{\ell+1}\frac{\sin\dfrac{\ell\pi}{n+2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(n+2)}}.$$

Следовательно,

$$E_n(h^*(\ell)) = \frac{\sin\dfrac{\ell\pi}{n+2}}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2(n+2)}}. \tag{6.5}$$

Эта формула доказана, вообще говоря, для ℓ, удовлетворяющих условию $2 \le \ell \le n+1$. В соответствии с (6.2) она справедлива для $\ell = 0$ и $\ell = n+2$. Как частный случай (6.3) имеем $E_n(h^*(1)) = 1 - \cos\dfrac{\pi}{n+2}$, но это означает, что формула (6.5) верна и при $\ell = 1$ ($\ell = n+1$). Таким образом, формула (6.5) справедлива при всех $0 \le \ell \le n+2$. Формулу (6.5) можно переписать в такой форме:

$$E_n(h^*(\ell)) = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}\right)\sqrt{1 - \cos^2\frac{\ell\pi}{n+2}}, \qquad 0 \le \ell \le n+2,$$

или

$$E_n(h) = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}\right)\sqrt{1-h^2}, \qquad h = h(\ell) = \cos\frac{\ell\pi}{n+2}, \qquad 0 \le \ell \le n+2. \tag{6.6}$$

Выписанная в этом разделе информация о функции $E_n(h)$, $h \in [-1,1]$, позволяет построить ее график. Построение графика может быть осуществлено в несколько этапов.

1) Построить график функции

$$\epsilon_n(h) = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2(n+2)}\right)\sqrt{1-h^2}, \qquad h \in [-1,1]. \tag{6.7}$$

2) Поместить на этот график $n+3$ точки (6.6).

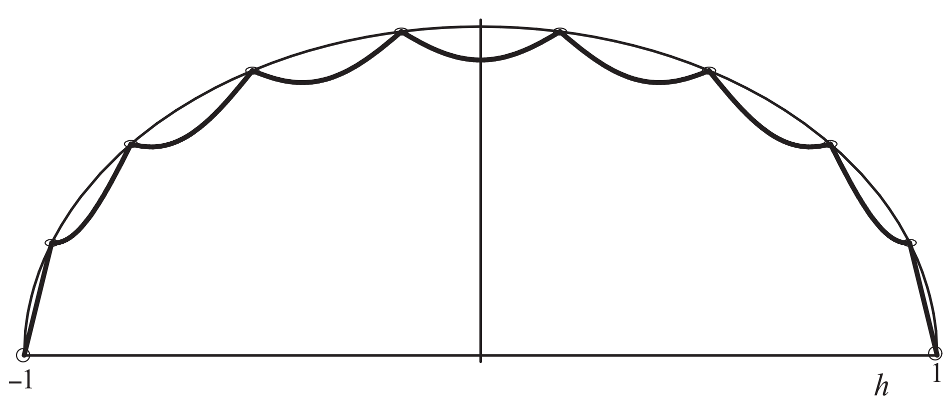


Рис. 1. График функции $E_7(h)$.

3) На каждом из отрезков

$$\left[\cos\frac{\ell\pi}{n+2}, \cos\frac{(\ell-1)\pi}{n+2}\right], \qquad 2 \le \ell \le n+1,$$

построить график функции (6.1) по следующей схеме, используя для этого параметрическое представление

$$(h(\ell, q), E_n(h(\ell, q))), \qquad q \in [-1, 1].$$

3.1) Выбрать достаточно густую сетку значений $q = q(j)$, $1 \le j \le J$, на промежутке $[-1, 1]$.

3.2) Для каждого такого значения q найти $n+2$ нуля $h(\ell) = h(\ell, q)$, $1 \le \ell \le n+2$, и упорядочить их по убыванию: $h(1) > h(2) > \ldots > h(n+2)$.

3.3) Для каждого из n значений аргумента $h(\ell)$, $2 \le \ell \le n+1$, вычислить $E_n(h(\ell))$ по формуле (6.4). Поместить все n точек $(h(\ell), E_n(h(\ell)))$, $2 \le \ell \le n+1$, на график функции.

3.4) Этап 3.3 повторить для всех значений $q = q(j)$, $1 \le j \le J$, параметра $q \in [-1, 1]$.

4) Добавить на график линейные участки (6.3).

На рисунке изображены для $n = 7$ графики функции (6.1) (полужирная линия) и функции (6.7) (тонкая линия); кружками отмечены точки (6.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, № 1. С. 27–56.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 19–37.
3. **Тайков Л.В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 3. С. 205–211.
4. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 6. С. 116–121.
5. **Дейкалова М.В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
6. **Даугавет И.К.** Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.
7. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука: Физматлит, 1979. 416 с.
8. **Геронимус Я.Л.** Об одной задаче F. Riesz'а и обобщенной задаче Чебышева — Коркина — Золотарева // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 279–288.
9. **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. 388 с.
10. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.

Дейкалова Марина Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский государственный университет им. А. М. Горького
e-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

Поступила 3.05.2010

Том 16 № 4 2010

УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНАМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАВНОМЕРНЫМИ УЗЛАМИ[1]

П. Г. Жданов, В. Т. Шевалдин

Для линейного дифференциального оператора третьего порядка вида $\mathcal{L}_3 = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$ (D — символ дифференцирования; β, γ и δ — попарно различные действительные числа) на классе функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$, где $\mathcal{L}_2 = (D-\beta)(D-\gamma)$, найдена точная поточечная оценка погрешности аппроксимации построенными авторами ранее локальными неинтерполяционными $\mathcal{L}$-сплайнами с равномерными узлами, соответствующими оператору $\mathcal{L}_3$.

Ключевые слова: аппроксимация, локальные $\mathcal{L}$-сплайны, равномерные узлы.

P. G. Zhdanov, V. T. Shevaldin. Approximation by third-order local $\mathcal{L}$-splines with uniform nodes.

For a third-order linear differential operator of the form $\mathcal{L}_3 = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta)$ (D is the differentiation symbol and β, γ, and δ are pairwise distinct real numbers) on the class of functions $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$, where $\mathcal{L}_2 = (D-\beta)(D-\gamma)$, a sharp pointwise estimate is found for the error of approximation by local noninterpolational $\mathcal{L}$-spines with uniform nodes corresponding to the operator $\mathcal{L}_3$; these splines were constructed by the authors earlier.

Keywords: approximation, local $\mathcal{L}$-splines, uniform nodes.

Введение

В работе [1] авторами предложен новый метод кусочно-экспоненциальной аппроксимации функций, заданных на равномерной сетке, построенный на основе локальных неинтерполяционных $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка с равномерными узлами, соответствующих произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка с постоянными действительными коэффициентами вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D^3 + a_2D^2 + a_1D + a_0 \quad (a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}),$$

где D — символ дифференцирования. Были установлены сглаживающие и формосохраняющие свойства (близкие к локальной монотонности и локальной выпуклости) построенных локальных $\mathcal{L}$-сплайнов.

Настоящая работа продолжает исследования [1] в случае, если все корни характеристического оператора $\mathcal{L}_3$ являются действительными и попарно различными. Изучается погрешность аппроксимации построенными в [1] локальными $\mathcal{L}$-сплайнами (в частности, при стремлении шага сетки к нулю) соболевских классов функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$, задаваемых с помощью линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_2$ второго порядка, характеристический многочлен которого является делителем характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_3$. Обширную библиографию по рассматриваемым вопросам см., например, в [1–6].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00325) и УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 09-С-1-1007.

1. Предварительные результаты

Пусть все три корня характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_3$ являются действительными и попарно различными. Кроме того, для удобства дальнейшего изложения будем считать, что среди них нет нуля, т. е. оператор $\mathcal{L}_3$ может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta) \qquad (\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}),$$

причем $\beta \neq \gamma,\ \gamma \neq \delta,\ \delta \neq \beta,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0,\ \delta \neq 0$ (мы сохраняем все обозначения работы [1]).

Введем функцию

$$\varphi_3(t) = (\gamma-\delta)e^{\beta t} + (\delta-\beta)e^{\gamma t} + (\beta-\gamma)e^{\delta t},$$

являющуюся решением линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_3(D)f = 0$ и удовлетворяющую условию $\varphi_3(0) = \varphi_3'(0) = 0$. Пусть $h > 0$ и

$$m = \Big(\frac{e^{\delta h}-e^{\gamma h}}{\delta-\gamma}\,\frac{\beta-\delta}{e^{\beta h}-e^{\delta h}}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}}\frac{1}{(e^{\beta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(\delta-\beta)}. \tag{1.1}$$

B-$\mathcal{L}$-сплайном с носителем $[-3h/2, 3h/2]$ и равномерными узлами $-3h/2,\ -h/2,\ h/2,\ 3h/2$, соответствующим оператору $\mathcal{L}_3$, называется функция вида

$$B(x) = m\Big[\varphi_3\Big(\Big(x+\frac{3h}{2}\Big)_+\Big) + A\varphi_3\Big(\Big(x+\frac{h}{2}\Big)_+\Big) + C\varphi_3\Big(\Big(x-\frac{h}{2}\Big)_+\Big)\Big],$$

где

$$\varphi_3(t_+) = \begin{cases} \varphi_3(t), & t \geq 0,\\ 0, & t < 0,\end{cases}$$

и константы A и C выбираются так, чтобы имели место равенства $B(3h/2) = B'(3h/2) = 0$. Нетрудно проверить, что тогда

$$A = -(e^{\beta h}+e^{\gamma h}+e^{\delta h}), \quad C = -(e^{(\delta+\gamma)h}+e^{(\gamma+\beta)h}+e^{(\beta+\delta)h}).$$

Кроме того, в силу свойств функции φ_3 имеем $B(-3h/2) = B'(-3h/2) = 0$ и $B \in C^1(\mathbb{R})$. Нормирующий множитель m (см. (1.1)) в определении B-$\mathcal{L}$-сплайна был выписан авторами в [1], причем из леммы 2 [1] следует, что при таком выборе m имеет место неравенство

$$B(x) > 0, \qquad x \in \Big(-\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\Big). \tag{1.2}$$

Функция $B(x)$ при $x \in [-3h/2, 3h/2]$ может быть записана в виде

$$B(x) = m\begin{cases} (\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})} + (\beta-\delta)e^{\delta(x+\frac{3h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{3h}{2}, -\dfrac{h}{2}\Big],\\ -(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} & \\ -\ (\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{h}{2}, \dfrac{h}{2}\Big],\\ (\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)(e^{(\delta+\beta)h})e^{\gamma(x-\frac{h}{2})} & \\ +\ (\beta-\gamma)(e^{(\beta+\gamma)h})e^{\delta(x-\frac{h}{2})}, & x \in \Big[\dfrac{h}{2}, \dfrac{3h}{2}\Big].\end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть число ε (см. равенство (5) в [1]) есть решение уравнения

$$e^{(\beta-\gamma)\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)h} = \frac{(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(\delta-\beta)}{(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}, \tag{1.4}$$

т. е.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)h}\ln\frac{(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(\delta-\beta)}{(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}.$$

Пусть f — произвольная функция, определенная на числовой оси $\mathbb{R}$. Локальный $\mathcal{L}$-сплайн третьего порядка, соответствующий функции f, был определен в работе [1] формулой

$$S(x) = S(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B(x-jh), \quad y_j = f((j+\varepsilon)h). \tag{1.5}$$

При $x \in [(l-1/2)h,(l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ из (1.3) и (1.5) следует, что $\mathcal{L}$-сплайн может быть записан в виде

$$S(x) = m\Big\{y_{l-1}\Big[(\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)} + (\delta-\beta)e^{(\delta+\beta)h}e^{\gamma\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)} + (\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)}\Big]$$

$$+ y_l\Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)} - (\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)}\Big]$$

$$+ y_{l+1}\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)} + (\delta-\beta)e^{\gamma\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)} + (\beta-\gamma)e^{\delta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)}\Big]\Big\}. \tag{1.6}$$

Ключевым моментом данной схемы являлся выбор параметров $\varepsilon = \varepsilon(\beta,\gamma,\delta,h)$ и $m = m(\beta,\gamma,\delta,h)$. Лемма 1 из [1] утверждает, что $\varepsilon \in (-1/2,\ 1/2)$, а лемма 4 [1] — что имеют место равенства

$$S(e^{\beta\bullet},x) = e^{\beta x}, \qquad S(e^{\gamma\bullet},x) = e^{\gamma x} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.7}$$

В [1] были доказаны формосохраняющие и сглаживающие свойства построенных локальных $\mathcal{L}$-сплайнов на классе функций

$$W_\infty = \{f\colon\ f' \in AC,\ \|e^{-\delta\bullet}(D-\beta)(D-\gamma)f(\bullet)\|_\infty \le 1\}.$$

Здесь AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$ — класс функций f, существенно ограниченных на $\mathbb{R}$, с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

В настоящей работе мы изучаем аппроксимативные свойства локальных $\mathcal{L}$-сплайнов вида (1.5) на другом на классе функций:

$$W_\infty^{\mathcal{L}_2} = \{f\colon\ f' \in AC,\ \|\mathcal{L}_2(D)f\|_\infty \le 1\},$$

где $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = (D-\beta)(D-\gamma)$. В дальнейшем нам потребуется еще одно равенство, связывающее параметры m и ε.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$me^{\beta\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)h}(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}-e^{\beta h})(e^{\delta h}-e^{\beta h}) = 1.$$

Доказательство. Из (1.1) и (1.4) получаем, что левая часть приведенной формулы имеет вид

$$\Big(\frac{e^{\delta h}-e^{\gamma h}}{\delta-\gamma}\,\frac{\beta-\delta}{e^{\beta h}-e^{\delta h}}\Big)^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}}\Big(\frac{e^{\gamma h}-e^{\delta h}}{e^{\delta h}-e^{\beta h}}\,\frac{\delta-\beta}{\gamma-\delta}\Big)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}\frac{(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}-e^{\beta h})(e^{\delta h}-e^{\beta h})}{(e^{\beta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\gamma h})(\delta-\beta)}.$$

Легко видеть, что полученное выражение равно 1.

2. Оценка погрешности аппроксимации

Рассмотрим функцию

$$G(x) = \frac{m}{\beta\gamma}\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)}(e^{\gamma h}-1)(e^{\delta h}-1) + (\delta-\beta)e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)}(e^{\beta h}-1)(e^{\delta h}-1)$$
$$+ (\beta-\gamma)e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}(e^{\beta h}-1)(e^{\gamma h}-1)\Big] - \frac{1}{\beta\gamma}. \tag{2.1}$$

Из дальнейших рассуждений (см. доказательство теоремы) будет следовать, что $G(x) \geq 0$ при $x \in [-h/2, h/2]$.

Теорема. *Пусть β, γ, δ — попарно различные действительные числа, отличные от нуля. Тогда имеет место поточечное равенство*

$$\sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} |f(x) - S(x)| = G(x - lh), \qquad x \in \Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h, \Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big] \qquad (l \in \mathbb{Z}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы разобьем на несколько этапов. Вначале для произвольной функции $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ получим интегральное представление разности $S(x) - f(x)$. Любая функция $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ может быть записана в виде

$$f(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\gamma x} + \int_0^x \varphi_2(x-t)u(t)\,dt, \tag{2.2}$$

где C_1 и C_2 — произвольные действительные коэффициенты, $u(t) = \mathcal{L}_2(D)f(t)$ и φ_2 — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_2(D)f = (D-\beta)(D-\gamma)f = 0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 1$. Нетрудно понять, что

$$\varphi_2(t) = \frac{e^{\beta t} - e^{\gamma t}}{\beta - \gamma}. \tag{2.3}$$

Пусть $S(x) = S(f, x)$ — локальный $\mathcal{L}$-сплайн, определенный формулой (1.5). Из (1.6) следует, что на отрезке $[(l-1/2)h, (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ сплайн $S(x)$ зависит от трех значений функции f: y_{l-1}, y_l и y_{l+1}. Из (2.2) имеем

$$y_j = f((j+\varepsilon)h) = C_1 e^{\beta(j+\varepsilon)h} + C_2 e^{\gamma(j+\varepsilon)h} + \int_0^{(j+\varepsilon)h} \varphi_2((j+\varepsilon)h - t)u(t)\,dt \quad (j = l-1, l, l+1). \tag{2.4}$$

Подставляя значения y_{l-1}, y_l и y_{l+1} в (1.6), убеждаемся в том, что на отрезке $[(l-1/2)h, (l+1/2)h]$ сплайн $S(x)$ представим в виде сумм неинтегральной части (обозначим ее через M) и нескольких интегралов. Докажем равенство

$$M = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\gamma x}, \tag{2.5}$$

которое означает, что неинтегральные части у функции $f(x)$ (см. (2.2)) и сплайна $S(x)$ совпадают. Из (1.6) и (2.2) имеем

$$M = M_1 + M_2 + M_3,$$

где

$$M_1 = m e^{\beta\left(x - lh + \frac{h}{2}\right)}(\gamma - \delta)\Big\{e^{(\gamma+\delta)h}\Big[C_1 e^{\beta(l-1+\varepsilon)h} + C_2 e^{\gamma(l-1+\varepsilon)h}\Big]$$
$$-(e^{\gamma h} + e^{\delta h})\Big[C_1 e^{\beta(l+\varepsilon)h} + C_2 e^{\gamma(l+\varepsilon)h}\Big] + C_1 e^{\beta(l+1+\varepsilon)h} + C_2 e^{\gamma(l+1+\varepsilon)h}\Big\},$$

$$M_2 = me^{\gamma\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)}(\delta-\beta)\Big\{e^{(\delta+\beta)h}\Big[C_1e^{\beta(l-1+\varepsilon)h}+C_2e^{\gamma(l-1+\varepsilon)h}\Big]$$
$$-\ (e^{\beta h}+e^{\delta h})\Big[C_1e^{\beta(l+\varepsilon)h}+C_2e^{\gamma(l+\varepsilon)h}\Big]+C_1e^{\beta(l+1+\varepsilon)h}+C_2e^{\gamma(l+1+\varepsilon)h}\Big\},$$
$$M_3 = me^{\delta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)}(\beta-\gamma)\Big\{e^{(\beta+\gamma)h}\Big[C_1e^{\beta(l-1+\varepsilon)h}+C_2e^{\gamma(l-1+\varepsilon)h}\Big]$$
$$-\ (e^{\beta h}+e^{\gamma h})\Big[C_1e^{\beta(l+\varepsilon)h}+C_2e^{\gamma(l+\varepsilon)h}\Big]+C_1e^{\beta(l+1+\varepsilon)h}+C_2e^{\gamma(l+1+\varepsilon)h}\Big\}.$$

Легко видеть, что выражение в фигурных скобках в последнем равенстве обращается в нуль. Поэтому $M = M_1 + M_2$. Преобразуем M_1 с учетом (1.1), (1.4) и леммы 1:

$$M_1 = me^{\beta\left(x-lh+\frac{h}{2}\right)}(\gamma-\delta)\Big\{C_1\Big[e^{\beta(l-1+\varepsilon)h+(\gamma+\delta)h}-(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(l+\varepsilon)h}+e^{\beta(l+1+\varepsilon)h}\Big]$$
$$+\,C_2\Big[e^{\gamma(l-1+\varepsilon)h+(\gamma+\delta)h}-(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\gamma(l+\varepsilon)h}+e^{\gamma(l+1+\varepsilon)h}\Big]\Big\}$$
$$= me^{\beta\left(x+\varepsilon+\frac{1}{2}\right)h}(\gamma-\delta)C_1(e^{\gamma h}+e^{\beta h})(e^{\delta h-\beta h}-1) = me^{\beta(\varepsilon-\frac{1}{2})x}(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}-e^{\beta h})(e^{\delta h}-e^{\beta h})C_1e^{\beta x}.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением из леммы 1, получаем, что $M_1 = C_1e^{\beta x}$. Аналогично устанавливается равенство $M_2 = C_2e^{\gamma x}$. Таким образом, равенство (2.5) доказано.

Из (1.3), (1.6) и (2.2)–(2.5) следует, что при $x\in[(l-1/2)h,(l+1/2)h]$ $(l\in\mathbb{Z})$ разность $S(x)-f(x)$ может быть представлена в виде

$$S(x)-f(x) = B(x-(l-1)h)\int\limits_0^{(l-1+\varepsilon)h}\varphi_2((l-1+\varepsilon)h-t)u(t)\,dt$$
$$+\ B(x-lh)\int\limits_0^{(l+\varepsilon)h}\varphi_2((l+\varepsilon)h-t)u(t)\,dt$$
$$+\ B(x-(l+1)h)\int\limits_0^{(l+1+\varepsilon)h}\varphi_2((l+1+\varepsilon)h-t)u(t)\,dt-\int\limits_0^{x}\varphi_2(x-t)u(t)\,dt. \tag{2.6}$$

Заметим, что в силу (1.7) и (2.3)

$$\int\limits_0^{(l-1+\varepsilon)h}\big\{[\varphi_2((l-1+\varepsilon)h-t)B(x-(l-1)h)+\varphi_2((l+\varepsilon)h-t)B(x-lh)$$
$$+\ \varphi_2((l+1+\varepsilon)h-t)B(x-(l+1)h)]-\varphi_2(x-t)\big\}u(t)\,dt$$
$$= \int\limits_0^{(l-1+\varepsilon)h}[S(\varphi_2(x-t),x)-\varphi_2(x-t)]u(t)\,dt = 0.$$

Поэтому из (2.6) выводим интегральное представление для разности

$$S(x)-f(x) = \int\limits_{(l-1+\varepsilon)h}^{(l+1+\varepsilon)h}K(x,t)u(t)\,dt, \qquad x\in\Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h,\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big] \qquad (l\in\mathbb{Z}), \tag{2.7}$$

в котором ядро $K(x,t)$ имеет вид

$$K(x,t) = B(x-lh)\varphi_2(((l+\varepsilon)h-t)_+)+B(x-(l+1)h)\varphi_2(((l+\varepsilon+1)h-t)_+)-\varphi_2((x-t)_+). \tag{2.8}$$

При исследовании равенства (2.7) далее, не нарушая общности, будем считать, что $l=0$. Тогда равенство (2.7) принимает вид

$$S(x)-f(x)=B(x)\int\limits_{(\varepsilon-1)h}^{\varepsilon h}\varphi_2(\varepsilon h-t)u(t)\,dt$$

$$+\;B(x-h)\int\limits_{(\varepsilon-1)h}^{(\varepsilon+1)h}\varphi_2((\varepsilon+1)h-t)u(t)\,dt-\int\limits_0^x\varphi_2(x-t)u(t)\,dt,\qquad x\in\Big[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\Big],\tag{2.9}$$

причем с учетом (1.3) для $x\in[-h/2,h/2]$ имеем

$$B(x)=m\Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)}-(\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)}-(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big],$$

$$B(x-h)=m\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)}+(\delta-\beta)e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)}+(\beta-\gamma)e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big].\tag{2.10}$$

Напомним, что число ε определено формулой (1.4) и из леммы 1 [1] следует, что $\varepsilon\in(-1/2,1/2)$. Дальнейшее исследование равенства (2.9) проведем в двух случаях:

$$\text{(a)}\quad -\mathrm{h}/2\le \mathrm{x}\le\varepsilon\mathrm{h},\qquad \text{(b)}\quad \varepsilon\mathrm{h}\le\mathrm{x}\le\mathrm{h}/2,$$

следуя схеме работы [2], в которой данная задача рассматривалась в случае $\delta=0$.

С л у ч а й (a). При $-h/2\le x\le\varepsilon h$ из (2.9) выводим:

$$S(x)-f(x)=\int\limits_{(\varepsilon-1)h}^{x}B_1(x,t)u(t)\,dt+\int\limits_{x}^{\varepsilon h}B_2(x,t)u(t)\,dt+\int\limits_{\varepsilon h}^{(\varepsilon+1)h}B_3(x,t)u(t)\,dt,\tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned}B_1(x,t)&=B(x)\varphi_2(\varepsilon h-t)+B(x-h)\varphi_2((\varepsilon+1)h-t)-\varphi_2(x-t),\\ B_2(x,t)&=B(x)\varphi_2(\varepsilon h-t)+B(x-h)\varphi_2((\varepsilon+1)h-t),\\ B_3(x,t)&=\varphi_2((\varepsilon+1)h-t).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Из определения функции φ_2 (см. (2.3)) легко следует, что $B_3(x,t)\ge0$ при $t\le(\varepsilon+1)h$.

Лемма 2. *При $-h/2\le x\le\varepsilon h$ имеют место следующие неравенства*:
(1) $B_1(x,t)\ge0$ при $(\varepsilon-1)h\le t\le x$,
(2) $B_2(x,t)\ge0$ при $x\le t\le\varepsilon h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.10) и (2.12) имеем

$$B_1(x,t)=e^{-\beta t}\alpha(x,t),$$

где

$$\alpha(x,t)=\alpha_1+\alpha_2\theta,\quad \theta=e^{(\beta-\gamma)t},\quad \alpha_1=\alpha_1(x),\quad \alpha_2=\alpha_2(x).$$

Функция α при фиксированном x линейна по θ. Поэтому для доказательства неотрицательности функции $B_1(x,t)$ при указанных значениях параметров x и t достаточно проверить два неравенства:

$$B_1(x,(\varepsilon-1)h)\ge0,\qquad B_1(x,x)\ge0\qquad \Big(x\in\Big[-\frac{h}{2},\varepsilon h\Big]\Big).$$

Второе неравенство в силу свойств функции φ_2 и неравенства (1.2) очевидно. Докажем, что

$$B_1(x,(\varepsilon-1)h) = B(x)\varphi_2(h) + B(x-h)\varphi_2(2h) - \varphi(x-(\varepsilon-1)h) = 0 \tag{2.13}$$

при любом $x \in [-h/2, h/2]$. Отсюда будет следовать утверждение (1) леммы 2. В силу (2.10) имеем

$$B_1(x,(\varepsilon-1)h) = \frac{m(e^{\beta h}-e^{\gamma h})}{\beta-\gamma}\Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)}$$
$$-(\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)} - (\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big]$$
$$+\frac{m(e^{2\beta h}-e^{2\gamma h})}{\beta-\gamma}\Big[(\gamma-\delta)(e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)}+(\delta-\beta)e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)}+(\beta-\gamma)e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big]-\frac{e^{\beta(x-(\varepsilon-1)h)}-e^{\gamma(x-(\varepsilon-1)h)}}{\beta-\gamma}.$$

Обозначив для краткости $x+h/2 = u \in [0,h]$ и применив лемму 1, получим

$$B_1(x,(\varepsilon-1)h) = \frac{e^{\beta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)h}}{(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)(\beta-\gamma)}\Big\{(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta u}$$
$$+(\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma u}+(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta u}-(e^{\beta h}+e^{\gamma h})$$
$$\times\Big[(\gamma-\delta)(e^{\beta u}+(\delta-\beta)e^{\gamma u}+(\beta-\gamma)e^{\delta u}\Big]\Big\} - \frac{e^{\beta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)h}}{\beta-\gamma}\Big[e^{\beta u}-e^{\gamma u}e^{(\beta-\gamma)\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)h}\Big].$$

Подставляя в это равенство выражение (1.4) и приводя дроби к общему знаменателю, выводим, что $B_1(x,(\varepsilon-1)h) = 0$. Второе утверждение леммы сразу следует из определения функции φ_2 (см. (2.3)) и неравенства (1.2). Лемма 2 доказана. □

С л у ч а й (b). Пусть $\varepsilon h \le x \le h/2$. Из (2.9) выводим интегральное представление

$$S(x)-f(x) = \int\limits_{(\varepsilon-1)h}^{\varepsilon h} A_1(x,t)u(t)\,dt + \int\limits_{\varepsilon h}^{x} A_2(x,t)u(t)\,dt + \int\limits_{x}^{(\varepsilon+1)h} A_3(x,t)u(t)\,dt, \tag{2.14}$$

где

$$A_1(x,t) = B(x)\varphi_2(\varepsilon h - t) + B(x-h)\varphi_2((\varepsilon+1)h-t) - \varphi_2(x-t),$$
$$A_2(x,t) = B(x-h)\varphi_2((\varepsilon+1)h-t) - \varphi_2(x-t),$$
$$A_3(x,t) = B(x-h)\varphi_2((\varepsilon+1)h-t). \tag{2.15}$$

Из (1.2) и (2.3) легко следует, что $A_3(x,t) \ge 0$ при $\varepsilon h \le x \le h/2$ и $x \le t \le (\varepsilon+1)h$.

Лемма 3. *При $\varepsilon h \le x \le h/2$ имеют место следующие неравенства*:
(1) $A_1(x,t) \ge 0$ *при* $(\varepsilon-1)h \le t \le \varepsilon h$,
(2) $A_2(x,t) \ge 0$ *при* $\varepsilon h \le t \le x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.10) и (2.15) имеем

$$A_2(x,t) = m\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)} + (\delta-\beta)e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)} + (\beta-\gamma)e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big]$$
$$\times\frac{e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)}-e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)}}{\beta-\gamma} - \frac{e^{\beta(x-t)}-e^{\gamma(x-t)}}{\beta-\gamma} = e^{-\beta t}\tau(x,t), \tag{2.16}$$

где $\tau(x,t) = \tau_1 + \tau_2\theta,\ \theta = e^{(\beta-\gamma)t},\ \tau_1 = \tau_1(x),\ \tau_2 = \tau_2(x)$. Функция τ при фиксированном x линейна по переменной θ. Поэтому для доказательства неравенства $A_2(x,t) \ge 0$ при $\varepsilon h \le t \le x$ достаточно проверить два неравенства: $A_2(x,\varepsilon h) \ge 0,\ A_2(x,x) \ge 0\ (x \in [\varepsilon h, h/2])$. Второе неравенство очевидно, поскольку $A_2(x,x) = B(x-h)\varphi_2((\varepsilon+1)h - x) \ge 0$ в силу свойств функций $\varphi_2(t)$ и $B(x)$. Докажем первое неравенство. Обозначим $u = x - h/2 \in [\varepsilon h - h/2, 0] \subset [-h, 0]$. Из (2.16) с помощью леммы 1 получим

$$A_2(x,\varepsilon h) = \frac{e^{\beta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)h}}{(e^{\gamma h}-e^{\beta h})(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta(u+h)} + (\delta-\beta)e^{\gamma(u+h)} + (\beta-\gamma)e^{\delta(u+h)}\Big]$$

$$\times\frac{e^{\beta h}-e^{\gamma h}}{\beta-\gamma} - \frac{e^{\beta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)h}}{\beta-\gamma}\Big[e^{\beta u} - e^{\gamma u}e^{(\beta-\gamma)\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)h}\Big].$$

Подставляя в это равенство выражение (1.4) и приводя дроби к общему знаменателю, приходим к равенству

$$A_2(x,\varepsilon h) = \frac{e^{\beta\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)h}e^{\delta h}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h}-e^{\beta h})(\gamma-\delta)}\Big[-(\gamma-\delta)e^{\beta u} - (\beta-\gamma)e^{\gamma u} - (\delta-\beta)e^{\delta u}\Big].$$

Сравнивая это выражение с (1.3), заключаем, что

$$A_2(x,\varepsilon h) = e^{\delta h}\frac{e^{\beta h}-e^{\gamma h}}{\beta-\gamma}B(x-h) \ge 0 \tag{2.17}$$

при $\varepsilon h \le x \le h/2$. Таким образом, утверждение (2) леммы 3 доказано.

Исследуем функцию $A_1(x,t)$ при $\varepsilon h \le x \le h/2$, $(\varepsilon-1)h \le t \le \varepsilon h$. Ясно, что

$$A_1(x,t) = e^{-\beta t}\nu(x,t), \quad \text{где} \quad \nu(x,t) = \nu_1 + \nu_2\theta, \quad \theta = e^{(\beta-\gamma)t}, \quad \nu_1 = \nu_1(x), \quad \nu_2 = \nu_2(x).$$

Поэтому по аналогии с предыдущими рассуждениями для доказательства утверждения (1) леммы 3 достаточно проверить два неравенства:

$$A_1(x,(\varepsilon-1)h) \ge 0, \qquad A_1(x,\varepsilon h) \ge 0 \qquad \Big(x \in \Big[\varepsilon h, \frac{h}{2}\Big]\Big).$$

Второе неравенство $A_1(x,\varepsilon h) = B(x-h)\varphi_2(h) - \varphi_2(x-\varepsilon h) = A_2(x,\varepsilon h) \ge 0$ сразу следует из (2.17). По поводу первого неравенства $A_1(x,(\varepsilon-1)h) \ge 0$ остается заметить, что

$$A_1(x,(\varepsilon-1)h) = B(x)\varphi_2(h) + B(x-h)\varphi_2(2h) - \varphi_2(x-(\varepsilon-1)h) = B_1(x,(\varepsilon-1)h) = 0$$

в силу равенства (2.13). Лемма 3 полностью доказана. □

Идейная сторона лемм 2 и 3 состоит в том, что в представлениях (2.11) и (2.14) для разности $S(x) - f(x)$ все ядра (т. е. функции в интегралах, являющиеся множителями перед функцией $u(t)$) неотрицательны. Это позволяет для оценки сверху уклонения $|f(x) - S(x)|$ на классе функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ при каждом $x \in [-h/2, h/2]$ функцию

$$u(t) = \mathcal{L}_2(D)f(t) = (D-\beta)(D-\gamma)f(t)$$

заменить на 1 и затем вычислить соответствующие интегралы, воспользовавшись, например, формулой (2.9). Имеем

$$|f(x) - S(x)| \le m\Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)}$$

$$-(\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big]\Big(\frac{e^{\beta h}-1}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}-1}{\gamma}\Big)\frac{1}{\beta-\gamma}$$

$$+ m\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta\left(x+\frac{h}{2}\right)} + (\delta-\beta)e^{\gamma\left(x+\frac{h}{2}\right)} + (\beta-\gamma)e^{\delta\left(x+\frac{h}{2}\right)}\Big]$$

$$\times\Big(\frac{e^{\beta(x-(\varepsilon-1)h)}-1}{\beta}-\frac{e^{\gamma(x-(\varepsilon-1)h)}-1}{\gamma}\Big)\frac{1}{\beta-\gamma},\qquad x\in\Big[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\Big],$$

причем правая часть в этом неравенстве представляет собой неотрицательную функцию на отрезке $x\in[-h/2,h/2]$. Элементарные преобразования с использованием леммы 1 показывают, что правая часть последнего неравенства в точности равна функции $G(x)$, определенной формулой (2.1). Таким образом, переходя от случая $l=0$ к любому целому числу l, получаем, что для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ имеет место поточечное неравенство

$$|f(x)-S(x)|\le G(x-lh),\qquad x\in\Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h,\Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big]\qquad(l\in\mathbb{Z}).$$

Причем из доказательства теоремы 1 (а именно из лемм 2 и 3) следует, что полученное неравенство при каждом фиксированном x является точным, поскольку знак равенства в нем реализует любая функция f (зависящая от x), являющаяся решением линейного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_2(D)f(t)=1,\ t\in[(l-1+\varepsilon)h,(l+1+\varepsilon)h]$, где число ε определено формулой (1.4). Теорема полностью доказана. $\square$

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_2}}\|f-S\|_{C(\mathbb{R})}=\max_{x\in[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]}G(x)=\|G\|_{C[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]}.$$

3. Замечания

Выясним порядок аппроксимации изучаемыми локальными $\mathcal{L}$-сплайнами класса функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ при стремлении шага сетки h к нулю.

З а м е ч а н и е 1. Имеет место равенство

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_2}}\|f-S\|_{C(\mathbb{R})}=O(h^2)\qquad(h\to 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратимся к равенствам (2.7) и (2.8). Ясно, что $m=O(h^{-2})$ при $h\to 0$ (см. (1.1)), а $\varphi_2(t)=O(t),\ \varphi_3(t)=O(t^2)$ при $t\to 0$. Поэтому из определения B-$\mathcal{L}$-сплайна следует, что $B(x)=O(1)$ при $h\to 0$. Значит, функция $K(x,t)$, определенная формулой (2.8), удовлетворяет соотношению

$$|K(x,t)|=O(h)\qquad(h\to 0)$$

при всех $x\in[(l-1/2)h,(l+1/2)h],\ t\in[(l-1+\varepsilon)h,(l+1+\varepsilon)h]$ и каждом фиксированном $l\in\mathbb{Z}$, где c — некоторая положительная константа. Поэтому из (2.7) для любой функции $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ при любом $x\in\mathbb{R}$ получаем, что $|f(x)-S(x)|=O(h^2)$ $(h\to 0)$.

З а м е ч а н и е 2. При $\delta=0$ теорема доказана В. Т. Шевалдиным [2]. Оценка погрешности в этом случае может быть также выведена из теоремы предельным переходом при $\delta\to 0$. Оказывается, что при $\delta=0$ функция $G(x)$ не зависит от x (см. (2.1)), а именно

$$G(x)=\frac{m}{\beta\gamma}(\beta-\gamma)(e^{\beta h}-1)(e^{\gamma h}-1)-\frac{1}{\beta\gamma},$$

где число m определено формулой (1.1) при $\delta=0$.

З а м е ч а н и е 3. Частный случай $\delta=0,\ \beta=-\gamma$ исследован ранее в работе К. В. Костоусова и В. Т. Шевалдина [3]. Этот случай интересен тем, что $\varepsilon=0$ и для 1-периодических функций величина

$$\sup_{f\in\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2}}\|f-S\|_{C(\mathbb{R})}$$

погрешности аппроксимации локальными $\mathcal{L}$-сплайнами класса периодических функций $\widetilde{W}^{\mathcal{L}_2}_{\infty}$ при $h = 1/2n$ $(n \in \mathbb{N})$ в точности совпадает с величиной поперечника по Колмогорову $d_{2n}(\widetilde{W}^{\mathcal{L}_2}_{\infty})_{\infty}$ этого класса в равномерной метрике (в случае $\beta = \gamma = \delta = 0$ этот факт доказан Ю. Н. Субботиным [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные L-сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Збiрник праць Iн-ту математики НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 124–141.
2. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными L-сплайнами, соответствующими линейному дифференциальному оператору второго порядка // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. Т. 12, № 2. С. 195–213.
3. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by Local Exponential Splines // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2004. P. 147–157.
4. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 1. С. 996–1003.
5. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 391–402.
6. **Субботин Ю.Н.** Формосохраняющая экспоненциальная аппроксимация // Изв. вузов. Математика. 2009. Т. 11. С. 53–60.

Жданов Павел Георгиевич
магистрант 2-го года обучения
Уральский государственный университет им. А. М. Горького
e-mail: Blaze1986@e1.ru

Поступила 1.02.2010

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518

ОЦЕНКИ СУММ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

В. П. Заставный

В работе рассматриваются следующие две задачи. Задача 1: при каких условиях на последовательность конечных подмножеств $A_k \subset \mathbb{Z}$ и последовательность функций $\lambda_k: \ A_k \to \mathbb{C}$ существует число C такое, что для любой функции $f \in L_1$ выполняется неравенство $\|U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)\|_p \le C\|f\|_1$, и чему равна точная константа в этом неравенстве? Здесь $U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)c_m(f)e^{imx}\big|$, а $c_m(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$. Задача 2: при каких условиях на последовательность конечных подмножеств $A_k \subset \mathbb{Z}$ функция $\sum_{k=1}^{\infty}\big|\sum_{m\in A_k}c_m(h)e^{imx}\big|$ принадлежит L_p для любой функции h ограниченной вариации?

Ключевые слова: тригонометрический ряд, теоремы Харди — Литтлвуда.

V. P. Zastavnyi. Estimates for sums of moduli of blocks from trigonometric Fourier series.

We consider the following two problems. Problem 1: what conditions on a sequence of finite subsets $A_k \subset \mathbb{Z}$ and a sequence of functions $\lambda_k: \ A_k \to \mathbb{C}$ provide the existence of a number C such that any function $f \in L_1$ satisfies the inequality $\|U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)\|_p \le C\|f\|_1$ and what is the exact constant in this inequality? Here, $U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)c_m(f)e^{imx}\big|$ and $c_m(f)$ are Fourier coefficients of the function $f \in L_1$. Problem 2: what conditions on a sequence of finite subsets $A_k \subset \mathbb{Z}$ guarantee that the a function $\sum_{k=1}^{\infty}\big|\sum_{m\in A_k}c_m(h)e^{imx}\big|$ belongs to L_p for every function h of bounded variation?

Keywords: trigonometric series, Hardy–Littlewood theorems.

1. Введение

Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно множества натуральных, целых, неотрицательных целых, вещественных и комплексных чисел. Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $V(\mathbb{T})$ — класс 2π-периодических функций ограниченной вариации на периоде $\mathbb{T}$ и $V(f)$ — вариация на периоде функции $f \in V(\mathbb{T})$. Пусть $L_p = L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, классы 2π-периодических измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)|: \ t \in [-\pi,\pi]\} \quad \text{и} \quad \|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$ определяются по формулам

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\,, \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\,, \quad k \in \mathbb{Z}_+\,,$$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{a_{|k|}(f) - ib_{|k|}(f)\operatorname{sign} k}{2}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

В работе исследуются следующие две задачи.

З а д а ч а 1. Пусть $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность непустых конечных подмножеств из $\mathbb{Z}$, т. е. $A_k \ne \varnothing$, $A_k \subset \mathbb{Z}$ и число элементов в A_k конечно. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ —

соответствующая последовательность функций $\lambda_k : \ A_k \to \mathbb{C}$. По функции $f \in L_1$ определим функцию

$$U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{m\in A_k} \lambda_k(m) c_m(f) e^{imx} \Bigg|, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

При каких условиях на $\mathcal{A}$ и Λ существует число $C_p \ge 0$, $1 \le p \le \infty$, такое, что для любой функции $f \in L_1$ выполняется неравенство

$$\|U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)\|_p \le C_p \, \|f\|_1\,, \tag{1.1}$$

и чему равна точная константа в этом неравенстве?

В разд. 2 настоящей работы доказано следующее утверждение (см. теорему 4): *указанная в неравенстве* (1.1) *константа $C_p \ge 0$, $1 \le p \le \infty$, существует тогда и только тогда, когда*

$$H_{\mathcal{A},\Lambda}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{m\in A_k} \lambda_k(m) e^{imt} \Bigg| \in L_p\,,$$

и в этом случае наименьшая в неравенстве (1.1) *константа $C_p(\mathcal{A},\Lambda) = (2\pi)^{-1}\|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_p$.* В этом же разделе также рассмотрены и решены аналогичные задачи при $p = \infty$ отдельно для четных и нечетных функций.

Если $\lambda_k(m) = c_m(h)$, то задача 1 тесно связана со следующей задачей, которая в частных случаях при $p = \infty$, $p = 1$ и $p = 2$ была рассмотрена соответственно в работах [3; 4; 8; 9], [12; 13] и [11].

З а д а ч а 2. Пусть $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность непустых конечных подмножеств из $\mathbb{Z}$. Для функции $h \in L_1$ определим функцию

$$V_{\mathcal{A},h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{m\in A_k} c_m(h) e^{imx} \Bigg|, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2}$$

При каких условиях на p, $1 \le p \le \infty$, и на последовательность множеств $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ для любой функции $h \in V(\mathbb{T})$ выполняется условие $V_{\mathcal{A},h} \in L_p$?

Если $h_q(x) = e^{iqx}$, $q \in \mathbb{Z}$, то $V_{\mathcal{A},h_q}(x)$ тождественно равно числу тех множеств A_k, которые содержат точку q. Так как при любом $q \in \mathbb{Z}$ функция $e^{iqx} \in V(\mathbb{T})$, то в задаче 2 число тех A_k, которые содержат точку q, должно быть конечно. А так как конечное число слагаемых в (1.2) не влияет на условие $V_{\mathcal{A},h} \in L_p$, то в этой задаче можно считать, что $q \notin A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Например, можно считать, что $0 \notin A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и в этом случае определим функцию

$$V_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{m\in A_k} \frac{e^{imx}}{m} \Bigg|, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.3}$$

Относительно задачи 2 в случае *симметричных множеств* известны следующие результаты. Пусть $\{n_k\}_{k\ge 1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge 1}$ — две последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1 \le n_k \le \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, а $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : \ n_k \le |m| \le \nu_k\}$, $k \in \mathbb{N}$. В этом случае функции (1.2) и (1.3) соответственно имеют вид

$$V_{\mathcal{A},h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{|m|=n_k}^{\nu_k} c_m(h) e^{imx} \Bigg|, \qquad V_{\mathcal{A}}(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \Bigg| \sum_{m=n_k}^{\nu_k} \frac{\sin mx}{m} \Bigg|.$$

В 2004, 2007 гг. доказан следующий критерий принадлежности L_1 на классе $V(\mathbb{T})$ (утверждения 1) $\Rightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 3) в этом критерии доказал в 2004 г. С. А. Теляковский [12], утверждение 3) $\Longleftrightarrow$ 4) доказал в 2007 г. Р. М. Тригуб [13], а утверждение 4) $\Longleftrightarrow$ 1) — О. И. Кузнецова [13]).

Теорема 1 [12; 13]. *Пусть $\{n_k\}_1^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\nu_k = n_{k+1}-1$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\sum_{k=1}^\infty n_k^{-1}\ln(1+\min\{n_k, n_{k+1}-n_k\})<\infty$.

2) *Функция* $V_{\mathcal{A},h}\in L_1$ *для любой функции* $h\in V(\mathbb{T})$.

3) $V_{\mathcal{A}}\in L_1$.

4) $\sum_{k=1}^\infty n_{k+1}^{-1}\ln(n_{k+1}-n_k+1)<\infty$.

Отметим, что эквивалентность условий 1) и 3) в этом критерии вытекает также из результатов А. С. Белова [2, теорема 3].

В 2007 г. А. С. Белов и С. А. Теляковский [3; 4] доказали следующий критерий принадлежности L_∞ на классе $V(\mathbb{T})$.

Теорема 2 [3; 4]. *Пусть $\{n_k\}_1^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел ($n_1=1$), $\nu_k=n_{k+1}-1$, $k\in\mathbb{N}$, и $s_n:=\sum_{j:\ n_j\ge n} n_j^{-1}\min\{n, n_{j+1}-n_j\}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *Последовательность s_n, $n\in\mathbb{N}$, ограничена.*

2) *Подпоследовательность s_{n_k}, $k\in\mathbb{N}$, ограничена.*

3) *Для любой $h\in V(\mathbb{T})$ функция $V_{\mathcal{A},h}$ ограничена на $\mathbb{R}$.*

4) *Функция $V_{\mathcal{A}}$ ограничена на $\mathbb{R}$.*

Утверждение 1) $\Rightarrow$ 2) очевидно. Утверждение 2) $\Rightarrow$ 3) вытекает из теоремы 3 работы [3]. Утверждение 3) $\Rightarrow$ 4) очевидно. Утверждение 4) $\Rightarrow$ 1) вытекает из теоремы 2 работы [3].

В работах [3; 10] исследованы общие свойства последовательностей $\{n_k\}_1^\infty$, для которых последовательность s_n, $n\in\mathbb{N}$, из теоремы 2 является ограниченной. В работе [3, следствие 1] также доказано следующее утверждение: если подпоследовательность s_{n_k}, $k\in\mathbb{N}$, ограничена, а функция $h\in V(\mathbb{T})$ и $\alpha_m=a_m(h)$, $\beta_m=b_m(h)$, $m\in\mathbb{Z}_+$, то для любой функции $f\in L_1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{m=n_k}^{n_{k+1}-1}\alpha_m a_m(f)+\beta_m b_m(f)\right|\le C\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt\,,\quad \text{где}\ \ C=(3+\sup_{k\ge1}s_{n_k})\frac{V(h)}{\pi}\,.$$

В случае, когда $\{n_k\}_1^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\nu_k=n_{k+1}-1$, $k\in\mathbb{N}$, С. А. Теляковский [11] в 2005 г. доказал следующее достаточное условие принадлежности L_2: *если ряд* $\sum_{k=1}^\infty n_k^{-1}\sqrt{\min\{n_k,n_{k+1}-n_k\}}$ *сходится, то* $V_{\mathcal{A}}\in L_2$. В [11] также доказано, что если $V_{\mathcal{A}}\in L_2$, то функция $V_{\mathcal{A},h}\in L_2$ для любой функции $h\in V(\mathbb{T})$.

Из результатов А. С. Белова [2, теорема 4] (2006 г.) вытекает следующий критерий принадлежности функции $V_{\mathcal{A}}$ классу L_p, $1<p<\infty$.

Теорема 3 (А. С. Белов [2]). *Пусть $\{n_k\}_1^\infty$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\nu_k=n_{k+1}-1$. Тогда функция $V_{\mathcal{A}}\in L_p$, $1<p<\infty$, в том и только в том случае, когда сходится ряд*

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}:\,n_k\ge q}\ \sum_{m=n_k}^{n_k+\min\{n_{k+1}-n_k,\,q\}-1}\frac{1}{m}\Bigg)^p. \tag{1.4}$$

Отметим, что сходимость ряда (1.4) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^2}\Bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}:\,n_k\ge q}\frac{\min\{n_{k+1}-n_k,\,q\}}{n_k}\Bigg)^p. \tag{1.5}$$

Это следует из следующих простых неравенств, в которых $n,p\in\mathbb{N}$ и $n\le p$:

$$\sum_{m=n}^{p}\frac{1}{m}\le\frac{p-n+1}{n}\,,\quad \sum_{m=n}^{p}\frac{1}{m}\ge\ln\frac{p+1}{n}\,,\quad \ln(1+x)\ge Cx,\quad x\in[0,1]\,,\quad C>0\,.$$

В разд. 3 настоящей работы при самых общих предположениях доказано утверждение (см. лемму 2): *если* $p \in [1, \infty]$, *то функция* $V_{\mathcal{A},h} \in L_p$ *для любой функции* $h \in V(\mathbb{T}) \iff V_{\mathcal{A}} \in L_p$.

Из него и теоремы 3 сразу получается следующий критерий принадлежности L_p, $p \in (1, \infty)$, на классе $V(\mathbb{T})$.

Следствие 1. *Пусть* $\{n_k\}_1^\infty$ — *строго возрастающая последовательность натуральных чисел,* $\nu_k = n_{k+1} - 1$. *Тогда при фиксированном* $p \in (1, \infty)$ *следующие три условия эквивалентны*:
1) *Функция* $V_{\mathcal{A},h} \in L_p$ *для любой функции* $h \in V(\mathbb{T})$.
2) $V_{\mathcal{A}} \in L_p$.
3) *Сходится ряд* (1.5).

В разд. 3 в случае общих симметричных множеств $A_k := \{m \in \mathbb{Z} : \ n_k \le |m| \le \nu_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, где $\{n_k\}_{k \ge 1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge 1}$ — две последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1 \le n_k \le \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, получены простые достаточные и отдельно необходимые условия принадлежности функции $V_{\mathcal{A}}$ классу L_p. В качестве примера рассмотрен случай, когда $n_k = [f(k)]$, $\nu_k = n_{k+1} - 1$, $k \in \mathbb{N}$, где $f(x) := x + (x+2)^\alpha \ln^\beta(x+2) \ln^\gamma(\ln(x+2))$, $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $\gamma \ge 0$.

2. Решение задачи 1

Теорема 4. *Указанная в неравенстве* (1.1) *константа* $C_p \ge 0$, $1 \le p \le \infty$, *существует тогда и только тогда, когда* $H_{\mathcal{A},\Lambda}(t) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \Bigl| \sum\limits_{m \in A_k} \lambda_k(m) e^{imt} \Bigr| \in L_p$, *и в этом случае наименьшая в неравенстве* (1.1) *константа* $C_p(\mathcal{A}, \Lambda) = (2\pi)^{-1} \|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_p$.

З а м е ч а н и е 1. *Если* $\{u_k(x)\}_{k \ge 1}$ — *последовательность функций, непрерывных на отрезке* $[a, b]$, *а* $U(x) := \sum_{k=1}^\infty |u_k(x)|$, $x \in [a, b]$, *то функция* U *ограничена на* $[a, b] \iff U \in L_\infty[a, b]$, *и в этом случае* $\sup_{[a,b]} U(x) = \operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} U(x)$.

Необходимость в этом утверждении очевидна, а если $U \in L_\infty[a, b]$, то для любого натурального n и при почти всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^n |u_k(x)| \le \operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} U(t)$. Из непрерывности функций $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, вытекает, что последнее неравенство выполняется для всех $x \in [a, b]$ и, значит, $\sup_{[a,b]} U(x) \le \operatorname{ess\,sup}_{[a,b]} U(x) \le \sup_{[a,b]} U(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4.

Достаточность. Для любой функции $f \in L_1$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\Bigl| \sum_{m \in A_k} \lambda_k(m) c_m(f) e^{imx} \Bigr| = \frac{1}{2\pi} \Bigl| \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m \in A_k} \lambda_k(m) e^{im(x-t)} f(t) dt \Bigr| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \sum_{m \in A_k} \lambda_k(m) e^{im(x-t)} \Bigr| |f(t)| dt\,.$$

Если $p = \infty$ и $H_{\mathcal{A},\Lambda} \in L_\infty$, то $U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)(x) \le (2\pi)^{-1} \|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_\infty \|f\|_1$ и, значит, неравенство (1.1) выполняется с $C_\infty = (2\pi)^{-1} \|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_\infty$.

Если $1 \le p < \infty$ и $H_{\mathcal{A},\Lambda} \in L_p$, то, учитывая обобщенное неравенство Минковского (см., например, [5, гл. I, (9.12)] или [7, теорема 2.4]), получаем

$$\|U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)\|_p \le \biggl(\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\mathcal{A},\Lambda}(x - t)\, |f(t)|\, dt \Bigr)^p dx \biggr)^{1/p}$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \biggl(\int_{-\pi}^{\pi} (H_{\mathcal{A},\Lambda}(x - t)\, |f(t)|)^p \, dx \biggr)^{1/p} dt = \frac{1}{2\pi} \|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_p \, \|f\|_1\,.$$

Поэтому неравенство (1.1) выполняется с $C_p = (2\pi)^{-1} \|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_p$.

Необходимость. Предположим, что для некоторой константы C_p неравенство (1.1) справедливо для любой $f \in L_1$. Пусть $g(x) = (1 - |x|)_+$, $x \in \mathbb{R}$, и $f_n(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k/n)e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$, (ядро Фейера). Хорошо известно, что при любых $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $f_n(t) \geq 0$. Тогда по предположению имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)g(m/n)e^{imx}\Big| \leq C_\infty \int\limits_{-\pi}^{\pi}|f_n(t)|\,dt = C_\infty\, 2\pi \quad (p=\infty)\,,$$

$$\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)g(m/n)e^{imx}\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p} \leq C_p\, 2\pi \quad (1\leq p<\infty).$$

В последних неравенствах переходим к пределу при $n \to +\infty$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)e^{imx}\Big| \leq C_\infty\, 2\pi \quad (p=\infty)\,,$$

$$\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)e^{imx}\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p} \leq C_p\, 2\pi \quad (1\leq p<\infty).$$

Таким образом, $\|H_{\mathcal{A},\Lambda}\|_p \leq C_p\, 2\pi$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Если $p = \infty$ и неравенство (1.1) выполняется с некоторой константой C_∞ для любой функции $f \in L_1$, то, учитывая замечание 1, для любой функции $f \in L_1$ выполняется неравенство

$$U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)c_m(f)\Big| \leq C_\infty\,\|f\|_1\,. \tag{2.1}$$

И наоборот: если для любой функции $f \in L_1$ выполняется неравенство (2.1), то в этом неравенстве вместо функции f можно брать функцию $f_x(t) := f(t+x)$, а тогда для любой функции $f \in L_1$ и для любых $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$U_{\mathcal{A},\Lambda}(f)(x) = U_{\mathcal{A},\Lambda}(f_x)(0) \leq C_\infty\,||f_x||_1 = C_\infty\,||f||_1\,.$$

Таким образом, при $p = \infty$ задача о справедливости неравенства (1.1) для любой функции $f \in L_1$ эквивалентна аналогичной задаче для неравенства (2.1). Кроме того, наименьшие константы в этих неравенствах совпадают.

Запишем постановку задачи для неравенства (2.1) через коэффициенты $a_m(f)$ и $b_m(f)$.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность непустых конечных подмножеств из $\mathbb{Z}_+$, а $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — две последовательности функций $\varphi_k, \psi_k : A_k \to \mathbb{C}$.

При каких условиях на $\mathcal{A}$, Φ и Ψ существует число $C \geq 0$ такое, что для любой функции $f \in L_1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\varphi_k(m)a_m(f) + \psi_k(m)b_m(f)\Big| \leq C\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\;dt\ ? \tag{2.2}$$

Эта задача является частным случаем задачи для неравенства (2.1), в которой $\widetilde{A_k} = A_k \bigcup(-A_k)$ при $k \geq 1$, $\lambda_k(0) = 2\varphi_k(0)$, если $0 \in \widetilde{A_k}$, и $\lambda_k(m) = \varphi_k(|m|) + i\psi_k(|m|)\operatorname{sign} m$ при $m \in \widetilde{A_k}$, $m \neq 0$. Учитывая, что $c_m(f) = (a_{|m|}(f) - ib_{|m|}(f)\operatorname{sign} m)/2$ при $m \in \mathbb{Z}$, имеем

$$U_{\widetilde{\mathcal{A}},\Lambda}(f)(0) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\varphi_k(m)a_m(f) + \psi_k(m)b_m(f)\Big|.$$

Функция $H_{\widetilde{\mathcal{A}},\Lambda}(t)$ из теоремы 4 имеет вид

$$H_{\widetilde{\mathcal{A}},\Lambda}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\varphi_k(m)\cos mt - \psi_k(m)\sin mt\Big|.$$

Из замечания 2 и теоремы 4 сразу получается

Следствие 2. *Указанная в неравенстве* (2.2) *константа* $C \geq 0$ *существует тогда и только тогда, когда функция* $W_{\mathcal{A},\Phi,\Psi}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\big|\sum_{m\in A_k}\varphi_k(m)\cos mt + \psi_k(m)\sin mt\big| \in L_\infty$, *и в этом случае наименьшая в неравенстве* (2.2) *константа равна*: $C(\mathcal{A},\Phi,\Psi) = \pi^{-1}\|W_{\mathcal{A},\Phi,\Psi}\|_\infty$.

Рассмотрим следующие две задачи.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность непустых конечных подмножеств из $\mathbb{Z}_+$, а $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций $\lambda_k: \ A_k \to \mathbb{C}$. При каких условиях на $\mathcal{A}$ и Λ существует число $C \geq 0$ такое, что для любой *нечетной* функции $f \in L_1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)b_m(f)\Big| \leq C\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\;dt\;? \tag{2.3}$$

Аналогично, при каких условиях на $\mathcal{A}$ и Λ существует число $C \geq 0$ такое, что для любой *четной* функции $f \in L_1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)a_m(f)\Big| \leq C\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\;dt\;? \tag{2.4}$$

Следствие 3. 1) *Для того чтобы имело место неравенство* (2.3) *с некоторой константой* $C \geq 0$ *и для любой нечетной функции* $f \in L_1$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$F_{\mathcal{A},\Lambda}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)\sin mt\Big| \in L_\infty,$$

и в этом случае наименьшая в неравенстве (2.3) *константа* $C(\mathcal{A},\Lambda) = \pi^{-1}||F_{\mathcal{A},\Lambda}||_\infty$.

2) *Для того чтобы имело место неравенство* (2.4) *с некоторой константой* $C \geq 0$ *и для любой четной функции* $f \in L_1$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$G_{\mathcal{A},\Lambda}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)\cos mt\Big| \in L_\infty,$$

и в этом случае наименьшая в неравенстве (2.4) *константа* $C(\mathcal{A},\Lambda) = \pi^{-1}\|G_{\mathcal{A},\Lambda}\|_\infty$.

Для доказательства необходимости и формулы для точной константы нам понадобятся следующие определение и лемма.

О п р е д е л е н и е. Функция $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определенной на $\mathbb{R}$, если для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ и $\{c_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum_{k,j=1}^{n} c_k\overline{c_j}\;h(x_k - x_j) \geq 0$ (см., например, [1; 14]).

Положительно определенными являются, например, функции e^{iax}, $\cos ax$, $(1-|ax|)_+$ при любом параметре $a \in \mathbb{R}$.

Лемма 1 (Р. М. Тригуб [14, 6.5.2]). *Пусть функция* $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, *является положительно определенной, непрерывной, с компактным носителем. Тогда* $\sum_{k\in\mathbb{Z}}h(k)e^{ikt} \geq 0$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство леммы можно найти, например, в [15, lemma 9(1)].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Докажем утверждение 1).

Достаточность. Если функция $F_{\mathcal{A},\Lambda} \in L_\infty$, то из следствия 2 вытекает, что неравенство (2.3) выполняется с константой $C = \pi^{-1}||F_{\mathcal{A},\Lambda}||_\infty$.

Необходимость докажем двумя методами. Первый метод. Предположим, что для некоторой константы C неравенство (2.3) справедливо для любой *нечетной* функции $f \in L_1$.

Пусть $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — произвольная положительно определенная, непрерывная, четная с компактным носителем функция. Тогда по лемме 1 и по предположению получаем, что для любого натурального p справедливы соотношения

$$S(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{ikt} \geq 0\,, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \sin pt\, S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(h(k-p) - h(k+p))\sin kt\,;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)(h(m-p) - h(m+p))\Big| \leq C\int_{-\pi}^{\pi}|\sin pt\, S(t)|\,dt \leq C\int_{-\pi}^{\pi}|S(t)|\,dt = C\,2\pi h(0)\,. \quad (2.5)$$

В неравенстве (2.5) берем $h(x) = g(x)g_0(\varepsilon x)$, где $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — произвольная положительно определенная, непрерывная, четная функция (носитель любой), а $g_0(x) = (1 - |x|)_+$, $\varepsilon > 0$, и переходим к пределу при $\varepsilon \to +0$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)(g(m-p) - g(m+p))\Big| \leq C\,2\pi g(0)\,.$$

В последнем неравенстве берем $g(x) = \cos ax$, $a \in \mathbb{R}$. Тогда имеем

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\sum_{m\in A_k}\lambda_k(m)\sin ma\Big|\,|\sin pa| \leq C\,2\pi\,, \quad a \in \mathbb{R}\,, \quad p \in \mathbb{N}\,.$$

Если число a/π иррационально (множество таких чисел a всюду плотно на $\mathbb{R}$), то существует подпоследовательность натуральных чисел p_n такая, что $|\sin p_n a| \to 1$ (теория равномерно распределенных последовательностей). Получаем, что неравенство $F_{\mathcal{A},\Lambda}(a) \leq C\pi$ выполняется при почти всех $a \in \mathbb{R}$ и, значит, при всех $a \in \mathbb{R}$ (см. замечание 1).

Второй метод.[1] Если для некоторой константы C неравенство (2.3) справедливо для любой *нечетной* функции $f \in L_1$, то неравенство (2.3) справедливо и для любой функции $f \in L_1$. Это легко вытекает из соотношений $b_m(g) = b_m(f)$ и $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$, где $g(x) := (f(x) - f(-x))/2$ – нечетная составляющая функции f. Тогда из следствия 2 вытекает, что $\pi^{-1}||F_{\mathcal{A},\Lambda}||_\infty \leq C$. Утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) доказывается аналогично.

3. Условия принадлежности функций $V_{\mathcal{A},h}$ и $V_{\mathcal{A}}$ классу L_p

3.1. Общий случай

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность непустых конечных подмножеств из $\mathbb{Z}$ такая, что $0 \notin A_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда при фиксированном $p \in [1,\infty]$ следующие два условия эквиваленты*:

1) *Функция $V_{\mathcal{A},h} \in L_p$ для любой функции $h \in V(\mathbb{T})$.*

2) *Функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p$.*

Если выполняется одно из этих двух условий, то для любой $h \in V(\mathbb{T})$ выполняются неравенства $\|V_{\mathcal{A},h}\|_p \leq (2\pi)^{-1}V(h)\|V_{\mathcal{A}}\|_p$ и $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k \leq (2\pi)^{-1}\|V_{\mathcal{A}}\|_1$, где $n_k = \min_{m\in A_k}|m|$.

[1] Этот метод принадлежит А. С. Белову.

Доказательство. Утверждение 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из того, что функция $h(x) = i(\pi - |x|)\operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi, \pi]$, принадлежит классу $V(\mathbb{T})$ и $c_m(h) = 1/m$ при $m \neq 0$.

Докажем утверждение 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $V_{\mathcal{A}} \in L_p$, $h \in V(\mathbb{T})$, а функция $H(t)$ равна вариации h на отрезке $[-\pi, t]$, $-\pi < t \le \pi$, и $H(-\pi) = 0$. Тогда

$$\Big|\sum_{m\in A_k} c_m(h)e^{imx}\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{m\in A_k} e^{im(x-t)}h(t)\,dt\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{m\in A_k}\frac{e^{im(x-t)}}{m}\,dh(t)\Big|$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{m\in A_k}\frac{e^{im(x-t)}}{m}\Big|dH(t)\,. \tag{3.1}$$

Если $p = \infty$, то из неравенства (3.1) сразу получаем неравенство $V_{\mathcal{A},h}(x) \le (2\pi)^{-1}V(h)\|V_{\mathcal{A}}\|_\infty$, $x \in \mathbb{R}$, и лемма в этом случае доказана. Если $1 \le p < \infty$, то из неравенства (3.1) и неравенства Минковского [7, теорема 2.4] вытекает, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{m\in A_k}c_m(h)e^{imx}\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p} \le \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{m\in A_k}\frac{e^{im(x-t)}}{m}\Big|dH(t)\Big)^p dx\Big)^{1/p}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{m\in A_k}\frac{e^{im(x-t)}}{m}\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p}dH(t)$$

$$= \frac{V(h)}{2\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{m\in A_k}\frac{e^{imx}}{m}\Big|\Big)^p dx\Big)^{1/p} \le \frac{V(h)}{2\pi}\|V_{\mathcal{A}}\|_p\,.$$

Отсюда следует, что $V_{\mathcal{A},h} \in L_p$ и $\|V_{\mathcal{A},h}\|_p \le (2\pi)^{-1}V(h)\|V_{\mathcal{A}}\|_p$.

Если при некотором $p \in [1, \infty]$ функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p$, то $V_{\mathcal{A}} \in L_1$, и для любой последовательности $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}:\ m_k \in A_k$, $k \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$\|V_{\mathcal{A}}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{m\in A_k}\frac{e^{imx}}{m}\Big|\,dx \ge 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|m_k|}\,.$$

Лемма доказана. □

Замечание 3. *Если в условии леммы 2 число точек во множестве A_k ограничено по $k \in \mathbb{N}$ некоторой константой $C > 0$, то при фиксированном $p \in [1, \infty]$ функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m\in A_k} 1/|m|$.*

Достаточность очевидна, а необходимость вытекает из неравенств

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m\in A_k}\frac{1}{|m|} \le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k} \le \frac{C}{2\pi}\|V_{\mathcal{A}}\|_1\,, \quad \text{где} \quad n_k = \min_{m\in A_k}|m|.$$

3.2. Случай симметричных относительно нуля множеств

В этом разделе $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ — две последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1 \le n_k \le \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, а $A_k := \{m \in \mathbb{Z}:\ n_k \le |m| \le \nu_k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

В следующей теореме приведены достаточные условия принадлежности L_p при $p \in [1, \infty)$.

Теорема 5. *Пусть $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ — последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1\le n_k\le \nu_k$, $k\in\mathbb{N}$. Если при некотором $p\in(1,\infty)$ сходится ряд $\sum_{k=1}^\infty m_k^{1-1/p}/n_k$, где $m_k=\min\{n_k,\nu_k-n_k+1\}$, то $V_{\mathcal A}\in L_p$ и $\|V_{\mathcal A}\|_p\le 2C_p\sum_{k=1}^\infty m_k^{1-1/p}/n_k$. Если сходится ряд $\sum_{k=1}^\infty n_k^{-1}\ln(1+m_k)$, то $V_{\mathcal A}\in L_1$ и $\|V_{\mathcal A}\|_1\le 2C_1\sum_{k=1}^\infty n_k^{-1}\ln(1+m_k)$. Здесь величина $C_p>0$ зависит только от $p\in[1,\infty)$ и определена, как в лемме 3.*

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная $C>0$ такая, что для любых $n,\nu\in\mathbb{N}$, $n\le\nu$, при $m=\min\{n,\nu-n+1\}$ для функции $U_{n,\nu}(x)=\big|\sum_{q=n}^{\nu}\sin qx/q\big|$ выполняются неравенства*

$$\|U_{n,\nu}\|_1\le\frac{C_1\ln(1+m)}{n}\,,\qquad \|U_{n,\nu}\|_p\le C_p\frac{m^{1-1/p}}{n}\,,\quad 1<p<\infty\,,$$

где $C_1=8C$ и $C_p=C\,(2p/(p-1))^{1/p}$ при $1<p<\infty$.

Доказательство. Для $n,\nu\in\mathbb{N}$ с условием $n\le\nu$ воспользуемся следующим простым неравенством (см., например, [11, неравенство (1.5)]):

$$U_{n,\nu}(x)\le\frac{C}{n}\,g(x)\,,\quad |x|\in(0,\pi]\,,\quad g(x):=\min\Big\{\frac{1}{|x|},m\Big\}\,,\quad m=\min\{n,\nu-n+1\}\,,$$

где C — абсолютная положительная константа. Легко проверить, что $\|g\|_1\le 8\ln(1+m)$ и $\|g\|_p^p\le m^{p-1}2p/(p-1)$ при $1<p<\infty$. Дальше применяем неравенство $\|U_{n,\nu}\|_p\le C\|g\|_p/n$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5. При выполнении условий теоремы из леммы 3 вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty\|U_{n_k,\nu_k}\|_p$. Поэтому $V_{\mathcal A}\in L_p$ и $\|V_{\mathcal A}\|_p\le 2\sum_{k=1}^\infty\|U_{n_k,\nu_k}\|_p$. □

Примеры. 1) Если при некотором $p\in(1,\infty)$ сходится ряд $\sum_{k\ge1}n_k^{-1/p}$ (например, $n_k=[k^\alpha]$, $\alpha>p$), то $V_{\mathcal A}\in L_p$ для любой последовательности $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ с условием $\nu_k\ge n_k$. 2) Если при некоторых $\gamma\in[0,1]$, $p\in(1,\infty)$ сходится ряд $\sum_{k\ge1}n_k^{\gamma(1-1/p)-1}$ (например, $n_k=[k^\alpha]$ и $\alpha>1/(1-\gamma(1-1/p))$), то $V_{\mathcal A}\in L_p$ для любой последовательности $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ с условием $n_k\le\nu_k\le n_k+n_k^\gamma$, $k\ge k_0$. Отметим, что к этим примерам в общем случае теорема 3, в которой рассмотрен случай $\nu_k=n_{k+1}-1$, неприменима.

Замечание 4. При $p=1$ из теоремы 5 получаются достаточные условия, которые совпадают с необходимыми (в случае $\nu_k=n_{k+1}-1$ см. теорему 1, а в общем случае см. теорему 6). При $p=2$ в случае $\nu_k=n_{k+1}-1$ получаются достаточные условия С. А. Теляковского [11].

В следующей теореме при общих предположениях получен критерий принадлежности L_1.

Теорема 6. *Пусть $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ — две возрастающие последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1\le n_k\le\nu_k$, $k\in\mathbb{N}$. Пусть $m_k=\min\{n_k,\,\nu_k-n_k+1\}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\sum_{k=1}^\infty n_k^{-1}\ln(1+m_k)<\infty$.

2) *Функция $V_{\mathcal A,h}\in L_1$ для любой функции $h\in V(\mathbb{T})$.*

3) $V_{\mathcal A}\in L_1$.

Если дополнительно выполняются неравенства $\nu_k\le n_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$, то условия 1), 2) и 3) эквивалентны условию

4) $\sum_{k=1}^\infty\nu_k^{-1}\ln(\nu_k-n_k+2)<\infty$.

Лемма 4. *Пусть $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ — две последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1\le n_k\le\nu_k$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\ln(\nu_k-n_k+2)}{\nu_k}\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^\infty\bigg|\sum_{q=n_k}^{\nu_k}\frac{\sin qx}{q}\bigg|dx\,.\tag{3.2}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим неравенством Харди (см., например, [5, гл. VII, теорема 8.7]) :

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{q=1}^{M} b_q e^{iqx}\right|dx \ge \sum_{q=1}^{M}\frac{|b_q|}{q}.$$

Тогда при любых натуральных n и ν с условием $1 \le n \le \nu$ будем иметь:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{q=n}^{\nu}\lambda_q \sin qx\right|dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{q=n}^{\nu}\lambda_q e^{i(\nu+1)x}(e^{iqx}-e^{-iqx})\right|dx$$

$$\ge \sum_{q=n}^{\nu}|\lambda_q|\left(\frac{1}{\nu+1+q}+\frac{1}{\nu+1-q}\right) \ge \sum_{q=n}^{\nu}\frac{|\lambda_q|}{\nu+1-q}.$$

В частности,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{q=n}^{\nu}\frac{\sin qx}{q}\right|dx \ge \sum_{q=n}^{\nu}\frac{1}{q(\nu+1-q)} \ge \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu-n+1}\frac{1}{j} \ge \frac{\ln(\nu-n+2)}{\nu}.$$

Отсюда сразу получается неравенство (3.2). Лемма доказана. □

Замечание 5. Лемма 4 содержится, по существу, в работе [13] (см. доказательство леммы 1 из [13] с заменой n_{k+1} на ν_k+1), но отличается по способу доказательства.

Доказательство теоремы 6.

Воспользуемся неравенством А. С. Белова [2, лемма 3.3]: если $1 \le n \le \nu$, $n,\nu \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{6}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{q=n}^{\nu}\frac{\sin qx}{q}\right|dx \ge \sum_{q=n}^{\min\{\nu,2n\}}\frac{1}{q(q-n+1)} \ge \frac{\ln(\min\{\nu-n+1,n+1\}+1)}{\min\{\nu,2n\}}.$$

Учитывая неравенства $\min\{\nu-n+1,n+1\} \ge \min\{\nu-n+1,n\}$ и $\min\{\nu,2n\} \le 2n$, получаем

$$\frac{6}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{q=n_k}^{\nu_k}\frac{\sin qx}{q}\right|dx \ge \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(m_k+1)}{2n_k}.$$

Из последнего неравенства, леммы 2 и теоремы 5 вытекает эквивалентность условий 1), 2) и 3) в теореме 6.

Пусть дополнительно выполняются неравенства $\nu_k \le n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что условия 1), 2) и 3) эквивалентны условию 4). В силу леммы 4 надо доказать только утверждение 4) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполнено условие 4) и $B := \{k \in \mathbb{N}:\ \nu_k - n_k + 1 > n_k\}$. Тогда $m_k = n_k$ для $k \in B$ и $m_k = \nu_k - n_k + 1$ для $k \in \mathbb{N}\setminus B$. Если множество B состоит из бесконечного числа элементов, то $B = \{k_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. В этом случае сходится ряд

$$\sum_{k\in B}\frac{\ln(1+m_k)}{n_k} = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n_{k_s})}{n_{k_s}}.$$

Это вытекает из следующих простых неравенств: $\ln(1+n) \le C\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, и $2n_{k_s} < \nu_{k_s}+1 \le n_{k_s+1}+1 \le n_{k_{s+1}}+1$, $s \in \mathbb{N}$. Здесь мы учли, что $k_s+1 \le k_{s+1}$. Тогда $\limsup n_{k_s}/n_{k_{s+1}} \le 1/2$ и, значит, ряд $\sum_{s\ge1} 1/n_{k_s}^{\alpha}$ сходится при любом $\alpha > 0$.

Если множество $\mathbb{N}\setminus B$ состоит из бесконечного числа элементов, то сходится ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B}\frac{\ln(1+m_k)}{n_k}=\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B}\frac{\ln(\nu_k-n_k+2)}{n_k}\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\ln(\nu_k-n_k+2)}{\nu_k}<\infty\,.$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\nu_k<\nu_k+1\le 2n_k$, $k\in\mathbb{N}\setminus B$. Таким образом, в любом случае сходящимся является ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln(1+m_k)}{n_k}=\sum_{k\in B}\frac{\ln(1+m_k)}{n_k}+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B}\frac{\ln(1+m_k)}{n_k}\,.$$

Теорема доказана. □

В следующей теореме приведены необходимые условия принадлежности L_p при $p\in(1,\infty)$.

Теорема 7. *Пусть $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ — две последовательности натуральных чисел, которые удовлетворяют условию $1\le n_k\le\nu_k<n_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$. Если при некотором $p\in(1,\infty)$ функция $V_{\mathcal{A}}\in L_p$, то сходится ряд*

$$\sum_{q=0}^{\infty}\lambda_q^p\,(q+1)^{p-2},\quad \textit{где}\quad \lambda_q:=\sum_{k\in\mathbb{N}:\ \nu_k-n_k\ge q}\frac{1}{n_k+q}\,.$$

З а м е ч а н и е 6. Если дополнительно к условиям теоремы 7 выполняется неравенство $C:=\inf_{k\ge1}n_k/\nu_k>0$, то, очевидно, $Ca_q\le\lambda_q\le a_q$, где

$$a_q:=\sum_{k\in\mathbb{N}:\,\nu_k-n_k\ge q}\frac{1}{n_k},\quad q\ge0\,. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. При любых натуральных n и ν с условием $1\le n\le\nu$ выполняется неравенство

$$2\Bigg|\sum_{q=n}^{\nu}\frac{\sin qx}{q}\Bigg|\ge2\Bigg|\sin nx\sum_{q=n}^{\nu}\frac{\sin qx}{q}\Bigg|=\Bigg|\sum_{q=0}^{\nu-n}\frac{\cos qx}{n+q}-\sum_{q=2n}^{n+\nu}\frac{\cos qx}{q-n}\Bigg|.$$

Из последнего неравенства вытекает, что при любых $j\in\mathbb{N}$ и $x\in\mathbb{R}$ выполняются неравенства

$$V_{\mathcal{A}}(x)\ge2\sum_{k=1}^{j}\Bigg|\sum_{q=n_k}^{\nu_k}\frac{\sin qx}{q}\Bigg|\ge|T_j(x)-Q_j(x)|\,,\quad\text{где}\quad Q_j(x):=\sum_{k=1}^{j}\sum_{q=2n_k}^{n_k+\nu_k}\frac{\cos qx}{q-n_k}\,,$$

$$T_j(x):=\sum_{k=1}^{j}\sum_{q=0}^{\nu_k-n_k}\frac{\cos qx}{n_k+q}=\sum_{q=0}^{M_j}\lambda_{j,q}\cos qx\,,\quad M_j:=\max_{1\le k\le j}\{\nu_k-n_k\}\,,$$

$$\lambda_{j,q}:=\sum_{k\in B_{j,q}}\frac{1}{n_k+q}\,,\quad B_{j,q}:=\{k\in\mathbb{N}:\ 1\le k\le j,\ \ \nu_k-n_k\ge q\}\,.$$

Из теоремы Харди — Литтлвуда [6, гл. XII, теорема 3.19(II)] вытекает существование постоянной $\gamma(p)>0$, $p\in[2,\infty)$, такой, что для любого четного тригонометрического полинома справедливо неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg|\sum_{q=0}^{M}a_q\cos qx\Bigg|^p dx\le\gamma(p)\sum_{q=0}^{M}|a_q|^p(q+1)^{p-2}\,,\quad p\in[2,\infty)\,.$$

Применяя это неравенство к полиному Q_j, $j \in \mathbb{N}$, и учитывая неравенства $2n_k \le n_k + \nu_k \le 2\nu_k < 2n_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, и $1 < (q+1)/(q-n_k) \le 3$ при $2n_k \le q \le n_k + \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, имеем при $p \in [2, \infty)$

$$\|Q_j\|_p^p \le \gamma(p) \sum_{k=1}^{j} \sum_{q=2n_k}^{n_k+\nu_k} \frac{(q+1)^{p-2}}{(q-n_k)^p} \le \gamma(p)\, 3^{p-2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} =: \gamma_1^p(p)\,.$$

При $1 \le p < 2$ применяем неравенство Гельдера:

$$\|Q_j\|_p \le \|Q_j\|_2 (2\pi)^{1/p-1/2} \le \gamma_1(2)(2\pi)^{1/p-1/2} =: \gamma_1(p)\,.$$

Тогда при любом $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|T_j\|_p \le \|V_{\mathcal{A}}\|_p + \|Q_j\|_p \le \|V_{\mathcal{A}}\|_p + \gamma_1(p)\,, \quad 1 \le p < \infty\,. \tag{3.4}$$

Из доказательства леммы Харди — Литтлвуда о рядах с убывающими членами [6, гл. XII, лемма 6.6(I)] вытекает существование постоянной $\gamma_2(p) > 0$, $p \in (1, \infty)$, такой, что для любого тригонометрического полинома $\sum_{q=1}^{M} a_q \cos qx$, где $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_M \ge 0$, справедливо неравенство

$$\sum_{q=1}^{M} a_q^p q^{p-2} \le \gamma_2(p) \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{q=1}^{M} a_q \cos qx \right|^p dx\,, \quad p \in (1, \infty)\,.$$

Так как коэффициенты полинома T_j, $j \in \mathbb{N}$, неотрицательны и убывают, то, применяя это неравенство к полиному $T_j - \lambda_{j,0}$ и учитывая неравенство (3.4), получаем, что при любых $j \in \mathbb{N}$ и $p \in (1, \infty)$ справедливо неравенство

$$\sum_{q=1}^{M_j} \lambda_{j,q}^p\, q^{p-2} \le \gamma_2(p) \|T_j - \lambda_{j,0}\|_p^p \le 2\pi\gamma_2(p)\big(\|V_A\|_p + \gamma_1(p) + \lambda_{j,0}\big)^p\,.$$

Пусть при некотором $p \in (1, \infty)$ функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p$. Если последовательность M_j неограничена, то $M_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Если $M_j \le q_0$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $\lambda_{j,q} = \lambda_q = 0$ при $q > q_0$. В любом случае, переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \to +\infty$, получим сходимость ряда $\sum_{q=0}^{\infty} \lambda_q^p\, (q+1)^{p-2}$. При этом мы учли, что $\lambda_{j,q} \to \lambda_q$ и (см. лемму 2) $\lambda_{j,0} \le \lambda_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k \le \|V_{\mathcal{A}}\|_1$. Теорема 7 доказана. $\square$

Следующий критерий принадлежности L_p доказал Р. М. Тригуб.

Теорема 8 (Р. М. Тригуб). *Пусть $\{n_k\}_{k\ge1}$, $\{\nu_k\}_{k\ge1}$ — две последовательности натуральных чисел, для которых выполняются неравенства $1 \le n_k \le \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$. Пусть $p \in [1, \infty]$. Тогда функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p \iff$ функция $I_{\mathcal{A}} \in L_p$, где*

$$I_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{(n_k-1/2)x}^{(\nu_k+1/2)x} \frac{\sin t}{t}\, dt \right|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая равенства

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{\sin\Big(n + \dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

получаем, что при $k \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, \pi]$ справедливы равенства

$$\sum_{m=n_k}^{\nu_k} \frac{\sin mx}{m} = \int_0^x \sum_{m=n_k}^{\nu_k} \cos mt\, dt = \int_0^x \frac{\sin\Big(\nu_k + \dfrac{1}{2}\Big)t - \sin\Big(n_k - \dfrac{1}{2}\Big)t}{2\sin\dfrac{t}{2}}\, dt$$

$$= \int_0^x \frac{\sin\Big(\nu_k + \dfrac{1}{2}\Big)t - \sin\Big(n_k - \dfrac{1}{2}\Big)t}{t}\, dt + \int_0^x \Big(\sin\Big(\nu_k + \frac{1}{2}\Big)t - \sin\Big(n_k - \frac{1}{2}\Big)t\Big) g(t)\, dt\,.$$

Здесь $g(t) = 1/\bigl(2\sin(t/2)\bigr) - 1/t$ — гладкая функция на $[0,\pi]$. Поэтому при $x \in [0,\pi]$ справедливо равенство $V_{\mathcal{A}}(x) = I_{\mathcal{A}}(x) + O\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k\right)$, из которого и вытекает утверждение теоремы 8.

3.3. Пример

Пусть $f(x) := x + (x+2)^{\alpha} \ln^{\beta}(x+2) \ln^{\gamma}(\ln(x+2))$, $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $\gamma \ge 0$. Так как $f(x+1) - f(x) = f'(\xi) > 1$, $x \ge 1$, то последовательность $\{[f(k)]\}_{k\ge 1}$ строго возрастает. Мы рассматриваем случай, когда $A_k = \{m \in \mathbb{Z} :\ n_k \le |m| \le \nu_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, где $n_k = [f(k)]$, $\nu_k = n_{k+1} - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Так как $n_{k+1}/n_k \to 1$, то $V_{\mathcal{A}} \notin L_{\infty}$ (см. [8, теорема 2]).

Если $V_{\mathcal{A}} \in L_p$ при некотором $p \in [1,\infty)$, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$ (см. лемму 2) и, значит, должно выполняться одно из трех условий: 1) $\alpha > 1$; 2) $\alpha = 1$, $\beta > 1$; 3) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma > 1$. Пусть одно из этих условий выполняется. Тогда $\nu_k - n_k + 1 \sim \alpha k^{\alpha-1} \ln^{\beta} k \ln^{\gamma}(\ln k)$ при $k \to +\infty$. Из теоремы 1 вытекает, что $V_{\mathcal{A}} \in L_1 \iff$ выполняется одно из следующих трех условий:

$$1)\ \alpha > 1\,; \quad 2)\ \alpha = 1\,,\quad \beta > 1\,; \quad 3)\ \alpha = 1\,,\quad \beta = 1\,,\quad \gamma > 2\,. \tag{3.5}$$

Из теоремы 5 и соотношения

$$\frac{m_k^{1-1/p}}{n_k} \sim \frac{\alpha^{1-1/p}}{k^{1+(\alpha-1)/p} \ln^{\beta/p} k\, \ln^{\gamma/p}(\ln k)}\,, \quad k \to +\infty\,,$$

вытекает, что если $p \in (1,\infty)$ и выполняется одно из трех условий:

$$1)\ \alpha > 1\,; \quad 2)\ \alpha = 1\,,\quad \beta > p\,; \quad 3)\ \alpha = 1\,,\quad \beta = p\,,\quad \gamma > p\,, \tag{3.6}$$

то $V_{\mathcal{A}} \in L_p$.

Найдем необходимые условия принадлежности L_p. Пусть при некотором $p \in (1,\infty)$ функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p$. Тогда выполняется одно из трех условий (3.5) и сходится ряд $\sum_{q=1}^{\infty} a_q^p (q+1)^{p-2}$ (см. теорему 7 и замечание 6), где a_q определены по формуле (3.3). Оценим a_q снизу.

Функция $g(x) := \alpha(x+2)^{\alpha-1} \ln^{\beta}(x+2) \ln^{\gamma}(\ln(x+2))$ непрерывна и строго возрастает на промежутке $[1,+\infty)$, и, значит, обратная функция g^{-1} непрерывна и строго возрастает на промежутке $[g(1),+\infty)$. Из неравенств $\nu_k - n_k > f'(k) - 2 \ge g(k) - 1$, $k \in \mathbb{N}$, вытекает, что если $k \ge k_q := [g^{-1}(q)] + 1$, $q \ge q_0 := [g(1)] + 1$, $q \in \mathbb{N}$, то $\nu_k - n_k > q - 1$, и, значит, $\nu_k - n_k \ge q$. При натуральных $q \ge q_0$ получаем

$$a_q \ge \sum_{k=k_q}^{\infty} \frac{1}{n_k} \ge \int\limits_{k_q}^{\infty} \frac{dx}{f(x)} =: b_q\,.$$

Нетрудно проверить, что при $u \to +\infty$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{u}^{\infty} \frac{dx}{f(x)} \sim \begin{cases} \dfrac{\alpha}{(\alpha-1)g(u)}\,, & \alpha > 1\,, \\[2mm] \dfrac{\ln(u+2)}{(\beta-1)g(u)}\,, & \alpha = 1\,,\ \beta > 1\,, \\[2mm] \dfrac{\ln^{-\gamma+1}\ln(u+2)}{\gamma-1}\,, & \alpha = 1\,,\ \beta = 1\,,\ \gamma > 2\,. \end{cases}$$

Так как $k_q = g^{-1}(q) + \alpha_q$, где $0 < \alpha_q \le 1$, то $g(k_q) \sim q$ при $q \to +\infty$. Если $\alpha = 1$ и $\beta > 0$, то, логарифмируя тождество $q \equiv \ln^{\beta}(g^{-1}(q)+2) \ln^{\gamma}\ln(g^{-1}(q)+2)\,,\ q \ge g(1)$, получаем, что при $q \to +\infty$ справедливы соотношения

$$\ln\ln\left(g^{-1}(q)+2\right) \sim \frac{\ln q}{\beta}\,, \qquad \ln\left(g^{-1}(q)+2\right) \sim \frac{\beta^{\gamma/\beta} q^{1/\beta}}{\ln^{\gamma/\beta} q}\,.$$

Таким образом, при $q \to +\infty$ имеем

$$C(p,\alpha,\beta,\gamma)\, b_q^p\, q^{p-2} \sim \begin{cases} q^{-2}, & \alpha > 1\,, \\ q^{p/\beta-2} \ln^{-(p\gamma)/\beta} q, & \alpha = 1\,,\ \beta > 1\,, \\ q^{p-2} \ln^{p(1-\gamma)} q, & \alpha = 1\,,\ \beta = 1\,,\ \gamma > 2\,, \end{cases}$$

где величина $C(p,\alpha,\beta,\gamma) > 0$. Отсюда следует, что если при некотором $p \in (1,\infty)$ функция $V_{\mathcal{A}} \in L_p$, то должно выполняться одно из трех условий:

$$1)\ \alpha > 1\,; \quad 2)\ \alpha = 1\,,\ \beta > p\,; \quad 3)\ \alpha = 1\,,\ \beta = p\,,\ \gamma > 1\,. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) вытекает, что задача о принадлежности функции $V_{\mathcal{A}}$ классу L_p остается открытой для $p \in (1,\infty)$, $\alpha = 1$, $\beta = p$, $\gamma \in (1,p]$. Отметим, что проверка сходимости ряда (1.5) в оставшемся случае затруднительна. Скорее всего для таких параметров ряд (1.5) сходится и функция $V_{\mathcal{A}}$ принадлежит классу L_p.

Автор благодарен профессору А. С. Белову за ценные замечания, которые способствовали качественному улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков: Вища шк.: Изд-во Харьк. ун-та, 1984. 120 с.
2. **Белов А.С.** О сумме модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Сер. Биология. Химия. Физика. Математика. 2006. № 6. С. 107–121.
3. **Белов А.С., Теляковский С.А.** Усиление теорем Дирихле — Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 25–40.
4. **Белов А.С., Теляковский С.А.** Усиление теоремы Дирихле — Жордана о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 5. С. 583–584.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
6. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 2. 540 с.
7. **Либ Э., Лосс М.** Анализ. Новосибирск: Науч. кн., 1998. 276 с.
8. **Попов А.Ю., Теляковский С.А.** К оценкам частных сумм рядов Фурье функций ограниченной вариации // Изв. вузов. Математика. 2000. № 1. С. 51–55.
9. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Теория приближений. Гармонический анализ. 1997. С. 378–386. (Тр. МИАН. Т. 219).
10. **Теляковский С.А.** К вопросу о характере сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации // Изв. вузов. Математика. 2010. № 3. С. 48–51.
11. **Теляковский С.А.** Некоторые свойства рядов Фурье функций ограниченной вариации. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.
12. **Telyakovskii S.A.** Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 215–218.
13. **Trigub R.M.** A note on the paper of Telyakovskii “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation” // East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 1. P. 1–6.
14. **Trigub R.M., Belinsky E.S.** Fourier Analysis and Approximation of Functions. Boston; Dordrecht; London: Kluwer-Springer, 2004. 585 p.
15. **Zastavnyi V.P.** On positive definiteness of some functions // J. Multivariate Anal. 2000. Vol. 73. P. 55–81.

Заставный Виктор Петрович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Донецкий национальный университет, Украина
e-mail: zastavn@rambler.ru

Поступила 22.09.2010

УДК 517.5

ТЕОРИЯ ДАНКЛЯ И ТЕОРЕМА ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(\mathbb{R}^d)$ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ[1]

А. В. Иванов, В. И. Иванов

Доказано точное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом $v_k(x) = \prod_{\alpha\in\mathbb{R}_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)}$, определяемым положительной подсистемой R_+ конечной системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(\alpha)$: $R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений, порожденной R.

Ключевые слова: группа отражений, преобразование Данкля, наилучшее приближение, модуль непрерывности, неравенство Джексона.

A. V. Ivanov, V. I. Ivanov. Dunkl theory and Jackson inequality in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with power weight.

We prove a sharp Jackson inequality in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with the weight $v_k(x) = \prod_{\alpha\in\mathbb{R}_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)}$ defined by the positive subsystem R_+ of a finite system of roots $R \subset \mathbb{R}^d$ and by a function $k(\alpha)$: $R \to \mathbb{R}_+$ invariant under the reflection group generated by R.

Keywords: reflection group, Dunkl transform, best approximation, modulus of continuity, Jackson inequality.

Введение

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $r > 0$, $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \le r\}$, $L_2(\mathbb{R}^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $E_r(f)_2$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше r,

$$\omega(\delta, f)_2 = \sup\,\{\|f(x+t) - f(x)\|_2 :\ t \in B_\delta\}$$

— ее модуль непрерывности, q_λ — наименьший положительный нуль функции Бесселя $J_\lambda(x)$ порядка $\lambda \ge -1/2$.

Хорошо известно точное неравенство Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$

$$E_r(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(\frac{2q_{d/2-1}}{r}, f\right)_2. \tag{0.1}$$

Оно было доказано И. И. Ибрагимовым, Ф. Г. Насибовым [1] для $d = 1$, В. Ю. Поповым [2; 3] для $d = 1, 2, 3$, А. Г. Бабенко [4] и А. В. Московским [5] для всех d. Аргумент в модуле непрерывности является наименьшим, при котором неравенство (0.1) справедливо для всех $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Это было доказано Н. И. Черных [6] для $d = 1$, А. В. Московским [5] для $d = 3$ и Д. В. Горбачевым [7] для всех d. Отметим также работу Е. Е. Бердышевой [8], в которой

[1] Исследования поддержаны РФФИ (проект 10-01-00564).

доказано точное неравенство Джексона в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с оптимальным аргументом в модуле непрерывности, определяемом следующим образом:

$$\omega(\delta, f)_2 = \sup\{\|f(x+t) - f(x)\|_2 : \ |t_i| \le \delta, \ i = 1, \ldots, d\}.$$

Наша цель — доказать аналог неравенства (0.1) в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)}, \tag{0.2}$$

определяемым положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(\alpha)$: $R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно конечной группы отражений $G(R)$, порожденной R [9].

1. Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$

Гармонический анализ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ с весом (0.2) строится на основе дифференциально-разностных операторов и интегральных преобразований Данкля, определяемых с помощью конечной группы отражений. Такой подход к построению гармонического анализа и соответствующих специальных функций был инициирован Ч. Данклем [10–13] в конце 1980-х гг. В его работах, а также в работах М. Рёслер [14–16], М. де Же [17;18], К. Тримеш [19–21], других авторов этот подход приобрел достаточно законченный вид, хотя еще имеется много важных вопросов, на которые нет окончательных ответов. Построенная теория получила название теории Данкля. Она нашла широкое применение в математической физике, теории вероятностей, теории функций.

Настоящая работа посвящена применению теории Данкля в теории приближений. В этой связи отметим также работы Е. С. Белкиной [22], Д. В. Чертовой [23].

Приведем необходимые факты из теории Данкля [9]. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\sigma_\alpha(x) = x - \frac{2(\alpha, x)}{|\alpha|^2}\alpha$$

есть ортогональное отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$. Конечное множество $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ называется системой корней, если $\sigma_\alpha(R) = R$ и $R \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, \alpha\}$ для всех $\alpha \in R$. Каждая система корней является объединением двух непересекающихся множеств R_+ и $-R_+$, разделенных некоторой гиперплоскостью $(\beta, x) = 0$, $\beta \notin R$. Множество $R_+ \subset R$ называется положительной подсистемой. Его выбор неоднозначен, но все дальнейшие рассмотрения не зависят от этого выбора. Множество отражений $\{\sigma_\alpha : \ \alpha \in R\}$ порождает группу отражений $G(R)$. Она является конечной подгруппой в группе ортогональных преобразований $O(d)$. Множество $\{\sigma_\alpha : \ \alpha \in R\}$ есть множество всех отражений в $G(R)$.

Пусть функция $k(\alpha) : \ R \to \mathbb{R}_+$ инвариантна относительно действия группы $G(R)$, т. е. $k(g\alpha) = k(\alpha)$ для всех $g \in G(R)$ и $\alpha \in R$. Если $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_d = (0, \ldots, 0, 1)$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$, то дифференциально-разностные операторы Данкля определяются равенствами

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)(\alpha, e_j)\frac{f(x) - f(\sigma_\alpha x)}{(\alpha, x)}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Для $y \in \mathbb{R}^d$ система

$$D_j f(x) = y_j f(x), \qquad f(0) = 1$$

имеет единственное действительно-аналитическое в $\mathbb{R}^d$ решение $E_k(x, y)$, называемое ядром Данкля, которое продолжается до аналитической в $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ функции. Для обобщенной экспоненты $e_k(x, y) = E_k(ix, y)$ выполнены свойства, аналогичные свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$.

Предложение 1 [12; 15]. *Если* $g \in G(R)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{C}^d$, $\mathfrak{Im}\, z = (\mathfrak{Im}\, z_1, \ldots, \mathfrak{Im}\, z_d)$, *то*

$$e_k(x,y) = e_k(y,x), \qquad e_k(0,y) = 1, \qquad e_k(\lambda x, y) = e_k(x, \lambda y),$$
$$\overline{e_k(x,y)} = e_k(-x,y), \qquad e_k(gx, gy) = e_k(x,y), \qquad |e_k(z,y)| \le e^{|y||\mathfrak{Im}\, z|}, \qquad |e_k(x,y)| \le 1.$$

Обобщенная экспонента является собственной функцией лапласиана Данкля

$$\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^{d} D_j^2 f(x).$$

Справедливо равенство $-\Delta_k e_k(x,y) = |y|^2 e_k(x,y)$.

Пусть $C_b(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$, $S(\mathbb{R}^d)$ — пространства соответственно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}^d$ функций, бесконечно дифференцируемых функций, бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций, вес $v_k(x)$ определен в (0.2), $c_k = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)dx$ — интеграл Макдональда — Мета — Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x)dx$, $1 \le p \le \infty$, $L_{p,k}(\mathbb{R}^d)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{p,k} = \Bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu_k(x)\Bigg)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty,k} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^d} |f(x)|, \quad p = \infty.$$

Пространство $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) d\mu_k(x).$$

Обобщенная экспонента позволяет определить преобразование Данкля (Фурье — Данкля). Для $f \in L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$ положим

$$\widehat{f}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\overline{e_k(x,y)} d\mu_k(y). \tag{1.1}$$

Обратное преобразование Данкля задается формулой

$$\overset{\vee}{f}{}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e_k(x,y) d\mu_k(y) = \widehat{f}^k(-x).$$

Приведем основные свойства преобразований Данкля.

Предложение 2 [13; 17]. *Для прямого и обратного преобразований Данкля справедливы следующие свойства*:

(1) *Если* $f, \widehat{f}^k \in L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$, *то для почти всех* x

$$f(x) = (\widehat{f}^k)^{\vee k}(x). \tag{1.2}$$

В частности, (1.2) *верно в каждой точке непрерывности* f.

(2) *Если* $f \in L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$, *то* $\widehat{f}^k \in C_b(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$\lim_{|y| \to \infty} \widehat{f}^k(y) = 0.$$

(3) *Преобразование Данкля является гомеоморфизмом пространства* $S(\mathbb{R}^d)$ *на себя.*

(4) *Преобразование Данкля имеет единственное продолжение до изометрического изоморфизма пространства* $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ *на себя. Для любых* $f,g\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ *выполнены равенства Планшереля и Парсеваля*

$$(f,g)_k=(\widehat{f}^k,\widehat{g}^k)_k,\qquad \|f\|_{2,k}=\|\widehat{f}\|_{2,k}.$$

Пусть $\sigma_k=d/2-1+\sum_{\alpha\in R_+}k(\alpha)$, $S^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d\colon\ |x|=1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^d$, $x=rx'$, $r=|x|$, $x'\in S^{d-1}$, dx' — Лебегова мера на S^{d-1},

$$a_k=\int\limits_{S^{d-1}}v_k(x')dx',$$

$L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ — сужение $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ на радиальные функции $f(|x|)$.

Справедливо равенство

$$\int\limits_{R^d}f(x)v_k(x)dx=\int\limits_0^\infty r^{2\sigma_k+1}\int\limits_{S^{d-1}}f(rx')v_k(x')dx'dr. \tag{1.3}$$

Используя интегральное представление гамма-функции, получим

$$b_k=c_ka_k^{-1}=a_k^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)dx=a_k^{-1}\int\limits_0^\infty e^{-r^2/2}r^{2\sigma_k+1}\int\limits_{S^{d-1}}v_k(x')dx'dr$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-r^2/2}r^{2\sigma_k+1}dr=2^{\sigma_k}\Gamma(\sigma_k+1).$$

Пусть

$$L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)=\Big\{f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}\colon\ \|f\|_{2,\sigma_k}=\Big(b_k^{-1}\int\limits_0^\infty|f(r)|^2r^{2\sigma_k+1}dr\Big)^{1/2}<\infty\Big\}.$$

Если $f\in L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\|f\|_{2,k}^2=\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(|x|)|^2d\mu_k(x)=c_k^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(|x|)|^2v_k(x)dx$$

$$=c_k^{-1}\int\limits_0^\infty|f(r)|^2r^{2\sigma_k+1}\int\limits_{S^{d-1}}v(x')dx'dr=b_k^{-1}\int\limits_0^\infty|f(r)|^2r^{2\sigma_k+1}dr,$$

поэтому пространства $L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$, $L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)$ и нормы в них совпадают.

Справедлива формула [24]

$$a_k^{-1}\int\limits_{S^{d-1}}e_k(y,x')v_k(x')dx'=j_{\sigma_k}(|y|), \tag{1.4}$$

где $j_\lambda(z)=2^\lambda\Gamma(\lambda+1)\dfrac{J_\lambda(z)}{z^\lambda}$ — нормированная функция Бесселя.

Разложение функций в $L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)$ осуществляется с помощью прямого и совпадающего с ним обратного преобразований Ганкеля [25; 26]

$$\widetilde{f}(s)=b_k^{-1}\int\limits_0^\infty f(r)j_{\sigma_k}(rs)r^{2\sigma_k+1}dr,\qquad f(r)=b_k^{-1}\int\limits_0^\infty \widetilde{f}(s)j_{\sigma_k}(rs)s^{2\sigma_k+1}ds.$$

Для функции $f\in L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ прямое и обратное преобразования Данкля совпадают с преобразованием Ганкеля:

$$\widehat{f}^k(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(|x|)\overline{e_k(y,x)}d\mu_k(x)=c_k^{-1}\int\limits_0^\infty f(r)r^{2\sigma_k+1}\int\limits_{S^{d-1}} e_k(|x|y,x')v_k(x')dx'dr$$

$$=b_k^{-1}\int\limits_0^\infty f(r)j_{\sigma_k}(|y|r)r^{2\sigma_k+1}dr=\widetilde{f}(s),\quad s=|y|. \tag{1.5}$$

Пусть $W_k^p(r)$ — множество целых функций $f(z)\colon \mathbb{C}^d\to\mathbb{C}$, для которых справедлива оценка

$$|f(z)|\le c_f e^{r|\mathfrak{Im}\, z|},\quad c_f>0,\ \ z\in\mathbb{C}^d, \tag{1.6}$$

а сужение $f(x)$ на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $L_{p,k}(\mathbb{R}^d)$.

Нам будет необходим следующий вариант теоремы Пэли — Винера.

Предложение 3 [18–21]. *Функция $f(z)\in W_k^2(r)$ тогда и только тогда, когда ее сужение на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d)$ и носитель $\operatorname{supp}\widehat{f}^k\subset B_r$, причем для всех $z\in\mathbb{C}^d$*

$$f(z)=\int\limits_{B_r}\widehat{f}^k(y)e_k(z,y)d\mu_k(y).$$

Если $f(x)\in L_{p,k}(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $1\le p<2$, то $f(x)\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d)$, поэтому справедливо следующее предложение.

Предложение 4. *Функция $f(z)\in W_k^p(r)$, $1\le p<2$, тогда и только тогда, когда функция $f(x)\in L_{p,k}(\mathbb{R}^d)\cap C_b(\mathbb{R}^d)$ и $\operatorname{supp}\widehat{f}^k\subset B_r$, причем для всех $z\in\mathbb{C}^d$*

$$f(z)=\int\limits_{B_r}\widehat{f}^k(y)e_k(z,y)d\mu_k(y).$$

З а д а ч а 1. Пусть для целой на $\mathbb{C}^d$, $d>1$, функции $f(z)$ справедлива оценка

$$|f(z)|\le c_f e^{r|z|}. \tag{1.7}$$

Верно ли, что если сужение функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, то $f(x)\in C_b(\mathbb{R}^d)$? Если это так, то оценки (1.6), (1.7) эквивалентные. Может ли $f(x)\in L_2(\mathbb{R}^d)$?

Величину наилучшего приближения функции $f\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ целыми функциями определим равенством

$$E_r(f)_{2,k}=\inf\{\|f-g\|_{2,k}\colon\ g\in W_k^2(r)\}.$$

По предложению 3

$$E_r(f)_{2,k}=\inf\left\{\|f-g\|_{2,k}\colon\ g(x)=\int\limits_{B_r}\psi(y)e_k(x,y)d\mu_k(y),\ \psi\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)\right\},$$

поэтому, используя равенство Парсеваля, получим

$$E_r^2(f)_{2,k} = \int\limits_{|y|\geq r} |\widehat{f}^k(y)|^2 d\mu_k(y). \tag{1.8}$$

Отметим, что $\lim\limits_{r\to\infty} E_r(f)_{2,k} = 0$ для любой $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$.

Если $f \in L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$, то

$$E_r^2(f)_{2,k} = b_k^{-1} \int\limits_r^\infty |\widetilde{f}(s)|^2 s^{2\sigma_k+1} ds. \tag{1.9}$$

2. Оператор обобщенного сдвига и модуль непрерывности в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$

Следуя М. Рёслер [14], оператор обобщенного сдвига Данкля τ_k^t, $t \in \mathbb{R}^d$, на пространстве $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ определим равенством

$$\tau_k^t f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e_k(t,y)\widehat{f}^k(y)e_k(x,y)d\mu_k(y). \tag{2.1}$$

Если $k(\alpha) \equiv 0$, то $\tau_k^t f(x) = f(x+t)$.

Приведем основные свойства оператора τ_k^t.

Предложение 5 [14; 19; 27]. *Для оператора обобщенного сдвига Данкля τ_k^t справедливы следующие свойства*:

(1) *Оператор τ_k^t как оператор из $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ ограниченный, и его норма равна* 1,

$$\widehat{(\tau_k^t f)}^k(x) = e_k(t,x)\widehat{f}^k(x).$$

(2) *Если $f, g \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, то*

$$(\tau_k^t f, g)_k = (f, \tau_k^{-t} g)_k.$$

(3) *Если $f \in S(\mathbb{R}^d)$, то $\tau_k^t f(x) \in S(\mathbb{R}^d)$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tau_k^t f(x)d\mu_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)d\mu_k(x). \tag{2.2}$$

(4) *Если $f, \widehat{f} \in L_{1,k}(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, то равенство* (2.1) *выполняется поточечно и*

$$\tau_k^t f(x) = \tau_k^x f(t).$$

(5) *Оператор τ_k^t может быть продолжен до линейного непрерывного оператора из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. Для любой $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ имеем $\tau_k^t f(0) = f(t)$, в частности $\tau_k^t 1 = 1$.*

Определение оператора τ_k^t на функциях из $L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$ остается открытой проблемой. Оператор τ_k^t, вообще говоря, не является положительным, т. е. из условия $f(x) \geq 0$ не вытекает $\tau_k^t f(x) \geq 0$.

З а д а ч а 2. Пусть

$$j_k(x,y) = \frac{1}{|G(R)|} \sum_{g\in G(R)} e_k(gx,y)$$

и для $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$

$$T_k^t f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{Re}\, j_k(t,y)\widehat{f}(y)e_k(x,y)d\mu_k(y).$$

Доказать, что T_k^t — положительный оператор.

Несколько больше известно об операторе τ_k^t на радиальных функциях $f(|x|)$.

Предложение 6 [16; 27]. *Для оператора обобщенного сдвига Данкля τ_k^t на радиальных функциях справедливы следующие свойства:*

(1) *Оператор τ_k^t может быть продолжен до ограниченного оператора из $L_{p,k}^{rad}(\mathbb{R}^d)$ в $L_{p,k}^{rad}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Равенство* (2.2) *выполняется для всех $f \in L_{1,k}^{rad}(\mathbb{R}^d)$.*

(2) *Оператор τ_k^t на $L_{p,k}^{rad}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, является положительным оператором, т. е. если $f \in L_{p,k}^{rad}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \ge 0$, то $\tau_k^t f(x) \ge 0$.*

(3) *Для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ существует единственная вероятностная радиальная борелевская мера $\rho_{x,y}^k$ такая, что для всех $f \in C_b^{rad}(\mathbb{R}^d)$*

$$\tau_k^y f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)d\rho_{x,y}^k(\xi),$$

причем носитель $\operatorname{supp}\rho_{x,y}^k$ содержится в множестве

$$M = \{\xi \in \mathbb{R}^d \colon \min_{g \in G(R)} |x+gy| \le |\xi| \le \max_{g \in G(R)} |x+gy|\}.$$

Если $f \in C_b^{rad}(\mathbb{R}^d)$, то $\tau_k^y f \in C_b^{rad}(\mathbb{R}^d)$ и $\tau_k^y f(x) = \tau_k^x f(y)$.

Модуль непрерывности функции $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ определим равенством

$$\omega(\delta,f)_{2,k} = \sup_{|t|\le\delta}\left(2\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(1-\mathfrak{Re}\, e_k(t,y)\big)|\widehat{f}(y)|^2 d\mu_k(y)\right)^{1/2}.$$

Если $k(\alpha) \equiv 0$, то $\omega(\delta,f)_{2,k} = \omega(\delta,f)_2$.

Лемма. *Справедливы следующие свойства модуля непрерывности:*

(1) *Если $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\lim_{\delta\to 0+0}\omega(\delta,f)_{2,k} = 0.$$

(2) *Если $f, f_n \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ и $f_n \overset{L_{2,k}}{\to} f$, то $\omega(\delta,f_n)_{2,k} \to \omega(\delta,f)_{2,k}$ $(n\to\infty)$ равномерно по $\delta \ge 0$.*

(3) *Если $f \in S(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\omega(\delta,f)_{2,k} = \sup_{|t|\le\delta}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\big(\tau_k^t|f(x)-f(y)|^2\big)\Big|_{y=x} d\mu_k(x)\right)^{1/2}.$$

(4) *Если $f \in L_{2,k}^{rad}(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\omega(\delta,f)_{2,k} = \sup_{0\le t\le\delta}\left(2b_k^{-1}\int\limits_0^\infty (1-j_{\sigma_k}(ts))|\widetilde{f}(s)|^2 s^{2\sigma_k+1}ds\right)^{1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале установим неравенство

$$|1-e_k(x,y)|\le |x||y|,\quad x,y\in\mathbb{R}^d. \tag{2.3}$$

Оно верно, если $k(\alpha)\equiv 0$:

$$|1-e^{i(x,y)}|\le |x||y|.$$

Для обобщенной экспоненты справедливо представление

$$e_k(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(\xi,y)}d\mu_x^k(\xi),$$

где μ_x^k — вероятностная борелевская мера, $\operatorname{supp}\mu_x^k\subset B_{|x|}$. Имеем

$$|1-e_k(x,y)|=\left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-e^{i(\xi,y)})d\mu_x^k(\xi)\right|$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{R}^d}|1-e^{i(\xi,y)}|d\mu_x^k(\xi)\le |y|\int\limits_{B_{|x|}}|\xi|d\mu_x^k(\xi)\le |x||y|.$$

Для любого $r>0$ согласно (2.3), предложениям $1,2$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-\mathfrak{Re}\,e_k(t,y))|\widehat{f}(y)|^2d\mu_k(y)\le\int\limits_{B_r}|t||y||\widehat{f}(y)|^2d\mu_k(y)+2\int\limits_{|y|\ge r}|\widehat{f}(y)|^2d\mu_k(y)$$

$$\le r|t|\|f\|_{2,k}^2+2E_r^2(f)_{2,k},$$

поэтому свойство (1) вытекает из неравенства

$$\omega^2(\delta,f)_{2,k}\le 2r\delta\|f\|_{2,k}^2+4E_r^2(f)_{2,k}.$$

Далее, применяя неравенство Коши — Буняковского и равенство Парсеваля, получим

$$|\omega^2(\delta,f)_{2,k}-\omega^2(\delta,f_n)_{2,k}|\le 2\sup_{|t|\le\delta}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-\mathfrak{Re}\,e_k(t,y))\left||\widehat{f}(y)|^2-|\widehat{f}_n(y)|^2\right|d\mu_k(y)$$

$$\le 4\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(|\widehat{f}(y)|+|\widehat{f}_n(y)|\Big)|\widehat{f}(y)-\widehat{f}_n(y)|d\mu_k(y)\le 4\left(\|f\|_{2,k}+\|f_n\|_{2,k}\right)\|f-f_n\|_{2,k}.$$

Отсюда вытекает свойство (2).

Согласно предложению 5, равенству Планшереля

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\tau_k^t|f(x)-f(y)|^2\right)\big|_{y=x}d\mu_k(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Big(\tau_k^t|f(x)|^2+|f(x)|^2\tau_k^t1-2\mathfrak{Re}\,\overline{f(x)}\tau_k^tf(x)\Big)d\mu_k(x)$$

$$=2\Bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^2d\mu_k(x)-\mathfrak{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{\tau_k^tf(x)}\,\overline{\widehat{f(x)}}d\mu_k(x)\Bigg\}=2\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-\mathfrak{Re}\,e_k(t,x))|\widehat{f}(x)|^2d\mu_k(x).$$

Свойство (3) доказано.

Согласно (1.3)–(1.5), предложениям $1,2,5$ для $f\in L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-e_k(t,y))|\widehat{f}^k(y)|^2d\mu_k(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 d\mu_k(y) - c_k^{-1} \int_0^\infty |\widetilde{f}(s)|^2 s^{2\sigma_k+1} \int_{S^{d-1}} e_k(st, y') v_k(y') dy' ds$$

$$= b_k^{-1} \int_0^\infty (1 - j_{\sigma_k}(s|t|)) |\widetilde{f}(s)|^2 s^{2\sigma_k+1} ds.$$

Отсюда вытекает свойство (4). Лемма доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Так как $S(\mathbb{R}^d)$ плотно в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, то свойство (2) позволяет надеяться, что свойство (3) верно для всех $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$. Для этого достаточно показать, что оператор обобщенного сдвига Данкля τ_k^t может быть продолжен до ограниченного оператора из $L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$ в $L_{1,k}(\mathbb{R}^d)$.

3. Теорема Джексона в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$

Константы Джексона в $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ определим равенством

$$D(r,\delta)_{2,k} = \sup_{f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)} \frac{E_r(f)_{2,k}}{\omega(\delta, f)_{2,k}}. \tag{3.1}$$

Аналогично константы Джексона в $L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)$ определяются равенством

$$d(r,\delta)_{2,\sigma_k} = \sup_{f \in L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)} \frac{E_r(f)_{2,\sigma_k}}{\omega(\delta, f)_{2,\sigma_k}},$$

где $E_r(f)_{2,\sigma_k}$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ в $L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)$ целыми четными в $\mathbb{C}$ функциями экспоненциального типа не выше r,

$$\omega(\delta, f)_{2,\sigma_k} = \sup_{0 \le t \le \delta} \left(2b_k^{-1} \int_0^\infty (1 - j_{\sigma_k}(ts)) |\widetilde{f}(s)|^2 s^{2\sigma_k+1} ds \right)^{1/2}$$

— ее модуль непрерывности.

Так как $L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d) = L_{2,\sigma_k}(\mathbb{R}_+)$, то согласно (1.8), (1.9) и лемме

$$D(r,\delta)_{2,k} \ge \sup_{f \in L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)} \frac{E_r(f)_{2,k}}{\omega(\delta, f)_{2,k}} = d(r,\delta)_{2,\sigma_k}. \tag{3.2}$$

Известно [4; 5], что $d(r,\delta)_{2,\sigma_k} \ge 1/\sqrt{2}$,

$$d\left(r, \frac{2q_{\sigma_k}}{r}\right)_{2,\sigma_k} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.3}$$

Д. В. Горбачев [28] доказал, что аргумент $2q_{\sigma_k}/r$ в (3.3) — оптимальный, т. е. при $\delta < 2q_{\sigma_k}/r$

$$d(r,\delta)_{2,\sigma_k} > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.4}$$

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любой $f \in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$, $r > 0$ справедливо неравенство Джексона*

$$E_r(f)_{2,k} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{2q_{\sigma_k}}{r}, f\right)_{2,k}. \tag{3.5}$$

Из нее и неравенств (3.2), (3.4) вытекает

Теорема 2. *Для* $r > 0$

$$D\left(r, \frac{2q_{\sigma_k}}{r}\right)_{2,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Если $\delta < 2q_{\sigma_k}/r$, *то* $D(r,\delta)_{2,k} > 1/\sqrt{2}$.

Таким образом, аргумент в модуле непрерывности в (3.5) — оптимальный.

Доказательство теоремы 1. Из равенства (3.1), однородности $v_k(x)$ и свойства $e_k(rt,x) = e_k(t,rx)$ предложения 1

$$2D^r(r,\delta)_{2,k} = \sup_{f\in L_{2,k}(\mathbb{R}^d)} \frac{\int\limits_{|y|\ge 1} |\widehat{f}^k(rx)|^2 v_k(x)dx}{\sup\limits_{|t|\le\delta} \int\limits_{|y|\ge 1} (1-\mathfrak{Re}\, e_k(rt,x))|\widehat{f}^k(rx)|^2 v_k(x)dx} = 2D^2(1,r\delta)_{2,k}.$$

Поэтому можем считать, что $r = 1$.

Построим весовую функцию $h(x)$, для которой

$$h(x) \ge 0, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} h(x)d\mu_k(x) > 0, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{supp} h \subset B_{2q_{\sigma_k}}, \tag{3.7}$$

$$\widehat{h}^k(y) \le 0, \quad |y| \ge 1. \tag{3.8}$$

Пусть

$$u(x) = \begin{cases} j_{\sigma_k}(|x|), & |x| \le q_{\sigma_k}, \\ 0, & |x| \ge q_{\sigma_k}. \end{cases}$$

Так как $u \in L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$, то из предложения 6 и (1.5) функция $\widehat{u}^k$ принадлежит $L_{2,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$ и

$$\widehat{u}^k(|y|) = b_k^{-1} \int\limits_0^{q_{\sigma_k}} j_{\sigma_k}(r) j_{\sigma_k}(|y|r) r^{2\sigma_k+1} dr.$$

В [4; 5] доказано, что

$$\int\limits_0^{q_{\sigma_k}} j_{\sigma_k}(r) j_{\sigma_k}(sr) r^{2\sigma_k+1} dr = \frac{\gamma_k j_{\sigma_k}(q_{\sigma_k} s)}{1-s^2}, \quad \gamma_k > 0,$$

поэтому

$$\widehat{u}^k(|y|) = \frac{b_k^{-1}\gamma_k j_{\sigma_k}(q_{\sigma_k}|y|)}{1-|y|^2}. \tag{3.9}$$

Следуя В. А. Юдину [29], положим

$$h(x) = \int\limits_{S^{d-1}} \tau_k^{q_{\sigma_k} t'} u(x) v_k(t') dt'.$$

Покажем, что $h(x)$ — искомая функция. Так как $u \in L_{1,k}^{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$, $u(x) \ge 0$, то из предложения 6 вытекает, что

$$\tau_k^{q_{\sigma_k} t'} u(x) \in L_{1,k}^{\mathrm{rad}} \cap C_b(\mathbb{R}^d), \qquad \tau_k^{q_{\sigma_k} t'} u(x) \ge 0.$$

Отсюда $h(x)\geq 0$.

Так как $\operatorname{supp} u\subset B_{q_{\sigma_k}}$, то для $|t'|=1$ из предложения 6 $\operatorname{supp}\tau^{q_{\sigma_k}t'}u\subset B_{2q_{\sigma_k}}$, поэтому $\operatorname{supp} h\subset B_{2q_{\sigma_k}}$, т. е. (3.7) верно.

Согласно (1.1), (1.4), (3.9), предложениям 1, 5

$$\widehat{h}^k(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(x)\overline{e_k(y,x)}d\mu_k(x)=\int\limits_{S^{d-1}}v_k(t')\int\limits_{\mathbb{R}^d}\tau_k^{q_{\sigma_k}t'}u(x)\overline{e_k(y,x)}d\mu_k(x)dt'$$

$$=\int\limits_{S^{d-1}}v_k(t')(\widehat{\tau_k^{q_{\sigma_k}t'}u}^k)(y)dt'=\widehat{u}^k(y)\int\limits_{S^{d-1}}e_k(q_{\sigma_k}y,t')v_k(t')dt'$$

$$=a_k\widehat{u}^k(y)j_{\sigma_k}(q_{\sigma_k}|y|)=\frac{a_kb_k^{-1}\gamma_kj_{\sigma_k}^2(q_{\sigma_k}|y|)}{1-|y|^2},$$

что влечет справедливость (3.6), (3.8):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(x)d\mu_k(x)=\widehat{h}^k(0)=a_kb_k^{-1}\gamma_k>0,\qquad \widehat{h}^k(y)\leq 0,\quad |y|\geq 1.$$

Теперь, следуя рассуждениям Н. И. Черных [30], нетрудно закончить доказательство теоремы. Пусть

$$\Omega(t,f)_{2,k}=2\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1-\mathfrak{Re}\,e_k(t,y))|\widehat{f}^k(y)|^2d\mu_k(y).$$

Рассмотрим интеграл

$$I=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Omega(t,f)_{2,k}h(t)d\mu_k(t).$$

С одной стороны, согласно (3.6), (3.7)

$$I\leq\omega^2(2q_{\sigma_k},f)_{2,k}\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(t)d\mu_k(t). \tag{3.10}$$

С другой стороны, согласно (1.1), (1.8), (3.6), (3.8)

$$I\geq 2\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(t)\int\limits_{|y|\geq 1}(1-\mathfrak{Re}\,e_k(t,y))|\widehat{f}^k(y)|^2d\mu_k(y)d\mu_k(t)$$

$$=2E_1^2(f)_{2,k}\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(t)d\mu_k(t)-\int\limits_{|y|\geq 1}|\widehat{f}^k(y)|^2(\widehat{h}^k(y)+\widehat{h}^k(-y))d\mu_k(y)\geq 2E_1^2(f)_{2,k}\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(t)d\mu_k(t).$$

Отсюда и из (3.10) вытекает неравенство (3.5) при $r=1$. Теорема 1 доказана. □

З а м е ч а н и е 2. Несколько неявной осталась идейная сторона неравенства (3.5), состоящая в том, что лапласиан Данкля Δ_k имеет радиальные собственные функции $j_{\sigma_k}(\lambda|x|)$, как и оператор Лапласа Δ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ибрагимов Н.И., Насибов В.Г.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. 1970. Т. 194, № 5. С. 1013–1016.
2. **Попов В.Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. № 6. С. 65–73.
3. **Попов В.Ю.** О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Математика. 1981. № 12. С. 67–78.
4. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ //Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 183–198.
5. **Московский А.В.** Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}_+)$ // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 4, вып. 1. С. 44–70.
6. **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: proc. Interm. conf., Gdan'sk, 1979. Amsterdam: North-Holland, 1981. P. 25–43.
7. **Горбачев Д.В.** Экстремальные задачи для целых функций экспоненциального сферического типа // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 2. С. 179–187.
8. **Бердышева Е.Е.** Две взаимосвязанные экстремальные задачи для целых функций многих переменных // Мат. заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 336–350.
9. **Rösler M.** Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.
10. **Dunkl C.F.** Reflection groups and orthogonal polynomials on the sphere // Math. Z. 1988. Vol. 197, no. 1. P. 33–60.
11. **Dunkl C.F.** Differential-difference operators associated to reflection groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 311, no. 1. P. 167–183.
12. **Dunkl C.F.** Integral kernels with reflection group invariance // Canad. J. Math. 1991. Vol. 43, no. 6. P. 1213–1227.
13. **Dunkl C.F.** Hankel transforms associated to finite reflection groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.
14. **Rösler M.** Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192, no. 3. P. 519–542.
15. **Rösler M.** Positivity of Dunkl's interwining operator // Duke Math. J. 1999. Vol. 98, no. 3. P. 445–463.
16. **Rösler M.** A positive radial product formula for the Dunkl kernel // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 355, no. 6. P. 2413–2438.
17. **de Jeu M.F.E.** The Dunkl transform // Invent. Math. 1993. Vol. 113, no. 1. P. 147–162.
18. **de Jeu M.F.E.** Paley — Wiener theorems for the Dunkl transform // Trans. Amer. Math. Soc. 2006. Vol. 358, no. 10. P. 4225–4250.
19. **Triméche K.** Paley — Wiener theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators // Integral Transform. Spec. Funct. 2002. Vol. 13, no. 1. P. 17–38.
20. **Mejjaoli H., Triméche K.** Real Paley — Wiener theorems for the Dunkl transform on $\mathbb{R}^d$ // arXiv: math/050721V1 [math. FA] 11 Jul 2005.
21. **Mejjaoli H., Triméche K.** Spectrum of functions for the Dunkl transform on $\mathbb{R}^d$ // Fract. Calc. Appl. Anal. 2007. Vol. 10, no. 1. P. 19–38.
22. **Белкина Е.С.** Гармонический анализ Фурье — Данкля и приближение функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Петрозаводск, 2008. 92 с.
23. **Чертова Д.В.** Теоремы Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ со степенным весом // Изв. ТулГУ. Сер. Естеств. науки. 2009. Вып. 3. С. 100–116.
24. **Xu Y.** Funk — Hecke formula for orthogonal polynomials on spheres and on balls // Bull. London Math. Soc. 2000. Vol. 32, no. 4. P. 447–457.
25. **Левитан Б.М.** Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка. М.: Гостехиздат, 1950. 159 с.
26. **Наймарк М.А.** Линейные дифференциальные операторы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1969. 526 с.

27. **Thangavelu S., Xu Y.** Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // J. Anal. Math. 2005. Vol. 97. P. 25–55.
28. **Горбачев Д.В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Изд-во "Гриф и К", 2005. 152 с.
29. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 309–315.
30. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.

Поступила 8.02.2010

Иванов Алексей Валерьевич
ассистент
Тульский государственный университет
e-mail: d_bringer@mail.ru

Иванов Валерий Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
декан
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.453

СКОРОСТНАЯ L_p-ВЕРСИЯ КРИТЕРИЯ М. РИССА АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н. А. Ильясов

Установлены скоростные версии критерия М. Рисса $(A = L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T}))$ в терминах наилучших приближений $\left(A\,[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]\right)$ и модулей гладкости $\left(A\,[\omega] = H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]\right)$, образующих свертку функций, а также найдены условия на λ (необходимое и достаточное в случае $1 \le p < 2$ и достаточное в случае $2 < p < \infty$) для справедливости равенства $A\,[\lambda] = E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$, где $\lambda \in M_0$, $\omega \in \Omega_l$, $l \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: тригонометрический ряд Фурье, абсолютная сходимость, свертка двух функций, наилучшее приближение, модуль гладкости, скоростная версия критерия М. Рисса.

N. A. Il'yasov. A rate L_p-version for the Riesz criterion of the absolute convergence of trigonometric Fourier series.

Rate versions of the Riesz criterion $(A = L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T}))$ are established in terms of best approximations $\left(A\,[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]\right)$ and moduli of smoothness $\left(A\,[\omega] = H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]\right)$ of the functions that compose the convolution, and conditions are found for λ (necessary and sufficient in the case $1 \le p < 2$ and sufficient in the case $2 < p < \infty$) under which the equality $A\,[\lambda] = E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ is valid, where $\lambda \in M_0$, $\omega \in \Omega_l$, $l \in \mathbb{N}$.

Keywords: trigonometric Fourier series, absolute convergence, convolution of two functions, best approximation, modulus of smoothness, rate version of the Riesz criterion.

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых 2π-периодических функций $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с конечной L_p-нормой $\|f\|_p = \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f\,(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty \equiv \|f\| = \max\{|f(x)|:\ x \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$.

Для функции $f \in L_1(\mathbb{T})$ с тригонометрическим рядом Фурье — Лебега

$$f\,(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,(f) \exp\,(inx)\,, \quad x \in \mathbb{T}, \tag{1}$$

обозначим $\rho_n^{(\gamma)}\,(f) = \left(\sum_{|\nu|=n}^{\infty} |c_\nu\,(f)|^\gamma\right)^{1/\gamma}$, $\rho_n^{(1)}\,(f) \equiv \rho_n\,(f)\,,\ n \in \mathbb{Z}_+,\ \gamma \in (0, \infty)\,.$

Очевидно, что если $\rho_0^{(\gamma)}\,(f) < \infty$, то $\rho_n^{(\gamma)}\,(f) \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$; кроме того, ясно, что условие $\rho_0\,(f) < \infty$ обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость всюду на $\mathbb{T}$ ряда (1), причем $\|f\,(\cdot) - S_n\,(f;\,\cdot)\| \le \rho_{n+1}\,(f)$, где $S_n\,(f;x) = \sum_{|\nu|=0}^{n} c_\nu\,(f) \exp\,(i\nu\,x)$ — частная сумма ряда (1) порядка $n \in \mathbb{Z}_+$. С другой стороны, в силу теоремы Лузина — Данжуа из абсолютной сходимости всюду на $\mathbb{T}$ ряда (1) следует $\rho_0\,(f) < \infty$.

Свертка $h = f * g$ функций $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $g \in L_1(\mathbb{T})$ определяется по формуле

$$h\,(x) = (f * g)\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f\,(x-y)\,g\,(y)\,dy;$$

известно (см., например, [1, т. 1, гл. 2, § 1; 2, т. 1, п. 3.1]), что функция h — 2π-периодическая, определена почти всюду, измерима и $\|h\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_1$, откуда, в частности, следует $h = f * g \in L_1(\mathbb{T})$. Последнее утверждение является частным случаем следующего результата, известного под названием неравенства Юнга (см., например, [1, т. 1, гл. 2, теорема (1.15); 2, т. 2, теорема 13.6.1; 2, т. 1, теоремы 3.1.4, 3.1.6]): пусть $1 \le p, q \le \infty$, $1/r = 1/p + 1/q - 1 \ge 0$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $g \in L_q(\mathbb{T})$, $h = f * g$; тогда при $1/r > 0$ функция $h \in L_r(\mathbb{T})$, где $r = pq/\,(p + q - pq) \in [1, \infty)$, и $\|h\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$, а при $1/r = 0$ ($\Leftrightarrow$ $1/p + 1/q = 1$) функция $h \in C(\mathbb{T}) \equiv L_\infty(\mathbb{T})$ и $\|h\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$, где p' — показатель, сопряженный p, $p' = 1$ для $p = \infty$ и $p' = \infty$ для $p = 1$.

В частности, полагая $p = q$, получим $h \in L_r(\mathbb{T})$, $r = p/(2 - p)$, и $\|h\|_r \le \|f\|_p \|g\|_p$ при $1 \le p < 2$, $h \in C(\mathbb{T})$ и $\|h\|_\infty \le \|f\|_2 \|g\|_2$ при $p = 2$.

Известно, что коэффициенты Фурье $c_n(h)$ свертки $h = f * g$ двух функций $f \in L_1(\mathbb{T})$ и $g \in L_1(\mathbb{T})$ вычисляются по формуле (см. [1, т. 1, гл. 2, теорема (1.5); 2, т. 1, формула (3.1.5)]) $c_n(h) = c_n(f * g) = c_n(h)\, c_n(g)\,,\ n \in \mathbb{Z}$.

Следующее утверждение принадлежит М. Риссу, отмечено в [3] (см. также [4, гл. 9, § 7; 1, т. 1, гл. 6; 5, гл. 2, § 2; 2, т. 1, пп. 10.6.2, замечание (4)]) и известно под названием критерия М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье непрерывных функций: для того чтобы ряд Фурье функции $h \in C(\mathbb{T})$ сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы h могла быть представлена в виде свертки $h = f*g$ двух функций $f \in L_2(\mathbb{T})$ и $g \in L_2(\mathbb{T})$.

Отметим, что предположение о непрерывности h является излишним, поскольку оно обеспечивается утверждением критерия: если $\rho_0(h) < \infty$, то $h \in C(\mathbb{T})$; если же $h = f * g$, где $f, g \in L_2(\mathbb{T})$, то $h \in C(\mathbb{T})$.

Для удобства дальнейшего изложения нам понадобятся следующие обозначения: $A^{(\gamma)} = \{f \in L_1(\mathbb{T}) \colon \rho_0^{(\gamma)}(f) < \infty\}$, $A^{(1)} \equiv A$; $F * G = \{h \colon h = f * g,\ \ f \in F,\ \ g \in G\}$, где F и G — заданные классы функций.

В терминах введенных обозначений критерий М. Рисса допускает следующую эквивалентную формулировку.

Теорема A. *$A = L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T})$, т. е. $A \subset L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T})$ (каждая функция $h \in A$ представима в виде свертки $h = f * g$ двух функций $f \in L_2(\mathbb{T})$ и $g \in L_2(\mathbb{T})$) и $L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T}) \subset A$ (свертка $h = f * g$ любых двух функций $f \in L_2(\mathbb{T})$ и $g \in L_2(\mathbb{T})$ принадлежит классу A).*

З а м е ч а н и е 1:

1) $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A$ при $2 < p \le \infty$ (см. [2, т. 2, упражнение 13.20]).
Это очевидное утверждение является следствием монотонности L_p-нормы, в силу которой $L_p(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T})$ и, следовательно, $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T}) = A$.

2) $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \not\subset A$ при $1 \le p < 2$, а именно для каждого $p \in [1, 2)$ существуют функции $f_0(\cdot; p), g_0(\cdot; p) \in L_p(\mathbb{T}) \setminus A$ такие, что их свертка $h_0 = f_0 * g_0 \notin A$ и, следовательно, $h_0 \in L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \setminus A$ (см., например, [6, примеры 1, 2]).

В связи с этим отметим, что в [7, теорема 4A] доказано следующее утверждение: если функции $f, g \in L_p(\mathbb{T})$ для некоторого $p \in (1, 2]$, то их свертка $h = f * g \in A^{(p'/2)}$, $p' = p/(p - 1)$, т. е. $\rho_0^{(p'/2)}(h) < \infty$. В этой же работе [7, теорема 5] доказано, что последнее утверждение является точным в следующем смысле: для каждого $p \in (1, 2]$ существуют функции $f_0(\cdot; p)$, $g_0(\cdot; p) \in L_p(\mathbb{T})$ $(f_0 = g_0)$ такие, что $\rho_0^{(\beta)}(h_0) = \infty$ $(h_0 = f_0 * g_0)$ для любого числа $\beta < p'/2$ (и, следовательно, $h_0 \notin A^{(\beta)}$), т. е. показатель $p'/2 \ge 1$ понизить нельзя (см. также [6, пример 3]). Отсюда следует, что заведомо $h_0 \notin A$ при $p \in (1, 2)$, поскольку в этом случае $p'/2 > 1$. Таким образом, в случае $1 < p \le 2$ имеет место точное включение $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A^{(p'/2)}$.

Отметим также, что утверждение $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A^{(p'/2)}$, где $1 < p \le 2$, было позднее анонсировано (без ссылки на [7]) в [2, т. 2, упражнение 13.20].

3) $A \subset L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T})$ при $1 \le p < 2$.
Это утверждение также является очевидным следствием монотонности L_p-нормы, в силу которой $L_2(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T})$ и, следовательно, $A = L_2(\mathbb{T}) * L_2(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T})$.

4) $A \not\subset L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T})$ при $2 < p \le \infty$, а именно для каждого $p \in (2, \infty]$ существует функция $h_0(\cdot; p) \in A$ (точнее, существует семейство функций $h_0(\cdot; p; \sigma) \in A$, зависящих от непрерывного параметра $\sigma \in (1/p, 1/p']$) такая, что $h_0 \notin L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T})$.

Существование указанной функции h_0 гарантируется утверждением, приведенным в [2, т. 2, п. 15.3.4]: любая функция $h \in L_p(\mathbb{T})$, где $1 < p \le \infty$, удовлетворяющая соотношению $\rho_0^{(p'/2)}(h) = \infty$, не принадлежит $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T})$. Действительно, в противном случае мы имели бы $\rho_0^{(p'/2)}(h) < \infty$ (см. п. 2 настоящего замечания, случай $1 < p \le 2$; в случае $2 < p \le \infty$ последнее утверждение, очевидно, остается в силе). Положим

$$c_n h_0 = \begin{cases} n^{-(1/p'+\sigma)} & \text{при } \ n \ge 1, \\ 0 & \text{при } \ n < 1, \end{cases}$$

где $1 \le p' = p/(p-1) < 2$, $2 < p \le \infty$, $\sigma \in (1/p; 1/p']$. Пусть $2 < p < \infty$; поскольку $0 < c_n(h_0) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} c_n^p(h_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2} n^{-p(\sigma+1/p')} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+p\sigma)} < +\infty,$$

то $h_0 \in L_p(\mathbb{T})$ в силу теоремы Харди и Литтлвуда (см., например, [4, гл. 10, § 3; 1, т. 2, гл. 12, лемма (6.6); 2, т. 1, п. 7.3.5]); в случае $p = \infty$ ($\Rightarrow p' = 1$ и $\sigma \in (0,1]$) имеем $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(h_0)| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\sigma)} < \infty$, откуда в силу признака Вейерштрасса следует, что ряд Фурье h_0 сходится равномерно всюду на $\mathbb{T}$ и, следовательно, $h_0 \in C(\mathbb{T})$. Далее, при $2 < p \le \infty$

$$\left(\rho_0^{(p'/2)}(h_0)\right)^{p'/2} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(h_0))^{p'/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/p'+\sigma)p'/2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+p'\sigma)/2} = \infty,$$

поскольку $(1+p'\sigma)/2 \le 1 \Leftrightarrow \sigma \le 1/p'$. И, наконец, так как $1/p' + \sigma > 1 \ \Leftrightarrow \ \sigma > 1/p$, то $\rho_0(h_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(h_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1/p'+\sigma)} < \infty$, откуда следует, что $h_0 \in A$.

Пусть M_0 — класс всех последовательностей $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям $0 < \lambda_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. Обозначим $\lambda^\alpha = \{\lambda_n^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$, где $\lambda \in M_0$ и $0 < \alpha \in \mathbb{R}$. Для заданных $1 \le p \le \infty$, $\gamma \in (0,\infty)$ и $\lambda \in M_0$ положим

$$E_p[\lambda] = \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}) : \ E_{n-1}(f)_p = O(\lambda_n), \ \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$A^{(\gamma)}[\lambda] = \left\{ f \in A^{(\gamma)} : \ \rho_n^{(\gamma)}(f) = O(\lambda_n), \ \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad A^{(1)}[\lambda] \equiv A[\lambda],$$

где $E_{n-1}(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше $(n-1) \in \mathbb{Z}_+$.

З а м е ч а н и е 2:

1) $E_p[\lambda^\alpha] * E_p\left[\lambda^\beta\right] \subset A[\lambda]$ при $2 \le p \le \infty$, любых $(\alpha, \beta) \in (0,1)$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, и произвольной последовательности $\lambda \in M_0$.

Действительно, для любой функции $h \in E_p[\lambda^\alpha] * E_p\left[\lambda^\beta\right]$ имеем $h = f * g$, где $f, g \in L_p(\mathbb{T})$, $E_{n-1}(f)_p = O(\lambda_n^\alpha)$ и $E_{n-1}(g)_p = O\big(\lambda_n^\beta\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу включения $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A$ (см. п. 1 замечания 1, случай $2 < p \le \infty$ и утверждение теоремы А, случай $p = 2$) функция $h \in A$ ($\Leftrightarrow \rho_0(h) < \infty$) и, применяя неравенство Коши — Шварца, получаем (см. также [6, теорема 3]):

$$\rho_n(h) = \sum_{|\nu|=n}^{\infty} |c_\nu(h)| = \sum_{|\nu|=n}^{\infty} |c_\nu(f)|\,|c_\nu(g)| \le \rho_n^{(2)}(f)\,\rho_n^{(2)}(g)$$

$$= E_{n-1}(f)_2\, E_{n-1}(g)_2 \le E_{n-1}(f)_p\, E_{n-1}(g)_p = O(\lambda_n^\alpha)\, O\big(\lambda_n^\beta\big) = O(\lambda_n),$$

откуда $\rho_n(h) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $h \in A[\lambda]$.

2) $E_p\left[\lambda^{\alpha}\right] * E_p\left[\lambda^{\beta}\right] \subset A^{(p'/2)}\left[\lambda\right]$ при $1 < p \le 2$, $p' = p/(p-1)$, любых $\alpha, \beta \in (0,1)$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, и произвольной последовательности $\lambda \in M_0$.

Действительно, для любой функции $h \in E_p\left[\lambda^{\alpha}\right] * E_p\left[\lambda^{\beta}\right]$ имеем $h = f * g$, где $f \in E_p\left[\lambda^{\alpha}\right]$ и $g \in E_p\left[\lambda^{\beta}\right]$; отсюда в силу включения $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A^{(p'/2)}$ (см. п. 2 замечания 1) функция $h \in A^{(p'/2)}$ $\left(\Leftrightarrow\ \rho_0^{(p'/2)}(h) < \infty\right)$ и, применяя оценку $\rho_0^{(p'/2)}(h) \le \|f\|_p \|g\|_p$, доказанную в [6, теорема 1], к разности $h_{n-1}(x) \equiv h(x) - S_{n-1}(h;x) = [f(x) - S_{n-1}(f;x)] * [g(x) - S_{n-1}(g;x)]$, $n \in \mathbb{N}$, получаем (см. [6, теорема 1]):

$$\rho_n^{(p'/2)}(h) \equiv \rho_0^{(p'/2)}(h_{n-1}) \le \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_p \, \|g(\cdot) - S_{n-1}(g;\cdot)\|_p$$

$$\le M^2(p) E_{n-1}(f)_p \, E_{n-1}(g)_p = M^2(p) O\left(\lambda_n^{\alpha}\right) O\left(\lambda_n^{\beta}\right) = O\left(\lambda_n\right),$$

откуда $\rho_n^{(p'/2)}(h) = O\left(\lambda_n\right)$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $h \in A^{(p'/2)}\left[\lambda\right]$.

В приведенной оценке $M(p)$ — постоянная в известном неравенстве М. Рисса $\big($см., например, [4, гл. 8, § 20; 2, т. 2, п. 12.10.1; 8, п. 5.11, неравенство (6)]$\big)$:

$$\|\psi(\cdot) - S_n(\psi;\cdot)\|_p \le M(p) E_n(\psi)_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ 1 < p < \infty, \ \psi \in L_p(\mathbb{T}).$$

3) Оценки

$$\rho_n(h) \le E_{n-1}(f)_p \, E_{n-1}(g)_p, \quad 2 \le p \le \infty,$$

и

$$\rho_n^{(p'/2)}(h) \le M^2(p) E_{n-1}(f)_p \, E_{n-1}(g)_p, \quad 1 < p \le 2,$$

приведенные в п. 1 и 2, являются точными в смысле порядка на классе функций $E_p\left[\varepsilon\right] * E_p\left[\delta\right]$, где $\varepsilon = \left\{n^{-\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\delta = \left\{n^{-\beta}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (см. [6, теоремы 2, 4]).

Следующие утверждения представляют собой скоростную версию критерия М. Рисса в терминах наилучших приближений (теорема 1) и модулей гладкости (теорема 2) функций, образующих свертку.

Теорема 1. *Для любой последовательности $\lambda \in M_0$ имеет место равенство*

$$A\left[\lambda\right] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость включения $E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right] \subset A\left[\lambda\right]$ установлена в п. 1 замечания 2, случай $p = 2$, $\alpha = \beta = 1/2$. Докажем, что имеет место также обратное включение $A\left[\lambda\right] \subset E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, а именно каждая функция $h \in A\left[\lambda\right]$ может быть представлена в виде свертки $h = f * g$ функций $f \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$ и $g \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$. Для каждой функции $h \in A\left[\lambda\right]$ имеем $h \in A$ и $\rho_n(h) = O\left(\lambda_n\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $a_n = \left|c_n(h)\right|^{1/2}$, $b_n = \left|c_n(h)\right|^{1/2} \exp\left(i \arg c_n(h)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; тогда, учитывая условие $\rho_0(h) < \infty$, согласно теореме Рисса — Фишера получим, что существуют функции $f \in L_2(\mathbb{T})$ и $g \in L_2(\mathbb{T})$ с коэффициентами Фурье $c_n(f) = a_n$ и $c_n(g) = b_n$, $n \in \mathbb{Z}$, причем

$$\|f\|_2 = \rho_0^{(2)}(f) = \rho_0^{(2)}(g) = \|g\|_2 = \left(\rho_0(h)\right)^{1/2}.$$

Свертка $f * g$ этих функций имеет ряд Фурье с коэффициентами

$$c_n(f * g) = \left|c_n(h)\right| \exp\left(i \arg c_n(h)\right) = c_n(h), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и, следовательно, в силу теоремы единственности (см., например, [2, т. 1, теорема 2.4.1]) $h = f * g$ почти всюду на $\mathbb{T}$, а поскольку $f * g \in C(\mathbb{T})$ и $h \in A \subset C(\mathbb{T})$, то $h = f * g$ всюду на $\mathbb{T}$.

Кроме того, в силу равенства Парсеваля имеем

$$E_{n-1}(f)_2 = \rho_n^{(2)}(f) = \rho_n^{(2)}(g) = E_{n-1}(g)_2 = (\rho_n(h))^{1/2} = (O(\lambda_n))^{1/2} = O\big(\lambda_n^{1/2}\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда $E_{n-1}(f)_2 = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$ и $E_{n-1}(g)_2 = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $h = f * g$, где $f, g \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, т.е. $h \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$. Теорема 1 доказана. □

Отметим, что теорема 1 допускает эквивалентную формулировку, которая отчасти оправдывает введение термина "скоростная версия": для того чтобы ряд Фурье функции $h \in C(\mathbb{T})$ абсолютно сходился всюду на $\mathbb{T}$ с оценкой скорости сходимости $\rho_n(h) = O(\lambda_n)$, $n \in \mathbb{N}$, необходимо и достаточно, чтобы h могла быть представлена в виде свертки $h = f * g$ двух функций $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ с $E_{n-1}(f)_2 = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$ и $E_{n-1}(g)_2 = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через Ω_l класс функций $\omega = \omega(\delta)$, определенных на $(0, \pi]$ и удовлетворяющих условиям $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$ $(\delta \downarrow 0)$ и $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow$ $(\delta \uparrow)$, где $l \in \mathbb{N}$.

Для заданных $1 \le p \le \infty$, $l \in \mathbb{N}$ и $\omega \in \Omega_l$ положим

$$H_p^l[\omega] = \Big\{ f \in L_p(\mathbb{T}) : \ \omega_l(f;\delta)_p = O(\omega(\delta)), \ \delta \in (0,\pi] \Big\},$$

где $\omega_l(f;\delta)_p$ — модуль гладкости l-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$. Отметим, что если $\omega \in \Omega_l$, то, полагая $\omega_n = \omega(\pi/n)$, $n \in \mathbb{N}$, имеем $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_0$ и $n^l \omega_n \uparrow$ $(n \uparrow)$.

Теорема 2. *Для любой функции $\omega \in \Omega_l$ имеет место равенство*

$$A[\omega] = H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right],$$

где $l \in \mathbb{N}$, $\omega^{1/2} = [\omega(\delta)]^{1/2}$, $A[\omega] = \{h \in A\colon\ \rho_n(h) = O(\omega_n), \ n \in \mathbb{N}\}$.

Доказательство. Вначале установим включение $H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] \subset A[\omega]$. Для любой функции $h \in H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]$ имеем $h = f * g$, где $f, g \in H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]$, т.е. $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ и $\omega_l(f;\delta)_2 = O\big([\omega(\delta)]^{1/2}\big)$, $\omega_l(g;\delta)_2 = O\big([\omega(\delta)]^{1/2}\big)$, $\delta \in (0,\pi]$. В силу L_p-аналога неравенства Джексона — Стечкина (см. [9, теорема 1], случай $p = \infty$; [8, п. 5.11, неравенство (1)], случай $1 \le p \le \infty$)

$$E_{n-1}(\psi)_p \le C_1(l)\,\omega_l(\psi;\pi/n)_p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $l \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $\psi \in L_p(\mathbb{T})$, и оценки, приведенной в конце п. 1 замечания 2, получаем $(f, g \in L_2(\mathbb{T}) \Rightarrow h = f * g \in A \ \Leftrightarrow\ \rho_0(h) < \infty$; см. теорему A):

$$\rho_n(h) \le E_{n-1}(f)_2\, E_{n-1}(g)_2 \le [C_1(l)]^2\, \omega_l(f;\pi/n)_2\, \omega_l(g;\pi/n)_2$$

$$= [C_1(l)]^2\, O\big(\omega_n^{1/2}\big) O\big(\omega_n^{1/2}\big) = O\big(\omega_n\big),$$

откуда $\rho_n(h) = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $h \in A[\omega]$.

Докажем теперь справедливость включения $A[\omega] \subset H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]$. Для любой функции $h \in A[\omega]$ имеем $h \in A$ $(\Leftrightarrow \rho_0(h) < \infty)$ и $\rho_n(h) = O(\omega_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку (см. теорему 1) $A[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, где $\lambda = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $h \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, откуда следует, что $h = f * g$, где $f, g \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, т.е. $f, g \in L_2(\mathbb{T})$ и $E_{n-1}(f)_2 = O\big(\omega_n^{1/2}\big)$, $E_{n-1}(g)_2 = O\big(\omega_n^{1/2}\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая последние соотношения и условие $n^l\omega_n \uparrow$ $(n \uparrow)$, в силу неравенства (см., [9, теорема 8], случай $p = \infty$, $l \in \mathbb{N}$; [10, лемма 1], случай $p = 2$, $l = 1$; [8, п. 6.1.1, неравенство (1)], случай $p = 1$, $p = \infty$, $l \in \mathbb{N}$; [11, теорема 1, неравенства (7); 8, п. 6.1.5, неравенства (12)], случай $1 < p < \infty$, $l \in \mathbb{N}$)

$$\omega_l(\psi;\pi/n)_p \le C_2(l,p)\, n^{-l} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta l - 1} E_{\nu-1}^{\theta}(\psi)_p \right)^{1/\theta}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $1 \le p \le \infty$, $\psi \in L_p(\mathbb{T})$, $\theta = \theta(p) = \min\{2, p\}$ при $p < \infty$ и $\theta(\infty) = 1$, получаем:

$$\omega_l(f;\pi/n)_2 \le C_2(l,2)\, n^{-l}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2l-1} E_{\nu-1}^2(f)_2\right)^{1/2} = O\left(n^{-l}\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2l-1}\omega_\nu\right)^{1/2}\right)$$

$$\le O\left(n^{-l}\left(n^l\omega_n\right)^{1/2}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{l-1}\right)^{1/2}\right) \le O\left(n^{-l}\left(n^l\omega_n\right)^{1/2}\left(n^l\right)^{1/2}\right) = O\left(\omega_n^{1/2}\right),$$

откуда $\omega_l(f;\pi/n)_2 = O\left(\omega_n^{1/2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow \omega_l(f;\delta)_2 = O\left([\omega(\delta)]^{1/2}\right)$, $\delta \in (0,\pi]$. Аналогично устанавливается оценка $\omega_l(g;\delta)_2 = O\big([\omega(\delta)]^{1/2}\big)$, $\delta \in (0,\pi]$. Из полученных оценок следует, что $h \in H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]$. Теорема 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 3:

1) Теорема 2 может быть также установлена следующим образом. Неравенства (2) и (3) при $p = 2$ гарантируют соответственно включения $H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] \subset E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$ и $E_2\left[\lambda^{1/2}\right] \subset H_2^l\left[\omega^{1/2}\right]$, где $\lambda = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. доказательство теоремы 2), откуда следует, что $H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$. Учитывая утверждение теоремы 1, получаем:

$$A[\omega] \equiv A[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right] = H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right].$$

2) Пусть $2 \le p \le \infty$, $l,k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_l$, $\varphi \in \Omega_k$, $\alpha,\beta \in (0,1]$; тогда $H_p^l[\omega^\alpha] * H_p^k\left[\varphi^\beta\right] \subset A[\lambda]$, где $\lambda_n = \omega_n^\alpha\varphi_n^\beta$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, для произвольной функции $h \in H_p^l[\omega^\alpha] * H_p^k\left[\varphi^\beta\right]$ имеем $h = f * g$, где $f \in H_p^l[\omega^\alpha]$, $g \in H_p^k\left[\varphi^\beta\right]$, откуда $f,g \in L_p(\mathbb{T})$, $\omega_l(f;\delta)_p = O\left([\omega(\delta)]^\alpha\right)$, $\omega_k(g;\delta)_p = O\big([\varphi(\delta)]^\beta\big)$, $\delta \in (0,\pi]$. Отсюда в силу включения $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A$ (см. п. 1 замечания 1, случай $2 < p \le \infty$ и теорему A, случай $p = 2$) функция $h \in A$ ($\Leftrightarrow$ $\rho_0(h) < \infty$) и в силу неравенства (2) получаем (см. п. 1 замечания 2):

$$\rho_n(h) \le E_{n-1}(f)_p\, E_{n-1}(g)_p \le C_1(l)\, C_1(k)\, \omega_l(f;\pi/n)_p\, \omega_k(g;\pi/n)_p$$

$$= C_1(l)\, C_1(k)\, O(\omega_n^\alpha)\, O\big(\varphi_n^\beta\big) = O\big(\omega_n^\alpha\varphi_n^\beta\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $h \in A[\lambda]$, где $\lambda = \left\{\omega_n^\alpha\varphi_n^\beta\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Полагая $p = 2$, $k = l$, $\varphi = \omega \in \Omega_l$, $\alpha = \beta = 1/2$, имеем включение $H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] * H_2^l\left[\omega^{1/2}\right] \subset A[\omega]$, установленное при доказательстве теоремы 2.

3) Пусть $1 < p \le 2$, $p' = p/(p-1)$, $l \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_l$, $\varphi \in \Omega_k$, $\alpha,\beta \in (0,1]$; тогда $H_p^l[\omega^\alpha] * H_p^k\left[\varphi^\beta\right] \subset A^{(p'/2)}[\lambda]$, где $\lambda_n = \omega_n^\alpha\varphi_n^\beta$, $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, для любой функции $h \in H_p^l[\omega^\alpha] * H_p^k\left[\varphi^\beta\right]$ имеем $h = f * g$, где $f \in H_p^l[\omega^\alpha]$, $g \in H_p^k\left[\varphi^\beta\right]$. Отсюда в силу включения $L_p(\mathbb{T}) * L_p(\mathbb{T}) \subset A^{(p'/2)}$ (см. п. 2 замечания 1) функция $h \in A^{(p'/2)}$ $\left(\Leftrightarrow \rho_0^{(p'/2)}(h) < \infty\right)$ и в силу неравенства (2) получаем (см. п. 2 замечания 2):

$$\rho_n^{(p'/2)}(h) \le M^2(p)E_{n-1}(f)_pE_{n-1}(g)_p \le M^2(p)C_1(l)\omega_l(f;\pi/n)_p\, C_1(k)\omega_k(g;\pi/n)_p$$

$$= M^2(p)C_1(l)C_1(k)O(\omega_n^\alpha)\, O\big(\varphi_n^\beta\big) = O\big(\omega_n^\alpha\varphi_n^\beta\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $h \in A^{(p'/2)}[\lambda]$, где $\lambda = \left\{\omega_n^\alpha\varphi_n^\beta\right\}_{n=1}^{\infty}$. В частности, полагая $k = l$, $\varphi = \omega \in \Omega_l$, $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, имеем включение $H_p^l[\omega^\alpha] * H_p^l\left[\omega^\beta\right] \subset A^{(p'/2)}[\omega]$, где $1 < p \le 2$.

4) Оценки

$$\rho_n(h) \le C_1(l)C_1(k)\omega_l(f;\pi/n)_p\, \omega_k(g;\pi/n)_p, \quad 2 \le p \le \infty,$$

и

$$\rho_n^{(p'/2)}(h) \le M^2(p)C_1(l)C_1(k)\omega_l\left(f;\pi/n\right)_p\omega_k\left(g;\pi/n\right)_p, \quad 1 < p \le 2,$$

приведенные в п. 2 и 3, являются точными в смысле порядка на классе $H_p^l[\omega] * H_p^k[\varphi]$, где $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < l$, $\varphi(\delta) = \delta^\beta$, $0 < \beta < k$, поскольку в этом случае в силу неравенств (2) и (3) имеем

$$\omega_l\left(f;\delta\right)_p = O\left(\delta^\alpha\right), \quad \delta \in (0,\pi] \Leftrightarrow E_{n-1}(f)_p = O\left(n^{-\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_k(g;\delta)_p = O\big(\delta^\beta\big), \quad \delta \in (0,\pi] \Leftrightarrow E_{n-1}(g)_p = O\big(n^{-\beta}\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $H_p^l[\omega] * H_p^k[\varphi] = E_p[\varepsilon] * E_p[\delta]$, где $\varepsilon = \{n^{-\alpha}\}_{n=1}^\infty, \delta = \{n^{-\beta}\}_{n=1}^\infty$ (см. п. 3 замечания 2).

З а м е ч а н и е 4. $A[\lambda] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ при $1 \le p < 2$ и любой последовательности $\lambda \in M_0$.

Действительно, поскольку $E_2\left[\lambda^{1/2}\right] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ при $1 \le p < 2$, то в силу теоремы 1 имеем $A[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$.

В связи с утверждениями, приведенными в замечании 4 и в п. 2 замечания 2 (см. также п. 2 замечания 1), возникает задача о нахождении условий (необходимых и достаточных) на последовательность $\lambda \in M_0$ для справедливости включения

$$E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \subset A[\lambda] \quad \text{при} \quad 1 \le p < 2.$$

Нам понадобится следующий результат о соотношениях между наилучшими приближениями периодических функций в разных L_p-метриках.

Теорема B. *Пусть* $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \in M_0$ *и* $\delta = \{\delta_n\}_{n=1}^\infty \in M_0$; *тогда*

1) *при* $1 < p < q < \infty$

$$E_p[\varepsilon] \subset E_q[\delta] \iff \left(\sum_{k=n}^\infty (k-n+1)^{(q/p)-2}\,\varepsilon_k^q\right)^{1/q} = O\left(\delta_n\right), \quad n \in \mathbb{N};$$

2) *при* $p = 1$ *и* $q = 2$

$$E_1[\varepsilon] \subset E_2[\delta] \iff \left(\sum_{k=n}^\infty \varepsilon_k^2\right)^{1/2} = O\left(\delta_n\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Утверждение 1 теоремы B доказано В. И. Колядой [12, теорема 2; 13, теорема 1]. Достаточность условия в п. 2 принадлежит П. Л. Ульянову [14, теорема 6, a]; по поводу необходимости см. [13, § 2, замечание 1], а также [14, теорема 6, б].

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p < 2$ *и* $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in M_0$; *тогда для справедливости включения* $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \subset A[\lambda]$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\left(\sum_{k=n}^\infty (k-n+1)^{(2/p)-2}\,\lambda_k\right)^{1/2} = O\left(\lambda_n^{1/2}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем достаточность. Пусть $\lambda \in M_0$ удовлетворяет условию (4). Тогда в силу теоремы B (полагаем $1 \le p < q = 2$, $\varepsilon_n = \delta_n = \lambda_n^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$) имеем $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \subset E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, откуда $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \subset E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$. Далее, так как согласно теореме 1 $A[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, то отсюда непосредственно следует требуемое включение $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \subset A[\lambda]$.

Доказательство необходимости проведем от противного: пусть для некоторой последовательности $\lambda \in M_0$ условие (4) не выполнено. Покажем, что тогда $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \not\subset A\left[\lambda\right]$. Если условие (4) не выполнено, то в силу теоремы B (случай $1 \le p < q = 2$, $\varepsilon = \delta = \lambda^{1/2}$) имеем $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \not\subset E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, откуда следует существование хотя бы одной функции $f_0 \in E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ такой, что $f_0 \notin E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$. Положим $h_0 = f_0 * f_0$; тогда $h_0 \in E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$, причем $c_n\left(h_0\right) = c_n^2\left(f_0\right)$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\rho_0\left(h_0\right) = \left(\rho_0^{(2)}\left(f_0\right)\right)^2 = \|f_0\|_2^2, \qquad \rho_n\left(h_0\right) = \left(\rho_n^{(2)}\left(f_0\right)\right)^2 = E_{n-1}^2\left(f_0\right)_2, \quad n \in \mathbb{N},$$

(правые части последних двух равенств, очевидно, имеют смысл в случае $f_0 \in L_2(\mathbb{T})$).

Если $\rho_0\left(h_0\right) = \infty$ (т. е. $f_0 \notin L_2(\mathbb{T})$), то $h_0 \notin A$ и, тем более, $h_0 \notin A\left[\lambda\right]$ ни для какой последовательности $\lambda \in M_0$. Если же $\rho_0\left(h_0\right) < \infty$ (т. е. $f_0 \in L_2(\mathbb{T})$), то $h_0 \in A$. Однако $h_0 \notin A\left[\lambda\right]$, так как в противном случае мы имели бы

$$E_{n-1}\left(f_0\right)_2 = \left(\rho_n\left(h_0\right)\right)^{1/2} = \left(O\left(\lambda_n\right)\right)^{1/2} = O\big(\lambda_n^{1/2}\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда $E_{n-1}\left(f_0\right)_2 = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $f_0 \in E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$, а это противоречит предположению $f_0 \notin E_2\left[\lambda^{1/2}\right]$.

Таким образом, если условие (4) не выполнено, то существует функция $h_0 \in E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ такая, что $h_0 \notin A\left[\lambda\right]$; отсюда следует, что $E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \not\subset A\left[\lambda\right]$, что и требовалось доказать. Теорема 3 доказана. □

Следующее утверждение представляет собой так называемую скоростную L_p-версию критерия М. Рисса абсолютной сходимости тригонометрических рядов Фурье в терминах наилучших приближений при $1 \le p < 2$.

Теорема 4. *Пусть $1 \le p < 2$ и $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_0$; тогда*

$$A\left[\lambda\right] = E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right] \;\Leftrightarrow\; \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(k-n+1\right)^{(2/p)-2}\lambda_k\right)^{1/2} = O\left(\lambda_n^{1/2}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Справедливость утверждения теоремы 4 имеет место в силу замечания 4 и теоремы 3.

З а м е ч а н и е 5. Если последовательность $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_0$ удовлетворяет (β)-условию: существует $\beta \in (0,1)$ такое, что $\lambda_{n+1} \le \beta\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, то (4) выполняется при любом $p \in [1, \infty)$.

Действительно, так как $\lambda_{n+m-1} \le \beta^{m-1}\lambda_n$, $m \in \mathbb{N}$, то

$$u_n\left(p;\lambda\right) \equiv \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(k-n+1\right)^{2/p-2}\lambda_k\right)^{1/2} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{2(1/p-1)}\lambda_{n+m-1}\right)^{1/2}$$

$$\le \lambda_n^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\beta^{m-1}m^{2(1/p-1)}\right)^{1/2} \le \lambda_n^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\beta^{m-1}\right)^{1/2} = \lambda_n^{1/2}\left(1-\beta\right)^{-1/2},$$

откуда $u_n\left(p;\lambda\right) \le \left(1-\beta\right)^{-1/2}\lambda_n^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Например, для последовательности $\lambda_n = a^{-(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, где $a > 1$, имеем $\lambda_{n+1} \le \beta\lambda_n$ с $\beta = a^{-1} < 1$.

Отметим также, что при $p > 2$ условие (4) выполняется для любой последовательности $\lambda \in M_0$: $u_n\left(p;\lambda\right) = \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-2(1-1/p)}\lambda_{n+m-1}\right)^{1/2} \le \lambda_n^{1/2}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-2(1-1/p)}\right)^{1/2} = \lambda_n^{1/2}O\left(1\right) = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$, $n \in \mathbb{N}$, поскольку $2\left(1-1/p\right) > 1 \;\Leftrightarrow\; p > 2$.

З а м е ч а н и е 6. В связи с утверждениями, приведенными в п. 1 замечания 2 и в п. 4 замечания 1, естественно также рассмотреть вопрос об условиях (необходимых и достаточных) на последовательность $\lambda \in M_0$ для справедливости включения $A[\lambda] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ в случае $2 < p \le \infty$.

С помощью п. 1 теоремы B (полагаем $q = p < \infty$, $p = 2$ и $\varepsilon_n = \delta_n = \lambda_n^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$) нетрудно сформулировать достаточное условие, а именно пусть $2 < p < \infty$, $\lambda \in M_0$; тогда

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1)^{(p/2)-2}\,\lambda_k^{p/2}\right)^{1/p} = O\big(\lambda_n^{1/2}\big), \quad n \in \mathbb{N} \implies A[\lambda] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right].$$

Действительно, при выполнении этого условия имеем $E_2\left[\lambda^{1/2}\right] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$, откуда в силу теоремы 1 получаем $A[\lambda] = E_2\left[\lambda^{1/2}\right] * E_2\left[\lambda^{1/2}\right] \subset E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$. Вопрос о необходимости указанного условия остается открытым.

Отметим также, что в силу утверждения п. 1 замечания 2 указанное условие на $\lambda \in M_0$ является достаточным для справедливости равенства $A[\lambda] = E_p\left[\lambda^{1/2}\right] * E_p\left[\lambda^{1/2}\right]$ при $2 < p < \infty$. Приведенному условию удовлетворяет любая последовательность $\lambda \in M_0$ в случае $1 \le p < 2$:

$$v_n(p;\lambda) \equiv \left(\sum_{k=n}^{\infty}(k-n+1)^{p/2-2}\,\lambda_k^{p/2}\right)^{1/p} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{p/2-2}\lambda_{n+m-1}^{p/2}\right)^{1/p}$$

$$\le \lambda_n^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{p/2-2}\right)^{1/p} = \lambda_n^{1/2} O(1) = O\big(\lambda_n^{1/2}\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

поскольку $2 - p/2 > 1 \;\Leftrightarrow\; p < 2$.

Если же $\lambda \in M_0$ удовлетворяет (β)-условию (см. замечание 5), то приведенное условие выполняется при любом $p \in [1, \infty)$:

$$v_n(p;\lambda) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{p/2-2}\lambda_{n+m-1}^{p/2}\right)^{1/p} \le \lambda_n^{1/2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\beta^{(m-1)p/2} m^{p/2-2}\right)^{1/p} = \lambda_n^{1/2}\,O(1) = O\big(\lambda_n^{1/2}\big),$$

откуда $v_n(p;\lambda) = O\big(\lambda_n^{1/2}\big)$, $n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 7. Утверждения теорем 1, 2, 4 и замечания 6 анонсированы автором в [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 540 с.
2. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М.: Мир, 1985. Т. 1. 264 с.; Т. 2. 400 с.
3. **Hardy G.H., Littlewood J.E.** Solution of the Cesaro summability problem for power series and Fourier series // Math. Z. 1924. Vol. 19, no. 1. P. 67–96.
4. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
5. **Кахан Ж.-П.** Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976. 208 с.
6. **Ilyasov N.A.** To the M. Riesz theorem on absolute convergence of the trigonometric Fourier series // Trans. NAS Azerbaijan. Ser. phys.-tech. and math. sci. 2004. Vol. 24, no. 1. P. 113–120.
7. **Onneweer C.W.** On absolutely convergent Fourier series // Arkiv für mat. 1974. Vol. 12, no. 1. P. 51–58.
8. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
9. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
10. **Стечкин С.Б.** О теореме Колмогорова — Селиверстова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. Т. 17, № 6. С. 499–512.
11. **Тиман А.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p $(1 \le p \le \infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46, № 1. С. 125–132.

12. **Коляда В.И.** О соотношениях между наилучшими приближениями в разных метриках // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 3. С. 383–387.
13. **Коляда В.И.** Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 195–215.
14. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 1. С. 104–131.
15. **Ilyasov N.A.** A rate version of M. Riesz criterion on absolute convergence of trigonometric Fourier series in L_p-spaces // Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию акад. С. М. Никольского. М.: Изд-во МИРАН, 2005. 374 с.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики Национальной АН Азербайджана
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

Поступила 12.03.2010

УДК 517.518.452

РАСХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ ЛАКУНАРНЫХ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ[1]

С. В. Конягин

Известно, что если возрастающая последовательность $\{n_m\}$ натуральных чисел и модуль непрерывности ω удовлетворяют условию $\sum_{m=1}^{\infty}\omega(1/n_m)/m<\infty$, то для любой функции $f\in H_1^{\omega}$ подпоследовательность частных сумм $S_{n_m}(f,x)$ сходится почти всюду к $f(x)$. Показано, что для лакунарной последовательности $\{n_m\}$ указанное достаточное условие сходимости близко к необходимому.

Ключевые слова: ряд Фурье, мера Лебега, модуль непрерывности.

S. V. Konyagin. Almost everywhere divergence of lacunary subsequences of partial sums of Fourier series.

If an increasing sequence $\{n_m\}$ of positive integers and a modulus of continuity ω satisfy the condition $\sum_{m=1}^{\infty}\omega(1/n_m)/m<\infty$, then it is known that the subsequence of partial sums $S_{n_m}(f,x)$ converges almost everywhere to $f(x)$ for any function $f\in H_1^{\omega}$. We show that this sufficient convergence condition is close to a necessary condition for a lacunary sequence $\{n_m\}$.

Keywords: Fourier series, Lebesgue measure, modulus of continuity.

Введение

Пусть $\mathbb{T}=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ и $L(\mathbb{T})$ — множество интегрируемых на $\mathbb{T}$ комплекснозначных функций. Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Каждой функции $f\in L(\mathbb{T})$ сопоставляется ее ряд Фурье

$$f\sim\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{ikx},$$

где

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}dx.$$

Для $n\in\mathbb{N}$ определяется частная сумма S_n ряда Фурье функции f:

$$S_n(f,x)=\sum_{|k|\le n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Отметим, что во всех примерах, о которых идет речь в настоящей работе, соответствующие функции являются действительнозначными.

В ряде работ Н. Ю. Антонов [1–3] исследовал поведение частных сумм Фурье функций с ограничением на модуль непрерывности в $L(\mathbb{T})$, определяемый формулой

$$\omega(f,\delta)_1=\sup_{0\le h\le\delta}\int\limits_{\mathbb{T}}|f(x+h)-f(x)|\,dx.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00208).

Говорят, что функция $\omega : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ является модулем непрерывности, если ω — непрерывная неубывающая полуаддитивная функция и при этом $\omega(0) = 0$. Для модуля непрерывности ω обозначим
$$H_1^\omega = \{f \in L(\mathbb{T}) : \ \forall \delta \ \ \omega(f,\delta)_1 \le \omega(\delta)\}.$$
А. Зигмунд [4, гл. 13, теорема (3.10)] доказал, что если
$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty, \tag{0.1}$$
то $S_n(f,x) \to f(x)$ почти всюду для любой функции $f \in H_1^\omega$. Неизвестно, является ли условие (0.1) точным.

Как заметил Н. Ю. Антонов [3], из результатов К. И. Осколкова [5] вытекает следующее обобщение теоремы Зигмунда: если
$$\sum_{m=1}^\infty \frac{\omega(1/n_m)}{m} < \infty, \tag{0.2}$$
то для любой функции $f \in H_1^\omega$ подпоследовательность частных сумм $\{S_{n_m}(f,x)\}$ сходится почти всюду к $f(x)$. Н. Ю. Антонов [3] установил, что если ω удовлетворяет несколько более сильному условию, чем расходимость ряда в левой части (0.2), то H_1^ω содержит функцию f, для которой лакунарная подпоследовательность $\{S_{n_m}(f)\}$ частных сумм Фурье расходится почти всюду.

Теорема 1 (Н. Ю. Антонов). *Пусть последовательность $\{n_m\}$ удовлетворяет условию лакунарности*
$$\exists\ p > 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad n_{m+1}/n_m \ge p. \tag{0.3}$$
Предположим также, что
$$\frac{1}{\log m} = O\left(\omega(1/n_m)\right).$$
Тогда найдется функция $f \in H_1^\omega$ такая, что подпоследовательность $\{S_{n_m}(f,x)\}$ расходится почти всюду.

Целью настоящей статьи является доказательство того, что для лакунарных последовательностей $\{n_m\}$ сходимость ряда в (0.2) является необходимым условием сходимости почти всюду $\{S_{n_m}(f)\}$ на всем классе H_1^ω при условии, что ω удовлетворяет достаточно слабым условиям регулярности. Мы будем предполагать, что
$$\exists\ \gamma > 1 \ \ \exists\ q \in \mathbb{N} \ \ \forall\ m' \ge m^q > 1 \qquad \omega(1/n_{m'})n_{m'} \ge \gamma\omega(1/n_m)n_m. \tag{0.4}$$

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{n_m\}$ и модуль непрерывности ω удовлетворяют условиям* (0.3) *и* (0.4)*. Предположим также, что*
$$\sum_{m=1}^\infty \frac{\omega(1/n_m)}{m} = \infty. \tag{0.5}$$
Тогда существует функция $f \in H_1^\omega$ такая, что подпоследовательность $\{S_{n_m}(f,x)\}$ расходится почти всюду.

Отметим, что (0.4) вытекает из (0.3) и (0.5), если выполнено одно из следующих условий:

(a) $\varepsilon_m = O\left(\omega(1/n_m)\right)$, где последовательность $\{\varepsilon_m\}$ убывает, $\varepsilon_m = O(\varepsilon_{m^2})$, $\sum\limits_m \varepsilon_m/m = +\infty$;

(b) для некоторых $\delta_0 > 0$ и $\alpha \in (0,1)$ функция $\omega(\delta)/\delta^\alpha$ монотонна на $(0,\delta_0)$;

(c) при некотором $\delta_0 > 0$ функция $\omega(\delta)/\delta$ выпукла на $(0, \delta_0)$.

Заметим также, что теорему 2 можно усилить в духе работы [3], заменив лакунарность последовательности $\{n_m\}$ условием

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{N} \ \ \exists\, p > 1 \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad n_{(m+1)^\gamma}/n_{m^\gamma} \geq p$$

и при этом потребовав, чтобы функция f дополнительно удовлетворяла условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \phi(|f(x)|)\, dx < \infty,$$

где ϕ — наперед заданная неубывающая на $(0, +\infty)$ функция такая, что $\phi(u) = o(u \log\log u)$ при $u \to \infty$.

1. Тригонометрические полиномы с большими частными суммами

Через $c_1, c_2, \dots$ мы обозначаем абсолютные положительные константы. Для $f \in L(\mathbb{T})$ положим $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|\, dx$.

Следующая лемма, доказательство которой мы приводить не будем, является аналогом леммы 1 из [3].

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет условию $n_{k+1}/n_k \geq 18$ $(k \in \mathbb{N})$. Тогда для любого четного числа $m \geq 2$ и для любых положительных чисел α, Δ, удовлетворяющих условиям*

$$1 \geq \alpha \geq 10m\Delta, \qquad \Delta \geq \frac{10}{n_m}, \tag{1.1}$$

существуют множества

$$\sigma_{j,\nu}, \quad m+1 \leq j \leq 3m, \quad \nu = 0, \dots, 2\Big[\frac{\alpha/(2m)}{2\Delta}\Big] - 1,$$

такие, что $\sigma_{j,\nu}$ есть объединение попарно непересекающихся отрезков длины $\pi/(3n_{3m})$,

$$\sigma_{j,\nu} \subset \Big[\frac{\pi(3j-1)}{6m} + \nu\Delta, \frac{\pi(3j-1)}{6m} + (\nu+1)\Delta\Big],$$

$$\operatorname{mes} \sigma_{j,\nu} \geq \frac{c_1\Delta}{18^{2m}},$$

и для любых $t \in \sigma_{j,\nu}$ и k, $m+1 \leq k \leq 3m$, $k \neq j$, выполнено неравенство

$$(-1)^\nu \operatorname{sgn}(j-k) \sin(n_k t) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Используя лемму 1 из [3], Н. Ю. Антонов строит функцию $f_m \in L(\mathbb{T})$, $\|f_m\|_1 = 1$, такую, что мажорантная функция

$$\max_{m+1 \leq k \leq 3m} |S_{n_k}(f_m, x)| \tag{1.2}$$

велика на множестве меры $\gg 1$. С помощью приведенной выше леммы мы строим функцию $f_m \in L(\mathbb{T})$, $\|f_m\|_1 \ll \alpha$, такую, что мажорантная функция (1.2) велика на множестве меры $\gg \alpha$. Однако, в отличие от [3], мы будем контролировать также $S_{n_k}(f)$ для $k \geq 4m$ и $k \leq m/2$.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ *удовлетворяет условию* $n_{k+1}/n_k \ge 18$ $(k \in \mathbb{N})$. *Тогда для любых* $m \ge 2$ *и* $\alpha > 0$, *удовлетворяющих условию* $1 \ge \alpha \ge (100m)/n_m$, *существует тригонометрический полином* f_m *степени не выше* $2n_{3m}$ *такой, что*

(1) $\|f_m\|_1 \le c_2\alpha$;

(2) *для всех* $\delta > 0$ *выполнено неравенство* $\omega(f_m, \delta)_1 \le c_3 n_{3m}\alpha\delta$;

(3) *мера множества*

$$G_m = \Big\{x \in \mathbb{T} : \max_{m+1 \le k \le 3m} |S_{n_k}(f_m, x)| \ge c_4 \log m\Big\}$$

не меньше $c_5\alpha$;

(4) *для любого* n *и множества*

$$G_{m,n} = \{x \in \mathbb{T} : |S_n(f_m, x)| \ge 1/m\}$$

справедливо неравенство

$$\operatorname{mes} G_{m,n} \le c_6\Big(\frac{mn}{n_m}\Big)^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся леммой 1 с $\Delta = 10/n_m$. При этом условия (1.1) выполнены. Можно считать, что множества $\sigma_{j,\nu}$ имеют одинаковую меру. Положим

$$\sigma = \bigcup_{j,\nu} \sigma_{j,\nu}$$

и определим функцию f. Пусть $f(x) = 0$ для $x \in \mathbb{T} \setminus \sigma$. Если же $x \in \sigma_{j,\nu}$ для некоторых j, ν, то положим

$$f(x) = (-1)^\nu \frac{12n_{3m}\rho(x, [0, 2\pi) \setminus \sigma)\alpha}{\pi \operatorname{mes} \sigma},$$

где $\rho(x, E)$ — расстояние от точки x до множества E. Из аргументов Н. Ю. Антонова легко следует, что функция f обладает следующими свойствами:

(1′) $\|f\|_1 \le c_7\alpha$;

(2′) для всех $\delta > 0$

$$\omega(f, \delta)_1 \le c_8 n_{3m}\alpha\delta;$$

(3′) мера множества

$$G_m = \Big\{x \in \mathbb{T} : \max_{m+1 \le k \le 3m} |S_{n_k}(f, x)| \ge c_4 \log m\Big\}$$

не меньше $c_5\alpha$.

Для функции $g \in L(\mathbb{T})$ определим ее средние Валле Пуссена

$$\tau_{n_{3m}}(g) = \frac{1}{n_{3m}} \sum_{n=n_{3m}}^{2n_{3m}-1} S_n(g).$$

Хорошо известно, что $\|\tau_{n_{3m}}(g)\|_1 \le 3\|g\|_1$. В качестве искомого полинома берется $f_m = \tau_{n_{3m}}(f)$. Утверждение (1) леммы справедливо с $c_2 = 3c_7$. Далее, оператор Валле Пуссена перестановочен с оператором сдвига. Поэтому для любого h мы имеем

$$\|f_m(\cdot + h) - f_m(\cdot)\|_1 \le 3\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_1,$$

и (2) следует из (2′) с $c_3 = 3c_8$. Поскольку $S_n(f_m) = S_n(f)$ для $n \le n_{3m}$, свойство (3) также имеет место.

Теперь, для $h > 0$ рассмотрим средние Стеклова g функции f:

$$g(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\,dt.$$

Легко видеть, что

$$|\widehat{g}(k)| \geq 0.8|\widehat{f}(k)| \geq 0.8|\widehat{f}_m(k)| \tag{1.3}$$

при $h|k| \leq 1$. Для любых m, ν таких, что

$$m+1 \leq j \leq 3m, \qquad \nu = 0, \ldots, 2\Big[\frac{\alpha/(2m)}{2\Delta}\Big] - 2,$$

мы имеем

$$\int_{\frac{\pi(3j-1)}{6m}+\nu\Delta}^{\frac{\pi(3j-1)}{6m}+(\nu+1)\Delta} |f(x)|\,dx \leq c_9\Delta, \qquad \int_{\frac{\pi(3j-1)}{6m}+\nu\Delta}^{\frac{\pi(3j-1)}{6m}+(\nu+2)\Delta} f(x)\,dx = 0.$$

Отсюда $|g(x)| \leq c_9\Delta/h$ для любого $x \in \mathbb{T}$.

Для $n \in \mathbb{N}$ возьмем $h = 1/n$. Учитывая (1.3), мы получаем

$$\int_{\mathbb{T}} S_n^2(f_m, x)\,dx \leq 2\int_{\mathbb{T}} S_n^2(g, x)\,dx \leq 2\pi c_9^2(\Delta/h)^2.$$

С другой стороны,

$$\int_{\mathbb{T}} S_n^2(f_m, x)\,dx \geq \int_{G_{m,n}} S_n^2(f_m, x)\,dx \geq \frac{1}{m^2}\operatorname{mes} G_{m,n},$$

откуда и из определения h и Δ следует утверждение (4) леммы. Лемма 2 доказана.

2. Завершение доказательства теоремы 2

При доказательстве теоремы 2 без ограничения общности можно считать, что $n_{k+1}/n_k \geq 18$ ($k \in \mathbb{N}$). Обозначим $m_j = 10^j$ ($j \in \mathbb{N}$). Ниже мы выберем последовательность $\{\alpha_j \geq 0\}_{j\in\mathbb{N}}$, зависящую от ω, так, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j = \infty, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j}{j} < \infty. \tag{2.1}$$

Кроме того, мы требуем, чтобы для любого j выполнялось либо равенство $\alpha_j = 0$, либо неравенство $\alpha_j \geq 100m_j/n_{m_j}$.

Если $\alpha_j > 0$, то мы используем лемму 2 с $m = m_j$ и $\alpha = \alpha_j$. Построенные в лемме полином f_m и множество G_m мы переобозначим через g_j и H_j соответственно. Кроме того, положим

$$I_j = \bigcup_{k\leq m/2} G_{m,n_k}.$$

Если $\alpha_j = 0$, то возьмем $g_j = 0$, $H_j = I_j = \varnothing$. Требуемая функция f ищется в виде

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\,g_j(x - t_j).$$

В силу утверждения (1) леммы 2 и (2.1) функция $f \in L(\mathbb{T})$. Далее, из утверждения (3) леммы 2 и (2.1) следует, что можно выбрать сдвиги t_j так, чтобы множество

$$H = \bigcap_J \bigcup_{j \ge J} (H_j + t_j) \subset \mathbb{T}$$

имело полную меру.

Далее, по лемме 2

$$\operatorname{mes} I_j \le 2c_6 \left(\frac{mn_{m/2}}{n_m}\right)^2 \le 2c_6 100^j 18^{-10^j}.$$

Следовательно, $\sum_j \operatorname{mes} I_j < \infty$, и множество

$$I = \bigcap_J \bigcup_{j \ge J} (I_j + t_j)$$

имеет нулевую меру. Заметим, что для $x \in \mathbb{T} \setminus I$, достаточно большого j и для $k \le m_j/2$ справедливо неравенство

$$|S_{n_k}(g_j(\cdot - t_j), x)| \le 10^{-j}. \tag{2.2}$$

Рассмотрим произвольную точку $x \in H \setminus I$. Найдутся сколь угодно большое J и k, $m_J < k \le 3m_J$, такие, что $x \notin I_j$ для всех $j \ge J$ и

$$|S_{n_k}(g_J(\cdot - t_J), x)| \ge c_4 J \log 10.$$

Рассмотрим разность

$$S_{n_k}(f, x) - S_{n_{m_J/2}}(f, x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \Big(S_{n_k}(g_j(\cdot - t_j), x) - S_{n_{m_J/2}}(g_j(\cdot - t_j), x) \Big). \tag{2.3}$$

Разности в правой части (2.3) равны нулю при $j < J$, а при $j > J$ они малы в силу (2.2). При $j = J$, вновь пользуясь (2.2), мы получаем

$$\frac{1}{J} \Big| S_{n_k}(g_J(\cdot - t_J), x) - S_{n_{m_J/2}}(g_J(\cdot - t_J), x) \Big| \ge c_4 \log 10 - \frac{10^{-J}}{J}.$$

Значит,

$$\limsup_{j \to \infty} \max_{m_j < k \le 3m_j} |S_{n_k}(f, x) - S_{n_{m_j/2}}(f, x)| > 0,$$

т. е. подпоследовательность $\{S_{n_k}(f, x)\}$ расходится в x. Поскольку x — произвольный элемент множества полной меры $H \setminus I$, то показана расходимость этой подпоследовательности почти всюду.

Нам остается выбрать удовлетворяющую условиям (2.1) последовательность $\{\alpha_j\}$ так, чтобы для всех $\delta \ge 0$ выполнялось неравенство

$$\omega(f, \delta)_1 \le A\omega(\delta), \quad A = A(\omega).$$

Условие (0.5) равносильно тому, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega\Big(\frac{1}{n_{3m_j}}\Big) = \infty.$$

В силу утверждения (2) леммы 2

$$\omega(f, \delta)_1 \le c_{10} \Big(\sum_{j=1}^{J} \frac{\alpha_j}{j} n_{3m_j} \delta + \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j} \Big), \tag{2.4}$$

где $c_{10} = c_2 + c_3$, а J выбрано так, что $\delta n_{3m_J} \le 1 < \delta n_{3m_{J+1}}$. Мы будем искать такую последовательность $\{\alpha_j\}$, чтобы при всех j выполнялось неравенство $\alpha_j \le \omega(1/n_{3m_j})$. Тогда из предположения (0.4) нетрудно вывести, что

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{\alpha_j}{j} n_{3m_j}\delta \le A'\omega(\delta), \quad A' = A'(q,\gamma),$$

и нам достаточно оценить второе слагаемое в правой части (2.4) для надлежащей последовательности $\{\alpha_j\}$. Это делается с помощью следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = \infty.$$

Тогда существует последовательность $\{\gamma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ такая, что $0 \le \gamma_j \le \beta_j$ $(j \in \mathbb{N})$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = \infty \quad \textit{и для любого} \quad J \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=J}^{\infty} \frac{\gamma_j}{j} \le \beta_J.$$

Применяя лемму 3 к последовательности $\{\beta_j\} = \{\omega(1/n_{3m_j})\}$, мы получаем последовательность $\{\gamma_j\}$ и далее полагаем $\alpha_j = \gamma_j$, если $\gamma_j \ge 100 m_j/n_{m_j}$, и $\alpha_j = 0$ в противном случае. Легко проверить, что последовательность $\{\alpha_j\}$ обладает необходимыми свойствами.

Для доказательства леммы 3 обозначим

$$N_i = \{j \in \mathbb{N} : \ \ 2^{-i} < \beta_j \le 2^{1-i}\} \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

Для $j \in N_i$ положим $\gamma_j = \beta_j/4$, если $2j \notin N_i$, и $\gamma_j = 0$ в противном случае. Неравенства $0 \le \gamma_j \le \beta_j$ для любого j очевидны. Фиксируем $i \in \mathbb{Z}$, и пусть $N_i = \{j : \ j_1 \le j < j_2\}$. Если $j_2 \le 2j_1$, то $\gamma_j = \beta_j/4$ для всех $j \in N_i$. Если же $j_2 > 2j_1$, то

$$\sum_{j\in N_i} \beta_j \le (j_2 - j_1)2^{1-i} \le j_2 2^{1-i}, \qquad \sum_{j\in N_i} \gamma_j \ge \sum_{j_2/2 \le j < j_2} \frac{\beta_j}{4} \ge \frac{j_2 2^{-i}}{12},$$

и в обоих случаях

$$\sum_{j\in N_i} \gamma_j \ge \frac{1}{24} \sum_{j\in N_i} \beta_j.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \ge \frac{1}{24} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in N_i} \beta_j = \infty.$$

Далее,

$$\sum_{j\in N_i} \frac{\gamma_j}{j} \le \sum_{j_2/2 \le j < j_2} \frac{2^{-1-i}}{j} < 2^{-1-i},$$

и если $J \in N_I$, то

$$\sum_{j=J}^{\infty} \frac{\gamma_j}{j} \le \sum_{i\ge I} \sum_{j\in N_i} \frac{\gamma_j}{j} < 2^{-I} < \beta_J.$$

Тем самым лемма 3, а с ней и теорема 2 доказаны. □

Слегка меняя выбор последовательности $\{\alpha_j\}$, можно добиться неограниченной расходимости $\{S_{n_m}(f,x)\}$ в теореме 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Антонов Н.Ю.** Интегрируемость мажорант сумм Фурье и расходимость рядов Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 5. С. 651–665.
2. **Антонов Н.Ю.** О расходимости подпоследовательностей сумм Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 2, вып. 1. С. 12–26.
3. **Антонов Н.Ю.** Расходящиеся почти всюду подпоследовательности сумм Фурье функций из $\varphi(L) \cap H_1^\omega$ // Мат. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 502–515.
4. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.
5. **Осколков К.И.** Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. МИАН. 1985. Т. 167. С. 239–260.

Конягин Сергей Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
e-mail: konyagin@ok.ru

Поступила 17.02.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ ТИХОНОВА С НЕГЛАДКИМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ[1]

А. И. Короткий, Д. О. Михайлова

Рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных управлений в параболических системах по результатам приближенных апостериорных наблюдений за движением этой системы. Для решения задачи предлагается использовать метод Тихонова со стабилизатором, содержащим полную вариацию по времени варьируемого управления. Использование такого недифференцируемого стабилизатора позволяет получить в ряде случаев более тонкие результаты, чем приближение искомого управления в пространствах Лебега. В частности, на этом пути удается обосновать кусочно-равномерную сходимость регуляризованных аппроксимаций, что открывает возможность для численного восстанавления тонкой структуры искомого управления. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: управляемая параболическая система, обратная задача динамики, метод регуляризации Тихонова, классическая вариация, кусочно-равномерная сходимость, субградиент.

A. I. Korotkii, D. O. Mikhailova. Reconstruction of controls in parabolic systems by Tikhonov's method with nonsmooth stabilizers.

The problem of reconstructing a priori unknown controls in parabolic systems by the results of approximate a posteriori observations of the motion of this system is considered. It is proposed to solve this problem by Tikhonov's method with a stabilizer containing the total time variation of the varying control. The use of such a nondifferentiable stabilizer allows one to obtain in some cases more precise results than the approximation of the desired control in Lebesgue spaces. In particular, it becomes possible to establish the piecewise uniform convergence of regularized approximations, which can be used for the numerical reconstruction of the subtle structure of the desired control. Results of numerical experiments are presented.

Keywords: control parabolic system, inverse problem of dynamics, Tikhonov's regularization method, classical variation, piecewise uniform convergence, subgradient.

Введение

В статье рассматривается задача о восстановлении (реконструкции, идентификации) априори неизвестных управлений (параметров), функционирующих в управляемой динамической системе. Управляющие воздействия в динамической системе могут быть заранее неизвестны и должны быть определены по результатам наблюдений за объектом, в частности по результатам приближенных измерений текущих фазовых положений системы. Восстановленные управляющие воздействия далее могут быть использованы для оценки характеристик управляемого объекта, оперативного принятия решений или более адекватного моделирования. Хорошо известно, что рассматриваемая задача некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации [1–3]. Подобного рода задачи восстановления для динамических систем изучались в разных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации [4–13].

Для решения задачи предлагается использовать вариационный метод Тихонова, суть которого состоит в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых управлений. С точки зрения теории управления этот метод можно классифицировать как статический метод реконструкции. При решении задачи восстановления статическим

[1]Работа выполнена в рамках программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики” и ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики” при финансовой поддержке УрО РАН (проекты 09-П-1-1006, 09-Т-1-1004); а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00029).

методом исходной информацией для ее решения служат результаты приближенных измерений текущих фазовых положений системы, накопленные при наблюдении за движением динамической системы в течение какого-либо заданного промежутка времени. Здесь восстановление осуществляется апостериорно по прошествии соответствующего промежутка времени наблюдения за движением системы по всей совокупности поступившей информации. Особенность статического подхода к рассматриваемой задаче состоит в том, что данные для расчета управляющих воздействий известны априори, алгоритм восстановления не учитывает возможного изменения этих данных в процессе расчета, сам процесс расчета не является, вообще говоря, разовым, и его можно при необходимости повторить. Для решения задачи привлекаются понятия и методы теории управления и теории некорректных задач [1–13].

Известно, что для линейных некорректных задач классическая тихоновская регуляризация n-го порядка дает высокое качество аппроксимации (восстановления) для гладкой искомой функции, однако не позволяет качественно восстанавливать недифференцируемые функции, которые могут содержать изломы, близкие пики, разрывы и другие особенности. Особенности такого рода как раз могут иметь управляющие воздействия в динамических системах. Стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространства Соболева W_2^n, обладают сильным регуляризирующим эффектом, что неизбежно приводит к заглаживанию искомой функции и потере ее тонкой структуры. В частности, стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространства L_2, также приводят к довольно грубой аппроксимации. Поэтому возникает необходимость конструирования стабилизаторов, специально приспособленных к восстановлению негладких функций и функций с особенностями. К настоящему времени в вариационных методах регуляризации предложено несколько классов стабилизирующих функционалов, которые неплохо зарекомендовали себя как для гладких, так и для негладких восстанавливаемых функций. В случае функций одной переменной часто используются стабилизаторы, содержащие классическую или обобщенную вариацию в совокупности с какой-нибудь строго выпуклой нормой, например нормой пространства L_p, $1 < p < \infty$ [14–24]. На этом пути удается получить сходимость в L_p, поточечную сходимость, сходимость вариаций, а также равномерную сходимость на участках непрерывности искомых функций. В случае функций нескольких переменных часто используются стабилизаторы, содержащие обобщенную вариацию [25] и норму пространства L_p, $1 \leqslant p < \infty$ [17–20; 26–28]. Здесь удается получить сходимость в L_p, поточечную сходимость и сходимость вариаций регуляризованных приближений к искомой функции. Для получения равномерной аппроксимации непрерывного, но в общем случае недифференцируемого решения привлекаются стабилизаторы в виде нормы пространства Липшица [20]. Использование в качестве стабилизатора нормы пространства Соболева W_p^γ с дробными производными порядка $\gamma \in (0,1)$ может оказаться целесообразным для восстановления как непрерывных, так и разрывных искомых функций [14; 20]. Заметим, что упомянутые выше результаты получены для линейных и нелинейных операторных уравнений первого рода.

В данной работе показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и нормы пространства L_2 для задачи управления также можно получить поточечную сходимость, сходимость в L_2, сходимость вариаций и кусочно-равномерную сходимость. Работа продолжает исследования [29–32].

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени t из заданного ограниченного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$ $(-\infty < t_0 < \vartheta < +\infty)$ характеризуется функцией $y[t] = y(t, \cdot)$, определенной в некоторой области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$. Эволюция состояний $y[t] = y(t,x)$, $x \in \Omega$, во времени описывается параболической краевой задачей [33–35]:

$$y_t = L\,y + f\,u\,, \quad (t,x) \in Q = T \times \Omega\,, \tag{1.1}$$

$$y(t_0, x) = y_0(x)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{1.2}$$

$$y(t,x) = 0\,, \quad t \in T\,, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega\,, \tag{1.3}$$

где $y_0 = y_0(x)$, $x \in \Omega$, — начальное состояние системы; $f = f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$, $x \in \Omega$, — заданная векторная функция; $u = u(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ — вектор управляющего воздействия на систему в момент времени $t \in T$; L — заданный эллиптический дифференциальный оператор, отражающий динамические свойства системы;

$$L\,y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\, x_i}\Big(\,a_{ij}(t,x)\frac{\partial\, y}{\partial\, x_j}\,\Big) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\, x_i}\Big(\,a_i(t,x)\,y\,\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial\, y}{\partial\, x_i} + a(t,x)\,y\,. \tag{1.4}$$

Допустимые текущие значения управляющего воздействия подчинены заданным геометрическим ограничениям

$$u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T\,, \tag{1.5}$$

характеризующим возможности управления или отражающим известные оценки его допустимого изменения.

Пусть за управляемой динамической системой и ее движением $y = y[t]$, $t \in T$, осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы $y[t]$, причем результаты этих измерений $y_\delta[t]$ удовлетворяют следующему условию точности измерений:

$$\int\limits_T \|\, y_\delta[t] - y[t]\,\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \leqslant \delta^2\,, \tag{1.6}$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы по результатам $y_\delta = y_\delta[t]$, $t \in T$, приближенных измерений наблюдаемого движения системы $y = y[t]$, $t \in T$, приближенно определить (восстановить) ту реализацию $u = u(t)$, $t \in T$, управляющего воздействия на динамическую систему, которая соответствует результатам наблюдений. При этом результат $u_\delta = u_\delta(t)$, $t \in T$, восстановления искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений:

$$\int\limits_T \|\, u_\delta\,(t) - u(t)\,\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \to 0\,, \quad \delta \to 0\,. \tag{1.7}$$

Смысл понятия приближенного восстановления $u_\delta \approx u$ далее будет варьироваться и уточняться. Будут предложены такие алгоритмы восстановления, которые кроме традиционного среднеквадратичного приближения (1.7) обеспечат приближение в некотором более сильном смысле, приводящем к восстановлению тонкой структуры искомого управления. При этом будет предполагаться, что наблюдателю, стремящемуся к решению задачи восстановления, известны априорные геометрические ограничения P на множество допустимых управлений и уравнения динамики процесса вместе с начальным состоянием y_0.

Уточним постановку задачи. Пусть P — выпуклое компактное множество из $\mathbb{R}^m$; U — множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, которые при почти всех $t \in T$ принадлежат компакту P,

$$U = \{\; u \in E:\; u(t) \in P \;\; \text{п.в.} \;\; t \in T\;\}\,, \quad E = L_2(T; \mathbb{R}^m)\,;$$

множество U представляет собой множество всех допустимых управлений в задаче.

Будем считать, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей Γ (для дальнейшего достаточно, чтобы область Ω обладала, например, свойствами [33, с. 212, 222]). Пусть $f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям [35, с. 165]:

$$a_{ij} = a_{ji}\,, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant C\,, \quad \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant C\,, \quad a^2 \leqslant C\,, \quad C = \text{const} > 0\,, \tag{1.8}$$

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, \xi_i\, \xi_j \leqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\,, \quad \nu = \mathrm{const} > 0,\ \mu = \mathrm{const} \geqslant \nu\,. \tag{1.9}$$

Известно [35, гл. 3, § 3], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) для каждого управления $u \in E$ существует единственное обобщенное решение $y = y(t,x) = y(t,x;u)$, $(t,x) \in Q$, этой краевой задачи из пространства $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q)$. Это решение иногда будем называть движением динамической системы (1.1)–(1.3), порожденным управлением $u \in U$, и обозначать его символом $y = y[\cdot;u] = y[t;u]$, $t \in T$. Отметим, что $\overset{\circ}{V}{}_2^{0,1}(Q) \subset C(T;L_2(\Omega)) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(Q)$, $C(T;L_2(\Omega))$ непрерывно вкладывается в $L_2(T;L_2(\Omega))$ [33;35].

Введем множество всех возможных движений системы (1.1)–(1.3), отвечающих всем возможным управлениям $u \in U$:

$$Y = \{\, y = y[\cdot;u] :\ u \in U \,\}\,. \tag{1.10}$$

Для каждого движения $y \in Y$ введем множество всех допустимых управлений, порождающих данное движение:

$$U(y) = \{\, u \in U :\ y[\cdot;u] = y \,\} \tag{1.11}$$

и множество всех возможных измерений этого движения:

$$Y_\delta(y) = \{ y_\delta \in E :\ \int\limits_T \|\, y[t] - y_\delta[t] \,\|_{L_2(\Omega)}^2\, dt \leqslant \delta^2 \,\}\,. \tag{1.12}$$

Искомый алгоритм отождествим с семейством отображений (методов):

$$D = \{\, D_\delta :\ 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0 \,\}\,, \quad D_\delta : L_2(T;\mathbb{R}^n) \to E\,. \tag{1.13}$$

Исходную задачу теперь можно сформулировать так: требуется построить алгоритм D, который на любом наблюдаемом поведении системы $y \in Y$ обладает регуляризующим свойством

$$r_\delta(y) \to 0\,,\ \delta \to 0\,, \tag{1.14}$$

где $\quad r_\delta(y) = \sup\{\, \rho[\, D_\delta(y_\delta),\, U(y)\,] :\ y_\delta \in Y_\delta(y) \,\}\,,$

$$\rho[\, D_\delta(y_\delta),\, U(y)\,] = \min\{\, \|\, D_\delta(y_\delta) - v \,\|_E :\ v \in U(y) \,\}\,.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются, например, в [33–41].

2. Решение задачи восстановления

Введем в рассмотрение банахово пространство W [14; 23]

$$W = \{\, u \in E :\ V[u] < +\infty \,\}\,, \quad \|\, u \,\|_W = \|\, u \,\|_E + V[\, u\,]\,,$$

где $V[\,u\,]$ — полная вариация функции $u : T \ni t \to u(t) \in \mathbb{R}^m$ [37–41];

$$V[\,u\,] = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{l} \|\, u(t_i) - u(t_{i-1}) \,\|_{\mathbb{R}^m} : \sigma \in \Sigma \Big\}\,;$$

супремум берется по множеству Σ всех конечных разбиений σ отрезка T

$$\sigma\ :\ t_0 < t_1 < \ldots < t_{l-1} < t_l = \vartheta\,.$$

Введем следующие обозначения: $\alpha = \mathrm{const} > 0$,

$$F_\alpha = F_\alpha(z,v) = \int\limits_T \| \, y[t;v] - z(t) \, \|^2_{L_2(\Omega)} \, dt + \alpha \, \Lambda(v) \, , \quad \Lambda(v) = \| \, v \, \|^2_E + V[\, v \,] \, , \tag{2.1}$$

$$F^*_\alpha(z) = \min \{ \, F_\alpha(z,v) : \; v \in U_W \, \} \, , \quad U_W = U \cap W \, , \tag{2.2}$$

$$U^*_\alpha(z) = \{ \, v \in U_W : \; F_\alpha(z,v) = F^*_\alpha(z) \, \} \, . \tag{2.3}$$

При любых $\alpha > 0$, $z \in L_2(T; L_2(\Omega))$ экстремальная задача (2.2) однозначно разрешима, множество ее решений $U^*_\alpha(z)$ состоит из одного элемента $u^*_\alpha \in U_W$. При любых $\alpha > 0$, $z \in L_2(T; L_2(\Omega))$ всякая минимизирующая последовательность в задаче (2.2) сходится сильно (слабо) в E к элементу $u^*_\alpha \in U^*_\alpha(z)$. Доказательства аналогичных утверждений можно найти, например, в [31; 42–45].

Пусть на множестве U задан некоторый функционал G. Элемент $\widehat{u}$ множества $S \subseteq U$, удовлетворяющий условию $G(\widehat{u}) = \inf \{ \, G(u) : \, u \in S \, \}$, назовем (G,S)-нормальным элементом множества S и будем обозначать его символом $\widehat{u}(G,S)$. Пусть для $y \in Y$ множество $S = U(y) \cap W \neq \varnothing$, тогда во множестве S существует единственный (Λ, S)-нормальный элемент $\widehat{u} = \widehat{u}(\Lambda, S)$.

Построим искомый алгоритм, решающий задачу восстановления. Для любых $\delta \in [0, \delta_0]$, $z \in L_2(T; L_2(\Omega))$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(z)$ по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U_W : \; F^*_\alpha(z) \leqslant F_\alpha(z,v) \leqslant F^*_\alpha(z) + \varepsilon \; , \tag{2.4}$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность решения экстремальной задачи (2.2). Величины α и ε будут являться параметрами метода (параметрами регуляризации), они будут выбираться в зависимости от величины δ погрешности измерений.

Теорема 1. *Пусть для $y \in Y$ множество $S = U(y) \cap W \neq \varnothing$ и параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют следующим условиям согласования:*

$$(\, \varepsilon(\delta) + \delta^{\,2} \,) \, \alpha(\delta)^{-1} \to 0 \; , \; \varepsilon(\delta) \to 0 \; , \; \alpha(\delta) \to 0 \; , \quad \delta \to 0. \tag{2.5}$$

Тогда алгоритм D, состоящий из методов (2.4), решает задачу восстановления на наблюдаемом движении y, т. е. $r_\delta(y) \to 0$ при $\delta \to 0$. Кроме того, если $\widehat{u}$ есть (Λ, S)-нормальный элемент множества S, то какие бы ни случились при этом реализации измерений $y_\delta \in Y_\delta(y)$, для реализаций $v_\delta = D_\delta(y_\delta)$ методов (2.4) при $\delta \to 0$ имеют место следующие сходимости:

1) *$v_\delta \to \widehat{u}$ сильно в E;*

2) *$v_\delta \to \widehat{u}$ в $\mathbb{R}^m$ поточечно на T;*

3) *$V[v_\delta] \to V[\widehat{u}]$;*

4) *$v_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $\widehat{u}$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству подобного утверждения в [32].

3. Построение минимизирующих последовательностей

Для приближенного решения задачи (2.2), т. е. для получения ε-оптимального решения, удовлетворяющего условию (2.4), необходимо уметь строить минимизирующие последовательности для задачи (2.2). Для построения таких последовательностей можно воспользоваться градиентными и субградиентными методами [42–45].

Представим функционал F_α в виде суммы соответствующих слагаемых

$$F_\alpha(z,u) = J_1(z,u) + \alpha J_2(u) + \alpha J_3(u) \; ,$$

$$J_1(z,u) = \int\limits_T \| \, y[t;u] - z(t) \, \|^2_{L_2(\Omega)} dt \,, \quad J_2(u) = \| \, u \, \|^2_E \,, \quad J_3(u) = V[\, u \,] \,.$$

Функционал F_α является субдифференцируемым по переменной u в каждой точке $u \in W$

$$\partial_u F_\alpha(z,u) = J'_{1u}(z,u) + \alpha \; J'_2(u) + \alpha \; \partial J_3(u) \,.$$

Однако практическое применение субградиентных методов для минимизации функционала F_α наталкивается на трудности, связанные со сложностью вычисления субдифференциала $\partial J_3(u)$ и сложностью описания сопряженного пространства W^*. Некоторые из возможных подходов к численной реализации задачи минимизации могут быть связаны с аппроксимацией функционала J_3 подходящими дифференцируемыми функционалами [14; 23–27]. В данной работе будет реализован подход [15], связанный с заменой пространства W каким-либо гильбертовым пространством, например пространством Соболева $H = W^1_2(T)^m$, которое должно быть вложено в W и достаточно хорошо аппроксимировать его элементы. Это позволит воспользоваться техникой гильбертова пространства и упростить вычисление градиентов и субградиентов целевого функционала.

Введем в рассмотрение вспомогательную экстремальную задачу

$$F^\circ_\alpha(z) = \inf \{ \, F_\alpha(z,v) : \; v \in U_H \, \} \,, \quad U_H = U \cap H \,. \tag{3.1}$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (2.2) можно воспользоваться методом проекции субградиента [42, гл. 5, § 3; 44]:

$$u_{k+1} = Pr(u_k - \beta_k \, v_k) \;, \quad \beta_k > 0 \;, \quad v_k \in \partial_u F_\alpha(z,u_k) \;, \quad k = 0,1,2,\dots \;, \tag{3.2}$$

где u_0 — некоторое начальное приближение из U_H; $Pr(w)$ — проекция точки $w \in H$ на множество U_H (поскольку множество U_H выпукло и замкнуто в H, то проекция существует и единственна [42, гл. 8, § 4]); параметры метода $\beta_k > 0$ подлежат подходящему выбору.

Теорема 2. *Пусть в итерационном процессе* (3.2) u_0 *— произвольное начальное приближение из* U_H, v_k *— произвольный субградиент из* $\partial_u F_\alpha(z,u_k)$, *параметры метода* $\beta_k > 0$ *удовлетворяют условиям*:

$$\beta_k = 1 \;, \quad \textit{если} \quad v_k = 0 \;; \quad \beta_k = \gamma_k / \| \, v_k \, \|_H \;, \quad \textit{если} \quad v_k \neq 0 \;;$$

$$\gamma_k > 0 \;, \quad \gamma_k \to 0 \;, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty \;.$$

Тогда 1) $F_\alpha(z,\tilde u_k) \to F^\circ_\alpha(z) = F^*_\alpha(z)$, *где* $F_\alpha(z,\tilde u_k) = \sigma_k$, $\sigma_k = \min \{ \, F_\alpha(z,u_i) : \; i \in \overline{0,k} \, \}$; 2) *минимизирующая последовательность* $\{\tilde u_k\} \subset U_H$ *задачи* (3.1) *сходится сильно в* E *к элементу* u^*_α *;* 3) $V[\, \tilde u_k \,] \to V[\, u^*_\alpha \,]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, отметим, что итерационный процесс (3.2) определен корректно: функционал $F_\alpha(z;\cdot)$ определен и непрерывен на H, субдифференциалы $\partial_u F_\alpha(z;u) \neq \varnothing$ для любых $u \in H$, проекция $Pr(w)$ существует и единственна для любого $w \in H$. Заметим также, что, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $v_k \neq 0$ для $k \in N$. Если бы при некотором $k \in N$ оказалось $v_k = 0 \in \partial_u F_\alpha(z;u_k)$, то элемент u_k был бы минимизирующим элементом в задаче (3.1) [42, гл. 5, § 3, гл. 8, § 4] и задачу (3.1) можно было бы считать решенной. Пусть далее $v_k \neq 0$ для $k \in N$.

Докажем первую часть теоремы, следуя схеме [44]. Из определения чисел σ_k следует, что $\sigma_{k+1} \leqslant \sigma_k$ для любого $k \in N$ и, следовательно, числовая последовательность $\{\sigma_k\}$ является убывающей. Поскольку $0 \leqslant F^\circ_\alpha(z) \leqslant \sigma_k \leqslant F_\alpha(z;u_1)$, то по теореме о пределе монотонной числовой последовательности получаем, что последовательность $\{\sigma_k\}$ имеет предел при $k \to \infty$ и этот предел σ_* удовлетворяет неравенству $F^\circ_\alpha(z) \leqslant \sigma_* \leqslant F_\alpha(z;u_1)$. Покажем, что на самом деле $\sigma_* = F^\circ_\alpha(z)$ и $\sigma_k \to F^\circ_\alpha(z) = F^*_\alpha(z)$ (равенство $F^\circ_\alpha(z) = F^*_\alpha(z)$ показано выше). Для этого достаточно показать, что, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется хотя бы один номер $k_\varepsilon \in N$, при котором $\sigma_{k_\varepsilon} < F^*_\alpha(z) + \varepsilon$. Покажем это. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть

$$\Pi_\varepsilon = \{\, u \in H : F_\alpha(z; u) < F^*_\alpha(z) + \varepsilon \,\} \ ,$$

$$T_\varepsilon = \{\, u \in U_H : F_\alpha(z; u) < F^*_\alpha(z) + \varepsilon \,\} \ .$$

Из определения точной нижней грани следует, что множества Π_ε и T_ε не пусты, причем $T_\varepsilon = \Pi_\varepsilon \cap U_H$. Из непрерывности функционала $F_\alpha(z;\cdot)$ на H следует, что множество Π_ε открыто. Допустим, что, каков бы ни был номер $k \in N$, неравенство $\sigma_k < F^*_\alpha(z) + \varepsilon$ не выполняется. Это равносильно тому, что $u_k \notin T_\varepsilon$ для $k \in N$, или тому, что $F_\alpha(z; u_k) \geqslant F^*_\alpha(z) + \varepsilon$ для $k \in N$. Поскольку $v_k \in \partial_u F_\alpha(z; u_k)$ и функционал $F_\alpha(z;\cdot)$ является выпуклым на H, то для произвольного $w \in H$ имеем

$$\langle\ v_k, w - u_k\ \rangle_H \leqslant F_\alpha(z; w) - F_\alpha(z; u_k) \ .$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$F_\alpha(z; w) - F_\alpha(z; u_k) = (\, F_\alpha(z; w) - F^*_\alpha(z) - \varepsilon\,) + (-F_\alpha(z; u_k) + F^*_\alpha(z) + \varepsilon\,) \ .$$

Если $w \in \Pi_\varepsilon$, то $F_\alpha(z; w) - F^*_\alpha(z) - \varepsilon < 0$; поскольку $u_k \notin T_\varepsilon$, то $-F_\alpha(z; u_k) + F^*_\alpha(z) + \varepsilon \leqslant 0$; поэтому $F_\alpha(z; w) - F_\alpha(z; u_k) < 0$ для $w \in \Pi_\varepsilon$. Таким образом,

$$\langle\ v_k, w - u_k\ \rangle_H < 0 \quad \forall\ w \in \Pi_\varepsilon \ .$$

Поскольку считается, что $v_k \neq 0$, то для элемента $q_k = v_k/\|v_k\|_H$ также выполняется аналогичное неравенство

$$\langle\ q_k, w - u_k\ \rangle_H < 0 \quad \forall\ w \in \Pi_\varepsilon \ .$$

Возьмем произвольный элемент $w_* \in T_\varepsilon = \Pi_\varepsilon \cap U_H$. Так как $w_* \in \Pi_\varepsilon$ и множество Π_ε открыто в H, то найдется число $\delta > 0$ такое, что замкнутый шар $B[w_*, \delta] \subset \Pi_\varepsilon$. Ясно, что $\tilde w = w_* + \delta\, q_k \in B[w_*, \delta]$ и $\tilde w \in \Pi_\varepsilon$. Значит,

$$\langle\ q_k, \tilde w - u_k\ \rangle_H < 0 \ , \quad \langle\ q_k, w_* - u_k\ \rangle_H < -\delta \ .$$

Поскольку $\gamma_k \to 0$, то существует номер $K_\delta \in N$ такой, что $0 < \gamma_k \leqslant \delta$ при $k \geqslant K_\delta$. Далее, пусть $k \geqslant K_\delta$. Заметим также, что $w_* \in T_\varepsilon$, значит, $w_* \in U_H$ и для него $Pr(w_*) = w_*$. Воспользуемся теперь липшицевостью оператора проектирования Pr на выпуклое множество [42, гл. 4, § 4]:

$$\|\, Pr(h_1) - Pr(h_2)\,\|_H \leqslant \|\, h_1 - h_2\,\|_H \quad \forall\ h_1, h_2 \in H$$

и запишем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
&\|\, u_{k+1} - w_*\,\|^2_H = \|\, u_{k+1} - Pr(w_*)\,\|^2_H = \|\, Pr(u_k - \gamma_k\, q_k) - Pr(w_*)\,\|^2_H \\
&\leqslant \|\, u_k - \gamma_k\, q_k - w_*\,\|^2_H = \|\, u_k - w_*\,\|^2_H - 2\,\gamma_k\,\langle\ u_k - w_*, q_k\ \rangle_H + \|\,\gamma_k\, q_k\,\|^2_H \\
&= \|\, u_k - \gamma_k\, q_k - w_*\,\|^2_H = \|\, u_k - w_*\,\|^2_H - 2\,\gamma_k\,\langle\ u_k - w_*, q_k\ \rangle_H + \gamma_k^2 \\
&< \|\, u_k - w_*\,\|^2_H - 2\,\gamma_k\,\delta + \gamma_k^2 \leqslant \|\, u_k - w_*\,\|^2_H - \gamma_k\,\delta \ .
\end{aligned}$$

Итак, при $k \geqslant m \geqslant K_\delta$ справедливы неравенства

$$\|\, u_{k+1} - w_*\,\|^2_H < \|\, u_k - w_*\,\|^2_H - \gamma_k\,\delta \ .$$

Просуммируем такие неравенства по k от m до $m{+}s$, после суммирования получим неравенство

$$\|\, u_{k+s+1} - w_*\,\|^2_H < \|\, u_m - w_*\,\|^2_H - \delta \sum_{k=m}^{m+s} \gamma_k \ .$$

Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k$ расходится, то $\sum_{k=m}^{m+s}\gamma_k \to \infty$ при $s \to \infty$ и при всех достаточно больших s получим неравенство

$$\| u_{k+s+1} - w_* \|_H^2 < \| u_m - w_* \|_H^2 - \delta \sum_{k=m}^{m+s} \gamma_k < 0 \ ,$$

что невозможно в силу неравенства $\| u_{k+s+1} - w_* \|_H^2 \geqslant 0$. Из этого противоречия следует, что допущение о том, что $u_k \notin T_\varepsilon$ для $k \in N$, неверно. Поэтому существует номер $k_\varepsilon \in N$ такой, что $u_{k_\varepsilon} \in T_\varepsilon$ и, следовательно, $\sigma_{k_\varepsilon} < F_\alpha^*(z) + \varepsilon$. Первая часть теоремы доказана.

Одновременно показано, что если для каждого номера $k \in N$ взять элемент $\tilde{u}_k = u_{i_k}$ среди элементов $\{ u_1, \ldots, u_k \}$, для которого

$$F_\alpha(y; \tilde{u}_k) = \min \{ F_\alpha(y; u_i) : \ i \in \overline{0, k} \ \} \ ,$$

то $\{\tilde{u}_k\}$ будет минимизирующей последовательностью в задаче (3.1).

Докажем вторую часть теоремы. Поскольку $\{\tilde{u}_k\} \subset U_H \subset U_W$ и $F_\alpha^H(z) = F_\alpha^*(z)$, то последовательность $\{\tilde{u}_k\}$ является одновременно минимизирующей последовательностью в задаче (2.2) и поэтому, как было показано выше, $\tilde{u}_k \to u_\alpha^*$ в E. Вторая часть теоремы доказана.

Докажем третью часть теоремы. Поскольку $\tilde{u}_k \to u_\alpha^*$ в E, то

$$J_1(z; \tilde{u}_k) \to J_1(z; u_\alpha^*) \ , \quad J_2(\tilde{u}_k) \to J_2(u_\alpha^*) \ ,$$

и поскольку $F_\alpha(z; \tilde{u}_k) \to F_\alpha^* = F_\alpha(z; u_\alpha^*)$, то

$$V[\, \tilde{u}_k \,] = \alpha^{-1} F_\alpha(z; \tilde{u}_k) - \alpha^{-1} J_1(z; \tilde{u}_k) - J_2(\tilde{u}_k) \to \alpha^{-1} F_\alpha(z; u_\alpha^*) - \alpha^{-1} J_1(z; u_\alpha^*) - J_2(u_\alpha^*) = V[\, u_\alpha^* \,] \ .$$

Третья часть теоремы доказана. Теорема 2 полностью доказана.

4. Численное моделирование

Проведем численное моделирование решения задачи восстановления управления в динамической системе:

$$y_t = a^2 y_{xx} + f\, u \, , \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega \, , \tag{4.1}$$

$$y(0, x) = y_0(x) \, , \quad x \in \Omega = (0, l) \, , \tag{4.2}$$

$$y(t, 0) = 0 = y(t, l) \, , \quad t \in T = [0, \vartheta] \, . \tag{4.3}$$

По условию

$$f \in L_2(\Omega) \, , \quad y_0 \in L_2(\Omega) \, , \quad a = \mathrm{const} > 0 \, .$$

Пусть множество P геометрических ограничений на управления есть отрезок

$$P = [\, \mu_1, \mu_2 \,] \subset \mathbb{R} \, , \quad -\infty < \mu_1 < \mu_2 < +\infty \, , \quad \mu = \max\{ \, |\mu_1|, |\mu_2| \, \} \, ,$$

приближенное измерение состояний динамической системы моделируется соотношением

$$y_\delta(t, x) = y(t, x; u) + \delta \, \xi(t, x) \, , \quad \int\limits_T \| \, \xi(t, \cdot) \, \|_{L_2(\Omega)}^2 \, dt \leqslant 1 \, .$$

Используя метод разделения переменных, решение краевой задачи (4.1)–(4.3) можно представить в виде ряда Фурье:

$$y = y(t, x) = y(t, x; u) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \, \omega_i(x) \, , \quad t \in T \, , \quad x \in [0, l] \, , \tag{4.4}$$

$$\dot{y}_i(t) = -a^2\,\lambda_i^2\;y_i(t) + f_i\,u(t)\,,\quad t\in T\,,\quad y_i(0)=y_{0i}\,,\quad i=1,2,3,\dots\,,\tag{4.5}$$

$$y_i(t) = y_i(t;u) = y_{0i}\,\exp(-a^2\,\lambda_i^2\,t\,) + f_i\int\limits_0^t \exp(-a^2\,\lambda_i^2\,(\,t-\tau\,)\,)\,u(\tau)\,d\tau\,,\tag{4.6}$$

$$\lambda_i = \frac{\pi\,i}{l}\,,\quad \omega_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin(\lambda_i\,x)\,,\quad f_i=\langle\,f,\omega_i\,\rangle_{L_2(\Omega)}\,,\quad y_{0i}=\langle\,y_0,\omega_i\,\rangle_{L_2(\Omega)}\,,$$
$$i=1,2,3,\dots\,.$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что решение краевой задачи (4.1)–(4.3) равносильно решению счетного числа задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (4.5).

Для решения краевой задачи (4.1)–(4.3) для любых $t\in T$ и $u\in U$ справедлива цепочка неравенств

$$\|\,y(t,\cdot;u)\,\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t;u)^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty} y_{0i}^2 + \frac{2\,\mu^2}{a^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i^2}{\lambda_i^4} \leqslant 2\,\|\,y_0\,\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2\,\mu^2}{a^4\,\lambda_1^4}\|\,f\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,,$$

из которой, в частности, следует, что

$$R_N = 2\sum_{i=N+1}^{\infty} y_{0i}^2 + \frac{2\,\mu^2}{a^4}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{f_i^2}{\lambda_i^4}\;\to 0\,,\quad N\to\infty\,.$$

Для натурального числа $N\in\mathbb{N}$ символом $Pr^{(N)}$ обозначим оператор проектирования элементов пространства $L_2(\Omega)$ на пространство $\mathbb{R}^N$, определяемый равенством

$$Pr^{(N)}(z) = z^{(N)} = (z_1^{(N)},\dots,z_N^{(N)})\,,\quad z_i^{(N)} = \langle\,z,\omega_i\,\rangle_{L_2(\Omega)}\,,\quad i=1,\dots,N\,.$$

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу:

$$\widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z) = \min\{\,F_\alpha^{(N)}(z,v):\ v\in U_W\,\}\,,\quad U_W = U\cap W\,,\tag{4.7}$$

$$F_\alpha^{(N)} = F_\alpha^{(N)}(z,v) = \int\limits_T \|\,Pr^{(N)}(y[t;v]) - Pr^{(N)}(z(t,\cdot))\,\|^2_{\mathbb{R}^N}\,dt + \alpha\,\Lambda(v)\,,$$
$$\alpha=\mathrm{const}>0\,,\quad z\in L_2(T;L_2(\Omega))\,.$$

Рассмотрим следующий алгоритм для решения исходной задачи восстановления:

$$D=\{\,D_\delta^{(N)}:\ 0\leqslant\delta\leqslant\delta_0\,,\ N\in\mathbb{N}\,\}\,,\quad D_\delta^{(N)}:L_2(T;\mathbb{R}^n)\to E\,.\tag{4.8}$$

Для любых $\delta\in[0,\delta_0]$, $N\in\mathbb{N}$, $z\in L_2(T;L_2(\Omega))$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta^{(N)}(z)$ по правилу

$$D_\delta^{(N)}(z) = v\in U_W:\ \widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z)\leqslant F_\alpha^{(N)}(z,v)\leqslant \widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z)+\varepsilon\,,\tag{4.9}$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность решения экстремальной задачи (4.7). Величины α, ε и N будут являться параметрами метода (параметрами регуляризации), они будут выбираться в зависимости от величины δ погрешности измерений.

Обозначим

$$r_\delta^{(N)}(y) = \sup\{\,\rho[\,D_\delta^{(N)}(y_\delta),\,U(y)\,]:\ y_\delta\in Y_\delta(y)\,\}\,,$$

$$\rho[\,D_\delta^{(N)}(y_\delta),\,U(y)\,] = \min\{\,\|\,D_\delta^{(N)}(y_\delta)-v\,\|_E:\ v\in U(y)\,\}\,.$$

Теорема 3. *Пусть для $y \in Y$ множество $S = U(y) \cap W \neq \varnothing$ и параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $N = N(\delta)$ удовлетворяют следующим условиям согласования:*

$$(\,\varepsilon(\delta) + \delta^2 + R_{N(\delta)}\,)\,\alpha(\delta)^{-1} \to 0\,,\ \varepsilon(\delta) \to 0\,,\ \alpha(\delta) \to 0\,,\ N(\delta) \to \infty \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{4.10}$$

Тогда алгоритм D, состоящий из методов (4.9), решает задачу восстановления на наблюдаемом движении y, т. е. $r_\delta^{(N(\delta))}(y) \to 0$ при $\delta \to 0$. Кроме того, если $\widehat{u}$ есть (Λ, S)-нормальный элемент множества S, то какие бы ни случились при этом реализации измерений $y_\delta \in Y_\delta(y)$, для реализаций $v_\delta = D_\delta^{(N(\delta))}(y_\delta)$ методов (4.9) при $\delta \to 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $v_\delta \to \widehat{u}$ сильно в E; 2) $v_\delta \to \widehat{u}$ в $\mathbb{R}^m$ поточечно на T; 3) $V[v_\delta] \to V[\widehat{u}]$; 4) $v_\delta(t) \to \widehat{u}(t)$ в $\mathbb{R}^m$ равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции $\widehat{u}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Опишем способ построения минимизирующих последовательностей в задаче (4.7), который будет использоваться при реализации метода (4.9). Этот способ будет аналогичен способу, изложенному в разд. 3. Рассмотрим новую вспомогательную экстремальную задачу:

$$\widehat{F}_\alpha^{(N)}(z) = \inf\{\,F_\alpha^{(N)}(z,v):\ v \in U_H\,\}, \quad U_H = U \cap H\,. \tag{4.11}$$

Векторы $Pr^{(N)}(y[t;v])$ и $Pr^{(N)}(z(t,\cdot))$ в выражении для $F_\alpha^{(N)}$ можно заменить на векторы $y^{(N)}[t;v] = (y_1(t;v), \ldots, y_N(t;v)) \in \mathbb{R}^N$ и $z^{(N)}(t) = (z_1^{(N)}(t), \ldots, z_N^{(N)}(t)) \in \mathbb{R}^N$ соответственно,

$$F_\alpha^{(N)} = F_\alpha^{(N)}(z,v) = \int\limits_T \|\,y^{(N)}[t;v] - z^{(N)}(t)\,\|^2_{\mathbb{R}^N}\,dt + \alpha\,\Lambda(v)\,.$$

Введем следующие соглашения. В выражении $F_\alpha^{(N)}(z,v)$ вместо функции $z \in L_2(T;L_2(\Omega))$ разрешим подставлять функцию $z^{(N)} = (z_1^{(N)}, \ldots, z_N^{(N)}) \in L_2(T;\mathbb{R}^N)$ и сохраним обозначение

$$F_\alpha^{(N)} = F_\alpha^{(N)}(z^{(N)},v) = \int\limits_T \|\,y^{(N)}[t;v] - z^{(N)}(t)\,\|^2_{\mathbb{R}^N}\,dt + \alpha\,\Lambda(v)\,.$$

В задачах (4.7), (4.9), (4.11) вместо $\widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z)$, $D_\delta^{(N)}(z)$, $\widehat{F}_\alpha^{(N)}(z)$ разрешим также использовать обозначения $\widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z^{(N)})$, $D_\delta^{(N)}(z^{(N)})$, $\widehat{F}_\alpha^{(N)}(z^{(N)})$.

Вектор $y^{(N)}[t;u]$ можно считать состоянием в момент времени $t \in T$ управляемой динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}_i(t) = -a^2\,\lambda_i^2\;y_i(t) + f_i\,u(t)\,, \quad t \in T\,, \quad y_i(0) = y_{0i}\,, \quad i = 1, \ldots, N\,. \tag{4.12}$$

В алгоритме восстановления вместо $z^{(N)}$ будет подставляться результат $y_\delta^{(N)}$ измерения конечномерного движения $y_\delta^{(N)}[\cdot;u]$ динамической системы (4.12), приближенное измерение состояний динамической системы (4.12) будем моделировать соотношением

$$y_\delta^{(N)}(t) = y^{(N)}[t;u] + \delta\,\xi^{(N)}(t)\,, \qquad \int\limits_T \|\,\xi^{(N)}(t)\,\|^2_{\mathbb{R}^N}\,dt \leqslant 1\,.$$

Укажем некоторые свойства задач (4.7) и (4.11). Для любых $\alpha > 0$, $z \in L_2(T;L_2(\Omega))$, $N \in \mathbb{N}$ задача (4.7) имеет единственное решение $\widetilde{u}_\alpha^{(N)}(z)$, любая минимизирующая последовательность в задаче (4.7) сходится к элементу $\widetilde{u}_\alpha^{(N)}(z)$, справедливо равенство $\widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z) = \widehat{F}_\alpha^{(N)}(z)$, любая минимизирующая последовательность в задаче (4.11) сходится к элементу $\widetilde{u}_\alpha^{(N)}(z)$. Если вместо $z \in L_2(T;L_2(\Omega))$ подставить $z^{(N)} \in L_2(T;\mathbb{R}^N)$, то будут справедливы аналогичные утверждения.

Представим функционал $F_\alpha^{(N)}(z^{(N)},u)$ в виде

$$F_\alpha^{(N)}(z^{(N)},u) = J_1^{(N)}(z^{(N)},u) + \alpha J_2(u) + \alpha J_3(u)\,.$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ и элемента $z^{(N)} \in L_2(T;\mathbb{R}^N)$ функционал $J_1^{(N)}(z^{(N)},\cdot) : H \to \mathbb{R}$ непрерывен и дифференцируем по Фреше в каждой точке $u \in H$. Производная Фреше $J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},u) \in H^*$ функционала $J_1^{(N)}(z^{(N)},\cdot) : H \to \mathbb{R}$ в точке $u \in H$ определяется равенством

$$J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},u)(h) = \langle\, \psi f, h \,\rangle_E\,, \quad \forall\, h \in H\,, \tag{4.13}$$

которое следует из представления приращения функционала

$$J_1^{(N)}(z^{(N)},u+h) - J_1^{(N)}(z^{(N)},u) = \langle\, \psi^{(N)} f, h \,\rangle_E + o\,(\,\|\, h \,\|_E\,)\,,$$

справедливого для любых $u \in E$ и $h \in E$, и оценки остаточного члена

$$|\, o\,(\,\|\, h \,\|_E)\,| \leqslant C \,\|\, h \,\|_E^2 \leqslant C \,\|\, h \,\|_H^2\,,$$

где C — некоторая положительная константа, не зависящая от $u \in E$, $h \in E$ и $N \in \mathbb{N}$; $\psi^{(N)} = (\psi_1^{(N)},\dots,\psi_N^{(N)}) = \psi^{(N)}(\cdot\,;z^{(N)},u)$ — решение сопряженной задачи

$$\dot\psi_i^{(N)}(t) = a^2\,\lambda_i^2\;\psi_i^{(N)}(t) + 2\left(\,y_i(t;u) - z_i^{(N)}(t)\,\right)_{\mathbb{R}^N}, \quad t \in T\,, \quad \psi_i^{(N)}(\vartheta) = 0\,, \quad i = 1,\dots,N\,. \tag{4.14}$$

Градиент $\nabla_u J_1^{(N)}(z^{(N)},u) = a_u \in H$ функционала $J_1^{(N)}(z^{(N)},\cdot) : H \to \mathbb{R}$ в точке $u \in H$ определяется по теореме Рисса равенством

$$\langle\, \psi^{(N)} f, h \,\rangle_E = \langle\, a_u, h \,\rangle_H \quad \forall\, h \in H\,. \tag{4.15}$$

Кроме того, при указанных условиях на исходные данные задачи производная $J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},\cdot)$ и градиент $\nabla_u J_1^{(N)}(z^{(N)},\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица на U_H, т. е. существует число $L \geqslant 0$ такое, что для любых $u \in U_H$ и $v \in U_H$ выполняются неравенства

$$\|\, J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},u) - J_{1u}^{(N)\prime}(z,v) \,\|_{H^*} \leqslant L \,\|\, u - v \,\|_E\,,$$

$$\|\, \nabla_u J_1^{(N)}(z^{(N)},u) - \nabla_u J_1^{(N)}(z^{(N)},v) \,\|_H \leqslant L \,\|\, u - v \,\|_E\,.$$

Таким образом, для вычисления производной $J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},u)$ нужно последовательно решить две задачи: сначала необходимо найти решение $y^{(N)}(\cdot\,;u)$ задачи Коши (4.12), затем — решение $\psi^{(N)}(\cdot\,;z^{(N)},u)$ сопряженной задачи (4.14) и, наконец, по формуле (4.13) найти искомый функционал $J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},u)$. Для нахождения градиента $\nabla_u J_1^{(N)}(z^{(N)},u)$ нужно найти элемент $a_u \in H$, обеспечивающий представление (4.15).

Вопрос о дифференцируемости функционала J_2 и субдифференцируемости функционала J_3 решен в разд. 3.

По теореме Моро — Рокафеллара имеем

$$\partial_u F_\alpha^{(N)}(z^{(N)},u) = J_{1u}^{(N)\prime}(z^{(N)},u) + \alpha\; J_2'(u) + \alpha\; \partial J_3(u)\;,\; u \in H\,,$$

$$D_u F_\alpha^{(N)}(z^{(N)},u) = \nabla_u J_1^{(N)}(z^{(N)},u) + \alpha\; \nabla J_2(u) + \alpha\; DJ_3(u)\;,\; u \in H\,.$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (4.11) можно воспользоваться методом проекции субградиента [42, гл. 5, § 3; 44]:

$$u_{k+1} = Pr(u_k - \beta_k\, v_k)\;, \quad \beta_k > 0\;, \quad v_k \in D_u F_\alpha^{(N)}(z^{(N)},u_k)\;, \quad k = 0,1,2,\dots\;, \tag{4.16}$$

где u_0 — некоторое начальное приближение из U_H; $Pr(w)$ — проекция точки $w \in H$ на множество U_H; параметры метода $\beta_k > 0$ подлежат подходящему выбору.

Теорема 4. *Пусть в итерационном процессе* (4.16) u_0 *— произвольное начальное приближение из* U_H, v_k *— произвольный субградиент из* $D_u F_\alpha^{(N)}(z^{(N)}, u_k)$, *параметры метода* $\beta_k > 0$ *удовлетворяют условиям*:

$$\beta_k = 1 \ , \quad \text{если} \quad v_k = 0 \ ; \quad \beta_k = \gamma_k / \| v_k \|_H \ , \quad \text{если} \quad v_k \neq 0 \ ;$$

$$\gamma_k > 0 \ , \quad \gamma_k \to 0 \ , \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty \ .$$

Тогда 1) $F_\alpha^{(N)}(z^{(N)}, \widetilde{u}_k) \to \widetilde{F}_\alpha^{(N)}(z^{(N)})$, *где* $F_\alpha^{(N)}(z^{(N)}, \widetilde{u}_k) = \min \{ F_\alpha^{(N)}(z^{(N)}, u_i) : \ i \in \overline{0,k} \}$; 2) *минимизирующая последовательность* $\{\widetilde{u}_k\} \subset U_H$ *задачи* (4.11) *сходится сильно в* E *к элементу* $\widetilde{u}_\alpha^{(N)}(z^{(N)})$; 3) $V[\,\widetilde{u}_k\,] \to V[\,\widetilde{u}_\alpha^{(N)}(z^{(N)})\,]$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2.

Дискретизируем задачу (4.11). Фиксируем какое-либо натуральное число $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое разбиение Δ отрезка T с равномерным шагом h точками $t_k \in T$, $k = 0, \ldots, m$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$. Управление $u = u(t)$, $t \in T$, аппроксимируем сеточной функцией $u_h = u_h(t_k) = u_k^{(h)}$, $k = 0, \ldots, m$. Сеточную функцию u_h далее удобно трактовать как дискретное управление и считать его элементом евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$. Геометрическое ограничение $u(t) \in P$, $t \in T$, на допустимое управление естественно считать переходящим в ограничение $u_h = (u_0^{(h)}, \ldots, u_m^{(h)}) \in P^{m+1} = P \times \ldots \times P = P_h$ на допустимое дискретное управление. Движение $y^{(N)} = y^{(N)}[t; u] = (y_1(t; u), \ldots, y_N(t; u))$, $t \in T$, конечномерной системы (4.12) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$, соответствующее управлению $u \in U$, аппроксимируем упорядоченным набором сеточных функций $y_h^{(N)} = (\,y_{1h}, \ldots, y_{Nh}\,) = y_h^{(N)}[t_k; u_h] = (\,y_{1h}[t_k; u_h], \ldots, y_{Nh}[t_k; u_h]\,)$, $k = 0, \ldots, m$, который будем считать дискретным движением системы (4.12) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^N$, соответствующим дискретному управлению $u_h \in P_h$. Набор сеточных функций $y_h^{(N)}$ далее удобно считать элементом евклидова пространства $\mathbb{R}^{N(m+1)}$. Из (4.6) следует, что

$$y_{ih}[t_{k+1}; u_h] = y_{ih}[t_k; u_h] \, \exp(-a^2 \lambda_i^2 h) + f_i \, u_h(t_k) \, \frac{1 - \exp(-a^2 \lambda_i^2 h)}{a^2 \lambda_i^2} \ , \quad k = 0, \ldots, m-1 \ ,$$

$$y_{ih}[t_0; u_h] = y_i(0) = y_{0i} \ , \quad i = 1, \ldots, N \ .$$

Функцию $z^{(N)} = z^{(N)}(t) = (z_1^{(N)}(t), \ldots, z_N^{(N)}(t))$, $t \in T$, аппроксимируем упорядоченным набором сеточных функций $z_h^{(N)} = (\,z_{1h}^{(N)}, \ldots, z_{Nh}^{(N)}\,) = z_h^{(N)}(t_k) = (\,z_{1h}^{(N)}(t_k), \ldots, z_{Nh}^{(N)}(t_k)\,)$, $k = 0, \ldots, m$.

Целевой функционал

$$F_\alpha^{(N)}(z^{(N)}, u) = J_1^{(N)}(z^{(N)}, u) + \alpha J_2(u) + \alpha J_3(u)$$

аппроксимируем конечными суммами

$$F_{\alpha h}^{(N)} = F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, u_h) = J_{1h}^{(N)}(z_h^{(N)}, u_h) + \alpha \, J_{2h}(u_h) + \alpha \, J_{3h}(u_h) \, ,$$

$$J_{1h}^{(N)}(z_h^{(N)}, u_h) = \sum_{i=1}^{N} \Big[\, \frac{h}{2} \, \Big(y_{ih}[t_0; u_h] - z_{ih}^{(N)}(t_0) \Big)^2 + \frac{h}{2} \, \Big(y_{ih}[t_m; u_h] - z_{ih}^{(N)}(t_m) \Big)^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} h \, \Big(y_{ih}[t_k; u_h] - z_{ih}^{(N)}(t_k) \Big)^2 \Big] \, ,$$

$$J_{2h}(u_h) = \frac{h}{2}\,(\,u_0^{(h)}\,)^2 + \frac{h}{2}\,(\,u_m^{(h)}\,)^2 + \sum_{k=1}^{m-1} h\,(\,u_k^{(h)}\,)^2\,, \quad J_{3h}(u_h) = \sum_{k=0}^{m-1} |u_{k+1}^{(h)} - u_k^{(h)}|\,.$$

Первые две суммы представляют собой, соответственно, аппроксимацию интегралов $J_1^{(N)}$ и $J_2(u)$ методом трапеций на разбиении Δ, третья сумма J_{3h} представляет собой аппроксимацию полной вариации $V[u]$ интегральной суммой на разбиении Δ.

Исходной бесконечномерной экстремальной задаче (4.11) поставим в соответствие конечномерную экстремальную задачу

$$F_{\alpha h}^*(z_h^{(N)}) = \min\,\{\,F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, u_h):\; u_h \in P_h\,\}\,. \tag{4.17}$$

Решение задачи (4.17) примем за дискретное приближение к решению задачи (4.11). Задача (4.17) разрешима единственным образом, поскольку целевая функция $F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, \cdot)$ непрерывна и строго выпукла на $\mathbb{R}^{m+1}$, а множество P_h компактно в $\mathbb{R}^{m+1}$. Первые два слагаемых $J_{1h}^{(N)}(x_h^{(N)}, \cdot)$ и $J_{2h}(\cdot)$ функции $F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^{m+1}$, третье слагаемое $J_{3h}(\cdot)$ не является дифференцируемым во всех точках $\mathbb{R}^{m+1}$, но оно непрерывно и выпукло на $\mathbb{R}^{m+1}$ и поэтому субдифференцируемо на $\mathbb{R}^{m+1}$. Из вышесказанного следует, что функция $F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, \cdot)$ субдифференцируема на $\mathbb{R}^{m+1}$. Поэтому для нахождения приближенного решения задачи (4.17) предлагается использовать метод проекции субградиента в форме

$$u_h^{[k+1]} = Pr_h\left(u_h^{[k]} - \beta_k\; v_h^{[k]}\right)\,, \quad k = 0, 1, \dots\;, \tag{4.18}$$

где $v_h^{[k]} \in \partial_u F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, u_h^{[k]})$ — субдифференциал по переменной u_h целевой функции $F_{\alpha h}^{(N)}(z_h^{(N)}, \cdot)$ в точке $u_h^{[k]}$; $Pr_h(w_h)$ — проекция точки $w_h \in \mathbb{R}^{m+1}$ на выпуклое компактное множество P_h (проекция существует и единственна); β_k — последовательность параметров метода проекции субградиента, удовлетворяющая условиям: $\beta_k = 1$, если $v_h^{[k]} = 0$; $\beta_k = \gamma_k / \|\, v_h^{[k]}\,\|_{\mathbb{R}^{m+1}}$, если $v_h^{[k]} \neq 0$;

$$\gamma_k > 0\,, \quad \gamma_k \to 0\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty\;;$$

в качестве начального приближения берется какой-нибудь элемент $u_h^{[0]} \in P_h$.

Проекция $Pr_h(v_h) = (w_0, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ элемента $v_h = (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ на выпуклый компакт P_h вычисляется по правилу: $w_k = v_k$ при $v_k \in P$, $w_k = \mu_1$ при $v_k < \mu_1$, $w_k = \mu_2$ при $v_k > \mu_2$, $k = 0, \dots, m$.

Погрешности измерений $\xi^{(N)} = (\xi_1^{(N)}, \dots, \xi_N^{(N)})$ будем моделировать соотношениями

$$\xi_i^{(N)}(t) = \varkappa_i \sin(\,\nu_i\, t)\,, \quad t \in T\,, \quad \nu_i = \mathrm{const}_i\,, \quad \varkappa_i = \mathrm{const}_i > 0\,, \quad \vartheta\,(\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_N) \leqslant 1\,.$$

Численные эксперименты, иллюстрирующие предлагаемую методику, проводились при следующих параметрах задачи:

$$a = 1\,,\ \vartheta = 1\,,\ l = 1\,,\ \mu_1 = 0\,,\ \mu_2 = 2\,,\ y_0 = 0\,,\ 1 \leqslant N \leqslant 20\,,\ \nu_i = 2\,,\ \varkappa_i = N^{-1}\,,\ i = 1, \dots, N\,,$$

$$f = f_1\omega_1(x) + \ldots + f_N\omega_N(x)\,, \quad f_1 = 1\,, \dots,\, f_N = 1\,.$$

В качестве модельных восстанавливаемых управлений были выбраны три функции:

1) $u = u_{(1)}(t) = 0.5 + t^2$ (гладкое управление);

2) $u = u_{(2)}(t) = 1.5 - |2t - 1|$ (непрерывное кусочно-гладкое управление);

3) $u = u_{(3)}(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{если} \;\; t \in [0, 0.3]\,, \\ 1\,, & \text{если} \;\; t \in (0.3, 0.7)\,, \\ 2\,, & \text{если} \;\; t \in [0.7, 1]\,, \end{cases}$ (разрывное управление).

Во всех трех случаях начальной функцией в методе проекции субградиента служила сеточная аппроксимация функции $u^{[0]} = 0$. Она достаточно далеко отстоит от модельных управлений как по норме, так и по качественному поведению:

$$\|u_{(1)}\|_{L_2(T)} = (47/60)^{1/2}\ , \quad \|u_{(2)}\|_{L_2(T)} = (13/12)^{1/2}\ , \quad \|u_{(3)}\|_{L_2(T)} = (8/5)^{1/2}\ .$$

Величины γ_k выбирались по формулам $\gamma_0 = 1\,, \quad \gamma_k = 1/\sqrt{k}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Зависимость параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ точности минимизации в задаче (4.17) от погрешности δ в измерении состояний динамической системы напрямую не контролировалась, точность решения задачи (4.17) определялась выбором количества итераций M в методе проекции субградиента (4.18) и величиной шага h, характеризующего степень дискретизации задачи. Ниже на рис. 1–6 приведены результаты расчетов при следующих значениях расчетных параметров: $h = 0.025$, $M = 10^3$, $\alpha = 10^{-4} \cdot \delta$, $N = 20$. Параметр δ принимал три значения: 0.2, 0.05 и 0.01.

На рис. 1–3 сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, линией с точками — результат восстановления при $\delta = 0.2$, пунктирной линией — результат восстановления при $\delta = 0.05$, точко-пунктирной линией — результат восстановления при $\delta = 0.01$. На рис. 4–6 изображена зависимость восстановления управления от числа итераций; сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, точко-пунктирной линией — результат восстановления при $M = 10$, пунктирной линией — результат восстановления при $M = 50$, линией с точками — результат восстановления при $M = 4 \cdot 10^3$. Рис. 1 и 4 отвечают случаю гладкого управления, рис. 2 и 5 — случаю кусочно-гладкого управления, рис. 3 и 6 — случаю разрывного управления.

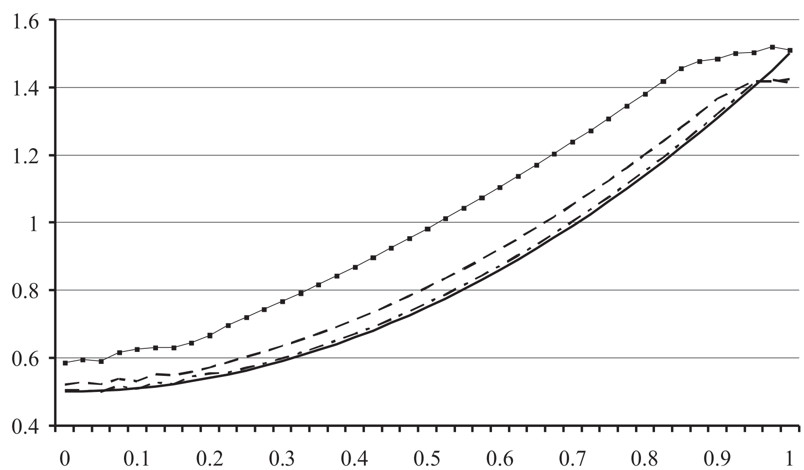


Рис. 1.

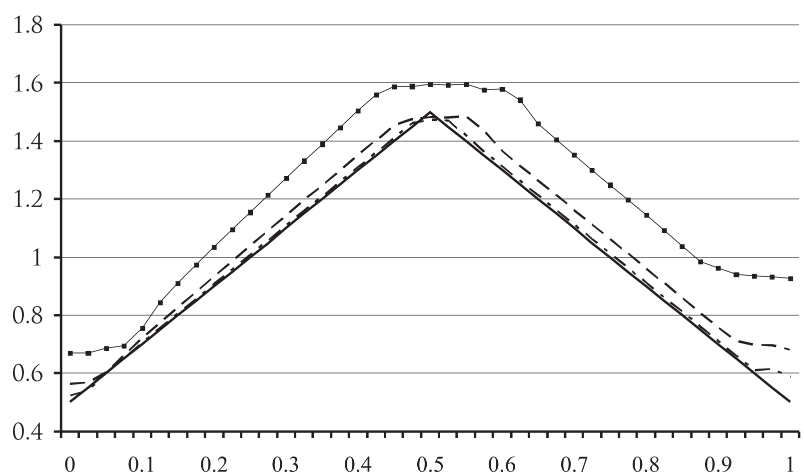


Рис. 2.

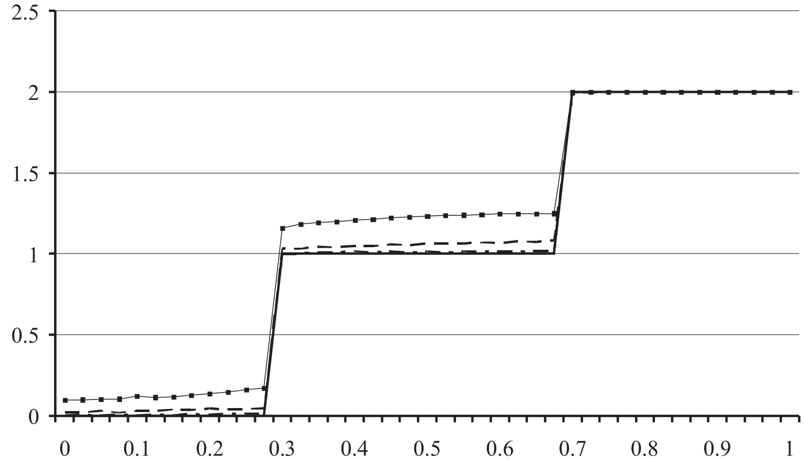


Рис. 3.

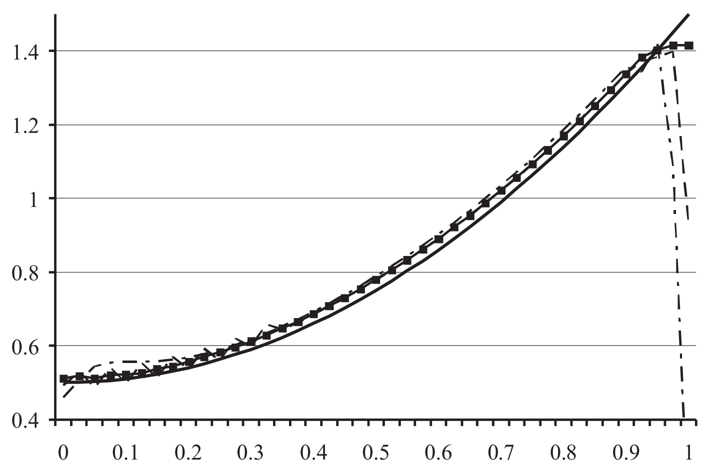


Рис. 4.

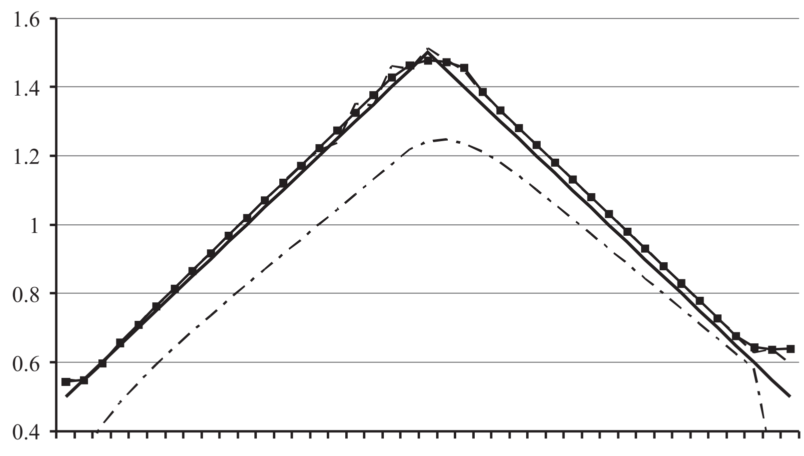


Рис. 5.

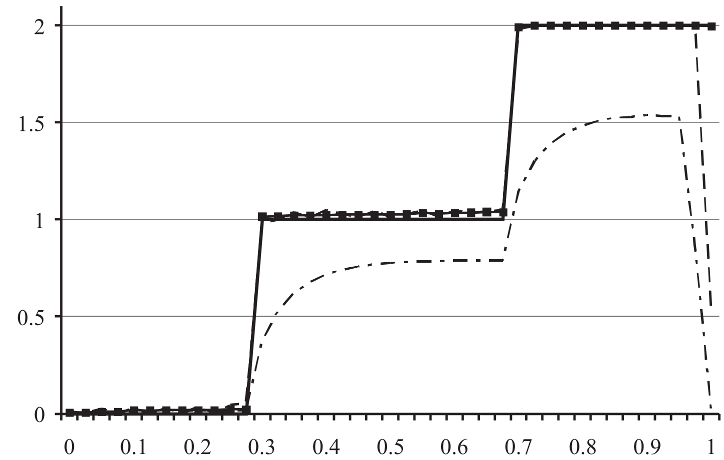


Рис. 6.

Анализ результатов расчетов (см. рис. 4–6) показывает, что с ростом M результат восстановления приближается не к модельному управлению, а к некоторой, вообще говоря, другой функции. Уже при $M > 100$ результаты восстановления практически неотличимы друг от друга, поэтому на рисунках приводится только результат, соответствующий $M = 4 \cdot 10^3$. Этот эффект объясняется тем, что при численном решении задачи рассматривается функционал (2.1), который при фиксированном значении $\delta > 0$, а следовательно и $\alpha(\delta)$, имеет точку минимума, отличную от искомого решения, и при увеличении числа итераций мы приближаемся именно к точке минимума функционала (2.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
3. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
4. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
5. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
7. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
8. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999. 237 с.
9. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
10. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
11. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
12. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000. 304 с.
13. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.
14. **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 819–836.
15. **Васин В.В., Сережникова Т.И.** Об одном алгоритме решения уравнения Фредгольма – Стилтьеса // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 3–10.

16. **Васин В.В., Сережникова Т.И.** Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.
17. **Васин В.В.** Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
18. **Vasin V.V.** Regularization and iterativ approximation for linear ill-posed problems in the space of function of bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. 225–239.
19. **Васин В.В.** Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
20. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.
21. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, no. 8. P. 853–865.
22. **Leonov A.S.** Regularization of ill-posed problems in Sobolev space W_1^1 // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2005. Vol. 13, no. 6. P. 595–619.
23. **Леонов А.С.** Кусочно-равномерная регуляризация некорректных задач с разрывными решениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 3. С. 516–531.
24. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 212 с.
25. **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhauser, 1984. 239 p.
26. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.
27. **Chavent G., Kunish K.** Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control // Optimization and Calculus of variation. 1997. Vol. 2. P. 359–376.
28. **Vogel C.R.** Computation methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
29. **Короткий М.А.** Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 2. С. 76–82.
30. **Короткий М.А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 39–53.
31. **Короткий М.А.** Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 132 с.
32. **Соболева Д.О.** Реконструкция управлений в параболических системах // Вестн. Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. 2010. Вып. 9. С. 59–67.
33. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
34. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
35. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
36. **Короткий А.И.** О корректности задач оптимального управления параболическими и гиперболическими системами // Задачи позиционного моделирования. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 19–40.
37. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
38. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 496 с.
39. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
40. **Вулих Б.З.** Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 352 с.
41. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
42. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
43. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
44. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
45. **Демьянов В.Ф., Васильев В.П.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Поступила 01.09.2010

Короткий Александр Илларионович
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Михайлова Дарья Олеговна
магистрант
Уральский государственный университет
e-mail: darso@rambler.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.8, 519.651.3

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ЖАДНЫХ АЛГОРИТМОВ[1]

Е. Д. Лившиц

В работе изучаются чисто жадный и ортогональный жадный алгоритмы. Устанавливается, что для дискретных словарей множество целевых функций, для которых жадный алгоритм может быть “корректно реализован”, имеет вторую категорию.

Ключевые слова: наилучшее m-членное приближение, жадные алгоритмы, категория.

E. D. Livshits. Realizability of greedy algorithms.

A purely greedy algorithm and an orthogonally greedy algorithm are studied. It is established that the set of objective functions for which a greedy algorithm can be “realized properly” has second category for discrete dictionaries.

Keywords: best m-term approximation, greedy algorithms, category.

1. Введение

Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство. Множество $\mathcal{D}, \mathcal{D} \subset H$, будем называть *словарем,* если оно состоит из функций с единичной нормой и замыкание линейной оболочки $\mathcal{D}$ совпадает со всем H:

$$g \in \mathcal{D} \;\Rightarrow \|g\| = 1, \quad \overline{\operatorname{span}}\, \mathcal{D} = H.$$

В связи с запросами приложений в последние годы интенсивно начала исследоваться следующая задача: построить по целевой функции $f \in H$ и $m \in \mathbb{N}$ конечную линейную комбинацию элементов словаря

$$\sum_{k=1}^{m} c_k(f) g_k(f), \quad c_k(f) \in \mathbb{R}, \quad g_k(f) \in \mathcal{D},$$

достаточно хорошо приближающую f. Оказалось, что эта задача эффективно решается с помощью жадных алгоритмов.

Приведем две наиболее известные модификации жадных алгоритмов.

Чисто жадный алгоритм (ЧЖА). Пусть задана целевая функция $f_0^{PGA} := f \in H$. Положим $G_0^{PGA}(f, \mathcal{D}) = 0$. Для каждого $m \geq 0$ последовательно выбираем функцию $g_{m+1}^{PGA} \in \mathcal{D}$ такую, что

$$|\langle f_m^{PGA}, g_{m+1}^{PGA} \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_m^{PGA}, g \rangle|, \tag{1.1}$$

и определяем

$$f_{m+1}^{PGA} := f_m^{PGA} - \langle f_m^{PGA}, g_{m+1}^{PGA} \rangle g_{m+1}^{PGA}, \qquad G_{m+1}^{PGA}(f, \mathcal{D}) = G_m^{PGA}(f, \mathcal{D}) + \langle f_m^{PGA}, g_{m+1}^{PGA} \rangle g_{m+1}^{PGA}.$$

Ортогональный жадный алгоритм (ОЖА). Пусть задана целевая функция $f_0^{OGA} := f \in H$. Положим $G_0^{OGA}(f, \mathcal{D}) = 0$. Для каждого $m \geq 0$ последовательно выбираем функцию $g_{m+1}^{OGA} \in \mathcal{D}$ такую, что

$$|\langle f_m^{OGA}, g_{m+1}^{OGA} \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}} |\langle f_m^{OGA}, g \rangle|, \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00799, 10-01-00442).

и определяем

$$G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D}) = \mathrm{Proj}_{m+1}(f), \qquad f_{m+1}^{OGA} := f - G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D}),$$

где $\mathrm{Proj}_{m+1}(\cdot)$ — ортогональная проекция на $\mathrm{span}\,(g_1^{OGA},\ldots,g_{m+1}^{OGA})$.

Жадные алгоритмы (под названием Projection pursuit regression) впервые появились в работе по статистике Дж. Фридмана и В. Стутзла [1]. Необходимо отметить, что ряд более ранних результатов по теории функций, например Е. Шмидта [2], а также Б. С. Стечкина и С. Б. Стечкина [3], может быть проинтерпретирован как результаты о сходимости ЧЖА для словарей специального вида.

В случае произвольного словаря m-членные приближения $G_m^{PGA}(f,\mathcal{D})$ и $G_m^{OGA}(f,\mathcal{D})$, как было показано Л. Джонсом [4] и В. В. Дубининым [5], всегда сходятся к f, хотя они могут существенно уступать наилучшему m-членному приближению f по системе $\mathcal{D}$.

Теорема 1 [4; 5]. *Для произвольного пространства H, словаря $D \subset H$ и целевой функции $f \in H$ выполняются равенства*

$$\lim_{m\to\infty} \|f - G_m^{PGA}(f,\mathcal{D})\| = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \|f - G_m^{OGA}(f,\mathcal{D})\| = 0.$$

За последние 15 лет было получено значительное число результатов о сходимости и скорости сходимости различных модификаций жадных алгоритмов. С ними можно познакомиться, например, в обзоре В. Н. Темлякова [6] или в статье [7].

Настоящая работа посвящена “реализуемости” жадных алгоритмов. Сделаем несколько замечаний, касающихся уточнения формулы (1.1) в определении ЧЖА (и аналогично формулы (1.2) в определении ОЖА).

1. Если супремум в (1.1) достигается на нескольких элементах из словаря, то в качестве g_{m+1}^{PGA} можно взять любой из них. В случае конечного или счетного словаря $\mathcal{D}$ можно использовать так называемый *монотонный выбор элементов словаря*, который заключается в следующем: все элементы словаря $\mathcal{D}$ перенумеровываются и, в случае достижения супремума в формуле (1.1) на нескольких элементах словаря, в качестве g_{m+1}^{PGA} выбирается элемент с наименьшим номером.

2. Строго говоря, супремум в (1.1) может не достигаться ни на одном элементе словаря. Для корректной реализации алгоритма во многих работах по жадным аппроксимациям, следуя работе В. Н. Темлякова [8], авторы применяют слабый жадный алгоритм, в котором вместо формулы (1.1) выбора $g_{m+1} = g_{m+1}^{PGA} \in \mathcal{D}$ используется формула

$$|\langle f_m, g_{m+1}\rangle| \ge t_{m+1} \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f_m, g\rangle|,$$

где $t_{m+1} \in (0,1)$ — заранее заданный “параметр слабости”. Однако, как будет показано в этой работе, для многих словарей недостижимость супремума случается достаточно редко.

3. Вопрос достижимости супремума имеет теоретическое значение. На практике пространство H конечномерно, а словарь $\mathcal{D}$ конечен, т. е. определение g_{m+1}^{PGA} (1.1) корректно, и g_{m+1}^{PGA} находится за конечное число шагов.

Будем называть словарь $\mathcal{D}$ *дискретным*, если

$$\sup_{g_1,g_2\in\mathcal{D},\ g_1\ne g_2} |\langle g_1, g_2\rangle| < 1. \tag{1.3}$$

Легко видеть, что в сепарабельном пространстве дискретные словари не более чем счетны.

Следующие теоремы показывают, что если словарь $\mathcal{D}$ дискретен, то для “большинства” функций супремум в формулах (1.1), (1.2) достигается на каком-либо элементе словаря на всех шагах алгоритма.

Теорема 2. *Пусть словарь $\mathcal{D} \subset H$ дискретен. Тогда множество функций из H, для которых на каждом шаге* ЧЖА *с монотонным выбором элементов словаря супремум достигается, т. е. множество*

$$\Big\{f \in H \mid \forall m \ \{g_{m+1}^{PGA} \in \mathcal{D}: \ |\langle f_m^{PGA}, g_{m+1}^{PGA}\rangle| = \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f_m^{PGA}, g\rangle|\} \neq \varnothing\Big\}$$

является множеством второй категории[2]*.*

Теорема 3. *Пусть словарь $\mathcal{D} \subset H$ дискретен. Тогда множество функций из H, для которых на каждом шаге* ОЖА *с монотонным выбором элементов словаря супремум достигается, т. е. множество*

$$\Big\{f \in H \mid \forall m \ \{g_{m+1}^{OGA} \in \mathcal{D}: \ |\langle f_m^{OGA}, g_{m+1}^{OGA}\rangle| = \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f_m^{OGA}, g\rangle|\} \neq \varnothing\Big\}$$

является множеством второй категории.

Отметим, что постановка задачи, в которой некоторое "хорошее" свойство устанавливается не для всех элементов пространства, но для множества второй категории, является традиционной для теории приближения. В качестве примера подобного результата укажем работу С. Б. Стечкина [9] о множестве точек единственности.

2. Доказательства

Пусть L — замкнутое подпространство H конечной коразмерности, $\operatorname{codim} L < \infty$. Обозначим через P_L оператор ортогонального проектирования на L, а через $P_L^\perp = P_{L^\perp}$ — оператор ортогонального проектирования на $L^\perp$ (ортогональное дополнение к L).

Лемма 1. *Пусть для словаря $\mathcal{D}$ выполняется соотношение* (1.3)*. Тогда существует μ, $0 < \mu < 1$, такое что для произвольного V, $0 < V \le 1$, найдется такое η, $0 < \eta < V$, что для произвольного замкнутого подпространства $L \subset H$, $\operatorname{codim} L < \infty$, и любого $g_1 \in \mathcal{D}$, удовлетворяющего условию*

$$\|P_L(g_1)\| \in (V - \eta, V + \eta), \tag{2.1}$$

множество

$$\big\{g_2 \in \mathcal{D}: \ \|P_L(g_2)\| \le V + \eta, \ \langle P_L(g_1), P_L(g_2)\rangle \ge \|P_L(g_1)\|^2(1-\mu)\big\}$$

конечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1.3) определим $\tau > 0$, для которого

$$\sup_{g_1,g_2\in\mathcal{D}, \ g_1\neq g_2} |\langle g_1, g_2\rangle| \le 1 - 3\tau.$$

Тогда для любых $g_2, g_3 \in \mathcal{D}$, $g_2 \neq g_3$, имеет место равенство

$$\|g_2 - g_3\|^2 = \|g_2\|^2 + \|g_3\|^2 - 2\langle g_2, g_3\rangle \ge 6\tau. \tag{2.2}$$

Выберем η, $0 < \eta < V$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{1}{2}\left(\frac{V+\eta}{V-\eta}\right)^2 < \frac{1}{2} + \frac{\tau}{16}. \tag{2.3}$$

[2] Под множествами второй категории в этой работе понимаются такие множества, дополнения которых являются множествами первой категории.

Пусть $g_1 \in \mathcal{D}$ удовлетворяет (2.1). Рассмотрим множество

$$\widetilde{\mathcal{D}} := \left\{ g_2 \in \mathcal{D} : \ \|P_L(g_2) - P_L(g_1)\| \le \tau^{1/2} \right\}. \tag{2.4}$$

Докажем, что $\widetilde{\mathcal{D}}$ конечно. Заметим, что оператор $P_L^{\perp}$ отображает словарь $\mathcal{D}$ в единичный шар конечномерного пространства $L^{\perp}$, который (шар) является компактом. Тогда если бы множество $\widetilde{\mathcal{D}}$ было бесконечным, то нашлись бы такие $g_2, g_3 \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $g_2 \ne g_3$, что

$$\|P_L^{\perp}(g_2) - P_L^{\perp}(g_3)\| \le \tau^{1/2}.$$

В этом случае имела бы место оценка

$$\|g_2 - g_3\|^2 = \|P_L(g_2) - P_L(g_3)\|^2 + \|P_L^{\perp}(g_2) - P_L^{\perp}(g_3)\|^2$$
$$\le (\|P_L(g_2) - P_L(g_1)\| + \|P_L(g_3) - P_L(g_1)\|)^2 + \tau \le (2\tau^{1/2})^2 + \tau = 5\tau,$$

что противоречило бы неравенству (2.2). Таким образом, $\sharp\widetilde{\mathcal{D}} < \infty$ и для доказательства леммы достаточно проверить, что для любого $g_2 \in \mathcal{D} \setminus \widetilde{\mathcal{D}}$, удовлетворяющего оценке

$$\|P_L(g_2)\| \le V + \eta, \tag{2.5}$$

имеет место неравенство

$$\langle P_L(g_1), P_L(g_2)\rangle < \|P_L(g_1)\|^2(1-\mu), \qquad \mu := \frac{\tau}{16}. \tag{2.6}$$

Действительно, согласно (2.4)

$$\|P_L(g_1) - P_L(g_2)\|^2 > \tau.$$

Тогда, используя (2.1), (2.3), (2.5) и неравенство $0 < \eta < V \le 1$, запишем

$$\langle P_L(g_1), P_L(g_2)\rangle = \frac{1}{2}\|P_L(g_1)\|^2 + \frac{1}{2}\|P_L(g_2)\|^2 - \frac{1}{2}\|P_L(g_1) - P_L(g_2)\|^2$$
$$< \|P_L(g_1)\|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{V+\eta}{V-\eta}\right)^2\right) - \frac{\tau}{2} \le \|P_L(g_1)\|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{V+\eta}{V-\eta}\right)^2 - \frac{\tau}{2(V+\eta)^2}\right)$$
$$\le \|P_L(g_1)\|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{V+\eta}{V-\eta}\right)^2 - \frac{\tau}{8}\right) \le \|P_L(g_1)\|^2\left(1 + \frac{\tau}{16} - \frac{\tau}{8}\right),$$

что доказывает неравенство (2.6) и вместе с ним лемму. □

Лемма 2. *Пусть заданы замкнутое подпространство $L \subset H$, $\operatorname{codim} L < \infty$, и $f \in L$, $f \ne 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $\widehat{f} \in L$ такие, что $\|f - \widehat{f}\| < \epsilon$ и множество*

$$\left\{ g_2 \in \mathcal{D} : \ |\langle \widehat{f}, g_2\rangle| \ge \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle \widehat{f}, g\rangle| - \delta \right\}$$

конечно.

Доказательство. Отметим, что для $f \in L$ и произвольного $g \in \mathcal{D}$ имеет место тождество

$$\langle f, g\rangle = \langle f, P_L(g) + P_L^{\perp}(g)\rangle = \langle f, P_L(g)\rangle + \langle f, P_L^{\perp}(g)\rangle = \langle f, P_L(g)\rangle.$$

В силу того что $\mathcal{D}$ является словарем и $f \ne 0$, выполняется оценка $\sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f, g\rangle| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$A := \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f, g\rangle| = \sup_{g\in\mathcal{D}} \langle f, g\rangle = \sup_{g\in\mathcal{D}} \langle f, P_L(g)\rangle > 0. \tag{2.7}$$

Предположим, что $\widehat{f}=f$ не удовлетворяет условиям леммы (в противном случае доказательство леммы можно считать завершенным). Тогда для любого $\delta>0$

$$\sharp\{g_2\in\mathcal{D}:\ |\langle f,g_2\rangle|\ge A-\delta\}=\infty.$$

Для $v,\delta>0$ определим

$$\breve{\mathcal{D}}(v,\delta):=\breve{\mathcal{D}}(L,f,A,v,\delta):=\{g_2\in\mathcal{D}:\ \|P_L(g_2)\|\ge v,\ \ |\langle f,g_2\rangle|\ge A-\delta\}.$$

Положим

$$V:=\sup\Big\{v>0:\ \forall\delta>0\quad \sharp\breve{\mathcal{D}}(v,\delta)=\infty\Big\}. \tag{2.8}$$

В силу неравенства

$$\|P_L(g_2)\|\ge\frac{|\langle f,g_2\rangle|}{\|f\|}$$

ясно, что $0<V\le 1$. Применив лемму 1 к числу V, получим число η, $0<\eta<V$. Так как $V+\eta>V$, то согласно (2.8) найдется $\nu>0$, для которого

$$\mathcal{D}':=\{g_2\in\mathcal{D}:\ \|P_L(g_2)\|\ge V+\eta,\ \ |\langle f,g_2\rangle|\ge A-\nu\}$$

конечно. Следовательно,

$$|\langle f,g_2\rangle|\le A-\nu\ \ \text{для всех}\ \ g_2\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}',\qquad \|P_L(g_2)\|\ge V+\eta. \tag{2.9}$$

Положим

$$\gamma:=\min\Big(\frac{\epsilon}{2},\frac{\nu}{3}\Big). \tag{2.10}$$

В силу (2.8) можно выбрать $g_1\in\mathcal{D}$, так чтобы

$$\|P_L(g_1)\|\in(V-\eta,V+\eta),\qquad \langle f,P_L(g_1)\rangle>A-\min\Big(\frac{\gamma(V-\eta)\mu}{2},\frac{\nu}{3}\Big) \tag{2.11}$$

(μ определено в лемме 1). По лемме 1 найдется такое конечное множество $\mathcal{D}''$, что для всех $g_2\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}''$ из неравенства $\|P_L(g_2)\|\le V+\eta$ будет следовать оценка

$$\langle P_L(g_1),P_L(g_2)\rangle<\|P_L(g_1)\|^2(1-\mu). \tag{2.12}$$

Положим

$$\widehat{f}=f+\gamma P_L(g_1). \tag{2.13}$$

Из (2.10) и неравенства $\|P_L(g_1)\|\le\|g_1\|=1$ непосредственно следует оценка $\|f-\widehat{f}\|<\epsilon$. Докажем, что

$$\delta=\min\Big(\frac{\gamma(V-\eta)\mu}{2},\frac{\nu}{3}\Big) \tag{2.14}$$

удовлетворяет условиям леммы. Для этого достаточно проверить, что для любого элемента $g_2\in\mathcal{D}\setminus(\mathcal{D}'\cup\mathcal{D}'')$ справедливы неравенства

$$|\langle\widehat{f},g_2\rangle|\le|\langle\widehat{f},g_1\rangle|-\delta\le\sup_{g\in\mathcal{D}}|\langle\widehat{f},g\rangle|-\delta. \tag{2.15}$$

С помощью определения (2.13) и (2.11) оценим

$$\begin{aligned}\langle\widehat{f},g_1\rangle&=\langle f,g_1\rangle+\gamma\langle P_L(g_1),g_1\rangle=\langle f,P_L(g_1)\rangle+\gamma\langle P_L(g_1),P_L(g_1)\rangle\\&\ge A-\min\Big(\frac{\gamma(V-\eta)\mu}{2},\frac{\nu}{3}\Big)+\gamma\|P_L(g_1)\|^2.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Если $g_2 \in \mathcal{D} \setminus (\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}'')$ и $\|P_L(g_2)\| \geq V + \eta$, то согласно (2.13), (2.9) и (2.10) имеем

$$|\langle \widehat{f}, g_2\rangle| \leq \langle f, g_2\rangle + \gamma\langle P_L(g_1), g_2\rangle \leq A - \nu + \gamma \leq A - \frac{2}{3}\nu. \tag{2.17}$$

Если $g_2 \in \mathcal{D} \setminus (\mathcal{D}' \cup \mathcal{D}'')$ и $\|P_L(g_2)\| < V + \eta$, то согласно (2.13), (2.7), (2.12) и (2.11)

$$|\langle \widehat{f}, g_2\rangle| \leq |\langle f, g_2\rangle| + \gamma|\langle P_L(g_1), g_2\rangle| = |\langle f, P_L(g_2)\rangle| + \gamma|\langle P_L(g_1), P_L(g_2)\rangle|$$

$$\leq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f, P_L(g)\rangle| + \gamma\|P_L(g_1)\|^2(1-\mu) \leq A - \gamma(V-\eta)\mu + \gamma\|P_L(g_1)\|^2. \tag{2.18}$$

Объединяя (2.16), (2.17), (2.18) с определением (2.14), получаем справедливость (2.15). $\square$

Для произвольного элемента $f \in H$ обозначим

$$\mathcal{D}(f) := \bigl\{g_2 \in \mathcal{D}\colon\ |\langle f, g_2\rangle| = \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f, g\rangle|\bigr\}.$$

Лемма 3. *Пусть заданы замкнутое подпространство $L \subset H$, $\operatorname{codim} L < \infty$, и $f \in L$, $f \neq 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существуют $\widetilde{f} \in L$, конечное непустое множество $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $\|f - \widetilde{f}\| < \epsilon$ и для любого $f' \in L$, $\|f' - \widetilde{f}\| < \delta_0$, выполняется равенство*

$$\mathcal{D}(f') = \mathcal{D}_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим с помощью леммы 2 функцию $\widehat{f} \in L$ и $\delta > 0$. Тогда множество

$$\mathcal{D}_1 := \Bigl\{g_2 \in \mathcal{D}\colon\ |\langle \widehat{f}, g_2\rangle| \geq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle \widehat{f}, g\rangle| - \delta\Bigr\} \tag{2.19}$$

конечно. Рассмотрим шар

$$B := \Bigl\{f' \in L\colon\ \|f' - \widehat{f}\| < \min\Bigl(\frac{\delta}{3},\, \epsilon - \|\widehat{f} - f\|\Bigr)\Bigr\}.$$

Ясно, что для любого $f' \in B$ выполняется неравенство $\|f' - f\| < \epsilon$. Для произвольного $f' \in B$ оценим

$$\sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f', g\rangle| \geq \sup_{g\in\mathcal{D}} \bigl(|\langle \widehat{f}, g\rangle| - |\langle f' - \widehat{f}, g\rangle|\bigr) \geq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle \widehat{f}, g\rangle| - \|f' - \widehat{f}\| \geq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle \widehat{f}, g\rangle| - \frac{\delta}{3}.$$

С другой стороны, согласно (2.19) для произвольного $g_2 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$ и $f' \in B$ выполняется

$$|\langle f', g_2\rangle| \leq |\langle \widehat{f}, g_2\rangle| + |\langle f' - \widehat{f}, g_2\rangle| \leq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle \widehat{f}, g\rangle| - \delta + \|f' - \widehat{f}\|$$

$$\leq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle \widehat{f}, g\rangle| - \frac{2}{3}\delta \leq \sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f', g\rangle| - \frac{\delta}{3}.$$

Следовательно, для любого элемента $f' \in B$ супремум $\sup_{g\in\mathcal{D}} |\langle f', g\rangle|$ будет достигаться на каком-то непустом подмножестве конечного множества $\mathcal{D}_1$.

Для произвольных $g', g'' \in \mathcal{D}_1$ обозначим

$$L_{g',g''} := \{f \in H:\ |\langle f, g'\rangle| = |\langle f, g''\rangle|\}.$$

Ясно, что или $L \subset L_{g',g''}$ (что эквивалентно включению $B \subset L_{g',g''}$), или $L \cap L_{g',g''}$ является объединением двух собственных замкнутых подпространств L. Рассмотрим множество

$$M := \bigcup_{g',\, g''\in\mathcal{D}_1,\ B\not\subset L_{g',\, g''}} B \cap L_{g',\, g''}. \tag{2.20}$$

В силу конечности $\mathcal{D}_1$ найдутся такие $\widetilde{f} \in L$ и $\delta_0 > 0$, что для любого элемента $\overline{f} \in B'$,

$$B' := \left\{ f' \in L : \ \|f' - \widetilde{f}\| < \delta_0 \right\},$$

выполняется включение

$$\overline{f} \in B \setminus M. \tag{2.21}$$

Предположим, что для $\widetilde{f} \in L$ и $\delta_0 > 0$ невозможно корректно определить $\mathcal{D}_0$. Тогда найдутся $f', f'' \in B'$ такие, что

$$\left\{ g_2 \in \mathcal{D}_1 : \ |\langle f', g_2 \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}_1} |\langle f', g \rangle| \right\} = \mathcal{D}(f') \neq \mathcal{D}(f'') = \left\{ g_2 \in \mathcal{D}_1 : \ |\langle f'', g_2 \rangle| = \sup_{g \in \mathcal{D}_1} |\langle f'', g \rangle| \right\}.$$

Ясно, что в этом случае найдутся $g', g'' \in \mathcal{D}_1$, для которых выполняются неравенства

$$|\langle f', g' \rangle| \geq |\langle f', g'' \rangle|, \qquad |\langle f'', g'' \rangle| \geq |\langle f'', g' \rangle|, \tag{2.22}$$

при этом, по крайней мере, одно из этих неравенств строгое, т. е.

$$|\langle f', g' \rangle| - |\langle f', g'' \rangle| + |\langle f'', g'' \rangle| - |\langle f'', g' \rangle| > 0.$$

Следовательно, хотя бы один из элементов f' и f'' не принадлежит $L_{g',g''}$. Тогда $B' \not\subset L_{g',g''}$ и с учетом включения $B' \subset B$ и определения (2.20) выполняется включение

$$B \cap L_{g',g''} \subset M. \tag{2.23}$$

С другой стороны, из (2.22) вытекает существование α, $0 \leq \alpha \leq 1$, для которого имеет место равенство

$$|\langle \alpha f' + (1-\alpha) f'', g' \rangle| = |\langle \alpha f' + (1-\alpha) f'', g'' \rangle|.$$

Таким образом, с учетом выпуклости B' и (2.23) имеет место включение

$$\alpha f' + (1-\alpha) f'' \in B' \cap L_{g',g''} \subset B \cap L_{g',g''} \subset M,$$

что противоречит (2.21) для $\overline{f} = \alpha f' + (1-\alpha) f''$. □

З а м е ч а н и е 1. В утверждениях лемм 1, 2 и 3 в качестве замкнутого подпространства L конечной коразмерности может быть выбрано само пространство H.

Если для $f \in H$ было корректно проведено m, $m \in \mathbb{N}$, шагов ЧЖА, то, следуя определению ЧЖА, обозначим через $g_m^{PGA}(f)$ элемент словаря, выбранный на m-м шаге, а через $f_m^{PGA}(f)$ — остаток на m-м шаге: $f_m^{PGA}(f) = f - G_m^{PGA}(f, \mathcal{D})$.

Лемма 4. *Для любых $f \in H$, $\epsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ найдутся такие $\overline{f} \in H$, $\delta > 0$ и элементы словаря $\{\overline{g}_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{D}$, что $\|\overline{f} - f\| < \epsilon$ и для всех $f' \in H$, $\|f' - \overline{f}\| < \delta$,*

$$\mathcal{D}(f_k^{PGA}(f')) \neq \varnothing, \qquad g_k^{PGA}(f') = \overline{g}_k \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq m.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать лемму по индукции. Так как база $m = 0$ не нуждается в доказательстве, то достаточно из справедливости леммы для $m = n \geq 0$ вывести утверждение леммы для $m = n + 1$.

Предположим, что существуют такие $\overline{f} \in H$, $\delta > 0$ и элементы словаря $\{\overline{g}_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{D}$, что $\|\overline{f} - f\| < \epsilon$ и для всех $f' \in H$, $\|f' - \overline{f}\| < \delta$,

$$\mathcal{D}(f_k^{PGA}(f')) \neq \varnothing, \qquad g_k^{PGA}(f') = \overline{g}_k, \qquad 1 \leq k \leq n. \tag{2.24}$$

Для $g \in \mathcal{D}$ обозначим через T_g оператор $T_g\colon\ H \to H,\ \ T_g(f) = f - \langle f, g\rangle g$. Из (2.24) и определения ЧЖА следует, что для любого $f' \in H$, $\|f' - \overline{f}\| < \delta$, выполняется равенство

$$f_n^{PGA}(f') = T_{g_n^{PGA}(f')} \circ T_{g_{n-1}^{PGA}(f')} \circ \dots \circ T_{g_1^{PGA}(f')}(f') = T(f'),$$

где

$$T := T_{\overline{g}_n} \circ T_{\overline{g}_{n-1}} \circ \dots \circ T_{\overline{g}_1}. \tag{2.25}$$

Ясно, что T — непрерывный линейный оператор и его образ $L = \operatorname{Im} T$ является замкнутым линейным подпространством конечной коразмерности. По теореме Банаха — Шаудера об открытом отображении существует $\widetilde{\epsilon} > 0$ такое, что для любого $f'' \in L$, $\|f'' - T(\overline{f})\| < \widetilde{\epsilon}$, найдется элемент $f' \in H$, $\|f' - \overline{f}\| < \delta$, для которого

$$f'' = T(f'). \tag{2.26}$$

Применив лемму 3 для L, $\widetilde{\epsilon}$ и $f = T(\overline{f})$, получим: $\widetilde{f} \in L$, конечное $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и $\delta_0 > 0$. Пусть $\overline{g}_{n+1}$ — элемент $\mathcal{D}_0$ с наименьшим номером. Напомним, что если на каком-то шаге алгоритма супремум достигается на нескольких элементах словаря, то в случае *монотонного выбора элемента словаря* будет выбран элемент с наименьшим номером. (Предполагается, что счетный словарь $\mathcal{D}$ был предварительно занумерован.)

Используя (2.26), определим $f^* \in H$, $\|f^* - f\| < \epsilon$, $\|f^* - \overline{f}\| < \delta$, так, чтобы $\widetilde{f} = T(f^*)$. Выберем такое $\delta^* > 0$, что для любого $f' \in H$, $\|f' - f^*\| < \delta^*$, выполняются неравенства

$$\|f' - \overline{f}\| < \delta, \qquad \|T(f') - \widetilde{f}\| < \delta_0.$$

Тогда в силу первого неравенства и (2.24) имеем $g_k(f') = \overline{g}_k,\ \ 1 \le k \le n$, а в силу второго $g_{n+1}(f') = \overline{g}_{n+1}$. Таким образом, в качестве $\overline{f}$ и δ для $m = n+1$ можно выбрать f^* и δ^*. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Обозначим через F_m, $m \in \mathbb{N}$, множество исходных функций, для которых можно корректно провести $m-1$ шагов ЧЖА, но нельзя провести m-й шаг, т. е.

$$F_m := \left\{f \in H\colon\ \mathcal{D}(f_k^{PGA}(f)) \ne \varnothing,\ \ 1 \le k \le m-1,\ \ \mathcal{D}(f_m^{PGA}(f)) = \varnothing\right\}, \quad m \ge 2.$$

Из леммы 4 вытекает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ множество F_m нигде неплотно. Тогда множество F исходных функций, для которых могут быть корректно проведены все шаги алгоритма, а именно

$$F := \left\{f \in H\colon\ \mathcal{D}(f_m^{PGA}(f)) \ne \varnothing,\ \ m \in \mathbb{N}\right\}$$

удовлетворяет равенству $F = H \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)$ и, следовательно, является дополнением к множеству первой категории. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3 получается из доказательства теоремы 2 и леммы 4 заменой в формуле (2.25) оператора T на оператор

$$T = I - P_M = P_{M^\perp} = P_M^\perp, \quad \text{где} \quad M = \operatorname{span}\{\overline{g}_k\}_{k=1}^n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Friedman J. H, Stuetzle W.** Projection pursuit regression // J. Amer. Statist. Assoc. 1981. Vol. 76, no. 376. P. 817–823.
2. **Schmidt E.** Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. 1 // Math. Ann. (1906–1907). Vol. 63, no. 4. P. 433–476.
3. **Стечкин Б.С., Стечкин С.Б.** Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 2. С. 287–290.
4. **Jones L.** On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression // Ann. Statist. 1987. Vol. 15, no. 2. P. 880–882.

5. **Dubinin V.V.** Greedy Algorithms and Applications // Ph. D. Thesis. University of South Carolina. 1997.
6. **Temlyakov V.N.** Greedy approximation // Acta Numerica. 2008. Is. 17. P. 235–409.
7. **Лившиц Е.Д.** О нижних оценках скорости сходимости жадных алгоритмов // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73, № 6. С. 125–144.
8. **Temlyakov V.N.** Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2000. Vol. 12, no. 2, 3. P. 213–227.
9. **Стечкин С.Б.** Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Review Math. Pures Appl. 1963. Vol. 8, no. 1. P. 5–18.

Лившиц Евгений Давидович
канд. физ.-мат. наук
EverNote Corp., ведущий разработчик
e-mail: livshitz@rambler.ru

Поступила 29.12.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 512.542

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ НЕЧЕТНОГО ИНДЕКСА В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПРОСТЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ЦОКОЛЕМ[1]

Н. В. Маслова

Получена классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах, цоколь которых изоморфен одной из простых ортогональных групп степени не менее 13.

Ключевые слова: конечная группа, почти простая группа, цоколь, ортогональная группа, максимальная подгруппа, нечетный индекс.

N. V. Maslova. Classification of maximal subgroups of odd index in finite groups with simple orthogonal socle.

It is obtained a classification for maximal subgroups of odd index in finite groups whose socle is isomorphic to one of the simple orthogonal groups of degree great or equal than 13.

Keywords: finite group, almost simple group, socle, orthogonal group, maximal subgroup, odd index.

1. Введение

Максимальные подгруппы играют большую роль в теории конечных групп. М. Либеком и Я. Саксломом в [1] и независимо В. Кантором в [2] был получен один из самых сильных результатов последних лет в теории конечных групп подстановок, а именно, было дано описание конечных примитивных групп подстановок нечетной степени. Подгруппа конечной группы G, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами, называется *цоколем* группы G и обозначается через $soc(G)$. Конечная группа называется *почти простой*, если ее цоколь есть неабелева простая группа. Известно, что конечная группа G почти проста тогда и только тогда, когда существует неабелева конечная простая группа L такая, что $L \cong Inn(L) \trianglelefteq G \leq Aut(L)$. В этом случае $L \cong Inn(L) = soc(G)$. Изучение конечных примитивных групп подстановок нечетной степени в [1;2] во многом сведено к изучению максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных почти простых группах. Более того, для каждой конечной почти простой группы G в [1; 2] построено множество подгрупп, которое содержит все максимальные подгруппы нечетного индекса группы G. Однако в случае, когда цоколь группы G является конечной простой знакопеременной или классической группой, не каждая подгруппа из этого множества действительно является максимальной подгруппой нечетного индекса в группе G. Так что классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных почти простых группах оставалась незавершенной.

Пусть G — конечная почти простая группа. Для случая, когда G изоморфна конечной простой классической группе или цоколь $soc(G)$ изоморфен знакопеременной группой степени не менее 5, классификация максимальных подгрупп нечетного индекса группы G получена автором в [3] и [4] соответственно. Для случая, когда цоколь $soc(G)$ изоморфен одной из групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$ или $PSp_n(q)$ при $n \geq 13$, соответствующая классификация анонсирована автором в [5; 6]. Все максимальные подгруппы конечных групп с простым классическим цоколем степени не выше 12 были описаны П. Клейдманом (см. [7, теорема 1.2.2]), но эти результаты не опубликованы и нуждаются в проверке. Сейчас группа британских ученых под руководством Д. Холта заканчивает ревизию результатов Клейдмана. В скором времени они

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324) и гранта УрО РАН для молодых ученых за 2010 г. (проект 80).

планируют выпустить посвященную этому вопросу книгу. Поэтому мы рассматриваем только классические группы степени не менее 13. Цель данной работы — для оставшегося случая конечной группы с простым ортогональным цоколем степени не менее 13 над некоторым полем получить классификацию ее максимальных подгрупп нечетного индекса. Если характеристика этого поля четна и H — максимальная подгруппа нечетного индекса в такой группе G, то $soc(G) \cap H$ — параболическая подгруппа в $soc(G)$ (см. [1; 2]). Параболические подгруппы конечных простых классических групп хорошо изучены в терминах групп лиева типа (см. [8]). Поэтому мы можем рассматривать только случай нечетной характеристики поля.

Приведем более точную формулировку результатов работ [1; 2].

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7; 9; 10].

Пусть G — конечная группа. Наибольшая нормальная p-подгруппа из G обозначается через $O_p(G)$.

Пусть F — конечное поле порядка q нечетной характеристики p, $q = p^l$, $n \geq 13$ — натуральное число и V — векторное пространство размерности n над полем F.

Введем определение конечной простой ортогональной группы пространства V. Группа всех невырожденных линейных преобразований векторного пространства V называется *общей линейной группой* и обозначается через $GL(V)$. Эта группа изоморфна группе $GL_n(q)$ всех невырожденных $n \times n-$матриц над полем F. Ее подгруппа, состоящая из матриц с определителем, равным 1, называется *специальной линейной группой* и обозначается через $SL_n(q)$. Центр Z группы $GL_n(q)$ составляют все ее невырожденные скалярные матрицы, т. е. матрицы вида λE_n, где $\lambda \in F^*$ и E_n — единичная $n \times n-$матрица. Очевидно, $Z \cong F^*$.

Отображение $f : V \times V \to F$ называется *леволинейной формой* на V, если для всех $u, v, w \in V$ и всех $\lambda \in F$ выполняются равенства

$$f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w) \quad \text{и} \quad f(\lambda u, w) = \lambda f(u, w).$$

Леволинейная форма f называется *невырожденной*, если для любого $u \in V$ отображение $v \to f(u, v)$ $(v \in V)$ ненулевое. Аналогично определяется *праволинейная форма*. Форма f называется *билинейной*, если она является одновременно леволинейной и праволинейной. Форма f называется *симметричной*, если для всех $u, v \in V$ выполняется равенство $f(u, v) = f(v, u)$. Для отображения $Q : V \to F$ положим

$$f_Q(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \text{ для всех } x, y \in V.$$

Отображение Q называется *квадратичной формой* на V, если для любых $v \in V$ и $\lambda \in F$ выполняется равенство $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ и f_Q — симметричная билинейная форма на V. Квадратичная форма Q называется *невырожденной*, если соответствующая ей билинейная форма f_Q невырождена.

Отображение $g : V \to V$ называется *полулинейным преобразованием* пространства V, если существует автоморфизм σ_g поля F такой, что для всех $u, v \in V$ и всех $\lambda \in F$ выполняются равенства

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \quad \text{и} \quad g(\lambda u) = \lambda^{\sigma_g} g(u).$$

Полулинейное преобразование g называется *невырожденным*, если $\{v \in V \mid g(v) = 0\} = \{0\}$. Множество всех невырожденных полулинейных преобразований пространства V является группой относительно операции композиции преобразований. Будем обозначать эту группу через $\Gamma L(V)$ или $\Gamma L_n(q)$. Очевидно, $Z \trianglelefteq \Gamma L_n(q)$.

Пусть Q — определенная на пространстве V невырожденная квадратичная форма. В случае нечетного n все такие пространства подобны (см. [7, гл. 2]). В случае четного n определяется знак $\varepsilon \in \{+, -\}$ пространства V, который обозначается через $\operatorname{sign}(V)$. Для каждого невырожденного подпространства U четной размерности m из V определяется также знак $\upsilon = \operatorname{sign}(U)$ [7, гл. 2].

Пусть U — невырожденное подпространство из V. Положим $D(U) = 1$, если определитель ограничения на U симметричной билинейной формы f, определенной на V, является квадратом в поле F, и $D(U) = -1$ в противном случае. Если U — подпространство четной размерности m и знака υ из V, то ввиду [7, предложение 2.5.11]

$$D(U) = D_m^{\upsilon}(q) = \begin{cases} 1, & \text{если } \upsilon = + \text{ и } (q-1)m/4 \text{ четно;} \\ 1, & \text{если } \upsilon = - \text{ и } (q-1)m/4 \text{ нечетно;} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если V является прямой суммой невырожденных ортогональных друг другу подпространств U и W, то $D(V) = D(U) \cdot D(W)$. Если размерности подпространств U и W четны, то $\mathrm{sign}(V) = \mathrm{sign}(U) \cdot \mathrm{sign}(W)$ (в этом случае умножение понимается в обычном смысле "умножения знаков").

Множество $g \in GL_n(q)$ таких, что для всех $u, v \in V$ выполняется равенство

$$Q(gu, gv) = Q(u, v),$$

образует подгруппу в $GL_n(q)$, которая называется *общей ортогональной группой* и обозначается через $O_n(q)$ при нечетном n и через $O_n^{\varepsilon}(q)$ при четном n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Множество $g \in SL_n(q)$ таких, что для всех $u, v \in V$ выполняется равенство

$$Q(gu, gv) = Q(u, v),$$

образует подгруппу в $SL_n(q)$, которая называется *специальной ортогональной группой* и обозначается через $SO_n(q)$ при нечетном n и через $SO_n^{\varepsilon}(q)$ при четном n, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. При нечетном n коммутант группы $SO_n(q)$ обозначается через $\Omega_n(q)$. При четном n коммутант группы $SO_n^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, обозначается через $\Omega_n^{\varepsilon}(q)$. Далее любую из групп $\Omega_n(q)$ и $\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ будем обозначать также через $\Omega_n^{\xi}(q)$, где ξ — пустой символ при нечетном n или $\xi \in \{+, -\}$ при четном n. При $n \geq 13$ соответствующая проективная группа $P\Omega_n^{\xi}(q) = \Omega_n^{\xi}(q)/(\Omega_n^{\xi}(q) \cap Z)$ является простой группой и называется *конечной простой ортогональной группой.*

Множество элементов $g \in \Gamma L_n(q)$ таких, что существуют $\theta_g \in Aut(F)$ и $\lambda_g \in F^*$ такие, что для всех $u, v \in V$ выполняется равенство

$$Q(gu, gv) = \lambda_g Q(u, v)^{\theta_g},$$

образует подгруппу в $\Gamma L_n(q)$, которую обозначают через $\Gamma(V, F, f)$ или, когда соответствующая форма определена однозначно, через $\Gamma O_n(q)$ при нечетном n и через $\Gamma O_n^{\varepsilon}(q)$ при четном n. Естественным образом определяются группы $P\Gamma O_n(q)$ и $P\Gamma O_n^{\varepsilon}(q)$ соответственно. При $n \geq 13$ в случае невырожденной квадратичной формы имеет место равенство $Aut(P\Omega_n^{\xi}(q)) \cong P\Gamma O_n^{\xi}(q)$.

Отображение $\tau : \Gamma O_n^{\xi}(q) \to F^*$ по правилу $\tau(g) = \lambda_g$ индуцирует канонический гомоморфизм $\overline{\tau} : P\Gamma O_n^{\xi}(q) \to F^*/(F^*)^2$. Подробное описание ядра $\ker(\overline{\tau})$ гомоморфизма $\overline{\tau}$ можно найти в [7, § 2.1, § 2.5–§2.7].

Из основного результата [1; 2] следует

Теорема 1. *Если G — конечная группа, q нечетно, $L = L(q) = soc(G)$ — конечная простая ортогональная группа степени не менее 13, V — естественный проективный модуль для L и H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$H = N_G(L(q_0))$, где $q = q_0^t$ и t — простое нечетное число*;

(2) *H — стабилизатор в G невырожденного подпространства из V*;

(3) *$L \cap H$ — стабилизатор в L ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i.*

Заметим, что в случае простой ортогональной группы стабилизатор невырожденного подпространства U пространства V совпадает со стабилизатором ортогонального разложения пространства V в прямую сумму $V = U \bigoplus U^{\perp}$ двух подпространств.

В п. (3) теоремы 1 возможен случай, когда $L \cap H = L$, но для описания всех таких подгрупп H достаточно рассмотреть группу внешних автоморфизмов группы G. Группы внешних автоморфизмов простых ортогональных групп хорошо изучены (см., например, [9]), поэтому далее мы предполагаем, что $L \cap H < L$. Такие максимальные подгруппы в почти простых группах хорошо описываются их пересечениями с цоколем, что видно из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, L — простая группа, $L \trianglelefteq G$ и H — максимальная подгруппа в G такая, что $1 \neq L \cap H < L$. Положим $P = L \cap H$. Тогда $G = LH$, $|G : H| = |L : P|$ и $H = N_G(P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $L \trianglelefteq G$, то $P \trianglelefteq H$ и произведение LH является подгруппой в G. Поскольку $L \cap H < L$, имеем $H < LH$. Но H — максимальная подгруппа в G, поэтому $G = LH$. Теперь по соответствующей теореме о гомоморфизме имеем $LH/L \cong H/P$. Поэтому $|G : H| = |L : P|$.

Так как $P \trianglelefteq H$, имеем $H \leq N_G(P)$. В силу максимальности H получаем, что либо $H = N_G(P)$, либо $G = N_G(P)$. Если $G = N_G(P)$, то $1 \neq P \lhd L$, откуда получаем противоречие с простотой L. $\square$

В п. (1) теоремы 1 подгруппа $L \cap H$ всегда будет подгруппой нечетного индекса в L (см. [1; 2]). В пп. (2) и (3) четность индекса H в G существенно зависит от нескольких параметров, в том числе от n и q.

На основе классификации конечных простых групп М. Ашбахер в [11] описал большое семейство естественных геометрически определенных подгрупп конечных простых классических групп, которое было разбито им на восемь классов C_i $(1 \leq i \leq 8)$, называемых теперь *классами Ашбахера*. Подгруппы $L \cap H$, соответствующие подгруппам H из пп. (1), (2) и (3) теоремы 1, содержатся в классах Ашбахера C_5, C_1 и C_2 соответственно.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех бесконечных последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на $\mathcal{M}$ естественный порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Через ψ обозначим функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность $(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \ldots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$. При этом s_i будем обозначать также через $\psi_i(s)$.

Доказана следующая

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, $L = L(q) = soc(G)$ изоморфна одной из простых ортогональных групп $P\Omega_n(q)$ для нечетного $n \geq 13$ или $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ для четного $n \geq 13$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$, q везде нечетно, V — естественный проективный модуль для L. Подгруппа H, не содержащая цоколь L, является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $H = N_G(P)$, где P — некоторая собственная подгруппа в L, и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$P = N_L(L(q_0))$, где $q = q_0^t$ и t — простое нечетное число*;

(2) *$L = P\Omega_n(q)$, P — стабилизатор в L невырожденного подпространства U четной размерности m пространства V, $D(U) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$;*

(3) *$L = P\Omega_n(q)$, P — стабилизатор в L ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i размерности 1, q — простое число и $q \equiv \pm 3$* (mod 8);

(4) *$L = P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$, P — стабилизатор в L невырожденного подпространства U четной размерности m пространства V и либо $D(U) = D(V) = -1$, $\psi(n-2) \geq \psi(m-2)$ и $(q, m, sign(U)) \neq (3, 2, +)$, либо $D(U) = D(V) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(m)$;*

(5) $L = P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$, P — *стабилизатор в* L *невырожденного подпространства* U *нечетной размерности* m *пространства* V, $D(V) = -1$, $\psi(n-2) \geq \psi(m-1)$ *и* $G \leq \ker(\overline{\tau})$;

(6) $L = P\Omega_n^{\varepsilon}(3)$, $D(V) = -1$, P — *стабилизатор в* L *невырожденного подпространства* U *пространства* V, *где* $dim(U) = 2$ *и* $sign(U) = +$, $P = Y_1 \cap Y_2$, *где* Y_1 *и* Y_2 — *стабилизаторы в* L *различных невырожденных одномерных подпространств из* U, *сопряженные элементом из* G;

(7) $L = P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$, P — *стабилизатор в* L *ортогонального разложения* $V = \bigoplus V_i$ *в прямую сумму изометричных подпространств* V_i *размерности* $m = 2^w \geq 2$, $D(V) = D(V_i) = 1$ *и* $(q, m, sign(U)) \neq (3, 2, -), (5, 2, +)$;

(8) $L = P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$, P — *стабилизатор в* L *ортогонального разложения* $V = \bigoplus V_i$ *в прямую сумму изометричных подпространств* V_i *размерности* 1, q — *простое число*, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ *и* $G \leq \ker(\overline{\tau})$;

(9) $L = P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$, P — *стабилизатор в* L *ортогонального разложения* $V = \bigoplus V_i$ *в прямую сумму изометричных подпространств* V_i *размерности* 2, *где* $(q, sign(V_i)) = (3, -)$ *или* $(5, +)$, *и* $P = Y_1 \cap Y_2$, *где* Y_1 *и* Y_2 — *стабилизаторы в* L *различных ортогональных разложений пространства* V *в прямую сумму изометричных подпространств размерности* 1, *сопряженные элементом из* G.

З а м е ч а н и е. Во всех пунктах теоремы 2, кроме пунктов (6) и (9), подгруппа P является максимальной подгруппой в L. В пунктах (6) и (9) подгруппы $N_G(P)$ являются так называемыми *новинками* (*novelties*), более подробно о них см. в доказательстве теоремы 2.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 2. *Пусть* G — *конечная группа,* $L = soc(G)$ — *простая неабелева группа и* P — *максимальная подгруппа в* L. *Тогда для того, чтобы* $N_G(P)$ *являлась максимальной подгруппой в* G *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $G = N_G(P)L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $P \neq 1$. В противном случае $L =< g, P >=< g >$, где $1 \neq g \in L$; противоречие с тем, что L — неабелева группа.

Необходимость. Если $L \leq N_G(P)$, то $1 \neq P \lhd L$; противоречие с простотой L. Значит, $N_G(P)$ не содержит L, откуда по лемме 1 имеем $G = N_G(P)L$.

Достаточность. Пусть $G = N_G(P)L$. Предположим, что подгруппа $N_G(P)$ не максимальна в G. Тогда в G существует собственная максимальная подгруппа H, строго содержащая $N_G(P)$. Рассмотрим $L \cap H$. Заметим, что $P \leq L \cap N_G(P) \leq L \cap H \leq L$. Поскольку P — максимальная подгруппа в L, то либо $L \cap H = P$, либо $L \cap H = L$. Во втором случае $G = N_G(P)L \leq LH = H$, что противоречит максимальности H в G. Поэтому $H \cap L = P$ и ввиду максимальности H в G имеем $H = N_G(P)$, что противоречит строгому включению $N_G(P) < H$. □

Лемма 3. *Пусть* G — *конечная группа,* $L = soc(G)$ — *простая группа и* P — *собственная немаксимальная подгруппа в* L. *Тогда для того, чтобы* $N_G(P)$ *являлась максимальной подгруппой в* G *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $G = N_G(P)L$ *и для любой подгруппы* Y *такой, что* $P < Y < L$, *выполнялось соотношение* $N_G(P) \nleq N_G(Y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $N_G(P)$ — максимальная подгруппа в G. Равенство $G = N_G(P)L$ доказывается точно так же, как и в лемме 2. Очевидно, что если существует собственная подгруппа Y такая, что $P < Y < L$, и выполняется включение $N_G(P) < N_G(Y)$, то подгруппа $N_G(P)$ не будет максимальной в G.

Достаточность. Пусть $G = N_G(P)L$ и для любой собственной подгруппы Y такой, что $P < Y < L$, выполняется соотношение $N_G(P) \nleq N_G(Y)$. Предположим, что подгруппа $N_G(P)$

не максимальна в G. Тогда в G существует максимальная подгруппа H, строго содержащая $N_G(P)$. Заметим, что $P \leq L \cap N_G(P) \leq L \cap H \leq L$. Если $L \cap H = L$, то $G = N_G(P)L \leq LH = H$, получаем противоречие с тем, что H — собственная подгруппа в G. Если $L \cap H = P$, то в силу максимальности H и леммы 1 получаем $H = N_G(P)$; противоречие с тем, что H строго содержит $N_G(P)$. Значит, $P < L \cap H < L$. Положим $Y = L \cap H$. Тогда в силу максимальности H и леммы 1 имеем $H = N_G(Y)$ и, следовательно, $N_G(P) < N_G(Y)$; противоречие с тем, что для любой собственной подгруппы Y такой, что $P < Y < L$, выполняется соотношение $N_G(P) \not< N_G(Y)$. □

Пусть L — конечная простая группа и P — собственная подгруппа в L. Положим

$$c(L, P) = |Aut(L) : LN_{Aut(L)}(P)|.$$

Лемма 4. *Пусть G — конечная группа, $L = soc(G)$ — простая группа и P — собственная подгруппа в L. Тогда для того, чтобы выполнялось равенство $G = N_G(P)L$ необходимо и достаточно, чтобы каждая подгруппа, сопряженная с P в G, была сопряжена с P в L. В частности, если $c(L, P) = 1$, то $G = N_G(P)L$.*

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 5. *Пусть G — конечная группа, $L = soc(G)$ — простая группа и P — собственная подгруппа нечетного индекса в L. Если $N_G(P)$ — максимальная подгруппа в G, то индекс $|G : N_G(P)|$ нечетен.*

Доказательство. Если $N_G(P)$ — максимальная подгруппа в G, то ввиду лемм 2 и 3 имеем $G = N_G(P)L$. Поэтому по соответствующей теореме о гомоморфизме $|G : N_G(P)| = |N_G(P)L : L| = |L : N_G(P) \cap L|$, откуда $|G : N_G(P)|_2 = |L : N_G(P) \cap L|_2$, а так как $P \leq N_G(P)$, то $|L : N_G(P) \cap L|_2 \leq |L : P|_2 = 1$. Поскольку индекс $|L : P|$ нечетен, имеем $|G : N_G(P)|_2 = |L : P|_2 = 1$. □

Лемма 6. *Пусть G — конечная группа, $L = soc(G)$ — простая группа и P — собственная подгруппа в L. Тогда равенство $G = N_G(P)L$ выполняется тогда и только тогда, когда $G \leq N_{Aut(L)}(P)L$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $g \in G = N_G(P)L$. Тогда $g = g_1 l$, где $g_1 \in N_G(P) \leq N_{Aut(L)}(P)$ и $l \in L$, следовательно, $g \in N_{Aut(L)}(P)L$. Поэтому $G \leq N_{Aut(L)}(P)L$.

Достаточность. Пусть $g \in G \leq N_{Aut(L)}(P)L$. Тогда $g = ul$, где $u \in N_{Aut(L)}(P)$ и $l \in L$. Отсюда $u = gl^{-1} \in GL = G$, следовательно, $u \in G \cap N_{Aut(L)}(P) = N_G(P)$ и $G = N_G(P)L$. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — конечная группа, подгруппа $L = soc(G)$ изоморфна одной из групп $P\Omega_n(q)$ при нечетном $n \geq 13$ или $P\Omega_n^{\varepsilon}(q)$ при четном $n \geq 14$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$ и H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G. Тогда H — одна из подгрупп группы G, указанных в заключении теоремы 1. Положим $P = L \cap H$. Нетрудно понять, что во всех указанных в теореме 1 случаях $P \neq 1$. Ввиду замечания, сделанного после теоремы 1, $P < L$. Значит, по лемме 1 имеем $H = N_G(P)$ и $|G : H| = |L : P|$. Далее рассмотрим каждый пункт заключения теоремы 1 отдельно.

Пусть $H = N_G(L(q_0))$, где $q = q_0^t$ и t — простое нечетное число. Тогда $P = N_L(L(q_0))$. Согласно [7, табл. 3.5.D, 3.5.E, 3.5.F] подгруппа P максимальна в L. Поэтому по лемме 2 для максимальности $N_G(P)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $G = N_G(P)L$. По [7, предложения 4.5.8, 4.5.10] имеем $c(L, P) = 1$, отсюда по лемме 4 подгруппа $N_G(P)$ максимальна в G.

Поскольку ввиду [1] индекс $|L : P|$ нечетен, то по лемме 5 $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса в G. Следовательно, выполняется п. (1) теоремы 2.

Рассмотрим случай $L = P\Omega_n(q)$ при нечетном n.

Пусть H — стабилизатор в G невырожденного подпространства U из V, без ограничения общности будем считать, что размерность U четна. Тогда P — стабилизатор в L того же подпространства U. По [3, теорема 5] индекс $|L : P|$ нечетен тогда и только тогда, когда $D(U) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(\dim(U))$.

Ввиду [7, табл. 3.5.D] P максимальна в L тогда и только тогда, когда $(q, \dim(U), \mathrm{sign}(U)) \neq (3, 2, +)$, при этом $D_2^+(3) = -1$. Кроме того, по [7, предложение 4.1.6] имеем $c(L, P) = 1$. Поэтому ввиду лемм 2, 4 и 5 получаем, что $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса тогда и только тогда, когда $D(U) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(\dim(U))$. Отсюда следует, что выполняется п. (2) теоремы 2.

Пусть $L \cap H$ — стабилизатор в L ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i.

Если $\dim(V_i) = 1$ и q не является простым числом, то имеет место включение $N_G(P) \leq N_G(P_1)$, где P_1 — подгруппа из класса Ашбахера C_5 группы L (см. [7, § 4.2]). Поэтому если $\dim(V_i) = 1$, то считаем q простым числом. Индекс $|L : P|$ нечетен тогда и только тогда, когда $\dim(V_i) = 1$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Доказательство этого вытекает из [3, теорема 10].

Ввиду [7, табл. 3.5.D] подгруппа P максимальна в L тогда и только тогда, когда $(q, \dim(V_i)) \neq (3, 3)$. Кроме того, по [7, предложение 4.2.15] при условии нечетности индекса $|L : P|$ имеем $c(L, P) = 1$. Поэтому ввиду лемм 2, 4 и 5 получаем, что $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса тогда и только тогда, когда $\dim(V_i) = 1$, q — простое число и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Отсюда следует, что выполняется п. (3) теоремы 2.

Рассмотрим случай $L = P\Omega_n^\varepsilon(q)$ при нечетном n и $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Пусть H — стабилизатор в G невырожденного подпространства U из V. Тогда P — стабилизатор в L того же подпространства U. Ввиду [7, табл. 3.5.E, 3.5.F] подгруппа P является максимальной подгруппой в L тогда и только тогда, когда $(q, \dim(U), \mathrm{sign}(U)) \neq (3, 2, +), (3, n-2, \varepsilon)$. Индекс $|L : P|$ нечетен тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:

(i) $\dim(U)$ нечетно, $\psi(n-2) \geq \psi(\dim(U) - 1)$ и $D(V) = -1$;

(ii) $\dim(U)$ четно, $D(U) = -1$, $D(U^\perp) = 1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(\dim(U) - 2)$;

(iii) $\dim(U)$ четно, $D(U) = 1$, $D(U^\perp) = -1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(\dim(U))$;

(iv) $\dim(U)$ четно, $D(U) = D(W) = 1$ и $\psi(n) \geq \psi(\dim(U))$.

Доказательство этого, за исключением случая, когда P — стабилизатор в L ортогонального разложения пространства V в прямую сумму неизометричных подпространств U и $U^\perp$ одинаковой нечетной размерности $n/2$, следует из [3, теорема 6]. Кроме того, в силу равенства $D(V) = D(U) \cdot D(U^\perp)$, если $D(V) = -1$, то либо $D(U) = -1$, либо $D(U^\perp) = -1$. Более того, $D_2^+(3) = -1$ и $D_n^+(3) = -D_{n-2}^+(3)$, поэтому в (ii) и (iii) можно без ограничения общности считать, что $D(U) = D(V) = -1$ и $\psi(n-2) \geq \psi(\dim(U) - 2)$, при этом P — не максимальная подгруппа нечетного индекса в L только в случае $(q, \dim(U), \mathrm{sign}(U)) = (3, 2, +)$.

В исключительном случае, когда P — стабилизатор в L ортогонального разложения пространства V в прямую сумму неизометричных подпространств U и $U^\perp$ одинаковой нечетной размерности $n/2$, индекс $|L : P|$ четен (см. [3, теорема 12]). Но если $\dim(U) = n/2$, условие $\psi(n-2) \geq \psi(n/2 - 1)$ выполняться не может. Действительно, $n/2 - 1 = (n-2)/2$. Пусть i — наименьшее целое неотрицательное число со свойством $\psi_i(n/2 - 1) = 1$. Тогда $\psi_i(n-2) = 1$. Но $n - 2 = (n/2 - 1) + (n/2 - 1)$, и $\psi_k(n/2) = 0$ для $k < i$. Поэтому $\psi_i(n-2) = 0$, следовательно, $\psi(n-2) \ngeq \psi(n/2 - 1)$. Получаем, что индекс $|L : P|$ четен.

Если $\dim(U)$ четно, выполняется одно из утверждений (ii) — (iv) и $(q, \dim(U), \mathrm{sign}(U)) \neq (3, 2, +)$, то P максимальна в L, индекс $|L : P|$ нечетен и ввиду [7, предложение 4.1.6] имеем $c(L, P) = 1$. Поэтому по леммам 2, 4 и 5 получаем, что в этих условиях $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса в G. Отсюда следует, что выполняется п. (4) теоремы 2.

Если $\dim(U)$ нечетно и выполняется утверждение (i), то P максимальна в L, индекс $|L:P|$ нечетен и ввиду [7, предложение 4.1.6] имеем $c(L,P)=2$. Поэтому ввиду лемм 2, 6 и 5 получаем, что в этих условиях $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $G \leq N_{Aut(L)}(P)L$. Из [7, табл. 3.5.G] и доказательства [7, предложение 4.1.6] следует, что $N_{Aut(L)}(P)L = \ker(\overline{\tau})$. Отсюда следует, что выполняется п. (5) теоремы 2.

Пусть $(q, \dim(U), \mathrm{sign}(U)) = (3, 2, +)$. Тогда P не максимальна в L и индекс $|L:P|$ нечетен в том и только том случае, когда $D(V) = -1$. Ввиду [7, предложение 4.1.6] имеем $c(L,P)=1$. Из [7, табл. 3.5.H, предложение 6.1.2] следует, что подгруппа P содержится в двух максимальных подгруппах Y_1 и Y_2 из L, которые являются стабилизаторами различных одномерных подпространств W_1 и W_2 из U таких, что $D(W_1) = 1$ и $D(W_2) = -1$. Более подробное описание подпространств W_i и подгрупп Y_i см. в [7, предложение 6.1.2]. Кроме того, из [7, табл. 3.5.H] следует, что любая максимальная подгруппа в L, содержащая P, сопряжена в L с одной из подгрупп Y_1 или Y_2. Поскольку $q=3$, в U содержится ровно два невырожденных одномерных подпространства, которые ортогональны друг другу. Поэтому $U = W_1 \oplus W_2$, откуда легко следует, что $P = Y_1 \cap Y_2$. Поскольку $D(V) = -1$, ввиду [9] прообраз X подгруппы P в $O_n^{\varepsilon}(3)$ изоморфен группе $2 \times 2 \times 2.P\Omega_{n-2}^{\varepsilon}(3).2^2$, а прообраз Z_i группы Y_i при $i \in \{1,2\}$ в $O_n^{\varepsilon}(q)$ изоморфен группе $2 \times 2 \times P\Omega_{n-1}(3).2$. Имеем $O_2(X) = 2 \times 2 \times 2$ и $O_2(Z_i) = 2 \times 2$, где $i \in \{1,2\}$. Поэтому $X/O_2(Z_i) \cong 2.P\Omega_{n-2}^{\varepsilon}(3).2^2$ и $Z_i/O_2(Z_i) \cong P\Omega_{n-1}(3).2$, где $i \in \{1,2\}$. Из [7, табл. 3.5.H] следует, что подгруппа $2.P\Omega_{n-2}^{\varepsilon}(3).2$ максимальна в $P\Omega_{n-1}^{\varepsilon}(3)$, поэтому P является максимальной подгруппой в Y_i, где $i \in \{1,2\}$. Подгруппы Y_1 и Y_2 не сопряжены в L, но в $P\Gamma_n^{\varepsilon}(q)$ найдется элемент $\overline{\delta}$ такой, что $\overline{\tau}(\overline{\delta}) = -1$ и $\overline{\delta} Y_1 (\overline{\delta})^{-1} = Y_2$. Поэтому ввиду лемм 3, 4 и 5 получаем, что выполняется п. (6) теоремы 2.

Пусть $L \cap H$ — стабилизатор в L ортогонального разложения $V = \bigoplus V_i$ в прямую сумму изометричных подпространств V_i.

Если $\dim(V_i) = 1$ и q не является простым числом, то имеет место включение $N_G(P) \leq N_G(P_1)$, где P_1 — подгруппа из класса Ашбахера C_5 группы L (см. [7, § 4.2]). Поэтому если $\dim(V_i) = 1$, то считаем q простым числом. Индекс $|L:P|$ нечетен тогда и только тогда, когда либо $\dim(V_i) = 2^w$ и $D(V) = D(V_i)$, либо $\dim(V_i) = 1$ и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Доказательство этого вытекает из [3, теорема 11].

Ввиду [7, табл. 3.5.E, 3.5.F] подгруппа P является максимальной подгруппой в L тогда и только тогда, когда $(q, \dim(V_i), \mathrm{sign}(V_i)) \neq (3,2,\pm), (5,2,+)$. Заметим, что $D_2^-(3) = D_2^+(5) = 1$ и $D_2^+(3) = -1$. Кроме того, по [7, предложение 4.2.11, 4.2.15] при условии нечетности индекса $|L:P|$ имеем $c(L,P) = 1$ при $\dim(V_i) > 1$ и $c(L,P) = 2$ при $\dim(V_i) = 1$.

Если $\dim(V_i) = 2^w$, $D(V) = D(V_i)$ и $(q, \dim(V_i), \mathrm{sign}(V_i)) \neq (3,2,-), (5,2,+)$, то P максимальна в L, индекс $|L:P|$ нечетен и ввиду [7, предложение 4.2.11] имеем $c(L,P)=1$. Поэтому по леммам 2, 4 и 5 получаем, что в этих условиях $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса в G. Отсюда следует, что выполняется п. (7) теоремы 2.

Если $\dim(V_i) = 1$, q — простое число и $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, то P максимальна в L, индекс $|L:P|$ нечетен и ввиду [7, предложение 4.2.15] имеем $c(L,P)=2$. Поэтому ввиду лемм 2, 6 и 5 получаем, что в этих условиях $N_G(P)$ является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда $G \leq N_{Aut(L)}(P)L$. Из [7, табл. 3.5.G] и доказательства [7, предложение 4.2.15] следует, что $N_{Aut(L)}(P)L = \ker(\overline{\tau})$. Отсюда следует, что выполняется п. (8) теоремы 2.

Пусть $(q, \dim(V_i), \mathrm{sign}(V_i))$ равно $(3,2,-)$ или $(5,2,+)$. Тогда P не максимальна в L и индекс $|L:P|$ нечетен. Ввиду [7, предложеие 4.2.11] имеем $c(L,P)=1$. Из [7, табл. 3.5.H] следует, что подгруппа P содержится в двух максимальных подгруппах Y_1 и Y_2 из L, которые являются стабилизаторами ортогональных разложений $V = \bigoplus(W_{2i-1}^1 \oplus W_{2i}^1)$ и $V = \bigoplus(W_{2i-1}^2 \oplus W_{2i}^2)$ соответственно в прямую сумму изометричных подпространств размерности 1, где $V_i = (W_{2i-1}^j \oplus W_{2i}^j)$ при $1 \leq j \leq 2$, причем $D(W_k^1) = 1$ и $D(W_k^2) = -1$. Более подробное описание подпространств W_i и подгрупп Y_i см. в [7, предложение 6.2.11]. Кроме того, из [7, табл. 3.5.H,] следует, что любая максимальная подгруппа в L, содержащая P, сопряжена в L с одной из подгрупп Y_1 или Y_2. Прообраз X подгруппы P в $O_n^\varepsilon(q)$ изоморфен группе $D_8 \wr S_{n/2}$, а прообраз Z_i группы Y_i при $i \in \{1,2\}$ в $O_n^\varepsilon(q)$ изоморфен группе $2 \wr S_n$. Имеем $O_2(X) \cong D_8 \times D_8 \times \ldots \times D_8 = (D_8)^{n/2}$ и $O_2(Z_i) \cong 2^n$, где $i \in \{1,2\}$. Поэтому $X/O_2(Z_i) \cong 2 \wr S_{n/2}$ и $Z_i/O_2(Z_i) \cong S_n$, где $i \in \{1,2\}$. Ввиду [12] $X/O_2(Z_i)$ является максимальной подгруппой в $Z_i/O_2(Z_i)$, где $i \in \{1,2\}$, поэтому P является максимальной подгруппой в Y_i, где $i \in \{1,2\}$. Отсюда следует, что $P = Y_1 \cap Y_2$. Подгруппы Y_1 и Y_2 не сопряжены в L, но в $P\Gamma_n^\varepsilon(q)$ найдется элемент $\overline{\delta}$ такой, что $\overline{\tau}(\overline{\delta}) = -1$ и $\overline{\delta}Y_1(\overline{\delta})^{-1} = Y_2$. Поэтому ввиду лемм 3, 4 и 5 получаем, что выполняется п. (9) теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Автор благодарит А. С. Кондратьева за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
2. **Kantor W.M.** Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. Vol. 106, no. 1. P. 15–45.
3. **Маслова Н. В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
4. **Маслова Н. В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 182–184.
5. **Маслова Н. В.** Максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах с простым линейным или унитарным цоколем степени не менее 13 // Алгебра и ее приложения: Тр. Междунар. алгебр. конф. Нальчик: Кабардино-Балк. ун-т, 2009. С. 80–82.
6. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым симплектическим цоколем степени не менее 13 // Мальцевские чтения: тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск: ИМ и НГУ, 2009. С. 69.
7. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 p.
8. **Кондратьев А. С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 1. С. 57–96.
9. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
11. **Aschbacher M.** On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. Math. 1984. Vol. 76, no. 3. P. 469–514.
12. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.

Маслова Наталья Владимировна
старший математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 20.08.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.82

О НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. В. Мироненко

Рассматривается неравенство Джексона — Стечкина, оценивающее величину наилучшего равномерного приближения непрерывной функции алгебраическими многочленами на отрезке через значения модуля непрерывности приближаемой функции. Доказывается вариант неравенства с модулем непрерывности второго порядка и явным указанием аргумента модуля непрерывности и константы.

Ключевые слова: неравенство Джексона, приближение алгебраическими полиномами, модуль непрерывности.

A. V. Mironenko. On the Jackson–Stechkin inequality for algebraic polynomials.

The Jackson–Stechkin inequality is considered, which estimates the value of the best uniform approximation of a continuous function by algebraic polynomials on a closed interval in terms of values of the modulus of continuity of the approximated function. A variant of the inequality with second-order modulus of continuity and explicit specification of the argument of the modulus of continuity and the constant is proved.

Keywords: Jackson inequality, approximation by algebraic polynomials, modulus of continuity.

Введение

Пусть $C[a,b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций со стандартной нормой $\|f\| = \|f\|_{C[a,\,b]} = \max\{|f(x)|\colon\ x\in[a,b]\}$.

О п р е д е л е н и е. *Величиной наилучшего приближения* (ВНП) функции $f \in C[a,b]$ произвольным классом функций Q называется величина

$$E(f;Q) = \inf_{g\in Q}\|f-g\|.$$

Любая функция $g_*\in Q$, удовлетворяющая условию $\|f-g_*\| = E(f;Q)$, называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) для функции f в классе функций Q.

Обозначим через $\omega_m(f,h)$ классический модуль непрерывности функции f порядка m:

$$\omega_m(f,h) = \sup\{|\Delta_\delta^m(f,x)|\colon\ \delta\in[0,h];\ x\in[a,b-m\delta]\},$$

где $\Delta_\delta^m(f,x)$ есть конечная разность порядка m с шагом δ в точке x:

$$\Delta_\delta^m(f,x) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k f(x+(m-k)\delta).$$

В 1911 г. американский математик Д. Джексон доказал [1], что для любой 2π-периодической непрерывной функции f величина $E(f;T^n)$, т. е. ВНП функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n стремится к нулю (при $n\to\infty$) не медленнее, чем $\omega_1\Big(f,\dfrac{1}{n+1}\Big)$,

[1]Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” при поддержке УрО РАН (проект 09-П-1-1013); при поддержке УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 09-С-1-1007; а также при поддержке РФФИ (проект 08-01-00325).

а именно:

$$E(f;T^n) \leqslant \widetilde{\mathcal{K}}_1 \omega_1\left(f, \frac{1}{n+1}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Здесь константа $\widetilde{\mathcal{K}}_1 > 0$ не зависит от f и n.

Аналог этого утверждения для модулей непрерывности более высоких порядков

$$E(f;T^n) \leqslant \widetilde{\mathcal{K}}_r\, \omega_r\left(f, \frac{1}{n+1}\right), \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

(константа $\widetilde{\mathcal{K}_r}$ зависит только от r, $0 < \widetilde{\mathcal{K}}_r < \infty$) установили А. Зигмунд ($r = 2$, $\omega_2\,(f, \delta) = \delta$, $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$) [2], Н. И. Ахиезер ($r = 2$, произвольное ω_2) [3] и С. Б. Стечкин ($r \geqslant 3$) [4].

Неравенство (1) при $r = 1$ в дальнейшем будем называть неравенством Джексона, а в общем случае — неравенством Джексона — Стечкина.

Наряду с качественной картиной большой интерес в этой области представляют точные результаты. Первое неравенство Джексона с точной константой (в пространстве периодических функций $C[0, 2\pi)$) установил Н. П. Корнейчук (1962) [5]:

Теорема 1. *Пусть дана непрерывная 2π-периодическая функция f. Тогда величина наилучшего равномерного приближения функции f тригонометрическими полиномами степени n оценивается следующим образом*:

$$E(f, T^n) \leqslant 1 \cdot \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right), \tag{2}$$

причем константу 1 *в этом неравенстве нельзя уменьшить одновременно для всех f и n.*

Позднее он обобщил этот результат [6], показав, что

$$E(f, T^n) \leqslant \frac{m+1}{2}\, \omega_1\left(f, \frac{\pi}{m(n+1)}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Короткое доказательство этой формулы дано В. Ф. Бабенко и В. В. Шалаевым в [7].

Изучение точных констант в неравенствах Джексона — Стечкина имеет богатую историю. Отметим одно из недавних значительных продвижений в этом направлении — [8].

Нас будет интересовать задача равномерного приближения функций алгебраическими полиномами на отрезке. Уже в работе [5] Н. П. Корнейчук перенёс полученное им неравенство (2) на случай приближения алгебраическими многочленами при помощи замены переменных $x = \cos t$. В результате им была установлена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда*

$$E(f; P^n) \leqslant \omega_1\left(f, \frac{\pi}{2}\frac{b-a}{(n+1)}\right).$$

Также доказательство этого результата можно найти в [9]. Позднее теорема 2 была уточнена, а именно получены поточечные оценки.

Теорема 3. *Пусть $f \in C[-1, 1]$, тогда существует последовательность полиномов $p_n(t)$ степени n такая, что при $n \to \infty$ равномерно относительно $t \in [-1, 1]$*

$$|f(t) - p_n(t)| \leqslant \omega_1\left(f, \frac{\pi\sqrt{1-t^2}}{n+1}\right) + o\left(\omega_1\left(f, \frac{1}{n+1}\right)\right).$$

Если $\omega_1(f, h)$ — вогнутый, то в неравенстве перед $\omega_1\left(f, \dfrac{\pi\sqrt{1-t^2}}{n+1}\right)$ можно поставить множитель $1/2$.

Это утверждение приведено в монографии Н. П. Корнейчука [10, предложение 6.2.8] со ссылкой на его совместные с А. И. Половиной работы [11–13].

В случае модулей непрерывности старших порядков в работах Ю. А. Брудного [14; 15] обобщаются результаты А. Ф. Тимана [16], В. К. Дзядыка [17] и Г. Фройда [18]. Это обобщение он сформулировал в виде следующих двух теорем.

Теорема 4. *Пусть функция f задана на отрезке $[-1,1]$ и ограничена, тогда при любых натуральных r и $n \geqslant r-1$ существует полином $p_n(t)$ степени не выше n такой, что*

$$|f(t)-p_n(t)| \leqslant A_r\omega_r\left(f, \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Здесь A_r — некая константа, зависящая только от r.

Теорема 5. *Пусть функция f задана на отрезке $[0,1]$ и ограничена, тогда при любых натуральных r и $n \geqslant r-1$ существует полином $p_n(t)$ степени не выше n такой, что*

$$\|f(t)-p_n(t)\| \leqslant B_r\omega_r\left(f, \frac{1}{n+1}\right).$$

Здесь B_r — некая константа, зависящая только от r.

Чуть позднее теорема 4 была уточнена независимо С. А. Теляковским [19] и И. Е. Гопенгаузом [20] для случая модуля непрерывности первого порядка.

Теорема 6. *Пусть непрерывная функция f задана на отрезке $[-1,1]$, тогда для каждого n существует полином $p_n(t)$ степени не выше n такой, что*

$$|f(t)-p_n(t)| \leqslant B_1\,\omega_1\left(f, \frac{\sqrt{1-t^2}}{n}\right).$$

Здесь B_1 — некая константа.

Как мы видим, в теоремах 4, 5 в случае модуля непрерывности второго порядка есть неопределённость в явном значении константы. Это не позволяет непосредственно использовать неравенство Джексона — Стечкина, а даёт лишь порядковую информацию о поведении ВНП при росте степени полинома.

Основной целью данной работы является получение неравенства Джексона — Стечкина с явно указанными константой и аргументом. Доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $f \in C[a,b]$. Тогда при $n \geqslant 1$*

$$E(f;P^n) \leqslant 5\,\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{8}}\frac{b-a}{2}\frac{1}{n+1}\right).$$

1. Вспомогательные утверждения

Нам понадобятся классы функций, заданные ограничением на модуль производной порядка n. Определим их. Через $AC^{n-1}[a,b]$ обозначим подкласс функций из $C[a,b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$. Пусть число $M>0$, через $M\mathcal{D}^n$ обозначим следующий класс функций:

$$M\mathcal{D}^n = \left\{ g \in AC^{n-1}[a,b] : \ \left|g^{(n)}(x)\right| \leqslant M \text{ всюду, где } g^{(n)} \text{ — существует} \right\}.$$

При $M = 1$ класс $M\mathcal{D}^n$ будем обозначать через $\mathcal{D}^n$.

В силу замкнутости и локальной компактности класса $\mathcal{D}^n$ для любой непрерывной функции f хотя бы один ЭНП в этом классе всегда существует, но не всегда он единствен. Альтернансный критерий ЭНП в классе $\mathcal{D}^n$ можно найти, например, в работе [21].

Приведём полезное утверждение, установленное С. Б. Стечкиным [4].

Лемма. *Пусть k — натуральное число, $\delta > 0$, $\eta > 0$. Тогда*

$$\omega_k(f,\eta) \leqslant \frac{(\delta+\eta)^k \omega_k(f,\delta)}{\delta^k}.$$

Если, кроме того, $0 < \delta < \eta$, то

$$\frac{\omega_k(f,\eta)}{\eta^k} \leqslant 2^k \frac{\omega_k(f,\delta)}{\delta^k}. \tag{3}$$

При доказательстве теоремы 1 Н. П. Корнейчук показал, что для любой точки $h_0 \in [0, b-a]$ можно подобрать константу $M > 0$ таким образом, что будет выполняться неравенство

$$\sup_{h\in[0,b-a]} \Big[\omega_1(f,h) - Mh\Big] \leqslant 2\omega_1(f,h_0) - Mh_0.$$

Докажем аналог этого утверждения для модуля непрерывности второго порядка.

Теорема 8. *Пусть $f \in C[a,b]$, тогда для любой точки u_0 из интервала $\Big(0, \dfrac{b-a}{2}\Big]$ существует константа M_0 такая, что справедлива оценка*

$$\sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Big[\omega_2(f,h) - M_0 h^2\Big] \leqslant 5\omega_2(f,u_0) - M_0 u_0^2. \tag{4}$$

Если же функция f такова, что величина $\omega_2(f,h)/h^2$ не возрастает с ростом h, то имеет место более точная оценка

$$\sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Big[\omega_2(f,h) - M_0 h^2\Big] \leqslant 2\omega_2(f,u_0) - M_0 u_0^2. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала первое утверждение теоремы. Положим

$$M_0 = 4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}.$$

Тогда неравенство (4) примет вид

$$\sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Big[\omega_2(f,h) - 4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\Big] \leqslant 5\omega_2(f,u_0) - 4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}u_0^2 = \omega_2(f,u_0).$$

Рассмотрим два случая: $h \leqslant u_0$ и $h > u_0$.

В первом случае имеем

$$\sup_{h\in[0,u_0]} \Big[\omega_2(f,h) - 4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\Big] \leqslant \sup_{h\in[0,u_0]} \Big[\omega_2(f,u_0) - 4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\Big]$$

$$= \omega_2(f,u_0) \sup_{h\in[0,u_0]} \Big[1 - 4\frac{h^2}{u_0^2}\Big] \leqslant \omega_2(f,u_0).$$

Во втором случае применим соотношение (3) для оценки сверху величины $\omega_2(f,h)$:

$$\sup_{h\in\left(u_0,\frac{b-2}{2}\right]}\left[\omega_2(f,h)-4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\right]\leqslant\sup_{h\in\left(u_0,\frac{b-2}{2}\right]}\left[2^2\frac{h^2}{u_0^2}\omega_2(f,u_0)-4\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\right]$$

$$=\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}\sup_{h\in\left(u_0,\frac{b-2}{2}\right]}\left[2^2h^2-4h^2\right]=0<\omega_2(f,u_0).$$

Теперь докажем второе утверждение теоремы. Положим

$$M_0=\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}.$$

Тогда неравенство (5) примет вид

$$\sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]}\left[\omega_2(f,h)-\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\right]\leqslant 2\omega_2(f,u_0)-\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}u_0^2=\omega_2(f,u_0).$$

Так же как при доказательстве первого утверждения теоремы, в случае $h\leqslant u_0$ получаем

$$\sup_{h\in[0,u_0]}\left[\omega_2(f,h)-\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\right]\leqslant\omega_2(f,u_0)\sup_{h\in[0,u_0]}\left[1-\frac{h^2}{u_0^2}\right]\leqslant\omega_2(f,u_0).$$

При $h>u_0$ в силу условия монотонного невозрастания $\dfrac{\omega_2(f,h)}{h^2}$ имеем

$$\frac{\omega_2(f,h)}{h^2}\leqslant\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2},$$

и тогда

$$\sup_{h\in\left(u_0,\frac{b-2}{2}\right]}\left[\omega_2(f,h)-\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\right]\leqslant\sup_{h\in\left(u_0,\frac{b-2}{2}\right]}\left[\frac{h^2}{u_0^2}\omega_2(f,u_0)-\frac{\omega_2(f,u_0)}{u_0^2}h^2\right]=0<\omega_2(f,u_0).$$

Теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 7

При доказательстве теоремы 1 Н. П. Корнейчук использовал метод промежуточного приближения классом функций с ограниченной первой производной, который можно выразить соотношением

$$E(f;T^n)\leqslant E\big(f;M\mathcal{D}^1\big)+E\big(M\mathcal{D}^1;T^n\big)\,,$$

справедливым для любого числа $M>0$. При доказательстве теоремы 7 мы воспользуемся идеей Н. П. Корнейчука и применим метод промежуточного приближения классом $M\mathcal{D}^2$:

$$E(f;P^n)\leqslant E\big(f;M\mathcal{D}^2\big)+E\big(M\mathcal{D}^2;P^n\big)\,. \tag{6}$$

Н. П. Корнейчук установил следующее полезное соотношение между ВНП и модулем непрерывности приближаемой функции.

Теорема 9. *Пусть* $f\in C[a,b]\setminus M\mathcal{D}^1$. *Тогда*

$$E\big(f;M\mathcal{D}^1\big)=\frac{1}{2}\sup_{h\in[0,\,b-a]}\Big[\omega_1(f,h)-Mh\Big].$$

В случае класса $\mathcal{D}^2$ подобное равенство уже не имеет место. В работах [22; 23] был получен аналог теоремы 9 для класса $M\mathcal{D}^2$, приводимый здесь в виде следующей теоремы.

Теорема 10. *Пусть $f \in C[a,b] \setminus M\mathcal{D}^2$. Тогда*

$$E\bigl(f; M\mathcal{D}^2\bigr) < 1 \cdot \sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Bigl[\omega_2(f,h) - Mh^2\Bigr].$$

Здесь константу 1 *в правой части неравенства уменьшить нельзя.*

Осталось найти оценку $E\bigl(M\mathcal{D}^2; P^n\bigr)$, т. е. ВНП класса $M\mathcal{D}^2$ пространством алгебраических полиномов. Фактически это означает, что надо найти (или хотя бы оценить сверху) соответствующую алгебраическую константу Фавара.

Тематика алгебраических констант Фавара слабо изучена. Известно несколько значений этих констант первого порядка (т. е. оценки ВНП класса $M\mathcal{D}^1$ полиномами небольших степеней). Известно, что в целом эти константы меньше соответствующих тригонометрических констант Фавара и в пределе по n стремятся к ним. Известно также большое количество порядковых оценок, содержащихся в классических работах С. М. Никольского 1940-х г., а также в более поздних работах В. Н. Темлякова, Р. М. Тригуба, В. П. Моторного и др. Однако все они содержат неопределённость в виде того или иного остаточного члена.

Поскольку нам понадобятся лишь алгебраические константы Фавара второго порядка, то для наших целей будет достаточно следующего утверждения из [9, гл. 3, § 2, лемма 1].

Теорема 11. *Пусть $f \in M\mathcal{D}^2$, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$E(f; P^n) \leqslant \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{M}{(n+1)^2}.$$

Эта же формула (а также некоторое её обобщение на классы $M\mathcal{D}^m$) содержится в более поздней работе австрийского математика Г. Зинвеля [24]. Множитель $\pi^2/8$ есть тригонометрическая константа Фавара второго порядка. На самом деле, вместо $\pi^2/8$ в формуле должна стоять алгебраическая константа Фавара, т. е. некоторая зависящая от n величина, причем строго меньшая, чем $\pi^2/8$.

Теперь мы можем легко доказать основное утверждение данной работы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Воспользуемся неравенством (6):

$$E(f; P^n) \leqslant E\bigl(f; M\mathcal{D}^2\bigr) + E\bigl(M\mathcal{D}^2; P^n\bigr).$$

Если $f \in C[a,b] \setminus M\mathcal{D}^2$, то по теореме 10

$$E\bigl(f; M\mathcal{D}^2\bigr) < \sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Bigl[\omega_2(f,h) - Mh^2\Bigr],$$

а если $f \in M\mathcal{D}^2$, то $\sup\limits_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Bigl[\omega_2(f,h) - Mh^2\Bigr] = \omega_2(f,0) = 0$ и

$$0 = E\bigl(f; M\mathcal{D}^2\bigr) \leqslant \sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \Bigl[\omega_2(f,h) - Mh^2\Bigr].$$

По теореме 11 при $n \geqslant 1$

$$E\bigl(M\mathcal{D}^2; P^n\bigr) \leqslant \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{M}{(n+1)^2}.$$

Тогда для любой константы M справедливо неравенство

$$E(f;P^n) \leqslant \sup_{h\in\left[0,\frac{b-a}{2}\right]} \left[\omega_2(f,h) - Mh^2\right] + \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \frac{M}{(n+1)^2}.$$

Применив теорему 8 для точки $u_0 = \dfrac{\pi}{\sqrt{8}}\dfrac{b-a}{2}\dfrac{1}{n+1}$, получаем, что существует константа M_0 такая, что

$$E(f;P^n) \leqslant 5\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{8}}\frac{b-a}{2}\frac{1}{n+1}\right) - M_0\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{M_0}{(n+1)^2} = 5\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{8}}\frac{b-a}{2}\frac{1}{n+1}\right).$$

Теорема доказана.

Заключение

Отметим, что если при доказательстве теоремы 7 воспользоваться второй частью теоремы 8, то при соответствующих дополнительных условиях на приближаемую функцию можно получить более точное неравенство, а именно верна следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть функция $f \in C[a,b]$ такая, что величина $\omega_2(f,h)/h^2$ не возрастает с ростом h. Тогда при $n \geqslant 1$*

$$E(f;P^n) \leqslant 2\,\omega_2\left(f, \frac{\pi}{\sqrt{8}}\frac{b-a}{2(n+1)}\right).$$

Также необходимо отметить, что любое уточнение алгебраической константы Фавара в теореме 11 автоматически даст уменьшение аргумента модуля непрерывности при сохранении константы перед ним в теореме 7, т. е. позволит уточнить её.

Кроме того, в работе [25] показано, что аналога теоремы 10 (одной из ключевых при доказательстве теоремы 7) в случае класса $\mathcal{D}^3$ не может существовать, поэтому в чистом виде применить используемый здесь метод для случая модуля непрерывности третьего порядка невозможно. Вопрос о применимости метода для случая модулей непрерывности более высоких порядков остается открытым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Jackson D.** Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung: dis. Göttingen, 1911.
2. **Zygmund A.** Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 47–76.
3. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
4. **Стечкин С. Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15. С. 219–242.
5. **Корнейчук Н. П.** Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 514–515.
6. **Корнейчук Н. П.** О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки. 1982. Т. 32, вып. 5. С. 669–674.
7. **Бабенко В. Ф., Шалаев В. В.** Об оценках наилучшего приближения, вытекающих из критерия Чебышева // Мат. заметки. 1991. Т. 49, вып. 4. С. 148–150.
8. **Foucart S., Kryakin Y., Shadrin A.** On the exact constant in the Jackson — Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. Vol. 29, no. 2. P. 157–179.
9. **Даугавет И. К.** Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 184 с.

10. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
11. **Корнейчук Н. П., Половина А. И.** О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, № 2. С. 281–283.
12. **Корнейчук Н. П., Половина А. И.** О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Мат. заметки. 1971. Т. 9, вып. 4. С. 441–447.
13. **Корнейчук Н. П., Половина А. И.** О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. 1972. Т. 24, № 3. С. 328–340.
14. **Брудный Ю. А.** Обобщение одной теоремы А. Ф. Тимана // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 6. С. 1237–1240.
15. **Брудный Ю. А.** Приближение функций алгебраическими многочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 32. С. 780–787.
16. **Тиман А. Ф.** Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 1. С. 17–20.
17. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
18. **Freud G.** Über die Approximation reelen stetiger Funktionen durch gewöhnliche Polynome // Math. Ann. 1959. Vol. 137, no. 1. P. 17–25.
19. **Теляковский С. А.** Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами // Мат. сб. 1966. Т. 70, № 2. С. 252–265.
20. **Гопенгауз И. Е.** К теореме А. Ф. Тимана о приближении функций многочленами на конечном отрезке // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 163–172.
21. **Мироненко А. В.** Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной // Мат. заметки. 2003. Т. 74, вып. 5. С. 696–712.
22. **Мироненко А. В.** Оценка величины наилучшего приближения классом функций с ограниченной второй производной // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 842–858.
23. **Мироненко А. В.** Приближение классом функций с ограниченной второй производной // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 583–594.
24. **Sinwel H. F.** Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials // J. Approx. Theory. 1981. Vol. 32, no. 1. P. 1–8.
25. **Мироненко А. В.** Об оценке равномерного уклонения от класса функций с ограниченной третьей производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 145–152.

Мироненко Александр Васильевич
Поступила 1.05.2010
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: a_mironenko@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.86

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО МЕЖДУ РАВНОМЕРНЫМИ НОРМАМИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА И ЕГО ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ НА КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ОКРУЖНОСТЯХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А. В. Парфененков

На классе $\mathcal{P}_n^*$ алгебраических многочленов комплексного переменного степени не выше n с комплексными коэффициентами и вещественным свободным членом изучается оценка равномерной нормы многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n^*$ на окружности $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = r\}$ радиуса $r > 1$ через норму его вещественной части на единичной окружности Γ_1. Точнее, исследуется наилучшая константа $\mu(r,n)$ в неравенстве $\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \leq \mu(r,n)\|\mathrm{Re}\, P_n\|_{C(\Gamma_1)}$. Получены необходимые и достаточные условия того, что $\mu(r,n) = r^n$.

Ключевые слова: неравенства для алгебраических многочленов, равномерная норма, окружность комплексной плоскости.

A. V. Parfenenkov. Exact inequality between uniform norms of an algebraic polynomial and its real part on concentric circles in the complex plane.

In the class $\mathcal{P}_n^*$ of algebraic polynomials of a complex variable of degree at most n with complex coefficients and a real constant term, we estimate the uniform norm of a polynomial $P_n \in \mathcal{P}_n^*$ on the circle $\Gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ of radius $r > 1$ in terms of the norm of its real part on the unit circle Γ_1. More precisely, we study the best constant $\mu(r,n)$ in the inequality $\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \leq \mu(r,n)\|\mathrm{Re}\, P_n\|_{C(\Gamma_1)}$. Necessary and sufficient conditions for the equality $\mu(r,n) = r^n$ are found.

Keywords: inequalities for algebraic polynomials, uniform norm, circle in the complex plane.

1. Введение

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть пространство алгебраических многочленов

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

комплексного переменного степени не выше $n \geq 0$ с комплексными коэффициентами; выделим в нем класс многочленов

$$\mathcal{P}_n^* = \{P_n \in \mathcal{P}_n : \ P_n(0) \in \mathbb{R}\}$$

с вещественным свободным коэффициентом. Обозначим через Γ_r окружность радиуса $r > 0$ с центром в начале координат комплексной плоскости.

Основной целью данной работы является изучение при $r > 1,\ n \in \mathbb{N}$ наилучшей (наименьшей возможной) константы $\mu(r,n)$ в неравенстве

$$\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \leq \mu(r,n)\|\mathrm{Re}\, P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n^*. \tag{1.2}$$

Отметим сразу, что многочлен z^n, как нетрудно видеть, дает оценку снизу $\mu(r,n) \geq r^n$.

В настоящее время имеется большое число результатов по точным неравенствам для алгебраических многочленов на комплексной плоскости и родственным проблемам для тригонометрических полиномов на периоде, см. [1–3]. Приведем некоторые из известных результатов, имеющих прямое отношение к тематике настоящей работы. При $r \geq 1$ в $\mathcal{P}_n$ имеет место следующее классическое (точное) неравенство

$$\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \leq r^n \|P_n\|_{C(\Gamma_1)};$$

это неравенство является следствием принципа максимума модуля аналитической функции. В $\mathcal{P}_n$ выполняется также точное неравенство С. Н. Бернштейна

$$\|P_n'\|_{C(\Gamma_1)} \le n\|P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{1.3}$$

В 1928 г. Г. Сеге [4] получил результат, усиливающий неравенство Бернштейна (1.3), а именно он доказал (точное) неравенство

$$\|P_n'\|_{C(\Gamma_1)} \le n\|\operatorname{Re} P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{1.4}$$

В 1993 г. Л. В. Тайков [5] получил для тригонометрических полиномов результат, который в терминах алгебраических многочленов означает, что при

$$(r^2-1)r^n - 2r \ge 0 \tag{1.5}$$

имеет место следующее точное неравенство:

$$\|\operatorname{Im} P_n\|_{C(\Gamma_r)} \le r^n\|\operatorname{Re} P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n^*. \tag{1.6}$$

В работе автора [6] установлено, что при $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$r^{n+2} - r^n - 3r^2 - 4r + 1 \ge 0, \tag{1.7}$$

справедливо точное неравенство

$$\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \le r^n\|\operatorname{Re} P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n, \tag{1.8}$$

т. е. при выполнении условия (1.7) наилучшая константа в неравенстве (1.2) имеет значение $\mu(r,n) = r^n$.

Отметим, что во всех вышеприведенных неравенствах экстремальным многочленом оказался многочлен cz^n.

В настоящей работе будут приведены необходимые и достаточные условия на порядок полиномов n и параметр $r > 1$ для того, чтобы $\mu(r,n) = r^n$ (т. е. для того, чтобы многочлен cz^n являлся экстремальным в (1.2)).

Результаты Г. Сеге (1.4), Л. В. Тайкова (1.6) и автора (1.8) получены с использованием квадратурных формул. В 1935 г. С. Н. Бернштейн [7], используя принципиально другой подход, получил следующий результат.

Пусть $\mathcal{T}_n$ есть пространство тригонометрических полиномов

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) \tag{1.9}$$

степени не выше $n \ge 0$ с вещественными коэффициентами; здесь и в дальнейшем $b_0 = 0$. Двум наборам вещественных чисел

$$\Lambda_n = \{\lambda_j\}_{j=0}^n, \qquad \lambda_0 > 0, \qquad M_n = \{\mu_j\}_{j=0}^n, \qquad \mu_0 = \mu_n = 0, \tag{1.10}$$

сопоставим тригонометрический полином

$$\Psi_n(\varphi) = \Psi_n(\Lambda_n, M_n, \varphi) = \lambda_0 + \lambda_n \cos n\varphi + 2\sum_{j=1}^{n-1} \big[\lambda_j \cos j\varphi - \mu_j \sin j\varphi\big]. \tag{1.11}$$

С помощью вещественного числа α и наборов коэффициентов (1.10) построим в $\mathcal{T}_n$ линейный оператор $F_\alpha = F_{\alpha,\Lambda_n,M_n}$, который тригонометрическому полиному f вида (1.9) сопоставляет тригонометрический полином

$$F_\alpha f(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\lambda_{n-\nu} A_\nu(t,f,\alpha) + \mu_{n-\nu} B_\nu(t,f,\alpha)\right), \tag{1.12}$$

где

$$A_\nu(t,f,\alpha) = a_\nu \cos(\nu t + \alpha) + b_\nu \sin(\nu t + \alpha),$$
$$B_\nu(t,f,\alpha) = b_\nu \cos(\nu t + \alpha) - a_\nu \sin(\nu t + \alpha).$$

Теорема A (С. Н. Бернштейн [7]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Неравенство*

$$\|F_\alpha f\|_{C[0,2\pi]} \le \lambda_0 \|f\|_{C[0,2\pi]}, \qquad f \in \mathcal{T}_n,$$

справедливо тогда и только тогда, когда число $\alpha \in \mathbb{R}$ и наборы коэффициентов (1.10) *удовлетворяют условиям*

$$\Psi_n(\varphi_k) \ge 0 \quad \textit{при} \quad \varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

С помощью результата С. Н. Бернштейна в данной работе получены необходимые и достаточные условия для выполнения неравенств Л. В. Тайкова (1.6) и автора (1.8).

2. Неравенства для тригонометрических полиномов

Определим оператор $\mathbf{F}_\alpha$ на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов (1.9) (порядка $n \ge 0$ с вещественными коэффициентами) при $\alpha \in \mathbb{R}$ и $r > 1$ формулой

$$\mathbf{F}_\alpha f(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \{r^\nu [a_\nu \cos(\nu t + \alpha) + b_\nu \sin(\nu t + \alpha)]\}. \tag{2.1}$$

Этот оператор можно переписать в виде

$$\mathbf{F}_\alpha f(t) = \cos\alpha\ f(r,t) - \sin\alpha\ \widetilde{f}(r,t).$$

Здесь полиномы $f(r,t)$ и $\widetilde{f}(r,t)$ определяются по полиному $f(t)$ соотношениями

$$f(r,t) = \sum_{k=0}^{n} r^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{2.2}$$

$$\widetilde{f}(r,t) = \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \sin kt - b_k \cos kt); \tag{2.3}$$

полином (2.3) является сопряженным для (2.2).

Оператор (2.1) имеет вид (1.12) со значениями коэффициентов

$$\lambda_k = r^{n-k}, \qquad \mu_k = 0, \quad 0 \le k \le n.$$

Более того, в данном случае

$$\Psi_n(\varphi) = r^n + \cos n\varphi + 2\sum_{j=1}^{n-1} r^{n-j} \cos j\varphi$$
$$= \frac{r^{n+2} - r^n + (1 - r^2)\cos(n\varphi) + 2r\sin(n\varphi)\sin(\varphi)}{r^2 - 2r\cos(\varphi) + 1}.$$

Обозначим через $\widetilde{\mu}(r,n,\alpha)$ наилучшую константу в неравенстве

$$\|\cos\alpha\ f_n(r,\cdot) - \sin\alpha\ \widetilde{f}_n(r,\cdot)\|_{C_{2\pi}} \le \widetilde{\mu}(r,n,\alpha)\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{2.4}$$

Ясно, что $\widetilde{\mu}(r,n,\alpha) \ge r^n$. Следующее утверждение является частным случаем теоремы Бернштейна; оно дает необходимые и достаточные условия на параметры $n \in \mathbb{N}$, $r > 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ для того, чтобы имело место равенство $\widetilde{\mu}(r,n,\alpha) = r^n$.

Лемма 1. *Пусть* $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Неравенство*

$$\| \cos\alpha \ f_n(r,\cdot) - \sin\alpha \ \widetilde{f}_n(r,\cdot)\|_{C_{2\pi}} \le r^n \|f_n\|_{C_{2\pi}}$$

выполняется для всех $f_n \in \mathcal{T}_n$ *тогда и только тогда, когда*

$$r^{n+2} - r^n + (1-r^2)\cos(n\varphi_k) + 2r\sin(n\varphi_k)\sin(\varphi_k) \ge 0$$

где

$$\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

Следующее утверждение уточняет лемму 1.

Лемма 2. *Пусть* $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. *Неравенство*

$$\| \cos\alpha \ f_n(r,\cdot) - \sin\alpha \ \widetilde{f}_n(r,\cdot)\|_{C_{2\pi}} \le r^n \|f_n\|_{C_{2\pi}} \tag{2.5}$$

выполняется для всех $f_n \in \mathcal{T}_n$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

- $(r^2-1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}\right) \ge 0$ *при* $n = 4m$;
- $(r^2-1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n} + \dfrac{\pi}{2n}\right) \ge 0$ *при* $n = 4m+1$;
- $(r^2-1)(r^n + \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}\right) \ge 0,$ *при* $n = 4m+2$, *если* $r \le r_{n,\widetilde{\alpha}}$,

  $(r^2-1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n} - \dfrac{\pi}{n}\right) \ge 0$ *если* $r > r_{n,\widetilde{\alpha}}$;
- $(r^2-1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n} - \dfrac{\pi}{2n}\right) \ge 0$ *при* $n = 4m+3$,

где

$$\widetilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha, & \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \pi - \alpha, & \alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]; \\ \alpha - \pi, & \alpha \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right]; \\ 2\pi - \alpha, & \alpha \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

а величина $r_{n,\widetilde{\alpha}}$ *определена соотношениями*

$$r_{n,\widetilde{\alpha}} = -r\,\mathrm{tg}(\widetilde{\alpha})\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) + \sqrt{\left(r\,\mathrm{tg}(\widetilde{\alpha})\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2 + 1}$$

для $\widetilde{\alpha} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *и* $r_{n,\widetilde{\alpha}} = 1$ *для* $\widetilde{\alpha} = \dfrac{\pi}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 неравенство (2.5) выполняется для всех $f_n \in \mathcal{T}_n$ тогда и только тогда, когда

$$(r^2-1)(r^n - (-1)^k\cos\alpha) + (-1)^k 2r\sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) \ge 0 \tag{2.6}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Введем обозначение

$$g(k,\alpha) = (r^2-1)(r^n - (-1)^k\cos\alpha) + (-1)^k 2r\sin\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Отметим, что выполнение условия (2.6) для $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ эквивалентно выполнению этого условия для всех целых k; в самом деле, пусть $k = 2nj + \hat{k}$, $j \in \mathbb{Z}$, $\hat{k} = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ тогда $g(k,\alpha) = g(\hat{k},\alpha)$.

I. Для каждого $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ и k определим $\widetilde{\alpha} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\widetilde{k}$ такие, что

$$g(k,\alpha) = g(\widetilde{k},\widetilde{\alpha}).$$

Рассмотрим три случая:

1. $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Возьмем $\widetilde{\alpha} = \pi - \alpha$, $\quad \widetilde{k} = 2n - k - 1$. Тогда путем элементарных преобразований получаем

$$g(\widetilde{k},\widetilde{\alpha}) =$$

$$(r^2-1)(r^n - (-1)^{2n-k-1}\cos(\pi-\alpha)) + (-1)^{2n-k-1} 2r\sin(\pi-\alpha)\sin\left(2\pi - \frac{k\pi}{n} - \frac{\alpha}{n}\right) = g(k,\alpha).$$

2. $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Возьмем $\widetilde{\alpha} = \alpha - \pi$, $\quad \widetilde{k} = k + 1$. Тогда

$$g(\widetilde{k},\widetilde{\alpha}) = (r^2-1)(r^n - (-1)^{k+1}\cos(\alpha-\pi)) + (-1)^{k+1} 2r\sin(\alpha-\pi)\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n}\right) = g(k,\alpha).$$

3. $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Возьмем $\widetilde{\alpha} = 2\pi - \alpha$, $\quad \widetilde{k} = 2n - k - 2$. Тогда

$$g(\widetilde{k},\widetilde{\alpha}) =$$

$$(r^2-1)(r^n - (-1)^{2n-k-2}\cos(2\pi-\alpha)) + (-1)^{2n-k-2} 2r\sin(2\pi-\alpha)\sin\left(2\pi - \frac{\alpha}{n} - \frac{k\pi}{n}\right) = g(k,\alpha).$$

II. Зафиксируем $\widetilde{\alpha} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Исследуем функцию $g(\widetilde{k},\widetilde{\alpha})$ на минимум по целым $\widetilde{k}$. Нетрудно видеть, что достаточно исследовать на минимум по $\widetilde{k}$ функции

$$h_1(\widetilde{k},\widetilde{\alpha}) = -2r\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\widetilde{k}\pi}{n}\right), \qquad h_2(\widetilde{k},\widetilde{\alpha}) = 2r\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\widetilde{k}\pi}{n}\right)$$

соответственно при четных и нечетных $\widetilde{k}$ и затем сравнить значения функций для найденных k_1, k_2. То есть для функции h_1 нам нужно найти нечетное k_1, при котором $\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{k\pi}{n}$ наиболее близко к $\frac{\pi}{2}$, а для функции h_2 — четное k_2, при котором $\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{k\pi}{n}$ наиболее близко к $\frac{3\pi}{2}$.

Рассмотрим четыре случая:

1. $n = 4m$. Тогда поскольку $0 \le \frac{\widetilde{\alpha}}{n} \le \frac{\pi}{2n}$, то $k_1 = 2m - 1$, $k_2 = 6m$. Нетрудно видеть, что

$$g(k_1,\widetilde{\alpha}) = (r^2-1)(r^n + \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$$

$$> g(k_2,\widetilde{\alpha}) = (r^2-1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2}\right).$$

2. $n = 4m + 1$. Тогда $k_1 = 2m + 1$, $k_2 = 6m + 2$ и

$$g(k_1,\widetilde{\alpha}) = (r^2-1)(r^n + \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\ge g(k_2,\widetilde{\alpha}) = (r^2-1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right).$$

3. $n = 4m + 2$. Тогда $k_1 = 2m + 1$, $k_2 = 6m + 2$ и

$$g(k_1, \widetilde{\alpha}) = (r^2 - 1)(r^n + \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$g(k_2, \widetilde{\alpha}) = (r^2 - 1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right).$$

Обозначим

$$r_{n,\widetilde{\alpha}} = -r\,\mathrm{tg}(\widetilde{\alpha})\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} - \frac{\pi}{2n}\right) + \sqrt{\left(r\,\mathrm{tg}(\widetilde{\alpha})\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} - \frac{\pi}{2n}\right)\right)^2 + 1}$$

старший корень уравнения $g(k_1, \widetilde{\alpha}) = g(k_2, \widetilde{\alpha})$ при $\widetilde{\alpha} \neq \frac{\pi}{2}$. Тогда при $r > r_{n,\widetilde{\alpha}}$ минимум достигается при $k = k_2$, в противном случае минимум достигается при $k = k_1$. При $\widetilde{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ значения в точках k_1 и k_2 совпадают. Поэтому в качестве $r_{n,\frac{\pi}{2}}$ можно взять любое вещественное число, например, единицу.

4. $n = 4m + 3$. Тогда $k_1 = 2m + 1$, $k_2 = 6m + 4$ и

$$g(k_1, \widetilde{\alpha}) = (r^2 - 1)(r^n + \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$\geq g(k_2, \widetilde{\alpha}) = (r^2 - 1)(r^n - \cos\widetilde{\alpha}) - 2r\sin\widetilde{\alpha}\sin\left(\frac{\widetilde{\alpha}}{n} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right).$$

Тем самым лемма 2 доказана. □

Обозначим через $\widetilde{\mu}(r, n)$ наилучшую константу в неравенстве

$$\left\|\sqrt{f_n^2(r,\cdot) + \widetilde{f}_n^2(r,\cdot)}\right\|_{C_{2\pi}} \leq \widetilde{\mu}(r, n)\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n \in \mathcal{T}_n. \tag{2.7}$$

Константы в неравенствах (2.4) и (2.7) связаны соотношением

$$\sup\{\widetilde{\mu}(r, n, \alpha) :\ \alpha \in \mathbb{R}\} = \widetilde{\mu}(r, n). \tag{2.8}$$

В самом деле, для произвольного многочлена $f_n \in \mathcal{T}_n$ обозначим

$$\Upsilon(f_n) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \|\cos\alpha\ f_n(r,\cdot) - \sin\alpha\ \widetilde{f}_n(r,\cdot)\|_{C_{2\pi}} = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\max_{t\in\mathbb{R}} \left|\cos\alpha\ f_n(r,t) - \sin\alpha\ \widetilde{f}_n(r,t)\right|.$$

Модуль здесь можно опустить, поскольку

$$\cos\alpha\ f_n(r,t) - \sin\alpha\ \widetilde{f}_n(r,t) = -\Big(\cos(\alpha+\pi)\ f_n(r,t) - \sin(\alpha+\pi)\ \widetilde{f}_n(r,t)\Big),$$

поэтому имеем

$$\Upsilon(f_n) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\max_{t\in\mathbb{R}}\Big(\cos\alpha\ f_n(r,t) - \sin\alpha\ \widetilde{f}_n(r,t)\Big) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\Big(\cos\alpha\ f_n(r,t) - \sin\alpha\ \widetilde{f}_n(r,t)\Big)$$

$$= \max_{t\in\mathbb{R}}\sqrt{f_n^2(r,t) + (\widetilde{f}_n)^2(r,t)} = \left\|\sqrt{f_n^2(r,\cdot) + (\widetilde{f}_n)^2(r,\cdot)}\right\|_{C_{2\pi}}.$$

Отсюда следует (2.8).

Теорема 1. *Пусть* $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Неравенство*

$$\left\|\sqrt{f_n^2(r,\cdot) + (\widetilde{f}_n)^2(r,\cdot)}\right\|_{C_{2\pi}} \leq r^n\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n,$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$r^{n+2} - r^n + (1 - r^2)\cos(n\varphi) + 2r\sin(n\varphi)\sin(\varphi) \geq 0, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из соотношения (2.8) и леммы 1.

3. Неравенства для алгебраических многочленов

Перейдем в плоскости к полярной системе координат (r, t), т. е. сделаем замену $z = re^{it}$. Вещественная и мнимая части многочлена (1.1) на окружности Γ_r представляют собой следующие тригонометрические полиномы:

$$\operatorname{Re} P_n(re^{it}) = T_n(r, t) = \sum_{k=0}^{n} r^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \tag{3.1}$$

$$\operatorname{Im} P_n(re^{it}) = \widetilde{T}_n(r, t) = \sum_{k=1}^{n} r^k (a_k \sin kt - b_k \cos kt); \tag{3.2}$$

коэффициенты полинома P_n в формуле (1.1) для удобства записаны в виде $c_k = a_k - ib_k$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ясно, что (3.1) есть тригонометрический полином порядка n, а (3.2) — полином, ему сопряженный. Принадлежность многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ классу $\mathcal{P}_n^*$ означает, что $b_0 = 0$. Множество вещественных частей $T_n(1, t) = \operatorname{Re} P_n(e^{it})$ многочленов $P_n \in \mathcal{P}_n^*$ на единичной окружности $(r = 1)$ как функций переменного t совпадает с множеством $\mathcal{T}_n$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{F}_\alpha T_n(1, \cdot)(t) = \cos\alpha \operatorname{Re} P_n(re^{it}) - \sin\alpha \operatorname{Im} P_n(re^{it}).$$

Поэтому результаты предыдущего раздела можно переписать в терминах алгебраических многочленов на окружностях Γ_1 и Γ_r. В частности, аналогом теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Неравенство*

$$\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \le r^n \|\operatorname{Re} P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n^*,$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$r^{n+2} - r^n + (1 - r^2)\cos(n\varphi) + 2r\sin(n\varphi)\sin(\varphi) \ge 0, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что

$$\min_{\varphi} \Big((1 - r^2)\cos(n\varphi) + 2r\sin(n\varphi) \Big) = -(r^2 + 1),$$

поэтому справедливо такое утверждение.

Следствие. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r > 1$ *удовлетворяют условию*

$$r^{n+2} - r^n - r^2 - 1 \ge 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|P_n\|_{C(\Gamma_r)} \le r^n \|\operatorname{Re} P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n^*.$$

Это утверждение уточняет результат автора (1.7), (1.8). Следующее утверждение есть переформулировка леммы 2 для алгебраических многочленов.

Теорема 3. *Пусть* $r > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. *Неравенство*

$$\|\cos\alpha \ \operatorname{Re} P_n(re^{it}) - \sin\alpha \ \operatorname{Im} P_n(re^{it})\|_{C([0,2\pi])} \le r^n \|\operatorname{Re} P_n\|_{C(\Gamma_1)}, \qquad P_n \in \mathcal{P}_n^*,$$

выполняется тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- $(r^2-1)(r^n-\cos\widetilde{\alpha})-2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}\right)\geq 0$ *при* $n=4m$;
- $(r^2-1)(r^n-\cos\widetilde{\alpha})-2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}+\dfrac{\pi}{2n}\right)\geq 0$ *при* $n=4m+1$;
- $(r^2-1)(r^n+\cos\widetilde{\alpha})-2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}\right)\geq 0$ *и*

  $(r^2-1)(r^n-\cos\widetilde{\alpha})-2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}-\dfrac{\pi}{n}\right)\geq 0$ *при* $n=4m+2$;
- $(r^2-1)(r^n-\cos\widetilde{\alpha})-2r\sin\widetilde{\alpha}\cos\left(\dfrac{\widetilde{\alpha}}{n}-\dfrac{\pi}{2n}\right)\geq 0$ *при* $n=4m+3$,

где

$$\widetilde{\alpha}=\begin{cases}\alpha, & \alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right];\\ \pi-\alpha, & \alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right];\\ \alpha-\pi, & \alpha\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right];\\ 2\pi-\alpha, & \alpha\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right].\end{cases}$$

Следующее утверждение содержит необходимые и достаточные условия на параметры $n\geq 1$ и $r>1$ для того, чтобы имело место неравенство Тайкова (1.6).

Теорема 4. *Пусть* $r>1$, $n\in\mathbb{N}$. *Неравенство*

$$||\operatorname{Im}P_n||_{C(\Gamma_r)}\leq r^n||\operatorname{Re}P_n||_{C(\Gamma_1)},\qquad P_n\in\mathcal{P}_n^*$$

справедливо тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия (*в зависимости от кратности* n *четырем*):

- $r^n(r^2-1)-2r\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\geq 0$ *при* $n=4m, n=4m+2$;
- $r^n(r^2-1)-2r\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\geq 0$ *при* $n=4m+1$;
- $r^n(r^2-1)-2r\geq 0$ *при* $n=4m+3$.

Доказательство. Для доказательства достаточно положить $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ в теореме 3.

Результат Л. В. Тайкова (1.5), (1.6), очевидно, содержится в теореме 4.

4. Интерполяционная формула

Представляется интересным тот факт, что для оператора (1.12) из теоремы А можно построить универсальную интерполяционную формулу.

Теорема 5. *При любых* $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *для оператора* F_α *вида* (1.12) *справедливо представление*

$$F_\alpha f(t)=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\Psi(\varphi_k)f\left(t+\varphi_k\right),\quad f\in\mathcal{T}_n,\tag{4.1}$$

где

$$\varphi_k=\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n},$$

а функция Ψ *определена соотношением* (1.11).

Отметим, что условия теоремы А означают чередование знаков коэффициентов интерполяционной формулы (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливо следующее представление:

$$F_\alpha f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t-\varphi)D_n(\varphi)d\varphi, , \quad f \in \mathcal{T}_n, \tag{4.2}$$

где

$$D_n(\varphi) = \frac{1}{2}\lambda_n\cos\alpha + \sum_{k=1}^{n}\lambda_{n-k}\cos(k\varphi+\alpha) - \sum_{k=1}^{n-1}\mu_{n-k}\sin(k\varphi+\alpha).$$

Воспользуемся методом “приближения хвостами” (см. [4; 5]). К полиному D_n в представлении (4.2) можно добавить гармоники порядка старше n, что не повлияет на величину интеграла. Более конкретно, рассмотрим функцию

$$\mathcal{D}_n(\varphi) = D_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n-k}\cos((2n-k)\varphi+\alpha)$$

$$+\frac{1}{2}\lambda_n\cos\alpha\cos(2(n\varphi+\alpha)) + \sum_{k=1}^{n-1}\mu_{n-k}\sin((2n-k)\varphi+\alpha).$$

С помощью элементарных преобразований получим

$$\mathcal{D}_n(\varphi) = \cos(n\varphi+\alpha)\Big(\lambda_n\cos(n\varphi+\alpha)\cos\alpha + \lambda_0$$

$$+2\sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_{n-k}\cos(n-k)\varphi + \mu_{n-k}\sin(n-k)\varphi)\Big) = \cos(n\varphi+\alpha)\Phi_n(\varphi),$$

где

$$\Phi_n(\varphi) = \lambda_n\cos(n\varphi+\alpha)\cos\alpha + \lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\lambda_{n-k}\cos(n-k)\varphi + \mu_{n-k}\sin(n-k)\varphi\Big).$$

Рассмотрим ядро Пуассона

$$\Pi_\rho(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos k\varphi, \quad 0 \le \rho < 1;$$

для него справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\rho}\Big[\Pi_\rho(n\varphi+\alpha) - \Pi_\rho(n\varphi+\pi+\alpha)\Big] = \cos(n\varphi+\alpha) + \sum_{m=1}^{\infty}\rho^{2m}\cos((2m+1)(n\varphi+\alpha)).$$

Добавим к ядру $\mathcal{D}_n$ еще одно слагаемое, содержащее только старшие гармоники, а точнее, рассмотрим функцию

$$\widehat{\mathcal{D}}_n(\varphi) = \mathcal{D}_n(\varphi) + \Phi_n(\varphi)\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{2m}\cos(2m+1)(n\varphi+\alpha) = \frac{1}{2\rho}\Phi_n(\varphi)\Big[\Pi_\rho(n\varphi+\alpha) - \Pi_\rho(n\varphi+\pi+\alpha)\Big].$$

Следовательно, справедливо представление

$$F_\alpha f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t-\varphi)\Phi_n(\varphi)\frac{1}{2\rho}\Big[\Pi_\rho(n\varphi+\alpha) - \Pi_\rho(n\varphi+\pi+\alpha)\Big]\varphi.$$

Устремляя в последнем соотношении ρ к 1 слева и применяя свойства ядра Пуассона, приведенные в [8, гл. 3, разд. 6], получаем

$$F_\alpha f(t) = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\Phi_n\left(\omega_j\right) f\left(t-\omega_j\right) - \Phi_n\left(\psi_j\right) f\left(t-\psi_j\right)\Big),$$

где

$$\omega_j = \frac{2j\pi-\alpha}{n}, \qquad \psi_j = \frac{(2j-1)\pi-\alpha}{n}.$$

Заметим, что $\Phi_n\left(\omega_j\right) = \Psi(-\omega_j),\ \Phi_n\left(\psi_j\right) = \Psi(-\psi_j)$. Поэтому

$$F_\alpha f(t) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\Psi(\varphi_k) f\left(t+\varphi_k\right), \quad \text{где} \quad \varphi_k = \frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}.$$

Теорема доказана. □

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору В. В. Арестову за постановку задачи, советы и поддержку при проведении исследований и подготовке данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В. В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т 45, № 1. С. 3–22.
2. **Арестов В. В.** Об одном неравенстве Сеге для алгебраических многочленов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 27–33.
3. **Арестов В. В.** Неравенства Бернштейна и Сеге для тригонометрических полиномов // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58, вып. 11. С. 43–58.
4. **Szegö G.** Über einen Satz des Hern Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. J. 5, H. 4. S. 59–70.
5. **Тайков Л. В.** Равномерная оценка величины сопряженного полинома на плоскости // Мат. заметки. 1993. Т. 54, вып. 6. С. 142–145.
6. **Парфененков А. В.** Оценка алгебраического многочлена в плоскости через значение его вещественной части на единичной окружности // Изв. вузов. Сер. Математика. 2010. № 3. С. 92–96.
7. **Бернштейн С. Н.** Об одной теореме Сеге // Собр. соч.: в 4т. М.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. Ст. 62. С. 173–177.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.

Парфененков Андрей Владимирович
ассистент
Уральский государственный университет им. А. М. Горького
e-mail: Andrey.Parfenenkov@usu.ru

Поступила 23.05.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.5

НОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ[1]

Е. А. Плещева

В работе построены базисы всплесков для n масштабирующих функций. Приведены быстрые алгоритмы вычисления коэффициентов разложения функции по таким базисам.

Ключевые слова: кратномасштабный анализ, всплески, масштабирующие функции.

E. A. Pleshcheva. New generalization of orthogonal wavelet bases.

Wavelet bases are constructed for n scaling functions. Fast algorithms for computing coefficients of expanding a function over such bases are presented.

Keywords: multiresolution analysis, wavelets, scaling functions.

Введение

Всплеском называется функция $\psi(x)$ такая, что множество функций

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) : k, j \in \mathbb{Z}\}$$

образуют ортонормированный базис (ОНБ) пространства $L^2(\mathbb{R})$. В [1, гл. 8] рассмотрены нестационарные системы всплесков — ортономированные системы вида $\{\psi_j(x - k/2^j) : j, k \in \mathbb{Z}\}$, образующие базис пространства $L^2(\mathbb{R})$. Такие базисы впервые введены в теорию всплесков под названием "почти-всплески" авторами работы [2] в 1992 году. Закрепившийся в литературе термин "нестационарные всплески" принадлежит авторам работы [3], несколько позже использовавшим ту же идею для построения базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$. Конструируемые в данной работе ортонормированные системы вида

$$\{2^{nj/2}\psi^1(2^{nj}x - k), 2^{(nj+1)/2}\psi^2(2^{nj+1}x - k), \dots, 2^{(nj+(n-1))/2}\psi^n(2^{nj+(n-1)}x - k) :\ k, j \in \mathbb{Z}\}$$

можно рассматривать как частный случай порожденных не бесконечной последовательностью $\{\psi_j(x), j \in \mathbb{Z}\}$, а конечным набором $\{\psi^1(x), \psi^2(x), \dots, \psi^n(x)\}$. А можно рассматривать как еще одно обобщение классических базисов всплесков, только порожденных двоичными сжатиями и двоично-рациональными сдвигами не одной, а нескольких функций. Этот способ расширения понятия всплеска отличается от способа, изложенного в [4–6], где базисом $L^2(\mathbb{R})$ является система вида

$$\{2^{j/2}\psi^1(2^j x - k), 2^{j/2}\psi^2(2^j x - k), \dots, 2^{j/2}\psi^n(2^j x - k) :\ k, j \in \mathbb{Z}\}.$$

В дальнейшем считаем $u_{j,k}(x) = 2^{j/2}u(2^j x - k)$, $\widehat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-2\pi i\, x\omega}\,dx$ — интеграл Фурье функции $u(x)$; $p_s = 1 + \text{Выч.}\, s \,(\mathrm{mod}\ n)$, $s \in \mathbb{N}$. Так, $p_s = s+1$ $(s = 1, 2, \dots, n-1)$, $p_n = 1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00014).

1. Обобщение КМА

О п р е д е л е н и е. Назовем *n-раздельным кратномасштабным анализом* (n-КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$ кортеж n последовательностей замкнутых в $L^2(\mathbb{R})$ подпространств

$$\ldots \subset V_{-1}^{p_{-1+s}} \subset V_0^{p_s} \subset V_1^{p_{1+s}} \subset \ldots \subset V_k^{p_{k+s}} \subset \ldots \subset V_{n-1}^{p_{n-1+s}} \subset V_n^{p_s} \subset V_n^{p_{1+s}} \subset \ldots \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

удовлетворяющий следующим условиям:

(a) $\overline{\bigcup_j V_{nj}^1} = \overline{\bigcup V_{nj}^2} = \ldots = \overline{\bigcup V_{nj}^n} = L^2(\mathbb{R})$;

(b) $\bigcap_j V_{nj}^1 = \bigcap V_{nj}^2 = \ldots = \bigcap V_{nj}^n = \{0\}$;

(c) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, 2, \ldots, n$;

(d) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, 2, \ldots, n$;

(e) в каждом подпространстве V_0^s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, существует ортонормированный базис вида $\{\varphi^s(x + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$;

или эквивалентному условию

(e') в каждом подпространстве V_0^s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ существует базис Рисса вида $\{g^s(x + k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Ранее 2-раздельные КМА были введены нами в работе [7].

Из (a), (b) и (1.1) следует, что

$$\forall k, l \in \{1, \ldots, n\} \ \overline{\bigcup_j V_{nj+l}^k} = L^2(\mathbb{R}), \ \bigcap_j V_{nj+l}^k = \{0\}.$$

Как и в классическом случае (т. е. при $n = 1$), условия (a)–(e) не являются независимыми. Так, по аналогии с классическим случаем (см. [8, предложения 5.3.1, 5.3.2]), легко доказывается

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (c)–(e) *в определении* n-КМА *и все функции* $\widehat{\varphi^s}(\omega)$ *непрерывны в нуле, ограничены и* $\widehat{\varphi^s}(0) \neq 0$. *Тогда выполняются условия* (a), (b).

2. Необходимые условия на маски системы $\{\varphi^s(x - k)\}$

Известно (см., например, [10, § 4]), что системы функций $\{\varphi^s(x - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ ортонормированы в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^s}(\omega + k)|^2 \equiv 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Отсюда, как и в случае $n = 1$, вытекает эквивалентность условий (e) и (e') из определения n-КМА, так как полагая $\widehat{\varphi^s}(\omega) = \widehat{g}^s(\omega)(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}^s(\omega + n)|^2)^{1/2}$, $s = 1, 2, \ldots, n$, получим ортонормированные системы.

Ясно, что для выполнения вложений (1.1) при $s = 1, 2, \ldots, n$ должны выполняться эквивалентные масштабирующие соотношения

$$\varphi^s(x) \overset{L^2(\mathbb{R})}{=} \sqrt{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^{s,p_s} \varphi^{p_s}(2x - k) \ \text{ и } \ \widehat{\varphi^s}(\omega) = m^{s,p_s}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2}$$

где $h^{s,p_s} \in l^2(\mathbb{Z})$, $m^{s,p_s}(\omega)$ — 1-периодические функции из $L^2[0, 1)$,

$$m^{s,p_s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k^{s,p_s} e^{2\pi i k\omega}. \tag{2.3}$$

Как и в случае $n = 2$ (см. [7]), непрерывные в нуле функции $\widehat{\varphi^s}(\omega)$ восстанавливаются через функции $m^{s,p_s}(\omega)$: если $\widehat{\varphi^s}(0) = 1$ и $m^{s,p_s}(\omega) = m^{s,p_s}(0) + O(|\omega|^\alpha)$ для $\alpha > 0$, то

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) = \prod_{j=0}^{\infty} m^{p_{s-1},p_s}\Big(\frac{\omega}{2^{nj+1}}\Big) m^{p_s,p_{s+1}}\Big(\frac{\omega}{2^{nj+2}}\Big) \cdots m^{p_{s+n-2},p_{s+n-1}}\Big(\frac{\omega}{2^{nj+n}}\Big), \quad s = 1,\ldots,n,$$

или, определив в $L^2[0,1)$ функции

$$m^s(\omega) = m^{s,p_s}(2^{n-1}\omega) m^{p_s,p_{s+1}}(2^{n-2}\omega) \cdots m^{p_{s+n-2},p_{s+n-1}}(\omega), \quad s = 1,\ldots,n, \tag{2.4}$$

получаем

$$\widehat{\varphi^s}(2^n\omega) = m^s(\omega)\widehat{\varphi^s}(\omega), \quad \widehat{\varphi^s}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big).$$

Докажем утверждение о масках.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi^s(x+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $(s = 1,2,\ldots,n)$ *— ортонормированные системы, удовлетворяющие условиям* (2.3). *Тогда*

$$|m^s(\omega)|^2 + \Big|m^s\Big(\omega + \frac{1}{2^n}\Big)\Big|^2 + \Big|m^s\Big(\omega + \frac{2}{2^n}\Big)\Big|^2 + \ldots + \Big|m^s\Big(\omega + \frac{2^n-1}{2^n}\Big)\Big|^2 = 1; \tag{2.5}$$

$$|m^{s,p_s}(\omega)|^2 + \Big|m^{s,p_s}\Big(\omega + \frac{1}{2}\Big)\Big|^2 = 1. \tag{2.6}$$

Условия на $m^{s,p_s}(\omega)$ доказываются аналогично теореме Малла [11], но не являются ее следствием, так как каждая функция $m^{s,p_s}(\omega)$ связывает между собой не функции $\varphi^s(x)$ с $\varphi^s(2x-k)$, как в классическом случае, а $\varphi^s(x)$ и $\varphi^{p_s}(2x-k)$, $s = 1,2,\ldots,n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.1) и 1-периодичности $m^s(\omega)$ имеем

$$1 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^s}(2^n\omega+\nu)|^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{\varphi^s}\Big(\omega+\frac{\nu}{2^n}\Big) m^s\Big(\omega+\frac{\nu}{2^n}\Big)\Big|^2 = \sum_{l=0}^{2^n-1}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{\varphi^s}\Big(\omega+\nu+\frac{l}{2^n}\Big) m^s\Big(\omega+\nu+\frac{l}{2^n}\Big)\Big|^2$$

$$= |m^s(\omega)|^2 \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^s}(\omega+\nu)|^2 + \Big|m^s\Big(\omega+\frac{1}{2^n}\Big)\Big|^2 \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{\varphi^s}\Big(\omega+\nu+\frac{1}{2^n}\Big)\Big|^2$$

$$+ \Big|m^s\Big(\omega+\frac{2}{2^n}\Big)\Big|^2 \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{\varphi^s}\Big(\omega+\nu+\frac{2}{2^n}\Big)\Big|^2 + \ldots + \Big|m^s\Big(\omega+\frac{2^n-1}{2^n}\Big)\Big|^2 \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{\varphi^s}\Big(\omega+\nu+\frac{2^n-1}{2^n}\Big)\Big|^2,$$

т. е. выполняется (2.5).

Перейдем к доказательству утверждения (2.6). В силу (2.1) и 1-периодичности $m^{s,p_s}(\omega)$

$$1 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^s}(2\omega+\nu)|^2 = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \Big|\widehat{\varphi^{p_s}}\Big(\omega+\frac{\nu}{2}\Big) m^{s,p_s}\Big(\omega+\frac{\nu}{2}\Big)\Big|^2$$

$$= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^{p_s}}(\omega+\nu) m^{s,p_s}(\omega+\nu)|^2 + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi^{p_s}}(\omega+\nu+1/2) m^{s,p_s}(\omega+\nu+1/2)|^2 = 1.$$

3. Построение n-раздельного КМА

Исходным пунктом для построения n-КМА, кроме системы функций $g^s(x)$, порождающей базис Рисса подпространства V_0^s, могут быть системы функций $m^s(\omega)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$.

Для построенных систем $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ справедлив следующий аналог теоремы Малла.

Теорема 3. *Пусть $s \in \{1, \ldots, n\}$, функция $m^s(\omega) \in L^2[0,1)$ удовлетворяет условию* (2.5), *непрерывна в окрестности точки $\omega = 0$, $m^s(0) = 1$, а кроме того, $|m^s(\omega)| \geq C_0 > 0$ при $|\omega| \leq 1/2^{n+1}$ и справедливо неравенство*

$$|m^s(\omega) - m^s(0)| \leq \Omega(|\omega|) \tag{3.1}$$

для некоторой неубывающей функции $\Omega(\omega)$ такой, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \Omega(\omega_0/2^{nj})$ сходится. Тогда

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) \in L^2(\mathbb{R}),$$

а функция $\varphi^s(x)$ с преобразованием Фурье $\widehat{\varphi^s}(\omega)$ порождает ортонормированную в $L^2(\mathbb{R})$ систему $\{\varphi^s(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о использует идеи Малла.

1) Пусть $m^s(\omega)$ удовлетворяет условиям теоремы. Докажем, что, если $\prod_{j=1}^{\infty} m^s(\omega/2^{nj})$ сходится почти всюду, то

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty} m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Для этого введем последовательность функций

$$\widehat{\varphi^s}_k(\omega) := \prod_{j=1}^{k+1} m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\chi_{[-1,1]}\Big(\frac{\omega}{2^{n(k+1)-1}}\Big). \tag{3.2}$$

Ясно, что $\widehat{\varphi^s}_k(\omega) \to \widehat{\varphi^s}(\omega)$ поточечно,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2 d\omega = \int_{-2^{n(k+1)-1}}^{2^{n(k+1)-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 d\omega.$$

Докажем, что для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_k^s(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированной.

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_k^s(x)\overline{\varphi_k^s(x-n)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi^s}_k(\omega)\overline{\widehat{\varphi^s}_k(\omega)}e^{2\pi in\omega}d\omega = \int_{-2^{n(k+1)-1}}^{2^{n(k+1)-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 e^{2\pi in\omega}d\omega.$$

В силу 1-периодичности $m^s(\omega), e^{2\pi i\omega}$ разобьем последний интеграл на сумму 2^n интегралов

$$\int_0^{2^{n(k+1)}} \prod_{j=1}^{k+1} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 e^{2\pi in\omega}\, d\omega = \sum_{l=0}^{2^n-1} \int_{l2^{nk}}^{(l+1)2^{nk}} \prod_{j=1}^{k+1} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 e^{2\pi in\omega}\, d\omega.$$

Заменим в l-ом интеграле ω на $\omega + l2^{nk}$. Тогда последнее выражение примет вид

$$\int_0^{2^{nk}} \prod_{j=1}^{k} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 \sum_{l=0}^{2^n-1} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nk+1}} + \frac{l}{2^n}\Big)\Big|^2 d\omega = \int_0^{2^{nk}} \prod_{j=1}^{k} \Big|m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 e^{2\pi in\omega} d\omega$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_{k-1}(\omega)|^2 e^{2\pi i n\omega} d\omega.$$

Отсюда и из условия (2.5) получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2 e^{2\pi i n\omega} d\omega = \ldots = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_0(\omega)|^2 e^{2\pi i n\omega} d\omega = \int_{-2}^{2} \Big| m^s\Big(\frac{\omega}{4}\Big)\Big|^2 e^{2\pi i n\omega} d\omega = \delta_{0,n}. \tag{3.3}$$

Следовательно, для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ система $\{\varphi_k^s(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированной. В частности, при $n = 0$

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_{k-1}(\omega)|^2 d\omega = \ldots = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_0(\omega)|^2 d\omega = 1,$$

и по теореме Фату

$$\widehat{\varphi^s}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \ \text{ и } \ \|\widehat{\varphi^s}(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \|\widehat{\varphi^s}_n(\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1.$$

2) Докажем, что существует константа $c_1 < \infty$ такая, что

$$|\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2 \le C_1 |\widehat{\varphi^s}(\omega)|^2. \tag{3.4}$$

Для этого представим $|\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2$ в виде

$$|\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2 = \prod_{j=1}^{k+1} \Big| m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 \chi_{[-1,1]}\Big(\frac{\omega}{2^{nk+1}}\Big) = \frac{|\widehat{\varphi^s}(\omega)|^2}{\prod\limits_{j=k+2}^{\infty} \big| m^s\big(\frac{\omega}{2^{nj}}\big)\big|^2 \chi_{[-1,1]}\big(\frac{\omega}{2^{nk+1}}\big)}.$$

Очевидно, что при $|\omega| \ge 2^{nk+1}$ неравенство (3.4) выполняется.

Пусть теперь $|\omega| \le 2^{nk+1}$. Оценим снизу $\prod_{j=k+2}^{\infty} |m^s(\omega/2^{nj})|^2$. В силу (3.1)

$$1 - |m^s(\omega)| \le |m^s(\omega) - m^s(0)| \le \Omega(|\omega|),$$

т. е. $|m^s(\omega)| \ge 1 - \Omega(|\omega|)$. Поскольку при некотором достаточно малом $\delta \in (0,1)$ для $|x| < \delta$ выполняется неравенство $1 - x \ge e^{-2x}$, то при $N = N(\delta)$ таком, что $\Omega(1/2^{n(2+N)}) < \delta$, произведение $\prod_{j=N+2+k}^{\infty} |m^s(\omega/4^j)|^2$ оценивается снизу выражением

$$\prod_{j=N+2+k}^{\infty} \exp\Big\{ -2^n \Omega\Big(\frac{|\omega|}{2^{nj}}\Big) \sum_{j=N+2+k}^{\infty} \Big(-2^n \Omega\Big(\frac{|\omega|}{2^{nj}}\Big)\Big)\Big\}.$$

В силу монотонности Ω последняя величина не меньше, чем

$$e^{\sum\limits_{j=N+2+k}^{\infty} \left(-2^n \Omega\left(\frac{2^{nk}}{2^{nj}}\right)\right)} = e^{\sum\limits_{j=N+2+k}^{\infty} \left(-2^n \Omega\left(\frac{1}{2^{n(j-k)}}\right)\right)} \ge e^{-2^n \sum\limits_{j=N+2}^{\infty} \left(\Omega\left(\frac{1}{2^{nj}}\right)\right)} \ge C_2(\Omega, \delta).$$

Далее по определению C_0 при $|\omega| < 2^{nk+1}$

$$\prod_{j=k+2}^{N+k+1} \Big| m^s\Big(\frac{\omega}{2^{nj}}\Big)\Big|^2 \ge C_0^{2N(\delta)}.$$

В итоге получим

$$\forall k \ge 1 \ \forall\, \omega \quad |\widehat{\varphi^s}_k(\omega)|^2 \le C_1(\Omega, \delta); \quad |\widehat{\varphi^s}(\omega)|^2 \in L^2(\mathbb{R}).$$

Следовательно можно применить теорему Лебега о мажорантной сходимости, представив

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}(\omega)|^2 e^{2\pi i n\omega} d\omega = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi^s}_n(\omega)|^2 e^{2\pi i n\omega} d\omega = \delta_{n,0};$$

а это и значит, что $\{\varphi_k^s(x-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система. □

При построении n-раздельных КМА с помощью этой теоремы можно в качестве m^{s,p_s}, $s=1,2,\ldots,n$, использовать классические маски, выбирая в качестве $m^s(\omega)$ функции, определенные через $m^{s,p_s}(\omega)$ по формулам (2.4).

В общем случае при построении n-КМА можно выбрать n различных функций $m^s(\omega)$ из $L^2[0,1)$, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и дополнительному ограничению разрешимости системы уравнений (2.4) относительно функций $m^{s,p_s}, s = 1,2,\ldots,n$. Из системы (2.4) можно однозначно и корректно найти $m^{s,p_s}(\omega)$ по формулам $m^{s,p_s}(\omega) = \widehat{\varphi^s}(2\omega)/\widehat{\varphi^{p_s}}(\omega)$, если множества нулей функций $m^s(\omega)$ имеют нулевую меру Лебега.

4. Пространства всплесков и их базисы

Построенные по описанным выше схемам n-раздельные КМА (1.1) используем для конструирования пространств всплесков W_j^s таких, что

$$W_j^s \subset V_{j+1}^{p_s}; \quad W_j^s \perp V_j^s; \quad V_{j+1}^{p_s} = W_j^s \bigoplus V_j^s, \quad s = 1,2,\ldots,n,$$

а также для получения новых базисов всплесков.

Теорема 4. *Пусть*

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-\nu}^{s,p_s}} \varphi_{1,\nu}^{p_s}(x),$$

где h_ν^{s,p_s} *— коэффициенты из* (2.3). *Тогда система* $\left\{\psi_{j,k}^s(x)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ — ОНБ *подпространства* W_j^s, *а каждая из систем* $\left\{\psi_{nj+l,k}^{p_{s+l-1}}(x) : l = 0,1,\ldots,n-1;\ j,k\in\mathbb{Z}\right\}$ $(s = 1,2,\ldots,n)$ — ОНБ *пространства* $L^2(\mathbb{R})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ортогональность системы $\left\{\psi_{j,k}^s(x)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ вытекает из ортогональности $\varphi^l(x)$, $l=1,2,\ldots,n$, и определения $\psi^s(x)$, $s=1,2,\ldots,n$.

Осталось проверить, что $\{\psi_{0,k}^s\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — базис W_0^s. Из определения $\psi^s(x)$ при $s=1$ легко следует, что

$$\widehat{\psi^1}(\omega) = e^{-\pi i\omega}\overline{m^{1,2}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)}\widehat{\varphi^2}\Big(\frac{\omega}{2}\Big). \tag{4.1}$$

Если $f\in W_0^1$, то $f\in V_1^2$ и $f\perp V_0^1$, и потому

$$\widehat{f}(\omega) = m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\varphi^2}\Big(\frac{\omega}{2}\Big), \qquad m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{1,2}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)} + m_f\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)\overline{m^{1,2}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)} = 0 \text{ п. в.},$$

откуда, учитывая ограниченность функции $m^{1,2}(\omega)$ (см. (2.6)), как обычно (см. [8, гл. 5, п. 5.1]), выводится, что

$$m_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big) = e^{-\pi i\omega}\alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\overline{m^{1,2}\Big(\frac{\omega+1}{2}\Big)},$$

где $\alpha_f(\omega)$ — 1/2-периодическая функция из пространства $L^2[0,1/2)$. Отсюда и из (4.1) получим

$$\widehat{f}(\omega) = \alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\widehat{\psi^1}(\omega),$$

где

$$\alpha_f\Big(\frac{\omega}{2}\Big)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}A_k e^{-2\pi ik\omega},$$

т. е.

$$\widehat{f}(\omega)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}A_k e^{-2\pi ik\omega}\widehat{\psi^1}(\omega),$$

и, следовательно,

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}A_k\psi(x-k). \tag{4.2}$$

Здесь $A_k\in l^2(\mathbb{Z})$, поэтому ряд (4.2) сходится в $L^2(\mathbb{R})$. Итак, любую $f\in W_0^1$ можно разложить в ряд (4.2). Ортономированность систем $\{\psi^{p_{s+l-1}}_{nj+l,k}(x): l=0,1,\dots,n-1;\ j,k\in\mathbb{Z}\},\ s=1,2,\dots,n$, вытекает из теоремы 3 и того, что $W_j^s\perp W_{j+1}^{p_s}$. Базисность следует из условия (a) в определении n-раздельного КМА.

5. Прямое и обратное дискретное всплеск-преобразование

Как и в случае одной масштабирующей функции, зная коэффициенты разложения проекций функции $f(x)$ на подпространства $V_j^{p_s}$ для некоторого j, можно найти коэффициенты разложения проекции функции $f(x)$ на подпространства V_{j-1}^s, W_{j-1}^s. Пусть проекция функции $f(x)$ на подпространство $V_j^{p_s}$ имеет вид

$$f_j^{p_s}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k^{p_s,j}\varphi_{j,k}^{p_s}(x).$$

Тогда ее проекция на предыдущее в последовательности (1.1) пространство

$$f_j^{p_s}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(c_k^{s,j-1}\varphi_{j-1,k}^s(x)+d_k^{s,j-1}\psi_{j-1,k}^s(x)).$$

Учитывая ортогональность базисов подпространств $V_j^s, W_j^s,\ s=1,2,\dots,n;\ j\in\mathbb{Z}$, получим следующие формулы увеличения масштаба:

$$c_k^{s,j-1}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}c_l^{p_s,j}\overline{h_{l-2k}^{s,p_s}};\qquad d_k^{s,j-1}=\sum_{l\in\mathbb{Z}}c_l^{p_s,j}(-1)^{l+1}h_{2k+1-l}^{s,p_s}.$$

Аналогично получаются коэффициенты для всех подпространств всплесков и подпространств n-раздельного КМА с меньшими номерами при каждом $s=1,2,\dots,n$.

Зная же коэффициенты разложения проекции функции на подпространства V_{j-1}^s, W_{i-1}^s, можно восстановить коэффициенты проекции этой функции на подпространство $V_j^{p_s}$ с помощью следующих формул уменьшения масштаба:

$$c_l^{p_s,j}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(c_k^{s,j-1}h_{l-2k}^{s,p_s}+d_k^{s,j-1}(-1)^l\overline{h^{s,p_s}{}_{2k+1-l}}\big).$$

С помощью формул увеличения масштаба можно по коэффициентам $c_k^{p_{s+1},nj+l}(f)$ $(l\in\{0,1,\dots,n-1\})$ проекции функции f на подпространство с большим номером $nj+l$ рассчитать коэффициенты проекций функции f на подпространства V_m^q и W_m^q с меньшими номерами m при соответствующих q по схеме

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_k^{p_{s+1},nj+l} & \longrightarrow & c_k^{p_s,nj+l-1} & \longrightarrow & c_k^{s,nj+l-2} & & \longrightarrow & c_k^{p_{s-(l-l_1)},nJ_0+l_1} \\
 & \searrow & & \searrow & & \dots & \searrow & \\
 & & d_k^{p_s,nj+l-1} & & d_k^{s,nj+l-2} & & & d_k^{p_{s-(l-l_1)},nJ_0+l_1}.
\end{array} \tag{5.1}$$

А с помощью формул уменьшения масштаба можно выполнить обратное преобразование по схеме

$$\begin{array}{ccccccc} c_k^{p_{s-(l-l_1)},nJ_0+l_1} & \longrightarrow & c_k^{p_{s-(l-l_1)+1},nJ_0+l_1+1} & \longrightarrow & c_k^{p_{s-(l-l_1)+2},nJ_0+l_1+2} & \qquad \longrightarrow & c_k^{p_{s+1},nj+l}. \\ & \nearrow & & \nearrow & & \dots \quad \nearrow & \\ d_k^{p_{s-(l-l_1)},nJ_0+l_1} & & d_k^{p_{s-(l-l_1)+1},nJ_0+l_1+1} & & & & \end{array}$$

Эти схемы можно использовать обычным образом для обработки сигналов и сжатия изображений, при этом можно применять сразу несколько из описанных пирамидальных схем и в конце выбрать лучший результат. При этом не возникает, как в [4–6], проблем связи отсчетов $f(k/2^j)$ $(j \gg 1)$ с коэффициентами $c_k^{i,j}$ $(i = s$ или $p_s)$. Пирамидальную схему (5.1) при каждом $s = 1, 2, \dots, n$ можно начинать с приближенной при больших j формулы $c_k^{p_{s+1},j} = 2^{-j/2} f(k/2^j)$, $k \in \mathbb{Z}$, превращая прямое и обратное дискретные всплеск-преобразование в быстрые преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 616 с.
2. **Берколайко М.З, Новиков И.Я.** О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 935–938.
3. **de Boor C., DeVore R., Ron A.** On the construction of multivariate (pre) wavelets // Constr. Approx. 1993. Vol. 9. P. 123–166.
4. **Strela V.** Multiwavelets: regularity, orthogonality and symmetry via two-scale similarity transform // Stud. Appl. Math. 1997. Vol. 98, iss. 4. P. 335–354.
5. **Strela V., Heller P.N., Strang G., Topivala P., Heil C.** The application of multiwavelet filterbanks to image processing // IEEE Trans. Signal Processing. 1999. Vol. 8, no. 4. P. 548–563.
6. **Strang G., Strela V.** Short wavelets and matrix dilation equations // IEEE Trans. Signal Processing. 1995. Vol. 43, no. 1. P. 108–115.
7. **Плещева Е.А.** КМА-подобные последовательности подпространств $L^2(\mathbb{R})$ в случае двух масштабирующих функций. // Тр. 40-й Всерос. молодеж. конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики”. Екатеринбург, 2009. С. 88–92.
8. **Добеши И.** Десять лекций по вэйвлетам. М.; Ижевск: Динамика, 2001. 464 с.
9. **Новиков И.Я., Стечкин С.Б.** Основы теории всплесков // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, вып. 6(324). С. 53–128.
10. **Петухов А.П.** Введение в теорию базисов всплесков. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 132 с.
11. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. AMS. 1989. Vol. 315. P. 69–87.

Плещева Екатерина Александровна
Поступила 20.06.2010
аспирант
Уральский государственный университет им. А. М. Горького
e-mail: glukanat@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ $\mathcal{L}$-СПЛАЙНАМИ, ТОЧНЫМИ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ ЯДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА[1]

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Построены локальные $\mathcal{L}$-сплайны с равномерными узлами, сохраняющие подмножества из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ порядка r с постоянными действительными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого попарно различны. Найдены поточечные оценки погрешности аппроксимации построенными $\mathcal{L}$-сплайнами на классах функций, задаваемых с помощью дифференциальных операторов меньших порядков, чем r.

Ключевые слова: аппроксимация, локальные $\mathcal{L}$-сплайны, дифференциальный оператор.

E. V. Strelkova, V. T. Shevaldin. Approximation by local $\mathcal{L}$-splines that are exact on subspaces of the kernel of a differential operator.

We construct local $\mathcal{L}$-splines with uniform nodes that preserve subsets from the kernel of a linear differential operator $\mathcal{L}$ of order r with constant real coefficients and pairwise distinct roots of the characteristic polynomial. Pointwise estimates are found for the error of approximation by the constructed $\mathcal{L}$-splines on classes of functions defined by differential operators of orders smaller than r.

Keywords: approximation, local $\mathcal{L}$-splines, differential operator.

Введение

Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обозначим через

$$\Delta_h^r f(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} C_r^s f(x+sh)$$

конечную разность r-го порядка с шагом $h>0$. Полиномиальным B-сплайном (см., например, [1]) порядка r (степени $r-1$) называется функция

$$B_r(x) = K_r(h)\Delta_h^r\Big(\Big(x-\frac{rh}{2}\Big)_+\Big)^{r-1},$$

где $t_+ = \max\{0,t\}$ и нормирующий множитель $K_r(h)>0$ выбирается так, чтобы имело место равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} B_r(x-jh) = 1 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ясно, что при таком определении носителем B-сплайна является отрезок $[-rh/2, rh/2]$, $B_r \in C^{(r-2)}(\mathbb{R})$, $B_r(x)>0$ $(x\in(-rh/2, rh/2))$ и B_r имеет равномерные узлы в точках $\{-rh/2+jh\}_{j=0}^{r}$ (см. [1]).

В 1975 г. Т. Лич и Л. Шумейкер [2] (см. также [1]) построили локальные полиномиальные сплайны r-го порядка вида

$$S_r(x) = S_r(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{s=-k}^{k} \gamma_s f((j+s)h) B_r(x-jh) \qquad (x\in\mathbb{R}),$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00325) и УрО РАН в рамках совместного с учеными СО РАН проекта 09-C-1-1007.

где $k = [(r-1)/2]$ и действительные коэффициенты γ_s выбирались из условия точности формулы $S_r(f,x) = f(x)$ для многочленов степени $r-1$. Оказалось, что такой выбор может быть осуществлен единственным образом. Эта конструкция локальных полиномиальных сплайнов успешно применялась в вычислительной математике для решения многих прикладных задач, поскольку она имела очевидные преимущества (прежде всего, в силу простоты и локальности) перед интерполяционными полиномиальными сплайнами. Е. В. Стрелкова (Шевалдина) в работах [3; 4] построила локальные $\mathcal{L}$-сплайны (а затем исследовала их аппроксимативные свойства) соответственно четного и нечетного порядков r с равномерными узлами, сохраняющие все функции из ядра линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}$ с постоянными действительными коэффициентами, корни характеристического многочлена которого предполагались попарно различными. Построение этих сплайнов (в отличие от полиномиального случая [1; 2]) проводилось без использования тождеств Марсдена (т. е. представлений базисных функций ядра оператора через B-$\mathcal{L}$-сплайны) и без применения рекуррентных соотношений для B-$\mathcal{L}$-сплайнов, хотя известно, что эти свойства имеют место даже для более общих чебышевских сплайнов (см. [5]).

В настоящей работе предлагается единый подход (независимо от четности r) к построению еще более общих конструкций локальных $\mathcal{L}$-сплайнов, при котором сохраняется не все ядро оператора $\mathcal{L}$, а его произвольное подпространство. Возникающие при этом свободные параметры можно использовать, например, для построения новых схем локальных аппроксимаций $\mathcal{L}$-сплайнами, обладающих теми или иными формосохраняющими свойствами (для $\mathcal{L}$-сплайнов третьего порядка такие конструкции имеются, например, в работах [6–9]).

1. Построение локального $\mathcal{L}$-сплайна

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{r} (\mathcal{D} - \beta_j) \qquad (\beta_j \in \mathbb{R})$$

— линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, все корни β_j характеристического многочлена которого попарно различны. Пусть $\varphi_r(x)$ — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_r(\mathcal{D})f = 0$, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1} \qquad (j = \overline{0, r-1}),$$

где $\delta_{j,r-1}$ — символ Кронекера. Этими условиями однозначно определяются числа A_j в представлении $\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} A_j e^{\beta_j x}$. Если предположить, что какие-то числа A_j в этом представлении равны нулю, то тогда функция $\varphi_r(x)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_s(\mathcal{D})f = 0$, $s < r$, удовлетворяющего условиям: $\varphi_r^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, s-1}$. Отсюда следует тождество $\varphi_r(x) \equiv 0$, которое противоречит условию $\varphi_r^{(r-1)}(0) = 1$. Поэтому $A_j \neq 0$ $(j = \overline{1, r})$.

Для функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) = \prod_{j=1}^{r} (T - e^{\beta_j h} E) f(x) = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \mu_s f(x + sh) \tag{1.1}$$

— конечную разность с шагом h, соответствующую дифференциальному оператору $\mathcal{L}_r$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор. Разностный оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ выбран таким образом, что для любого решения линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_r(\mathcal{D})f = 0$ имеет место тождество

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_r} f(x) \equiv 0. \tag{1.2}$$

Оператор $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ впервые, вероятно, появился в работе А. Шармы и И. Цимбаларио [10] в задаче экстремальной функциональной интерполяции. B-$\mathcal{L}$-сплайн с носителем $\operatorname{supp} B = [0, rh]$ определим формулой (см., например, [11])

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_r}\varphi((x - rh)_+). \tag{1.3}$$

Для функции $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и произвольного фиксированного числа $\alpha\colon\ 0 \le \alpha < 1$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h) \qquad (j \in \mathbb{Z}). \tag{1.4}$$

Рассмотрим систему линейных функционалов

$$I_j = I_j(\alpha) = \sum_{s=1}^{r} c_s y_{j+s-1+\alpha} \qquad (j \in \mathbb{Z},\ c_s \in \mathbb{R}). \tag{1.5}$$

Локальный $\mathcal{L}$-сплайн, задающий линейный метод приближения функции f, определим формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_j B(x - jh). \tag{1.6}$$

При $x \in [lh, (l+1)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ в силу определения B-$\mathcal{L}$-сплайна имеем

$$S(x) = \sum_{j=l-r+1}^{l} I_j B(x - jh) = \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s y_{j+s-1+\alpha} B(x - jh). \tag{1.7}$$

Отметим, что в [3; 4] параметр α в аналогичных схемах выбирался равным $1/2$.

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_r(\mathcal{D})$ представим в виде

$$\mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_m(\mathcal{D})\mathcal{L}_{r-m}(\mathcal{D}), \qquad \mathcal{L}_m(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{m}(\mathcal{D} - \beta_j) \qquad (m \le r).$$

Коэффициенты c_s $(s = \overline{1, r})$ в представлении (1.5) будем определять таким образом, чтобы имели место равенства

$$S(e^{\beta_j \bullet}, x) = e^{\beta_j x} \qquad (x \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, m}), \tag{1.8}$$

т. е. мы требуем, чтобы построенная формулой (1.6) схема локальной аппроксимации с помощью $\mathcal{L}$-сплайнов была точна на подпространстве $V_m = \operatorname{Ker} \mathcal{L}_m$. Наша цель — показать, что равенства (1.8) приводят к невырожденной системе m линейных алгебраических уравнений относительно вектора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ неизвестных коэффициентов. В [3; 4] такая система при $\alpha = 1/2$ была исследована в случае $m = r$.

Для того чтобы сформулировать основной результат данного раздела, определим характеристический многочлен разностного оператора $\Delta_h^{\mathcal{L}_r}$ формулой

$$p(x) = p_{\mathcal{L}_r}(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - e^{\beta_j h})$$

и напомним, что коэффициенты A_j в формуле $\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} A_j e^{\beta_j x}$ условиями $\varphi_r^{(j)}(0) = \delta_{j,r-1}$ $(j = \overline{0, r-1})$ определяются однозначно, причем все $A_j \ne 0$ $(j = \overline{1, r})$.

Теорема 1. *Пусть действительные числа β_j $(j = \overline{1, r})$ попарно различны. Тогда система линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta_j (s-1)h} = \frac{e^{\beta_j (r-\alpha-1)h}}{A_j p'(e^{\beta_j h})}, \qquad j = \overline{1, m} \qquad (m \le r), \tag{1.9}$$

относительно вектора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ разрешима и ее решение обращает в тождества равенства (1.8).

Доказательство. Ранг системы линейных алгебраических уравнений (1.9) равен m, поскольку она содержит минор порядка m, являющийся определителем Вандермонда от элементов $x_j = e^{\beta_j h}$, которые в силу условия теоремы 1 попарно различны. Далее, $p'(e^{\beta_j h}) \neq 0$ $(j=\overline{1,r})$ также в силу того, что числа β_j попарно различны. Поэтому знаменатели в правых частях системы (1.9) в нуль не обращаются и система (1.9) имеет решение (при $m<r$ это решение, конечно, не единственное, а представляет собой линейное подпространство размерности $r-m$).

При исследовании равенства $S(e^{\beta_j \bullet},x) = e^{\beta_j x}$ для каждого фиксированного β_j $(j=\overline{1,m})$, чтобы не писать лишние индексы, положим $\beta_j = \beta$. Тогда при $x \in [lh,(l+1)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ из (1.7) следует, что

$$S(e^{\beta\bullet},x) = \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta(j+\alpha+s-1)h} B(x-jh) = MAe^{\beta\alpha h},$$

$M = \sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta h(s-1)}$, $A = \sum_{j=l-r+1}^{l} e^{\beta jh} B(x-jh)$. Поскольку

$$B(x) = \mu_r \varphi_r(x_+) - \mu_{r-1}\varphi_r((x-h)_+) + \ldots + (-1)^r \mu_0 \varphi_r((x-rh)_+)$$

(см. (1.1), (1.3)), то в силу определения функции-“срезки” t_+ имеем

$$\begin{gathered} A = e^{\beta(l-r+1)h}\left[\mu_r\varphi_r(x-(l-r+1)h) - \mu_{r-1}\varphi_r(x-(l-r+2)h) + \ldots + (-1)^{r-1}\mu_1\varphi_r(x-lh)\right] \\ + e^{\beta(l-r+2)h}\left[\mu_r\varphi_r(x-(l-r+2)h) - \mu_{r-1}\varphi_r(x-(l-r+3)h) + \ldots + (-1)^{r-2}\mu_2\varphi_r(x-lh)\right] \\ + \ldots + e^{\beta(l-1)h}\left[\mu_r\varphi_r(x-(l-1)h) - \mu_{r-1}\varphi_r(x-lh)\right] + e^{\beta lh}\mu_r\varphi_r(x-lh). \end{gathered}$$

Поскольку $\varphi_r(x) = \sum_{j=1}^{r} A_j e^{\beta_j x}$, то $A = \sum_{j=1}^{r} C_j A_j$, где

$$\begin{gathered} C_j = e^{\beta(l-r+1)h+\beta_j(x-lh)}\left\{\left[\mu_r e^{\beta_j(r-1)h} - \mu_{r-1}e^{\beta_j(r-2)h} + \ldots + (-1)^{r-1}\mu_1\right] + e^{\beta h}\left[\mu_r e^{\beta_j(r-2)h}\right.\right. \\ \left.\left. - \mu_{r-1}e^{\beta_j(r-3)h} + \ldots + (-1)^{r-2}\mu_2\right] + \ldots + e^{\beta(r-2)h}\left[\mu_r e^{\beta_j h} - \mu_{r-1}\right] + e^{\beta(r-1)h}\mu_r\right\} \\ = e^{\beta(l-r+1)h+\beta_j(x-lh)}\left\{\mu_r\left[e^{\beta_j(r-1)h} + e^{\beta h+\beta_j(r-2)h} + \ldots + e^{\beta(r-2)h+\beta_j h} + e^{\beta(r-1)h}\right]\right. \\ \left. - \mu_{r-1}\left[e^{\beta_j(r-2)h} + e^{\beta h+\beta_j(r-3)h} + \ldots + e^{\beta(r-2)h}\right] + \ldots + (-1)^{r-2}\mu_2\left[e^{\beta_j h} + e^{\beta h}\right] + (-1)^{r-1}\mu_1\right\}. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Напомним, что мы зафиксировали один из корней характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_r$ и обозначили его через β. Покажем, что для любого $\beta_\nu \neq \beta$ имеет место равенство

$$C_\nu = 0.$$

Суммируя геометрические прогрессии в (1.10) при $\beta_\nu \neq \beta$, получаем

$$\begin{gathered} C_\nu = e^{\beta(l-r+1)h+\beta_\nu(x-lh)}(e^{\beta_\nu h} - e^{\beta h})^{-1}\left[\mu_r(e^{\beta_\nu rh} - e^{\beta rh}) - \mu_{r-1}(e^{\beta_\nu(r-1)h} - e^{\beta(r-1)h})\right. \\ \left. + \ldots + (-1)^{r-2}\mu_2(e^{2\beta_j h} - e^{2\beta h}) + (-1)^{r-1}\mu_1(e^{\beta_j h} - e^{\beta h}) + (-1)^r(\mu_0 - \mu_0)\right] \\ = e^{\beta(l-r+1)h+\beta_\nu(x-lh)}(e^{\beta_\nu h} - e^{\beta h})^{-1}\left(\Delta_h^{\mathcal{L}_r}(e^{\beta_\nu t} - e^{\beta t})\right)\Big|_{t=0} = 0 \end{gathered}$$

в силу равенства (1.2). Таким образом, сумма $A = \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu A_\nu$ состоит только из одного слагаемого, соответствующего зафиксированному числу β. Не ограничивая общности, считаем далее $\beta = \beta_1$. С учетом доказанного имеем

$$A = C_1 A_1 = e^{\beta_1 h(l-r+1)+\beta_1(x-lh)} A_1 \left[r\mu_r e^{\beta_1(r-1)h} - (r-1)\mu_{r-1}e^{\beta_1(r-2)h} + \ldots\right.$$

$$+ (-1)^{r-2} 2\mu_2 e^{\beta_1 h} + (-1)^{r-1}\mu_1\Big].$$

Поскольку $p(x) = \prod_{j=1}^{r}(x - e^{\beta_j h}) = \sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\mu_s x^s$, то

$$p'(e^{\beta_1 h}) = r\mu_r e^{(r-1)\beta_1 h} - (r-1)\mu_{r-1} e^{(r-2)\beta_1 h} + \ldots + (-1)^{r-2} 2\mu_2 e^{\beta_1 h} + (-1)^{r-1}\mu_1.$$

Следовательно,

$$A = A_1 e^{\beta_1(x-(r-1)h)} p'(e^{\beta_1 h}).$$

Отсюда, используя условие $S(e^{\beta_1 \bullet}, x) = e^{\beta_1 x}$, выводим первое уравнение системы (1.9) линейных уравнений относительно вектора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_r)$ неизвестных коэффициентов

$$\sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta_1(s-1)h} = \frac{e^{\beta_1(r-\alpha-1)h}}{A_1 p'(e^{\beta_1 h})}.$$

В силу произвольного выбора числа $\beta = \beta_1$ — корня характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_m(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{m}(\mathcal{D} - \beta_j)$ можно утверждать, что остальные $m-1$ уравнений (соответствующие корням $\beta_2, \ldots, \beta_m$) будут иметь такую же структуру. Теорема 1 полностью доказана.

2. Оценка погрешности аппроксимации

Пусть, как и раньше, $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{r}(\mathcal{D} - \beta_j)$ $(r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$ — линейный дифференциальный оператор порядка r с постоянными действительными коэффициентами, у которого корни β_j характеристического многочлена — попарно различные действительные числа. В разд. 1 оператор $\mathcal{L}_r$ мы представили в виде

$$\mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_m(\mathcal{D})\mathcal{L}_{r-m}(\mathcal{D}), \qquad \mathcal{L}_m(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{m}(\mathcal{D} - \beta_j) \qquad (m \leq r)$$

и построили локальные $\mathcal{L}$-сплайны с равномерными узлами $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, точные на всех функциях из подпространства $V_m = \operatorname{Ker}\mathcal{L}_m$. В свою очередь, оператор $\mathcal{L}_m$ представим в виде

$$\mathcal{L}_m(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_n(\mathcal{D})\mathcal{L}_{m-n}(\mathcal{D}), \qquad \mathcal{L}_n(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^{n}(\mathcal{D} - \beta_j) \qquad (n < m).$$

Рассмотрим отрезок $[a, b] = [(l-r+1+\alpha)h, (l+r-1+\alpha)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ и пусть $AC = AC[a, b]$ — класс функций f, заданных на $[a, b]$ и абсолютно непрерывных на этом отрезке. Определим на отрезке $[a, b]$ соболевский класс функций, ассоциированный с оператором $\mathcal{L}_n$, следующим образом:

$$W_p^{\mathcal{L}_n} = W_p^{\mathcal{L}_n}[a, b] = \{f\colon\ f^{(n-1)} \in AC,\ \|\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f\|_{L_p[a,b]} \leq 1\} \qquad (1 \leq p \leq \infty).$$

Норма в пространстве $L_p[a, b]$ определяется, как обычно, при помощи равенств

$$\|g\|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|g\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname{ess}\sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Пусть φ_n — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi_n^{(j)}(0) = \delta_{j,n-1}$ $(j = \overline{0, n-1})$. Любая функция $f \in W_p^{\mathcal{L}_n}$ может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e^{\beta_\nu x} + \int\limits_0^x \varphi_n(x-t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где λ_ν $(\nu = \overline{1, n})$ — произвольные действительные коэффициенты. Пусть $B(x) = B_{\mathcal{L}_r}(x)$ — B-$\mathcal{L}$-сплайн порядка r, соответствующий оператору $\mathcal{L}_r$ и определенный формулой (1.3). Пусть также $S(x) = S(f,x)$ — локальный $\mathcal{L}$-сплайн (1.6), для которого коэффициенты c_s $(s = \overline{1, r})$ в функционале (1.5) определяются в соответствии с теоремой 1 (т. е. исходя из равенств (1.9)). Введем функцию

$$K(x,t) = K_{n,m,r}(x,t) = \varphi_n\left((x-t)_+\right) - \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s B_r(x-jh)\varphi_n\left(((j+s-1+\alpha)h - t)_+\right),$$

$$x \in [lh, (l+1)h] \qquad (l \in \mathbb{Z}), \qquad t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

Эта функция является ядром интегрального представления разности $f(x) - S(x)$ (см. далее доказательство теоремы 2) для $f \in W_p^{\mathcal{L}_n}$. Отметим, что по переменной x функция $K(x,t)$ является $\mathcal{L}$-сплайном r-го порядка, соответствующим оператору $\mathcal{L}_r$, а по переменной t — $\mathcal{L}$-сплайном порядка n, соответствующим сопряженному линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_n^*(\mathcal{D}) = \prod_{j=1}^n (\mathcal{D} + \beta_j)$.

Теорема 2. *Пусть действительные числа β_j $(j = \overline{1, r})$ попарно различны. Тогда имеет место поточечное равенство*

$$\sup_{f \in W_p^{\mathcal{L}_n}[a,b]} |f(x) - S(x)| = \|K(x, \bullet)\|_{L_{p'[a,b]}}, \qquad x \in [lh, (l+1)h] \qquad (l \in \mathbb{Z}),$$

$$1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Доказательство. Поскольку в силу (1.4) $y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h)$ $(0 \le \alpha < 1)$, то из (1.7) и (2.1) для любой функции $f \in W_p^{\mathcal{L}_n}$ $(1 \le p \le \infty)$ при $x \in [lh, (l+1)h]$ выводим, что

$$S(x) = \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s f((j+s-1+\alpha)h) B(x-jh)$$

$$= \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s \left[\sum_{\nu=1}^{m} \lambda_\nu e^{\beta_\nu (j+s-1+\alpha)h} + \int\limits_0^{(j+s-1+\alpha)h} \varphi_n((j+s-1+\alpha)h - t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt \right] B(x-jh).$$

Из (2.1) и последнего равенства следует, что $f(x) - S(x) = J_1 + J_2$, где J_1 — сумма неинтегральных слагаемых, а J_2 — сумма нескольких интегралов. Покажем, что $J_1 = 0$. В самом деле,

$$J_1 = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \left\{ e^{\beta_\nu x} - \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s e^{\beta_\nu (j+s-1+\alpha)h} B(x-jh) \right\} = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (e^{\beta_\nu x} - S(e^{\beta_\nu \bullet}, x)) = 0,$$

поскольку для чисел $c_1, c_2, \ldots, c_r$ имеют место равенства (1.8) и $n < m \le r$. Поэтому при $x \in [lh, (l+1)h]$ имеем

$$f(x) - S(x) = J_2 = \int\limits_0^x \varphi_n(x-t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt$$

$$- \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s B(x-jh) \int\limits_{0}^{(j+s-1+\alpha)h} \varphi_n((j+s-1+\alpha)h-t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt. \qquad (2.3)$$

Далее,

$$\int\limits_{0}^{(l-r+1+\alpha)h} \left\{\varphi_n(x-t) - \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s \varphi_n((j+s-1+\alpha)h-t)B(x-jh)\right\}\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt$$

$$= \int\limits_{0}^{(l-r+1+\alpha)h} \left[\varphi_n(x-t) - S(\varphi_n(x-t),x)\right]\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt = 0$$

также в силу равенств (1.8). Следовательно, из (2.3) окончательно получаем

$$f(x) - S(x) = \int\limits_{(l-r+1+\alpha)h}^{x} \varphi_n(x-t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt - \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s B(x-jh)$$

$$\times \int\limits_{(l-r+1+\alpha)h}^{(l+r-1+\alpha)h} \varphi_n((j+s-1+\alpha)h-t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt$$

$$= \int\limits_{(l-r+1+\alpha)h}^{(l+r-1+\alpha)h} \left[\varphi_n\left((x-t)_+\right) - \sum_{j=l-r+1}^{l} \sum_{s=1}^{r} c_s B(x-jh)\varphi_n\left(((j+s-1+\alpha)h-t)_+\right)\right]\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt$$

$$= \int\limits_{a}^{b} K(x,t)\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)\,dt, \qquad x \in [lh,(l+1)h]\,,$$

где ядро $K(x,t)$ определено формулой (2.2) и $[a,b] = [(l-r+1+\alpha)h,(l+r-1+\alpha)h]$. Из полученного интегрального представления, применяя неравенство Гельдера, выводим оценку

$$\begin{gathered} |f(x) - S(x)| \le \|K(x,\bullet)\|_{L_{p'[a,b]}} \|\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f\|_{L_{p[a,b]}}, \quad x \in [lh,(l+1)h]\,, \\ 1 \le p \le \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \end{gathered} \qquad (2.4)$$

Для каждого фиксированного числа $x \in [lh,(l+1)h]$ на классе функций $W_p^{\mathcal{L}_n}[a,b]$ полученная оценка неулучшаема, причем при $1 < p < \infty$ знак равенства реализует любая функция $f \in W_p^{\mathcal{L}_n}[a,b]$ (зависящая от x), удовлетворяющая условиям: $\operatorname{sign}\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t) = \operatorname{sign}K(x,t)$ (п. в. по t на $[a,b]$), $|\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t)|^p = \lambda(x)|K(x,t)|^{p'}$ (п. в. по t на $[a,b]$), и множитель $\lambda(x)$ выбирается так, чтобы $\|\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f\|_{L_p[a,b]} = 1$.

При $p = \infty$ знак равенства в неравенстве (2.4) реализует любая функция $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_n}[a,b]$, которая удовлетворяет условию $\mathcal{L}_n(\mathcal{D})f(t) = \operatorname{sign}K(x,t)$ (п. в. по t на $[a,b]$).

При $p = 1$ экстремальной функции f нет, но стандартным образом строится экстремальная последовательность функций, реализующая точную верхнюю грань в неравенстве (2.4).

Таким образом, при $1 \le p \le \infty$ имеет место поточечное равенство

$$\sup_{f \in W_p^{\mathcal{L}_n}[a,b]} |f(x) - S(x)| = \|K(x,\bullet)\|_{L_{p'[a,b]}}, \qquad x \in [lh,(l+1)h] \qquad (l \in \mathbb{Z}).$$

Теорема 2 полностью доказана. □

Следствие. *Если действительные числа β_j $(j=\overline{1,r})$ попарно различны, то имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W_p^{\mathcal{L}_n}[a,b]} \|f-S\|_{C[lh,(l+1)h]} = \max_{x\in[lh,(l+1)h]} \|K(x,\bullet)\|_{L_{p'}[a,b]} \qquad (l\in\mathbb{Z}),$$

$$1\le p\le\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $\mathcal{L}_r(\mathcal{D})=\prod_{j=1}^{r}(\mathcal{D}-\beta_j)$ — линейный дифференциальный оператор r-го порядка с постоянными действительными коэффициентами, характеристический многочлен которого имеет попарно различные корни, среди которых могут быть и комплексные числа. Заметим, что если число $\beta_j=\gamma_j+i\alpha_j$ $(\alpha_j\ne 0,\ \gamma_j\in\mathbb{R},\ i$ — мнимая единица) является корнем этого многочлена, то число $\overline{\beta_j}=\gamma_j-i\alpha_j$ — также его корень. Для того чтобы соответствующий минор порядка m из теоремы 1 был не равен нулю, достаточно требовать, чтобы оператор $\mathcal{L}_m$ имел постоянные действительные коэффициенты и числа $e^{\beta_j h}$ были также попарно различны. Это условие будет заведомо выполнено, если для числа $\theta=\max_j|\alpha_j|$ (максимума из модулей мнимых частей корней характеристического многочлена оператора $\mathcal{L}_m$) будет выполнено неравенство $\theta h<\pi$. При выполнении этого требования для оператора $\mathcal{L}_r$ также будут иметь место утверждения теоремы 1. Если к отмеченным условиям добавить условие, что все коэффициенты характеристического многочлена для оператора $\mathcal{L}_n$ являются действительными числами, то в этом случае будет иметь место и теорема 2.

З а м е ч а н и е 2. Дальнейшее изучение величины погрешности аппроксимации локальными $\mathcal{L}$-сплайнами сводится к исследованию свойств ядра $K(x,t)$ и оценке его нормы как функции от h. Эта задача, вероятно, более трудная, чем в полиномиальном случае, так как коэффициенты c_s $(s=\overline{1,r})$ в формулах локальной аппроксимации достаточно сложно зависят от h. Мы предполагаем, что в случае $m=r,\ n=r-1,\ \beta_r=0$ величина погрешности аппроксимации локальными сплайнами вида (1.6) на классе функций $W_\infty^{\mathcal{L}_{r-1}}$ совпадает по порядку с величиной колмогоровского поперечника указанного класса функций в равномерной метрике. В [4] это предположение доказано для формально самосопряженных дифференциальных операторов третьего порядка вида $\mathcal{L}_3(\mathcal{D})=\mathcal{D}(\mathcal{D}^2-\beta^2)$ при $\beta>0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, no. 4. P. 294–325.
3. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора // Изв. ТулГУ. 2009. Т. 2. С. 62–73. (Естественные науки.)
4. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.
5. **Wronicz Z.** Chebyshevian splines: Dissertationes Mathematical / Polska Acad. Nauk, Inst. Matematyczny. Warszawa, 1990. 99 p.
6. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными L-сплайнами, соответствующими линейному дифференциальному оператору второго порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 2. С. 195–213.
7. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраняющая некоторые свойства аппроксимирующих функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 2. С. 156–166.
8. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные L-сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Збiрник праць Iн-ту математики НАН України. 2008. Т. 5, № 1. С. 124–141.

9. **Субботин Ю.Н.** Формосохраняющая экспоненциальная аппроксимация // Изв. вузов. Математика. 2009. Т. 11. С. 53–60.
10. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, вып. 2. С. 161–173.
11. **ter Morsche H.G.** Interpolation and extremal properties of $\mathcal{L}$-spline functions: dis. Eindhoven: Techinische Hogeschool Eindhoven, 1982. 124 p.

Поступила 1.02.2010

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Институт математики и механики УрО РАН

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Том 16 № 4 2010

УДК 517.5

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

Рассматриваются краевые задачи в круге и кольце для однородных уравнений с оператором Лапласа первого и второго порядков. Дается представление решений через построенные ранее базисы гармонических всплесков пространств Харди гармонических функций в круге и в кольце.

Ключевые слова: оператор Лапласа, гармонические и бигармонические функции, краевые задачи, гармонические всплески, круг, кольцо.

Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. Harmonic wavelets in boundary value problems for harmonic and biharmonic functions.

We consider boundary value problems in a disk and in a ring for homogeneous equations with the Laplace operator of the first and second orders. Solutions are represented in terms of bases of harmonic wavelets in Hardy spaces in a disk and in a ring, which were constructed earlier.

Keywords: Laplace operator, harmonic and biharmonic functions, boundary value problems, harmonic wavelets, disk, ring.

1. Краевые задачи для гармонических функций в круге и кольце

В работе [1] решения задач Дирихле в круге $K=\{z\colon\ |z|<1\}$ и кольце $R_\rho=\{z\colon\ 0<\rho<|z|<1\}$ для оператора Лапласа $\Delta=u''_{xx}+u''_{yy}$ были представлены в виде быстро сходящихся рядов по построенным там следующим системам гармонических полиномов, названных гармоническими всплесками:
для круга K:

$$\{1,\ \mathcal{W}_{jk}(z),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{jk}(z)\colon\ j,k\in\mathbb{Z},\ j\ge 1,\ 0\le k\le 2^{j-1}-1\};\tag{1.1}$$

для кольца R_ρ:

$$\Big\{1,\ \frac{\ln|z|}{\ln\rho},\ \mathcal{W}_{jk}(z),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{jk}(z),\ \mathcal{W}_{jk}\Big(\frac{\rho}{z}\Big),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{jk}\Big(\frac{\rho}{z}\Big)\colon\ j,k\in\mathbb{Z},\ j\ge 1,\ 0\le k<2^{j-1}\Big\}.\tag{1.2}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $z=|z|e^{ix}=re^{ix}$,

$$\mathcal{W}_{jk}(z)=\sum_\nu \theta^\nu_{jk}|z|^\nu\cos\nu x,\qquad \widetilde{\mathcal{W}}_{jk}(z)=\sum_\nu \theta^\nu_{jk}|z|^\nu\sin\nu x,\tag{1.3}$$

и суммирование по ν распространено на целые ν из интервала $(2^{j-1}(1-\varepsilon),2^j(1+\varepsilon))$ (ε — фиксированное число из промежутка $(0,\ 1/3]$),

$$\theta^\nu_{jk}=2^{\frac{3-j}{2}}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^j}\Big)\sin\frac{2\pi\nu(k+1/2)}{2^j},$$

а $\widehat{\theta}(\omega)=\widehat{\theta}_\varepsilon(\omega)$ (см. [1]) — функция с носителем $(1-\varepsilon)/2<|\omega|<(1+\varepsilon)$, заимствованная у Y. Meyer'а [2] ($\varepsilon=1/3$) и D. Offin'а–K. Oskolkov'а [3] ($0<\varepsilon<1/3$), которая является преобразованием Фурье функции $\psi_\varepsilon(x-1/2)$, порождающей ортонормированные в $L^2(R)$ базисы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00320, 08-01-00213 и 09-01-00014) и УрО РАН (проект 09-T-1-1004) в рамках программы фундаментальных исследований ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

всплесков $\{2^{1/2}\psi_\varepsilon(2^j x-k)\colon\ j,k\in\mathbb{Z}\}$, $\widehat{\theta}_\varepsilon(\omega)=\int_R \psi_\varepsilon(x-1/2)e^{-2\pi i x\omega}\,d\omega=e^{-i\pi\omega}\widehat{\psi}_\varepsilon(\omega)$. Система функций (1.1) является базисом всех пространств $h_p(K)$ $(1\le p\le\infty)$ Харди гармонических функций. Она ортонормирована относительно скалярного произведения

$$(f,g)=(f(z),g(z))=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial K} f(\xi)\overline{g}(\zeta)\,\frac{d\zeta}{i\zeta},$$

поэтому решение задачи Дирихле

$$\Delta u(z)=0 \ \text{ в } \ K,\qquad u\Big|_{\partial K}=\varphi(\zeta),\qquad \zeta=e^{ix}$$

в $h_p(K)$, $1\le p\le\infty$ представляется рядом

$$u(z)=(\varphi,1)+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^{j-1}-1}\Big((\varphi,\mathcal{W}_{jk})\mathcal{W}_{jk}(z)+(\varphi,\widetilde{\mathcal{W}}_{jk})\widetilde{\mathcal{W}}_{jk}(z)\Big). \tag{1.4}$$

Напомним (см. [4]), что классы h_p гармонических функций $u(z)$ можно характеризовать в терминах предельных граничных значений $\varphi(\zeta)$: при $p>1$ — условием $\varphi(e^{ix})\in L^p(0,2\pi]$; при $p=1$ — условиями, что $\varphi(\zeta)$ является граничным значением функции $\operatorname{Re} f'(z)$, где $f(z)$ — аналитическая в круге K функция из класса Харди $H^\infty(K)$, и что функция предельных угловых граничных значений $f(e^{ix})$ абсолютно непрерывна на вещественной оси $\mathbb{R}$. При $p=\infty$ под $h_\infty(K)$ будем понимать класс гармонических в K и непрерывных в $\overline{K}$ функций, что равносильно условию $\varphi(\zeta)\in C(\mathbb{R})$. Классы Харди h_p в R_ρ характеризуются точно таким же образом условиями на граничные значения $\varphi(\zeta)$ функций $u(z)$ на ∂R_ρ. Для ссылок на эти условия будем применять формулировку: пусть $\varphi(\zeta)\in\Lambda^p(\Gamma)$ $(1\le p\le\infty)$, где $\Gamma=\partial K$ или ∂R_ρ. При этом для $p=1$ труднопроверяемое сформулированное условие будем для простоты заменять на более жесткое (но прозрачное) условие $\varphi(\zeta)\in L\log^+ L(\Gamma)$, т. е. $|\varphi(\zeta)|\log(|f(\zeta)|+1)\in L(\Gamma)$.

Для системы (1.2) в [1] построена следующая система, "биортогональная" относительно "квазискалярного" произведения билинейной формы $\langle f,g\rangle_{\partial R_\rho}=1/(2\pi)\oint_{\partial R_\rho} f(\zeta)g(\zeta)\,d\zeta/i\zeta$ с положительным обходом контура интегрирования (когда область остается слева):

$$\Big\{1-\frac{\ln|\zeta|}{\ln\rho},\ -1,\ \mathcal{W}^\rho_{jk}(z),\ \widetilde{\mathcal{W}}^\rho_{jk}(z),\ -\mathcal{W}^\rho_{jk}\Big(\frac{\rho}{z}\Big),\ -\widetilde{\mathcal{W}}^\rho_{jk}\Big(\frac{\rho}{z}\Big)\colon\ j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}_+,\ 0\le k<2^{j-1}\Big\}, \tag{1.5}$$

где

$$\mathcal{W}^\rho_{jk}(z)=\sum_\nu \theta^\nu_{jk}\frac{|z|^\nu}{1-\rho^{2\nu}}\cos\nu x,\qquad \widetilde{\mathcal{W}}^\rho_{jk}(z)=\sum_\nu \theta^\nu_{jk}\frac{|z|^\nu}{1-\rho^{2\nu}}\sin\nu x. \tag{1.6}$$

Поэтому решение задачи Дирихле в классе $h_p(R_\rho)$ типа Харди $(1\le p\le\infty)$

$$\Delta u=0 \ \text{ в } \ R_\rho,\qquad u(\zeta)\Big|_{\partial R_\rho}=\varphi(\zeta)=\begin{cases}\varphi_1(e^{ix}), & \zeta=e^{ix},\\ \varphi_\rho(e^{ix}), & \zeta=\rho e^{ix}\end{cases}$$

в кольце R_ρ представляется рядом

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_1(e^{ix})\,dx+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi_\rho(e^{ix})-\varphi_1(e^{ix}))\,dx\frac{\ln|z|}{\ln\rho}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^{j-1}-1}\Big\{\langle\varphi(\zeta),\mathcal{W}^\rho_{jk}(\zeta)\rangle_{\partial R_\rho}\mathcal{W}_{jk}(z)$$

$$+\langle\varphi(\zeta),\widetilde{\mathcal{W}}^\rho_{jk}(\zeta)\rangle_{\partial R_\rho}\widetilde{\mathcal{W}}^\rho_{jk}(z)-\Big\langle\varphi(\zeta),\mathcal{W}^\rho_{jk}\Big(\frac{\rho}{\zeta}\Big)\Big\rangle_{\partial R_\rho}\mathcal{W}_{jk}\Big(\frac{\rho}{z}\Big)-\Big\langle\varphi(\zeta),\widetilde{\mathcal{W}}_{jk}\Big(\frac{\rho}{\zeta}\Big)\Big\rangle_{\partial R_\rho}\widetilde{\mathcal{W}}_{jk}\Big(\frac{\rho}{z}\Big)\Big\}. \tag{1.7}$$

Оба ряда (1.4) и (1.7) сходятся равномерно в замкнутых областях $\overline{K}$ и $\overline{R}_\rho$ при непрерывных функциях $\varphi_1(x)$, $\varphi_\rho(x)$, и для этих рядов в [1, теорема 6] получена точная по порядку оценка скорости сходимости из $\Lambda^p(\Gamma)$ по норме пространств $h_p(K)$ и $h_p(R_\rho)$ через наилучшие приближения в $L^p[0,2\pi]$ $(1 \le p \le \infty,\ L^\infty[0,2\pi] = C_{2\pi})$ функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_\rho(x)$ из $\Lambda^p(\Gamma)$.

Рассмотрим далее задачу Неймана в круге K и кольце R_ρ и смешанную задачу Дирихле — Неймана в R_ρ $(0 < \rho < 1)$. Введем сначала следующее обозначение, связав с каждой функцией $\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(z)$ функцию

$$\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}^{[1]}_{j,k}(z) = \sum_\nu \theta^\nu_{jk} \nu |z|^\nu \overset{(\sin)}{\cos} \nu x,$$

где последнюю формулу надо понимать как две: 1) убрав верхние символы $(\sim)$ и $(\sin)$ или 2) заменив одновременно $(\sim)$ на $\sim$, и $\cos$ в правой части на $\sin$. Аналогичным образом и далее новую формулу с такими верхними символами нужно понимать как две формулы. Ясно, что

$$\partial/\partial r \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(z) = 1/|z| \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}^{[1]}_{j,k}(z), \qquad \partial/\partial r \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(\rho/z) = -1/|z| \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}^{[1]}_{j,k}(\rho/z).$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Решение задачи Неймана* $\big\{\Delta u = 0$ *в* K, $\partial u/\partial r\big|_{\partial K} = \Psi(\zeta)\big|_{\zeta = e^{ix}} \in \Lambda^p(\partial K)\big\}$ *в классе гармонических функций с ограниченной по* $r \in (0,1)$ *в* $L^p(0,2\pi)$ *производной* $\partial u(re^{ix})/\partial r$ *представляется рядом*

$$u(z) = A_0 + \sum_{j=1}^\infty \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1} \Big\{ \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \psi(\zeta) \mathcal{W}^{[-1]}_{jk}(\zeta) \frac{d\zeta}{i\zeta} \Big) \mathcal{W}_{jk}(z) + \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \psi(\zeta) \widetilde{\mathcal{W}}^{[-1]}_{jk}(\zeta) \frac{d\zeta}{i\zeta} \Big) \widetilde{\mathcal{W}}_{jk}(z) \Big\}, \tag{1.8}$$

где A_0 — *произвольная константа,* $\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}^{[-1]}_{j,k}(z) = \sum_\nu \theta^\nu_{jk} 1/\nu\ |z|^\nu \overset{(\sin)}{\cos} \nu x$ *и ряд* (1.8) *при* $p = \infty$ *сходится равномерно в замкнутом круге* $\overline{K}$, *а для других* p *он сходится по норме* $h_p(K)$. *Скорость сходимости частичных сумм ряда, охватывающих первые* J *членов внешнего ряда, такая же, как у ряда* (1.4), *т. е. сравнима по порядку со скоростью убывания наилучших приближений* $E_N(\Psi)_p$ *тригонометрическими полиномами порядка* $N = 2^J(1-\varepsilon)$ *в* $L^p(0,2\pi)$ *граничных значений* $\psi(e^{ix})$.

Доказательство. Известно (см., например, [5]), что решение этой задачи Неймана существует и определено с точностью до аддитивной константы A_0. Для сокращения формул последующие рассуждения проведем для случая четного по x граничного значения $\partial u/\partial r\big|_{z=e^{ix}}$. Тогда функция $u(z) = u(re^{ix})$ тоже будет четной по x, и в силу непрерывности граничных значений функции $u(z)$ в замкнутом круге $K_t = \{z\colon |z| \le t < 1\}$, переформулируя на K_t теорему о равномерной сходимости и дифференцируемости [5] разложений непрерывных в $\overline{K}$ гармонических функций $u(z)$, получим $u(z) = A_0 + \sum_{j,k} A_{j,k} \mathcal{W}_{j,k}(z/t)$, где $A_{j_1,k_1} = 1/2\pi \int_{|\zeta|=t} u(\zeta) \mathcal{W}_{j_1,k_1}(\zeta/t) d\zeta/i\zeta$. Из (1.3) и определения функций $\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}$ и $\mathcal{W}^{[-1]}_{j,k}$ в силу равенства Парсеваля для тригонометрической системы следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=t} \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{\zeta}{t}\Big) \mathcal{W}_{j_1,k_1}\Big(\frac{\zeta}{t}\Big) \frac{d\zeta}{i\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=t} \mathcal{W}^{[1]}_{j,k}\Big(\frac{\zeta}{t}\Big) \mathcal{W}^{[-1]}_{j_1,k_1}\Big(\frac{\zeta}{t}\Big) \frac{d\zeta}{i\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=t} \Big(\frac{\zeta}{t}\Big) \Big(\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{W}_{j,k}(z)\Big)\Big|_{z=\frac{\zeta}{t}} \mathcal{W}^{[-1]}_{j_1,k_1}\Big(\frac{\zeta}{t}\Big) \frac{d\zeta}{i\zeta}.$$

Поэтому

$$A_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=t} \frac{\partial u(z)}{\partial r}\ \Big|_{z=\frac{\zeta}{t}} \mathcal{W}^{[-1]}_{j,k}\Big(\frac{\zeta}{t}\Big)\ \frac{d\zeta}{i\zeta}.$$

При $t \to 1$ для функций с ограниченной по r в $L^p(0,2\pi]$ производной $\partial u(re^{ix})/\partial r$ получаем

$$A_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \psi(\zeta) \mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}(\zeta)\ \frac{d\zeta}{i\zeta},$$

оправдывая форму ряда (1.8). Обозначим через $S_{2^J}(z,u)$ частную сумму ряда (1.8) с пределами суммирования по j от 1 до $J-1$. Эта функция принадлежит пространству V_j гармонических в K полиномов, $V_J = \{\mathrm{const}\} \dot{+} \oplus_{j=1}^{J-1} W_j$, где W_j — подпространство гармонических полиномов с базисом (1.1) при фиксированном j, а из вывода формул для коэффициентов $A_{j,k}$ следует, что $S_{2^J}(z,u)$ — ортогональная проекция на V_J. Следовательно, ее можно представить через ортонормированную систему $\{1,\ \mathcal{V}_{J,k}(z),\ \widetilde{\mathcal{V}}_{J,k}(z):\ \ k=0,1,\dots,2^{J-1}-1\}$ — базис пространства V_J, где $\overset{(\sim)}{\mathcal{V}}_{J,k}(z) = \sum_\mu \varphi_{J,k}^\mu |z|^\mu \overset{(\sin)}{\cos}\mu x$ с $\varphi_{J,k}^\mu = 2^{(3-J)/2}\widehat{\varphi}(\mu/2^J)\sin(2\pi\mu k/2^J)$, $\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — финитная функция с носителем $[0,(1+\varepsilon)/2]$, $\widehat{\varphi}(\omega) \equiv 1$ на интервале $0 \le \omega \le (1-\varepsilon)/2$, а при $(1-\varepsilon)/2 < \omega < (1+\varepsilon)/2$ совпадает со значениями $\theta(2\omega)$ описанной выше функции $\theta(\omega)$. Получим в силу предположения о четности $u(re^{ix})$

$$S_{2^J}(z,u) = A_0 + \sum_{k=0}^{2^J-1} a_{J,k}\mathcal{V}_{J+1,k}(z),$$

где $a_{J,k} = (1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{ix})\mathcal{V}_{j,k}(e^{ix})\,dx$. Определяя по аналогии с $\mathcal{W}_{j,k}^{[1]}$, $\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}$ функции $\overset{(\sim)}{\mathcal{V}}{}_{j,k}^{[\pm1]}(z) = \sum_\mu \varphi_{j,k}^\mu \mu^{(\pm1)}|z|^\mu \overset{(\sin)}{\cos}\mu x$, видим, что $(1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{V}_{j,k}(e^{ix})\mathcal{V}_{j_1,k_1}(e^{ix})\,dx = (1/2\pi)\times \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathcal{V}_{j,k}^{[1]}(e^{ix}) \times \mathcal{V}_{j_1,k_1}^{[-1]}(e^{ix})\,dx = (1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} \partial\mathcal{V}_{j,k}(re^{ix})/\partial r\big|_{r=1}\mathcal{V}_{j,k}^{[-1]}(e^{ix})\,dx$. Поэтому в $S_{2^J}(z,u)$ имеем $a_{J,k}(u) = (1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(e^{ix})\mathcal{V}_{J,k}^{[-1]}(e^{ix})\,dx$.

В работе [1, теорема 6] доказано, что последовательность

$$S_{2^J}(z,u) = A_0 + \sum_{k=0}^{2^J-1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int u(e^{ix})\mathcal{V}_{J+1,k}(e^{ix})\,dx\Big)\mathcal{V}_{J+1,k}(z)$$

сходится равномерно в $\overline{K}$ к $u(z)$, если граничные значения $u(e^{ix})$ непрерывны, а если знаем только, что $u(e^{ix}) \in \Lambda^p(0,2\pi]$ $(1 \le p < \infty)$, что обеспечивает включение $u(z) \in h_p(K)$, то эта последовательность сходится к $u(z)$ по норме пространства Харди $h_p(K)$, в частности внутри K — равномерно. Там же даны оценки скорости сходимости.

Далее, так как постановка задачи Неймана (условия на ψ) предполагает, что по функции $\psi(e^{ix}) = \partial u(re^{ix})/\partial r\ \big|_{r=1}$ гармоническую в K функцию $u(z)$ можно восстановить (с точностью до константы), то тем более можно восстановить точно гармоническую (см., например, [5]) функцию $v(z) = r(\partial u(re^{ix})/\partial r)$, у которой $v(e^{ix}) = \psi(e^{ix})$. Следовательно, от функции $\psi(e^{ix})$ нужно априори требовать, чтобы она обеспечивала вложение функции $r\ \partial u(z)/\partial r$ в какой-либо класс Харди. Для этого необходимо, чтобы ψ была либо непрерывной периодической функцией, либо функцией из $L^p(0,2\pi]$ при $1 < p < \infty$, либо (достаточно) из $L\log^+ L[0,2\pi]$, что согласуется с условиями теоремы. Для таких ψ не только $r\,\partial u/\partial r$, но и $\partial u/\partial r$, и тем более $u(z)$ будут из $h_\infty(K)$, $h_p(K)$ или $h_1(K)$ соответственно. Коэффициенты $a_{J,k}$ и $A_{j,k}$ в формуле для $S_{2^J}(z,f)$ и в (1.8) совпадают с коэффициентами, определяемыми через $u(e^{ix})$ обычным образом: $a_{J,k} = (1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{ix})\mathcal{V}_{J,k}(e^{ix})\,dx$, $A_{j,k} = (1/2\pi)\displaystyle\int_0^{2\pi} u(e^{ix})\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix})\,dx$. Поэтому по указанной выше теореме из [1] частичные суммы S_{2^j} и ряд (1.8) сходятся к решению $u(z)$ рассматриваемой задачи Неймана, причем не с меньшей, чем указано в теореме, скоростью.

Приведенное доказательство почти без изменений (заменой $\cos\nu x$ на $\sin\nu x$) проходит для нечетных по x функций $\psi(e^{ix})$, и теорему можно считать полностью доказанной, поскольку общий случай сводится к рассмотренным. $\square$

В случае смешанной краевой задачи

$$\Big\{\Delta u = 0 \ \text{ в } \ K, \quad \alpha u + \beta\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\partial K} = \varphi\Big\} \tag{1.9}$$

предполагая, что $\varphi \in \Lambda^p(0,2\pi]$ $(1 \le p \le \infty)$, и замечая, что $\alpha u + \beta r\,(\partial u/\partial r)\big|_{\partial K} = \varphi$, видим, что гармоническая в K функция $\alpha u + \beta r\,(\partial u/\partial r) \in h_p(K)$. Отсюда легко вывести, что $u \in h_p(K)$ и, следовательно, решение представляется рядом по системе (1.1).

Теорема 2. *Краевая задача* (1.9) *в классе* $h_p(K)$ *при соответствующем параметру* $p \in [1,\infty]$ *ограничении* Λ^p *на* $\varphi(e^{ix})$ *и* $\alpha \ne 0$ *имеет единственное решение*

$$u(z) = \alpha^{-1}(\varphi,1) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^{j-1}-1}\Big\{(\varphi, V^{\alpha,\beta}_{j,k})\mathcal{W}_{j,k}(z) + \Big(\varphi, \overset{(\sim)}{V}{}^{\alpha,\beta}_{j,k}\Big)\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(z)\Big\}, \tag{1.10}$$

где $\overset{(\sim)}{V}{}^{\alpha,\beta}_{j,k}(z) = \sum_{\nu>0}\theta^{\nu}_{j,k}\,(|z|^{\nu})/(\alpha+\nu\beta)\overset{(\sin)}{\cos}\nu x$. *При непрерывности функции* $\varphi(e^{ix})$ *ряд* (1.10) *сходится равномерно в замкнутом круге* $\overline{K}$, *а при* $1 \le p < \infty$ *сходится по норме пространства* $h_p(K)$. *Норма в* h_p $(1 \le p \le \infty)$ *разности между* $u(z)$ *и частной суммой порядка* J *внешнего ряда в* (1.10) *стремится к нулю при* $J \to \infty$ *по порядку как* $E_{2^{J(1-\varepsilon)}}(\varphi)_{L^p(0,2\pi]}$.

Заключение о сходимости ряда $\sum(A_{j,k}\mathcal{W}_{j,k} + \widetilde{A}_{j,k}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k})$, представляющего $u(z)$, выводим с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 1, используя отмеченный перед теоремой 2 факт о включении $u \in h_p(K)$. После чего формула для коэффициентов ряда проверяется непосредственно с учетом вида функций $\overset{(\sim)}{V}{}^{\alpha,\beta}_{j,k}$ и $\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}$.

О решении задачи Дирихле (первой краевой задачи для оператора Лапласа) в кольце R_ρ сказано выше. Рассмотрим далее в R_ρ вторую краевую задачу:

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \ R_\rho, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}(e^{ix}) = \psi_1(e^{ix}), \qquad \frac{\partial u}{\partial r}(\rho e^{ix}) = \psi_\rho(e^{ix}). \tag{1.11}$$

Эту задачу можно решить, воспользовавшись решением задачи Дирихле в R_ρ. Действительно, функция $v(z) = r\,\partial u(z)/\partial r$ $(z = re^{ix})$, как известно [5], гармоническая в той же области, где гармонической является $u(z)$. Ясно, что при этом $v(e^{ix}) = \psi_1(e^{ix}),\ v(\rho e^{ix}) = \rho\psi_\rho(e^{ix})$. Следовательно, считая ψ_1 и ψ_ρ, например, непрерывными 2π-периодическими, получим формулу для $r(\partial u(z)/\partial r)$ в виде равномерно сходящегося в R_ρ ряда (1.7) с заменой там $\varphi_1,\ \varphi_\rho$ на $\psi_1,\ \rho\psi_\rho$. Интегрируя $\partial u/\partial r$ по r в пределах от ρ до r, получим

$$u(re^{ix}) = u(\rho e^{ix}) + \int_\rho^r \frac{1}{r}v(re^{ix})\,dr = u(\rho e^{ix}) + \int_\rho^r \frac{\widehat{\psi}_{1,0}}{r}\,dr + \int_\rho^r \frac{\rho\widehat{\psi}_{\rho\,0} - \widehat{\psi}_{1,0}}{\ln\rho}\frac{\ln r}{r}\,dr$$

$$+\sum_{j,k}\Big\{\int_\rho^r \frac{1}{r}\mathcal{W}_{j,k}(re^{ix})\,dr - b_{j,k}\int_\rho^r \frac{1}{r}\mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{\rho}{re^{ix}}\Big)\,dr + \widetilde{a}_{j,k}\int_\rho^r \frac{1}{r}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(re^{ix})\,dr - \widetilde{b}_{j,k}\int_\rho^r \frac{1}{r}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{\rho}{re^{ix}}\Big)\,dr\Big\},$$

где $\widehat{f}_0 = (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, $\overset{(\sim)}{a}_{j,k} = \Big\langle \psi(\zeta), \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}^{\rho}_{j,k}(\zeta)\Big\rangle_{\partial R_\rho}$, $\overset{(\sim)}{b}_{j,k} = \Big\langle \psi(\zeta), \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}^{\rho}_{j,k}(\rho/\zeta)\Big\rangle_{\partial R_\rho}$, а $\psi(\zeta)$ на границе R_ρ принимает значения $\psi(e^{ix}) = \psi_1(e^{ix})$, $\psi(\rho e^{ix}) = \rho\psi_\rho(e^{ix})$. Здесь и далее $\sum_{j,k}$ понимается как в (1.10). Из (1.3) получаем

$$\int_\rho^r \frac{1}{r}\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(re^{ix})\,dr = \sum_\nu \theta^\nu_{j,k}\Big(\frac{r^\nu}{\nu} - \frac{\rho^\nu}{\nu}\Big)\overset{(\sin)}{\cos}\nu x = \mathcal{W}^{[-1]}_{j,k}(re^{ix})$$

$$-\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}(\rho e^{ix})\int_\rho^r \frac{1}{r}\mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{\rho}{re^{ix}}\Big)\,dr = -\sum_\nu \theta_{j,k}^\nu \frac{1}{\nu}\Big(\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^\nu - 1\Big)\overset{(\sin)}{\cos}\nu x = -\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}\Big(\frac{\rho}{z}\Big) + \mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}(e^{ix}).$$

Среди функций, определенных в R_ρ и не зависящих от r, гармоническими являются только константы. Кроме того, $\Delta(\ln r)^2 \neq 0$. Поэтому для представления $u(z)$ в R_ρ в виде выписанного ряда нужно наложить на граничные функции $\psi_1(x)$ и $\psi_\rho(x)$ ограничение: $\rho\widehat{\psi}_{\rho,0} = \widehat{\psi}_{1,0}$, т. е. условие $\int_0^{2\pi}(\psi_1(e^{ix}) - \rho\psi_\rho(e^{ix}))\,dx = 0$. Таким образом, для решения задачи (1.11) при этом ограничении имеем в R_ρ представление

$$u(z) = A + \widehat{\psi}_{1,0}\ln|z| + \sum_{j,k}\Big\{a_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}(z) + b_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}\Big(\frac{\rho}{z}\Big) + \widetilde{a}_{j,k}\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}_{j,k}^{[-1]}(z) + \widetilde{b}_{j,k}\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}{}_{j,k}^{[-1]}\Big(\frac{\rho}{z}\Big)\Big\}, \quad (1.12)$$

где A — произвольная константа, $\widehat{\psi}_{1,0} = (1/2\pi)\int_0^{2\pi}\psi_1(e^{ix})\,dx$, $a_{j,k}$, $\widetilde{a}_{j,k}$, $b_{j,k}$, $\widetilde{b}_{j,k}$ — коэффициенты, выписанные выше. Этот ряд и ряды, продифференцированные по r и по x ($z = re^{ix}$), сходятся в $\overline{R}_\rho$ равномерно. При дополнительных условиях на гладкость функций ψ_1 и ψ_ρ ряд можно дифференцировать соответствующее число раз без нарушения равномерной сходимости в $\overline{R}_\rho$, так как дополнительный множитель $1/\nu$ в определении $\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}(z)$ только помогает распространить оценку ядра Дирихле $1 + \sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{2^{l-1}-1}\mathcal{W}_{j,k}(z)\mathcal{W}_{j,k}(\zeta) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1}\mathcal{V}_{j,k}(z)\mathcal{V}_{j,k}(\zeta)$ из работы [1] на ядра $\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{k=0}^{2^{l-1}-1}\mathcal{W}_{j,k}^{[-1]}(z)\mathcal{W}_{j,k}(\zeta)$ и, соответственно, утверждения о скорости сходимости рядов по системе (1.2) из [1] распространить на ряды (1.12). Внутри R_ρ ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз, поскольку общий член внешнего ряда (по j) убывает по порядку не медленнее, чем ρ^{2^j} $(j \to \infty)$. Приведенные выше рассуждения при $p = \infty$ можно повторить и для $p \in [1,\infty)$, обосновав тем самым существование решения $u(z)$ задачи (1.11) и в этих случаях.

Найдем разложение решения задачи (1.11) в ряд по базису гармонических всплесков (1.2) пространств Харди $h_p(R_\rho)$ $(1 \le p \le \infty)$.

Рассмотрим общий случай, полагая $\psi_1, \psi_\rho \in \Lambda^p(0,2\pi)$, т. е. считаем, что при фиксированном p, $1 \le p < \infty$ функции $\psi_1(e^{ix})$ и $\psi_\rho(e^{ix})$ суммируемы на $[0,2\pi]$ в p-й степени, при $p = \infty$ — функции $\psi_1(e^{ix})$ и $\psi_\rho(e^{ix})$ непрерывны на периоде. При $p = 1$ ужесточим ограничения, считая, что величина $\int_0^{2\pi}|\psi_1(e^{ix})|\ln(1 + |\psi_1(e^{ix})|)\,dx$ и аналогичная величина для $\psi_\rho(e^{ix})$ конечны. Покажем, что тогда не только $r\,\partial u/\partial r \in h_p(R_\rho)$ но и $u(z) \in h_p(R_\rho)$.

Хорошо известно, что при наложенных ограничениях на ψ_1 и ψ_ρ функция $v(z) = r\,\partial u(z)/\partial r \in h_p(R_\rho)$ и, следовательно, нормы $\|v(re^{ix})\|_{L^p(0,2\pi)}$, а вслед за ними и нормы $\|\partial u(re^{ix})/\partial r\|_{L^p(0,2\pi]}$ как функции r равномерно ограничены на отрезке $[\rho, 1]$. Поэтому будут конечны и нормы $\|u\|_{h_p(R_\rho)} = \sup_{\rho<r<1}\Big((1/2\pi)\int_0^{2\pi}|u(re^{ix})|^p\,dx\Big)^{1/p}$, так как $\Big(\int_0^{2\pi}|u(re^{ix})|^p\,dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_0^{2\pi}\Big|\rho\psi_\rho(e^{ix}) + \int_\rho^r \partial u(te^{ix})/\partial t\,dt\Big|^p\,dx\Big)^{1/p} \le \|\psi_\rho\|_{L^p(0,2\pi)} + \sup\limits_{\rho<r<1}\|\partial u(re^{ix})/\partial r\|_{L^p(0,2\pi)}$ $(1 \le p < \infty)$. При $p = \infty$ вместе с непрерывностью функции $\partial u/\partial r$ в $\overline{R}_\rho$, тем более там же будет непрерывной и $u(re^{ix})$. Следовательно, при соответствующем $p \in [1,\infty]$ будет справедливо включение $u = u(z,\psi_1,\psi_\rho,p) \in h_p(R_\rho)$. Сформулированные ограничения на ψ_1, ψ_ρ включим в условия следующей теоремы.

Теорема 3. *Решение задачи Неймана* (1.11) *в кольце* R_ρ *при условии* $\int_0^{2\pi}(\psi_1(e^{ix}) - \rho\psi_\rho(e^{ix}))\,dx = 0$ *и сделанных выше соответствующих параметру* $p \in [1,\infty]$ *ограничениях на граничные значения* $\psi_1(x)$ *и* $\psi_\rho(x)$ *существует, единственно с точностью до аддитивной* *константы, и его можно представить рядом*

$$u(z) = A_0 + \widetilde{A}_0 \frac{\ln|z|}{\ln\rho} + \sum_{j=1}^{\infty} U_{j,k}(z), \tag{1.13}$$

где $U_{j,k} = U_{j,k}(z, \psi_1, \psi_\rho) = \sum_{k=0}^{2^{j-1}-1}(A_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}(z) + B_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}(\rho/z) + \widetilde{A}_{j,k}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(z) + \widetilde{B}_{j,k}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(\rho/z))$, A_0 *— произвольная постоянная,* $\widetilde{A}_0 = \widehat{\psi}_{1,0}\ln\rho = \rho\widehat{\psi}_{\rho,0}\ln\rho$,

$$A_{j,k} = \langle\psi(z), y^A_{j,k}(z)\rangle_{\partial R_\rho}, \qquad B_{j,k} = \langle\psi(z), y^B_{j,k}(z)\rangle_{\partial R_\rho},$$

$$\widetilde{A}_{j,k} = \langle\psi(z), \widetilde{y}^A_{j,k}(z)\rangle_{\partial R_\rho}, \qquad \widetilde{B}_{j,k} = \langle\psi(z), \widetilde{y}^B_{j,k}(z)\rangle_{\partial R_\rho},$$

функции $y^{A(B)}_{j,k}(z)$ *определены ниже формулами* (1.14) *и* (1.15), $\widetilde{y}^{A(B)}_{j,k}(z)$ *— их тригонометрически сопряженные, функция* $\psi(z)$ *определена на* ∂R_ρ: $\psi(e^{ix}) = \psi_1(e^{ix})$, $\psi(\rho e^{ix}) = \psi_\rho(e^{ix})$.

Доказательство. Непосредственно перед теоремой (см. абзац после (1.12)) обосновано, что решение задачи (1.11) существует, определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого и принадлежит классу Харди $h_p(R_\rho)$ $(1 \le p \le \infty)$, при $p = \infty$ — непрерывно в $\overline{R}_\rho$. По теоремам 3, 5 и 6 из [1] оно представимо рядом (1.13), сходящимся по норме пространства $h_p(R_\rho)$ при $1 \le p \le \infty$ (равномерно в $\overline{R}_\rho$ при $p = \infty$). Осталось вывести формулы для коэффициентов $\overset{(\sim)}{A}_{j,k}$, $\overset{(\sim)}{B}_{j,k}$ через ψ_1 и ψ_ρ. Ограничимся далее случаем четных по x функций ψ_1 и ψ_ρ. Коэффициенты для $\widetilde{A}_{j,k}$ и $\widetilde{B}_{j,k}$ получаются аналогично.

Дифференцируя ряд (1.13), используя граничные условия для $\partial u/\partial r$ и определенные непосредственно перед теоремой 1 функции $\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(z)$, получим, что должны выполняться соотношения

$$\psi_1(x) = \frac{\widetilde{A}_0}{\ln\rho} + \sum_{j,k}\Big\{A_{j,k}\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(e^{ix}) - B_{jk}\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(\rho e^{ix})\Big\},$$

$$\psi_\rho(x) = \frac{\widetilde{A}_0}{\rho\ln\rho} + \sum_{j,k}\Big\{A_{j,k}\frac{1}{\rho}\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(\rho e^{ix}) - B_{jk}\frac{1}{\rho}\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(e^{ix})\Big\}.$$

Так как здесь функции в фигурных скобках ортогональны константам, то отсюда получаем две формулы, выписанные в теореме для $\widetilde{A}_0$, что не только оправдывает, но и делает необходимым для существования решения задачи (1.11) ограничение $\int_0^{2\pi}(\psi_1(e^{ix}) - \rho\psi_\rho(e^{ix}))\,dx = 0$.

Аналогично, учитывая, что при $j = 1$ параметр k принимает только значение $k = 0$, так как в этом случае $0 \le k < 1$ и $\mathcal{W}_{1,0}(z) = r\sqrt{2}\cos x$ (так как $\theta^1_{1,0} = 2\widehat{\theta}(1/2) = \sqrt{2}$), причем все функции $\mathcal{W}_{j,k}$ при $j > 1$ ортогональны в $L^2(0,2\pi)$ функции $\cos x$, получим после простых вычислений формулы $A_{1,0} = (\rho\widehat{\psi}_{\rho,1} - \widehat{\psi}_{1,1})/(\sqrt{2}(\rho^2-1))$, $B_{1,0} = (\rho(\widehat{\psi}_{\rho,1} - \widehat{\psi}_{1,1}))/(\sqrt{2}(\rho^2-1))$. Для определения остальных коэффициентов $A_{j,k}, B_{j,k}$ введем функции $y^{\mathrm{I}}_{j_1,k_1}(z)$ и $y^{\mathrm{II}}_{j_1,k_1}(z)$ вида

$$y^J_{j_1,k_1}(x) = \sum\theta^\nu_{j_1,k_1}a^J_\nu\cos\nu x \qquad \big(J = \mathrm{I}, \mathrm{II},\ \nu \in (2^{j_1-1}(1-\varepsilon), 2^{j_1}(1+\varepsilon))\big)$$

пока с неопределенными коэффициентами a^{I}_ν и a^{II}_ν, и рассмотрим сумму

$$\Big(\psi_1(e^{ix}), y^{\mathrm{I}}_{j_1,k_1}(x)) + (\psi_\rho(e^{ix}), y^{\mathrm{II}}_{j_1,k_1}(x)\Big) = \sum_{j,k}A_{j,k}\sum_\nu\theta^\nu_{j,k}\theta^\nu_{j_1,k_1}\frac{1}{2}(\nu a^{\mathrm{I}}_\nu + \nu\rho^{\nu-1}a^{\mathrm{II}}_\nu)$$

$$+ \sum_{j,k}B_{j,k}\sum_\nu\theta^\nu_{j,k}\theta^\nu_{j_1,k_1}\frac{1}{2}\Big(-\nu\rho^\nu a^{\mathrm{I}}_\nu - \nu\frac{1}{\rho}a^{\mathrm{II}}_\nu\Big).$$

Так как $(\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix})\mathcal{W}_{j_1,k_1}(e^{ix})) = \delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1} = 1/2\pi\int_0^{2\pi}\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix})\mathcal{W}_{j_1,k_1}(e^{ix})\,dx = \sum_\nu \theta^\nu_{j,k}\theta^\nu_{j_1,k_1}1/2$, то для определения $A_{j,k}$ нужно функции $y^J_{j_1,k_1}(x)$ определить из условий $\begin{cases} a^{\mathrm{I}}_\nu + \rho^{\nu-1}a^{\mathrm{II}}_\nu = \dfrac{1}{\nu} \ \ (\nu\in\mathbb{N}),\\ \rho^\nu a^{\mathrm{I}}_\nu + \dfrac{1}{\rho}a^{\mathrm{II}}_\nu = 0\end{cases}$, т. е. положить $\begin{cases} a^{\mathrm{I}}_\nu = \dfrac{\nu^{-1}}{1-\rho^{2\nu}},\\ a^{\mathrm{II}}_\nu = -\dfrac{\nu^{-1}\rho^{\nu+1}}{1-\rho^{2\nu}}\end{cases}$, а для определения коэффициентов $B_{j,k}$ нужно в этой системе уравнений заменить столбик свободных членов на $(0,-\nu^{-1})^T$, т. е. положить $a^{\mathrm{I}}_\nu = (\nu^{-1}\rho^\nu)/(1-\rho^{2\nu})$, $a^{\mathrm{II}}_\nu = -(\nu^{-1}\rho)/(1-\rho^{2\nu})$. Подставляя решение первой системы — последовательности $\{a^{\mathrm{I}}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ и $\{a^{\mathrm{II}}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ в формулы для $y^{\mathrm{I}}_{j,k}(x)$ и для $y^{\mathrm{II}}_{j,k}(x)$, видим, что полученные две системы функций $y_{j,k}(x)$, $-y_{j,k}(x)$ можно представить как граничные значения при $z=e^{ix}$ и $z=\rho e^{ix}$ функций одной системы

$$\Big\{y^A_{j,k}(z) = \sum_\nu \theta^\nu_{j,k}\frac{1}{\nu}\,\frac{|z|^{\nu+1}}{1-\rho^{2\nu}}\cos\nu x\colon\ j,k\in\mathbb{N},\ 0\le k<2^{j-1}\Big\}. \tag{1.14}$$

Точно так же вторая система двух линейных уравнений порождает две системы функций, являющихся граничными значениями функций $y^B_{j,k}(z)$ системы

$$\Big\{y^B_{j,k}(z) = \sum_\nu \theta^\nu_{j,k}\frac{\rho}{\nu}\left(\frac{\rho}{z}\right)^{\nu-1}\frac{1}{1-\rho^{2\nu}}\cos\nu x\colon\ j,k\in\mathbb{N},\ 0\le k<2^{j-1}\Big\}. \tag{1.15}$$

Обозначим через $\{\widetilde{y}^A_{j,k}(z)\}$, $\{\widetilde{y}^B_{j,k}(z)\}$ системы, получающиеся из предыдущих заменой $\cos\nu x$ на $\sin\nu x$. Ясно, что с помощью последних систем можно восстанавливать коэффициенты $\widetilde{A}_{j,k}$ и $\widetilde{B}_{j,k}$. Учитывая, что по определению $y^{A(B)}_{j,k}(\rho e^{ix}) = (-1)(y^{\mathrm{II}}_{j,k})^{A(B)}(x)$, получаем

$$\overset{(\sim)}{A}_{j,k} = \big(\psi_1(e^{ix}),\,\overset{(\sim)}{y}{}^A_{j,k}(e^{ix})\big) - \big(\psi_\rho(e^{ix}),\,\overset{(\sim)}{y}{}^A_{j,k}(\rho e^{ix})\big),$$

$$\overset{(\sim)}{B}_{j,k} = \big(\psi_1(e^{ix}),\,\overset{(\sim)}{y}{}^B_{j,k}(e^{ix})\big) - \big(\psi_\rho(e^{ix}),\,\overset{(\sim)}{y}{}^B_{j,k}(\rho e^{ix})\big),$$

что совпадает со значениями, выписанными в теореме.

Аналогичным образом можно решить в R_ρ и смешанную краевую задачу для уравнения $\Delta u = 0$. Только формулы для коэффициентов разложения в ряд по гармоническим всплескам будут более громоздкими, и мы их здесь в общем виде не выписываем. Ниже попутно будет решена одна такая специальная задача в связи с краевой задачей для бигармонического уравнения.

2. Краевые задачи для бигармонических функций в круге

Краевые задачи в области $D\subset\mathbb{R}^2$ для бигармонического уравнения обычно ставятся следующим образом (см., например, [6]):

$$\Delta^2 u = 0 \ \text{ в } \ D; \qquad u\Big|_{\partial D} = \varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial\overline{n}}\Big|_{\partial D} = \psi, \tag{2.1}$$

где область D имеет кусочно гладкую границу, $\overline{n}$ — внутренняя нормаль в точках границы ∂D, φ и ψ — соответствующие угловые предельные значения функций u и $\partial u/\partial\overline{n}$, кусочно непрерывные вдоль границы ∂D области D, а решение ищется в классе функций U непрерывных вместе с частными производными первого порядка в $\overline{D} = D\cup\partial D$. Отметим, что эта задача, а также аналогичная краевая задача с неоднородным уравнением Пуассона $\Delta^2 u = q$ в областях D с кусочно гладкой границей хорошо изучена, доказаны теоремы существования, единственности решения и развиты методы решения этих задач, в частности с помощью методов теории аналитических функций и конформных отображений (см., например, [6]). Основой здесь является связь бигармонических функций с гармоническими функциями: бигармонические функции представимы в виде $xv_1 + yv_2 + v_3$ или $r^2v_1 + v_2$, где v_1, v_2, v_3 — гармонические функции [5]. Например, для круга решение задачи (2.1) выражается с помощью ядра Пуассона и его производных довольно сложным образом, причем интеграл (см. [5])

$$u(re^{ix}) = \frac{(r^2-1)^2}{4\pi}\Bigg[\int\limits_0^{2\pi}\frac{-\psi(e^{i\alpha})\,d\alpha}{r^2-2r\cos(x-\alpha)+1} + 2\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi(e^{i\alpha})(1-r\cos(x-\alpha))\,d\alpha}{(1-2r\cos(x-\alpha)+r^2)^2}\Bigg]$$

сходится равномерно по r и x внутри круга, а около границы вычислять его трудно из-за особенностей ядра на границе. Для более сложных областей, например для R_ρ, соответствующие вычислительные трудности только усугубляются.

Далее задачу (2.1) рассматриваем в случаях $D = K$ и $D = R_\rho$, заменяя $\partial u/\partial\overline{n}$ на $\partial u/\partial r$.

Решение задачи (2.1) в круге K при естественных (более общих) ограничениях $\varphi, \psi \in \Lambda^p(0, 2\pi)$ $(1 \le p \le \infty)$ можно представить с помощью системы гармонических всплесков в виде

$$u(z) = (r^2-1)u_1(z) + u_2(z) = (r^2-1)\Big\{\widehat{\psi}_0 + \sum_{j,k}(A'_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}(z) + B'_{j,k}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(z))\Big\}$$

$$+\Big[\widehat{\varphi}_0 + \sum_{j,k}(\varphi, \mathcal{W}_{j,k})\mathcal{W}_{j,k}(z) + (\varphi, \widetilde{\mathcal{W}}_{j,k})\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(z)\Big].$$

В квадратных скобках выписана функция $u_2(z)$ на основе изложенных в начале статьи результатов работы [1], так как $u_2(e^{ix}) = \varphi(e^{ix}) \in \Lambda^p(0, 2\pi)$ $(\in C_{2\pi}$ при $p = \infty)$. Коэффициенты $A'_{j,k}$ и $B'_{j,k}$ предстоит определить.

Для краткости будем считать функции φ и ψ четными по x, что позволит не выписывать члены ряда с $\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(z)$. Тогда $u_2(z) = \sum_{j,k}(\varphi, \mathcal{W}_{j,k})\mathcal{W}_{j,k}(z) \in h_p(K)$, и второе краевое условие в (2.1) на ∂K превращается в условие на гармонические функции $r\,\partial u_2/\partial r$ и u_1: $\partial u(re^{ix})/\partial r\big|_{r=1} = 2u_1(e^{ix}) + \partial u_2(re^{ix})/\partial r\big|_{r=1} = \psi(e^{ix})$. Однако ограничение $u_2(z) \in h_p(K)$ не гарантирует, что гармоническая в K функция u_1 восстанавливается по своим, определяемым отсюда, граничным значениям, даже если они конечны. Например, для $u_2 = 1 + \sum_{n=1}^\infty 2r^n n^{-1}\cos nx \in h_p(K)$ $(1 \le p < \infty)$ с граничными значениями $1 + 2\sum_{n=1}^\infty n^{-1}\cos nx \in L^p(0, 2\pi)$ $(1 \le p < \infty)$ функция $r\,\partial u_2/\partial r = \sum_{n=1}^\infty 2r^n \cos nx = P(re^{ix}) - 1$, где $P(re^{ix})$ — ядро Пуассона, (а значит, и u_1) не восстанавливается по своим граничным значениям. Но если функция $\varphi(e^{ix})$ обеспечивает непрерывность граничных значений производной $\partial u_2/\partial r$ на ∂K, то функцию $u_1(z)$ можно будет восстановить по ее граничным значениям $u_1(e^{ix}) = \psi(e^{ix}) - \partial u_2/\partial r\Big|_{r=1} =: \psi_1(e^{ix})$, в частности с разложением ее по системе (1.3). В итоге в этом случае получим для решения задачи (2.1) представление

$$u(z) = \widehat{\psi}_0(r^2-1) + \widehat{\varphi}_0 + \sum_{j,k}\big[(\psi_1, \mathcal{W}_{j,k})(r^2-1) + (\varphi, \mathcal{W}_{j,k})\big]\mathcal{W}_{j,k}(z). \tag{2.2}$$

В этом представлении использованы не только граничные значения $u(z)$ и $(\partial u(z)/\partial r)$, но и граничные значения функции $r\,(\partial u_2/\partial r) = \sum_{j,k}(\varphi, \mathcal{W}_{j,k})\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(z)$, вошедшие в определение $\psi_1(e^{ix})$. Если они также непрерывны, то последний ряд и ряд, соответствующий производной $(\partial u(re^{ix})/\partial r)$, сходятся в $\overline{K}$ равномерно.

В этих рассуждениях при $1 \le p < \infty$ можно заменить условия непрерывности граничных значений выписанного выше ряда для $r\partial u_2/\partial r$ на его включение в $h_p(K)$ с заменой равномерной сходимости ряда (2.2) на сходимость в $h_p(K)$. Если функция $\varphi(e^{ix})$ не обеспечивает указанных свойств производной $(\partial u_2(re^{ix})/\partial r)$, то функции $u(z)$ можно восстановить в K двумя путями.

Первый путь заключается в том, что, построив разложение функции $u_2(z)$ по ее граничным значениям $\varphi(e^{ix})$, определяем далее гармоническую в K функцию $v(z)$, считая $v(e^{ix}) = \psi(e^{ix})$, т. е. полагаем

$$v(z) = \widehat{\psi}_0 + \sum_{j,k} (\psi, \mathcal{W}_{j,k}) \mathcal{W}_{j,k}(z),$$

а ряд для $u_2(z)$ продифференцируем внутри области K:

$$\frac{r \partial u_2}{\partial r}(z) = \sum_{j,k} (\varphi, \mathcal{W}_{j,k}) \mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(z).$$

Отметим, что равномерная сходимость в $\overline{K}$ (или сходимость в $h_p(K)$ при $1 \le p < \infty$) этого ряда и есть условие на функцию φ, о котором говорилось выше. Определив эти функции, получим далее представление бигармонической функции

$$u(z) = (r^2 - 1)\frac{1}{2}\Big(v(z) - \frac{r\,\partial u_2}{\partial r}(z)\Big) + u_2(z)$$

— решения задачи (2.1) в K в виде рядов по системам функций $\{\mathcal{W}_{j,k}\}$ и $\{\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}\}$:

$$u(z) = \frac{1}{2}(r^2-1)\Big(\widehat{\psi}_0 + \sum_{j,k} (\psi, \mathcal{W}_{j,k}) \mathcal{W}_{j,k}(z) - \sum_{j,k} (\varphi, \mathcal{W}_{j,k}) \mathcal{W}^{[1]}_{j,k}(z)\Big) + \widehat{\varphi}_0 + \sum_{j,k} (\varphi, \mathcal{W}_{j,k}) \mathcal{W}_{j,k}(z).$$

Ясно, что эта функция бигармоническая в K, $u(re^{ix})\big|_{r=1} = u_2(e^{ix}) = \varphi(e^{ix})$,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = rv(z) + (1-r^2)\frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial u_2}{\partial r}(re^{ix}) + \frac{\partial v}{\partial r}(re^{ix}) - r\frac{\partial^2 u_2(re^{ix})}{\partial r^2}\Big\},$$

так что

$$\lim_{r \to 1} \frac{\partial u(re^{ix})}{\partial r} = v(e^{ix}) = \psi(e^{ix}),$$

если выражение в последних фигурных скобках есть $o(1/(1-r))$ при $r \to 1$.

Второй путь состоит в том, что для определения коэффициентов ряда $u_1(z) = \widehat{\psi}_0 + \sum A'_{j,k} \mathcal{W}_{j,k}(z)$ по функциям $\psi(e^{ix})$ и $\partial u_2(re^{ix})/\partial r$ будем использовать только минимально необходимое число членов ряда $u_2(z) = \widehat{\varphi}_0 + \sum_{l,m} (\varphi, \mathcal{W}_{l,m}) \mathcal{W}_{l,m}(z)$ при определении каждого коэффициента $A'_{j,k}$. Для этого рассмотрим величины

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r' \frac{\partial u_2}{\partial r}(r'e^{ix}) \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{e^{ix}}{r'}\Big)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{l,m} (\varphi, \mathcal{W}_{l,m}) \mathcal{W}^{[1]}_{l,m}(r'e^{ix}) \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{e^{ix}}{r'}\Big)\,dx.$$

Легко проверить, учитывая определения $\theta^{\nu}_{j,k}$ и $\widehat{\theta}_{\varepsilon}(\omega)$ $(0 < \varepsilon \le 1/3)$, что носители в спектральной области функций $\mathcal{W}^{[1]}_{l,m}(r'e^{ix})$ и $\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix}/r')$ (иначе, множества их ненулевых тригонометрических коэффициентов Фурье) имеют непустое пересечение, только если $l = j-1, j, j+1$ ($l = j$ при $j = 1$). Так как $(\mathcal{W}_{j,k}(r'e^{ix}), \mathcal{W}_{j_1,k_1}(e^{ix}/r')) = (\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix}), \mathcal{W}_{j_1,k_1}(e^{ix})) = \delta_{j_1,j_1}\delta_{k_1,k_1}$, то отсюда получаем, что при $r \le r' < 1$ гармоническую функцию $r\,\partial u/\partial r$ можно представить равномерно сходящимся в $\overline{K}_{r'}$ рядом

$$\frac{r\partial u_2}{\partial r}(re^{ix}) = \sum_{j,k} \Big(r'\frac{\partial u_2}{\partial r}(r'e^{ix}), \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{1}{r'}e^{ix}\Big)\Big) \mathcal{W}_{j,k}(z)$$

$$= \sum_{i,k} \mathcal{W}_{j,k}(z) \Big(\sum_{l=j-1}^{j+1} \sum_{m=0}^{2^{l-1}-1} (\varphi, \mathcal{W}_{l,m}) \mathcal{W}^{[1]}_{l,m}(r'e^{ix}), \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{1}{r'}e^{ix}\Big)\Big).$$

Коэффициентами в этой сумме являются скалярные произведения двух гармонических многочленов, причем из определения функций $\mathcal{W}^{[1]}_{j,k}$ и $\mathcal{W}_{j,k}$ вытекает с помощью равенства Парсеваля, что

$$\Big(\mathcal{W}^{[1]}_{l,m}(r'e^{ix}), \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{e^{ix}}{r'}\Big)\Big) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{W}^{[1]}_{l,m}(e^{ix})\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix})\,dx = (\mathcal{W}_{l,m}, \mathcal{W}^{[1]}_{j,k}).$$

Обозначая проекцию $\sum_{l=j-1}^{j+1}\sum_{m=0}^{2^{l-1}-1}(\varphi, \mathcal{W}_{l,m})\mathcal{W}^{[1]}_{l,m}(z)$ функции $r\,\partial u_2/\partial r$ на пространство $W_{j-1} \dot{+} \mathcal{W}_j \dot{+} \mathcal{W}_{j+1}$ через $(P_j u_2)'_r$, получаем тождество

$$u_1(z) = \widehat{\psi}_0 + \sum_{j,k}(\psi - (P_j u_2)'_r, \mathcal{W}_{j,k})\mathcal{W}_{j,k}(z)$$

в K'_r. Поскольку правая часть здесь не зависит от r', то это представление функции $u_1(z)$ справедливо для всех $r < 1$. Тогда

$$u(z) = (r^2-1)\widehat{\psi}_0 + \sum_{j,k}\Big(\Big[(r^2-1)(\psi(x) - (P_j u_2)'_r(e^{ix})) + \varphi(x)\Big], \mathcal{W}_{j,k}(e^{ix})\Big)\mathcal{W}_{j,k}(z).$$

Возможно, этот ряд при $p = \infty$ будет равномерно сходиться в $\overline{K}$ при более слабых ограничениях, чем ряд (2.2).

3. Краевая задача для бигармонического уравнения в кольце

Наконец, найдем решение краевой задачи

$$\Delta^2 u = 0 \ \text{ в } \ R_\rho, \qquad u(z)\Big|_{\partial R_\rho} = \varphi(z)\Big|_{\partial R_\rho} = \{\varphi_1(x) \ \text{ при } \ z = e^{ix},\ \varphi_\rho(x) \ \text{ при } \ z = \rho e^{ix}\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\partial R_\rho} = \psi(z)\Big|_{\partial R_\rho} = \{\psi(e^{ix}) = \psi_1(x),\ \psi(\rho e^{ix}) = \psi_\rho(x)\} \tag{3.1}$$

в случае, когда есть кольцо R_ρ.

Решение будем искать в виде

$$u(z) = (r^2-1)u_1(z) + (r^2-\rho^2)u_2(z), \qquad \Delta u_1 = 0,\ \Delta u_2 = 0 \ \text{ в } \ R_\rho \tag{3.2}$$

при более общих, чем это обычно делается, предложениях, рассматривая не только случай непрерывных граничных значений ($p = \infty$), но и случаи $\varphi, \varphi_\rho, \psi, \psi_\rho \in L^p(0, 2\pi)$ при фиксированном $p \in (1, \infty)$, а при $p = 1$ будем требовать, чтобы эти функции принадлежали классу $L\ln^+ L(0, 2\pi)$.

Таким образом, нужно найти две гармонические в R_ρ функции

$$u_q(z) = A_0^q + \widetilde{A}_0^q\frac{\ln|z|}{\ln\rho} + \sum_{j,k}\Big(A^q_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}(z) + B^q_{j,k}\mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{\rho}{z}\Big) + \widetilde{A}^q_{j,k}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(z) + \widetilde{B}^q_{j,k}\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{\rho}{z}\Big)\Big) \qquad (q = 1, 2), \tag{3.3}$$

связанные друг с другом через граничные значения

$$u_1(\rho e^{ix}) = \frac{\varphi_\rho(x)}{\rho^2-1} =: \varphi_1^*(x), \qquad u_2(e^{ix}) = \frac{\varphi_1(x)}{1-\rho^2} =: \varphi_2^*(x),$$

$$2u_1(e^{ix}) + (1-\rho^2)\frac{\partial u_2}{\partial r}(e^{ix}) = \psi_1(x) - 2\varphi_2^*(x) =: \varphi_3^*(x),$$

$$2\rho u_2(\rho e^{ix})+(\rho^2-1)\frac{\partial u_1}{\partial r}(\rho e^{ix})=\psi_\rho(x)-2\rho\varphi_1^*(x)=:\varphi_4^*(x). \tag{3.4}$$

Предположим вначале, что решающие задачу функции $u_1(z)$ и $u_2(z)\in h_p(K)$ непрерывны в $\overline{K}$ при $p=\infty$, и найдем их представление через граничные значения $\varphi_i^*(x)$ $(i=1,2,3,4)$.

Обобщая прием, использованный при доказательстве теоремы 3, будем искать при каждом $j\in\mathbb{N}$ и $k=0,\dots,2^{j-1}-1$ четыре такие функции $y_{j,k}^{\langle l\rangle}(z)$ $(l=1,2,3,4)$ вида

$$y_{j_1,k_1}^{\langle l\rangle}(x)=\sum_\nu\theta_{j_1,k_1}^\nu\alpha_\nu^l\cos\nu x,$$

чтобы

$$\begin{cases}\rho^\nu\alpha_\nu^1+2\alpha_\nu^3+(\rho^2-1)\nu\rho^{\nu-1}\alpha_\nu^4=\lambda_1,\\ \alpha_\nu^2+(1-\rho^2)\nu\alpha_\nu^3+2\rho^{\nu+1}\alpha_\nu^4=\lambda_2,\\ \alpha_\nu^1+2\rho^\nu\alpha_\nu^3-(\rho^2-1)\nu\rho^{-1}\alpha_\nu^4=\lambda_3,\\ \rho^\nu\alpha_\nu^2-(1-\rho^2)\nu\rho^\nu\alpha_\nu^3+2\rho\alpha_\nu^4=\lambda_4.\end{cases} \tag{3.5}$$

Легко проверить, что определитель этой системы равен

$$\Delta=\Delta_\nu=\begin{vmatrix}\rho^\nu & 0 & 2 & (\rho^2-1)\nu\rho^{\nu-1}\\ 0 & 1 & (1-\rho^2)\nu & 2\rho^{\nu+1}\\ 1 & 0 & 2\rho^\nu & -(\rho^2-1)\nu\rho^{-1}\\ 0 & \rho^\nu & -(1-\rho^2)\nu\rho^\nu & 2\rho\end{vmatrix}=-4\rho\big[(1-\rho^{2\nu})^2-\nu^2\rho^{2(\nu-1)}(1-\rho^2)^2\big]$$

$$=-4\rho[(1-\rho^{2\nu})+\nu\rho^{(\nu-1)}(1-\rho^2)][(1-\rho^{2\nu})-\nu\rho^{\nu-1}(1-\rho^2)].$$

Здесь $\Delta=0$ при $\nu=1$. Покажем, что $\Delta\neq0$ при $\nu=2,3\dots$, и, значит, для всех допустимых значений ν при $j\geq2$. Выражение во второй квадратной скобке (обозначим его $[\dots]_\nu$) при $\nu=2$ равна $1-\rho^4-2\rho(1-\rho^2)=(1-\rho^2)(1+\rho^2-2\rho)=(1-\rho^2)(1-\rho)^2>0$. Допустим, что $0<[\dots]_\nu=(1-\rho^2)((1+\rho^2+\rho^4+\dots+\rho^{2(\nu-1)})-\nu\rho^{\nu-1})$. Тогда $[\dots]_{\nu+1}=(1-\rho^2)(1+\rho^2+\dots+\rho^{2(\nu-1)}+\rho^{2\nu}-(\nu+1)\rho^\nu)=(1-\rho^2)(1+\rho^2+\dots+\rho^{2(\nu-1)}-\nu\rho^{\nu-1}+\nu\rho^{\nu-1}+\rho^{2\nu}-(\nu+1)\rho^\nu)>(1-\rho^2)\rho^{\nu-1}(\nu(1-\rho)-\rho(1-\rho^\nu))=(1-\rho^2)\rho^{\nu-1}(1-\rho)(\nu-\rho(1+\rho+\dots+\rho^{\nu-1}))>0$. Считая эти выкладки шагом индукции, получаем оценку $[\dots]_\nu>0$ и, значит, $\Delta\neq0$ при $\nu\geq2$. Следовательно, при таких ν и любых $\lambda_1,\dots,\lambda_4$ выписанная система уравнений разрешима. Решив ее для $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)^T$ при $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_1=(1,0,0,0)^T,\dots,\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_4=(0,0,0,1)^T$, найдем четыре соответствующих набора $(\alpha_{\nu,i}^1,\alpha_{\nu,i}^2,\alpha_{\nu,i}^3,\alpha_{\nu,i}^4)$ $(i=1,2,3,4)$ и по ним для каждого $l=1,2,3,4$ построим четыре системы явно выписываемых функций

$$\Big\{y_{j,k}^{\langle l,i\rangle}(x,i)=\sum_\nu\theta_{j,k}^\nu\alpha_{\nu,i}^l\cos\nu x\colon\ j=2,3,\dots;\ k=0,1,\dots,2^{j-1}-1\Big\}\qquad(i=1,2,3,4). \tag{3.6}$$

Система уравнений для $\{\alpha_\nu^{l,i}\colon\ l=1,2,3,4\}$ $(\nu\in\mathbb{Z},\ i=1,2,3,4)$ составлена так, что

$$\big(\mathcal{W}_{j,k}(\rho e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{1,i}\big)+\big(2\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{3,i}\big)+\Big(\frac{\rho^2-1}{\rho}\mathcal{W}_{j,k}^{[1]}(\rho e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{4,i}\Big)=\delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1}\delta_{i,1},$$

$$\big(\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{2,i}\big)+\big((1-\rho^2)\mathcal{W}_{j,k}^{[1]}(e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{3,i}\big)+\big(2\rho\mathcal{W}_{j,k}(\rho e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{4,i}\big)=\delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1}\delta_{i,2},$$

$$\big(\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{1,i}\big)+\big(2\mathcal{W}_{j,k}(\rho e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{3,i}\big)+\Big(\frac{1-\rho^2}{\rho}\mathcal{W}_{j,k}^{[1]}(e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{4,i}\Big)=\delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1}\delta_{i,3},$$

$$\big(\mathcal{W}_{j,k}(\rho e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{2,i}\big)+\big((\rho^2-1)\mathcal{W}_{j,k}^{[1]}(\rho e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{3,i}\big)+\big(2\rho\mathcal{W}_{j,k}(e^{ix}),y_{j_1,k_1}^{4,i}\big)=\delta_{j,j_1}\delta_{k,k_1}\delta_{i,4}.$$

Поэтому при $j_1>1$

$$\sum_{l=1}^n(\varphi_l^*(x),y_{j_1,k_1}^{l,i}(x))=\begin{cases}A_{j_1,k_1}^i & \text{при}\ \ i=1,2,\\ B_{j_1,k_1}^{i-2} & \text{при}\ \ i=3,4,\end{cases} \tag{3.7}$$

и для определения коэффициентов $(A^1_{j,k}, A^2_{j,k}, B^1_{j,k}, B^2_{j,k})$ $(j \ge 2,\ k = 0, 1, \dots, 2^{j-1} - 1)$ осталось найти явные выражения для функций $\{y^{l,i}_{j,k}(x) \colon\ l = \overline{1,4}\}$ $(i = \overline{1,4},\ j \ge 2)$. Решая систему (3.5) при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_1 = (1,0,0,0)^T$ и подставляя найденные значения в выражения для $y^{l,1}_{j,k}(x)$, находим

$$y^{1,1}_{j,k}(x) = 2\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\rho^{\nu-1}}{\Delta_\nu} (2\rho^2(1-\rho^{2\nu}) + \nu^2(1-\rho^2)^2)\cos\nu x,$$

$$y^{2,1}_{j,k}(x) = 2(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu\rho^{\nu+1}(1+\rho^{2\nu})}{\Delta_\nu}\cos\nu x, \tag{3.8}$$

$$y^{3,1}_{j,k}(x) = -2\rho\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{1-\rho^{2\nu}}{\Delta_\nu}\cos\nu x; \qquad y^{4,1}_{j,k}(x) = 2(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\rho^{\nu}}{\Delta_\nu}\cos\nu x,$$

где через Δ_ν обозначен определитель системы (3.5)

$$\Delta_\nu = -4\rho((1-\rho^{2\nu})^2 - \nu^2(1-\rho^2)^2\rho^{2(\nu-1)}),$$

и под знаком суммы $\nu \in (2^{j-1}(1-\varepsilon),\ 2^j(1+\varepsilon)),\ \nu > 1$, так как $\theta^{\nu}_{j,k} = 0$ для остальных $\nu \ge 0$ при $j \ge 2$. Решая систему (3.2) с правыми частями $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_i$ $(i = 2,3,4)$, найдем остальные функции $y^{l,i}_{j,k}(x)$:

$$y^{1,2}_{j,k}(x) = 2(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu\rho^{\nu-1}}{\Delta_\nu}(1+\rho^{2\nu})\cos\nu x,$$

$$y^{2,2}_{j,k}(x) = -2\rho\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{1}{\Delta_\nu}(2(1-\rho^{\nu}) - \nu^2(1-\rho^2)^2\rho^{2(\nu-1)})\cos\nu x, \tag{3.9}$$

$$y^{3,2}_{j,k}(x) = 2(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu\rho^{2\nu-1}}{\Delta_\nu}\cos\nu x, \qquad y^{4,2}_{j,k}(x) = 2\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\rho^{\nu}(1-\rho^{2\nu})}{\Delta_\nu}\cos\nu x,$$

далее

$$y^{1,3}_{j,k}(x) = -2\rho(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{1}{\Delta_\nu}(2 - \nu^2(1-\rho^2)\rho^{2(\nu-1)})\cos\nu x,$$

$$y^{2,3}_{j,k}(x) = -2\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu\rho^{\nu+1}}{\Delta_\nu}(1-\rho^2(1+\rho^{2\nu}))\cos\nu x, \tag{3.10}$$

$$y^{3,3}_{j,k}(x) = 2\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\rho^{\nu+1}(1-\rho^{2\nu})}{\Delta_\nu}\cos\nu x, \qquad y^{4,3}_{j,k}(x) = 2(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu\rho^{2\nu}}{\Delta_\nu}\cos\nu x$$

и, наконец,

$$y^{1,4}_{j,k}(x) = \frac{2}{\rho}(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu(1+\rho^{2\nu})}{\Delta_\nu}\cos\nu x$$

$$y^{2,4}_{j,k}(x) = 2\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\rho^{\nu+1}}{\Delta_\nu}(2(1-\rho^{2\nu}) + \nu^2(1-\rho^2)\rho^{\nu-2})\cos\nu x \tag{3.11}$$

$$y^{3,4}_{j,k}(x) = -2(1-\rho^2)\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k} \frac{\nu\rho^{\nu-1}}{\Delta_\nu}\cos\nu x \qquad y^{4,4}_{j,k}(x) = -2\sum_{\nu>1} \theta^{\nu}_{j,k}(1-\rho^{2\nu})\cos\nu x.$$

Заменяя в этих формулах $\cos\nu x$ на $\sin\nu x$, получим функции $\widetilde{y}^{1,1}_{j,k}, \dots, \widetilde{y}^{4,4}_{j,k}$ для определения коэффициентов $\widetilde{A}^q_{j,k}$ и $\widetilde{B}^q_{j,k}$ ряда (3.3) по формулам, аналогичным (3.7).

Случай $\nu = 1$ рассмотрим отдельно. Так как при $j \ge 2$ будет $\theta^1_{j,k} = 0$, то $(\mathcal{W}_{j,k}(re^{ix}), \cos x) = 0$. С другой стороны, при $j = 1,\ \nu = 2$ обращается в нуль $\sin(2\pi\nu(k+0,5))/2^j$, и, следовательно, $\theta^2_{1,1} = 0$. Поэтому в силу специфики $\widehat{\theta}(\omega)$ единственная при $j = 1$ функция $\mathcal{W}_{1,0}(re^{ix})$ системы (1.1) содержит только одну гармонику: $\mathcal{W}_{1,0}(re^{ix}) = \sqrt{2}\, r\cos x$, откуда $\mathcal{W}_{1,0}(\rho/z) = \sqrt{2}\,(\rho/r)\,\cos x$, $\mathcal{W}^{[1]}_{1,0}(re^{ix}) = \mathcal{W}_{1,0}(re^{ix})$, $\mathcal{W}^{[1]}_{1,0}(\rho/z) = \mathcal{W}_{1,0}(\rho/z)$. И, чтобы существовала бигармоническая функция $u(z)$ задачи (3.1) должна быть разрешима следующая система линейных уравнений для коэффициентов $A^1_{1,0}, A^2_{1,0}, B^1_{1,0}, B^2_{1,0}$, связывающих их с заданными функциями $\{\varphi^*_i\}_{i=1}^4$

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\varphi}^*_{1,1} := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*_1(x)\sqrt{2}\cos x\,dx = \rho A^1_{1,0} + B^1_{1,0}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\varphi}^*_{2,1} = A^2_{1,0} + \rho B^2_{1,0},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\varphi}^*_{3,1} = 2A^1_{1,0} + 2\rho B^1_{1,0} + (1-\rho^2)A^2_{1,0} - (1-\rho^2)\rho B^2_{1,0}, \tag{3.12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\varphi}^*_{4,1} = 2\rho^2 A^2_{1,0} + 2\rho B^2_{1,0} + (\rho^2-1)A^1_{1,0} - (\rho^2-1)\rho^{-1}B^1_{1,0}\Big\},$$

определитель которой при $\nu = 1$ совпадает с определителем Δ транспонированной матрицы системы (3.5) и, следовательно, равен нулю. Легко проверить, что линейная комбинация правых частей этих уравнений с коэффициентами $b_1 = -1, b_2 = -\rho, b_3 = b_4 = \rho/(1+\rho^2)$ тождественна нулю. Поэтому для существования решения системы уравнений нужно требовать, чтобы выполнялось равенство $-\widehat{\varphi}^*_{1,1} + b_2\widehat{\varphi}^*_{2,1} + b_3\widehat{\varphi}^*_{3,1} + b_4\widehat{\varphi}^*_{4,1} = 0$. А так как ранг матрицы системы равен 3, то это условие не только необходимо, но и достаточно для разрешимости системы. При этом появляется произвол: один коэффициент, скажем $A^1_{1,0}$, возьмем произвольным, а остальные через него выразим из соотношений (3.12).

Таким образом, при нарушении простого арифметического соотношения между первыми тригонометрическими коэффициентами граничных функций в (3.1), которое в терминах исходных (четных) функций $\varphi_1, \varphi_\rho, \psi_1, \psi_\rho$ можно записать в виде

$$-(3+\rho^2)\widehat{\varphi}_{1,1} + (1+3\rho^2)\widehat{\varphi}_{\rho,1} + \rho(1-\rho^2)(\widehat{\psi}_{1,1} + \widehat{\psi}_{\rho,1}) = 0, \tag{3.13}$$

краевая задача (3.1) для бигармонического уравнения неразрешима. При выполнении этого соотношения (и, как будет видно дальше, при достаточной гладкости задаваемых граничных значений) решений бесконечно много. Поскольку для выделения определенного решения здесь можно заранее задать один из коэффициентов $A^1_{1,0}, B^1_{1,0}, A^2_{1,0}$ или $B^2_{1,0}$. Вот такая неустойчивость задачи.

Так же, как в случае круга, для того чтобы бигармоническая функция (3.2), определяемая формулами (3.3), (3.4), (3.6)–(3.9), удовлетворяла граничным условиям (3.1), нужно на функции φ_1, φ_ρ или, что то же самое, на функции φ^*_1, φ^*_2 из (3.4) помимо непрерывности (общее, помимо условия Λ^p $(1 \le p \le \infty)$) наложить дополнительные ограничения: формально продифференцированные по r ряды (3.3) с коэффициентами (3.7) на границе ∂R_ρ — для u_1 на окружности $r = \rho$, для $u_2(z)$ на окружности $r = 1$ — являются граничными значениями функций из $h_p(R_\rho)$.

Договоримся писать $f \in \widetilde{\Lambda}^p$ $(0, 2\pi)$ $(1 \le p \le \infty)$, если f — 2π-периодическая функция и $f \in L\log^+ L(0,2\pi)$ при $p = 1$; $f \in L^p(0,2\pi)$ при $1 < p < \infty:$ $f \in C_{2\pi}$ и для ее модуля непрерывности $\omega(\delta, f)$ в $C_{2\pi}$ справедливо соотношение $\displaystyle\int_0^\delta (\omega(t,f)/t)\,dt = o(\delta)$ $(\delta \to 0)$ при $p \in \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, *функции* $\psi_1(x)$, $\psi_\rho(x)$ *удовлетворяют условию* $\Lambda^p(0,2\pi)$, *функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_\rho(x)$ *абсолютно непрерывны, их производные* $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_\rho(x)$ *удовлетворяют условию* $\widetilde{\Lambda}^p$ *и, кроме того,*

$$\int\limits_0^{2\pi}\big\{(3+\rho^2)\varphi_1(x) - \rho^{-1}(1+3\rho^2)\varphi_\rho(x) + (\rho^2-1)(\psi_1(x)+\psi_\rho(x))\big\}e^{ix}\,dx = 0. \tag{3.14}$$

Тогда решение $u(z)$ *краевой задачи* (3.1) *существует,*

$$u(z) = (r^2-1)u_1(z) + (r^2-\rho^2)u_2(z), \tag{3.15}$$

где гармонические в R_ρ *функции* $u_1(z),\ u_2(z)$ *класса* $h_p(R_\rho)$, *представимы сходящимися в* $\overline{R}_\rho$ *по норме пространства* $h_p(R_\rho)$ *рядами* (3.3) *с коэффициентами, выражаемыми при* $j \ge 2$ *через функции* $\varphi_1^*(x), \dots, \varphi_4^*(x)$ (3.4) *и вспомогательные системы* (3.8)–(3.11) *тригонометрических полиномов* $y_{j,k}^{l,q}(x)$ $(j-1\in\mathbb{N};\ k=0,1,\dots,2^{j-1};\ q,l=1,2,3,4)$ *по формулам*

$$\overset{(\sim)}{A}{}^q_{j,k} = \sum_{l=1}^{4}\Big(\varphi_l^*(x),\ \overset{(\sim)}{y}{}^{l,q}_{j,k}(x)\Big), \qquad \overset{(\sim)}{B}{}^q_{j,k} = \sum_{l=1}^{4}\Big(\varphi_l^*(x),\ \overset{(\sim)}{y}{}^{l,q+2}_{j,k}(x)\Big) \qquad (q=1,2), \tag{3.16}$$

коэффициенты $A_0^q,\ \widetilde{A}_0^q$ $(q=1,2)$ *определяются однозначно из соотношений*

$$A_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2^*(x)\,dx := \widehat{\varphi}^*_{2,0},\ A_0' + \widetilde{A}_0' = \widehat{\varphi}^*_{1,0},\ 2A_0' + \frac{1-\rho^2}{\ln\rho}\widetilde{A}_0^2 = \widehat{\varphi}^*_{3,0},$$

$$\frac{1-\rho^2+2\rho\ln\rho}{\ln\rho}(\rho\widetilde{A}_0^2 - A_0^1) = \widehat{\varphi}^*_{3,0} + \widehat{\varphi}^*_{4,0} - 2\widehat{\varphi}^*_{1,0} - 2\rho\widehat{\varphi}^*_2, \tag{3.17}$$

а коэффициенты $\overset{(\sim)}{A}{}^q_{1,0},\ \overset{(\sim)}{B}{}^q_{1,0}$ $(q=1,2)$ *определяются с точностью до произвольных постоянных* $B = B^2_{1,0},\ \widetilde{B} = \widetilde{B}^2_{1,0}$ *из двух систем линейных алгебраических уравнений* (*с верхними символами* $\sin,\ \sim$ *и без них*)

$$\begin{cases} \rho\overset{(\sim)}{A}{}^1_{1,0} + \overset{(\sim)}{B}{}^1_{1,0} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\varphi_1^*(x)\overset{(\sin)}{\cos}x\,dx, \\ \overset{(\sim)}{A}{}^2_{1,0} + \rho\overset{(\sim)}{B}{}^2_{1,0} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\varphi_2^*(x)\overset{(\sin)}{\cos}x\,dx, \\ 2\overset{(\sim)}{A}{}^1_{1,0} + 2\rho\overset{(\sim)}{B}{}^1_{1,0} + (1-\rho^2)\overset{(\sim)}{A}{}^2_{1,0} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\varphi_3^*(x)\overset{(\sin)}{\cos}x\,dx + \rho(1-\rho^2)\overset{(\sim)}{B}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Если краевые условия в (3.1) *не удовлетворяют соотношению* (3.14), *то краевая задача* (3.1) *не имеет решения.*

Доказательство. Известно (см. например, [7]), что условие $f\in\widetilde{\Lambda}^p(0,2\pi)$ $(1\le p\le\infty)$ гарантирует для сопряженной функции $\widetilde{f}$ включение $\widetilde{f}\in L^p(0,2\pi)$ при $1\le p\le\infty$, считая $L^\infty(0,2\pi)=C_{2\pi}$. Для того чтобы функции u_1,u_2 в (3.2) с граничными условиями (3.3) были функциями из $h_p(R_\rho)$, помимо условий $\varphi_l^*\in\Lambda^p(\partial R_\rho)$ необходимы такие априорные ограничения: $u_1(e^{ix}),\ u_\rho(\rho e^{ix})\in L^p(\partial R_\rho),\ 1\le p\le\infty$ $(L^\infty(\partial R_\rho)=C(\partial R_\rho))$, которые в силу (3.3) равносильны тому, что у производных $\partial u_2(z)/\partial r,\ \partial u_1(z)/\partial r$ должны существовать угловые предельные значения $u'_{2,r}(e^{ix})$ на окружности $|z|=1,\ u'_{1,r}(\rho e^{ix})$ на окружности $|z|=\rho$ и принадлежать $L^p(0,2\pi]$ для соответствующего значения $p,\ 1\le p\le\infty$. Тогда (см. [1])

$$u'_{2,r}(e^{ix}) = \frac{d}{dr}\Big\{\sum_{j,k}(u_2(e^{i\theta}),\mathcal{W}_{j,k}(e^{i\theta}))\mathcal{W}_{j,k}(re^{ix}) + (u_2(e^{i\theta})\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(e^{i\theta})\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(re^{ix}))\Big\}$$

$$= \sum_{j,k}\Big\{(u_2,\mathcal{W}_{j,k})\sum_\nu \nu\theta^\nu_{j,k}\cos\nu x + (u_2,\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k})\sum_\nu \nu\theta^\nu_{j,k}\sin\nu x\Big\},$$

и, аналогично,

$$u'_{2,x}(e^{ix}) = \sum_{j,k} \Big\{ (u_2, \mathcal{W}_{j,k}) \sum_{\nu} \nu\theta^{\nu}_{j,k}(-\sin \nu x) + (u_2, \widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}) \sum_{\nu} \nu\theta^{\nu}_{j,k} \cos \nu x \Big\}.$$

Из последних двух формул (и аналогичных формул для производных функции $u_1(\rho e^{ix})$) видно, что производная $u'_{2,r}(e^{ix})$ является тригонометрически сопряженной функцией к $u'_{2,r}(e^{ix}) = (\varphi_2^*)'(x)$, а $u_{1,r}(\rho e^{ix})$ — сопряженная к $(\varphi_1^*)'(x)$. В условиях теоремы на последние функции наложены такие ограничения (при $p \in (1, \infty)$ — необходимые и достаточные), которые обеспечивают вложения $u'_{2,r}(e^{ix}),\ u'_{1,r}(\rho e^{ix}) \in L^p(0, 2\pi]$ $(1 \le p \le \infty)$.

Таким образом, условия теоремы 4 при совместимости граничных условий (3.4) на гармонические функции u_1 и u_2 гарантируют их вложение в пространство $h_p(R_\rho)$, так как при $1 < p \le \infty$ условие $v(z) \in h_p(R_\rho)$ равносильно условиям $v\big|_{\partial R_\rho} \in L^p(\partial R_\rho)$ $(L^\infty(R_\rho) = C(\partial R_\rho))$, а при $p = 1$ условия $v\big|_{\partial R_\rho} \in L \log^+ L(0, 2\pi)$, $\widetilde{v}\big|_{\partial R_\rho} \in L^1(0, 2\pi)$ гарантируют, что эти определенные на ∂R_ρ функции продолжаемы внутрь кольца до гармонически сопряженных функций, порождающих аналитическую функцию $v(z) + i\widetilde{v}(z)$ из класса Харди $H_1(\partial R_\rho)$ и поэтому $v(z), \widetilde{v}(z) \in h_1(R_\rho)$. Следовательно, решение задачи (3.1) существует, и оно при условиях теоремы представимо в виде (3.2), (3.3), где коэффициенты рядов (3.2) должны быть согласованы с граничными условиями (3.4). Это согласование проведено при анализе задачи до формулировки теоремы 4 в случае $p = \infty$ и, как уже отмечалось, справедливо при $1 \le p < \infty$, если известно, что $u_1, u_2(z) \in h_p(R_\rho)$. В частности, получено, что решение существует (краевые условия на $u_1(z)$ и $u_2(z)$ совместны) тогда и только тогда, когда выполняются ограничения (3.13) на функции φ_1^*, φ_2^*, переформулированные в теореме для исходных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_\rho(x)$ из постановки задачи (3.1). Теорема 4 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–149.
2. **Meyer Y.** Ondelettes et opérateurs // Actualites Mathematiques. P.: Herman, 1990. PP. XXI+225.
3. **Offin D., Oskolkov K.** A note on orthonormal polynomial bases and wavelets // Constr. Approx. 1963. № 9. P. 319–325.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Серия мат. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
5. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
6. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
7. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2010

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.83

О СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЛИПШИЦЕВЫХ НОРМАХ[1]

С. А. Теляковский

Показано, что задача о скорости приближения функций в липшицевых нормах сводится по существу к оценкам приближений в C. В качестве примера рассмотрены приближения в липшицевых нормах суммами Валле Пуссена.

Ключевые слова: тригонометрические полиномы, модуль непрерывности, липшицевы нормы, суммы Валле Пуссена.

S. A. Telyakovskii. On the rate of approximation of functions in Lipschitz norms.

We show that the problem on the rate of approximation of functions in Lipschitz norms is reduced to estimating approximations in C. Approximations in Lipschitz norms by Vallée Poussin sums are considered as an example.

Keywords: trigonometric polynomials, modulus of continuity, Lipschitz norms, Vallée Poussin sums.

Рассматривается приближение непрерывных 2π-периодических функций f тригонометрическими полиномами по норме

$$\| f \|_\varphi = \| f \|_C + \sup_{\delta>0} \frac{\omega(f,\delta)}{\varphi(\delta)},$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f и $\varphi(\delta)$ — положительная возрастающая на $(0,\pi]$ функция.

Скорость приближения функций по норме $\|\cdot\|_\varphi$ начал рассматривать З. Прёссдорф [1]. В этой работе (теоремы 1 и 2) даны оценки приближений суммами Фурье и Фейера для функций $f\in \operatorname{Lip}\alpha$ в случае, когда $\varphi(\delta)=\delta^\beta$, где $\beta<\alpha$. Согласно теореме 3 из [1] при $\beta=\alpha$ частные суммы рядов Фурье могут не сходиться по норме $\|\cdot\|_\varphi$.

Затем появилось немало работ, в которых для классов функций, более общих, чем классы Липшица, доказывались оценки приближений по норме $\|\cdot\|_\varphi$ суммами Фурье, Валле Пуссена, Вороного — Нёрлунда и другими средними.

Отметим здесь только работу Л. Лейндлера, А. Мейера и В. Тотика [2], в которой рассматривалось приближение средними рядов Фурье, порожденными оператором свертки, а φ была произвольной возрастающей функцией.

В настоящей заметке показано, что такого рода задачи об оценках приближений по норме $\|\cdot\|_\varphi$ в сущности сводятся к оценкам по норме C.

Теорема. *Пусть $\varphi(\delta)$ — положительная возрастающая на $(0,\pi]$ функция и для функции f дробь $\omega(f,\delta)/\varphi(\delta)$ почти возрастает на $(0,\pi]$, т. е. для $0<\delta<\eta\leqslant\pi$*

$$\frac{\omega(f,\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant c\frac{\omega(f,\eta)}{\varphi(\eta)}, \tag{1}$$

где $c\geqslant 1$ — абсолютная постоянная.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00598) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-65772.2010.1).

Если для тригонометрического полинома $t_n(x)$ порядка n справедлива оценка

$$\| f(x) - t_n(x) \|_C \leqslant A\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big), \tag{2}$$

где A — число, которое может зависеть от n, то

$$\| f(x) - t_n(x) \|_\varphi \leqslant A\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big) + \frac{B(1+A)\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big)}{\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)}, \tag{3}$$

где множитель B зависит только от коэффициента c из (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся следующей вытекающей из неравенств (4.2) и (4.3) работы С. Б. Стечкина [3] оценкой модулей непрерывности тригонометрических полиномов, приближающих функцию, через модуль непрерывности этой функции.

Если для функции $f(x)$ и тригонометрического полинома $t_n(x)$ порядка n выполняется оценка (2), то для модуля непрерывности полинома $t_n(x)$ имеет место оценка

$$\omega(t_n, \delta) \leqslant 3(1+2A)\omega(f, \delta). \tag{4}$$

Действительно, для $\delta \geqslant 1/n$ согласно (4.2)

$$\omega(t_n, \delta) \leqslant (1+2A)\omega(f, \delta).$$

А при $\delta \leqslant 1/n$ в силу (4.3)

$$\omega(t_n, \delta) \leqslant \Big(\sin\frac{1}{2}\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{2} + A\Big)n\delta\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big),$$

откуда следует (4), так как функция $\omega(f,\delta)/\delta$ почти убывает с коэффициентом 2 (см., например, [3, оценка (1.7)]).

Чтобы получить неравенство (3), оценим выражение

$$D(\delta) := \frac{1}{\varphi(\delta)} \| f(x+\delta) - t_n(x+\delta) - (f(x) - t_n(x)) \|_C .$$

Для $\delta \geqslant 1/n$ согласно (2) имеем

$$D(\delta) \leqslant \frac{1}{\varphi(\delta)} 2A\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big) \leqslant 2A\frac{\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big)}{\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)}. \tag{5}$$

А для $\delta \leqslant 1/n$, пользуясь оценкой (4), находим

$$D(\delta) \leqslant \frac{1}{\varphi(\delta)}\Big[\| f(x+\delta) - f(x) \|_C + \| t_n(x+\delta) - t_n(x) \|_C \Big] \leqslant \frac{1}{\varphi(\delta)}\Big[\omega(f,\delta) + 3(1+2A)\omega(f,\delta)\Big].$$

Отсюда в силу (1) получаем

$$D(\delta) \leqslant \frac{B(1+A)\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big)}{\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)}, \tag{6}$$

где множитель B зависит только от c.

С помощью оценок (5), (6) приходим к (3). $\square$

В качестве примера применения теоремы рассмотрим приближение в липшицевых нормах функций f суммами Валле Пуссена

$$v_{n,\lambda_n}(f,x) := \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=n-\lambda_n}^{n-1} s_k(f,x),$$

где $\lambda_n = 1,\ldots,n$ и $s_k(f,x)$ — частные суммы порядка k ряда Фурье функции f.

Для приближений в C из теоремы A работы А. В. Ефимова [4] следует оценка

$$\| f(x) - v_{n,\lambda_n}(x) \|_C \leqslant d\Big(1+\log\frac{n}{\lambda_n}\Big)\omega\Big(f,\frac{1}{n}\Big)$$

с некоторой абсолютной постоянной d.

Согласно доказанной теореме если $\varphi(\delta)$ — положительная возрастающая на $(0,\pi]$ функция и дробь $\omega(f,\delta)/\varphi(\delta)$ почти возрастает, то

$$\| f(x) - v_{n,\lambda_n}(x) \|_\varphi \leqslant d\Big(1+\log\frac{n}{\lambda_n}\Big)\omega\Big(f,\frac{1}{n}\Big) + B\Big(1+d\Big(1+\log\frac{n}{\lambda_n}\Big)\Big)\frac{\omega\Big(f,\frac{1}{n}\Big)}{\varphi\Big(\frac{1}{n}\Big)}. \tag{7}$$

Оценка (7) улучшает результаты, полученные в [5] и [6]. Так, в [5] показано, что для $\omega(\delta) \leqslant \delta^\alpha$, $\varphi(\delta) = \delta^\beta$, $0 \leqslant \beta < \alpha$,

$$\| f(x) - v_{n,\lambda_n}(x) \|_\varphi = O\big(\lambda_n^{\beta-\alpha}\big), \tag{8}$$

если $\alpha < 1$, и

$$\| f(x) - v_{n,\lambda_n}(x) \|_\varphi = O\big(\lambda_n^{\beta-\alpha}(1+\log\lambda_n)\big), \tag{9}$$

если $\alpha = 1$.

При $\lambda_n = o(n)$, $n \to \infty$, оценка (7) является более точной, чем (8) и (9).

В [6] оценки (8) и (9) распространены на более общий случай, когда $\varphi(\delta)$ является модулем непрерывности и функции $\omega(\delta)$ и $\varphi(\delta)$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Отметим еще, что в [5] и [6] предполагалось, что числа λ_n с ростом n возрастают, причем $\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_n + 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Prössdorf S.** Zur Konvergenz der Fourierreihen hölderstetiger Funktionen // Math. Nachr. 1975. Bd. 69, no. 1. S. 7–14.
2. **Leindler L., Meir A., Totik V.** On approximation of functions in Lipschitz norms // Acta Math. Hung. 1985. Vol. 45, no. 3–4. P. 441–443.
3. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
4. **Ефимов А.В.** О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 5. С. 737–770.
5. **Stypiński Z.** On a generalization of the theorem of Prössdorf // Funct. Approx. Comment. Math. 1979. Vol. 7. P. 101–104.
6. **Leindler L.** Generalization of Prössdorf's theorem // Studia Sci. Math. Hung. 1979. Vol. 14. P. 431–439.

Теляковский Сергей Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: sergeyAltel@yandex.ru

Поступила 23.03.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.518.86

О НАИМЕНЬШЕЙ МЕРЕ МНОЖЕСТВА НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА С НУЛЕВЫМ ВЗВЕШЕННЫМ СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЕМ НА ОТРЕЗКЕ

К. С. Тихановцева

Пусть $\mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ есть множество алгебраических многочленов P_n порядка n с действительными коэффициентами с нулевым средним взвешенным с ультрасферическим весом $\varphi^{(\alpha)}(x) = (1-x^2)^\alpha$ значением на отрезке $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1} \varphi^{(\alpha)} P_n(x)dx = 0$. Изучается задача о наименьшем возможном значении $\inf\{\mu(P_n) : P_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})\}$ меры $\mu(P_n) = \int_{\mathcal{X}(P_n)} \varphi^{(\alpha)}(t)dt$ множества $\mathcal{X}(P_n) = \{x \in [-1,1] : P_n(x) \geq 0\}$ точек отрезка, в которых многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ является неотрицательным. В работе задача решена при $n=2$ для значений $\alpha > 0$. При $\alpha = 0$ задачу решили В. В. Арестов и В. Ю. Раевская в 1997 г.; в этом случае экстремальный многочлен имеет один промежуток неотрицательности, один из концов которого совпадает с одной из концевых точек отрезка. Оказалось, что при $\alpha > 0$ экстремальный многочлен имеет уже два промежутка неотрицательности с концами в точках ± 1.

Ключевые слова: экстремальная задача, алгебраические многочлены, многочлены с нулевым взвешенным средним значением, ультрасферический вес.

K. S. Tikhanovtseva. On the least measure of the nonnegativity set of an algebraic polynomial with zero weighted mean value on a segment.

Let $\mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ be the set of algebraic polynomials P_n of order n with real coefficients and zero weighted mean value with respect to the ultraspherical weight $\varphi^{(\alpha)}(x) = (1-x^2)^\alpha$ on the interval $[-1,1]$: $\int_{-1}^{1} \varphi^{(\alpha)} P_n(x)dx = 0$. We study the problem about the least possible value $\inf\{\mu(P_n) : P_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})\}$ of the measure $\mu(P_n) = \int_{\mathcal{X}(P_n)} \varphi^{(\alpha)}(t)dt$ of the set $\mathcal{X}(P_n) = \{x \in [-1,1] : P_n(x) \geq 0\}$ of points of the interval at which the polynomial $P_n \in \mathcal{P}_n(\varphi^{(\alpha)})$ is nonnegative. In this paper, the problem is solved for $n=2$ and $\alpha > 0$. V.V. Arestov and V.Yu. Raevskaya solved the problem for $\alpha = 0$ in 1997; in this case, an extremal polynomial has one interval of nonnegativity such that one of its endpoints coincides with one of the endpoints of the interval. In the case $\alpha > 0$, we find that an extremal polynomial has two intervals of nonnegativity with endpoints ± 1.

Keywords: extremal problem, algebraic polynomials, polynomials with zero weighted mean value, ultraspherical weight.

Введение

Пусть функции φ и ψ неотрицательны, суммируемы на отрезке $[-1,1]$ и отличны от 0 на множестве положительной меры из $[-1,1]$. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(\varphi)$ есть множество многочленов P с действительными коэффициентами (точной) степени $n \geqslant 1$, для которых выполняется условие

$$\int_{-1}^{1} P(t)\varphi(t)\,dt = 0. \tag{0.1}$$

Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ введем множество

$$\mathcal{X}(P) = \{t \in [-1,1] :\ P(t) \geqslant 0\}$$

точек отрезка $[-1,1]$, в которых многочлен неотрицателен. Величина

$$\mu(P) = \int_{\mathcal{X}(P)} \psi(t)dt$$

является ψ-мерой множества $\mathcal{X}(P)$. Интерес представляет наименьшее значение этой меры, т. е. величина

$$\mu_n = \inf\{\mu(P):\ P \in \mathcal{P}_n\} = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \int\limits_{\mathcal{X}(P)} \psi(t)\,dt. \tag{0.2}$$

В 1987 г. А. Г. Бабенко [2] для единичных весов $\psi = \varphi \equiv 1$ нашел порядок поведения μ_n по n при $n \to \infty$. Десять лет спустя В. В. Арестов и В. Ю. Раевская [1] исследовали задачу (0.2) для $\psi \equiv 1$ и произвольного веса φ. Они доказали, что в этом случае множество положительности экстремального многочлена есть промежуток. Также они получили точное значение величины μ_n и указали экстремальные многочлены, если вес φ положителен, непрерывен на $(-1, 1)$ и удовлетворяет следующему условию: при любом $\theta \in (0, 1)$ функции

$$\frac{\varphi(t-1)}{\varphi(\theta t-1)}, \qquad \frac{\varphi(1-t)}{\varphi(1-\theta t)}$$

не убывают по переменному t на интервале $(0, 2)$. Оказалось, что при таких ограничениях на φ множество положительности экстремального многочлена есть промежуток, одним из концов которого является 1 или -1. В частности, указанным ограничениям удовлетворяет вес Якоби $\varphi^{(\alpha,\beta)}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ для значений параметров $-1 < \alpha \le \beta \le 0$. Задачи типа (0.2) восходят к Л. В. Тайкову (см. [3]). Для тригонометрических полиномов задачу, аналогичную (0.2), с единичным весом решил А. Г. Бабенко [3], а подобную же задачу для алгебраических многочленов (вновь с единичным весом) на многомерной евклидовой сфере изучала М. В. Дейкалова [4].

В данной работе изучается задача (0.2) для ультрасферических весов

$$\varphi = \psi = \varphi^{(\alpha)}, \qquad \varphi^{(\alpha)}(t) = (1-t^2)^\alpha, \qquad \alpha > 0,$$

на множестве многочленов $\mathcal{P}_2(\varphi^{(\alpha)})$ второй степени, т. е. изучается величина

$$\mu_2(\alpha) = \inf_{P\in\mathcal{P}_2(\varphi^{(\alpha)})} \int\limits_{\mathcal{X}(P)} \varphi^{(\alpha)}(t)\,dt. \tag{0.3}$$

Результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Для $\alpha > 0$ любой экстремальный многочлен задачи* (0.3) *представляется в виде $P^*(t) = a(t-x^*)(t-y^*)$, где*

а) $a > 0$;

б) *корни x^* и y^* связаны соотношением $x^*y^* = -1/(2\alpha+3)$;*

в) $|x^*|$ *определяется единственным образом как точка минимума функции*

$$m(x) = \int\limits_{-1}^{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}} (1-t^2)^\alpha\,dt + \int\limits_{x}^{1} (1-t^2)^\alpha\,dt$$

на интервале

$$x \in \left(\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}\right).$$

Как видно из теоремы, $|y^*| \in \big(1/\sqrt{2\alpha+1},\, 1\big)$, поэтому при $\alpha > 0$ экстремальный многочлен задачи (0.3) имеет уже два промежутка положительности с концами в точках -1 и $+1$.

1. Вспомогательные утверждения

Нетрудно убедиться, что экстремальный многочлен задачи (0.3) существует (см. [1]). Действительно, у многочленов $P(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ из множества $\mathcal{P}_2$ коэффициенты a_1, a_2 можно выбирать произвольно, после чего коэффициент a_0 однозначно определяется из условия ортогональности (0.1). Функция (0.3) не изменяется при умножении многочлена на положительную константу, следовательно, можно рассматривать только те многочлены, для которых $|a_0| + |a_1| + |a_2| = 1$. Таким образом, задача (0.3) является задачей минимизации непрерывной функции коэффициентов на компактном множестве и, следовательно, нижняя грань достигается и экстремальный многочлен существует.

Нетрудно видеть, что любой многочлен из $\mathcal{P}_2$ имеет два различных действительных корня, по крайней мере один из которых лежит в интервале $(-1, 1)$. Эти корни нам удобно обозначать x и y и записывать многочлен в виде $P(t) = a(t - x)(t - y)$, $a \neq 0$.

Лемма 1. *Многочлен $a(t-x)(t-y)$, $a \neq 0$, принадлежит множеству $\mathcal{P}_2$ тогда и только тогда, когда его корни x и y связаны равенством*

$$xy = -\frac{1}{2\alpha + 3}.$$

Доказательство. Для многочлена $a(t - x)(t - y) = a\big(t^2 - (x + y)t + xy\big)$ в силу четности веса φ условие (0.1) эквивалентно равенству

$$\int_{-1}^{1} (t^2 + xy)\varphi(t)\, dt = 0.$$

Учитывая, что $\varphi(t) = (1 - t^2)^\alpha$, это равенство можно переписать в виде

$$xy = -\frac{M_2}{M_0}, \qquad \text{где} \quad M_0 = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^\alpha\, dt, \quad M_2 = \int_{-1}^{1} t^2(1 - t^2)^\alpha\, dt. \tag{1.1}$$

Выразим величины M_0 и M_2 через B-функцию. Для этого сначала воспользуемся четностью подынтегральных функций, а затем сделаем замену $\eta = (1 - t^2)$:

$$M_0 = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^\alpha\, dt = 2\int_{0}^{1} (1 - t^2)^\alpha\, dt = \int_{0}^{1} \eta^\alpha (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}}\, d\eta = \mathrm{B}\left(\alpha + 1, 1/2\right),$$

$$M_2 = \int_{-1}^{1} t^2(1 - t^2)^\alpha\, dt = \int_{0}^{1} \eta^\alpha (1 - \eta)^{\frac{1}{2}}\, d\eta = \mathrm{B}\left(\alpha + 1, 3/2\right).$$

Далее, запишем M_2/M_0 через Г-функцию и применим известную формулу $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$:

$$\frac{M_2}{M_0} = \frac{\mathrm{B}\left(\alpha + 1, 3/2\right)}{\mathrm{B}\left(\alpha + 1, 1/2\right)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma\left(3/2\right)}{\Gamma\left(\alpha + 5/2\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha + 3/2\right)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma\left(1/2\right)}$$
$$= \frac{\Gamma\left(1/2\right)}{2\left(\alpha + 3/2\right)\Gamma\left(\alpha + 3/2\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha + 3/2\right)}{\Gamma\left(1/2\right)} = \frac{1}{2\alpha + 3}.$$

Подставив полученное выражение в формулу (1.1), получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Корни экстремального многочлена задачи* (0.3) *принадлежат отрезку* $[-1, 1]$.

Доказательство проведем от противного. Пусть один из корней экстремального многочлена $P^*(t) = a(t-x)(t-y)$, $a \neq 0$, лежит вне отрезка $[-1,1]$. Без ограничения общности будем считать, что $x < -1$.

Предположим сначала, что ветви экстремального многочлена направлены вверх. Тогда по лемме 1 корень $y = -((2\alpha+3)x)^{-1} \in (0,1)$ и величина $\mu(P^*)$ принимает вид

$$\mu(P^*) = \int\limits_{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}}^{1} (1-t^2)^{\alpha}\,dt. \tag{1.2}$$

Рассмотрим многочлен $\overline{P}(t) = \big(t+1\big)\big(t - 1/(2\alpha+3)\big)$, по лемме 1 он также принадлежит $\mathcal{P}_2$. Для него

$$\mu(\overline{P}) = \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)}}^{1} (1-t^2)^{\alpha}\,dt. \tag{1.3}$$

В (1.2) и (1.3) интегралы берутся от одинаковых функций, но по разным промежуткам. Так как $x < -1$, то

$$\Big[\frac{1}{2\alpha+3}, 1\Big] \subset \Big[\frac{-1}{(2\alpha+3)x}, 1\Big].$$

Учитывая, что подынтегральная функция всюду на $(-1,1)$ положительна, получаем $\mu(P^*) > \mu(\overline{P})$. Это противоречит условию, что P^* экстремальный.

Предположим теперь, что ветви экстремального полинома направлены вниз. Тогда в силу леммы 1 величина $\mu(P^*)$ принимает вид

$$\mu(P^*) = \int\limits_{-1}^{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}} (1-t^2)^{\alpha}\,dt.$$

Подынтегральная функция четна, следовательно,

$$\mu(P^*) = \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^{1} (1-t^2)^{\alpha}\,dt. \tag{1.4}$$

Сравним (1.3) и (1.4). Так как x отрицателен, то

$$\Big[\frac{1}{2\alpha+3}, 1\Big] \subset \Big[\frac{1}{(2\alpha+3)x}, 1\Big].$$

Как и в предыдущем случае, получаем $\mu(P^*) > \mu(\overline{P})$. И снова противоречие с условием, что P^* экстремальный. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Любой экстремальный многочлен задачи* (0.3) *представляется в виде*

$$P^*(t) = a(t-x)(t-y), \quad \textit{где} \ \ a \neq 0, \quad xy = \frac{-1}{2\alpha+3}, \quad |x| \in \left[\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right].$$

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 корни x и y экстремального многочлена должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \\ xy = -\dfrac{1}{(2\alpha+3)}. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно x, получим

$$x \in \left[-1, -\frac{1}{2\alpha+3}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2\alpha+3}, 1\right].$$

Так как весовая функция $(1-t^2)^\alpha$ четна, то величина $\mu(a(t-x)(t-y))$ не изменится при замене пары x, y на $-x$, $-y$, т. е. при замене многочлена $P^*(t)$ на многочлен $P^*(-t)$. Поэтому достаточно рассмотреть только $x \in \bigl[(2\alpha+3)^{-1}, 1\bigr]$.

Далее, пусть x пробегает отрезок $[(2\alpha+3)^{-1}, (2\alpha+3)^{-1/2}]$, тогда $y = -((2\alpha+3)x)^{-1}$ пробегает отрезок $[-1, -(2\alpha+3)^{-1/2}]$. Значение величины $\mu(a(t-x)(t-y))$ не изменится при перестановке x и y. Следовательно, рассмотрев случай $x \in [(2\alpha+3)^{-1}, (2\alpha+3)^{-1/2}]$, мы рассмотрим также $x \in [-1, -(2\alpha+3)^{-1/2}]$, а значит, и $x \in [(2\alpha+3)^{-1/2}, 1]$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть* $\alpha > 0$,

$$x \in \left[\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right], \tag{1.5}$$

$$\widetilde{m}(x) = (1-x^2)^\alpha - \left(1 - \frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^\alpha \frac{1}{(2\alpha+3)x^2}.$$

Функция $\widetilde{m}(x)$ *обладает следующими свойствами*:

1) *на промежутке* $\bigl[\sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3), 1/\sqrt{2\alpha+3}\bigr)$ *функция* $\widetilde{m}(x) < 0$;

2) *на интервале* $\bigl(1/(2\alpha+3), \sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\bigr)$ *функция* $\widetilde{m}(x)$ *обращается в ноль в единственной точке* x^*, *причем* $\widetilde{m}(x) > 0$ *при* $x < x^*$ *и* $\widetilde{m}(x) < 0$ *при* $x > x^*$;

3) *если* $\alpha \in (0, 4]$, *то на отрезке* $\bigl[\sqrt{\alpha+1}/(2\alpha+3), \sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\bigr]$ *функция* $\widetilde{m}(x) < 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Знак $\widetilde{m}(x)$ совпадает со знаком функции

$$h(x) = (1-x^2)^\alpha x - \left(1 - \frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^\alpha \frac{1}{(2\alpha+3)x}.$$

Исследуем отдельно поведение уменьшаемого и вычитаемого:

$$\ell(x) = (1-x^2)^\alpha x \quad \text{и} \quad r(x) = \left(1 - \frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^\alpha \frac{1}{(2\alpha+3)x}.$$

Производная

$$\ell'(x) = \bigl((1-x^2)^\alpha x\bigr)'_x = (1-x^2)^{\alpha-1}\bigl(1-(2\alpha+1)x^2\bigr)$$

на промежутке (1.5) положительна, следовательно, функция $\ell(x)$ возрастает.

Производная

$$r'(x) = \left(\left(1 - \frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^\alpha \frac{1}{(2\alpha+3)x}\right)'_x$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{(2\alpha+3)x^2}\left(\frac{2\alpha+1}{(2\alpha+3)^2x^2} - 1\right)$$

на промежутке (1.5) обращается в нуль в точках $1/(2\alpha+3)$ и $\sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)$. Следовательно, функция $r(x)$ возрастает на промежутке

$$\left(\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}\right) \tag{1.6}$$

и убывает на

$$\left[\frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right). \tag{1.7}$$

Отсюда мы заключаем, что функция $h(x)$ на промежутке (1.7) возрастает. А поскольку $h(1/\sqrt{2\alpha+3})=0$, то $h(x)<0$ для x из (1.7). Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Здесь нам также удобно ввести вспомогательную функцию

$$g(x)=\frac{1}{(1-x^2)^\alpha}\left(1-\frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^\alpha\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}\,.$$

При этом соотношение $\widetilde{m}(x)<0$ эквивалентно соотношению $g(x)>1$, а соотношение $\widetilde{m}(x)>0$ соответственно $g(x)<1$. Поэтому в терминах $g(x)$ второе утверждение леммы принимает следующий вид: на промежутке (1.6) существует (единственная) точка x^* такая, что

$$g(x)<1 \quad \text{для} \quad x\in\left[\frac{1}{2\alpha+3},x^*\right) \quad \text{и} \quad g(x)>1 \quad \text{для} \quad x\in\left(x^*,\frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}\right].$$

Исследуем производную $g(x)$. Для удобства сделаем замену $t=x^2$:

$$g(\sqrt{t})=\frac{1}{(2\alpha+3)^{2\alpha+1}}\left(\frac{(2\alpha+3)^2t-1}{t(1-t)}\right)^\alpha\frac{1}{t},$$

$$g'(\sqrt{t})=\frac{1}{(2\alpha+3)^{2\alpha+1}}\left(\frac{(2\alpha+3)^2t-1}{t(1-t)}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{t^3(1-t)^2}$$
$$\times\left[(\alpha+1)(2\alpha+3)^2t^2-((2\alpha+3)^2+2\alpha+1)t+\alpha+1\right].$$

Выражение вне квадратных скобок строго положительно. Изучим выражение в квадратных скобках. Оно обращается в нуль в точках

$$t_{1,2}=\frac{2\alpha+5\pm\sqrt{8(\alpha+2)}}{(2\alpha+3)^2}\,.$$

Значит, на рассматриваемом промежутке $g'(x)$ обращается в нуль только в точках $x_+=\sqrt{t_1}$ и $x_-=\sqrt{t_2}$. Несложно проверить, что точка x_+ лежит правее точек промежутка:

$$\left(\frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}\right)^2<x_+=\frac{2\alpha+5+\sqrt{8(\alpha+2)}}{(2\alpha+3)^2}\,,$$

а точка x_- — внутри:

$$\left(\frac{1}{2\alpha+3}\right)^2<x_-=\frac{2\alpha+5-\sqrt{8(\alpha+2)}}{(2\alpha+3)^2}<\left(\frac{\sqrt{2\alpha+1}}{2\alpha+3}\right)^2.$$

Поэтому $g(x)$ возрастает на $[1/(2\alpha+3),x_-)$ и убывает на $\left(x_-,\sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\right]$. По доказанному $g\left(\sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\right)>1$, следовательно, $g(x)>1$ на всем $\left(x_-,\sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\right]$. На оставшемся промежутке $[1/(2\alpha+3),x_-)$ функция $g(x)$ монотонна, $g\left(1/(2\alpha+3)\right)=0$ и $g(x_-)>1$. Поэтому существует единственная точка x^*, в которой $g(x^*)=1$. Второе утверждение леммы обосновано.

Для доказательства третьего утверждения достаточно проверить, что при $\alpha\in(0,4]$ значение $g\left(\sqrt{\alpha+1}/(2\alpha+3)\right)>1$, т. е.

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha\left(\frac{(2\alpha+3)^2}{(2\alpha+3)^2-\alpha-1}\right)^\alpha\geqslant\frac{\alpha+1}{2\alpha+3}\,. \tag{1.8}$$

Правая часть неравенства (1.8) возрастает по α. Изучим поведение левой части, для этого преобразуем ее следующим образом:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha\left(\frac{(2\alpha+3)^2}{(2\alpha+3)^2-\alpha-1}\right)^\alpha=e^{\ln\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha\left(\frac{(2\alpha+3)^2}{(2\alpha+3)^2-\alpha-1}\right)^\alpha\right)}.$$

Изучим поведение логарифма:

$$\left(\alpha\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\,\frac{(2\alpha+3)^2}{(2\alpha+3)^2-\alpha-1}\right)\right)''_{\alpha\alpha}$$

$$=\left(\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)+1-\frac{\alpha}{\alpha+1}+\ln\left(\frac{(2\alpha+3)^2}{(2\alpha+3)^2-\alpha-1}\right)+\frac{4\alpha}{2\alpha+3}-\frac{\alpha(8\alpha+11)}{(2\alpha+3)^2-\alpha-1}\right)'_{\alpha}$$

$$=\frac{4\alpha^6+228\alpha^5+1295\alpha^4+3086\alpha^3+3744\alpha^2+2304\alpha+576}{\alpha(\alpha+1)^2(2\alpha+3)^2(4\alpha^2+11\alpha+8)^2}>0$$

всюду при $\alpha>0$. Следовательно, первая производная возрастает и максимальное значение принимает на бесконечности. Так как предел первой производной при α, стремящемся к $+\infty$, равен нулю, то логарифм не возрастает при всех $\alpha>0$. Поэтому неравенство (1.8) достаточно проверить в одной точке $\alpha=4$. Оно действительно справедливо, поскольку принимает вид

$$\frac{214358881}{442050625}>\frac{5}{11},\qquad \text{что эквивалентно}\qquad 2357947691>2210253125.$$

2. Доказательство теоремы

Отметим вначале, что утверждение б) теоремы следует из леммы 1.

Докажем утверждение а). Доказательство проведем в несколько этапов.

1. В силу леммы 3 без ограничения общности можно искать экстремальный многочлен в виде

$$P^*(t)=a(t-x^*)(t-y^*),\quad a\neq0,\quad y^*=-\frac{1}{(2\alpha+3)x^*}\,,\quad x^*\in\left[\frac{1}{2\alpha+3},\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right].$$

Если $a>0$, т. е. ветви экстремального многочлена направлены вверх, то

$$M(P^*)=\int\limits_{-1}^{\frac{-1}{(2\alpha+3)x^*}}(1-t^2)^\alpha\,dt+\int\limits_{x^*}^{1}(1-t^2)^\alpha\,dt,$$

если же $a<0$, т. е. ветви направлены вниз, то

$$M(P^*)=\int\limits_{\frac{-1}{(2\alpha+3)x^*}}^{x^*}(1-t^2)^\alpha\,dt.$$

Таким образом, достаточно показать, что для $\alpha>0$ и

$$x\in\left[\frac{1}{2\alpha+3},\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right]\tag{2.1}$$

верно неравенство

$$\int\limits_{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}}^{x}(1-t^2)^\alpha\,dt>\int\limits_{-1}^{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}}(1-t^2)^\alpha dt+\int\limits_{x}^{1}(1-t^2)^\alpha\,dt.\tag{2.2}$$

Добавив к обеим частям неравенства (2.2) выражение, стоящее в его правой части, и воспользовавшись четностью подынтегральной функции, мы получим неравенство

$$2\int\limits_0^1 (1-t^2)^\alpha\,dt > 2\int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^1 (1-t^2)^\alpha dt + 2\int\limits_x^1 (1-t^2)^\alpha\,dt.$$

Сократим на 2 и перенесем интеграл от x до 1 в левую часть. Таким образом, (2.2) эквивалентно следующему неравенству:

$$\int\limits_0^x (1-t^2)^\alpha\,dt > \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^1 (1-t^2)^\alpha\,dt. \tag{2.3}$$

2. Покажем, что промежуток (2.1) можно уменьшить. Для этого изучим поведение производных левой и правой частей (2.3):

$$\ell(x) = \int\limits_0^x (1-t^2)^\alpha\,dt, \qquad r(x) = \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^1 (1-t^2)^\alpha\,dt.$$

Производная левой части

$$\ell'(x) = \Bigg(\int\limits_0^x (1-t^2)^\alpha dt\Bigg)'_x = (1-x^2)^\alpha$$

убывает по x. Найдем, где возрастает по x производная правой части

$$r'(x) = \Bigg(\int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^1 (1-t^2)^\alpha dt\Bigg)'_x = \frac{1}{x^2(2\alpha+3)}\left(1-\frac{1}{x^2(2\alpha+3)^2}\right)^\alpha.$$

Для этого еще раз возьмем производную по x:

$$r''(x) = \left(\frac{1}{x^2(2\alpha+3)}\left(1-\frac{1}{x^2(2\alpha+3)^2}\right)^\alpha\right)'_x$$

$$= \frac{-2}{x^3(2\alpha+3)}\left(1-\frac{1}{x^2(2\alpha+3)^2}\right)^\alpha + \frac{2\alpha}{x^5(2\alpha+3)^3}\left(1-\frac{1}{x^2(2\alpha+3)^2}\right)^{\alpha-1}$$

$$= \frac{2}{x^3(2\alpha+3)}\left(1-\frac{1}{x^2(2\alpha+3)^2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha+1}{x^2(2\alpha+3)^2}-1\right).$$

Последнее выражение положительно на промежутке (2.1), если $(\alpha+1)/(x^2(2\alpha+3)^2) > 1$, т. е. производная $r'(x)$ правой части (2.3) возрастает при $x < \sqrt{\alpha+1}/(2\alpha+3)$.

Отсюда заключаем, что на отрезке $\big[1/(2\alpha+3), \sqrt{\alpha+1}/(2\alpha+3)\big]$ разность производных $\ell'(x)-r'(x)$ убывает, а значит, функция $\ell(x)-r(x)$ строго вогнута. Поэтому для доказательства неравенства (2.3) на промежутке (2.1) достаточно проверить его в концевой точке $1/(2\alpha+3)$ и на отрезке $\big[\sqrt{\alpha+1}/(2\alpha+3), 1/\sqrt{2\alpha+3}\big]$. Ясно, что в точке $x = 1/(2\alpha+3)$ неравенство (2.3) справедливо. Докажем, что оно верно для всех

$$x \in \left[\frac{\sqrt{\alpha+1}}{2\alpha+3}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right]. \tag{2.4}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\alpha \in [0,4]$ и $\alpha \in [4,\infty)$.

3. Докажем, что неравенство (2.3) на промежутке (2.4) выполняется для $\alpha \in [0,4]$. Неравенство (2.3) запишем в виде

$$\int\limits_{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}}^{x} (1-t^2)^\alpha dt > \int\limits_0^1 (1-t^2)^\alpha dt. \tag{2.5}$$

При фиксированном α производная левого интеграла по x совпадает с функцией $\widetilde{m}(x)$, определенной в лемме 4. В силу этой леммы значение левого интеграла по x убывает. Следовательно, неравенство (2.5) надо проверить только в одной точке $x = 1/\sqrt{2\alpha+3}$. Докажем, что

$$\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}} (1-t^2)^\alpha dt > \int\limits_0^1 (1-t^2)^\alpha dt. \tag{2.6}$$

Обе части этого неравенства убывают по α.

Обозначим левую часть неравенства (2.6) через $\ell(\alpha)$, а правую часть через $r(\alpha)$. Для обоснования неравенства (2.6) достаточно проверить 3 следующих неравенства:

$$\ell(1) = 2\int\limits_0^{1/\sqrt{5}} (1-t^2)dt > \int\limits_0^1 (1-t^2)^{1/2} dt = r(1/2),$$

$$\ell(2) = 2\int\limits_0^{1/\sqrt{7}} (1-t^2)^2 dt > \int\limits_0^1 (1-t^2) dt = r(1),$$

$$\ell(4) = 2\int\limits_0^{1/\sqrt{11}} (1-t^2)^4 dt > \int\limits_0^1 (1-t^2)^2 dt = r(2).$$

Эти неравенства действительно справедливы:

$$\frac{28}{75}\sqrt{5} > \frac{\pi}{4}, \quad \text{что эквивалентно} \quad 0.8348 > 0.7853,$$

$$\frac{1336}{5145}\sqrt{7} > \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \sqrt{7} > \frac{1715}{668} = 2.5673\ldots,$$

$$\frac{8193376}{50731065}\sqrt{11} > \frac{8}{15} \quad \text{или} \quad \sqrt{11} > \frac{3382071}{1024172} = 3.3022\ldots$$

4. Докажем, что неравенство (2.3) на промежутке (2.4) выполняется для $\alpha \in [4,\infty)$. Оценим левую и правую части (2.3). Левую часть можно оценить следующим образом:

$$\int\limits_0^x \left(1-t^2\right)^\alpha dt > x\left(1-x^2\right)^\alpha \geq x\left(1-\frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha. \tag{2.7}$$

В правой части сделаем замену переменных

$$\int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^{1} \left(1-t^2\right)^\alpha dt = [t = x\eta] = x \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\frac{1}{x}} \left(1-(x\eta)^2\right)^\alpha d\eta.$$

Далее,

$$\int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x}}^{1} (1-t^2)^\alpha\,dt = x \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\frac{1}{x}} (1-(xt)^2)^\alpha\,dt$$

$$= x \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\frac{1}{x}} e^{\alpha\ln(1-(xt)^2)}\,dt \le x \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\infty} e^{-\alpha(xt)^2}\,dt. \tag{2.8}$$

В силу оценок (2.7) и (2.8) для доказательства (2.3) достаточно установить неравенство

$$\left(1-\frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha > \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\infty} e^{-\alpha(xt)^2}\,dt. \tag{2.9}$$

Докажем, что правая часть (2.9)

$$F(x) = \int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\infty} e^{-\alpha(xt)^2}\,dt$$

возрастает по переменной x на промежутке (2.4). С этой целью сначала заменим переменную интегрирования $\eta = xt\sqrt{\alpha}$, а затем положим $u = \sqrt{\alpha}/((2\alpha+3)x)$:

$$\int\limits_{\frac{1}{(2\alpha+3)x^2}}^{\infty} e^{-\alpha(xt)^2}\,dt = \frac{1}{x\sqrt{\alpha}} \int\limits_{\frac{\sqrt{\alpha}}{(2\alpha+3)x}}^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{u(2\alpha+3)}{\alpha}\int\limits_u^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

Таким образом, в новых обозначениях нужно доказать, что функция

$$f(u) = u\int\limits_u^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta, \qquad u \in \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2\alpha+3}}, \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha+1}}\right], \tag{2.10}$$

убывает по u. Продифференцируем ее два раза:

$$f'(u) = \int\limits_u^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta - ue^{-u^2}, \qquad f''(u) = -2e^{-u^2} + 2u^2e^{-u^2} = 2e^{-u^2}(u^2-1).$$

На указанном промежутке $f''(u) < 0$, значит, $f'(u)$ убывает и своего наибольшего значения достигает в левом конце $\sqrt{\alpha}/\sqrt{2\alpha+3}$ промежутка изменения u. Выражение $\sqrt{\alpha}/\sqrt{2\alpha+3}$ возрастает по α на области определения, поэтому его наименьшее значение достигается при $\alpha = 4$ и равно $\sqrt{4}/\sqrt{11} = 2/\sqrt{11}$. С помощью функции

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^u e^{-\eta^2}\,d\eta$$

вычисляем

$$f'\Big(\frac{2}{\sqrt{11}}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\operatorname{erf}\Big(\frac{2}{\sqrt{11}}\Big)\right) - \frac{2}{\sqrt{11}}e^{-\frac{4}{11}} = -0.0702\ldots$$

Отсюда заключаем, что $f'(u) < 0$ и функция $f(u)$ убывает по u, а функция $F(x)$ возрастает по x и

$$F(x) \le F\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right) = \int\limits_1^\infty e^{-\frac{\alpha}{2\alpha+3}t^2}\,dt. \tag{2.11}$$

Заменив правую часть (2.9) на выражение, стоящее в правой части (2.11), мы сведем исходную задачу к проверке неравенства

$$\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha > \int\limits_1^\infty e^{-\frac{\alpha}{2\alpha+3}t^2}\,dt. \tag{2.12}$$

Докажем, что при $\alpha \ge 4$ минимум по α левой части (2.12) больше, чем максимум правой.

Правая часть неравенства (2.12) убывает по α, так как убывает по α подынтегральное выражение. Поэтому для $\alpha \ge 4$

$$\int\limits_1^\infty e^{-\frac{\alpha}{2\alpha+3}t^2}\,dt \le \int\limits_1^\infty e^{-\frac{4}{11}t^2}\,dt = 0.5786\ldots \tag{2.13}$$

Убедимся, что левая часть неравенства (2.12) убывает по α. При $\alpha \ge 4$ производная левой части (2.12) имеет вид

$$\left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha\right)' = \left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha \left(\ln\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right) + \frac{2\alpha}{(2\alpha+3)^2\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)}\right). \tag{2.14}$$

Первый сомножитель в последнем выражении положителен, следовательно, знак всего выражения определяет второй сомножитель. Продифференцируем его по α еще раз:

$$\left(\ln\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right) + \frac{2\alpha}{(2\alpha+3)^2\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)}\right)' = \frac{5\alpha+6}{(2\alpha+3)^2(\alpha+1)^2} > 0.$$

Таким образом, второй сомножитель возрастает. Поскольку

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\ln\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right) + \frac{2\alpha}{(2\alpha+3)^2\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)}\right) = 0,$$

то знак второго сомножителя, а значит, и всего выражения (2.14) отрицательный. Мы доказали, что левая часть неравенства (2.12) убывает по α. Поэтому при $\alpha \ge 4$ имеем

$$\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha > \lim_{\alpha\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2\alpha+3}\right)^\alpha = e^{-\frac{1}{2}} = 0.6065\ldots \tag{2.15}$$

Сравнивая теперь оценки (2.15) и (2.13), убеждаемся, что неравенство (2.12) справедливо. Утверждение а) доказано.

Докажем утверждение в). В силу уже доказанных утверждений а), б) и леммы 3 для величины $\mu(P^*)$ справедливо представление

$$\mu(P^*) = \min\left\{m(x)\colon\ x \in \left[\frac{1}{2\alpha+3}, \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}}\right]\right\},$$

где

$$m(x) = \int\limits_{-1}^{\frac{-1}{(2\alpha+3)x}} (1-t^2)^\alpha\,dt + \int\limits_{x}^{1} (1-t^2)^\alpha\,dt. \tag{2.16}$$

Нужно доказать, что точка минимума x^* единственная и $x^* \in \big(1/(2\alpha+3), \sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\big)$. Исследуем производную $m(x)$. Нетрудно видеть, что

$$m'(x) = \left(1 - \frac{1}{(2\alpha+3)^2x^2}\right)^\alpha \frac{1}{(2\alpha+3)x^2} - (1-x^2)^\alpha = -\widetilde{m}(x);$$

напомним, что функция $\widetilde{m}(x)$ определена в лемме 4. В силу этой леммы на промежутке $\big[\sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3), 1/\sqrt{2\alpha+3}\big)$ функция $m'(x) > 0$, а на $\big(1/(2\alpha+3), \sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\big)$ обращается в нуль в единственной точке x^*, причем $m'(x) < 0$ при $x < x^*$ и $m'(x) > 0$ при $x > x^*$. Таким образом, x^* — единственная точка минимума $m(x)$. Теорема доказана. □

Для натуральных α функция $m(x)$, определенная в (2.16), будет рациональной. Точка минимума этой функции есть корень алгебраического многочлена

$$(2\alpha+3)^{2\alpha+1}x^{2\alpha+2}m'(x) = \big((2\alpha+3)^2x^2 - 1\big)^\alpha - (2\alpha+3)^{2\alpha+1}x^{2\alpha+2}(1-x^2)^\alpha. \tag{2.17}$$

Рассмотрим более подробно случай $\alpha = 1$. Многочлен (2.17) принимает вид

$$5^3x^6 - 5^3x^4 + 5^2x^2 - 1 = 5^3\left(x^2 - \frac{1}{5}\right)\left(x^2 - \frac{2+\sqrt{3}}{5}\right)\left(x^2 - \frac{2-\sqrt{3}}{5}\right).$$

В интервале $\big(1/(2\alpha+3),\ \sqrt{2\alpha+1}/(2\alpha+3)\big) = \big(1/5,\ \sqrt{3}/5\big)$ он обращается в нуль в точке $x^* = \sqrt{2-\sqrt{3}}/\sqrt{5}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арестов В.В., Раевская В.Ю.** Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 332–344.
2. **Бабенко А.Г.** Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1987. 109 с.
3. **Бабенко А.Г.** Об одной экстремальной задаче для полиномов // Мат. заметки. 1984. Т. 35, вып. 3. С. 349–356.
4. **Дейкалова М.В.** Об одной экстремальной задаче для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на многомерной сфере // Изв. Урал. гос. ун-та. Сер. Математика и механика. 2006. Т. 44, № 9. С. 42–54.

Тихановцева Кристина Сергеевна
аспирант
Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
e-mail: kristina-tih@yandex.ru

Поступила 17.10.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

УДК 517.547.3

К НЕРАВЕНСТВУ БОРА[1]

В. А. Юдин

На классе H_∞ устанавливается точность в неравенстве Г. Бора $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left|f^{(k)}(0)/(2^{k/2}k!)\right| \le \sqrt{2}\,\|f\|_\infty$.

Ключевые слова: точное неравенство для функций, аналитических в круге.

V. A. Yudin. On Bohr's inequality.

It is established that H. Bohr's inequality $\sum_{k=0}^{\infty}\left|f^{(k)}(0)/(2^{k/2}k!)\right| \le \sqrt{2}\,\|f\|_\infty$ is sharp on the class H_∞.

Keywords: sharp inequality for functions that are analytic in a circle.

Через H_p, $p>0$, обозначим [1] пространство аналитических в $D=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ функций $f(z)$ с нормой

$$\|f\|_p=\begin{cases}\sup\limits_{0\le r<1}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\right)^{1/p} & \text{при } 0<p<\infty,\\ \sup\limits_{z\in D}|f(z)| & \text{при } p=\infty.\end{cases}$$

Пусть

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k,\qquad r=|z|<1,$$

есть разложение функции $f(z)$ из H_∞ в ряд Тейлора. Г. Бор в 1914 г. доказал [2] неравенство

$$I_r(f)=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k\le\|f\|_\infty\quad\text{при}\quad 0\le r\le 1/6. \tag{1}$$

В дальнейшем М. Рисс, И. Шур, Н. Винер доказали (см. [3]) его справедливость на более широком отрезке $0\le r\le 1/3$. Положим

$$A(r)=\sup_{f\in H_\infty,\ \|f\|_\infty\le 1}I_r(f),\qquad 0\le r<1.$$

Подставляя в (1) функцию $f(z)\equiv 1,\ z\in D$, находим $A(r)=1$ при $0\le r\le 1/3$.

Основные трудности с точным вычислением $A(r)$ возникают при $r>1/3$. В [3] показано, что $A(r)>1$ при $1/3<r<1$, а также приведены следующие две независимые оценки сверху:

$$A(r)\le\frac{4r^2+(1-r)^2}{4r(1-r)}\quad\text{и}\quad A(r)\le\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\quad\text{при}\quad 1/3<r<1. \tag{2}$$

Первое неравенство получено с помощью неравенства Винера $|a_n|\le 1-|a_0|^2,\ n\in\mathbb{N}$; второе следует из неравенства Коши — Буняковского:

$$I_r(f)\le\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}r^{2k}\right)^{1/2}=\|f\|_2(1-r^2)^{-1/2}\le\|f\|_\infty(1-r^2)^{-1/2}.$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00598).

В замечании [3] авторы ставят вопрос о точности оценок (2). В настоящей заметке дадим положительный ответ при $r = 1/\sqrt{2}$. Имеет место

Теорема. $A(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Верхняя оценка $A(1/\sqrt{2}) \le \sqrt{2}$ вытекает из второго неравенства в (2). Установим нижнюю оценку. С этой целью рассмотрим преобразование Мёбиуса

$$f_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad |a| < 1.$$

Функция $f_a(z)$ принадлежит H_∞ (см. [1]) и $\|f_a\|_\infty = 1$. Разложим ее в ряд Тейлора:

$$f_a(z) = -a + (1-|a|^2)\{z + \overline{a}z^2 + \overline{a}^2 z^3 + \ldots\}, \qquad |z| < |a|^{-1}.$$

Имеем

$$I_r(f_a) = |a| + (1-|a|^2)\{r + |a|r^2 + \ldots\} = |a| + \frac{(1-|a|^2)r}{1-|a|r}.$$

Полагая $|a| = r = 1/\sqrt{2}$, находим $I_{1/\sqrt{2}}(f_{1/\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$. Верхняя оценка совпала с нижней. Теорема доказана. $\square$

З а м е ч а н и е. Нетрудно показать, что использование $f_a(z)$ приводит к равенству

$$I_r(f_a) = (1-r^2)^{-1/2}, \qquad 1/3 < r < 1,$$

лишь в единственном случае $r = |a| = 1/\sqrt{2}$. В этой связи возникает вопрос о наилучших оценках снизу величины $A(r)$, если в качестве $f(z)$ рассматривать несколько сомножителей (произведение Бляшке).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гарнет Дж.** Ограниченные аналитические функции: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 469 с.
2. **Bohr H.** A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc. 1914. Vol. 13, no. 2. P. 1–5.
3. **Paulsen V.I., Popescu C., Singh D.** On Bohr's inequality // Proc. London Math. Soc. 2002. Vol. 85, no. 2. P. 493–512.

Юдин Владимир Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский энергетический интститут
(технический университет)
e-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Поступила 27.01.2010

Том 16 № 4 2010

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ"

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН и Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова с 23 по 26 августа 2010 г. провели в Москве Международную конференцию "Приближение функций", посвященную 90-летию со дня рождения профессора Сергея Борисовича Стечкина (6 сентября 1920 г. – 22 ноября 1995 г.).

С. Б. Стечкин — выдающийся специалист в области математического анализа. Круг его научных интересов очень широк: сюда относятся теория приближения функций и операторов, тригонометрические ряды, геометрия банаховых пространств, теория чисел. Обзоры о его научной деятельности опубликованы в журналах "Успехи математических наук" (1996, т. 51, вып. 6), "Труды Института математики и механики УрО РАН" (1996, т. 4), "Фундаментальная и прикладная математика" (1997, т. 3, вып. 4).

Начиная с 1949 г. научная деятельность С. Б. Стечкина проходила в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии наук СССР, позднее Российской академии наук.

Помимо работы в МИАН С. Б. Стечкин вел большую педагогическую работу в Московском и Уральском государственных университетах. Он читал обязательные и специальные курсы, его лекции пользовались неизменным успехом у студентов. Многие его ученики стали известными специалистами, среди них 13 докторов физико-математических наук.

С. Б. Стечкин был крупным организатором науки. При его активном участии создано Свердловское отделение МИАН, преобразованное впоследствии в Институт математики и механики Уральского отделения РАН. В 1957–1967 гг. С. Б. Стечкин был заместителем директора МИАН по Свердловскому отделению. Он организовал журнал "Математические заметки" и первые двадцать лет был его главным редактором.

Председателями Организационного комитета конференции были директор МИАН академик В. В. Козлов и ректор МГУ академик В. А. Садовничий, председателем Программного комитета — член-корреспондент РАН Б. С. Кашин.

На открытии конференции с краткими воспоминаниями о С. Б. Стечкине выступили заместитель директора МИАН А. Г. Сергеев, Ю. Н. Субботин, В. М. Тихомиров, Бл. Х. Сендов, Б. С. Кашин и международный гроссмейстер по шахматам Ю. Л. Авербах, друживший с С. Б. Стечкиным еще со школьных лет. По традиции Сектор компьютерных сетей и информационной безопасности МИАН организовал видеозапись и интернет-трансляцию открытия и первого заседания. Эти видеозаписи можно найти в разделе "Видеотека" портала Math-Net.Ru.

В конференции участвовало более ста математиков, в основном из России; были представлены Воронеж, Долгопрудный, Екатеринбург, Иваново, Москва, Озерск, Саратов, Тула, Ульяновск, Ярославль. Были также участники из стран СНГ — Азербайджана, Белоруссии, Узбекистана, Украины и дальнего зарубежья — Болгарии, Израиля, США.

На конференции прочитано 15 пленарных докладов. В том числе сделаны следующие обзорные доклады о работах С. Б. Стечкина:

В. В. Арестов "Результаты С. Б. Стечкина и его научной школы по приближению операторов, неравенствам для дифференцируемых функций и другим родственным задачам";

В. И. Иванов "О работах С. Б. Стечкина по теории приближения функций";

С. В. Конягин "Суммы Гаусса и их обобщения";

А. Ю. Попов "О работах С. Б. Стечкина по теории чисел";

С. А. Теляковский “ О работах С. Б. Стечкина по тригонометрическим рядам”;

И. Г. Царьков “ Геометрическая теория приближения в работах Н. В. Ефимова и С. Б. Стечкина”.

Кроме того, с пленарными докладами с изложением своих научных результатов и обзорами выступили В. Ф. Бабенко (Неравенства типа неравенства Колмогорова и аппроксимация неограниченных операторов ограниченными), О. В. Бесов (Пространства дифференцируемых функций на нерегулярных областях), С. В. Бочкарев (Оценка L_1-нормы тригонометрических сумм для спектров степенной плотности и для простого спектра), Б. С. Кашин (О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой), К. И. Осколков (Мультифрактальные свойства недифференцируемой функции Римана), Бл. Х. Сендов (Некоторые проблемы из геометрии алгебраических многочленов), Ю. Н. Субботин (Приложения всплесков в краевых задачах), Н. Н. Холщевникова (Функциональные ряды счетного множества переменных), И. А. Шевчук (Формосохраняющее приближение).

Краткие сообщения делались на секциях “ Теория приближений”, “ Ряды”,“ Геометрические вопросы теории приближений”, “ Экстремальные задачи”. Всего было сделано 60 секционных докладов.

Участникам конференции была роздана книга “ Изложение лекций С. Б. Стечкина по теории приближений”, изданная в августе 2010 года в Екатеринбурге. Это издание представляет собой доработанный учениками С. Б. Стечкина конспект его спецкурса, прочитанного в 1970–1971 учебном году на механико-математическом факультете МГУ, отличающегося оригинальностью в подборе материала и его изложении.

Финансовую поддержку проведению конференции оказали Отделение математических наук РАН и Российский Фонд фундаментальных исследований.

На закрытии конференции было показано видеообращение С. М. Никольского к участникам конференции, записанное К. И. Осколковым на даче Сергея Михайловича в Ново-Дарьино во время проведения конференции.

Н.Н. Андреев, С.В. Конягин, А.Г. Сергеев, Ю.Н. Субботин,
С.А. Теляковский, Н.Н. Холщевникова, И.Г. Царьков

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 4 2010

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Н. М. Юркова
TEX-редактор Н. Н. Моргунова

Фото на с. 4 С. Г. Новикова

Отв. за выпуск Л. В. Петрак, В. В. Шевченко

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 25.11.10. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 39,5. Уч.-изд. л. 34,0. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226