РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 16, № 3 2010

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 16 № 3 2010

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 16, № 3. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. 289 с.

ISSN 0134–4889

Отв. редакторы выпуска А. А. Махнев, М. Ю. Хачай

Том 16 № 3 2010

УДК 519.653.4

МАТРИЧНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ АНАЛИЗА БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ И ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Н. Н. Астафьев

Для балансовой модели Леонтьева формулируются те результаты, которые непосредственно вытекают из результатов по двойственным системам линейных неравенств. Для этой же модели вводятся матрицы денежных потоков и для нее находятся сбалансированные вектор цен и вектор производства и устанавливаются единицы измерения для вектора производства, при которых структуры сбалансированных векторов совпадают. Для задачи линейного программирования формулируется задача с матричным критерием.

Ключевые слова: балансовая модель, единицы измерения, двойственные системы, симметризация матриц, экономическая интерпретация, положительная определенность.

N. N. Astaf'ev. Matrix tools for the analysis of the balance model and of the linear programming problem.

For the Leontief balance model, results are formulated that follow directly from the results for dual systems of linear inequalities. For the same model, cash flow matrices are introduced, a balanced price vector and a balanced production vector are found, and units of measurements for the production vector are determined for which the structures of the balanced vectors coincide. For the linear programming problem, a problem with a matrix criterion is formulated.

Keywords: balance model, units of measurement, dual systems, symmetrization of matrices, economic interpretation, positive definiteness.

Введение

Хорошо известен класс оптимизационных задач (полуопределенные — semidefinite) на положительно полуопределенных матрицах как переменных. Данная работа к этому классу не принадлежит, но использует в анализе задач (балансовая модель Леонтьева, задача линейного программирования) матричный инструментарий так, как это делалось, например, в [1, 2]. При этом важное место отводится экономической интерпретации применяемого инструментария. Для балансовой модели формируется матрица денежных потоков (исходная матрица задается в предметных единицах измерения) и для нее формируется задача оптимизации баланса цен и продуктов. Показывается, что этот баланс (равновесие) достигается на левом и правом (соответственно) векторах Фробениуса. Показывается, что существуют такие единицы измерения, в которых достигается баланс: совпадение левого и правого векторов Фробениуса (симметричность матрицы не предполагается). Интерпретируются классические приемы симметризации и предлагается симметризация, которая инвариантна к единицам измерения. Для задачи линейного программирования предлагается матричный критерий и для прямой, и для двойственной задач.

1. Анализ балансовой модели в терминах линейных неравенств

Ниже для традиционной балансовой модели Леонтьева (затраты — выпуск) [3–6] рассматривается подход, основанный на непосредственном применении аппарата двойственных однородных систем линейных неравенств [7–9]. Этот подход не использует условия неотрицательности технологической матрицы A (матрицу $A = (a_{ij})_{n\times n}$ будем называть неотрицательной

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00273) и Президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1001 и 09-С-1-1010).

(обозначение — $A \geq 0$), если все ее элементы $a_{ij} \geq 0$). Рассмотрим две однородные системы с переменными x, c и u, p соответственно:

$$L: \ (E-A)x = c, \qquad x \geq 0, \qquad c > 0;$$

$$L^*: \ u(E-A) = p, \qquad u \geq 0, \qquad p > 0.$$

Выписанные системы однородных неравенств L и L^* формально не являются двойственными в смысле работы [7]. Приведем интерпретацию для случая, когда $A = (a_{ij})_{n\times n} \geq 0$, т. е. случай балансовой модели Леонтьева (система L) и двойственной к ней (система L^*): a_{ij} — затраты i-го продукта на производство единицы j-го продукта, x — вектор-колонка производства продуктов, c — вектор-колонка выпуска продуктов, E — единичная матрица, u — вектор-строка цен на продукцию, p — вектор-строка прибылей от цен u. Обозначим: $a_{i\bullet}$ — i-я строка, $a_{\bullet j}$ — j-я колонка матрицы A.

Матрицу A назовем *продуктивной* для системы L, если ее система совместна, и *прибыльной* для системы L^*, если ее система совместна. Для L и L^* определим конусы: $K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (E-A)x \geq 0, \ x \geq 0\}$ — конус продуктивных производств; $K^* = \{u \in \mathbb{R}^n \,|\, u(E-A) \geq 0, \ u \geq 0\}$ — конус прибыльных цен, соответственно. Сформулируем для некоторого вектора (строки) прибылей $p > 0$ задачу $v = \min\{(p,x) \,|\, (E-A)x \geq 0\}$. Ниже не предполагается выполнения условия $A \geq 0$.

Утверждение 1. *Если $v = 0$, то матрица A прибыльна (т. е. система в задаче L^* совместна). Справедливо и обратное утверждение.*

Действительно, из условия $v = 0$ следует, что $(p,x) \geq 0$ для любого решения системы $(E-A)x \geq 0$, откуда по лемме Фаркаша [7–9] следует, что при некотором $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) \geq 0$ выполняется равенство $\bar{u}(E-A) = p$, где $p > 0$, $\bar{u} \geq 0$, т. е. матрица A — прибыльная для L^*. Обратное утверждение использует условие $p > 0$.

Заметим, что если в задачу для v включить требование $x \geq 0$, то не будет следовать прибыльность матрицы A, например, $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ или $A = (a_{11} = 1)$.

Утверждение 2. *Если система $\{(E-A)x \leq 0, \ x \geq 0, \ (l,x) \geq 1\}$ ($l = \underbrace{1,\ldots,1}_{n}$) несовместна, то A — прибыльная матрица. Справедливо и обратное утверждение.*

Действительно, по лемме Фань — Цзи о несовместных системах [7–9] следует, что при некоторых $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n) \geq 0$, $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \geq 0$, $y_0 \geq 0$ выполняются соотношения: $\bar{u}(E-A) - \bar{y} - y_0 l = 0$, $y_0(-1) < 0$. Отсюда получаем $y_0 > 0$, и потому $\bar{u}(E-A) = y_0 l + \bar{y} > 0$, т. е. матрица A — прибыльная.

Утверждение 3. *Если матрица $A \geq 0$ и продуктивная для L, то двойственная система $\{u(E-A) + yE = 0, \ u \geq 0, \ y \geq 0\}$ имеет единственное решение $u = 0$, $y = 0$. Справедливо и обратное утверждение.*

Действительно, если при некотором $\bar{x} \geq 0$, $\bar{c} > 0$ выполняется $(E-A)\bar{x} = \bar{c} > 0$, то $\bar{x} = c + A\bar{x} > 0$. Следовательно, совместна система строгих однородных неравенств $(E-A)x > 0$, $x > 0$, отсюда по лемме Гордана о двойственных системах [7–9] получаем справедливость утверждения.

Утверждение 4. *Если для некоторой квадратной матрицы D выполняется условие $x^T D x > 0$ для всех $x \geq 0$, $x \neq 0$, то существует вектор $\bar{x} \geq 0$, для которого $D\bar{x} > 0$.*

Действительно, предположив противное, получим, что однородная система $Dx > 0$, $x \geq 0$ несовместна. Тогда двойственная система $uD + y = 0$, $u \geq 0$, $y \geq 0$ по лемме Гордана [7] имеет решение $\bar{u} \neq 0$, $\bar{y} \geq 0$. Отсюда получим $\bar{u}D = -\bar{y} \leq 0$, или $\bar{u}D\bar{u}^T \leq 0$, что противоречит предположению для матрицы D.

Следствие 1. *Если матрица $(E - A)$ положительно определена, то матрица A и продуктивна, и прибыльна.*

Следствие непосредственно вытекает из утверждения 1.

Приведенные утверждения в случае $A \geq 0$ связывают двойственные модели Леонтьева L и L^* с помощью аппарата двойственных систем (однородных) линейных неравенств. Отметим, что если выполнено условие $A \geq 0$, то, как известно [3–6], совместность одной из систем L, L^* влечет совместность другой, при этом совместность их сохраняется для любых фиксированных векторов $c \geq 0$ и $p \geq 0$, соответственно.

2. Оптимизация сбалансированности производства и цен

В этой части будем считать, что матрица $A \geq 0$ и неразложима[2]. В этом случае [3–6] существуют максимальное собственное число $\lambda^0 > 0$ и соответствующие ему собственные векторы $x^0 > 0$ — правый, u^0 — левый (собственные векторы и значение Фробениуса). Обозначим для вектора $y = (y_1, \ldots, y_n)$ диагональную матрицу с элементами y_i через $\mathrm{diag}(y)$ (или $\mathrm{diag}(y_1, \ldots, y_n)$). Известно, что при $\lambda^0 > 0$: $0 < x^0 \in K$, $0 < u^0 \in K^*$. Будем считать, что $(u^0, x^0) = 1$.

Рассмотрим для произвольных векторов производства $x \geq 0$ и цен $u \geq 0$ матрицу $A(u; x) = (\bar{a}_{ij} = u_i a_{ij} x_j)_{n\times n}$, $\bar{a}_{ij}$ интерпретируется как стоимость i-го продукта по цене u_i для производства x_j единиц j-го продукта (далее для краткости записи опускаем в обозначении $\bar{a}_{ij}$ векторы u и x). Очевидно, $A(u; x) = \mathrm{diag}(u)\, A\, \mathrm{diag}(x)$. Обозначим:

$d_i(u_i; x) = \sum_{j=1}^n u_i a_{ij} x_j$ — полученная сумма за i-й продукт от производства всех видов продуктов ($j \in \overline{1,n}$);

$k_i(u; x_i) = \sum_{j=1}^n u_j a_{ji} x_i$ — отданная сумма за производство x_i единиц i-го продукта за использование всех видов продуктов ($j \in \overline{1,n}$);

$\triangle_i(u; x) = d_i(u_i; x) - k_i(u; x_i)$ — сальдо (денежное) по продукту i ($i \in \overline{1,n}$) : $\triangle(u; x) = (\triangle_1(u; x), \ldots, \triangle_n(u; x))$, в матричном виде: $\triangle^T(u; x) = A(u; x)l - A^T(u; x)l$ (здесь $l^T = \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}$)).

Сформулируем задачу для матрицы денежных потоков $A(u; x)$ (см. аналог [10]):

$$v = \min\Big\{\sum_{i=1}^n |\triangle_i(u; x)| \;\Big|\; x \in K,\; u \in K^*,\; (u, x) = 1\Big\}.$$

Очевидно, $v \geq 0$ и сформулированная задача сводится к задаче

$$v = \min\Big\{\sum_{i=1}^n t_i \;\Big|\; x \in K,\; u \in K^*,\; (u, x) = 1,\; \triangle_i(u; x) \leq t_i,\; -\triangle_i(u; x) \leq t_i,\; i \in \overline{1,n}\Big\}.$$

Если зафиксировать один из векторов u, x, то получается задача линейного программирования по другой переменной. Отсюда следует, что, например, для фиксированного вектора производства $x \in K$ можно средствами линейного программирования найти оптимальные по сбалансированности цены $u(x)$, а затем по ценам $u(x)$ найти оптимальный вектор производства $x(u(x))$ и т. д.

Утверждение 5. *Пусть $A \geq 0$ неразложима и продуктивна. Тогда сформулированная задача разрешима со значением $v = 0$ и на векторах Фробениуса u^0 — левом и x^0 — правом, при этом $d_i(u_i^0; x^0) = k_i(u^0; x_i^0) = \lambda^0 u_i^0 x_i^0$ ($i \in \overline{1,n}$) ($\lambda^0 > 0$ — собственное число Фробениуса для A).*

[2] Матрица A неразложима, если путем одновременной перенумерации ее строк и колонок матрицу невозможно привести к виду $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$, где A_1 — квадратная матрица.

Действительно, справедлива цепочка равенств:

$$\triangle^T(u^0;x^0) = A(u^0;x^0)l - A^T(u^0;x^0)l = \mathrm{diag}\,(u^0)\,A\,\mathrm{diag}\,(x^0)l - \mathrm{diag}\,(x^0)\,A^T\mathrm{diag}(u^0)l$$

$$= \mathrm{diag}\,(u^0)\,\lambda x^\circ - \mathrm{diag}\,(x^0)(\lambda u^0)^T = 0,$$

или, расписав по компонентам $i \in \overline{1,n}$, получим требуемые равенства.

Заметим, что технологическая матрица A составлена в натуральных величинах в некоторой системе единиц измерения $(l_1,\ldots,l_n)$ и цены $(u_1,\ldots,u_n)$ определяются для этих единиц измерения, и, значит, векторы производства x^0 и цен u^0 привязаны к ним.

Пусть $L = x^0\cdot u^0 = (x_i^0 u_j^0)_{n\times n}$ — матрица стоимостей продукта x_i по цене u_j^0 (виртуальная стоимость). Определим для нее вектор $\triangle(L) = (x^0\cdot u^0)l - (x^0\cdot u^0)^T l$. Очевидно, что если матрица A симметричная, то соответствующая матрица L тоже будет симметричной, и потому $\triangle(L) = 0$, так как в этом случае $(u^0)^T = x^0$ (сбалансированы и по матрице L). Поэтому вектор $\triangle(L)$ можно рассматривать как "оценку" несимметричности матрицы A в системе единиц $l_1,\ldots,l_n$. Для дальнейшей характеризации этой "оценки" применим процедуру смены единиц измерения исходных $\{l_1,\ldots,l_n\}$ на единицы $\{l_1^1,\ldots,l_n^1\}$ по правилам $l_i = k_i l_i'$, $i\in\overline{1,n}$. Обозначим $k = (k_1,\ldots,k_n) > 0$, тогда матрица A преобразуется в матрицу $A(k) = \Big(a_{ij}\,\dfrac{k_i}{k_j}\Big)_{n\times n}$, или в матричной форме $A(k) = \mathrm{diag}(k)\,A\,\mathrm{diag}^{-1}(k)$ $(k>0)$. Нетрудно проверить, что для матрицы $A(k)$ величина λ^0 — собственное значение, $x^0(k) = \mathrm{diag}(k)x^0$ — правый, $u^0(k) = u^0\mathrm{diag}^{-1}(k)$ — левый собственные векторы Фробениуса. Заметим, что свойство симметричности матрицы влечет свойство: левый собственный вектор является правым и наоборот. Это последнее свойство можно установить для матрицы $A(k)$ при некотором k (в отличие от свойства симметричности $A(k)$).

Утверждение 6. *Для неразложимой матрицы $A\ge 0$ и ее векторов Фробениуса x^0 — правом, u^0 — левом справедливо*:

1) *существует вектор $\bar k > 0$ (т. е. система единиц измерения $\bar k_i l_i' = l_i$ $(i\in\overline{1,n})$) такой, что* $(\mathrm{diag}(\bar k)x^0)^T = u^0\mathrm{diag}^{-1}(\bar k)$ *— левый (и правый) векторы Фробениуса матрицы $A(\bar k)$*;

2) *существует вектор $k' > 0$ такой, что* $\mathrm{diag}(k')x^0 = (u^0)^T$ *— правый и* $u^0\mathrm{diag}^{-1}(k') = (x^0)^T$ *— левый векторы Фробениуса матрицы $A(k')$.*

Действительно, в справедливости п. 2) легко убедиться, взяв $k_i' = u_i^0/x_i^0$ и применив ранее приведенные правила вычисления собственных векторов матрицы $A(k)$. Для доказательства п. 1) применим упомянутую выше процедуру для $A(k)$ и нахождения $\bar k = (\bar k_1,\ldots,\bar k_n)$ из уравнений $\bar k_i x_i^0 = \dfrac{1}{\bar k_1}u_i^0$ $(i\in\overline{1,n})$ или $(\bar k_i)^2 = u_i^0/x_i^0$. Имеем $\bar k_i = \sqrt{u_i^0/x_i^0}$ или $\bar k_i = \sqrt{k_i'}$ $(i\in\overline{1,n})$.

Рассмотрим далее матрицу $L(\bar k) = \mathrm{diag}(\bar k)x^0\cdot u^0\mathrm{diag}^{-1}(\bar k)$, которая является симметричной, и $\triangle(\bar k) = L(\bar k)l - L^T(\bar k)l = 0$. Отсюда можно интерпретировать систему единиц $l_i = \bar k_i l_l'$ $(i\in\overline{1,n})$ сбалансированной по мере несимметричности $\|\triangle(\bar k)\| = 0$. Аналогично рассмотрим для k' из п. 2) матрицу $L(k') = \mathrm{diag}(k')x^0\cdot u^0\mathrm{diag}^{-1}(k') = (u^0)^T\cdot(x^0)^T$ или $L(k') = L^T$. И тогда для системы единиц $(l_1',\ldots,l_n')$, где $l_i' = k_i' l_i$ $(i\in\overline{1,n})$, матрица $L\cdot L(k') = x^0\cdot u^0\cdot(u^0)^T\cdot(x^0)^T = (u^0,u^0)x^0\cdot(x^0)^T = L'$ — симметричная, а потому $\triangle(L') = L'l - (L')^T l = 0$, т. е. имеет место ситуация сбалансированности системы единиц.

Предполагаем матрицу $A\ge 0$ неразложимой и продуктивной. Тогда, как известно [4–7], существует матрица $B = (E-A)^{-1} = (b_{ij})_{n\times n} > 0$. Элементы b_{ij} интерпретируются как скорости роста производства x_i по отношению к росту потребления c_j в системе единиц $(l_1,\ldots,l_n)$, и потому для матрицы B правомерно аналогичное рассмотрение сбалансированного потребления c и прибыли p в зависимости от единиц измерения.

Утверждение 7. *Для матрицы B векторами и значением Фробениуса являются*: *x^0 — правый, u^0 — левый и $\mu^0 = 1/(1-\lambda^0)$, соответственно.*

Действительно, вычислим $B(x^0 - \lambda^0 x^0) = (1 - \lambda^0)Bx^0$. С другой стороны, $Ax^0 = \lambda^0 x^0$, и потому $B(x^0 - \lambda^0 x^0) = Bx^0 - BAx^0 = Bx^0 - Bx^0 + x^0 = x^0$. Значит, $(1 - \lambda^0)Bx^0 = x^0$ или $Bx^0 = 1/(1 - \lambda^0) \cdot x^0$. Отсюда, в силу $B > 0$, $x^0 > 0$ [11], следует требуемое.

3. Симметризация

Выше рассматривались процедуры совпадения левых и правых собственных векторов в подходящей системе единиц измерения. Ниже будут рассмотрены приемы симметризации: 1) $A + A^T$, 2) AA^T, 3) $(E - A)(A - A^T)$, 4) $A \circ A^T$ — произведение Адамара [11].

Утверждение 8. *Если матрица $E - 1/2\,(A + A^T)$ положительно определена, то A продуктивна.*

Действительно, выписанная матрица представима в виде $1/2\,((E - A) + (E - A)^T)$, и тогда, в силу условия для нее и согласно [11], следует, что $x(E - A)x > 0$ для $x \neq 0$. Из последнего в силу утверждения 4 получаем: для некоторого $\bar{x} \geq 0$ выполняется $(E - A)\,\bar{x} > 0$, что и означает продуктивность матрицы A.

Утверждение 9. *Если матрица $(E - AA^T)$ положительно определена, то матрицы A и AA^T продуктивны.*

Действительно, продуктивность AA^T следует из следствия 1 утверждения 4. Продуктивность матрицы A вытекает из того, что число Фробениуса $0 < \lambda^0 < 1$ (см. [11, с. 487].

Заметим, что для продуктивной матрицы A не всегда следует продуктивность $A + A^T$ или AA^T.

Для мотивации симметризации по п. 3) сформулируем задачу: найти структуру вектора производства x, совпадающую со структурой вектора прибылей p (в моделях L и L^*), т. е. задачу $(E - A)(E - A^T)u^T = c$. Ее решением является $u^T = B^T Bc$, где $B = (E - A)^{-1} > 0$ (считаем A продуктивной матрицей и неразложимой). Очевидно, что $(E - A)(E - A^T) = (E - (A + A^T - AA^T))$ — положительно определенная матрица, для которой условие $A + A^T - AA^T \geq 0$ может и не выполняться.

Рассмотрим прием симметризации 4). Положим $A^0 = A \circ A^T = (a^0_{ij})_{n\times n}$, где $a^0_{ij} = a_{ij}a_{ji}$ интерпретируются как опосредованные (через j-й продукт) затраты i-го продукта на единицу i-го же продукта. Отметим, что матрицу A^0 можно представить через классические матричные операции. Для этого определим матрицу $A_{\bullet j} = (0, \ldots, 0, a_{\bullet j}, 0, \ldots, 0)_{n\times n}$, в которой все колонки нулевые, кроме $a_{\bullet j}$. Тогда $A^0 = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{diag}(a_{j\bullet})A_{\bullet j}$. Для любого вектора $k > 0$ имеет место $(\operatorname{diag}(k)\,A\,\operatorname{diag}^{-1}(k))^0 = A^0$, т. е. A^0 инвариантна относительно единиц измерения.

Утверждение 10. *Если матрица A продуктивна, то A^0 также продуктивна и матрица $(E - A^0)$ положительно определена* [12].

Действительно, легко проверить, что сумма элементов в i-й строке матрицы A^0 совпадает с диагональным i-м элементом матрицы A^2, которая продуктивна, и потому все ее диагональные элементы строго меньше 1, что и влечет продуктивность A^0. Свойство утверждения для $(E - A^0)$ следует из ее симметричности и продуктивности A^0 [6].

4. Таблицы эластичности и маргинальных значений

4.1. Рассмотрим таблицу эластичности. Считаем в системе L (разд. 1) матрицу A продуктивной и неразложимой. Тогда для балансовой модели, согласно [3–6], существует матрица $B = (E - A)^{-1} = (b_{ij})_{n\times n} \geq 0$ и вектор $x = Bc$ является решением модели. Пусть $\bar{x} = B\bar{c}$, $\bar{x}^T = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) > 0$, $\bar{c}^T = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) > 0$. Образуем вектор $c^T(\triangle_j) = (\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_j + \triangle_j, \ldots, \bar{c}_n)$

и соответствующее решение $\bar{x}(\triangle_j) = B\bar{c}(\triangle_j)$. Распишем это равенство для i-го продукта: $\bar{x}_i(\triangle_j) = (b_{i\bullet}, \bar{c}(\triangle_j)) = (b_{i\bullet}, \bar{c}) + \triangle_j b_{ij} = \bar{x}_i + \triangle_j b_{ij},\ \ \triangle_j > 0$.

Определим эластичность i-го продукта относительно j-го потребления для $\bar{x}$ и $\bar{c}$ как величину [4]

$$\varepsilon_{ij} = \Big(\frac{\bar{x}_i(\triangle_j) - \bar{x}_i}{\bar{x}_i}\Big)\Big/\Big(\frac{\triangle_j}{\bar{c}_j}\Big).$$

Очевидно, $\varepsilon_{ij} = \dfrac{b_{ij}\bar{c}_j}{(b_{i\bullet}, \bar{c})}$ $(i,\, j \in \overline{1,n})$. Составим таблицу эластичности (матрицу) $\mathcal{E} = (\varepsilon_{ij})$. Очевидно, $\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = 1$, $i \in \overline{1,n}$. Для матрицы эластичности $\mathcal{E}$ правомерен анализ сбалансированности левого и правого векторов Фробениуса по аналогии с матрицей денежных потоков $A(u;x)$ из разд. 2. Величина $\lambda^0 = 1$ и вектор $x^0 = l^T > 0$ — это значение и правый вектор Фробениуса матрицы $\mathcal{E}$, соответственно. Для нахождения левого вектора Фробениуса u^0 предлагается следующая процедура. Выделяется главная подматрица из матрицы $\mathcal{E}$ размерности $(n-1)$. Пусть $\mathcal{E}_{n-1}$ состоит из первых $(n-1)$ колонок и строк. Очевидно, она продуктивна, и потому система $(u_1, \dots, u_{n-1})(E_{n-1} - \mathcal{E}_{n-1}) = (\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{n,n-1}) > 0$ имеет решение $(u_1^0, \dots, u_{n-1}^0) = (\varepsilon_{n1}, \dots, \varepsilon_{n,n-1})(E_{n-1} - \mathcal{E}_{n-1})^{-1} > 0$. Тогда вектор $u^0 = (u_1^0, \dots, u_{n-1}^0, 1)$ является, как нетрудно проверить, левым вектором Фробениуса. Отсюда для сбалансированности матрицы $\mathcal{E}$ рассматривается матрица $x^0 \cdot u^0$.

4.2. Рассмотрим маргинальную таблицу.

Пусть $\bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ — вектор себестоимости вектора производства x. Рассмотрим для некоторого $\bar{c} \geq 0$ функцию $V_H(t) = (\bar{p}, x_t)$, где x_t — решение системы $(A + tH)x + \bar{c} = x$, $A > 0$ и H — матрица размерности $(n \times n)$, задающая направление изменения для A.

Утверждение 11. *Матрица $(A + tH)$ является продуктивной для достаточно малых $t > 0$.*

Действительно, так как A продуктивна, то существует вектор $\bar{x} \geq 0$ такой, что $(E - A)\bar{x} > 0$, и потому для малых t: $(E - A - tH)\bar{x} > 0$, что и требовалось.

Следовательно, $V_H(t) = (\bar{p}, x_t)$, где $x_t = (E - A - tH)(\bar{c})^{-1}$. Определим величину $V'_H = \lim\limits_{t \to +0} (V_H(t) - V(0))/t$ как маргинальное значение затрат в направлении H (см. [7]).

Утверждение 12. *Имеет место равенство $V'_H = u^0 H x^0$, где $u^0 = \bar{p}(E - A)^{-1}$, $x^0 = (E - A)^{-1}\bar{c}$.*

Действительно, имеем $(E - A - tH)x_t = \bar{c}$ или $(E - A)x_t = \bar{c} + tHx_t$. Отсюда $x_t = (E - A)^{-1}\,\bar{c} + t(E - A)^{-1}Hx_t$, и потому $V_H(t) = (\bar{p}, x_t) = (\bar{p}\,(E - A)^{-1}\,\bar{c} + t\,(\bar{p}, (E - A)^{-1}Hx_t) = V(0) + t\,(\bar{p}\,(E - A)^{-1}Hx_t)$. Вычислим $V'_H = \lim\limits_{t \to +0} (V_H(t) - V(0))/t = \lim_{t \to +0} (\bar{p}\,(E - A)^{-1}Hx_t) = (u^0 H x^0)$, так как $\lim x_t = x^0$.

Возьмем матрицу $H_{kl} = (h_{ij})$, где $h_{ij} = 0, i \neq k, j \neq l, h_{kl} = 1$. Обозначим $h_{kl} = V'_{H_{kl}} = u_k^0 x_l^0$. Составим таблицу (матрицу) маргинальных значений $H' = (h_{kl})_{n \times n}$, которая дает количественный матричный инструментарий для прогнозирования развития технологической матрицы A.

4.3. Отметим связь свойства продуктивности с задачей о дополнительности [13].

Утверждение 13. *Если $A \geq 0$, $\|A\|_\infty < 1$, $\|A^T\|_\infty < 1$, то задача о дополнительности*

$$(E - AA^T)x - c = y, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad (x, y) = 0$$

разрешима для любого c.

Действительно, в этом случае A продуктивна [3–6] и, согласно [13], эта система совместна.

4.4. Приведем еще одно утверждение о продуктивности матриц в терминах теории линейных неравенств. Положим $A_{\bullet 1} = (a_{ij} = a_{i1})_{n\times n}$, т. е. матрица $A_{\bullet 1}$ составлена из одного и того же столбца $a_{\bullet 1}$. Введем обозначения: $\widetilde{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $\widetilde{A}_1 = A - A_{\bullet 1} - \widetilde{E}_1$.

Утверждение 14 [14]. *Матрица $A \ge 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда*

$$\min\{u(Al - l) \mid u\widetilde{A}_1 = 0,\ u \ge 0\} = -\infty,$$

что эквивалентно несовместимости системы $\widetilde{A}_1 x \le Al - l$.

Здесь $l^T = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n})$ и i-я компонента вектора $(Al - l)$ равна $\Big(\sum_j^n a_{ij} - 1\Big)$.

4.5. Сформулируем в терминах линейных неравенств рекуррентные критерии продуктивного роста числа отраслей (продуктов). Предположим было $(n-1)$ отраслей с продуктивной матрицей $A_{n-1} \ge 0$ и требуется присоединить отрасль с номером n и данными: $(\bar{a}_{\bullet n})^T = (a_{1n}, \dots, a_{n-1,n})$, $\bar{a}_{n\bullet} = (a_{n1}, \dots, a_{n,n-1})$, a_{nn} так, чтобы общая матрица

$$A = A_n = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \bar{a}_{\bullet n} \\ \hline \bar{a}_{n\bullet} & a_{nn} \end{array}\right)$$

была продуктивной.

Вычисление $B = (E_n - A_n)^{-1}$ будем осуществлять методом Жордано — Гаусса (полного исключения) по схеме $(E - A \,|\, E)$, используя $B_{(n-1)} = (E_{n-1} - A_{n-1})^{-1}$. Изобразим этапы перехода к матрице $(E \mid (E-A)^{-1})$:

1) матрицу $\left(\begin{array}{c|c|c|c} E_{n-1} - A_{n-1} & -\bar{a}_{\bullet n} & E_{n-1} & 0 \\ \hline -\bar{a}_{n\bullet} & 1 - a_{nn} & 0 & 1 \end{array}\right)$ умножаем на $\left(\begin{array}{c|c} B_{(n-1)} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ слева;

2) $\left(\begin{array}{c|c|c|c} E_{n-1} & -B_{(n-1)} \cdot \bar{a}_{\bullet n} & B_{(n-1)} & 0 \\ \hline -\bar{a}_{n\bullet} & 1 - a_{nn} & 0 & 1 \end{array}\right)$, исключаем $\bar{a}_{n\bullet}$;

3) $\left(\begin{array}{c|c|c|c} E_{n-1} & -B_{(n-1)}\bar{a}_{\bullet n} & B_{(n-1)} & 0 \\ \hline 0 & \gamma & \bar{a}_{n\bullet}B_{(n-1)} & 1 \end{array}\right)$, где $\gamma = 1 - a_{nn} - \bar{a}_{n\bullet}B_{(n-1)}\bar{a}_{\bullet n} > 0$;

4) $\left(E_n \,\middle|\, \underbrace{\begin{array}{c|c} B_{(n-1)} + (B_{n-1} \cdot \bar{a}_{\bullet n} \cdot \bar{a}_{n\bullet} B_{(n-1)})/\gamma & B_{(n-1)}\bar{a}_{\bullet n}/\gamma \\ \hline \bar{a}_{n\bullet}B_{(n-1)}/\gamma & 1/\gamma \end{array}}_{B_{(n)}}\right)$.

Утверждение 15 [15]. *Матрица A_n продуктивна только тогда, когда $\gamma > 0$, при этом $B_{(n)} = (E_n - A_n)^{-1}$.*

5. Балансовый критерий для задач линейного программирования

Ниже в целях удобства матричной записи будем использовать для векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ их записи в виде матрицы-строки (вектор-строки) $c = (c_1, \dots, c_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, а для $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ — в виде матрицы-столбца (вектор-столбца) $x = (x_1, \dots, x_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$. Для числа $d \in \mathbb{R}^1$ будем использовать одномерную матрицу.

5.1. Сформулируем пару двойственных задач линейного программирования в матричной записи:

$$C:\ \max\{c \bullet x \mid Ax \le b\},$$

$$C^*: \ \min\{u \bullet b \mid uA = c, \ u \geq 0\}.$$

Рассмотрим матричные произведения $x \bullet c$ и $b \bullet u$ — это матрицы денежных потоков, если интерпретировать x как производство продуктов, а вектор u как цены ресурсов. Пусть они неотрицательные, а тогда очевидно для $x \bullet c$ величина $(c; x)$ — значение, x — правый, c — левый векторы Фробениуса, соответственно. Аналогичная ситуация и для матрицы $b \bullet u$. Очевидно, $\mathrm{tr}(x \bullet c) = (c, x)$, и потому задачи C и C^* допускают матричную трактовку $\max\{\mathrm{tr}(x \bullet c) \mid Ax \leq b\}$. Рассмотрим задачу о сбалансированности $\triangle(x) = (x \bullet c)l - (x \bullet c)^T l$. Обозначим $\triangle^T(x) = (\triangle_1(x), \ldots, \triangle_n(x))$ и рассмотрим задачу для $C: \min\Big\{\sum_{i=1}^n |\triangle_i(x)| \ \Big| \ Ax \leq b\Big\}$. Аналогично для $C^*: \min\Big\{\sum_{i=1}^m |\triangle_i^*(u)| \ \Big| \ uA = c, \ u \geq 0\Big\}$, где $\triangle_i^*(u)$ построены для матрицы $b \bullet u$ по аналогии с $\triangle_i(x)$. Сформулированная задача для C сводится к задаче линейного программирования вида

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^n t_i \ \Big| \ \sum_{j=1}^n c_i x_j - \sum_{j=1}^n x_i c_j \leq t_i, \ \sum_{j=1}^n x_i c_j - \sum_{j=1}^n c_i x_j \leq t_i \ (i \in \overline{1,n}), \ Ax \leq b\Big\}.$$

Уместно рассматривать эти задачи как пополнение для C, а задачи, получающиеся таким же путем, — пополнением для C^*.

5.2. Выпишем традиционную транспортную задачу с применением матричных обозначений:

$$\min\Big\{\sum_{i,j}^{mn} c_{ij} x_{ij} = \mathrm{tr}(C \cdot X^T) = \mathrm{tr}(C^T \cdot X) \ \Big| \ X l^{(n)} = a, \ X^T l^{(m)} = b, \ X \geq 0\Big\};$$

здесь $X = (x_{ij})_{m \times n}$ — матрица перевозок продукта из пункта запаса i в пункт потребления j, $C = (c_{ij})_{n \times n}$ — матрица цен перевозок продукта из пункта i в пункт j, $a^T = (a_1, \ldots, a_m)$ — запасы продукта, $l^{(n)} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n})^T$, $b^T = (b_1, \ldots, b_n)$ — потребность продукта, $l^{(m)} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m})^T$. Проинтерпретируем элементы матриц:

1) $C \cdot X^T = (c_{i\bullet} \cdot x_{j\bullet})_{m \times m}$ — стоимость перевозок всего продукта $x_{j\bullet}$ из пункта j по ценам $c_{i\bullet}$ пункта i;

2) $C^T X = (c_{\bullet i} \cdot x_{\bullet j})_{n \times n}$ — стоимость перевозок $x_{\bullet j}$ в j пункт потребления по ценам перевозок в пункт i потребления.

Для п. 1), характеризующего вектор запаса, определим характеристику сбалансированности (по по аналогии с рассмотренным раньше) $\triangle^a(X) = CX^T l^{(m)} - (CX^T)^T l^{(m)}$. Выпишем i-ю компоненту этого вектора $\triangle_i^a(X) = (c_{i\bullet}, b) - \Big(x_{i\bullet}, \Big(\sum_i^m c_{i1}, \ldots, \sum_i^m c_{in}\Big)\Big)$, где $(c_{i\bullet}, b)$ — стоимость всего вектора потребления по ценам доставки по единым ценам из пункта запасов i, второе слагаемое — стоимость перевозок из пункта запасов i по совокупным ценам по всем пунктам доставки в пункт i.

Сформулируем задачу на оптимизацию сбалансированности

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^n |\triangle_i^a(X)| \ \Big| \ X l^{(n)} = a, \ X^T l^{(m)} = b, \ X \geq 0\Big\},$$

которая, очевидно, сводится к задаче линейного программирования.

Аналогичная задача сбалансированности по потребности b может быть сформулирована и для матрицы $C^T X$ из п. 2).

Заметим, что обе матрицы неотрицательные и вполне могут оптимизироваться их собственные значения Фробениуса на ограничениях задачи.

Заключение

Таким образом, для балансовой модели и задачи линейного программирования на основе формирования для них матрицы денежных потоков сформулированы оптимизационные балансовые задачи, пополняющие исследование исходных задач. Для балансовой модели:

• показана роль единиц измерения для решения этих задач;

• свойство продуктивности модели сформулировано в терминах собственных и несобственных задач линейного программирования;

• предложена симметризация технологической матрицы, которая инвариантна относительно единиц измерения;

• в терминах матричного инструментария рассмотрены оптимизационные балансовые задачи линейного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пшеничный Б.Н., Ненахов Э.И.** Матричные задачи математического программирования // Кибернетика и мат. анализ. 1996. № 2. С. 120–130.
2. **Дана М., Икрамов Х.Д.** О решении систем линейных уравнений, матрицы которых являются малоранговыми возмущениями эрмитовых матриц // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2005. № 4. С. 15–22.
3. **Гейл Д.** Теория линейных экономических моделей. М.: ИЛ, 1963. 290 с.
4. **Ашманов С.А.** Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 240 с.
5. **Лотов А.В.** Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984. 350 с.
6. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 350 с.
7. Линейные неравенства и смежные вопросы / Сб. под ред. Куна Г., Таккера А. М.: ИЛ, 1959. 469 с.
8. **Черников С.Н.** Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 468 с.
9. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Изд-во “Екатеринбург”, 1999. 205 с.
10. **Гимади Э.Х., Глебов Н.И.** О математическом решении проблемы погашения долгов / Сб. докл. Конгресса ИНПРИМ-96. Новосибирск, 1996. С. 133.
11. **Хорн Р.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 590 с.
12. **Астафьев Н.Н.** Противоположные задачи и двойственная регуляризация в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 16–22.
13. **Астафьев Н.Н.** Линейные неравенства и выпуклость. Свердловск: Изд-во УрГУ, 1980. 90 с.
14. **Астафьев Н.Н.** Критерий оптимальности в задаче линейного программирования в терминах несовместности // Дискретная оптимизация и исследование операций (DAOR-02): тр. Всерос. конф. Новосибирск, 2002. С. 152.
15. **Астафьев Н.Н.** Структурный анализ балансовой модели Леонтьева // Равновесные модели экономики и энергетики: тр. Междунар. конф. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. С. 121–125.

Астафьев Николай Николаевич
Поступила 20.04.2010
д-р. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: astnn@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.8

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ m-PSP НА МАКСИМУМ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Представлен эффективный алгоритм $\mathcal{A}$ с гарантированной оценкой точности для решения задачи отыскания нескольких реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов (маршрутов коммивояжера) максимального веса в полном взвешенном неориентированном графе в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Трудоемкость алгоритма $O(n^3)$. Приводится обоснование числа маршрутов коммивояжера, при котором алгоритм является асимптотически точным.

Ключевые слова: задача коммивояжера на максимум, реберно-непересекающиеся гамильтоновы циклы, полиномиальный алгоритм, асимптотическая точность, многомерное евклидово пространство.

A. E. Baburin, E. Kh. Gimadi. On the asymptotic accuracy of an algorithm for solving the m-PSP maximum problem in a multidimensional Euclidean space.

An efficient algorithm $\mathcal{A}$ with a guaranteed accuracy estimate is presented for solving the problem of finding several edge-disjoint Hamiltonian circuits (traveling salesman routes) of maximal weight in a complete weighted undirected graph in a multidimensional Euclidean space $\mathbb{R}^k$. The complexity of the algorithm is $O(n^3)$. The number of traveling salesman routes for which the algorithm is asymptotically exact is established.

Keywords: maximum traveling salesman problem, edge-disjoint Hamiltonian circuits, polynomial algorithm, asymptotic accuracy, multidimensional Euclidean space.

Введение

Задача отыскания m реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера (гамильтоновых циклов) известна также под названием m-PSP (the m-Peripatetic Salesman Problem). В задаче m-PSP задан полный n-вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$ со множеством вершин $V = \{1, \dots, n\}$ и множеством ребер $E = \{e = (v, u) : v, u \in V,\ v < u\}$. На E задана неотрицательная весовая функция $w : E \to \mathbb{R}_+$. Требуется найти m таких непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов $H_1, \dots, H_m \subset E$, что величина

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{e \in H_i} w(e),$$

равная суммарному весу ребер в найденных циклах, минимальна или максимальна. Частным случаем задачи (при $m = 1$) является известная задача коммивояжера (TSP — Traveling Salesman Problem) [17, 18].

Первоначально задача m-PSP была поставлена Крарупом (1975) [16].

Область применения задачи m-PSP включает поиск маршрута сторожей [19], где бывает важно назначить сторожам реберно-непересекающиеся маршруты, чтобы избежать повторных прохождений и тем самым повысить уровень безопасности. Де Корт [14, 15] показывает возможность применения задачи при дизайне сетей, где нужно определить несколько реберно-непересекающихся циклов для защиты сети от сбоев. Де Корт также упоминает о применении

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00516 и 10-07-00195), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

задачи PSP в теории расписаний. Им же показана NP-трудность задачи 2-PSP на минимум путем полиномиального сведения к ней задачи о гамильтоновом пути. Аналогичными аргументами показывается NP-трудность задачи m-PSP для $m > 2$.

В общем случае для задачи не существует даже приближенного алгоритма с погрешностью, ограниченной константным множителем. В ряде специальных случаев задачи были построены приближенные полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками точности, но к настоящему моменту все эти случаи ограничиваются числом различных (реберно-непересекающихся) маршрутов коммивояжеров, равным двум. Так, например, для метрической задачи 2-PSP на минимум построены алгоритмы с оценками точности 9/4 [3] и 2 [2]. Для симметричной задачи 2-PSP на максимум в работе [1] представлен 3/4-приближенный алгоритм. Для задачи 2-PSP на минимум с весами ребер 1 и 2 построена серия приближенных полиномиальных алгоритмов, в частности, с оценками точности 5/4 [11] и 6/5 [5]. В работе [7] предложен асимптотически точный алгоритм решения задачи 2-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.

В настоящей статье представлены приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве и обоснование оценки сверху на число маршрутов m, при которых алгоритм за время $O(n^3)$ выдает асимптотически точное решение.

Результаты построения алгоритма $\mathcal{A}$ и его анализа существенно опираются на прежние работы, связанные с обоснованием возможности асимптотически точного решения в пространстве $\mathbb{R}^k$ задачи коммивояжера на максимум [6, 10], а также задачи 2-PSP на максимум [7].

Напомним, что отправной точкой в алгоритмах [6,7,10] является построение максимального взвешенного паросочетания $\mathcal{M}^*$ в $\mathbb{R}^k$, которое представляется в виде совокупности $\{I_1, \dots, I_\mu\}$ прямолинейных интервалов (отрезков), $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$. После упорядочения интервалов по убыванию весов последние t интервалов объявляются легкими, остальные — тяжелыми (число t выбирается специальным образом).

Определяющий факт для доказательства асимптотической точности алгоритмов в [6, 7, 10] дается следующей леммой.

Лемма 1 [1]. *Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$ с фиксированной размерностью k задано произвольное множество из t прямолинейных отрезков. Тогда наименьший угол между двумя отрезками из этого множества ограничен сверху константой $\alpha(k,t)$ такой, что $\alpha(k,t) \longrightarrow 0$ при $t \to \infty$. При этом*

$$\sin^2 \frac{\alpha(k,t)}{2} \le \gamma_k \, t^{-\frac{2}{k-1}}, \tag{0.1}$$

где константа γ_k не зависит от числа отрезков.

Говорят, что алгоритм A, решающий задачу на максимум с гарантированной *относительной погрешностью* ε, является $(1-\varepsilon)$-приближенным, если для любого входа X выполнено

$$\frac{OPT(X) - F_A(X)}{OPT(X)} \le \varepsilon,$$

где $OPT(X)$ означает оптимальное значение целевой функции на входе X, а $F_A(X)$ — значение целевой функции, полученное в результате работы алгоритма A.

Через $\varepsilon_A(n)$ обозначим относительную погрешность алгоритма на входе размера n. Алгоритм *асимптотически точен*, если с ростом размерности задачи $\varepsilon_A(n) \to 0$.

1. Описание алгоритма $\mathcal{A}$

Вес ребра $e = (u, v) \in E$ обозначим через $w(u, v)$, вес подграфа $G' = (V, E') \subset G$ с множеством ребер E' — через $W(E')$. Целью алгоритма $\mathcal{A}$ является отыскание подмножества ребер $\widetilde{E} \subset E$, состоящего из m реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_i, $i = \overline{1, m}$. В начале алгоритма $\widetilde{E} = \varnothing$.

Обозначим через $\mathcal{M}^* = \{I_1, \ldots, I_\mu\}$ совокупность интервалов (отрезков в $\mathbb{R}^k$) максимального взвешенного паросочетания в графе G; $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$.

Пусть в $\mathcal{M}^*$ выделено t самых легких по весу интервалов, остальные интервалы — тяжелые, $t \leq \mu/2$. Подмножество тяжелых интервалов обозначим через $\widetilde{\mathcal{M}^*} \subset \mathcal{M}^*$. Очевидно, что суммарный вес тяжелых интервалов удовлетворяет неравенству

$$W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) \geq W(\mathcal{M}^*)\Big(1 - \frac{t}{\mu}\Big). \tag{1.1}$$

Два интервала называем *смежными* (относительно текущего множества $\widetilde{E}$), если имеется ребро $e \in \widetilde{E}$, связывающее концевые вершины этих интервалов. Последовательность тяжелых интервалов, в которой каждые два соседних интервала смежны, назовем *интервальной цепью* (далее I-цепью). Две I-цепи называем *смежными* (относительно текущего множества $\widetilde{E}$), если смежна пара их крайних интервалов. Один из крайних интервалов такой цепи объявляем *ведущим*, другой — *ведомым*.

О п р е д е л е н и е. Назовем *α-цепью* такую I-цепь из тяжелых интервалов, в которой угол между любыми двумя соседними интервалами цепи не превышает числа α.

Опишем приближенный алгоритм $\mathcal{A}$ при фиксированном параметре $t \leq n/4$.

АЛГОРИТМ $\mathcal{A}$

Начало работы алгоритма $\mathcal{A}$

Этап 1. В графе G отыскивается паросочетание $\mathcal{M}^* = \{I_1, \ldots, I_\mu\}$ максимального веса, где $\mu = \lfloor n/2 \rfloor$ — число его ребер (интервалов).

Этап 2. Полагаем $\widetilde{E} = \varnothing$ и фиксируем параметр $t \leq \mu/2$.
В $\mathcal{M}^*$ выделяется t легких интервалов и оставшиеся $(\mu - t)$ тяжелых. Пусть $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_{\mu-t}\}$ — последовательность тяжелых ребер.

Этап 3. (Этапы 3.1, 3.2 и 3.3 выполняются последовательно для $i = 1, 2, \ldots, m$.)
Этап 3.1. Выполнить процедуру $\mathcal{P}(\widetilde{E}, \alpha)$ с величиной угла, определяемой соотношением

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \begin{cases} \gamma_k\, t^{-\frac{2}{k-1}}, & \text{если } i = 1; \\ \gamma_k \left(\dfrac{t}{2i-2}\right)^{-\frac{2}{k-1}} & \text{при } i > 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Этап 3.2. t легких интервалов максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$ расставляем на места $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_t = \mu$, предусмотренные в процедуре $\mathcal{P}(\widetilde{E}, \alpha)$. При $i = 1$ расстановка произвольная, а при $i > 1$ легкие интервалы расставляем согласно процедуре $\mathrm{Assign}(\widetilde{E})$.
В результате имеем последовательность $\mathcal{S}_i = \{C_1, I_{\nu_1}, C_2, I_{\nu_2}, \ldots, C_t, I_{\nu_t}\}$ из t α-цепей, состоящих из тяжелых интервалов, перемежаемых t легкими интервалами так, что каждый легкий интервал не смежен ближайшим крайним интервалам α-цепей, между которыми этот легкий интервал вставляется.

Этап 3.3. Посредством процедуры $\mathrm{Hamilton}(\widetilde{E}, \mathcal{S}_i)$ строится гамильтонов цикл H_i, реберно-непересекающийся с $H_1, H_2, \ldots, H_{i-1}$.

Конец работы алгоритма $\mathcal{A}$

На выходе алгоритма $\mathcal{A}$ получено m реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$.

В описании алгоритма $\mathcal{A}$ используются следующие три процедуры:

1) $\mathcal{P}(\widetilde{E},\alpha)$ — для представления совокупности $\widetilde{\mathcal{M}^*}$ тяжелых интервалов в виде последовательности $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_t\}$ из t α-цепей;

2) Assign$(\widetilde{E},\mathcal{C})$ — для расстановки t легких интервалов между α-цепями набора $\mathcal{C}$;

3) Hamilton$(\widetilde{E},\mathcal{S})$ — для построения очередного гамильтонова цикла.

ПРОЦЕДУРА $\boldsymbol{\mathcal{P}(\widetilde{E},\alpha)}$

Начало процедуры

В начале процедуры каждый из $(\mu-t)$ тяжелых интервалов в $\widetilde{\mathcal{M}^*}$ представляет из себя одноэлементную интервальную цепь. В качестве начального t-набора $\mathcal{I}$ интервальных цепей берем первые t тяжелых интервалов из $\widetilde{\mathcal{M}^*}$: $\mathcal{I}=\{I_1,I_2,\dots,I_t\}$. Положим $j=t$.

Общий шаг процедуры (выполняется пока $j<\mu-t$).

В текущем t-наборе $\mathcal{I}$ находим пару не смежных (относительно множества $\widetilde{E}$) интервальных цепей с углом между их ведущими интервалами, не превышающим величину α.

Объединяем найденные цепи в одну α-цепь, связывая указанные ведущие интервалы в 4-цикл наибольшего веса, и назначаем в качестве нового ведущего ребра один из крайних (ранее ведомых) интервалов объединенной цепи.

Полагаем $j:=j+1$ и, если $j<\mu-t$, то, пополнив текущий набор $\mathcal{I}$ очередным интервалом I_j, повторяем общий шаг. Иначе конец общего шага.

В результате получим последовательность $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_t\}$ из t α-цепей, каждая из которых состоит из последовательности тяжелых интервалов с углом между последовательной парой интервалов, не превышающим α.

Считаем последовательность $\mathcal{C}$ циклической, т. е. вслед за α-цепью C_t расположена α-цепь C_1.

Пусть тяжелые интервалы в α-цепях $C_1,\dots,C_t$ занумерованы таким образом, что $C_r=\{I_{\nu_{r-1}+1},\dots,I_{\nu_r-1}\}$, $1\le r\le t$, где $\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_t$ — номера, зарезервированные для оставшихся легких интервалов максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$ ($\nu_0=0,\ \nu_t=\mu$).

Конец процедуры

ПРОЦЕДУРА Assign$\boldsymbol{(\widetilde{E},\mathcal{C})}$

Начало процедуры

Шаг 1. Строим двудольный граф $DG=(V_0,U;DE)$ с равными долями $|V_0|=|U|=t$. Здесь $V_0=\{v_1,v_2,\dots,v_t\}$ — множество вершин, соответствующих легким интервалам в $\mathcal{M}^*$; $U=\{u_r\mid r=1,\dots,t\}$ — множество вершин, где вершина u_r состоит из пары крайних интервалов $I_{\nu_r-1}\in C_r$ и $I_{\nu_r+1}\in C_{r+1}$.

DE — подмножество ребер $\{(v_s,u_r)\in V_0\times U\}$ таких, что легкий интервал, соответствующий вершине $v_s\in V_0$, не смежен (относительно множества ребер $\widetilde{E}$) ни с одним из тяжелых интервалов I_{ν_r-1} и I_{ν_r+1}, составляющих вершину $u_r\in U$.

Шаг 2. В графе DG находим максимальное (по числу ребер) паросочетание $\mathcal{DM}$.

Шаг 3. Легкие интервалы расставляются по одному между каждой последовательной парой I-цепей согласно паросочетанию $\mathcal{DM}$. В результате имеем последовательность $\mathcal{S}$ из несмежных чередующихся α-цепей и легких интервалов:

$$\mathcal{S}=\{C_1,I_{\nu_1},C_2,I_{\nu_2},\dots,I_{\nu_{t-1}},C_t,I_{\nu_t}\}.$$

Конец процедуры

ПРОЦЕДУРА Hamilton($\widetilde{E}, \mathcal{S}$)

Начало процедуры

(Сначала опишем процедуру Hamilton($\widetilde{E}, \mathcal{S}$) в предположении четного n. В конце процедуры указывается ее модификация на случай нечетного n.)

Предполагается заданной последовательность интервалов максимального паросочетания $\mathcal{M}^* = \{I_1, I_2, \ldots, I_\mu\}$ согласно их расположению в последовательности $\mathcal{S}$ чередующихся α-цепей и легких интервалов, где $I_j = (x_j, y_j),\ j = 1, \ldots, \mu$.

Строим в графе G частичный тур T, состоящий из концевых вершин легкого интервала $I_\mu = (x_\mu, y_\mu)$ и двух непересекающихся $(\mu - 1)$-вершинных цепей.

1. *Начальный шаг.* Полагаем $T = x_\mu \cup y_\mu;\ u_1 := x_1;\ v_1 := y_1;\ j = 2$.

2. *Общий шаг*, $1 < j < \mu$. Если

$$w(u_{j-1}, x_j) + w(v_{j-1}, y_j) \geq w(u_{j-1}, y_j) + w(v_{j-1}, x_j),$$

то полагаем $u_j = x_j;\ v_j = y_j$; иначе $u_j = y_j;\ v_j = x_j$. Частичный тур T пополняем парой новых ребер

$$T = T \cup (u_{j-1}, u_j) \cup (v_{j-1}, v_j).$$

Шаг 3. Увеличиваем j на 1. При $j < \mu$ выполняется общий шаг; иначе идем на следующий шаг 4.

Шаг 4. Получен частичный тур, состоящий из концевых вершин легкого интервала $I_\mu = (x_\mu, y_\mu)$ и двух непересекающихся цепей $(u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1})$ и $(v_1, v_2, \ldots, v_{\mu-1})$

$$T = (u_1, u_2, \ldots, u_{\mu-1}) \cup (v_1, v_2, \ldots, v_{\mu-1}) \cup \{x_\mu\} \cup \{y_\mu\}.$$

Замыкаем полученный тур в 2μ-вершинный цикл без использования интервалов $I_1, I_{\mu-1}$ и I_μ. Для этого к T добавляем пару двузвенных цепочек $(u_{\mu-1}, y_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, x_\mu, u_1)$ или $(u_{\mu-1}, x_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, y_\mu, u_1)$ с наибольшим суммарным весом

$$\delta W = \max \begin{cases} W((u_{\mu-1}, y_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, x_\mu, u_1)); \\ W((u_{\mu-1}, x_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, y_\mu, u_1)). \end{cases}$$

В случае четного n полученный цикл является гамильтоновым.

При нечетном n имеется вершина x_0, не попавшая в $\mathcal{M}^*$. Гамильтонов цикл получим, заменив ребро (x, y) в построенном $(n-1)$-вершинном цикле на пару ребер (x_0, x) и (x_0, y) таким образом, чтобы ни одно из этих ребер не пересекалось с множеством $\widetilde{E}$. При этом в силу неравенства треугольника вес цикла не уменьшится.

Шаг 5. Ребра очередного гамильтонова цикла добавляем к множеству $\widetilde{E}$.

Конец процедуры

Описание алгоритма $\mathcal{A}$ закончено полностью.

2. Анализ алгоритма $\mathcal{A}$ и обоснование асимптотической точности

Заметим, что в отличие от алгоритма в работе [10] первый гамильтонов цикл H_1, построенный алгоритмом $\mathcal{A}$, не содержит ни одного ребра максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$, найденного в начале работы алгоритма. Это позволяет повторно использовать тот же вспомогательный "строительный материал" из интервалов максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$ при построении остальных реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов $H_2, \ldots, H_m$, также не содержащих ребер $\mathcal{M}^*$.

Далее будет использоваться обозначение $t^* = \lceil m(n/m)^{\frac{k-1}{k+1}} \rceil$ для величины параметра t алгоритма $\mathcal{A}$ в зависимости от числа n вершин графа G, размерности пространства $\mathbb{R}^k$ и заданного числа маршрутов коммивояжера m.

2.1. Корректность работы процедуры $\mathcal{P}(\widetilde{E}, \alpha)$

В начале работы алгоритма все интервалы максимального паросочетания несмежны, и множество $\widetilde{E}$ пусто. Поэтому при $i = 1$ на каждом шаге среди t ведущих интервалов набора $\mathcal{I}$ имеем t несмежных интервалов, и угол α определяется формулой (0.1)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \gamma_k \, t^{-2/(k-1)}.$$

Перед построением гамильтонова цикла H_2 каждый интервал максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$ смежен не более чем с двумя интервалами из $\mathcal{M}^*$. Поэтому при выполнении процедуры $\mathcal{P}(\widetilde{E}, \alpha)$ среди t ведущих интервалов набора $\mathcal{I}$ имеется не менее $t/2$ несмежных ведущих интервалов, и угол α определяется формулой

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \gamma_k \left(\frac{t}{2}\right)^{-2/(k-1)}.$$

Перейдем к рассмотрению случая построения гамильтонова цикла H_i при $i \geq 3$. Заметим, что перед построением H_i каждый интервал в $\mathcal{M}^*$, а следовательно, и в $\mathcal{I}$ смежен не более чем с $d(i) = 2(i-1)$ ведущими интервалами. По теореме Брукса (см., например, [8, с. 239]) неполный связный граф с наибольшей степенью вершины $d \geq 3$ является d-раскрашиваемым. Число независимых вершин в таком графе не менее числа вершин графа, деленного на d. Поскольку при $i \geq 3$ верно $d(i) \geq 3$, при выполнении процедуры $\mathcal{P}(\widetilde{E}, \alpha)$ среди t ведущих интервалов текущего набора $\mathcal{I}$ имеется не менее $t/d(i)$ несмежных ведущих интервалов, и угол α определяется соответствующей формулой в (1.2)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq \gamma_k \left(\frac{t}{2i-2}\right)^{-2/(k-1)}.$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда отношение смежности ведущих интервалов текущего t-набора $\mathcal{I}$ не образует связный граф, для виртуальной раскраски каждой компоненты связности достаточно тех же d цветов, и число несмежных ребер в $\mathcal{I}$ также не меньше t/d.

2.2. Корректность работы процедуры Assign$(\widetilde{E}, \mathcal{C})$

На шаге i строится двудольный граф $DG(i) = \big(V^0, U(i);\ DE(i)\big)$ с равными долями. При этом t-вершинное множество ребер $V_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ соответствует множеству из t легких интервалов максимального паросочетания $\mathcal{M}^*$; $U(i) = \{u_1, u_2, \ldots, u_t\}$ — множество вершин, где вершина u_r состоит из пары тяжелых ребер $I_{\nu_r - 1}$ и $I_{\nu_r + 1}$ (полагаем $I_{\mu+1} = I_1$); DE_i — множество ребер $\{(v_s, u_r) \in V^0 \times U(i)\}$ таких, что вершина — легкий интервал v_s — не смежна (не склеивалась) ни с одним из тяжелых интервалов $I_{\nu_r - 1}, I_{\nu_r + 1}$.

Пусть $\Delta_r^{(i)}$ — степень вершины v_r в графе $DG(i)$; $\Delta(i) = \max\limits_s \Delta_s^{(i)}$.

Утверждение 1 [9]. *Пусть задан двудольный граф с четным числом N вершин в каждой доле и степенями вершин, не меньшими Δ. Тогда в нем имеется совершенное паросочетание, если*

$$\Delta \geq \frac{N}{2}.$$

Так как перед построением гамильтонова цикла H_i, $1 < i \leq m$, каждый легкий интервал смежен не более чем с $2(i-1)$ тяжелым интервалом, то из определения графа $DG(i)$ с t-вершинными долями V_0 и $U(i)$ следует, что для максимальной степени вершин в этом графе верно

Утверждение 2. *Для двудольного графа* $DG(i) = \big(V^0, U(i);\ DE(i)\big)$, $i = 2, \ldots, m$, *справедливо неравенство*

$$\Delta(i) \geq t - 2(i-1).$$

Лемма 2. *В двудольном графе* $DG(i) = \big(V^0, U(i);\ DE(i)\big)$, $i = 2, \ldots, m$, *при* $m \leq t/4$ *всегда найдется максимальное паросочетание.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В двудольном графе $DG(i)$ находим максимальное (по числу ребер) паросочетание. При предположении (без ограничения общности), что t четно, согласно утверждению 1 для всякого графа $DG(i)$, $i = 2, \ldots, m$, при $d(i) \geq t/2$ имеется совершенное паросочетание. Согласно утверждению 2 это выполнено, если

$$i \leq \frac{t}{4} + 1.$$

Это неравенство для всяких $i \leq m$ выполняется, поскольку по условию $m \leq t/4$.

Лемма доказана.

2.3. Анализ точности алгоритма $\mathcal{A}$

Перейдем к анализу точности алгоритма $\mathcal{A}$.

Ниже будет использован следующий факт (доказательство см., например, в [7]).

Лемма 3. *Пусть даны два интервала* $I = (x, y)$, $I' = (x', y')$ *в* $\mathbb{R}^k$ *и* $\alpha \leq \pi/2$ *— угол между ними. Тогда для величины*

$$\delta(I, I') = \max\Big\{w(x, x') + w(y, y'); w(x, y') + w(y, x')\Big\}$$

— максимума суммы весов ребер, посредством которых эти два интервала могут быть склеены в 4-цикл, выполнены неравенства

$$\delta(I, I') \geq \max\{w(I), w(I')\}; \tag{2.1}$$

$$\delta(I, I') \geq \Big(w(I) + w(I')\Big) \cos\frac{\alpha}{2}. \tag{2.2}$$

Лемма 4. *Суммарный вес ребер, дополняющих тур* T *до* 2μ*-вершинного цикла, удовлетворяет неравенству*

$$\delta W \geq w(I_1) + w(I_{\mu-1}). \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения

$$\delta W = \max \left\{ \begin{array}{l} W((u_{\mu-1}, y_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, x_\mu, u_1)); \\ W((u_{\mu-1}, x_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, y_\mu, u_1)) \end{array} \right.$$

следует

$$\delta W \geq \frac{1}{2} W\Big((u_{\mu-1}, y_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, x_\mu, u_1)\Big) + \frac{1}{2} W\Big((u_{\mu-1}, x_\mu, v_1) \cup (v_{\mu-1}, y_\mu, u_1)\Big)$$

$$= \frac{1}{2} W\Big((u_{\mu-1}, y_\mu, v_{\mu-1}) \cup (v_{\mu-1}, x_\mu, u_{\mu-1})\Big) + \frac{1}{2} W\Big((u_1, x_\mu, v_1) \cup (v_1, y_\mu, u_1)\Big)$$

$$\geq w(u_{\mu-1}, v_{\mu-1}) + w(u_1, v_1) = w(I_1) + w(I_{\mu-1}).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Вес гамильтонова обхода H на выходе процедуры* Hamilton$(\widetilde{E},\mathcal{S})$ *удовлетворяет неравенству*

$$W(H) \geq 2W(\mathcal{M}^*)\Big(1-\frac{t}{\mu}\Big)\cos\frac{\alpha}{2}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем вес гамильтонова обхода H в виде $W(H) = W(E_1) + W(E_2)$, где E_1 — множество ребер обхода с концевыми вершинами, принадлежащими разным тяжелым интервалам паросочетания $\mathcal{M}^*$; E_2 — множество ребер обхода, имеющих общую вершину с легким интервалом.

Заметим, что после процедуры $\mathcal{P}(\widetilde{E},\alpha)$ угол между двумя последовательными тяжелыми интервалами I_j и I_{j+1} не превосходит величины α.

Оценим снизу веса $W(E_1)$ и $W(E_2)$ с учетом неравенств (2.1)–(2.3).

$$W(E_1) = \delta W + \sum_{r=1}^{t}\sum_{j=\nu_{r-1}+1}^{\nu_r-2}\delta(I_j,I_{j+1}) \geq w(I_1)+w(I_{\mu-1}) + \sum_{r=1}^{t}\sum_{j=\nu_{r-1}+1}^{\nu_r-2}\big(w(I_j)+w(I_{j+1})\big)\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\geq w(I_1)+w(I_{\mu-1}) + \sum_{r=1}^{t}\sum_{j=\nu_{r-1}+1}^{\nu_r-2}\big(w(I_j)+w(I_{j+1})\big)\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\geq \Big(2W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) - \sum_{r=1}^{t}\big(w(I_{\nu_r-1})+w(I_{\nu_r+1})\big)\Big)\cos\frac{\alpha}{2}\ ;$$

$$W(E_2) = \sum_{r=1}^{t}\delta(I_{\nu_r-1},I_{\nu_r}) + \sum_{r=1}^{t}\delta(I_{\nu_r},I_{\nu_r+1})$$

$$\geq \sum_{r=1}^{t}\max\Big\{w(I_{\nu_r-1}),w(I_{\nu_r})\Big\} + \sum_{r=1}^{t}\max\Big\{w(I_{\nu_r}),w(I_{\nu_r+1})\Big\} \geq \sum_{r=1}^{t}\Big(w(I_{\nu_r-1})+w(I_{\nu_r+1})\Big).$$

В последнем неравенстве учтено, что $I_{\nu_1},\dots,I_{\nu_t}$ — легкие интервалы.

Отсюда, суммируя $W(E_1)$ и $W(E_2)$, с учетом (1.1) для веса гамильтонова цикла H имеем

$$W(H) \geq \Big(2W(\widetilde{\mathcal{M}^*}) - \sum_{r=1}^{t}\Big(w(I_{\nu_r-1})+w(I_{\nu_r+1})\Big)\Big)\cos\frac{\alpha}{2} + \sum_{r=1}^{t}\max\Big\{w(I_{\nu_r}),w(I_{\nu_r+1})\Big\}$$

$$\geq 2W(\widetilde{\mathcal{M}^*})\cos\frac{\alpha}{2} \geq 2W(\mathcal{M}^*)\Big(1-\frac{t}{\mu}\Big)\cos\frac{\alpha}{2}\ .$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Вес гамильтонова обхода H_i удовлетворяет неравенству*

$$W(H_i) \geq 2W(\mathcal{M}^*)\Big(1-\frac{t}{\mu}\Big)\cos\frac{\alpha_i}{2},$$

где величина угла α_i определена соотношением (1.2).

Лемма 6. *Пусть H^* — длина гамильтонова цикла максимального веса в задаче одного коммивояжера с расстояниями в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$. Справедливо неравенство*

$$\frac{W(\mathcal{M}^*)}{W(H^*)} \geq \frac{\mu}{n}\ .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если n четно, то $n = 2\mu$, и утверждение следует из очевидного неравенства $2W(\mathcal{M}^*) \geq W(H^*)$.

Рассмотрим случай нечетного n. Пусть $H^* = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — последовательность сцепленных ребер гамильтонова цикла, имеющего максимальный вес в графе G. Из ребер гамильтонова цикла H^* сформируем n максимальных (по числу ребер) паросочетаний

$$\mathcal{M}_r = \bigcup_{j=1}^{\mu} e_{1+(r+2j-3) mod(n)}, \qquad r = 1, \ldots, n.$$

Просуммируем веса $W(\mathcal{M}_i)$ паросочетаний, $r = 1, \ldots, n$. Каждое ребро цикла H^* представлено в этой сумме μ раз, поэтому справедливо равенство

$$\sum_{r=1}^{n} W(\mathcal{M}_r) = \mu W(H^*),$$

и с учетом неравенств $W(\mathcal{M}_r) \leq W(\mathcal{M}^*),\ r = 1, \ldots, n$, получим

$$nW(\mathcal{M}^*) \geq \mu W(H^*).$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Для веса гамильтонова обхода H_i справедливо неравенство*

$$\frac{W(H_i)}{W(H^*)} \geq 1 - \frac{2t+1}{n} - \gamma_k\, t_i^{-\frac{2}{k-1}},$$

где $t_i = \begin{cases} t, \text{ если } i = 1; \\ t/(2i-2) \text{ при } i > 1. \end{cases}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом следствия 1 и леммы 6 имеем

$$\frac{W(H_i)}{W(H^*)} \geq \frac{2\mu}{n}\left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\cos\frac{\alpha_i}{2} = \frac{2(\mu - t)}{n}\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha_i}{2}}$$

$$\geq \left(1 - \frac{2t+1}{n}\right)\left(1 - \sin^2\frac{\alpha_i}{2}\right) \geq 1 - \frac{2t+1}{n} - \sin^2\frac{\alpha_i}{2}.$$

Наконец, из (1.2) следует

$$\frac{W(H_i)}{W(H^*)} \geq 1 - \frac{2t+1}{n} - \gamma_k\, t_i^{-\frac{2}{k-1}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Обозначим $S_m(\beta) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{m-1}(2i)^\beta$. Для всякого положительного $\beta \leq 1$ справедливо неравенство $S_m(\beta) \leq m^{\beta+1}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о по индукции. При $m = 1$ утверждение леммы тривиально. Пусть неравенство имеет место для $S_1(\beta), \ldots, S_{m-1}(\beta)$. Тогда

$$S_m(\beta) = S_{m-1}(\beta) + \big(2(m-1)\big)^\beta \leq (m-1)^{\beta+1} + 2^\beta(m-1)^\beta$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{2^\beta}{m-1}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\right)^{\beta+1} m^{\beta+1} \leq \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{\frac{2^\beta}{\beta+1}}\right)^{\beta+1} m^{\beta+1}$$

$$\leq \left(\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m-1}\right)\right)^{\beta+1} m^{\beta+1} = m^{\beta+1},$$

поскольку $2^\beta \leq \beta+1$ при $0<\beta\leq 1$ и верно равенство

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Задача m-PSP на максимум в графе G с расстояниями в евклидовом пространстве размерности $k \geq 2$ решается посредством алгоритма $\mathcal{A}$ с оценкой относительной погрешности*

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \leq \frac{2t+1}{n} + \gamma_k' \left(\frac{m}{t}\right)^{\frac{2}{k-1}},$$

где $\gamma_k' = \begin{cases} \pi^2/3 & \textit{при } k=2; \\ \gamma_k\ \ , & \textit{если } k>2. \end{cases}$

Доказательство. Обозначим $OPT = W(H_1^* \cup \ldots \cup H_m^*)$, $F_{\mathcal{A}} = W(H_1 \cup \ldots \cup H_m)$. С учетом неравенства $OPT \leq mW(H^*)$ и леммы 7 для относительной погрешности алгоритма $\mathcal{A}$ имеем

$$\frac{OPT - W(H_1\cup\ldots\cup H_m)}{OPT} \leq 1 - \frac{\sum_{i=1}^m W(H_i)}{mW(H^*)} \leq 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \frac{W(H_i)}{W(H^*)} \leq \frac{2t+1}{n} + \frac{\gamma_k}{m}\sum_{i=1}^m t_i^{-\frac{2}{k-1}}$$

$$\leq \frac{2t+1}{n} + \gamma_k \frac{t^{-\frac{2}{k-1}}}{m}\left(1+\sum_{i=1}^{m-1}(2i)^{\frac{2}{k-1}}\right) = \frac{2t+1}{n} + \gamma_k\frac{t^{-\frac{2}{k-1}}}{m} S_m\left(\frac{2}{k-1}\right). \tag{2.4}$$

Приняв правую часть (2.4) за оценку относительной погрешности $\varepsilon_{\mathcal{A}}(n)$, рассмотрим два случая размерности пространства: $k>2$ и $k=2$.

Случай $k \geq 3$. Так как для всякого натурального $k>2$ верно $\beta = 2/(k-1) \leq 1$, то из (2.4) с учетом леммы 7 следует

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \leq \frac{2t+1}{n} + \gamma_k \frac{t^{-\frac{2}{k-1}}}{m} m^{\frac{2}{k-1}+1} = \frac{2t+1}{n} + \gamma_k\left(\frac{m}{t}\right)^{\frac{2}{k-1}}.$$

Случай $k=2$. Нетрудно видеть, что наименьший угол между двумя из t отрезков в пространстве $\mathbb{R}^2$ ограничен сверху константой $\alpha_2 = \alpha(2,t) = \pi/t$, откуда получаем значение константы $\gamma_2 = \pi^2/4$ (см. неравенство (1.2)):

$$\sin^2\frac{\alpha_2}{2} \leq \left(\frac{\alpha_2}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2/4}{t^2} = \frac{\gamma_2}{t^2}.$$

Учитывая также, что $S_m(2) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1}(2i)^2 \leq 4\int_0^m x^2dx = \frac{4}{3}m^3$, из (2.4) получим

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \leq \frac{2t+1}{n} + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{m}{t}\right)^2.$$

Теорема доказана.

2.4. Асимптотическая точность алгоритма $\mathcal{A}$

Теорема 2. *При $m = o(n)$ алгоритм $\mathcal{A}$ с параметром $t^* = \left\lceil m\big(n/m\big)^{\frac{k-1}{k+1}}\right\rceil$ находит асимптотически точное решение задачи m-PSP на максимум в графе G с расстояниями в многомерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.*

Доказательство. Подставив величину параметра t^* в оценку относительной погрешности алгоритма $\mathcal{A}$, полученную в теореме 1, с учетом ограничения на число искомых реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера имеем

$$\varepsilon_{\mathcal{A}}(n) \le \frac{2t^*+1}{n} + \gamma'_k\Big(\frac{m}{t^*}\Big)^{\frac{2}{k-1}} \le \frac{1}{n} + \frac{2m}{n}\Big(\frac{n}{m}\Big)^{\frac{k-1}{k+1}} + \gamma'_k\bigg(\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\frac{k-1}{k+1}}\bigg)^{\frac{2}{k-1}} = \frac{1}{n} + (2+\gamma'_k)\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\frac{2}{k+1}} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, где константа γ'_k зависит только от размерности пространства. Таким образом, в силу $m = o(n)$ алгоритм $\mathcal{A}$ асимптотически точен.

Теорема доказана.

Замечание. Если $t = t^*$ и $m = o(n)$, то условие $m \le t/4$ в лемме 2 выполняется, так как при достаточно больших n верно

$$m \le (m/4)\big(n/m\big)^{\frac{k-1}{k+1}} \le t^*/4.$$

2.5. Трудоемкость алгоритма $\mathcal{A}$

Из описания алгоритма $\mathcal{A}$ видно, что его временна́я сложность не меньше $O(n^3)$, что определяется трудоемкостью алгоритма нахождения в полном взвешенном графе паросочетания $\mathcal{M}^*$ максимального веса (см., например, [12]).

Рассмотрим трудоемкость этапа 3, на котором последовательно для каждого $i = \overline{1,m}$ выполняются процедуры $\mathcal{P}(\widetilde{E},\alpha))$, Assign$(\widetilde{E},\mathcal{C})$ и Hamilton$(\widetilde{E},\mathcal{S})$.

Лемма 9. *Процедура $\mathcal{P}(\widetilde{E},\alpha)$ может быть выполнена за время $O(nt\ln t)$.*

Доказательство. В начале процедуры полагаем $j := t$ и для каждого из t ведущих интервалов I_r набора $\mathcal{I}$ строим пирамидальное двоичное дерево ДД(r), в узлах которого хранятся величины углов с остальными $t-1$ интервалами $I_{r'}$ набора $\mathcal{I}$. В корневой вершине двоичного дерева ДД(r) хранится номер ведущего интервала $I_{r'}$ с наименьшим углом α_r относительно интервала I_r.

На текущем шаге процедуры берется ДД(r) с минимальным углом α_r в его корневой вершине. Пусть этот угол соответствует интервалу $I_{r'}$, после чего из двух I-цепей с ведущими интервалами I_r и $I_{r'}$ образуется увеличенная I-цепь с новым ведущим интервалом, за которым сохраним номер r в наборе $\mathcal{I}$. Увеличиваем j на 1. На место r' в наборе $\mathcal{I}$ помещаем новый интервал $I_j \in \widetilde{\mathcal{M}}^*$. Строим новые ДД$(r)$ и ДД(r'). Остальные ДД корректируем, удаляя из них прежние и добавляя новые вершины r и r' за $O(t\log t)$ действий. Текущий шаг повторяется не более $\mu - t$ раз. Следовательно, процедура потребует времени $O(nt\ln t)$.

Лемма доказана.

Процедура Assign$(\widetilde{E},\mathcal{C})$ для решения задачи назначения на двудольном графе с равными долями размера t требует времени $O(t^{5/2})$ [13].

Процедура Hamilton$(\widetilde{E},\mathcal{S})$ выполняется за время $O(n)$.

Поскольку максимальное паросочетание $\mathcal{M}^*$ находится за время $O(n^3)$ [12], а указанные выше процедуры Assign$(\widetilde{E},\mathcal{C})$ и Hamilton$(\widetilde{E},\mathcal{S})$ выполняются при построении каждого из циклов H_i, $i = \overline{1,m}$, имеем

Следствие 2. *Алгоритм $\mathcal{A}$ выполняется за время $O\big(n^3 + m(nt\ln n + t^{5/2})\big)$.*

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *и ограничения* $m \le n^{1/2}$ *время работы алгоритма* $\mathcal{A}$ *не превышает* $O(n^3)$.

Доказательство следует непосредственно из того, что $m t^{5/2} \le n^{1/2} t^{5/2} \le n^3$ и при достаточно больших n верно

$$m\,n\,t \ln n \le n^{5/2} \ln n \le n^3.$$

Заключение

В статье исследована задача отыскания нескольких реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера максимального веса в полном взвешенном неориентированном графе в многомерном евклидовом пространстве. Для решения задачи представлен алгоритм $\mathcal{A}$ с временной сложностью $O(n^3)$ и проведено обоснование условия его асимптотической точности. Было бы интересно получить аналогичные условия для алгоритма, использующего построение непересекающихся гамильтоновых циклов без разбиения отрезков (интевалов) максимального паросочетания на тяжелые и легкие, как это было сделано в работе авторов [4] для обычной задачи коммивояжера. Представляется также интересным получение посредством алгоритма $\mathcal{A}$ аналогичных условий асимптотической точности в случае произвольного конечномерного нормированного пространства, когда в качестве угла между двумя векторами v и u рассматривается расстояние между вектором $v/\parallel v \parallel$ и ближайшим к нему вектором, выбираемым из пары $u/\parallel u \parallel$ и $-u/\parallel u \parallel$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агеев А.А., Бабурин А.Е., Гимади Э.Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2006. Сер. 1. Т. 13, № 2. С. 11–20.
2. **Агеев А.А., Пяткин А.В.** Приближенный алгоритм решения метрической задачи о двух коммивояжерах с оценкой точности 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 3–20.
3. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Коркишко Н.М.** Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2004. Сер. 2. Т. 11, № 1. С. 11–25.
4. **Бабурин А.Е., Гимади Э.Х.** Об одном обобщении задачи коммивояжера на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2006. Сер. 1. Т. 13, № 3. С. 3–12.
5. **Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н.** Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2007. Сер. 2. Т. 14, № 2. С. 41–61.
6. **Гимади Э.Х.** Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Методы оптимизации и их приложения: тр. XII Байкальской междунар. конф. / ИСЭМ СО РАН. Иркутск, 2001. Т. 1. С. 117–124.
7. **Гимади Э.Х.** Асимптотически точный алгоритм отыскания одного и двух реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера максимального веса в евклидовых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 13, № 1. С. 23–32.
8. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.] М.: Наука, 1990. 384 с.
9. **Оре О.** Теория графов. 2-е изд. М.: Наука, 1980. 336 с.
10. **Сердюков А.И.** Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Управляемые системы. Новосибирск, 1987. Вып. 27. С. 79–87.
11. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 / A.E. Baburin, F. Croce, E.Kh. Gimadi, Y.V. Glazkov, V. Paschos // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, no. 9. P. 1988–1992.
12. **Gabow H.N.** An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th annual ACM simposium on theory of computing (Boston, USA, Apr. 25–27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448–456.

13. **Hopcroft J.E., Karp R.M.** An $n^{5/2}$-algorithm for maximum matchings in bipartite graphs // SIAM J. Comp. No. 2. 1973. P. 225–231.
14. **De Kort J.B. J.M.** A branch and bound algorithm for symmetric-peripatetic salesman problems // European J. Oper. Research. 1993. No. 70. P. 229–243.
15. **De Kort J.B. J.M.** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, no. 1. P. 113–122.
16. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications: Proc. NATO Advanced Study Inst. Versailles, 1974. P. 173–178.
17. The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization / E.L. Lawler [et al.]. Chichester: Wiley, 1985. 476 p.
18. The traveling salesman problem and its variations / Eds. G. Gutin, A.P. Punnen. Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ., 2002. 826 p.
19. **Wolfter C.R., Cordone R.** A heuristic approach to the overnight security service problem // Comput. & Oper. Research. 2003. № 30, iss. 9. P. 1269–1287.

Бабурин Алексей Евгеньевич
канд. физ.-мат. наук
e-mail: ababur@arqa.ru

Поступила 31.03.2010

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук
зав. лаб.
Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.54

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n, ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА A_n ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. VI [1]

В. А. Белоногов

Гипотеза об отсутствии пар полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп A_n является следствием некоторой более общей гипотезы A, которая формулируется в терминах пар χ^α и χ^β неприводимых характеров симметрической группы S_n, полупропорциональных на одном из множеств A_n или $S_n \setminus A_n$ (здесь α и β — разбиения числа n, соответствующие этим характерам). В статье начато рассмотрение случая, когда $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$, т. е. $(1,1)$-крюки диаграмм Юнга разбиений α и β имеют разные длины.

Ключевые слова: симметрические группы, знакопеременные группы, неприводимые характеры, полупропорциональность.

V. A. Belonogov. On irreducible characters of the group S_n that are semiproportional on A_n or $S_n \setminus A_n$. VI.

The conjecture that the alternating groups A_n have no pairs of semiproportional irreducible characters is a corollary of a more general conjecture A, formulated in terms of pairs χ^α and χ^β of irreducible characters of the symmetric group S_n that are semiproportional on one of the sets A_n or $S_n \setminus A_n$ (here α and β are partitions of the number n corresponding to these characters). In the paper the investigation of the case is begun in which $h_{11}^\alpha \neq h_{11}^\beta$, i. e. $(1,1)$-hooks of the Young diagrams of the partitions α and β have different lengths.

Keywords: symmetric groups, alternating groups, irreducible characters, semiproportionality.

Введение

Настоящая статья является продолжением статей [1–5], целью которых является получение доказательства следующих гипотез: гипотезы 1, высказанной в [6], и более общей гипотезы A из [1], после доказательства которой становится доказанной и гипотеза 1.

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

Напомним, что функции φ и ψ из некоторого множества G в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$; и называются *полупропорциональными на S*, где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S.

Всюду далее n — натуральное число; $P(n)$ — множество всех разбиений числа n; χ^α — неприводимый характер группы S_n, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$; α' — разбиение, ассоциированное с α; запись $\alpha =' \beta$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$. Определение участвующих в формулировке гипотезы A разбиений $2^k.()$, $2^k.(1)$, $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ и некоторые их свойства напоминаются в разд. 2. Для $\varepsilon \in \{1,-1\}$ положим $S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$

Гипотеза A. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε. Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено одно из условий*:

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

(1а) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(1б) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено одно из условий* (*везде* k, m *целые*):

(2а) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 1$;

(2б) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$;

(2в) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$.

Очевидно, доказательство гипотезы A индукцией по числу n достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие A. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы A на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$, следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Как следует из [7,8], доказательство гипотезы A можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h^\alpha_{11} = h^\beta_{11}$ и $h^\alpha_{12} = h^\beta_{11}$.

Итоговым результатом статей [1–5] является следующая теорема из [5].

Теорема A5. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S^ε_n *и выполнено условие A. Тогда* $h^\alpha_{11} \neq h^\beta_{11}$.

В настоящей статье доказывается следующая теорема A6. Участвующие в её формулировке обозначения h^α_2 и α^2 объясняются в разд. 1 (если h^α_2 определено, то h^α_2 есть h^α_{12} или h^α_{21} и α^2 есть α^{12} или α^{21} соответственно).

Теорема A6. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S^ε_n *и выполнено условие A. Тогда с точностью до перемены мест* α *и* β *выполнено одно из условий*:

(1) $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ *удовлетворяет заключению гипотезы A*,

(2) $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$, $h^\alpha_2 = h^\beta_{11}$ *и для тройки* $(\alpha^2, \beta^{11}, \delta)$, *где* $\delta = (-1)^{h^\beta_{11}+1}\varepsilon$, *выполнено условие* (2) *гипотезы A на месте* $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Используемые в статье обозначения, в основном, стандартны (см., например, [9, 10]). В частности, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ — множества всех комплексных, целых и натуральных чисел соответственно; запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B. Если $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_l)$ — конечные последовательности чисел, то $\alpha * \beta$ обозначает последовательность $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$; если $k \geq l$, то $\alpha + \beta := (a_1 + b_1, \ldots, a_l + b_l, a_{l+1}, \ldots, a_k)$.

Пусть φ и ψ — обобщённые характеры группы G и $S \subseteq G$. Если $|\phi(s)| = |\psi(s)|$ для всех $s \in S$, то скажем, что φ и ψ *модульно равны на* S.

Обозначения, связанные с разбиениями и характерами групп S_n, приводятся в разд. 1.

1. Разбиения и характеры групп S_n и A_n

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \ldots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \ldots \geq a_l$ и $n = a_1 + \ldots + a_l$. i-й член a_i $(1 \leq i \leq l)$ разбиения α обозначается через α_i. Разбиению $\alpha = (a_1, \ldots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы образуют её *главную диагональ*; её длина (мощность) обозначается через $d(\alpha)$. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы* (или *подобны*), если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Множество всех клеток (i, j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i + 1, j + 1)$, называется её *границей*.

Крюк диаграммы $[\alpha]$ (и разбиения α) с вершиной (i,j) есть множество $H^\alpha_{ij} := \{(i,j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i, j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i+k, j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). *Косой крюк* с вершиной (i,j) диаграммы $[\alpha]$ есть часть границы диаграммы $[\alpha]$, "вырезанная" крюком H^α_{ij}. Его обозначают через $R(H^\alpha_{ij})$. Положим $h^\alpha_{ij} := |H^\alpha_{ij}|$ $(= |R(H^\alpha_{ij})|)$.

Разбиением числа 0 называют пустую (длины 0) последовательность ().

Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и H есть крюк разбиения α. Введём обозначения:

l_H — длина ноги крюка H;

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$; $\alpha^{ij} := \alpha - H^\alpha_{ij}$;

$\mathrm{H}^\alpha(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$; $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) := \mathrm{H}^\alpha(m) \cup \mathrm{H}^\beta(m)$; подобно обозначается объединение большего числа таких множеств.

Предложение 1.1 [10, теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.12, 2.5.7; 11, утверждения 2.3, 4.12, 6.7].

(1) *Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.*

(2) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ *(главный характер группы S_n), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — знакопеременный характер группы S_n.*

(3) $\chi^{\alpha'} = \chi^\alpha \xi$ *для всех $\alpha \in P(n)$.*

(4) χ^α *исчезает на $S_n \setminus A_n$ если и только если $\alpha = \alpha'$ $(\alpha \in P(n))$.*

(5) Если $\alpha \in P(n)$ и $\alpha \neq \alpha'$, то $\chi^\alpha|_{A_n} = \chi^{\alpha'}|_{A_n} \in \mathrm{Irr}(A_n)$.

Пусть $\alpha \in P(n)$. Положим $h(\alpha) := \{h^\alpha_{11}, \ldots, h^\alpha_{dd}\}$, где $d = d(\alpha)$. Согласно [10, 2.4.8, 2.4.9] $h(\alpha)$ есть наибольшее (относительно обычного словарного порядка $\leq$) из разбиений $\beta \in P(n)$ таких, что $\chi^\alpha(g_\beta) \neq 0$, причём $\chi^\alpha(g_{h(\alpha)}) = \pm 1$.

Далее нам потребуются также свойства разбиения $f(\alpha)$, введённого в [7]. Для $\alpha \in P(\alpha)$ положим

$H^\alpha_1 := H^\alpha_{11}$, $R^\alpha_1 := R(H^\alpha_1)$, $h^\alpha_1 := |H^\alpha_1|$,

α^1 — разбиение с диаграммой Юнга $[\alpha^1] = [\alpha] \setminus R^\alpha_1$;

$$H^\alpha_2 := \begin{cases} H^\alpha_{12}, \text{ если } h^\alpha_{12} > h^\alpha_{21}, \\ H^\alpha_{21}, \text{ если } h^\alpha_{21} > h^\alpha_{12}, \\ \text{не определено, если } h^\alpha_{12} = h^\alpha_{21}, \end{cases} \qquad R^\alpha_2 := R(H^\alpha_2), \quad h^\alpha_2 := |H^\alpha_2|,$$

α^2 — разбиение с диаграммой Юнга $[\alpha^2] = [\alpha] \setminus R^\alpha_2$.

О п р е д е л е н и е 1 [7]. Пусть $\alpha \in P(n)$ и $\alpha \neq \alpha'$ $(n \in \mathbb{N})$. Определим разбиение $f(\alpha)$ индукцией по $d(\alpha)$.

(1) Если $d(\alpha) = 1$, то $f(\alpha) := (h^\alpha_2, n - h^\alpha_2)$.

(2) Если $d(\alpha) > 1$, то $f(\alpha) := \begin{cases} (h^\alpha_1) * f(\alpha^1), & \text{если } \alpha^1 \neq (\alpha^1)', \\ (h^\alpha_2) * f(\alpha^2), & \text{если } \alpha^1 = (\alpha^1)'. \end{cases}$

Предложение 1.2 [7, теорема 1]. *Пусть $\alpha \in P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \neq \alpha'$. Тогда*

(1) $f(\alpha) \in P(n)$ *и* $f(\alpha) = f(\alpha')$;

(2) $l(f(\alpha)) = l(h(\alpha)) + 1$ $(= d(\alpha) + 1)$;

(3) $f(\alpha)$ *есть наибольшее из разбиений β числа n, знак которых противоположен знаку $h(\alpha)$ и таких, что $\chi^\alpha(g_\beta) \neq 0$.*

(4) $\chi^\alpha(g_{f(\alpha)}) = \pm 1$.

Предложение 1.3 [8, теорема 3.1]. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, имеющие одно и то же множество корней на S^ε_n при некотором $\varepsilon = \pm 1$, причём $\alpha \neq' \beta$. Тогда верно одно и только одно из следующих утверждений:*

(0) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\varepsilon = -1$;

(1) $f(\alpha) = h(\beta)$, $f'(\alpha) = h'(\beta)$, $d(\alpha) + 1 = d(\beta)$, $\mathrm{sign}(f(\alpha)) = \varepsilon$;

(2) $f(\alpha) = f(\beta)$, $f'(\alpha) = f'(\beta)$, $d(\alpha) = d(\beta)$, $\mathrm{sign}(f(\alpha)) = \varepsilon$;

(3) $h(\alpha) = h(\beta)$, $h'(\alpha) = h'(\beta)$, $d(\alpha) = d(\beta)$, $\mathrm{sign}(h(\alpha)) = \varepsilon$;

(4) $h(\alpha) = f(\beta)$, $h'(\alpha) = f'(\beta)$, $d(\alpha) = d(\beta) + 1$, $\mathrm{sign}(h(\alpha)) = \varepsilon$.

2. Свойства разбиений α и β из заключения гипотезы A

При доказательстве теоремы читатель должен хорошо представлять себе вид диаграмм разбиений α и β из п. (1) и (2) гипотезы A. Напомним некоторые факты из [1]. При $m \in \{2,3\}$ *m-накрытием* разбиения Θ длины $s \geq 0$ называем разбиение

$m.\Theta := (\,\Theta_1+m+1,\ \Theta_1+1,\ \Theta_2+1,\ \ldots,\ \Theta_s+1,\ 1^m)\ \ (m.() = (m+1, 1^m))$

и полагаем $m^0.\Theta := \Theta$ и $m^k.\Theta := m.(m^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k.

Для разбиений γ вида $2^k.()$ или $2^k.(1)$ определяем разбиения

$$\gamma+(\widetilde{3}) := 2^k.()+(0^k,2,1),\ \text{если } \gamma = 2^k.(),\ \text{ и }\ \gamma+(\widetilde{3}) := 2^k.(1)+(0^k,1,2),\ \text{если } \gamma = 2^k.(1).$$

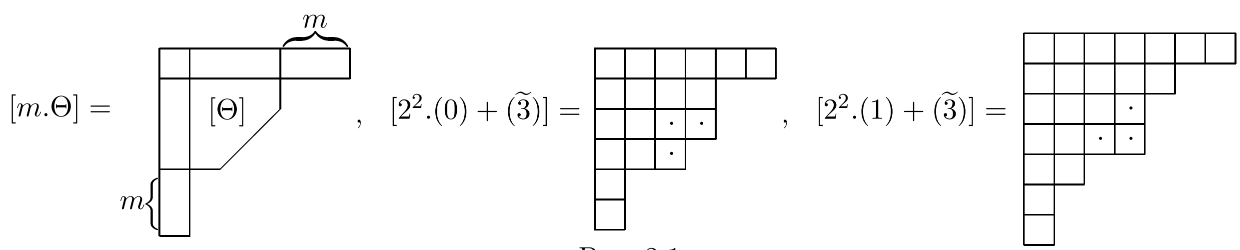


Рис. 2.1.

На рис. 2.1, кроме диаграммы $[m.\Theta]$, изображены две диаграммы вида $[\beta] = [\gamma+(\tilde{3})]$. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3. Далее, определяем разбиения

$$\Delta_l := (\,l,\ l-1,\ \ldots,\ 2, 1\,)\ \text{при } l \in \mathbb{N},\ \text{ и }\ \Sigma_l := (\,(2l)^2,\ (2l-2)^2,\ \ldots,\ 2^2\,)\ \text{при } l \in \mathbb{N}\cup\{0\}\ (\Sigma_0 = ()).$$

При γ, совпадающих с $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ или $3^k.2.\Sigma_l$, определяем разбиения $\gamma+(\widetilde{4})$:

$$3^k.\Delta_l+(\widetilde{4}) := 3^k.\Delta_l+(0^k,2,2),\ \ 3^k.\Sigma_l+(\widetilde{4}) := 3^k.\Sigma_l+(0^k,3,1),\ \ 3^k.2.\Sigma_l+(\widetilde{4}) := 3^k.2.\Sigma_l+(0^k,1,3).$$

При $k=0$ вид диаграмм разбиений $\beta = \gamma+(\widetilde{4})$ из условий (2а)–(2в) гипотезы A показан на рис. 2.2. Их единственные косые крюки длины 4 помечены точками.

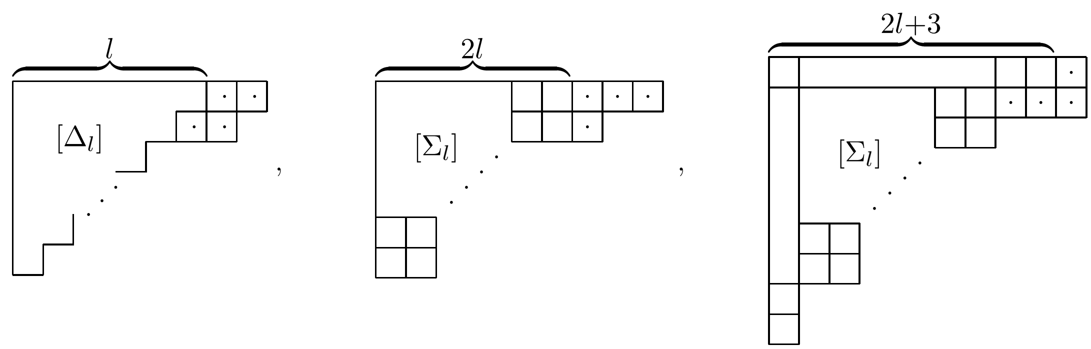


Рис. 2.2.

Легко представить себе вид диаграмм разбиений $\beta = \gamma+(\widetilde{4})$ и при $k>0$. Заметим, что их (единственные) косые крюки длины 4 находятся в $(k+1)$-й и $(k+2)$-й строках.

В связи со вторым пунктом утверждения теоремы A6 представляет интерес следующее наблюдение.

Предложение 2.1. *Если $(n,\alpha,\beta,\varepsilon)$ удовлетворяют условию (1) гипотезы A и $n>3$, то $h_2^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$ и четвёрка $(n-h_{11}^{\beta}, \alpha^2, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^{\beta}+1}\varepsilon$, удовлетворяет условию (1) гипотезы A на месте $(n,\alpha,\beta,\varepsilon)$. А именно,*

если $\alpha =' 2^k.()+(3)$ и $\beta = 2^k.()+(\widetilde{3})$, где $k \geq 1$, то $\alpha^2 =' 2^{k-1}.()+(3)$ и $\beta^{11} = 2^{k-1}.()+(\widetilde{3})$;

если $\alpha =' 2^k.(1)+(3)$ и $\beta = 2^k.(1)+(\widetilde{3})$, где $k \geq 1$, то $\alpha^2 =' 2^{k-1}.(1)+(3)$ и $\beta^{11} = 2^{k-1}.(1)+(\widetilde{3})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит во внимательном рассмотрении диаграмм Юнга $[\alpha]$ и $[\beta]$ в каждом случае и в элементарной проверке требуемых утверждений.

Предложение 2.2 [4, предложение 2.2]. *Равносильны условия:*

(1) *разбиения α и β удовлетворяют одному из условий* (1а) *и* (1б) *гипотезы* A;

(2) *диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины* 3, *и после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма без крюков длины* 3.

Предложение 2.3 [4, предложение 2.4]. *Равносильны условия:*

(1) *разбиения α и β удовлетворяют одному из условий* (2а)–(2в) *гипотезы* A;

(2) *диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют точно по одному крюку длины* 4, *и после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма без крюков длины* 4.

3. О диаграммах $[\alpha]$ и $[\beta]$ для характеров χ^α и χ^β, полупропорциональных на S_n^ε

Предложение 3.1 [1, предложение 3.3]. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Характеры χ^α и χ^β пропорциональны на S_n^ε если и только если либо $\alpha =' \beta$, либо $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.*

В доказательстве теоремы А6 нам встретится также более общая ситуация, когда χ^α и χ^β пропорциональны лишь на некотором подмножестве D из S_n^ε, в то время как на разности $S_n^\varepsilon \setminus D$ один из этих характеров принимает нулевые значения.

Предложение 3.2. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и $\varepsilon = \pm 1$. Предположим, что существуют подмножество D в S_n^ε и число $u \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\chi^\beta|_D = u\chi^\alpha|_D \quad \textit{и} \quad \chi^\beta(x) = 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in S_n^\varepsilon \setminus D. \tag{3.1}$$

Тогда либо $\alpha =' \beta$, либо $\chi^\beta(x) = 0$ для всех $x \in S_n^\varepsilon$ (т. е. $\varepsilon = -1$ и $\beta = \beta'$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varepsilon = -1$ результат следует из [5, предложение 3.1] и предложения 3.1.

Пусть $\varepsilon = 1$, т. е. $S_n^\varepsilon = A_n$. Будем считать (от противного), что $\alpha \neq \beta'$. Из (3.1) следует, что $1 \in D$ и $u \neq 0$.

Предположим сначала, что $\alpha \neq \alpha'$ и $\beta \neq \beta'$. Тогда согласно предложениям 1.1(5) и 3.1 $\chi^\alpha|_{A_n}$ и $\chi^\beta|_{A_n}$ — различные неприводимые характеры группы A_n. Следовательно, по первому соотношению ортогональности в группе A_n, учитывая тот факт, что χ^α или χ^β исчезает на $A_n \setminus D$ по (3.1), и предложение 1.1(1), имеем

$$0 = (\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\beta|_{A_n})_{A_n} = \frac{2}{n!} \sum_{x \in D} \chi^\alpha|_{A_n}(x)\chi^\beta|_{A_n}(x) = \frac{2u}{n!} \sum_{x \in D} \chi^\alpha|_{A_n}(x)^2. \tag{3.2}$$

Отсюда следует, что $\chi^\alpha|_{A_n}(x) = 0$ для всех $x \in D$, а это противоречит тому, что $1 \in D$.

Предположим теперь, что $\alpha = \alpha'$ или $\beta = \beta'$. Тогда согласно предложению 1.1(4) $\chi^\alpha|_{A_n}$ или $\chi^\beta|_{A_n}$ исчезает на $S_n \setminus A_n$. Следовательно, по первому соотношению ортогональности в группе S_n

$$0 = 2(\chi^\alpha, \chi^\beta)_{S_n} = \frac{2}{n!} \sum_{x \in S_n} \chi^\alpha(x)\chi^\beta(x) = \frac{2}{n!} \sum_{x \in A_n} \chi^\alpha(x)\chi^\beta(x) = (\chi^\alpha|_{A_n}, \chi^\beta|_{A_n})_{A_n}.$$

Отсюда так же, как и в первом случае (см. (3.2)) получаем противоречие.

Предложение 3.2 доказано.

Следствие. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и* $\varepsilon = \pm 1$. *Тогда*

(1) *если функции* χ^α *и* $a\chi^\alpha + b\chi^\beta$ *пропорциональны на* S_n^ε, *то либо* χ^α *и* χ^β *пропорциональны на* S_n^ε, *либо* χ^β *исчезает на* S_n^ε;

(2) *если функции* χ^α *и* $a\chi^\alpha + b\chi^\beta$ *полупропорциональны на* S_n^ε, *то* χ^α *и* χ^β *полупропорциональны на* S_n^ε.

Доказательство. 1. Пусть χ^α и $a\chi^\alpha + b\chi^\beta$ пропорциональны на S_n^ε. Тогда существует число $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $c\chi^\alpha$ равно $a\chi^\alpha + b\chi^\beta$ на S_n^ε, откуда $(c-a)\chi^\alpha$ равно $b\chi^\beta$ на S_n^ε и, следовательно, либо χ^α и χ^β пропорциональны (если $c \neq a$), либо χ^β исчезает на S_n^ε (если $c = a$).

2. Пусть χ^α и $a\chi^\alpha + b\chi^\beta$ полупропорциональны на S_n^ε. Тогда существуют подмножество D в S_n^ε и различные ненулевые числа c_1 и c_2 из $\mathbb{C}$ такие, что

$$c_1\chi^\alpha \text{ равно } a\chi^\alpha + b\chi^\beta \text{ на } D \;\text{ и }\; c_2\chi^\alpha \text{ равно } a\chi^\alpha + b\chi^\beta \text{ на } S_n^\varepsilon \setminus D,$$

причём χ^α имеет ненулевые значения и на D и на $S_n^\varepsilon \setminus D$ (иначе χ^α и $a\chi^\alpha + b\chi^\beta$ пропорциональны на S_n^ε). Следовательно,

$$(c_1 - a)\chi^\alpha \text{ равно } b\chi^\beta \text{ на } D \;\text{ и }\; (c_2 - a)\chi^\alpha \text{ равно } b\chi^\beta \text{ на } S_n^\varepsilon \setminus D.$$

Если $c_1 \neq a \neq c_2$, то, очевидно, χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε. Если же одно из чисел c_1 и c_2 равно a, то согласно предложению 3.2 либо $\alpha =' \beta$, либо χ^β исчезает на S_n^ε, но это противоречит тому, что χ^α и χ^β полупропорциональны (а не пропорциональны) на S_n^ε (если $\alpha =' \beta$, то $a\chi^\alpha + b\chi^\beta = (a + \varepsilon b)\chi^\alpha$ по предложению 1.1(3), а во втором случае можно заменить b нулём).

Следствие доказано.

Предложение 3.3 [5, теорема 3.1]. *Пусть* χ^α *и* χ^β *— неприводимые характеры группы* S_n, *полупропорциональные на* S_n^ε $(\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1)$, *причём при* $\varepsilon = 1$ α *и* β *не самоассоциированы. Тогда*

$$\chi^\alpha(g) = \pm\chi^\beta(g) \quad \textit{для любого} \quad g \in S_n^\varepsilon,$$

т. е. χ^α *и* χ^β *модульно равны на* S_n^ε.

Предложение 3.4 (следует из [1, предложение 3.7]). *Пусть* χ^α *и* χ^β *полупропорциональны на* S_n^ε $(\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\varepsilon \in \{1, -1\})$. *Предположим, что* $[\alpha]$ *имеет хотя бы один крюк некоторой длины* m, *а* $[\beta]$ *не имеет крюков длины* m. *Тогда* $\varepsilon = (-1)^m$, α *имеет единственный крюк* H *длины* m *и* $\alpha - H = (\alpha - H)'$.

Предложение 3.5 [5, предложение 3.4]. *Пусть характеры* χ^α *и* χ^β *полупропорциональны на* S_n^ε $(\alpha, \beta \in P(n),\ \varepsilon \in \{1, -1\})$ *и* m *— длина некоторого крюка из* $[\alpha]$ *или* $[\beta]$. *Тогда*

(1) $\sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H}$ *и* $\sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K}$ *пропорциональны или полупропорциональны на* S_{n-m}^δ, *где* $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$;

(2) *если* α *и* β *не самоассоциированы, то* $\sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H}$ *и* $\sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K}$ *модульно равны на* S_{n-m}^δ, *где* $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$.

Предложение 3.6. *Пусть* A *и* B *— подмножества из* $P(n)$, m *— длина крюка некоторого разбиения из* $A \cup B$ *и* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Тогда*

(1) *если функции* $\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \chi^\alpha$ *и* $\sum_{\beta \in B} n_\beta \chi^\beta$, *где* $n_\alpha, n_\beta \in \mathbb{Z}$, *пропорциональны или полупропорциональны на* S_n^ε, *то* $\sum_{\alpha \in A} n_\alpha \sum_{H \in \mathrm{H}^\alpha(m)} (-1)^{l_H} \chi^{\alpha - H}$ *и* $\sum_{\beta \in B} n_\beta \sum_{K \in \mathrm{H}^\beta(m)} (-1)^{l_K} \chi^{\beta - K}$ *пропорциональны или полупропорциональны на* S_{n-m}^δ, *где* $\delta = (-1)^{m+1}\varepsilon$;

(2) *утверждение (1) останется верным, если в нём выражение "пропорциональны или полупропорциональны" заменить (оба раза) на "модульно равны".*

Д о к а з а т е л ь с т в о подобно доказательству [1, предложение 3.8].

Предложение 3.7. [3, предложение 3.7]. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, полупропорциональные на S_n^ε $(\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1)$, и выполнено условие A. Предположим, что α и β имеют точно по одному крюку H^α и H^β соответственно некоторой длины m. Положим $\widetilde{\alpha} := \alpha - H^\alpha$ и $\widetilde{\beta} := \beta - H^\beta$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(а) $\widetilde{\alpha} =' \widetilde{\beta}$;

(б) $\varepsilon = (-1)^m$, $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}'$ *и* $\widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}'$;

(в) $\varepsilon = (-1)^{m+1}$ *и с точностью до перемены мест* $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *имеем* $\widetilde{\alpha} = \Gamma + (3)$ *и* $\widetilde{\beta} = \Gamma + (\tilde{3})$, *где* Γ *есть* $2^k.()$ *или* $2^k.(1)$ *при* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(г) $\varepsilon = (-1)^m$ *и с точностью до перемены мест* $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *имеем* $\widetilde{\alpha} = \Theta + (4)$ *и* $\widetilde{\beta} = \Theta + (\tilde{4})$, *где* Θ *есть* $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ *или* $3^k.2.\Sigma_l$ *при некоторых* k, l.

Предложение 3.8. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, полупропорциональные на S_n^ε $(\alpha, \beta \in P(n), \varepsilon = \pm 1)$. Тогда для $\alpha, \beta, \varepsilon$ выполнено заключение гипотезы A в каждом из следующих случаев:*

(1) *хотя бы одно из разбиений α и β самоассоциировано,*

(2) *длина главной диагонали хотя бы одного из разбиений α и β меньше трёх.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из [12, теорема; 13, теорема Б и 14, теорема 1].

4. Начало доказательства теоремы A6

Ввиду теоремы A5 при доказательстве теоремы A6 мы можем предполагать, что $h_{11}^\alpha > h_{11}^\beta$. Сначала докажем следующий частный случай теоремы A6.

Предложение 4.1. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε, выполнено условие A и $h_{11}^\alpha > h_{11}^\beta$. Тогда выполнено одно из условий:*

(1) $(\alpha, \beta, \varepsilon)$ *удовлетворяет заключению гипотезы A*;

(2) $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$, $h_2^\alpha = h_{11}^\beta$ *и тройка* $(\alpha^2, \beta^{11}, \delta)$, *где* $\delta = (-1)^{h_{11}^\beta + 1}\varepsilon$, *удовлетворяет заключению гипотезы A на месте* $(\alpha, \beta, \varepsilon)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем предполагать, что

$$\text{заключение предложения 4.1 неверно.} \tag{4.1}$$

Согласно предложению 3.8(1) условие (1) предложения 4.1 выполняется, если хотя бы одно из разбиений α и β самоассоциировано. Поэтому

$$\alpha \neq \alpha', \quad \beta \neq \beta'. \tag{4.2}$$

По предложению 3.3 отсюда и из условия предложения 4.1 следует, что

$$\chi^\alpha \text{ и } \chi^\beta \text{ модульно равны на } S_n^\varepsilon. \tag{4.3}$$

Кроме того, по предложению 3.8(2) и (4.1)

$$d(\alpha) \geq 3 \text{ и } d(\beta) \geq 3. \tag{4.4}$$

Поскольку $h_{11}^\alpha > h_{11}^\beta$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h_{11}^\alpha) = \{H_{11}^\alpha\}$ и согласно предложению 3.4

$$\alpha^{11} = (\alpha^{11})' \ \text{ и } \ \varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}. \tag{4.5}$$

Поэтому диаграмма $[\alpha]$ имеет вид, изображённый на рис. 4.1 (см. следующую страницу), где $\gamma := \alpha^{11}$. Без ограничения общности будем считать (на основании (4.2) и (4.5)), что $a > b$ и, следовательно, $h_{12}^{\alpha} > h_{21}^{\alpha}$, т. е. $h_2^{\alpha} = h_{12}^{\alpha}$ и $\alpha^2 = \alpha^{12}$. Из рис. 4.1 видно, что $\alpha^{12} = \gamma * (1^{b+1})$.

Теперь выясним вид диаграммы $[\beta]$ (которую затем изобразим на том же рис. 4.1). Согласно предложению 1.3 $\operatorname{sign}(f(\alpha)) = \varepsilon$ и имеет место один из следующих случаев:

$$\text{либо } f(\alpha) = h(\beta), \ \text{ либо } f(\alpha) = f(\beta) \tag{4.6}$$

(случай $h(\alpha) = f(\beta)$ невозможен, так как $h_{11}^{\alpha} > h_{11}^{\beta}$; см. следующие три равенства). Распишем входящие сюда разбиения, используя определения функций f и g (см. разд. 1) и учитывая (4.4) и (4.5):

$$f(\alpha) = (h_{12}^{\alpha}) * f(\alpha^{12}),$$

$$f(\beta) = \begin{cases} (h_{11}^{\beta}) * f(\beta^{11}), \ \text{если } \beta^{11} \neq (\beta^{11})', \\ (h_2^{\beta}) * f(\beta^2), \ \text{если } \beta^{11} = (\beta^{11})', \end{cases}$$

$$h(\beta) = (h_{11}^{\beta}) * h(\beta^{11}).$$

Теперь видно, что по (4.6) имеет место один из следующих случаев:

$$\text{либо } h_{12}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}, \ \text{ либо } h_{12}^{\alpha} = h_2^{\beta} \text{ и } \beta^{11} = (\beta^{11})'.$$

Покажем, что второй случай противоречив. Действительно в этом случае диаграмма $[\beta]$ должна иметь такой же вид, какой имеет диаграмма $[\alpha]$ на рис. 4.1, т. е. $\beta = (\mu + (c)) * (1^d)$, где $\mu = \mu'$, причём ввиду (4.2) можно считать, что $c > d$. Тогда $h_{12}^{\alpha} = h_{12}^{\beta}$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h_{12}^{\alpha}) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$, откуда по предложению 3.5(1) характеры $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $S := S_{n-h_{12}^{\alpha}}^{\sigma}$, где $\sigma = (-1)^{h_{12}^{\alpha}+1}\varepsilon$. При этом $\alpha^{12} = \gamma * (1^{b+1})$ и $\beta^{12} = \mu^{11} * (1^{d+1})$. Если $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ пропорциональны на S, то согласно предложению 3.1 должно быть $\alpha^{12} = \beta^{12}$ (так как $\alpha^{12} \neq (\alpha^{12})'$), но тогда $\gamma = \mu^{11}$, $b = d$ и $\alpha = \beta$, что противоречиво. Если $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ полупропорциональны на S, то согласно условию A разбиения α^{12} и β^{12} должны удовлетворять гипотезе A на месте α и β, что, как легко увидеть (см. разд. 2), противоречиво. (Противоречивость полупропорциональности характеров $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{12}}$ можно доказать и без ссылки на условие A, применив предложение 2 из [7].)

Следовательно,

$$h_{12}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}. \tag{4.7}$$

Ввиду (4.7) будет $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(h_{11}^{\beta}) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{11}^{\beta}\}$, и тогда согласно предложению 3.5(1)

$$\chi^{\alpha^{12}} \text{ и } \chi^{\beta^{11}} \text{ пропорциональны или полупропорциональны на } S_{n-h_{11}^{\beta}}^{\delta}, \text{ где } \delta = (-1)^{h_{11}^{\beta}+1}\varepsilon.$$

Если $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{11}}$ полупропорциональны на $S_{n-h_{11}^{\beta}}^{\delta}$, то согласно условию A и утверждениям (4.5), (4.7) заключение предложения 4.1 выполнено (в противоречие с (4.1)).

Поэтому $\chi^{\alpha^{12}}$ и $\chi^{\beta^{11}}$ пропорциональны на $S_{n-h_{11}^{\beta}}^{\delta}$. Тогда согласно предложению 3.1 $\alpha^{12} =' \beta^{11}$ (так как $\alpha^{12} = \gamma * (1^{b+1}) \neq (\alpha^{12})'$). Поскольку мы можем без ограничения общности заменить β на β', то можно считать, что

$$\beta^{11} = (\alpha^{12})' = \gamma + (b+1).$$

Поэтому диаграмма $[\beta]$ имеет вид, изображённый на рис. 4.1, где $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $t = \gamma_1 = {\gamma'}_1$ (наклонная линия заменяет некоторую ступенчатую линию).

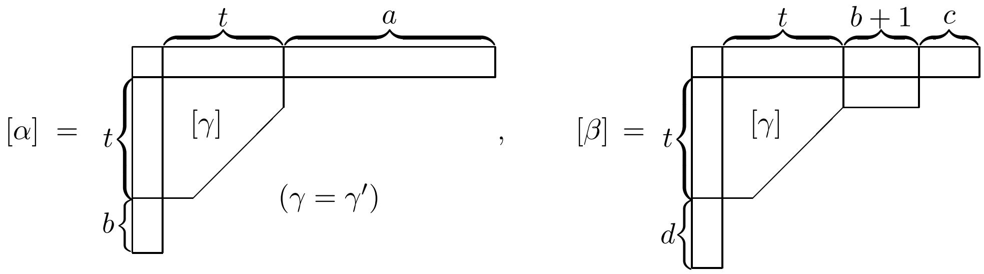


Рис. 4.1.

Здесь $h^\alpha_{11} = 2t + a + b + 1$, $h^\alpha_{12} = 2t + a$, $h^\beta_{11} = 2t + b + c + d + 2$. Следовательно, по (4.7)

$$a = b + c + d + 2, \tag{4.8}$$

а по (4.5) и (4.8)

$$\varepsilon = (-1)^{a+b+1} = (-1)^{c+d+1}. \tag{4.9}$$

Согласно (4.4)

$$d(\gamma) \geq 2 \ \text{ и, в частности, } \ t \geq 2 \ \text{ и } \ \gamma_2 \geq 2. \tag{4.10}$$

Используя рис. 4.1 и (4.5), подсчитаем длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$, которые будут фигурировать в последующих рассуждениях. В первую очередь нас будут интересовать длины крюков H^α_{13} и H^α_{21} (среди которых должен быть третий по длине крюк в $[\alpha]$) и крюков H^β_{12} и H^β_{21} (среди которых должен быть второй по длине крюк в $[\beta]$). Имеем:

$$\begin{array}{ll}
\underline{h^\alpha_{13} = \gamma_2 + t + b + c + d + 1}, & \underline{h^\beta_{12} = 2t + b + c + 1}, \\
h^\alpha_{14} = \gamma_3 + t + b + c + d, & h^\beta_{13} = \gamma_2 + t + b + c, \\
h^\alpha_{21} = 2t + b, & \underline{h^\beta_{21} = 2t + b + d + 1}, \\
h^\alpha_{31} = \gamma_2 + t + b - 1, & h^\beta_{31} = \gamma_2 + t + d - 1, \\
h^\alpha_{22} = 2t - 1, & h^\beta_{22} = 2t + b.
\end{array}$$

Пусть $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ — множество всех длин крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$, причём

$$m_1 > m_2 > m_3 > \ldots .$$

Тогда $m_1 = h^\alpha_{11}$, $m_2 = h^\alpha_{12} = h^\beta_{11}$ и, как видно из списка длин крюков,

$$m_3 \in \{h^\alpha_{13}, h^\beta_{12}, h^\beta_{21}\}, \ \text{ и поэтому } \ \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) \subseteq \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}, H^\beta_{21}\}.$$

Диаграммы разбиений α^{13}, β^{12} и β^{21} изобразим на рис. 4.2, где $\mu = \gamma^{11}$.

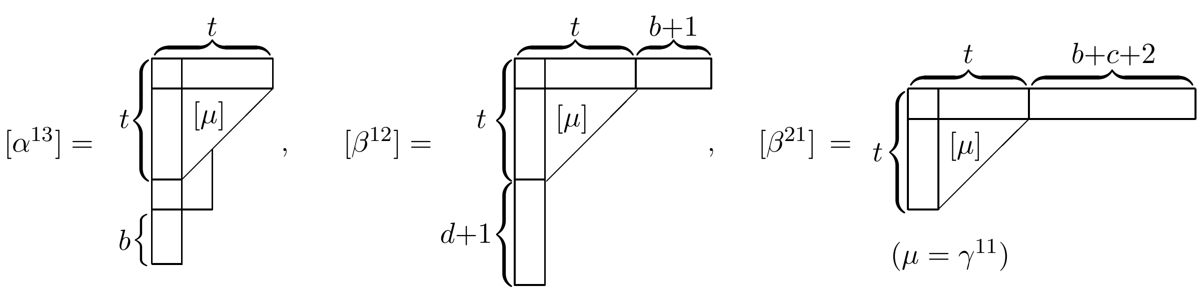


Рис. 4.2.

Мы видим, что разбиения α^{13} и β^{21} не самоассоциированы, а β^{12} самоассоциировано если и только если $b = d$. Отсюда и из предложения 3.4 следует, что

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) \in \{\, \{H^\beta_{12}\}, \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}, \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{21}\}, \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}, H^\beta_{21}\} \,\}. \tag{4.11}$$

Согласно (4.11) возможны лишь следующие четыре случая.

Случай 4.1. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^\beta_{12}\}$.

Тогда по предложению 3.4 $\beta^{12} = (\beta^{12})'$ и, следовательно, $b = d$. Кроме того, так как h^β_{12} больше, чем h^β_{21}, то $c > d$. Таким образом,

$$b = d < c. \tag{4.12}$$

Из списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ видно, что $h^\alpha_{21} < h^\beta_{21}$ и $h^\beta_{13} < h^\alpha_{13}$, и поэтому

$$m_4 \in \{h^\alpha_{13}, h^\beta_{21}\} \ \text{ и, значит, } \ \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_4) \subseteq \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{21}\}.$$

Поскольку разбиения α^{13} и β^{21} не самоассоциированы, то по предложению 3.4 отсюда следует, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_4) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{21}\}$. Но тогда по предложению 3.7 для $\widetilde{\alpha} = \alpha^{13}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{21}$ должно быть выполнено одно из его утверждений (а)–(г). Легко проверить (см. рис. 4.2 и разд. 2), что утверждения (а)–(в) здесь противоречивы, а утверждение (г) может быть выполнено лишь при γ, совпадающем с Δ_l, Σ_l или $2.\Sigma_l$ (т. е. при $k = 0$), причём тогда должно быть $\beta^{21} = \gamma + (4)$, $\alpha^{13} =' \gamma + (b+1, t+1-\gamma_2)$ и, следовательно,

$$b + c + 2 = 4 \ \text{ и } \ (b+1, t+1-\gamma_2) = \begin{cases} (2,2) & \text{при } \ \gamma = \Delta_l, \\ (3,1) & \text{при } \ \gamma = \Sigma_l, \\ (1,3) & \text{при } \ \gamma = 2.\Sigma_l. \end{cases} \tag{4.13}$$

Предположим сначала, что $\gamma = \Delta_l$ ($t = l \geq 2$ по (4.10)). Тогда по (4.13) находим: $b+c+2 = 4$ и $(b+1, t+1-\gamma_2) = (2,2)$, откуда $b = c = 1$ в противоречие с (4.12).

Пусть $\gamma = \Sigma_l$ ($t = 2l$, $l \geq 1$ по (4.10)). Тогда по (4.13) находим: $b+c+2 = 4$ и $(b+1, t+1-\gamma_2) = (3,1)$, откуда $b = 2$ и $c = 0$ в противоречие с (4.12).

Пусть, наконец, $\gamma = 2.\Sigma_l$ ($t = 2l+3$, $l \geq 1$ по (4.10)). Тогда по (4.13) $b + c + 2 = 4$ и $(b+1, t+1-\gamma_2) = (1,3)$, откуда и из (4.12), (4.8) и (4.9) находим: $b = d = 0$, $c = 2$, $a = 4$, $\varepsilon = -1$ по (4.9), и рис. 4.1 принимает следующий вид:

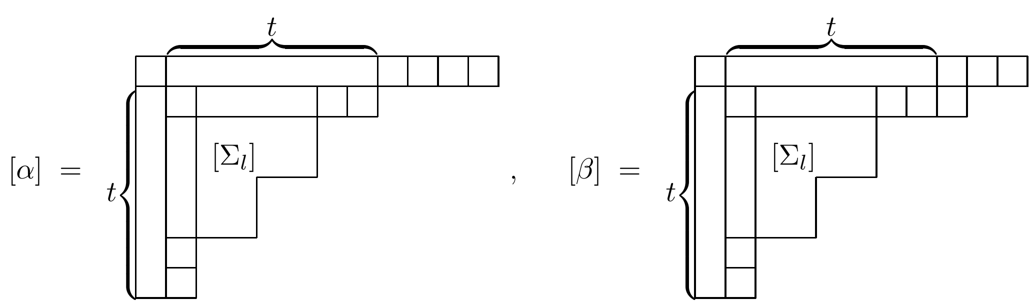


Рис. 4.3.

Мы видим, что в этом случае

$$\underline{\alpha = \Sigma_{l+2} + (4), \ \beta = \Sigma_{l+2} + (3,1), \ \varepsilon = -1,}$$

т. е. $\alpha, \beta, \varepsilon$ удовлетворяют заключению гипотезы A, а это противоречит (4.1).

Случай 4.1 противоречив.

Случай 4.2. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}$ (следовательно, $c > d$).

Тогда по предложению 3.7 для $\widetilde{\alpha} = \alpha^{13}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из его утверждений (а)–(г), что, как легко проверить (см. рис. 4.2 и разд. 2), противоречиво.

Случай 4.3. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{21}\}$ (следовательно, $d > c$).

Тогда $\gamma_2 + t + b + c + d + 1 = 2t + b + d + 1$, откуда $\gamma_2 = t - c$. Положим

$$\widetilde{\alpha} := (\alpha^{13})' = \gamma + (b+1, t+1-\gamma_2) = \gamma + (b+1, c+1) \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta} := \beta^{21} = \gamma + (b+c+2).$$

По предложению 3.7 для $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ должно быть выполнено одно из его утверждений (а)–(г). Легко проверить (см. рис. 4.2 и разд. 2), что утверждения (а)–(в) здесь противоречивы, а утверждение (г) может выполняться лишь в случае, когда γ совпадает с Δ_l, Σ_l или $2.\Sigma_l$ (и тогда $(b+1, c+1)$ совпадает с $(2,2)$, $(3,1)$, или $(1,3)$ соответственно). Рассмотрим отдельно эти возможности для γ.

Случай 4.3.1. Пусть $\gamma = \Delta_l$. Тогда $t = l \geq 2$ по (4.10), $(b+1, c+1) = (2,2)$, $b+c+2 = 4$, откуда $b = c = 1$. Кроме того, $d \geq c+1 \geq 2$. При этих данных мы можем уточнить таблицу длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$$\begin{array}{ll}
h^{\alpha}_{13} = 2t + d + 2, & h^{\beta}_{12} = 2t + 3, \\
\underline{h^{\alpha}_{14} = 2t + d}, & h^{\beta}_{13} = 2t + 1, \\
h^{\alpha}_{21} = 2t + 1, & h^{\beta}_{21} = 2t + d + 2, \\
 & h^{\beta}_{31} = 2t + d - 2, \\
 & h^{\beta}_{22} = 2t + 1.
\end{array}$$

Если $d \neq 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+d) = \{H^{\alpha}_{14}\}$, и по предложению 3.4 должно быть $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, но это неверно. Если же $d = 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+d) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{12}\}$, и тогда по предложению 3.7 для $(\alpha^{14}, \beta^{12})$ ($[\alpha^{14}]$ получается из $[\alpha^{13}]$ удлинением третьего столбца до величины $\gamma_2 + 1$) должно быть выполнено одно из его утверждений (а)–(г) на месте (α, β), а это, как легко проверить (см. рис. 4.2 и разд. 2), противоречиво ($\alpha^{14} = \Delta_l + (2,2,2)$, $\beta^{12} = (\Delta_l + (2)) * (1^4)$).

Случай 4.3.2. Пусть $\gamma = \Sigma_l$. Тогда $t = 2l$, $l \geq 1$ по (4.10), и $(b+1, c+1) = (3,1)$, откуда $b = 2$ и $c = 0$ (см. рис. 4.4 при $l = 2$). Кроме того, $d \geq c+1 = 1$.

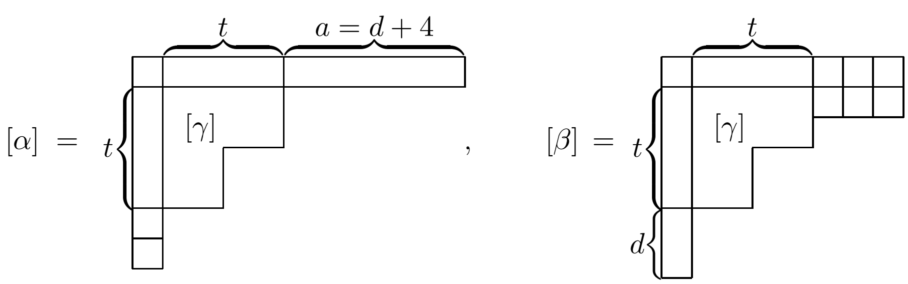


Рис. 4.4.

Таблица длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ здесь такова:

$$\begin{array}{ll}
h^{\alpha}_{13} = 2t + d + 3, & h^{\beta}_{12} = 2t + 3, \\
\underline{h^{\alpha}_{14} = 2t + d}, & h^{\beta}_{13} = 2t + 2, \\
h^{\alpha}_{15} = 2t + d - 1, & h^{\beta}_{14} = 2t - 1, \\
h^{\alpha}_{21} = 2t + 2, & h^{\beta}_{21} = 2t + d + 3, \\
h^{\alpha}_{31} = 2t + 1, & h^{\beta}_{31} = 2t + d - 1, \\
h^{\alpha}_{22} = 2t - 1, & h^{\beta}_{22} = 2t + 2, \;\; h^{\beta}_{23} = 2t + 1, \\
h^{\alpha}_{32} = 2t - 2, & h^{\beta}_{24} = 2t - 2, \;\; h^{\beta}_{32} = 2t - 2.
\end{array}$$

Если $d > 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+d) = \{H^{\alpha}_{14}\}$, и по предложению 3.4 должно быть $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, что неверно.

Если же $d = 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + d) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{12}\}$, и тогда по предложению 3.7 для $(\alpha^{14}, \beta^{12})$ должно быть выполнено одно из его утверждений (а)–(г) на месте $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, а это противоречиво, так как (см. рис. 4.2, 4.4 и разд. 2) $\alpha^{14} = \Sigma_l + (3, 1, 3)$, $\beta^{12} = (\Sigma_l + (3)) * (1^4)$ (полезно также сделать рисунки при $l = 1$ и при $l = 3$).

Если $d = 2$, то $a = 6$, и тогда, как видно из рис. 4.4,

$$\underline{\alpha = 2.\Sigma_l + (4), \quad \beta = 2.\Sigma_l + (1, 3) \ \text{ и } \ \varepsilon = (-1)^{b+d+1} = -1.}$$

Следовательно, для $\alpha, \beta, \varepsilon$ справедлива гипотеза А, а это противоречит (4.1).

Если же, наконец, $d = 1$, то, как видно из приведённой выше таблицы длин крюков, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t) = \{H^{\alpha}_{15}, H^{\beta}_{31}\}$, но тогда по предложению 3.7 для $(\alpha^{15}, \beta^{31})$ должно быть выполнено одно из его утверждений (а)–(г) на месте $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, а это противоречиво, так как (см. рис. 4.4 и 4.2) $(\alpha^{15})' = \Sigma_l + (3, 1, 3, 1)$ и $\beta^{31} = \Sigma_l + (4, 4)$.

Случай 4.3.3. Пусть $\gamma = 2.\Sigma_l$. Тогда $t = 2l + 3$ и $(b + 1, c + 1) = (1, 3)$ (см. разд. 2), откуда $b = 0$ и $c = 2$ (см. рис. 4.5). Кроме того, $d \geq c + 1 = 3$.

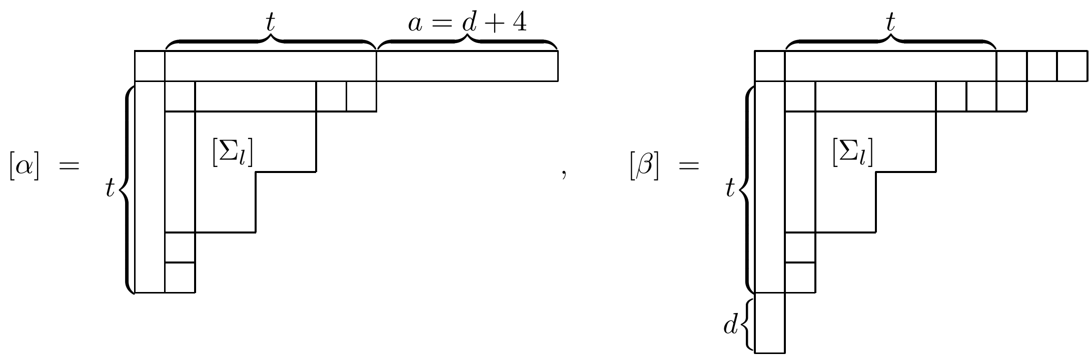


Рис. 4.5.

Таблица длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$ здесь такова:

$$\begin{array}{ll}
h^{\alpha}_{13} = 2t + d + 1, & h^{\beta}_{12} = 2t + 3, \\
\underline{h^{\alpha}_{14} = 2t + d}, & h^{\beta}_{13} = h^{\beta}_{22} = 2t, \\
h^{\alpha}_{15} = 2t + d - 3, & h^{\beta}_{21} = 2t + d + 1, \\
h^{\alpha}_{21} = 2t, & h^{\beta}_{31} = 2t + d - 3.
\end{array}$$

Если $d > 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + d) = \{H^{\alpha}_{14}\}$, и по предложению 3.4 должно быть $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, что неверно.

Если же $d = 3$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t + d) = \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{12}\}$, и тогда по предложению 3.7 для $(\alpha^{14}, \beta^{12})$ должно быть выполнено одно из его утверждений (а)–(г) на месте $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, а это, как легко проверить (см. рис. 4.5 и разд. 2), противоречиво.

Таким образом, случай 4.3 невозможен.

Случай 4.4. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$ (следовательно, $c = d$).

Тогда $m_3 = 2t + b + c + 1 = \gamma_2 + t + b + d + 1$, откуда и из (4.10) следует, что

$$\gamma_2 = t - c = t - d \geq 2. \tag{4.14}$$

Кроме того, по (4.9) $\varepsilon = -1$ и по предложению 3.6(2) из (4.3) получаем:

$$|\chi^{\alpha^{13}}| \text{ и } |\chi^{\beta^{12}} \pm \chi^{\beta^{21}}| \text{ равны на } S^{\delta}_{n-m_3}, \text{ где } \delta = (-1)^{m_3+1}\varepsilon = (-1)^{b+c+1}. \tag{4.15}$$

Попытаемся упростить соотношение (4.15) с помощью предложения 3.6. Для этого, используя рис. 4.2 и значение γ_2 из (4.14), составим следующий список длин крюков в $[\alpha^{13}]$, $[\beta^{12}]$ и $[\beta^{21}]$:

в $[\alpha^{13}]$:	в $[\beta^{12}]$:	в $[\beta^{21}]$:
$h_{11} = 2t + b$,	$h_{11} = 2t + b + c + 1$,	$h_{11} = 2t + b + c + 1$,
$\underline{h_{12} = 2t - 1}$,	$\underline{h_{12} = 2t + b - c - 1}$,	$h_{12} = 2t + b$,
$h_{13} = \gamma_3 + t - 3$,	$h_{13} = \gamma_3 + t + b - 2$,	$\underline{h_{13} = \gamma_3 + t + b + c - 1}$,
$\underline{h_{21} = 2t + b - c - 1}$,	$\underline{h_{21} = 2t - 1}$,	$h_{21} = 2t - c - 2$.
$h_{22} = 2t - c - 2$;	$h_{22} = 2t - 2c - 3$;	$h_{22} = 2t - 2c - 3$.

В дальнейших рассуждениях будут фигурировать следующие обозначения. Пусть

$$\{r_1, r_2, \ldots\} \text{ — множество всех длин крюков в } [\alpha^{13}],\ [\beta^{12}] \text{ и } [\beta^{21}], \text{ причём } r_1 > r_2 > \ldots .$$

Из списка длин крюков видно, что $r_1 = 2t+b+c+1 = h_{11}^{\beta^{12}} = h_{11}^{\beta^{21}}$, $r_2 = 2t+b = h_{11}^{\alpha^{13}} = h_{12}^{\beta^{21}}$ и r_3 находится среди (подчёркнутых в таблице) чисел

$$h_{12}^{\alpha^{13}} = h_{21}^{\beta^{12}} = 2t-1,\ \ h_{21}^{\alpha^{13}} = h_{12}^{\beta^{12}} = 2t+b-c-1,\ \ h_{13}^{\beta^{21}} = \gamma_3 + t + b + c - 1.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) \text{ есть объединение некоторых из множеств} \\ \{H_{12}^{\alpha^{13}}, H_{21}^{\beta^{12}}\}, \{H_{21}^{\alpha^{13}}, H_{12}^{\beta^{12}}\}, \{H_{13}^{\beta^{21}}\} \text{ и отлично от } \{H_{13}^{\beta^{21}}\} \end{gathered} \tag{4.16}$$

(если оно равно $\{H_{13}^{\beta^{21}}\}$, то по предложению 3.4 из (4.15) следует, что $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ равно 0 на S_{n-r}^{σ}, где $\sigma = (-1)^{r_3+1}\delta$, в противоречие с тем, что $(\beta^{21})^{13}$ не самоассоциировано).

Случай 4.4.1. Пусть $r_3 \neq 2t-1$ и, следовательно, по (4.16)

$$\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) \in \{\{H_{21}^{\alpha^{13}}, H_{12}^{\beta^{12}}\}, \{H_{21}^{\alpha^{13}}, H_{12}^{\beta^{12}}, H_{13}^{\beta^{21}}\}\} \ \text{ и } \ r_3 = 2t+b-c-1. \tag{4.17}$$

Диаграммы разбиений $(\alpha^{13})^{21}$, $(\beta^{12})^{12}$ и $(\beta^{21})^{13}$ изобразим на рис. 4.6.

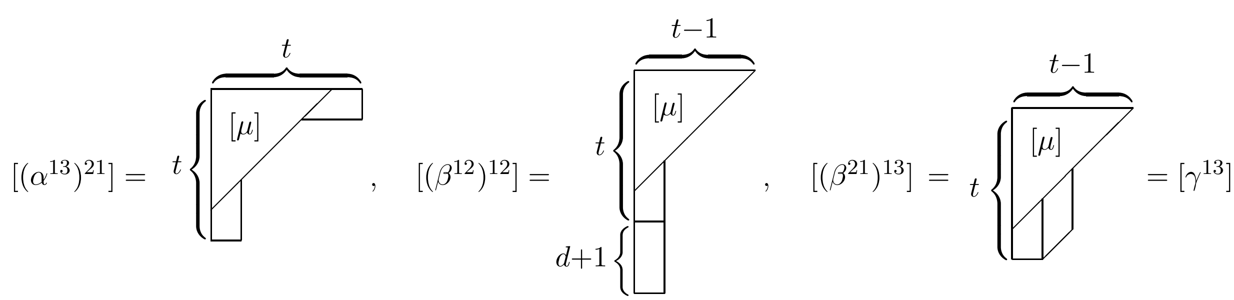


Рис. 4.6.

Если $\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) = \{H_{21}^{\alpha^{13}}, H_{12}^{\beta^{12}}\}$, то по предложению 3.6(1) из (4.15) следует, что

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{21}}| \ \text{ и } \ |\chi^{(\beta^{12})^{12}}| \ \text{ равны на } \ S_{n-m_3-r_3}^{\sigma}, \ \text{ где } \sigma = (-1)^{r_3+1}\delta = -1.$$

Так как по предложению 1.1(4) $\chi^{(\alpha^{13})^{21}}$ исчезает на $S_{n-m_3-r_3}^{\sigma} = S_{n-m_3-r_3}^{-}$, то отсюда следует, что $\chi^{(\beta^{12})^{12}}$ также исчезает на $S_{n-m_3-r_3}^{-}$. Но тогда по предложению 1.1(4) $\beta^{12})^{12}$ должно быть самоассоциировано, что (см. рис. 4.6) противоречиво.

Следовательно, $\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) = \{H_{21}^{\alpha^{13}}, H_{12}^{\beta^{12}}, H_{13}^{\beta^{21}}\}$. Тогда по предложению 3.6(2) из (4.15) получаем:

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{21}}| \ \text{ и } \ |\chi^{(\beta^{12})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}| \ \text{ равны на } \ S_{n-m_3-r_3}^{-}. \tag{4.18}$$

По предложению 1.1(4) $\chi^{(\alpha^{13})^{21}}$ исчезает на $S^-_{n-m_3-r_3}$. Следовательно, по (4.18) $\chi^{(\beta^{12})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}$ также исчезает на $S^-_{n-m_3-r_3}$. Но тогда $\chi^{(\beta^{12})^{12}}$ и $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ пропорциональны на $S^-_{n-m_3-r_3}$, а это противоречит предложению 3.1, что видно из рис. 4.6.

Случай 4.4.1 противоречив.

Теперь мы должны рассмотреть случаи, в которых $r_3 = 2t-1$.

Случай 4.4.2. Пусть $r_3 = 2t-1 \neq 2t+b-c-1$ (следовательно, $b<c$). Тогда из (4.16) следует, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) \in \{\{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}\}, \{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}, H^{\beta^{21}}_{13}\}\}.$$

Если $\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) = \{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}\}$, то, как видно из списка длин крюков, $r_4 \in \{2t+b-c-1, \gamma_3+t+b+c-1\}$ и, следовательно,

$$\mathrm{H}^{\alpha^{13},\beta^{12},\beta^{21}}(r_4) \in \{\{H^{\alpha^{13}}_{21}, H^{\beta^{12}}_{12}\}, \{H^{\alpha^{13}}_{21}, H^{\beta^{12}}_{12}, H^{\beta^{21}}_{13}\}\} \quad \text{и} \quad r_4 = 2t+b-c-1.$$

Но это по существу совпадает с (4.17), и, применив здесь рассуждения из случая 3.1 (неважно, совпадает ли $2t+b-c-1$ с r_3 или с r_4), мы получим противоречие.

Следовательно, $\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) = \{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}, H^{\beta^{21}}_{13}\}$. Тогда $r_3 = 2t-1 = \gamma_3+t+b+c-1$ и из (4.15) по предложению 3.6(2) получаем:

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}| \ \text{ и } \ |\chi^{(\beta^{12})^{21}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}| \ \text{ равны на } \ S^{\sigma}_{n-m_3-r_3}, \ \text{ где } \sigma = (-1)^{r_3+1}\delta = \delta = (-1)^{b+c+1},$$

и, так как $(\alpha^{13})^{12} = ((\beta^{12})^{21})'$ (см. рис. 4.7 ниже),

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}| \ \text{ и } \ |\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}| \ \text{ равны на } \ S^{\sigma}_{n-m_3-r_3}.$$

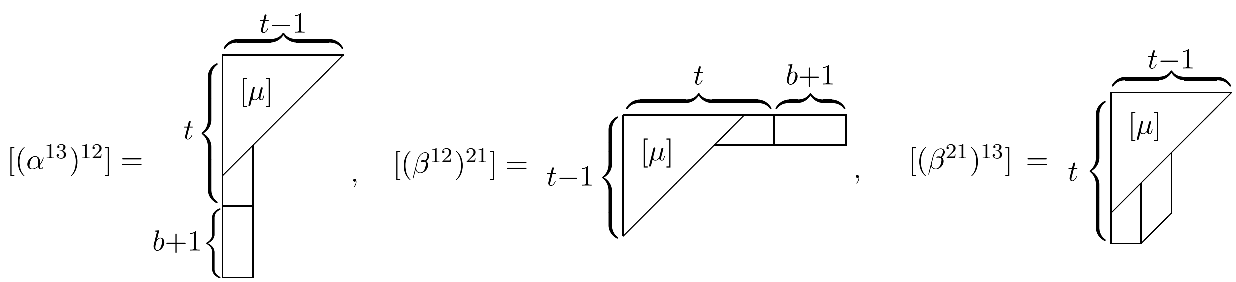


Рис. 4.7.

Отсюда согласно следствию предложения 3.2 следует, что справедливо одно из утверждений:

(А) $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ исчезает на $S^{\sigma}_{n-m_3-r_3}$,

(Б) $|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}|$ и $|\chi^{(\beta^{21})^{13}}|$ равны на $S^{\sigma}_{n-m_3-r_3}$.

Утверждение А противоречиво по предложению 1.1(4), так как $(\beta^{21})^{13} \neq ((\beta^{21})^{13})'$.

Предположим, что верно утверждение (Б) (в частности, $\chi^{(\alpha^{13})^{12}}$ и $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $S^{\sigma}_{n-m_3-r}$). Тогда по предложению 3.1 и условию А для $\widetilde{\alpha} = (\alpha^{13})^{12}$ и $\widetilde{\beta} = (\beta^{21})^{13}$ выполнено одно из утверждений (а)–(г) предложения 3.7. Легко проверить (см. рис. 4.7 и разд. 2), что утверждения (а)–(в) здесь противоречивы, а утверждение (г) может быть выполнено лишь при μ, совпадающем с Δ_l, Σ_l или $2.\Sigma_l$, причём в последнем случае должно быть:

$$t-\mu_1+b+1 = 4 \ \text{ и } \ (t-\mu_1, \gamma_2-\mu_2) = \begin{cases} (2.2) & \text{при } \ \mu = \Delta_l, \\ (3.1) & \text{при } \ \mu = \Sigma_l, \\ (1.3) & \text{при } \ \mu = 2.\Sigma_l. \end{cases} \tag{4.19}$$

Предположим, что $\mu = \Delta_l$ ($l \geq 1$ по (4.10)). Тогда $\mu_1 = l$ и по (4.19) имеем $t-\mu_1+b+1 = 4$, $t-\mu_1 = 2$ и $\gamma_2-\mu_2 = 2$. Следовательно, $b=1$, $\gamma_1 = t = \mu_1+2 = l+2$, $\gamma_2 = \mu_1+1 = l+1$,

$\gamma_i = \mu_{i-1} + 1 = l + i - 1$ при $1 \le i \le t$ ($\gamma_t = \mu_{t-1} + 1 = 1$), т. е. $\gamma = \Delta_{l+2}$. Отсюда и из (4.14) следует, что $c = d = t - \gamma_2 = 1$. Таким образом, $\gamma = \Delta_{l+2}$, $b = c = d = 1$, $a = 5$ и $\varepsilon = -1$ по (4.9). Но теперь, очевидно,

$$\underline{\alpha = \Delta_{l+3} + (4),\ \beta = \Delta_{l+3} + (2,2),\ \varepsilon = -1,}$$

т. е. $\alpha, \beta, \varepsilon$ удовлетворяют гипотезе A, а это противоречит (4.1).

Предположим, что $\mu = \Sigma_l$. Ввиду (4.10) $l \ge 1$. Тогда $\mu_1 = 2l$, и по (4.19) имеем $t - \mu_1 + b + 1 = 4$, $t - \mu_1 = 3$ и $\gamma_2 - \mu_2 = 1$. Следовательно, $b = 0$, $\gamma_1 = t = \mu_1 + 3 = 2l + 3$ и $\gamma_2 = \mu_1 + 1 = 2l + 1$, т. е. $\gamma = 2.\Sigma_l$. Отсюда и из (4.14) следует, что $c = d = 2$ и $a = 6$. Таким образом,

$$\alpha = \Sigma_{l+2} + (6) \text{ и } \ \beta = (\Sigma_{l+2} + (3,1)) * (1^2).$$

Легко представить себе диаграммы этих разбиений и вычислить следующие длины крюков:

$$h^\alpha_{13} = 2t+3,\ h^\alpha_{14} = 2t+2,\ h^\alpha_{21} = 2t,\ \ h^\beta_{12} = h^\beta_{21} = 2t+3,\ h^\beta_{13} = h^\beta_{22} = 2t,\ h^\beta_{31} = 2t+3.$$

Отсюда видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+2) = \{H^\alpha_{14}\}$, а из этого равенства и предложения 3.4 следует, что должно быть $\alpha^{14} = (\alpha^{14})'$, а это противоречиво.

Предположим, что $\mu = 2.\Sigma_l$ ($l \ge 0$). Тогда $\mu_1 = 2l + 3$ и по (4.19) имеем $t - \mu_1 + b + 1 = 4$, $t - \mu_1 = 1$ и $\gamma_2 - \mu_2 = 3$. Следовательно, $b = 0$, $\gamma_1 = t = \mu_1 + 3 = 2l + 3$, $\gamma_2 = \mu_1 + 1 = 2l + 1$, т. е. $\gamma = 2.\Sigma_l$. Отсюда и из (4.14) следует, что $c = d = 2$ и $a = 6$. Таким образом,

$$\alpha = \Sigma_{l+2} + (6) \text{ и } \ \beta = (\Sigma_{l+2} + (3,1)) * (1^2).$$

Представив себе вид диаграмм этих разбиений, находим:

$$h^\alpha_{13} = 2t+5,\ h^\alpha_{14} = h^\alpha_{21} = 2t+2,\ h^\beta_{12} = h^\beta_{21} = 2t+4.$$

Отсюда видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+4) = \{H^\beta_{12}, H^\beta_{21}\}$, но это противоречит предложению 3.4.

Случай 4.4.3. Пусть $r_3 = 2t - 1 = 2t + b - c - 1$. Тогда $b = c$ и (так как в случае 4 $c = d$)

$$b = c = d. \tag{4.20}$$

Далее, из (4.16) следует, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) \in \{\{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}, H^{\alpha^{13}}_{21}, H^{\beta^{12}}_{12}\}, \{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}, H^{\alpha^{13}}_{21}, H^{\beta^{12}}_{12}, H^{\beta^{21}}_{13}\}\}.$$

Случай 4.4.3а. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) = \{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}, H^{\alpha^{13}}_{21}, H^{\beta^{12}}_{12}\}$.

Тогда по предложению 3.6(2) из (4.15) следует, что

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{12}} + \chi^{(\alpha^{13})^{21}}| \text{ и } |\chi^{(\beta^{12})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{12})^{21}}| \text{ равны на } S^\sigma_{n-m_3-r_3}, \text{ где } \sigma = (-1)^{r_3+1}\delta = -1.$$

Отсюда, из вида диаграмм на рис. 4.6 и 4.7, из (4.20) и предложения 1.1(3,4) получаем:

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}| \ \text{ и } \ |\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \pm \chi^{(\alpha^{13})^{12}}| \ \text{ равны на } \ S^-_{n-m_3-r_3}.$$

Отсюда следует, что

либо $|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}|$ равно 0 на $S^-_{n-m_3-r_3}$ и, следовательно, $(\alpha^{13})^{21}$ самоассоциировано по предложению 1.1(4), что противоречиво,

либо $|\chi^{(\alpha^{13})^{21}}|$ равно $|2\chi^{(\alpha^{13})^{21}}|$ на $S^-_{n-m_3-r_3}$ с тем же результатом.

Случай 4.4.3а противоречив.

Случай 4.4.3б. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha^{13},\alpha^{12},\beta^{21}}(r_3) = \{H^{\alpha^{13}}_{12}, H^{\beta^{12}}_{21}, H^{\alpha^{13}}_{21}, H^{\beta^{12}}_{12}, H^{\beta^{21}}_{13}\}$.

Тогда по предложению 3.6(2) из (4.15) получаем:

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{12}} + \chi^{(\alpha^{13})^{21}}| \ \text{ и } \ |\chi^{(\beta^{12})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{12})^{21}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}| \ \text{ равны на } \ S^\sigma_{n-m_3-r_3}, \text{ где } \sigma = -1.$$

Отсюда, из рис. 4.6 и 4.7, (4.20) и предложения 1.1(3,4) следует, что

$$|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}| \text{ и } |\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \pm \chi^{(\alpha^{13})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}| \text{ равны на } S^-_{n-m_3-r_3}.$$

Поэтому выполняется одно из следующих условий:

(б1) $|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}|$ и $|\chi^{(\beta^{21})^{13}}|$ равны на $S^-_{n-m_3-r_3}$,

(б2) $|\chi^{(\alpha^{13})^{12}}|$ и $|2\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}|$ равны на $S^-_{n-m_3-r_3}$.

Заметим, что условие (б1) совпадает с условием (Б), рассмотренным в случае 4.2, где и была доказана его противоречивость.

Предположим, что выполнено условие (б2) (в частности, $\chi^{(\alpha^{13})^{12}}$ и $2\chi^{(\alpha^{13})^{12}} \pm \chi^{(\beta^{21})^{13}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $S^-_{n-m_3-r_3}$). Тогда по следствию предложения 3.2 либо $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ исчезает на $S^-_{n-m_3-r_3}$, что противоречиво, либо $\chi^{(\alpha^{13})^{21}}$ и $\chi^{(\beta^{21})^{13}}$ пропорциональны или полупропорциональны на $S^-_{n-m_3-r_3}$. Однако последнее условие совпадает с условием (б1), противоречивость которого уже доказана. Случай 4.4.3б противоречив.

Таким образом, случаи 4.1—4.4 противоречивы.

Предложение 4.1 доказано.

5. Завершение доказательства теоремы А6

По условию теоремы А6 χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε, где $\varepsilon = \pm 1$ и выполнено условие А. Ввиду теоремы А5 мы можем предполагать, что

$$h_{11}^\alpha > h_{11}^\beta$$

и, следовательно, справедливо заключение предложения 4.1. Поскольку тогда $\alpha^{11} = (\alpha^{11})'$, то диаграмма $[\alpha]$ в этом случае имеет вид, изображённый на рис. 5.1, где $\gamma = \alpha^{11} = \gamma'$, $t = \gamma_1 = \gamma'{}_1$ и $\{a, b\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

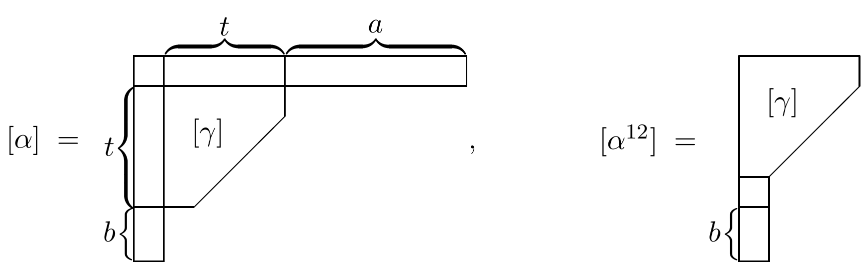


Рис. 5.1.

Поскольку h_2^α и α^2 определены (по предложению 4.1), то $\alpha \neq \alpha'$, и поэтому мы можем считать, что

$$a > b. \tag{5.1}$$

Тогда (см. рис. 5.1)

$$\alpha^2 = \alpha^{12} = \gamma * (1^{1+b}) = (\gamma + (1+b))'. \tag{5.2}$$

Желая доказать теорему А6 от противного, мы сделаем следующие два предположения, противоречащие её заключению. Во-первых, мы предположим, что

$$\text{тройка } (\alpha, \beta, \varepsilon) \text{ не удовлетворяет заключению гипотезы А.} \tag{5.3}$$

Во-вторых, так как по предложению 4.1 тройка $(\alpha^2, \beta^{11}, \delta)$, где $\delta = (-1)^{h_{11}^\beta + 1}\varepsilon$, удовлетворяет заключению гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, мы предположим (в противоречие с заключением теоремы А6), что эта тройка удовлетворяет заключению п. (1) гипотезы А на месте $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, т. е.

$$\delta = 1,\ \ \alpha^{12} =' \gamma + (3) \ \text{ и } \ \beta^{11} =' \gamma + (\widetilde{3}), \ \text{ где } \ \gamma \in \{2^k.(),\, 2^k.(1) \mid k \geq 0\}. \tag{5.4}$$

Кроме того, из (5.2) и второго равенства в (5.4) следует, что

$$b = 2. \tag{5.5}$$

Ввиду (5.4) мы должны рассмотреть следующие два случая.

Случай 5.1. Пусть $\gamma = 2^k.()$, $k \geq 0$.

Диаграммы $[\alpha]$ и $[\beta]$ имеют в этом случае вид, изображённый на рис. 4.2, где $\{c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ (на рисунке взято $k = 2$).

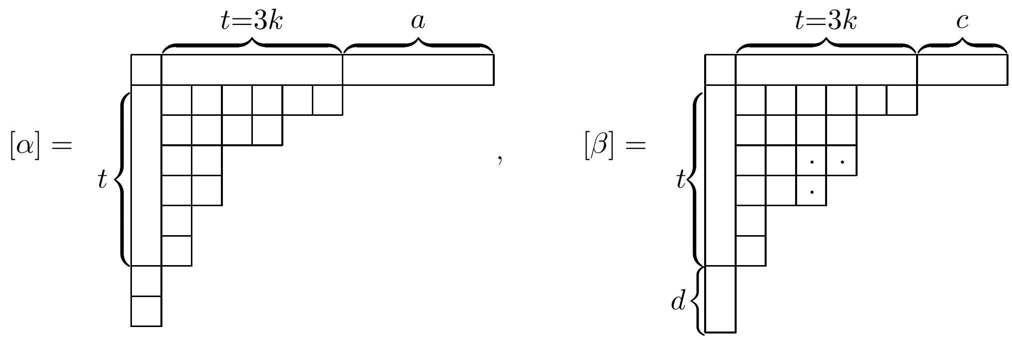


Рис. 5.2.

По предложению 3.8(1) $\beta \neq \beta'$. Поэтому без ограничения общности мы будем считать, что

$$c > d. \tag{5.6}$$

По предложению 4.1 $h_2^\alpha = h_{11}^\beta$, а так как $h_2^\alpha = h_{12}^\alpha = 2t + a$ и $h_{11}^\beta = 2t + c + d + 1$, то

$$a = c + d + 1. \tag{5.7}$$

Таким образом, строение диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ зависит всего лишь от двух неизвестных параметров c и d. Далее, так как $\delta = (-1)^{h_{11}^\beta + 1}\varepsilon = 1$ по (5.4), то $\varepsilon = (-1)^{a+1} = (-1)^{c+d}$. Согласно предложению 3.8(2)

$$d(\gamma) \geq 2, \text{ т. е. } k \geq 2 \text{ и } t \geq 6. \tag{5.8}$$

Пусть $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ — множество всех длин крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$, причём

$$m_1 > m_2 > m_3 > \ldots .$$

Тогда, очевидно, $m_1 = h_{11}^\alpha$ и $m_2 = h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$. Для определения m_3 подсчитаем длины крюков H_{13}^α и H_{21}^α (среди которых должен быть третий по длине крюк в $[\alpha]$) и крюков H_{12}^β и H_{21}^β (среди которых должен быть второй по длине крюк в $[\beta]$). Используя рис. 4.2, (5.7) и (5.8), находим:

$$\begin{aligned} h_{13}^\alpha &= 2t + c + d - 2, \qquad & h_{12}^\beta &= 2t + c, \\ h_{21}^\alpha &= 2t + 2, & h_{21}^\beta &= 2t + d. \end{aligned}$$

Поскольку $c > d$ по (5.6), то из этой таблицы видно, что

$$m_3 \in \{h_{13}^\alpha, h_{21}^\alpha, h_{12}^\beta\}, \quad \text{и поэтому } \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) \subseteq \{H_{13}^\alpha, H_{21}^\alpha, H_{12}^\beta\}. \tag{5.9}$$

Диаграммы разбиений α^{13}, α^{21} и β^{12}, соответствующих крюкам H_{13}^α, H_{21}^α и H_{12}^β, изобразим на рис. 5.3 и 5.4 при минимальном $k = 2$ (легко представить себе их вид при любом $k \geq 2$).

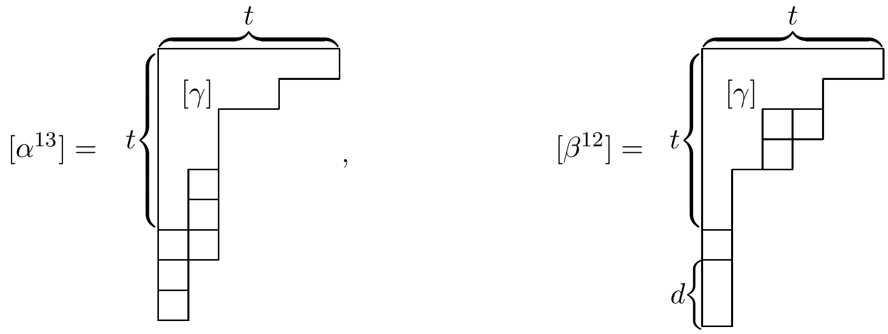


Рис. 5.3.

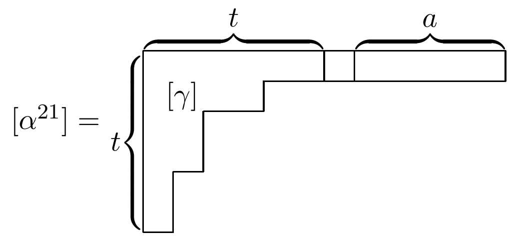


Рис. 5.4.

Мы видим, что разбиения α^{13}, α^{21} и β^{12} не самоассоциированы. Отсюда, из (5.9) и предложения 3.4 следует, что

$$|\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(m_3)| > 1. \tag{5.10}$$

Кроме того, согласно этому же предложению и (5.10)

$$\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(m_3) \text{ содержит как крюк из } [\alpha], \text{ так и крюк из } [\beta].$$

Но тогда утверждение (5.9) можно уточнить следующим образом:

$$\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(m_3) \in \{\{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}, \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}, \{H^{\alpha}_{13}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}\}. \tag{5.11}$$

Поэтому возможны лишь следующие три случая.

Случай 5.1а. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(m_3) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$.

Тогда $d = 2$ (что следует из равенства длин соответствующих крюков), и по предложению 3.7 для $\widetilde{\alpha} = \alpha^{13}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{12}$ должно быть верно одно из его утверждений (а)–(г). Однако (см. рис. 5.3, 5.4 и разд. 2) каждое из них противоречиво: утверждение (а) потому, что $\alpha^{13} \neq' \beta^{12}$, утверждение (б) и (в) потому, что ни α^{13}, ни β^{12} не самоассоциировано, утверждение (г) потому, что ни одно из разбиений α^{13} и β^{12} не представляется в виде $\Gamma + (4)$, где разбиение Γ самоассоциировано и не имеет крюков длины 4 (см. предложение 2.3).

Случай 5.1б. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(m_3) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$.

Тогда $c = 2$, и по предложению 3.7 для $\widetilde{\alpha} = \alpha^{21}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{12}$ должно быть справедливо одно из его утверждений (а)–(г). Однако противоречивость этих утверждений можно доказать с помощью тех же аргументов, что и в предыдущем случае.

Случай 5.1в. Пусть $\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(m_3) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}$.

Тогда из равенства длин соответствующих крюков следует, что $c + d - 2 = 2 = c$, откуда $c = d = 2$ в противоречие с (5.6).

Таким образом, случай 5.1 противоречив.

Случай 5.2. Пусть $\gamma = 2^k.(1),\ k \geq 0$.

Диаграммы α и β имеют в этом случае вид, изображённый на рис. 5.5, где $\{c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ (на рисунке взято $k = 1$).

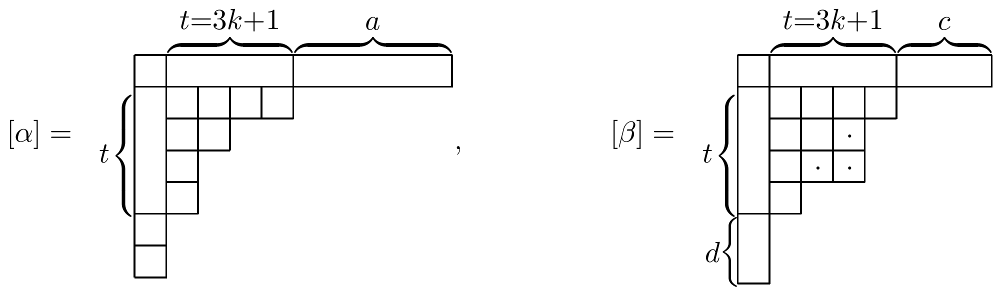


Рис. 5.5.

Дальнейшее доказательство почти дословно повторяет доказательство случая 5.1. Последовательно доказываются равенства:

$$c > d \ \text{ и } \ a = c + d + 1. \tag{5.12}$$

Далее, согласно предложению 3.8(1)

$$d(\gamma) \geq 2, \ \text{ т. е. } \ k \geq 1 \ \text{ и } \ t \geq 4.$$

Пусть $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\}$ — множество всех длин крюков диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ такое, что $m_1 > m_2 > m_3 > \ldots$. Тогда так же, как и в случае 5.1, $m_1 = h^\alpha_{11}$, $m_2 = h^\alpha_{12} = h^\beta_{11}$ и m_3 находится среди чисел

$$h^\alpha_{13} = 2t + c + d - 2, \qquad h^\beta_{12} = 2t + c,$$
$$h^\alpha_{21} = 2t + 2, \qquad h^\beta_{21} = 2t + d.$$

Диаграммы разбиений α^{13}, α^{21} и β^{12} изображены на рис. 5.6 при минимальном $k = 1$ (легко представить себе их вид при любом $k \geq 1$).

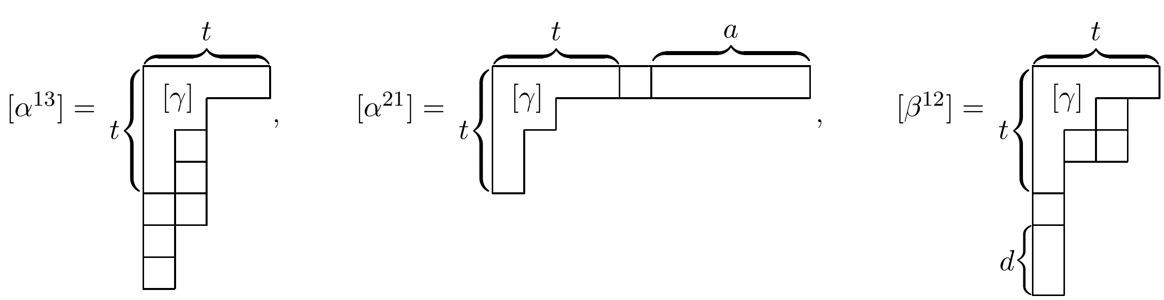


Рис. 5.6.

Заметим, что разбиения α^{13}, α^{21}, β^{12} не самоассоциированы. Теперь с помощью предложения 3.4 получаются утверждения (5.10) и (5.11):

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) \in \{\{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}, \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}, \{H^\alpha_{13}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}\}.$$

Далее почти так же, как и в случае 5.1, рассматриваются (с использованием рис. 5.6 и результатов разд. 2) случаи 5.2а ($\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^\alpha_{13}, H^\beta_{12}\}$), 5.2б ($\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$) и 5.2в ($\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m_3) = \{H^\alpha_{13}, H^\alpha_{21}, H^\beta_{12}\}$), которые оказываются противоречивыми.

Случай 5.2 противоречив.

Теорема A6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163.
2. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 58–68.
3. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. III // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 12–30.
4. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. IV // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 12–33.
5. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. V // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 13–34.
6. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
7. **Белоногов В. А.** О нулях в таблицах характеров групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 24–43.
8. **Белоногов В. А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.
9. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 380 с.
10. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison–Wesley, 1981. 510 c.
11. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 260 с.
12. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.
13. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
14. **Белоногов В. А.** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 13–32.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 18.06.2010

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542.52

О СТРОЕНИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ГРУППЕ[1]

И. А. Вакула

Доказано, что всякая конечная группа, изоспектральная знакопеременной группе A_n степени n, большей 21, имеет главный фактор, изоморфный знакопеременной группе A_k, где $k \leq n$ и полуинтервал $(k, n]$ не содержит простых чисел.

Ключевые слова: конечные группы, знакопеременные группы, спектр группы, изоспектральные группы, главные факторы.

I. A. Vakula. On the structure of finite groups isospectral to an alternating group.

It is proved that every finite group isospectral to an alternating group A_n of degree n greater than 21 has a chief factor isomorphic to an alternating group A_k, where $k \leq n$ and the half-interval $(k, n]$ contains no primes.

Keywords: finite groups, alternating groups, spectrum of a group, isospectral groups, chief factors.

Введение

В настоящей работе рассматриваются только конечные группы (далее группы). Изучаются те из них, множества порядков элементов которых такие же, как у знакопеременных групп A_n, где $n \geq 22$.

Если G — группа, то множество $\omega(G) = \{|g| \mid g \in G\}$ называется *спектром* группы G. Группа H называется *изоспектральной* группе F, если $\omega(H) = \omega(F)$. Наибольший интерес у исследователей вызывают группы, изоспектральные конечным простым группам. Группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если всякая группа, изоспектральная группе G, ей изоморфна. В работе В.Д. Мазурова [1] дан обзор результатов изучения распознаваемости групп. В списке нерешенных вопросов этого обзора под п. 2 значится следующий вопрос:

“Верно ли, что знакопеременная группа A_n при $n > 10$ распознаваема?”

Цель настоящей работы — продвинуться в доказательстве этой гипотезы.

Простым спектром $\pi(G)$ группы G называется множество простых делителей ее порядка. На множестве $\pi(G)$ определяется *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $GK(G)$, в котором две различные вершины p и q считаются смежными, если $pq \in \omega(G)$. Свойства этого графа во многом определяют распознаваемость группы. Знакопеременные группы A_n в проблеме распознавания по спектру простых групп занимают особое место. Это в первую очередь обусловлено тем, что граф Грюнберга — Кегеля группы A_n связен за исключением n, равных 4, p, $p+1$ или $p+2$, где p — простое число, большее трех. Более того, за исключением тех же случаев вершина 2 смежна в графе $GK(A_n)$ во всеми остальными вершинами.

Когда граф Грюнберга — Кегеля группы G несвязен, по теореме Грюнберга — Кегеля (см. [2, теорема A]) группа G либо изоморфна группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, либо содержит единственный неабелев композиционный фактор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам группы G. Распознаваемость простых знакопеременных групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля доказана в работах [3–5] с использованием теоремы Грюнберга — Кегеля.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07–01–00148).

Кокликой в графе называется подмножество множества его вершин, любые две из которых попарно не смежны. Если мощность некоторой коклики в графе $GK(G)$ не меньше трех, а вершина 2 не смежна хотя бы с одной вершиной этого графа, то по теореме А.В. Васильева [6] группа G имеет единственный неабелев композиционный фактор с некоторыми дополнительными спектральными свойствами. Однако теорема Грюнберга — Кегеля и теорема А.В. Васильева неприменимы для исследования распознаваемости групп A_n со связным графом Грюнберга — Кегеля.

Из результатов работы [5] следует, что группа, изоспектральная A_n и содержащая главный фактор, изоморфный A_n, сама изоморфна A_n. Основной результат настоящей работы для группы, изоспектральной группе A_n, гарантирует существование главного фактора, изоморфного знакопеременной группе степени, близкой к n.

Для действительного числа $x \geq 2$ через $pr(x)$ обозначим наибольшее простое число, не превосходящее x.

Теорема. *Пусть n — натуральное число, большее 21, и G — группа, изоспектральная группе A_n. Тогда любой главный ряд в группе G имеет фактор, изоморфный группе A_k, для некоторого k из $[pr(n), n]$. При этом ни один другой фактор этого ряда не содержит в своем спектре элемент $pr(n)$.*

1. Вспомогательные теоретико-числовые утверждения

Лемма 1 [5, лемма 1]. *Если s — натуральное число и $s \geq 15$, то среди чисел, удовлетворяющих неравенству $5s/8 < p \leq s - 4$ найдется по крайней мере одно простое число.*

Лемма 2 [7]. *Для любого натурального числа n, большего 118, отрезок $[n, 1.073n]$ содержит по крайней мере одно простое число.*

Упорядочим простые числа в порядке возрастания и через p_i обозначим i-е простое число. Для натурального числа n положим $\Pi_n = \{p_i \mid p_i \leq n\}$, $\Pi_n^- = \Pi_{n/2}$, $\Pi_n^+ = \Pi_n \setminus \Pi_n^-$.

Лемма 3. *Пусть n — натуральное число, большее 21. Тогда*

$$|\Pi_n^+| \geq \frac{0.366n}{\ln n}.$$

В частности, $|\Pi_n^+| \geq 3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для значений n из полуинтервала $[22, 10^7)$ доказываемое неравенство проверено непосредственно с использованием [8].

Пусть $n \geq 10^7$. В работе [9] дана оценка количества простых чисел в заданном отрезке $[m, n]$ натурального ряда, где $m < n$. Согласно этой оценке

$$|\Pi_n^+| \geq \frac{0.4\alpha n - \beta(n)}{\ln n},$$

где

$$0.4\alpha = 0.4 \ln\left(\frac{2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}}{30^{1/30}}\right) > 0.368$$

и

$$\beta(x) = \alpha\sqrt{x}(2.4 - \frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{5}{8\ln 6}\left(\ln^2 x + 2\ln^2 \frac{x}{2}\right) + \frac{5}{14}\left(\ln x + 7\ln \frac{x}{2}\right) + 5.$$

Нетрудно видеть, что для завершения доказательства достаточно установить неравенство $\beta(n) < 0.002n$ при $n \geq 10^7$. Для этого рассмотрим функцию $\beta(x)$ вещественного аргумента x. Непосредственно проверяется, что $\beta''(x) < 0 = (0.002x)''|_{x=10^7}$ при $x \geq 3$ и $\beta'(10^7) < 0.002 = (0.002x)'|_{x=10^7}$. Отсюда следует, что $\beta'(10^7) < 0.002$ на всем полуинтервале $[10^7, \infty)$. Также непосредственно проверяется, что $(0.002x)|_{x=10^7} = 2 \cdot 10^4 > \beta(10^7)$, откуда с учетом предыдущего получаем, что $\beta(x) < 0.002x$ при $x \geq 10^7$. $\square$

Для взаимно простых натуральных чисел a и b, первое из которых больше единицы, через $o_b(a)$ обозначим порядок числа a по модулю числа b, т. е. наименьшее натуральное число d такое, что b делит $a^d - 1$. Через $\varphi_k(x)$ обозначим k-й круговой многочлен над полем рациональных чисел.

Лемма 4. *Пусть a — натуральное число, большее* 1.

1. *Если q — нечетное простое число, взаимно простое с a, $m = o_q(a)$ и k — некоторое натуральное число, то $\varphi_k(a)$ делится на q в том и только в том случае, когда $k = mq^s$ для некоторого неотрицательного целого числа s.*

2. *Если m — натуральное число, большее* 6, *то $a^m - 1$ делится на простое число q такое, что $m = o_q(a)$ и $q \geq m + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 1 следует из [10, лемма IX.8.1, п. (1), пп. a)–d)].

Утверждение 2 представляет собой следствие из теоремы Жигмонди [11], за исключением неравенства $q \geq m + 1$. Для проверки последнего достаточно заметить, что q делит $a^{q-1} - 1$, следовательно, $o_q(a) \leq q - 1$. $\square$

Лемма 5. *Пусть k — натуральное число из отрезка* $[29, 700]$. *Тогда для любого элемента p из Π_k, множество Π_k^+ содержит по крайней мере два простых числа q_1 и q_2 такие, что каждое из чисел $\varphi_{a_1}(p)$ и $\varphi_{a_2}(p)$, где $a_1 = o_{q_1}(p)$ и $a_2 = o_{q_2}(p)$, имеет некоторый простой делитель, больший k.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем числа k и p. Пусть q — произвольное число из Π_k^+, положим $a = o_q(p)$. Основываясь на разложении $p^a - 1 = \prod_{d|a} \varphi_d(p)$, получаем, что если r — простой делитель числа $p^a - 1$, который не делит $p^b - 1$ ни при каком b таком, что $b|a$ и $b < a$, то $a = o_r(p)$. Если же при этом $r > k$, то для q найдено простое число, большее k, которое делит $\varphi_a(p)$.

Кратко опишем алгоритм проверки утверждения, который был реализован и выполнен с помощью системы ГАП (см. [8]). Первый цикл перебирает все $k \in [29, 700]$. Второй цикл, вложенный в первый, перебирает все $p \in \Pi_k$. Следующий вложенный цикл перебирает все числа q из Π_k^+. Полагаем $c = p^a - 1$, где $a = o_q(p)$. Чтобы не вводить дополнительных обозначений, будем считать c переменной в смысле императивного программирования. В цикле по всем делителям d числа a, отличным от a, и пока $c > 1$, присваиваем $c = c/(c, p^d - 1)$. Если на выходе из цикла получаем, что c равно 1, то переходим к следующему значению q, иначе переходим к следующему циклу. По всем $r \in \Pi_k$ присваиваем $c = c/r^b$, где r^b — максимальная степень числа r, делящая c. Если на выходе из цикла получаем, что c равно 1, то переходим к следующему значению q, в противном случае проверяем найдено ли ранее число q_1, если нет, то полагаем $q_1 = q$; если q_1 уже было ранее найдено, то проверяем найдено ли ранее число q_2, если нет, то полагаем $q_2 = q$. Если оба числа q_1 и q_2 найдены, то фиксируем этот факт для текущей пары k и p, выходим из цикла по всем q из Π_k^+ и переходим к следующей паре чисел k и p.

Описанный алгоритм находит искомые числа q_1 и q_2 для всех пар чисел $k \in [29, 700]$ и $p \in \Pi_k$. $\square$

Лемма 6. *Всякое натуральное число, большее девяти, либо просто, либо представимо в виде суммы попарно различных нечетных простых чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяется, что любое целое число из отрезка $[10, 48]$ либо просто, либо представимо в виде суммы попарно различных нечетных простых чисел, не превосходящих 20. Пусть m — натуральное число, большее 48. Положим $m_0 = m$. Из леммы 1 следует, что в полуинтервале $(5m_0/12 - 5/8, 2m_0/3 - 3]$ найдется некоторое простое число r_1. Положим $m_1 = m_0 - r_1$, имеем $m_1 < 7m_0/12 + 5/8$. На втором шаге число r_2, выбранное по аналогии с r_1, не превзойдет $2m_1/3 - 3$, при этом $2m_1/3 - 3 < 14m_0/36 - 31/12 < 15m_0/36 - 5/8 < r_1$. Продолжая этот процесс, на некотором i-м шаге получим разложение числа m на сумму попарно различных простых чисел $r_1, \ldots r_i$, больших 20, и числа m_i из отрезка $[16, 48]$. Если число m_i не является простым, то представив m_i в виде суммы попарно различных нечетных простых чисел, не превосходящих 20, получим разложение m на сумму попарно различных нечетных простых чисел. Предположим, что m_i — простое число. Если $m_i < 20$, то m_i отлично от всех r_k для $k \geq i-1$. Если $m_i \geq 20$, то $m_i \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $m_{i-1} > 48$. Тогда по крайней мере одно из чисел m_i или r_i больше 23. Следовательно, если $m_i = 23$, то $r_i > m_i$ и мы получаем искомое разложение. Пусть теперь $m_i > 23$. Поскольку $5m/12 - 5/8 < r_i$ и $m_i < 7m/12 + 5/8$, то $5/7m_i - 15/14 < r_i$. Поэтому достаточно убедиться, что m_i представимо в виде суммы простых чисел, меньших $5/7m_i - 15/14$. Следующие разложения удовлетворяют этому условию: $29 = 17+7+5$, $31 = 19+7+5$, $37 = 19+11+7$, $41 = 23+11+7$, $43 = 23+13+7$, $47 = 23+13+11$. □

Лемма 7. *Сумма $S(k)$ первых k простых чисел не меньше $k^2 + 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку i-е простое число при каждом $i > 1$ является нечетным, а при $i \geq 3$ больше предыдущего по крайней мере на два, имеем

$$S(k) \geq 2 + \sum_{i=2}^{k}(3 + 2(i-2)) = 2 + 3(k-1) + (k-1)(k-2) = k^2 + 1.$$ □

2. Вспомогательные теоретико-групповые утверждения

Лемма 8 [12, глава 2]. *Если F — группа Фробениуса с дополнением C нечетного порядка, то C — циклическая группа.*

Лемма 9 [5, лемма 2]. *Если группа Фробениуса FC с ядром F и циклическим дополнением $C = \langle c\rangle$ порядка n действует точно на векторном пространстве V ненулевой характеристики p, взаимно простой с порядком группы F, то минимальный полином элемента c на V равен $x^n - 1$. В частности, естественное полупрямое произведение VC содержит элемент порядка $p \cdot n$ и $\dim C_V(c) > 0$.*

Лемма 10. *Пусть группа $\langle g\rangle$ действует на группе $\langle h\rangle$, $|g| = q_1$ и $|h| = q_2^l$, где q_1 и q_2 — различные нечетные простые числа такие, что $m/2 < q_2$ и $q_1, q_2 \leq m$ для некоторого целого числа m, и l — натуральное число. Тогда группа $\langle g\rangle$ централизует группу $\langle h\rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $|Out(\langle h\rangle)| = q_1^{l-1}(q_1 - 1)$, число $(q_1 - 1)$ четно и $q_2 > (q_1 - 1)/2$, откуда $q_1 \notin \pi(Out(\langle h\rangle))$. Следовательно, g централизует $\langle h\rangle$. □

Лемма 11 [5, лемма 10]. *Пусть N — нормальная элементарная абелева p-подгруппа группы G, $K \cong G/N$, $G_1 = NK$ — естественное полупрямое произведение группы N на группу K. Тогда $\omega(G_1) \subseteq \omega(G)$.*

Лемма 12 [13, лемма 6]. 1. *Группа $A_m(q)$, где $m \geq 1$, содержит циклические подгруппы порядков $(q^m-1)/(m+1,q+1)$ и $q^{m-1}-1$ при $m \geq 2$.*

2. *Группа ${}^2A_m(q)$, где $m \geq 2$, содержит циклическую подгруппу порядка $(q^m-1)/(m+1,q+1)$ при четном m и циклическую подгруппу порядка $q^{m-1}-1$ при нечетном m.*

3. *Группа $B_m(q)$, где q нечетно и $m \geq 2$, содержит циклические подгруппы порядков $(q^m-1)/2$ и $q^{m-1}-1$.*

4. *Группа $C_m(q)$, где $m \geq 2$, содержит циклические подгруппы порядков $(q^m-1)/(2,q-1)$ и $q^{m-1}-1$.*

5. *Группа $D_m(q)$, где $m \geq 2$, содержит циклические подгруппы порядков $(q^{m-2}-1)$, $(q^{m-1}-1)/(2,q-1)$ и $(q^m-1)/f$, где f равно 4, если q нечетно и $m(q-1)/2$ четно, и $(2,q-1)$ — в противном случае.*

6. *Группа ${}^2D_m(q)$, где $m \geq 2$, содержит циклическую подгруппу порядка $(q^{m-1}-1)/f$, где f равно 4, если q нечетно и $(m-1)(q-1)/2$ четно, и $(2,q-1)$ — в противном случае. Если $m = 2^m \geq 4$, то группа ${}^2D_m(q)$ содержит циклическую подгруппу порядка $(q^{m-1}-1)/(2,q-1)$.*

3. Некоторые арифметические свойства простых групп

Следующий результат общеизвестен.

Лемма 13. *В группе A_n существует элемент, порядок a которого имеет вид $q_1^{s_1}q_2^{s_2}\dots q_m^{s_m}$, где q_1, $q_2, \dots, q_m$ — попарно различные простые числа, m и s_1, s_2, $\dots$, s_m — натуральные числа, в том и только в том случае, когда сумма всех чисел вида $q_i^{s_i}$ не превосходит n при нечетном a и не превосходит $n-2$ при четном a.*

Лемма 14. *Каждый нечетный элемент простого спектра группы $Out(P)$ внешних автоморфизмов любой известной простой группы P лежит в ее спектре или не превосходит $m/2$, где $m = \max_{p\in\pi(P)} p$.*

Доказательство. Если группа P абелева, то она изоморфна группе $\mathbb{Z}_r$ для некоторого простого числа r, при этом $Out(P) \cong \mathbb{Z}_{r-1}$. Поскольку $r-1$ — четное число, то все его нечетные простые делители не превосходят $(r-1)/2$, потому содержатся в Π_r^-.

Согласно [14, с. vii, табл. 1] простые знакопеременные группы и спорадические простые группы не имеют внешних автоморфизмов нечетного порядка.

Пусть теперь P — простая группа лиева типа. В соответствии с классификацией внешних автоморфизмов таких групп [15] порядок любого внешнего автоморфизма группы P равен произведению порядков некоторых диагонального, графового и полевого автоморфизмов. Непосредственно проверяется, что простые делители порядков диагональных и графовых автоморфизмов содержатся в спектре P. Согласно [14, с. xvi, табл. 5, 6], если f — порядок группы полевых автоморфизмов группы P, а p — характеристика группы P, то p^f-1 делит $|P|$. Группа полевых автоморфизмов группы P изоморфна группе $Aut(GF(p^f))$. Далее, $Aut(GF(p^f)) \leq Aut(GF(p^f)^*)$, в частности, $|Aut(GF(p^f))|$ делит $|Aut(GF(p^f))^*|$. Известно, что $|Aut(GF(p^f)^*)| = \varphi(p^f-1)$. Если $p^f-1 = r_1^{s_1}\dots r_l^{s_l}$ — разложение числа p^f-1 в произведение степеней попарно различных простых чисел $p_1, \dots, p_l$, то $\varphi(p^f-1) = (r_1-1)r_1^{s_1-1}\dots(r_l-1)r_l^{s_l-1}$. Если t — нечетный простой делитель числа f, то t делит $\varphi(p^f-1)$. При этом если t не лежит в $\pi(P)$, то t делит r_i-1 для некоторого i и, следовательно, не превосходит $m/2$. □

Лемма 15. *Пусть P — простая группа лиева типа. Пусть $d(P)$ и $N(P)$ — числа из записи порядка группы P в табл. 1. Тогда $d(P)^2$ делит $N(P)$, в частности, $d(P)$ делит $|P|$ и $\pi(N(P)) \subseteq \pi(P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно непосредственно убедиться, что $N(P)$ делится на четыре, поэтому следует рассматривать только случай, когда $d(P) > 2$.

Предположим сначала, что P изоморфна одной из групп $D_m(q)$ или ${}^2D_m(q)$, где $m \geq 4$. Тогда $d(P) = (4, q^m \pm 1)$. Из неравенства $d(P) > 2$ получаем, что $d(P) = 4$ и q нечетно. Из неравенства $m \geq 4$ следует, что $16|\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i} - 1)$. Следовательно, $d(P)^2|N(P)$.

Если группа P не изоморфна ни одной из групп $D_m(q)$ или ${}^2D_m(q)$, то $d(P)$ делит $q-1$ или $q+1$. Если $d(P) = (3, q \pm 1)$, то, как нетрудно видеть, $N(P)$ делится на $(q^2-1)^2$, а значит, и на $d(P)^2$. Поскольку $d(P) > 2$, остается рассмотреть случай, когда группа P изоморфна $A_m(q)$ или ${}^2A_m(q)$. В этом случае $m \geq 2$, поскольку $d(P) > 2$ и $d(P)|(m+1)$. Остается заметить, что $(q^2-1)(q^3-1)|N(A_m(q))$ и $(q^2-1)(q^3+1)|N({}^2A_m(q))$. Следовательно, $d(P)^2|N(P)$. □

Для натурального числа k через $\pi(k)$ обозначим множество всех его попарно различных простых делителей.

Лемма 16. *Пусть P — простая группа лиева типа характеристики p. Положим $m = \max\pi(P)$. Пусть r — отличный от p нечетный простой делитель порядка группы P такой, что $r \geq m/2$. Тогда $\varphi_a(p)|N(P)$, где $a = o_p(r)$, в частности, $\pi(\varphi_a(p)) \subseteq \pi(P)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $N(P)$ — число из записи порядка группы P в табл. 1. Поскольку $q^8 + q^4 + 1 = (q^{12} - 1)/(q^4 - 1)$, $q^k + 1 = (q^{2k} - 1)/(q^k - 1)$ для любого k, а также $(p^n - 1)/(p^k - 1) = \prod_{t|n, t\nmid k} \varphi_t(p)$, когда k делит n, то получаем разложение $N(P) = p^b \prod_{t \in T} \varphi_t(p)$, где b — некоторое натуральное число, а $T = T(P)$ — некоторое мультимножество натуральных чисел (множество, допускающее повторения).

Поскольку r делит $N(P)$ и отлично от p, r делит $\varphi_t(p)$ для некоторого t из T. По п. 1 леммы 4 для некоторого неотрицательного целого числа s имеем $t = o_p(r)r^s$. Покажем, что $s = 0$. По п. 2 леммы 4 число $\varphi_t(p)$ делится на простое число h такое, что $h \geq t + 1 \geq o_p(r)r^s + 1$. Число p меньше $2r$, поскольку $2r > m$. Следовательно, r не делит $p - 1$, откуда $o_p(r) \geq 2$. Таким образом, $h \geq 2r^s + 1$, при этом правая часть неравенства больше m, если $s \geq 1$. Учитывая неравенство $h \leq m$, заключаем, что $s = 0$. Отсюда $t = a$ и $\varphi_a(p)|N$, что влечет включение $\pi(\varphi_a(p)) \subseteq \pi(N)$. Ввиду леммы 15 получаем включение $\pi(N) \subseteq \pi(P)$, откуда $\pi(\varphi_a(p)) \subseteq \pi(P)$. □

Лемма 17. *Если n и k — натуральные числа такие, что $9 < n$ и $k < n$, то $\omega(A_n) \setminus \omega(A_k) \neq \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 6 существует разложение $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$, где r_1, r_2, $\ldots$, r_m — некоторые попарно различные нечетные простые числа. По лемме 13 число $r_1 r_2 \ldots r_m$ принадлежит разности $\omega(A_n) \setminus \omega(A_k)$. □

4. О старших кокликах графа Грюнберга-Кегеля

Пусть до конца этого раздела G — группа и $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_l = G$ — главный ряд $\mathcal{Q}$ группы G с факторами $K_i = G_{i+1}/G_i$.

Лемма 18. *Пусть q_1 и q_2 — две различные несмежные вершины графа $GK(G)$, для которых существуют такие неотрицательные целые числа t и s, что $t < s < l$, $q_1 \in \pi(K_t)$ и $q_2 \in \pi(K_s) \setminus \pi(G_{s-1})$. Тогда группа G содержит подгруппу Фробениуса F, ядро которой является силовской q_1-подгруппой группы G_{t+1}, а дополнение — силовской q_2-подгруппой группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P_1 — произвольная силовская q_1-подгруппа группы G_{t+1}. Пусть a — q_2-часть порядка группы G.

По лемме Фраттини $G = N_G(P_1)G_{t+1}$. Отсюда и из равенства $(|G_{t+1}|, q_2) = 1$ следует, что порядок силовской q_2-подгруппы группы $N_G(P_1)$ равен a. Другими словами, группа $N_G(P_1)$ содержит некоторую силовскую q_2-подгруппу P_2 группы G. Поскольку q_1 и q_2 не смежны в $GK(G)$, P_1P_2 — группа Фробениуса с ядром P_1 и дополнением P_2. □

Т а б л и ц а 1

Порядки $|P| = N(P)/d(P)$ групп P лиева типа

P		$N(P)$	$d(P)$
$A_m(q)$,	$m \geq 1$	$q^{m(m+1)/2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{i+1}-1)$	$(m+1, q-1)$
$B_m(q)$,	$m \geq 2$	$q^{m^2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{2i}-1)$	$(2, q-1)$
$C_m(q)$,	$m \geq 3$	$q^{m^2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{2i}-1)$	$(2, q-1)$
$D_m(q)$,	$m \geq 4$	$q^{m(m-1)}(q^m-1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$	$(4, q^m-1)$
$G_2(q)$		$q^6(q^6-1)(q^2-1)$	1
$F_4(q)$		$q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$	1
$E_6(q)$		$q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$	$(3, q-1)$
$E_7(q)$		$q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$	$(3, q-1)$
$E_8(q)$		$q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$	1
${}^2A_m(q)$,	$m \geq 2$	$q^{m(m+1)/2}\Pi_{i=1}^{m}(q^{i+1}-(-1)^{i+1})$	$(m+1, q+1)$
${}^2B_2(q)$,	$q = 2^{2a+1}$	$q^2(q^2+1)(q-1)$	1
${}^2D_m(q)$,	$m \geq 4$	$q^{m(m-1)}(q^m+1)\Pi_{i=1}^{m-1}(q^{2i}-1)$	$(4, q^m+1)$
${}^3D_4(q)$		$q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$	1
${}^2G_2(q)$,	$q = 3^{2a+1}$	$q^3(q^3+1)(q-1)$	1
${}^2F_4(q)$,	$q = 2^{2a+1}$	$q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$	1
${}^2E_6(q)$		$q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$	$(3, q+1)$

Лемма 19. *Пусть p и r — несмежные вершины графа $GK(G)$. Пусть K_m — неабелев фактор ряда $\mathcal{Q}$ такой, что $p \in \pi(K_m)$ и $r \notin \pi(K_m) \cup \pi(Out(K_m))$. Тогда r может принадлежать только спектрам тех факторов K_i ряда $\mathcal{Q}$, для которых $i < m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку фактор K_m неабелев, то $K_m \cong \Pi_{i=1}^{k} N_i$, где все группы N_i изоморфны неабелевой простой группе N. Предположим, что $r \in \pi(K_j)$ для некоторого $j > m$. Пусть g — элемент порядка r из $(G/G_m) \setminus K_m$. Если элемент g нормализует одну из групп N_i, то он либо ее централизует, либо индуцирует на ней автоморфизм порядка r; первое невозможно, поскольку r и p не смежны в $GK(G)$, а второе — поскольку $r \notin \pi(Out(K_m))$. Так как все подгруппы, нормальные в K_m, исчерпываются произведениями нескольких подгрупп N_i, для некоторого набора значений индекса i, то образом любой подгруппы N_i под действием g будет некоторая подгруппа N_j, для которой $i \neq j$.

Пусть h — элемент порядка p из N_1. Элементы $h, h^g, \ldots, h^{g^{r-1}}$ принадлежат попарно различным группам $N, N^g, \ldots, N^{g^{r-1}}$ соответственно, поэтому они попарно перестановочны. Кроме того, элемент $hh^g \ldots h^{g^{r-1}}$ имеет порядок p и централизует g. Это противоречит условию $pr \notin \omega(G)$. □

Пусть C — коклика в графе $GK(G)$. Через t_C обозначим наименьшее натуральное число, для которого спектр фактора K_{t_C} имеет непустое пересечение с C. Через s_C обозначим такое наименьшее натуральное число, для которого $\pi(K_{s_C})$ содержит некоторый элемент множества C, не лежащий в $\pi(K_{t_C})$, если такой элемент существует; в противном случае полагаем $s_C = t_C$.

Старшей кокликой в графе $GK(G)$ назовем его коклику, все элементы которой суть нечетные числа, большие $m/2$, где $m = \max \pi(G)$.

Лемма 20. *Пусть C — старшая коклика в графе $GK(G)$ такая, что $|C| \geq 3$ и по крайней мере один элемент p из C не принадлежит спектру группы K_{s_C}. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Для любого натурального числа $i < s_C$ из того, что спектр фактора K_i содержит элемент из C, следует, что K_i является элементарной абелевой p-группой порядка, большего p.*

2. *Если спектр фактора K_i содержит элемент множества C, то $t_C \leq i \leq s_C$.*

3. *Все элементы множества $C \setminus \{p\}$ принадлежат спектру фактора K_{s_C} и не принадлежат спектру никакого другого фактора ряда $\mathcal{Q}$.*

Доказательство. Пусть q_1 — произвольный элемент из $C \cap \pi(K_{t_C})$. Поскольку элемент p из C не лежит в $\pi(K_{s_C})$, числа t_C и s_C различны. Следовательно, множество $\pi(K_{s_C}) \cap C$ содержит некоторый элемент q_2, не принадлежащий $\pi(K_i)$ для всех $i \leq s_C$.

Пусть $m = \max \pi(G)$. Ввиду $|C| \geq 3$ имеем $m \geq 5$, откуда следует, что все элементы из C нечетны.

Пусть i — целое число из промежутка $[t_C, s_C)$. Рассмотрим фактор K_i и предположим, что $q_1 \in \pi(K_i)$. Так как $q_2 \notin \pi(K_i)$ и $q_2 > m/2$, то ввиду предложения 14 получаем, что $q_2 \notin \pi(Out(K_i))$. Если группа K_i неабелева, то применяя лемму 19 приходим к противоречию с тем, что $q_2 \in \pi(K_{s_C})$ и $i < s_C$. Следовательно, K_i — элементарная абелева q_1-группа. Поскольку q_1 — произвольный элемент из $\pi(K_{t_C}) \cap C$, то ввиду определения t_C и s_C получаем, что $\pi(K_j) \cap C \subseteq \{q_1\}$ для любого $j < s_C$. Покажем теперь, что фактор K_i — нециклическая группа. Предположим противное. Пусть g — элемент порядка q_2 из $(G/G_i) \setminus K_i$. По лемме 10 элемент g централизует циклическую группу K_i. Следовательно, группа $K_i\langle g\rangle$ содержит элемент порядка q_1q_2, что противоречит выбору C.

Покажем теперь, что при $i > s_C$ спектр фактора K_i не содержит элементов из C. Предположим противное. Поскольку $|C| \geq 3$, для некоторого $u > s_C$ в $C \cap \pi(K_u)$ можно выбрать элемент q такой, что $C \cap \pi(K_{s_C})$ содержит элемент r, отличный от q и q_1. Применяя лемму 18 к паре q_1 и r, получаем, что силовская r-подгруппа P группы G_{s_C+1}/G_{s_C} изоморфна дополнению некоторой группы Фробениуса. Отсюда и из леммы 8 следует, что P — циклическая группа. Теперь, применяя лемму Фраттини к силовской подгруппе P нормальной подгруппы G_{s_C+1}/G_{s_C} группы G/G_{s_C}, получаем, что некоторый элемент h порядка q из $(G/G_{s_C}) \setminus K_{s_C}$ действует на циклической r-группе P. По лемме 10 это действие тривиально. Отсюда следует, что группа G/G_{s_C} содержит элемент порядка qr, что противоречит выбору C. Этим доказано утверждение 2.

Из доказанного следует, что $p = q_1$, т. е. утверждение 3. □

Лемма 21. *Пусть C — старшая коклика мощности не менее трех в $GK(G)$ и p — некоторый нечетный элемент из $C \setminus \pi(K_{s_C})$. Если q_1 — нечетная вершина графа $GK(G)$, не смежная с p, такая, что $q_1 \notin \pi(Out(K_{s_C}))$, а q_2 — элемент из $\pi(K_{s_C}) \cap C$, не смежный с q_1 в $GK(G)$, то K_{s_C} — единственный фактор ряда $\mathcal{Q}$, содержащий в своем спектре элемент q_1.*

Доказательство. Фактор K_{s_C} прост, поскольку $|C| \geq 3$ и $C \setminus \{p\} \subseteq \pi(K_{s_C})$ ввиду леммы 20. По условию вершины q_1 и q_2 не смежны в $GK(G)$ и $q_1 \notin Out(K_{s_C})$, поэтому $(G/G_{s_C}) \setminus K_{s_C}$ не содержит элементов порядка q_1. Следовательно, q_1 не лежит в спектре ни одного из факторов K_i ряда $\mathcal{Q}$, для которых $i > s_C$.

Согласно лемме 20 группа K_{t_C} — нециклическая элементарная абелева p-группа. Отсюда $q_1 \notin \pi(K_{t_C})$.

Предположим, что элемент q_1 содержится в спектре некоторого фактора K_i, где $i \in (t_C, s_C)$. Применяя лемму 18 к группе G_{s_C}/G_{t_C} и элементам ее простого спектра p и q_1, получаем, что силовская q_1-подгруппа P группы G_{s_C}/G_{t_C} является дополнением группы Фробениуса с ядром G_{t_C+1}/G_{t_C}. Так как порядок группы P нечетен, то по лемме 8 эта группа циклическая. Поскольку $q_2 \in \pi(K_{s_C})$, то по лемме Фраттини некоторый элемент g порядка q_2 группы G_{s_C+1}/G_{t_C} действует на P. В силу леммы 10 это действие тривиально. Но тогда $q_1q_2 \in \omega(P\langle g\rangle)$. Противоречие.

Предположим теперь, что $q_1 \in \pi(K_i)$ для некоторого $i < t_C$. В этом случае на основании лемм 8, 18 и 20 получаем, что K_{t_C} — циклическая группа порядка, большего p. Это противоречит утверждению 1 леммы 20. Следовательно, K_{s_C} — единственный фактор ряда $\mathcal{Q}$, который может содержать в своем спектре элемент q_1. Остается заметить, что $q_1 \in \pi(G)$, откуда $q_1 \in \pi(K_{s_C})$. □

5. Свойства групп, субспектральных группе A_n

Назовем группу H *субспектральной* группе G, если $\omega(H) \subseteq \omega(G)$.

Лемма 22. *Пусть P — простая группа лиева типа характеристики p, субспектральная группе A_n. Пусть также $d(P)$, $N(P)$ и q — числа из записи порядка группы P в табл. 1, где $q = p^h$ для некоторого h. Если в записи числа $N(P)$ в табл. 1 присутствует сомножитель $q^k - 1$, то $kh \le n - 1$, а если сомножитель $q^k + 1$, то $2kh \le n - 1$.*

Доказательство. Число $q^k - 1$ делится на $\varphi_{kh}(p)$, а число $q^k + 1$ — на $\varphi_{2kh}(p)$. Ввиду утверждения 2 леммы 4 число $\varphi_{kh}(p)$ делится на простое число, не меньшее $kh + 1$, а $\varphi_{2kh}(p)$ делится на простое число, не меньшее $2kh + 1$. На основании включения $\pi(N) \subseteq \pi(P)$ из леммы 15 и включения $\pi(P) \subseteq \pi(A_n)$ получаем, что в случае наличия в записи числа $N(P)$ сомножителя $q^k - 1$ имеет место неравенство $kh + 1 \le n$, а в случае $q^k + 1$ — неравенство $2kh + 1 \le n$. □

Лемма 23. *Пусть P — простая группа лиева типа такая, что $\pi(P) \subseteq \Pi_n$ и $\omega(P)$ содержит все элементы за исключением, быть может, одного некоторого множества C простых чисел, каждое из которых больше $m/2$, где $m = \max \pi(P)$. Если для некоторого элемента p множества Π_n существуют по крайней мере два различных элемента q_1 и q_2 множества C такие, что каждое из чисел $\varphi_{a_1}(p)$ и $\varphi_{a_2}(p)$, где $a_1 = o_p(q_1)$ и $a_2 = o_p(q_2)$, имеет простой делитель, больший n, то характеристика группы P отлична от p.*

Доказательство. Предположим, что характеристика группы P равна p. По крайней мере одно из чисел q_1 или q_2 принадлежит $\pi(P)$; не ограничивая общности, предположим, что это число q_1. Учитывая неравенство $q_1 \ge m/2$, ввиду леммы 16 получаем, что $\pi(\varphi_{a_1}(p)) \subseteq \pi(P)$. Но $\varphi_{a_1}(p)$ делится на простое число, большее n, что противоречит включению $\omega(P) \subseteq \Pi_n$. Следовательно, характеристика группы P отлична от p. □

Лемма 24. *Пусть H — группа, субспектральная группе A_n, a — элемент спектра группы H и $b = \ln a / \ln n$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{i \le b} p_i \le n.$$

Доказательство. Пусть d — число попарно различных простых делителей числа a и $a = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_d^{s_d}$ — разложение числа a на степени попарно различных простых чисел q_i. Поскольку группа H субспектральна A_n, то по лемме 13 имеем $q_i^{s_i} \le n$ для $i = 1, \dots, d$. Отсюда $a \le n^d$, т. е. $\ln a / \ln n \le d$. Не ограничивая общности, предположим, что $q_i < q_j$ при $i < j$. Тогда $p_i \le q_i$, если $i = 1, 2, \dots, d$. Поэтому из леммы 13 получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\lfloor b \rfloor} p_i \le \sum_{i=1}^{d} p_i \le \sum_{i=1}^{d} p_i^{s_i} \le \sum_{i=1}^{d} q_i^{s_i} \le n. \qquad \square$$

Лемма 25. *Пусть $C' = \{11, 13, 17, 19\}$ и P — простая группа лиева типа, субспектральная группе A_{28} и содержащая в своем спектре по меньшей три элемента из C'. Тогда $P \cong {}^2E_6(2)$.*

Т а б л и ц а 2

Свойства простых чисел из отрезка $[11, 23]$

	Значения $o = o_r(r')$					Некоторые другие делители $\phi_o(r)$				
$r \backslash r'$	11	13	17	19	23	11	13	17	19	23
2	10	12	8	18	11					89
3	5	3	16	18	11			193	37	
5	5	4	16	9	22			11489	829	
7	10	12	16	3	22	191	181	169553		10746341
11		12	16	3	22		1117	6304673		58367
13	10		4	18	11	2411			937	419
17	10	6		9	22	307	101			947
19	10	12	8		22	101			1270657	947
23	1	6	16	18				623009	271	

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа P содержит в своем спектре число 23, то положим $C = \Pi_{23}^{+}$, в противном случае положим $C = \Pi_{19}^{+}$. В первом случае число $\max \pi(P)$ равно 23, во втором — 19. В любом случае спектр P содержит по крайней мере 3 элемента множества C. Из табл. 2 видно, что для каждого возможного значения характеристики r группы P, за исключением $r = 2$, по крайней мере для двух значений r' из C' число $\varphi_{o_r(r')}(r)$ делится на простое число, большее 28. Следовательно, по лемме 23, примененной к P и C, характеристика r группы P равна двум. Пусть $d(P)$, $N = N(P)$ и q — числа из табл. 1, определяющие порядок группы P. Имеем, в частности, что $q = 2^h$ для некоторого натурального числа h.

Предположим сначала, что группа P изоморфна одной из классических простых групп. Спектр группы P содержит по крайней мере одно из чисел 11 или 19. Это означает, что N делится на 11 или 19. Если P не изоморфна ни группе ${}^2A_m(q)$, ни группе ${}^2D_m(q)$, то N есть произведение некоторой степени числа q на произведение чисел вида $q^f - 1$ для некоторого множества значений f. В этом случае в соответствии с леммой 4 число N делится на простое число r', отличное от двух — характеристики группы P, в том и только в том случае, когда $o_2(r')$ делит одно из значений f. Пусть f_0 — такое значение f, соответствующее r'. По лемме 22 имеем, что $f_0 h \leq 27$. Отсюда с учетом того, что $o_2(11) = 10$ и $o_2(19) = 18$, имеем, что в случае, когда $r' = 11$, число f_0 может принимать только значения 10 и 20, а в случае, когда $r = 19$, — только значение 18. Но $2^{10} - 1$ и $2^{20} - 1$ делятся на 31, а $2^{18} - 1$ делится на 73. Отсюда по лемме 15 получаем, что порядок группы P делится на простое число, большее 28, противоречие. Следовательно, если K_s изоморфна одной из классических групп, то это одна из групп ${}^2A_m(q)$ или ${}^2D_m(q)$.

Из леммы 22 следует, что $hf \leq 27$, если сомножитель $q^f - 1$ входит в запись числа N в табл. 1, и $2hf \leq 27$, если в этой записи встречается сомножитель $q^f + 1$.

Предположение, что для некоторых q и m группа P изоморфна группе ${}^2A_m(q)$, влечет, что $2hm \leq 27$ или $hm \leq 13$, так как сомножитель q^m+1 или $q^{m+1}+1$ входит в запись N. Поскольку $m \geq 2$, отсюда следует, что $h \leq 6$. Так как $2^7 - 1 = 127$ — простое число, лиевский ранг m группы P не превосходит 5. По совокупности найденных ограничений имеем, что $m \leq 5$ при $h \in \{1, 2\}$, $m \leq 4$ при $h = 3$, $m \leq 3$ при $h = 4$ и $m = 2$ при $h = 5$. Теперь в силу того, что $\omega({}^2A_m(q)) \subset \omega({}^2A_{m+1}(q))$, остается заметить, что спектры групп ${}^2A_5(2)$, ${}^2A_5(4)$, ${}^2A_3(16)$ и ${}^2A_2(32)$ не содержат по меньшей мере двух элементов множества C', а порядок группы ${}^2A_4(8)$ делится на 331. Таким образом, предположение, что группа P изоморфна группе ${}^2A_m(q)$, при всех возможных значениях параметров q и m приводит к противоречию.

Предположим теперь, что для некоторых q и m группа P изоморфна группе ${}^2D_m(q)$, где

$m \geq 4$ согласно табл. 1. В этом случае имеем $2mh \leq 27$ или $mh \leq 13$, поскольку N имеет сомножитель q^m+1. Поскольку $m \geq 4$, из неравенства $mh \leq 13$ следует, что $h \leq 3$. Поскольку $\pi({}^2D_4(2)) = \{2,3,5,7,17\}$, $\pi({}^2D_5(2)) = \{2,3,5,7,11,17\}$ и $31 \in \pi({}^2D_6(2))$, то $h \geq 2$. Вместе с тем, для групп ${}^2D_4(4)$, ${}^2D_5(4)$, ${}^2D_6(4)$ число N из табл. 1 делится на $4^4+1 = 257$. Наконец, для групп ${}^2D_4(8)$, ${}^2D_5(8)$ и ${}^2D_6(8)$ число N имеет сомножитель $q^{2\cdot 2}-1 = 2^{18}-1$, делящийся на 73. Остается заметить, что 73 и 257 — простые числа. Тем самым доказано, что группа P не может быть изоморфна группе ${}^2D_m(q)$ ни при каких значениях параметров q и m. Итак, группа P не изоморфна ни одной из классических групп.

Рассмотрим теперь возможность, когда группа P изоморфна одной из исключительных групп лиева типа. Поскольку $2^5-1 = 31$ — простое число, большее 28, а число N из табл. 1 для групп $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ имеет сомножитель q^5-1, делящийся на $2^5-1 = 31$, группа P не изоморфна ни одной из указанных групп. Группа P не изоморфна также группе ${}^2G_2(q)$, поскольку характеристика указанной группы равна трем. Таким образом, группа P может быть изоморфна только одной из групп $G_2(q)$, $F_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2F_4(q)$ и ${}^2E_6(q)$ для некоторого четного q.

Если группа P изоморфна группе $G_2(q)$ для некоторого q, то по лемме 22 имеем $6h \leq 27$, т. е. $h \leq 4$. Так как группа $G_2(2)$ не проста, то $h \geq 2$. Поскольку $\pi(G_2(4)) = \{2,3,5,7,13\}$, $73 \in \pi(G_2(8))$ и $241 \in \pi(G_2(16))$, то приходим к противоречию с условием леммы.

Предположим, что группа P изоморфна группе $F_4(q)$ для некоторого q. По лемме 22 имеем, что $h \leq 2$. Но $\pi(F_4(2)) = \{2,3,5,7,13,17\}$, и 241 делит $|F_4(4)|$; противоречие.

Допустим, что группа P изоморфна группе ${}^2B_2(q)$ для некоторого q. Так как $h = 2a+1$, то из леммы 22 следует, что $a \in \{1,2\}$. Непосредственно проверяется, что спектр группы ${}^2B_2(8)$ не содержит чисел 17 и 19. Число $N({}^2B_2(32))$ делится на $2^{10}+1$, при этом число $2^{10}+1$ делится на 41.

Пусть P изоморфна группе ${}^3D_4(q)$ для некоторого q. В силу неравенства из леммы 22 число h не превосходит четырех. Но $\pi({}^3D_4(q))$ не содержит чисел 17 и 19 при $h=1$, содержит 241 при $h \in \{2,4\}$ и содержит 37 при $h=3$; противоречие.

Группа P не изоморфна группе ${}^2F_4(2)'$, так как $\pi({}^2F_4(2)) = \{2,3,5,13\}$. Группа P не изоморфна группе ${}^2F_4(q)'$ при $q = 2^{2a+1}$ и $a \geq 1$, так как $2(2a+1)6 \leq 27$ по лемме 22, а это неравенство не имеет положительных целочисленных решений.

Итак, $P \cong^2 E_6(2)$. Имеем $\pi({}^2E_6(2)) = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$. По данным, приведенным в [14, с. 191–199], группа ${}^2E_6(2)$ субспектральна группе A_{22}, а значит, и группе A_{28}. $\square$

6. Доказательство теоремы

Пусть G — группа, изоспектральная группе A_n при $n > 21$. Пусть $\mathcal{Q}$ — главный ряд $1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_l = G$ в группе G и $K_i = G_{i+1}/G_i$. Ввиду леммы 13 множество Π_n^+ — коклика в графе $GK(G)$. Для некоторых значений n вершина $pr(n/2)$ графа $GK(G)$ не смежна в $GK(G)$ ни с какими элементами множества Π_n^+. Если вершина $pr(n/2)$ не смежна ни с одним элементом множества Π_n^+ и $pr(n)/2 < pr(n/2)$, то положим $C = \Pi_n^+ \cup \{pr(n/2)\}$, иначе положим $C = \Pi_n^+$. В первом случае имеем, что $\Pi_n^+ \subset C \subseteq \Pi_{pr(n)}^+$, а во втором, что $C = \Pi_n^+$. В любом случае C — старшая коклика в графе $GK(G)$. По лемме 3 мощность множества Π_n^+ больше двух, поскольку $n \geq 22$, откуда $|C| \geq 3$. Согласно лемме 20, если некоторый элемент p из C не лежит в $\pi(K_{s_C})$, то $C \cap \pi(K_{t_C}) = \{p\}$ и $C \cap \pi(K_{s_C}) = C \setminus \{p\}$. Положим $t = t_C$, $s = s_C$. По той же лемме 20 в этом случае $(C \setminus \{p\}) \cap \pi(K_i) \neq \varnothing$ только при $i = s$, а элемент p содержится только в спектре фактора K_t и, возможно, в спектре некоторых факторов K_u, где $u \in [t+1, s-1]$. При этом по утверждению 1 этой леммы каждый фактор ряда $\mathcal{Q}$, спектр которого содержит p, представляет собой элементарную абелеву p-группу. Порядок группы K_t больше p. Таким образом, $\pi(K_s)$ содержит все элементы множества C за исключением, быть может, одного.

Далее, фактор K_s прост. Действительно, если K_s является прямым произведением двух или более изоморфных простых групп, то его спектр содержит элемент вида $r_1 r_2$, где r_1 и r_2 —

Т а б л и ц а 3

Порядки спорадических простых групп P

P	|P|
M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
HS	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
J_3	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
M^cL	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
He	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Ru	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
Suz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
$O'N$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 19 \cdot 31$
Co_3	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Fi_{22}	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
HN	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Th	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
Fi_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
Fi'_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
B	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$
M	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

произвольные различные элементы из пересечения $\pi(K_s) \cap C$, а это противоречит тому, что C — старшая коклика.

Покажем сначала, что группа K_s не изоморфна ни одной из спорадических простых групп и ни одной из простых групп лиева типа. Отсюда согласно классификации конечных простых групп будет следовать, что K_s изоморфна знакопеременной группе некоторой степени k.

Пусть $n = 22$. Тогда $C = \{11, 13, 17, 19\}$. Опираясь на данные табл. 3, нетрудно непосредственно проверить, что простой спектр всякой спорадической простой группы содержит по крайней мере один элемент, больший 22, или не более двух элементов коклики C. Следовательно, K_s не изоморфна ни одной из спорадических простых групп.

Докажем, что K_s не изоморфна ни одной из простых групп лиева типа. Предположим противное. Тогда по лемме 25 группа K_s изоморфна группе ${}^2E_6(2)$. Согласно [14] $|Out({}^2E_6(2))| = 6$. Отсюда, учитывая, что простой спектр группы ${}^2E_6(2)$ содержит 17 и 19, получаем, что никакое простое число из $\pi(G) \setminus \{2, 3\}$ не лежит в спектрах факторов K_i, когда $i > s$. Кроме того, в [14] указано, что расширение группы ${}^2E_6(2)$ с помощью группы, порожденной любым ее внешним автоморфизмом порядка два, содержит элемент порядка 32. Отсюда ввиду $2 \cdot 19 \notin \omega(G)$ получаем, что $2 \notin \pi(K_i)$, если $i > s$. Покажем теперь, что K_s — единственный фактор, спектр которого содержит 17 и 19. Достаточно доказать отсутствие этих чисел в спектрах факторов K_i при $i < s$. Порядок группы ${}^2E_6(2)$ делится на 7^2, и 7 не смежно с 17 и 19 в $GK(G)$. Поэтому, если $\{17, 19\} \cap \pi(K_i) \neq \varnothing$ при $i < s$, то по леммам 18 и 8 силовская 7-подгруппа в K_s

циклическая, а $\omega(G)$ содержит элемент порядка 7^2, что противоречит выбору G. На основании установленных ограничений на наличие элементов из Π_{22} в спектрах факторов K_i, наличия в группе G элементов порядков $2\cdot 17$ и $5\cdot 17$, а также того, что согласно [14] в спектре группы ${}^2E_6(2)$ нет элементов таких порядков, заключаем, что существуют такие неотрицательные целые числа t_1 и t_2, что $t_1 < t_2 < s$ и факторы K_{t_1} и K_{t_2} в своих спектрах содержат соответственно r_1 и r_2, где $\{r_1, r_2\} = \{2, 5\}$. Более того, эти факторы изоморфны соответственно элементарной абелевой r_1- и r_2-группе. Это вытекает из того, что K_s — единственный фактор ряда $\mathcal{Q}$, содержащий в своем спектре 19, что $2\cdot 19$ и $5\cdot 19$ не лежат в спектре G, и предложения 14. Без ограничения общности можно предполагать, что существуют некоторые элементы g_i $(i = 1, 2)$ группы G порядка $r_i\cdot 17$ такие, что $g_i^{17} \in G_{t_i+1} \setminus G_{t_i}$ и $g_i^{r_i} \in G_{s+1} \setminus G_s$. Так как 17 содержится только в спектре фактора K_s, то по теореме Силова всякий 17-элемент из G_{s+1} централизует некоторый r_i-элемент из $G_{t_i+1} \setminus G_{t_i}$. Следовательно, можно также считать, что $g_1^{r_1} = g_2^{r_2}$. Положим $g = g_i^{r_i}$.

По лемме 11 естественное полупрямое произведение M группы K_{t_1} на группу $(G/G_{t_1})/K_{t_1}$ субспектрально G. Более того, как нетрудно видеть, в M элементам g_i, g соответствуют некоторые элементы $\bar{g}_i$, $\bar{g}$ тех же порядков и с теми же соотношениями. Положим $A = K_{t_1}$ и $B = (G/G_{t_1})/K_{t_1}$. Некоторая силовская r_2-подгруппа P подгруппы $(G_s/G_{t_1})/K_{t_1}$ группы B содержит в своем нормализаторе в группе B элемент $\bar{g}$ и некоторый элемент h порядка 19, причем $\bar{g}_2{}^{17} \in P$. Рассмотрим группу $AP\langle h\rangle$. Группы $A\langle h\rangle$ и $P\langle h\rangle$ представляют собой группы Фробениуса, поскольку $r_i\cdot 19 \notin \omega(G)$ $(i = 1, 2)$. Группа P должна совпадать с ядром действия группы $P\langle h\rangle$ на A, поскольку в противном случае, используя лемму 9, нетрудно проверить, что группа $AP\langle h\rangle$ содержит элемент порядка $2\cdot 5\cdot 19$. Следовательно, $\bar{g}_1{}^{17}$ и $\bar{g}_2{}^{17}$ коммутируют. Отсюда следует, что элемент $\bar{g}_1{}^{17}\bar{g}_2{}^{17}\bar{g}$ имеет порядок $2\cdot 5\cdot 17$. Следовательно, G содержит элемент этого порядка и не субспектральна A_{22}. Противоречие.

Пусть $23 \le n \le 28$. Тогда для всех значений n имеем $C = \{13, 17, 19, 23\}$.

Предположим, что группа K_s изоморфна спорадической простой группе. Так как $\pi(K_s)$ содержит по крайней мере три элемента множества C и не содержит простых чисел, больших 23, то из табл. 3 видно, что $K_s \cong Fi_{23}$ и, следовательно, $19 \notin \pi(K_s)$. Тогда $t \ne s$, $p = 19$ и K_t — элементарная абелева группа порядка, большего 19. Далее, в [14] указано, что спектр группы Fi_{23} не содержит элемента $11\cdot 13$. Следовательно, по меньшей мере одно из чисел 11 или 13 лежит в спектре одного из факторов ряда $\mathcal{Q}$, отличных от K_s. Обозначим произвольное такое число через r. Тогда порядок силовской r-подгруппы группы G больше r. Поскольку r и 19 не смежны в $GK(G)$, по лемме 18 силовская r-подгруппа или силовская 19-подгруппа группы G изоморфны дополнению D некоторой группы Фробениуса, следовательно, по лемме 8 группа D циклическая. Но $\omega(G)$ не содержит как r^2, так и 19^2; противоречие.

Предположим, что группа K_s изоморфна некоторой простой группе лиева типа. Тогда по лемме 23 и данным, приведенным в табл. 2, характеристика группы K_s равна двум. Более того, поскольку $89|\varphi_{o_2(23)}(2)$ (см. табл. 2), из леммы 16 следует, что $23 \in \pi(K_s)$ влечет $89 \in \pi(K_s)$. Поэтому $23 \notin \pi(K_s)$, $s > t$, $p = 23$ и K_t — элементарная абелева 23-группа. Докажем, что $11 \in \pi(K_s)$. Предположим противное. Тогда $\pi(K_s) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19\}$. Следовательно, $11 \notin \pi(Out(K_s))$ по предложению 14. Далее, $19 \in \pi(K_s)$, $23 \in C \setminus \pi(K_s)$ и число 11 не смежно в $GK(G)$ с 19 и 23. Следовательно, по лемме 21 фактор K_s — единственный среди факторов ряда $\mathcal{Q}$, содержащий в своем спектре число 11; противоречие. Таким образом, $\{11, 13, 17, 19\} \subseteq \pi(K_s)$. Поскольку группа K_s субспектральна группе A_{28}, то по лемме 25 группа P изоморфна ${}^2E_6(2)$. Поскольку силовская 7-подгруппа группы ${}^2E_6(2)$ имеет порядок 7^2, а 7 и 23 не смежны в $GK(G)$, по лемме 18 получаем, что произвольная силовская 7-подгруппа группы K_s изоморфно вкладывается в дополнение некоторой группы Фробениуса. Следовательно, по лемме 8 она циклическая группа, и группа K_s содержит элемент порядка 49; противоречие.

Пусть $n \ge 29$. Проверим сначала, что группа K_s не изоморфна ни одной из спорадических простых групп. Предположим противное. Тогда для значений n, не принадлежащих $\{29, 30, 43, 44, 45, 46\}$, нетрудно проверить, что спектр K_s не содержит по меньшей мере двух элементов из Π_n^+ или содержит простое число, большее n, что невозможно.

Предположим, что $n \in \{29, 30\}$. Тогда ввиду табл. 3 группа K_s изоморфна группе Fi'_{24}. Имеем $19 \notin \pi(Fi'_{24})$, откуда $t \neq s$ и $p = 19$. Если $n = 29$, то группа G содержит элемент порядка $11 \cdot 13$. Одно из чисел 11 или 13 лежит в спектре фактора ряда $\mathcal{Q}$, отличного от K_s, поскольку по [14] $11 \cdot 13 \notin \pi(Fi'_{24})$. Так как согласно [14] группа Fi'_{24} не имеет внешних автоморфизмов порядков 11 и 13, а 11 и 13 не смежны с 19 и 23 в $GK(G)$, то применяя лемму 21, получаем, что K_s — единственный фактор ряда $\mathcal{Q}$, содержащий в своем спектре 11 и 13; противоречие. Если $n = 30$, то рассматривая элемент $13 \cdot 17$ из $\omega(G)$ и проводя рассуждения аналогичные случаю $n = 29$, также приходим к противоречию.

Допустим, что $n \in [43, 46]$. Тогда группа K_s изоморфна группе J_4, поскольку остальные спорадические простые группы не содержат в своем спектре по крайней мере двух элементов из $\{29, 31, 37, 43\}$. Имеем $41 \notin \pi(J_4)$, $t \neq s$ и $p = 41$. Так как числа 11 и 41 не смежны в графе $GK(G)$, а все факторы ряда $\mathcal{Q}$, содержащие в своем спектре элемент 41, являются элементарными абелевыми 41-группами, то применяя лемму 18, получаем, что силовская 11-подгруппа или силовская 41-подгруппа группы G изоморфны дополнению D некоторой группы Фробениуса. Следовательно, по лемме 8 группа D циклическая. Вместе с тем $|K_t| \geq 41^2$, а порядок силовской 11-подгруппы группы J_4 равен 11^3. Отсюда вытекает, что $11^2 \in \omega(G)$ или $41^2 \in \omega(G)$, а это противоречит выбору группы G.

Докажем, что для всех рассматриваемых значений n фактор K_s не изоморфен ни одной из простых групп лиева типа. Предположим противное. Пусть r — лиев ранг группы K_s, q — число из записи порядка этой группы в табл. 1.

Допустим сначала, что $n \in [29, 700]$. Как следует из леммы 5, в этом случае для каждого элемента r из Π_n существуют элементы q_1 и q_2 из Π_n^+, для которых числа $\varphi_{o_r(q_1)}(r)$ и $\varphi_{o_r(q_2)}(r)$ имеют простые делители, большие n. Поскольку $\Pi_n^+ \subset C$, пользуясь леммой 23, получаем, что ни одно из чисел, принадлежащих Π_n, не может быть характеристикой группы K_s. Следовательно, характеристика группы K_s больше n. Ввиду того, что характеристика группы K_s лежит в ее простом спектре, а значит, не превосходит n, приходим к противоречию.

Пусть теперь $n \geq 701$. В этом случае по лемме 3 имеем $|C| \geq 0,366 \cdot 701/\ln 701 > 39$, откуда $|C| \geq 40$. Согласно [16, табл. 9; 17, табл. 4] размер максимальной коклики в графах Грюнберга — Кегеля исключительных простых групп лиева типа не превосходит 12. Следовательно, P — классическая группа.

Предположим, что $n \in [701, 10^5]$. Поскольку фактор K_s содержит по меньшей мере 39 элементов из C, то из [16, табл. 8] следует, что число элементов в коклике наибольшей мощности в графе Грюнберга — Кегеля классической группы K_s равно $r/2$, $(r+2)/2$, $(3r+5)/4$, $(3r+1)/4$ или $(3r+4)/4$. Наихудшая нижняя оценка на r получается в случае $(3r+5)/4 \geq |C|-1$. Отсюда ранг r группы K_s не меньше 50. Для всякой классической группы P ранга r, большего 49, параметр $N(P)$ из табл. 1 имеет сомножители вида $q^{16}-1$ и $q^{38}-1$. Далее, автором с использованием [8] проверено, что для всех простых чисел f из Π_{1000} число $f^{38}-1$ делится на простое число, большее 10^5, а для простых чисел $f \in (10^3, 10^5]$ уже число $f^{16}-1$ делится на простое число, большее 10^5. Следовательно, ввиду леммы 15, получаем, что при любом значении характеристики группы K_s порядок $|K_s|$ имеет делитель, больший 10^5. Противоречие.

Итак, можно считать, что $n > 10^5$. По лемме 3 имеем $|C| \geq 0.366n/\ln n$. Согласно [16, табл. 9] мощность максимальной коклики в $GK(K_s)$ не меньше $[(3r+5)/4]$. Вместе с тем $|C \setminus \pi(K_s)| \leq 1$, откуда $r \geq (1.464n/\ln n - 9)/3$. По лемме 12 классическая группа K_s ранга r содержит элемент порядка не меньше $q^{r-2}-1$. Следовательно, по лемме 24 имеем

$$\sum_{i=1}^{i \leq b} p_i \leq n,$$

где $b = \ln(q^{r-2}-1)/\ln n$. Далее, $\ln(q^{r-2}-1) \geq (r-3)\ln q$ и $r \geq (1.464n/\ln n - 9)/3$, откуда

$$b \geq (1.464n/\ln n - 18)\ln q/3.$$

При $n = 10^5$ имеем $b \geq 2933$.

С учетом леммы 7 получаем,

$$n \geq \lfloor b \rfloor^2 + 1 > \left\lfloor \frac{(1.464n - 18 \ln n)^2 \ln^2 q}{9 \ln^4 n} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{(1.464n - 18 \ln n)^2 \ln^2 2}{9 \ln^4 n} \right\rfloor.$$

В частности, $n \geq 8 \cdot 10^6$. Поэтому можно воспользоваться неравенствами $\ln n \leq 0.0003n$ и $\ln n^4 \leq 0.01n$. Отсюда

$$n \geq \frac{2.12n^2 \cdot 0.5}{9 \cdot 0.01n} - 1 \geq 11n - 1.$$

Противоречие.

Таким образом, установлено, что группа G изоморфна группе A_k для некоторого натурального числа k. Покажем, что K_s — единственный фактор ряда $\mathcal{Q}$, содержащий в своем спектре число $pr(n)$; из этого будет следовать, что $k \geq pr(n)$. Предположим противное, т. е. что $pr(n) \in \pi(K_i)$ для некоторого $i \neq s$.

Пусть $p' = pr(pr(n)-1)$. Имеем $k \geq p'$. На основании леммы 1 заключаем, что $p'+pr(n) > n$, откуда ввиду $pr(n) \notin \pi(Out(A_k))$ и $pr(n) \in C$ получаем $t \leq i < s$.

Предположим, что существует нечетное простое число p'' такое, что $2p'' \leq k$ и $p'' + pr(n) > n$. Поскольку $p''pr(n) \notin \omega(A_n)$, по лемме 18 силовская p''-подгруппа группы A_k изоморфна дополнению некоторой группы Фробениуса, а следовательно, по лемме 8 она циклическая. С другой стороны, $2p'' \leq k$, откуда следует, что силовская p''-подгруппа группы A_k содержит элементарную абелеву подгруппу порядка $(p'')^2$. Таким образом, существование нечетного простого числа p'' с указанными свойствами противоречит предположению, что $pr(n) \in \pi(K_i)$ для некоторого $i \neq s$. Докажем, что такое p'' существует, когда $n \geq 22$.

Если $n = 22$, то $pr(n) = 19$, $p' = 17$ и $p'' = 7$. Для $n \in [23, 150)$ нетрудно, как в случае $n = 22$, непосредственно убедиться в существовании числа p''. Пусть $n \geq 150$. По лемме 2 при $n \geq 119$ в промежутке $[n, 1.073n]$ лежит по крайней мере одно простое число. Следовательно, при $n \geq 150$ в промежутках $[0.81n, 0.9n]$ и $[0.91n, n]$ имеются простые числа. Поэтому $pr(n) \geq 0.91n$ и $p' \geq 0.81n$. По лемме 1 по крайней мере одно простое число найдется в промежутке $[0,2n, 0.4n]$, в качестве p'' можно взять любое такое число. Непосредственно проверяется, что все условия на p'' выполнены.

Итак, доказано, что $k \geq pr(n)$. Следовательно, все элементы коклики C лежат в $\pi(K_s)$. Если $t \neq s$, то K_t — элементарная абелева r-группа для некоторого r из C, при этом r — единственный элемент C, лежащий в спектрах факторов K_i, для которых $i \neq s$. Более того, если $i \neq s$ и $r \in K_i$, то $t \leq i < s$ и K_i — элементарная абелева r-группа. По доказанному выше $r \neq pr(n)$. Теперь заметим, что $k \leq n$ по лемме 17. Отсюда $k \in [pr(n), n]$.

Теорема доказана. □

Автор благодарит Анатолия Семеновича Кондратьева за большую помощь и поддержку при работе над данной статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика, вып. 7.)
2. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. P. 487–513.
3. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 360–371.
4. **Заварницин А.В.** Распознавание по множеству порядков элементов знакопеременных групп степени $r + 1$ и $r + 2$ и группы степени 16 // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 648–661.
5. **Заварницин А.В., Мазуров В.Д.** О порядках элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 296–315.

6. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
7. **Rohrbach H., Weis J.** Zum finiten Fall des Bertranschen Postulates // J. Reine Angew. Math. 1964. Bd. 214, № 5. S. 432–440.
8. The GAP Group. GAP — Groups, algorithms, and programming. Vers. 4.4.2.
URL: http://www.gap-system.org.
9. **Tchebichef P.** Mémoire sur nombres premiers // J. de math. pures et appl. 1re série. 1852. T. XVII. P. 366-390.
10. **Huppert B., Blackburn N.** Finite Groups. II. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1982. 531 p.
11. **Zsigmondy K.** Zur Theorie Potenzreste // Monatsh. Math. und Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
12. **Бусаркин В.М., Горчаков Ю.М.** Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968. 113 с.
13. **Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп $E_6(q)$ и $^2E_6(q)$ // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1001–1018.
14. Atlas of finite groups // Conway J.H. [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
15. **Carter R.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p. (Pure and Applied Mathematics. Vol. 28.)
16. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
17. **Vasiliev A.V., Vdovin E.P.** Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group: препринт № 225 / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2009.
URL: http://arxiv.org/abs/0905.1164v1.

Вакула Игорь Александрович
канд.физ.-мат. наук
гл. программист
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: vakula@imm.uran.ru

Поступила 22.03.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 517.982.25+515.128

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЭРОВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКАХ ОРДИНАЛОВ[1]

Л. В. Гензе, С. П. Гулько, Т. Е. Хмылёва

В работе дается полная линейная гомеоморфная классификация пространств $B_p[1,\alpha]$ всех бэровских функций $f\colon [1,\alpha]\to\mathbb{R}$, определенных на отрезках ординалов $[1,\alpha]$ и наделенных топологией поточечной сходимости. Поскольку любая бэровская функция на отрезке ординалов принадлежит первому классу Бэра, то наша классификация является также классификацией пространств функций первого класса Бэра. Аналогичная классификация дается и для пространств двузначных бэровских функций $f\colon [1,\alpha]\to\{0,1\}$.

Ключевые слова: Пространства бэровских функций, ординалы, топология поточечной сходимости, линейные гомеоморфизмы, классификация.

L. V. Genze, S. P. Gul'ko, T. E. Khmyleva. Classification of spaces of Baire functions on ordinal intervals.

A complete linear homeomorphic classification of the spaces $B_p[1,\alpha]$ of all Baire functions $f\colon [1,\alpha]\to\mathbb{R}$ that are defined on ordinal intervals $[1,\alpha]$ and are equipped with the topology of pointwise convergence is given. Since any Baire function on an ordinal interval belongs to the first Baire class, our classification is also a classification of spaces of functions of the first Baire class. A similar classification is given for spaces of two-valued Baire functions $f\colon [1,\alpha]\to\{0,1\}$.

Keywords: spaces of Baire functions, ordinals, topology of pointwise convergence, linear homeomorphisms, classification.

Введение

В работе рассматриваются пространства $B_p[1,\alpha]$ всех бэровских функций $f\colon [1,\alpha]\to Y$ (Y — это либо вещественная прямая, либо дискретное двоеточие), определенных на отрезках ординалов $[1,\alpha]$ и наделенных топологией поточечной сходимости. Даются необходимые условия линейной гомеоморфности таких пространств, что вместе с результатами работы [1] приводит к полной линейной гомеоморфной классификации пространств $B_p[1,\alpha]$.

Строчными греческими буквами обозначаются ординалы. Отрезки ординалов $[1,\alpha]$ и их подмножества снабжаются порядковой топологией. Множество $A\subset[1,\alpha)$ называется конфинальным в $[1,\alpha)$, если для каждого $\xi\in[1,\alpha)$ существует такой $\eta\in A$, что $\eta\geqslant\xi$. Известно [2], что наименьший порядковый тип множеств A, конфинальных в $[1,\alpha)$, является начальным ординалом; будем обозначать его $\mathrm{cf}(\alpha)$. Наименьший ординал мощности $\aleph_\tau$ будем обозначать ω_τ (но вместо ω_0 будем писать по традиции просто ω). Если $\{X_s : s\in S\}$ — семейство топологических векторных пространств, то символом $\Sigma\{X_s : s\in S\}$ будем обозначать их Σ-произведение, т. е. множество $\{x\in\Pi\{X_s : s\in S\} : |\{s\in S : x_s\neq 0\}|\leqslant\aleph_0\}$. Если $X_s = X$ для всех $s\in S$, то вместо $\Sigma\{X_s : s\in S\}$ будем писать $\Sigma\{X:\mathfrak{m}\}$, где $\mathfrak{m}=|S|$. Если топологические векторные пространства X и Y линейно гомеоморфны, то будем писать $X\sim Y$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям России (контракт № 02.740.11.0238) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы” (госконтракт № П937 от 20.08.2009).

1. Некоторые свойства бэровских функций

О п р е д е л е н и е 1. Пусть X — топологическое пространство, Y — топологическое пространство с первой аксиомой счетности и f — отображение из X в Y. Говорят, что отображение f первого класса Бэра, если существует последовательность непрерывных отображений $\{f_n : X \to Y : n \in \mathbb{N}\}$, поточечно сходящаяся к f.

Теорема 1 [1]. *Пусть α — произвольный ординал, Y — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. В этом случае функция $x: [1, \alpha] \to Y$ первого класса Бэра тогда и только тогда, когда x является непрерывной во всех точках $\beta \leqslant \alpha$ таких, что $\mathrm{cf}(\beta) > \omega$. В частности, если α — конечный или счетный ординал, то произвольная функция $x: [1, \alpha] \to Y$ первого класса Бэра.*

Из этой теоремы следует, что все классы функций (заданных на отрезках ординалов) по классификации Бэра совпадают с функциями первого класса Бэра, поэтому в дальнейшем будем использовать термин “бэровская функция” или “бэровское отображение”.

Множество всех бэровских отображений $f: X \to Y$, где Y — либо вещественная прямая, либо дискретное двоеточие, снабженное топологией поточечной сходимости, будем обозначать $B_p(X)$.

Теорема 2 [1]. *Пусть α и β — произвольные ординалы. Тогда $B_p[1, \alpha \cdot \beta] \sim B_p[1, \beta] \times \Sigma\{B_p[1, \alpha] : |\beta|\}$.*

В частности, если $|\beta| < |\alpha|$ или $\alpha = \beta$, то первый множитель “поглощается” Σ-произведением, т. е. $B_p[1, \alpha \cdot \beta] \sim \Sigma\{B_p[1, \alpha] : |\beta|\}$. В этом случае функцию $x \in B_p[1, \alpha \cdot \beta]$ будем обозначать, когда это необходимо, $\{x_\gamma\}$, где $x_\gamma \in B_p[1, \alpha]$, $\gamma < \beta$.

2. Достаточные условия линейной гомеоморфности

В [1] были даны достаточные условия линейной гомеоморфности пространств $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$.

Теорема 3. (*i*) *Пусть $\omega_\tau \geqslant \omega_2$ — начальный ординал, $n < \omega$ и ординалы α, β удовлетворяют условию*

$$\omega_\tau \cdot n \leqslant \alpha \leqslant \beta < \omega_\tau \cdot (n + 1).$$

Тогда пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.

(*ii*) *Пусть ω_σ и ω_τ — такие начальные ординалы, что $\omega_\tau \geqslant \omega_2$, $\omega \leqslant \omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$ и ординалы α, β удовлетворяют условию*

$$\omega_\tau \cdot \omega_\sigma \leqslant \alpha \leqslant \beta < \omega_\tau \cdot \omega_{\sigma+1}.$$

Тогда пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.

(*iii*) *Для любых $\alpha, \beta \in [\omega_1, \omega_2)$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.*

(*iv*) *Для любых $\alpha, \beta \in [\omega, \omega_1)$ пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны.*

Теорему 3 можно сформулировать иначе. Для этого рассмотрим класс ординалов

$$\Delta = \{\omega_\tau : \tau \geqslant 0\} \cup \{\omega_\tau \cdot n : \tau \geqslant 2, n \in [2, \omega)\} \cup \{\omega_\tau \cdot \omega_\sigma : \tau \geqslant 2, \omega_\sigma \in [\omega, \omega_\tau]\}.$$

Этот класс разбивает класс всех ординалов на непересекающиеся полуинтервалы $I_\delta = [\delta, \delta^+)$, где $\delta, \delta^+ \in \Delta$ и $\delta^+ = \min\{\gamma \in \Delta : \gamma > \delta\}$. В этих обозначениях теорема 3 примет такой вид:

если ординалы α и β попадают в один и тот же полуинтервал I_δ, то пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны.

Пусть теперь α и β попадают в разные полуинтервалы. Если $\alpha < \omega_\tau \leqslant \beta$, то пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ даже не гомеоморфны, так как имеют разную мощность. Таким образом, чтобы получить полную классификацию, осталось разобраться с ситуацией, когда $\omega_\tau \leqslant \alpha < \omega_\tau \cdot n \leqslant \beta$ и $\alpha < \omega_\tau \cdot \omega_\sigma \leqslant \beta$. В следующем разделе мы опишем эти случаи, используя методы из [3].

3. Необходимые условия линейной гомеоморфности

Лемма 1. *(i) Пусть ω_τ — начальный ординал, $n, m < \omega$ и $T\colon B_p[1,\omega_\tau \cdot n] \to B_p[1,\omega_\tau \cdot m]$ — линейное непрерывное отображение. Тогда для любого $B \subset [1,\omega_\tau \cdot m]$, $|B| < \omega_\tau$, найдется такое $A \subset [1,\omega_\tau \cdot n]$, $|A| < \omega_\tau$, что $x|_A = 0 \Rightarrow Tx|_B = 0$ для каждой функции $x \in B_p[1,\omega_\tau \cdot n]$.*

(ii) Пусть ω_τ, ω_σ и ω_ρ — начальные ординалы и $T\colon B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma] \to B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\rho]$ — линейное непрерывное отображение. Тогда для любого $B \subset [1,\omega_\tau \cdot \omega_\rho]$, $|B| < \omega_\tau$, найдется такое $A \subset [1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$, $|A| < \omega_\tau$, что $x|_A = 0 \Rightarrow Tx|_B = 0$ для каждой функции $x \in B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательства обоих утверждений аналогичны, поэтому докажем только второе утверждение. Для каждого $\beta \in B$ рассмотрим линейный непрерывный функционал φ_β на пространстве $B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\rho]$, определенный формулой $\varphi_\beta(y) = y(\beta)$, $y \in B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\rho]$. Тогда $\varphi_\beta \circ T$ — линейный непрерывный функционал на пространстве $B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$, а следовательно, его можно записать в виде $\varphi_\beta \circ T = \sum_{i=1}^{n(\beta)} \lambda_i(\beta)\psi_{\alpha_i(\beta)}$, где $\lambda_i(\beta) \in \mathbb{R}$ (или $\lambda_i(\beta) \in \{0,1\}$, если мы рассматриваем двузначные функции) и $\psi_{\alpha_i(\beta)}(x) = x(\alpha_i(\beta))$ для $x \in B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$. Положим $A_\beta = \{\alpha_i(\beta) : i = 1,\ldots,n(\beta)\}$ и $A = \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$. Ясно, что $|A| < \omega_\tau$. Пусть теперь $x \in B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$, $x|_A = 0$ и $\beta \in B$. Докажем, что $Tx(\beta) = 0$.

$$Tx(\beta) = \varphi_\beta(Tx) = (\varphi_\beta \circ T)(x) = \; = \sum_{i=1}^{n(\beta)} \lambda_i(\beta)\psi_{\alpha_i(\beta)}(x) = \sum_{i=1}^{n(\beta)} \lambda_i(\beta)x(\alpha_i(\beta)) = 0.$$

□

Лемма 2. *(i) Пусть ω_τ — начальный ординал регулярной мощности, $n, m < \omega$. Если $T\colon (B_p[1,\omega_\tau])^n \to (B_p[1,\omega_\tau])^m$ — линейный гомеоморфизм, то множество*

$$L = \{\alpha < \omega_\tau : x_i|_{[1,\alpha)} = 0, i = 1,\ldots,n \Longleftrightarrow (Tx)_j|_{[1,\alpha)} = 0, j = 1,\ldots,m\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

(ii) Пусть ω_τ — начальный ординал регулярной мощности, ω_σ и ω_ρ — начальные ординалы такие, что $\omega \leqslant \omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$, $\omega \leqslant \omega_\rho \leqslant \omega_\tau$. Если $T\colon \Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\} \to \Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\}$ — линейный гомеоморфизм, то множество

$$L = \{\alpha < \omega_\tau : x_\gamma|_{[1,\alpha)} = 0, \gamma < \omega_\sigma \Longleftrightarrow (Tx)_\delta|_{[1,\alpha)} = 0, \delta < \omega_\rho\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем второе утверждение. Пусть $\alpha_1 < \omega_\tau$ — произвольный ординал. По лемме 1 выберем возрастающую последовательность ординалов α_n так, чтобы из $x_\gamma|_{[1,\alpha_{n+1})} = 0$, $\gamma < \omega_\sigma$, следовало $(Tx)_\delta|_{[1,\alpha_n)} = 0$, $\delta < \omega_\rho$, если n нечетно, и из $y_\delta|_{[1,\alpha_{n+1})} = 0$, $\delta < \omega_\rho$, следовало $(T^{-1}y)_\gamma|_{[1,\alpha_n)} = 0$, $\gamma < \omega_\sigma$, если n четно. Обозначим $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Легко видеть, что $\alpha \in L$, $\alpha \geqslant \alpha_1$. Это доказывает конфинальность множества L в $[1,\omega_\tau)$. Замкнутость L очевидна. Заменяя в этом доказательстве γ и δ числами n и m соответственно, получим доказательство первого утверждения. □

Пусть α и β — ординалы и $\alpha < \beta$. Символом $B_p^{0,\alpha}[1,\beta]$ будем обозначать подпространство в $B_p[1,\beta]$, состоящее из функций, равных нулю, начиная с α. Подпространство в $B_p[1,\beta]$, состоящее из функций, равных нулю в β, будем обозначать $B_p^0[1,\beta]$. Легко видеть, что $B_p^0[1,\beta] \sim B_p[1,\beta]$ для бесконечного β. Введем еще одно обозначение

$$\Sigma_\alpha \left\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\right\} = \left\{x = \{x_\gamma\}_{\gamma<\omega_\tau} \in \Sigma\left\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\right\} : x_\gamma = 0, \gamma \geqslant \alpha\right\}.$$

Лемма 3. (*i*) *Пусть ω_τ — начальный ординал регулярной мощности, $n, m < \omega$. Если $T\colon (B_p[1,\omega_\tau])^n \to (B_p[1,\omega_\tau])^m$ — линейный гомеоморфизм, то множество*

$$M = \left\{\alpha < \omega_\tau : T\left(\left(B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau]\right)^n\right) = \left(B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau]\right)^m\right\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

(*ii*) *Пусть ω_τ — начальный ординал регулярной мощности, ω_σ и ω_ρ — начальные ординалы такие, что $\omega \leqslant \omega_\sigma < \omega_\tau$, $\omega \leqslant \omega_\rho < \omega_\tau$. Если $T\colon \Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\} \to \Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\}$ — линейный гомеоморфизм, то множество*

$$M = \left\{\alpha < \omega_\tau : T\left(\Sigma\left\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\right\}\right) = \Sigma\left\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\right\}\right\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

(*iii*) *Пусть ω_τ — начальный ординал регулярной мощности, ω_σ — начальный ординал такой, что $\omega \leqslant \omega_\sigma < \omega_\tau$. Если $T\colon \Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\} \to \Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\}$ — линейный гомеоморфизм, то множество*

$$M = \left\{\alpha < \omega_\tau : T\left(\Sigma_\alpha\left\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\right\}\right) = \Sigma\left\{B_p^{0,\alpha}[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\right\}\right\}$$

замкнуто и конфинально в $[1,\omega_\tau)$.

Доказательство аналогично доказательству [3, лемма 3]. □

Теорема 4. (*i*) *Пусть $\omega_\tau \geqslant \omega_2$ — начальный ординал регулярной мощности, $n, m < \omega$ и $n \neq m$. Тогда пространства $B_p[1,\omega_\tau \cdot n]$ и $B_p[1,\omega_\tau \cdot m]$ не являются линейно гомеоморфными.*

(*ii*) *Пусть $\omega_\tau \geqslant \omega_2$ — начальный ординал регулярной мощности, ω_σ и ω_ρ — начальные ординалы такие, что $\omega \leqslant \omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$, $\omega \leqslant \omega_\rho \leqslant \omega_\tau$ и $\omega_\sigma \neq \omega_\rho$. Тогда пространства $B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$ и $B_p[1,\omega_\tau \cdot \omega_\rho]$ не являются линейно гомеоморфными.*

Доказательство. Докажем вторую часть теоремы. Воспользуемся тем, что $B_p[1,\omega_\tau] \sim B_p^0[1,\omega_\tau]$, и допустим, что $T\colon \Sigma\left\{B_p^0[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\right\} \to \Sigma\left\{B_p^0[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\right\}$ — линейный гомеоморфизм. В силу лемм 2 и 3 найдутся замкнутые множества $L \subset [1,\omega_\tau)$ и $M \subset [1,\omega_\tau)$ такие, что $|L| = |M| = \aleph_\tau > \aleph_1$. Так как L и M замкнуты и конфинальны регулярному ординалу ω_τ, то найдется ординал $\alpha_0 \in L \cap M$ такой, что $\mathrm{cf}(\alpha_0) > \omega$ и $\alpha_0 \neq \omega_\tau$. Рассмотрим подпространство

$$H_{\alpha_0} = \left\{x = \{x_\gamma\} \in \Sigma\left\{B_p^0[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\right\} : x_\gamma(\alpha_0) = 0, \gamma < \omega_\tau\right\}.$$

Для каждого $x = \{x_\gamma\} \in H_{\alpha_0}$ определим функцию $x' = \{x'_\gamma\}$ формулой

$$x'_\gamma(\alpha) = \begin{cases} x_\gamma(\alpha), & \text{если } \alpha \leqslant \alpha_0, \\ 0, & \text{если } \alpha > \alpha_0 \end{cases}$$

и функцию $x'' = \{x''_\gamma\}$ формулой

$$x''_\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < \alpha_0, \\ x_\gamma(\alpha), & \text{если } \alpha \geqslant \alpha_0. \end{cases}$$

Ясно, что $x = x' + x''$. Поскольку $\alpha_0 \in M$, то $(Tx')_\delta(\alpha) = 0$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и всех $\delta < \omega_\rho$, а так как $\alpha_0 \in L$, то $(Tx'')_\delta(\alpha) = 0$ для всех $\alpha < \alpha_0$ и всех $\delta < \omega_\rho$. Поскольку $\mathrm{cf}(\alpha_0) > \omega$ и функция $(Tx'')_\delta$ непрерывна в точке α_0, то $(Tx'')_\delta(\alpha_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$T(H_{\alpha_0}) \subset G_{\alpha_0} = \left\{y = \{y_\delta\} \in \Sigma\left\{B_p^0[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\right\} : y_\delta(\alpha_0) = 0, \delta < \omega_\rho\right\}.$$

Аналогично, рассматривая отображение T^{-1}, получим $T^{-1}(G_{\alpha_0}) \subset H_{\alpha_0}$. Таким образом, $T(H_{\alpha_0}) = G_{\alpha_0}$. Тогда и факторпространства

$$\Sigma\left\{B_p^0[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\right\} / H_{\alpha_0} \sim \Sigma\{\mathbb{R} : \aleph_\sigma\},$$

$$\Sigma\left\{B_p^0[1,\omega_\tau] : \aleph_\rho\right\} / G_{\alpha_0} \sim \Sigma\{\mathbb{R} : \aleph_\rho\}$$

должны быть линейно гомеоморфны, что неверно, так как у них различные сетевые веса: $nw(\Sigma\{\mathbb{R} : \aleph_\sigma\}) = \aleph_\sigma$, а $nw(\Sigma\{\mathbb{R} : \aleph_\rho\}) = \aleph_\rho$.

Первая часть теоремы доказывается аналогично, а соответствующие факторпространства будут гомеоморфны $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, которые, как известно, не гомеоморфны. □

Лемма 4. *Пусть F — ретракт в X. Тогда имеет место линейный гомеоморфизм $B_p(X) \sim B_p(X|F) \times B_p(F)$, где $B_p(X|F) = \{f \in B_p(X) : f(x) = 0, x \in F\}$.*

Доказательство. Хорошо известно (см. например, [4]), что каждое замкнутое подмножество F в любом отрезке ординалов является его ретрактом. Пусть r есть ретракция X на F. Отображение $f \mapsto (f - f \cdot r, f|F)$ является искомым линейным гомеоморфизмом пространства $B_p(X)$ на произведение $B_p(X|F) \times B_p(F)$. □

В частности, $B_p[1,\alpha]$ линейно гомеоморфно $B_p^0[1,\alpha] \times Y$, где $B_p^0[1,\alpha] = \{f \in B_p[1,\alpha] : f(\alpha) = 0\}$, а Y — либо $\mathbb{R}$, либо дискретное двоеточие. Произведение $B_p^0[1,\alpha] \times Y$ отождествимо как с $B_p^0([1,\alpha] \cup \{0\})$, так и с $B_p^0[1,\alpha]$, поскольку компакты $[1,\alpha] \cup \{0\}$ и $[1,\alpha]$ гомеоморфны. В свою очередь, если F есть замкнутое конфинальное подмножество в отрезке ординалов $[1,\alpha]$, то $[1,\alpha] \setminus F$ распадается в дизъюнктное объединение $\bigsqcup_{s\in S}[\beta_s,\gamma_s)$, и легко видеть, что $B_p^0([1,\alpha]|F)$ естественным образом отождествимо с $\Sigma\left\{B_p^0[\beta_s,\gamma_s] : s \in S\right\}$. Этот подход является естественным приемом изучения пространств функций на отрезках ординалов и заключается в их разложении в произведения более простых множителей.

Теорема 5. *Пусть $\aleph_\tau$ — сингулярный кардинал. Тогда для любых $\alpha, \beta \in [\omega_\tau, \omega_{\tau+1})$ пространства $B_p[1,\alpha]$ и $B_p[1,\beta]$ линейно гомеоморфны.*

Доказательство. Как следует из теоремы 3, пространство $B_p[1,\alpha]$ для ординала α из полуинтервала $[\omega_\tau, \omega_{\tau+1})$, где $\aleph_\tau$ есть сингулярный кардинал, линейно гомеоморфно одному из пространств $B_p[1, \omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$, где $1 \leqslant \omega_\sigma \leqslant \omega_\tau$. По теореме 2 заключаем, что $B_p[1, \omega_\tau \cdot \omega_\sigma]$ линейно гомеоморфно сигма-произведению $\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau], \aleph_\sigma\}$. Стало быть, нам достаточно доказать, что пространство $B_p[1,\omega_\tau]$ линейно гомеоморфно любой своей Σ-степени не более чем $\aleph_\tau$ экземпляров сомножителей. Но очевидно, что если пространство эквивалентно некоторой своей Σ-степени, то оно будет эквивалентным и любой своей Σ-степени меньшей мощности. Значит, нам остается показать, что $B_p[1,\omega_\tau]$ линейно гомеоморфно пространству $\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\tau\}$.

Шаг 1. Покажем, что $B_p[1,\omega_\tau]$ линейно гомеоморфно пространству $\Sigma\{B_p[1,\omega_\tau] : \aleph_\sigma\}$ для любого кардинала $\aleph_\sigma < \aleph_\tau$.

Пусть $\sigma < \tau$ задано. Рассмотрим множество F, являющееся замыканием множества ординалов вида $\{\omega_\lambda^2 : \sigma \leqslant \lambda < \tau\}$. Согласно рассуждениям, которые следуют за леммой 4, мы можем заключить, что

$$B_p[1,\omega_\tau] \sim B_p(F) \times \Sigma\left\{B_p^0[\omega_\lambda^2, \omega_{\lambda+1}^2) : \sigma \leqslant \lambda < \tau\right\}.$$

Так как ординал $\omega_{\lambda+1}^2$ является некоторой степенью ординала ω, то $[\omega_\lambda^2, \omega_{\lambda+1}^2)$ гомеоморфно $[1, \omega_{\lambda+1}^2)$ (см. [2]). Поскольку множество F вполне упорядочено, т. е.является ординалом, и ω_τ сингулярен, то порядковый тип F меньше некоторого λ, где $\lambda < \tau$. Следовательно, $B_p^0[1, \omega_{\lambda+1}^2) \times B_p(F)$ линейно гомеоморфно $B_p^0[1, \omega_{\lambda+1}^2)$, поскольку $F \cup [1, \omega_{\lambda+1}^2)$ гомеоморфно $[1, \omega_{\lambda+1}^2)$. Значит, множитель $B_p(F)$ можно "спрятать" среди других сомножителей.

Опять в силу рассуждений, которые следуют за леммой 4, мы заключаем, что $B_p^0[1, \omega_{\lambda+1}^2)$ линейно гомеоморфно Σ-произведению $\Sigma\left\{B_p^0[1, \omega_{\lambda+1}) : \aleph_{\lambda+1}\right\}$. Итак, пространство $B_p^0[1, \omega_{\lambda+1}^2)$ линейно гомеоморфно Σ-произведению $\aleph_{\lambda+1}$ копий некоторого топологического векторного пространства. Но тогда, как мы уже отмечали выше, оно будет линейно гомеоморфно и Σ-произведению $\aleph_\sigma$ копий этого пространства. Так как каждый сомножитель линейно гомеоморфен такому Σ-произведению, то и все произведение будет иметь это свойство.

Ш а г 2. $B_p[1, \omega_\tau]$ линейно гомеоморфно пространству $\Sigma\{B_p[1, \omega_\tau], \aleph_\tau\}$.

Так как кардинал $\aleph_\tau$ является сингулярным, то

$$\aleph_\tau = \sum_{1 \leqslant \beta < \lambda} \aleph_\beta, \tag{3.1}$$

причем мощность ординала λ строго меньше $\aleph_\tau$. Согласно шагу 1 мы имеем $B_p[1, \omega_\tau] \sim \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau] : \aleph_\lambda\}$. По шагу 1 мы имеем $B_p[1, \omega_\tau] \sim \Sigma\{B_p[1, \omega_\tau] : \aleph_\beta\}$ для каждого $\beta < \lambda$. Следовательно,

$$B_p[1, \omega_\tau] \sim \Sigma\{\Sigma\{B_p[1, \omega_\tau]; \aleph_\beta\}; 1 \leqslant \beta < \lambda\}. \tag{3.2}$$

Из формул (3.1) и (3.2) получаем требуемое. □

Рассмотрим следующий класс ординалов:

$$\Delta_1 = \{\omega_\tau : \tau \geqslant 0\} \ \cup \ \{\omega_\tau \cdot n : \tau \geqslant 2, \ \aleph_\tau \text{ — регулярный кардинал}, \ \ n \in [2, \omega)\}$$

$$\cup \ \{\omega_\tau \cdot \omega_\sigma : \tau \geqslant 2, \aleph_\tau \text{ — регулярный кардинал}, \ \ \omega_\sigma \in [\omega, \omega_\tau]\}.$$

Δ_1 разбивает класс всех ординалов на непересекающиеся полуинтервалы $J_\delta = [\delta, \delta^+)$, где $\delta, \delta^+ \in \Delta_1$ и $\delta^+ = \min\{\gamma \in \Delta_1 : \gamma > \delta\}$. В этих обозначениях линейная гомеоморфная классификация пространств $B_p[1, \alpha]$, даваемая теоремами 3, 4, 5, принимает такой вид:

Теорема 6. *Пусть α и β — бесконечные ординалы. Пространства $B_p[1, \alpha]$ и $B_p[1, \beta]$ линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда α и β попадают в один полуинтервал J_δ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хмылёва Т.Е., Гензе Л.В.** Пространства функций первого класса Бэра, наделенные топологией поточечной сходимости, и их l-эквивалентность // Вест. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2008. № 3(4). С. 35–41.
2. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
3. **Гулько С.П.** Пространства непрерывных функций на ординалах и ультрафильтрах // Мат. заметки. 1990. Т. 47, вып. 4. С. 26–34.
4. **Douwen E.K. van.** Simultaneous extension of continuous function. Ph.D. Thesis. Amsterdam: Academische Pers, 1975. 99 p.

Поступила 06.05.2010

Гензе Леонид Владимирович
ст. преподаватель
Томский гос. ун-т
e-mail: genze@math.tsu.ru

Гулько Сергей Порфирьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Томский гос. ун-т
e-mail: gulko@math.tsu.ru

Хмылёва Татьяна Евгеньевна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Томский гос. ун-т
e-mail: khmyleva@math.tsu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.6

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ И ВЫПУКЛЫХ НЕРАВЕНСТВ, ОСНОВАННЫЕ НА ПРИНЦИПЕ ФЕЙЕРА[1]

И. И. Еремин

В статье рассматривается техника построения фейеровских операторов сжатия, обеспечивающих итерационные процессы решения линейных и выпуклых систем неравенств, а также сопутствующих задач оптимизации. В основе общего подхода используется понятие *M-фейеровского шага* "$p \to q$", определяемое свойством

$$|q - y| < |p - y|, \qquad \forall\, y \in M.$$

Это свойство (постулат) предполагает существование точки $p \notin \overline{\operatorname{conv} M}$ и подходящей точки q, выбор которой может быть достаточно произвольным. Некоторые задачи, рассматриваемые ниже, иллюстрируются схемами, отражающими аналитику этих задач.

Ключевые слова: линейное и выпуклое программирование, отображения сжатия, фейеровские процессы, множество неподвижных точек, оператор проектирования.

I. I. Eremin. Methods for solving systems of linear and convex inequalities based on the Fejér principle.

We consider the technique of constructing Fejér contraction mappings used in iterative processes of solving linear and convex systems of inequalities as well as accompanying optimization problems. The general approach is based on the notion of *M-Fejér step* "$p \to q$" defined by the property

$$|q - y| < |p - y|, \qquad \forall\, y \in M.$$

This property (postulate) assumes that $p \notin \overline{\operatorname{conv} M}$ with sufficiently arbitrary $q \neq \varnothing$. Some of the problems considered in the paper are illustrated by schemes reflecting the analytics of these problems.

Keywords: linear and convex programming, contraction mappings, Fejér processes, fixed point set, projection operator.

Введение

Пусть P — произвольное множество точек плоскости, которое ограничено. Оно состоит либо из конечного, либо из бесконечного числа точек. В последнем случае я предполагаю, что оно замкнуто. Кроме множества P пусть на плоскости взята какая-то точка A. Я спрашиваю: имеется ли на плоскости вторая точка B, которая расположена ближе к каждой отдельной точке множества P, нежели точка A к тому же самому множеству точек? Т. е. существует ли такая точка B, что $\overline{pB} < \overline{pA}$, когда p пробегает множество точек P? Ответ утвердительный, когда A лежит вне наименьшего выпуклого множества K, которое содержит множество P.

L.Fejér [1]

В настоящем тексте (математического содержания) рассматриваются вопросы *гармонизации* трех исходных и простейших объектов — множества $M \subset \mathbb{R}^n$, точки $p \notin M$ и заведомо существующей точки $q = \varphi(p)$.

Позднее было введено понятие *шага* "$p \to q$" и понятие *M-фейеровского шага* "$p \to q$". В первом варианте постулируется логический блок $p \notin \overline{\operatorname{conv} M}$ $(=: \widetilde{M})$, во втором варианте — *постулат*

$$|q - y| < |p - y|, \qquad \forall\, y \in M. \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00546, 10-01-00273) и Президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1001, 09-С-1-1010).

Смысл этого объекта состоит в том, что расстояния от точки q до каждой точки $y \in M$ меньше расстояний от p до тех же точек $y \in M$.

M-фейеровский *шаг* "$p \to q$" можно преобразовать в итерационный процесс, тогда точка p заменяется на $x_k \notin M$, а точка q — на $\varphi(x_k) =: x_{k+1}$. В рассматриваемой ситуации необходимый оператор $\varphi(\cdot)$ обеспечивает M-фейеровость *шага* "$x_k \to \varphi(x_k)$", $\{x_k\} \cap M = \varnothing$. Точка q выбирается (вычисляется) так, чтобы q вместе с $p \notin M$ обеспечивали выполнимость (непротиворечивость) постулата (1).

Сказанное формирует предпосылки построения последовательностей, сходящихся к точке из M. M-фейеровский *шаг* "$p \xrightarrow{\varphi} q$" допускает переход к построению динамического процесса

$$\Big\{x_k \xrightarrow{\varphi(\cdot)} x_{k+1} = \varphi(x_k)\Big\}_k.$$

Если в данном процессе при некотором $k = k'$ реализуется равенство $\varphi(x_{k'}) = x_{k'}$ (т. е. $x_{k'} \in \operatorname{Fix}\varphi(\cdot)$), то процесс считается законченным на точке $x_{k'}$. В содержательной интерпретации вектор $x_{k'}$ может восприниматься как некоторое *допустимое решение* (задачи) либо как оптимальное.

1. Обозначения, определения и постулаты

Введем некоторые обозначения:

$|x|$ — евклидова норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$;
$\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции $f(x)$ в точке x;
$h_x \in \partial f(x)$ — субградиент функции $f(x)$;
$\operatorname{conv} M$ — выпуклая оболочка множества $M \subset \mathbb{R}^n$;
$\overline{M}$ — замыкание множества M;
$\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$;
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^+ = (\alpha_1^+, \ldots, \alpha_n^+)$;
$\operatorname{Pr}_M(x)$ — метрическая проекция вектора x на множество M;
$\arg C$ — оптимальный вектор оптимизационной задачи, помеченной символом C (или ее номером в тексте);
$\operatorname{Arg} C := \cup \arg C$;
$H_= = \{x \mid l(x) = (a, x) - \alpha = 0\}$, $a \neq \varnothing$;
$H_\leq = \{x \mid l(x) \leq 0\}$;
$H_< = \{x \mid l(x) < 0\}$;
$Ax \leq b \sim (a_i, x) \leq \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Постулаты (основные положения):

$$\begin{gathered}\textit{M-фейеровский шаг} \quad "p \to q" \quad \textit{в предположении } p \notin M \textit{ и} \\ |q - y| < |p - y|, \qquad \forall\, y \in M;\end{gathered} \tag{2}$$

$$|\varphi(x) - y| < |x - y|, \qquad \forall\, y \in M, \qquad \forall\, x \notin M; \tag{3}$$

$$|\varphi(x_k) - y| < |x_k - y|, \qquad \forall\, y \in M = \operatorname{Fix}\varphi(\cdot), \qquad \{x_k\} \cap M = \varnothing;$$

$$|x_{k+1} - y| < |x_k - y|, \qquad \forall\, k, \quad \forall\, y \in M, \qquad \{x_k\} \cap M = \varnothing;$$

$$M \subset \Big\{x \;\Big|\; \Big(x - \frac{p+q}{2},\, p - q\Big) < 0\Big\}. \tag{4}$$

Система (1) может быть как совместной, так и несовместной (противоречивой или непротиворечивой). Корректность ее, т. е. совместность, эквивалентна корректности постулата (4).

Утверждение 1. *Система* (1) *непротиворечива тогда и только тогда, когда непротиворечива система* (4).

Утверждение 2. *M-фейеровский шаг "$p \to q$" возможен тогда и только тогда, когда $p \notin \overline{\mathrm{conv}\, M}$.*

Приведем рис. 1, приближенно изображающий логику постулатов (2) и (4).

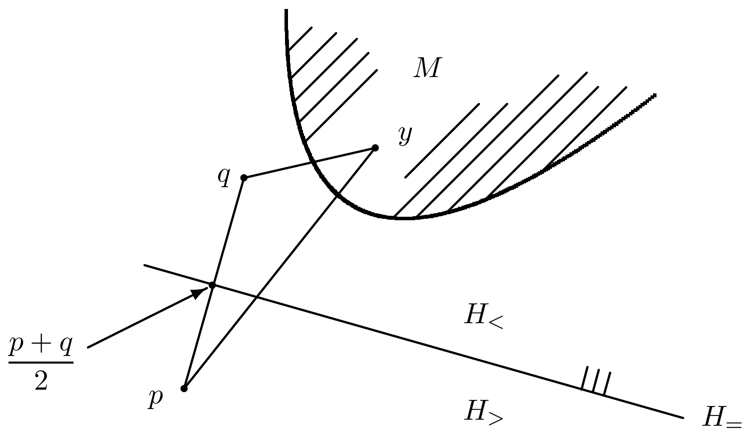


Рис. 1.

2. Конструкции отображений $\varphi_i(\cdot)$

Ниже приводится таблица, ориентированная на конструкции отображений $\varphi_i(x)$, полученных переработкой содержательных символов "$p_i \to q_i$" (*эффективные* шаги).

1	$p_1 \notin M_1 = \{x \mid l(x) = 0\}$	$q_1 = p_1 - \lambda \dfrac{l(p_1)}{\lvert a\rvert^2}\, a$
2	$p_2 \notin M_2 = \{x \mid Ax = b\}$	$q_2 = p_2 - \lambda \sum\limits_{(i)} \alpha_i \dfrac{l_i(p_2)}{\lvert a_i\rvert^2}\, a_i$
3	$p_3 \notin M_3 = \{x \mid Ax \le b\}$	$q_3 = p_3 - \sum\limits_{(i)} \lambda_i\, \alpha_i \dfrac{l_i^+(p_3)}{\lvert a_i\rvert^2}\, a_i$
4	$p_4 \notin M_4 = \{x \mid f(x) \le 0\}$	$q_4 = p_4 - \lambda \dfrac{f^+(p_4)}{\lvert h_{p_4}\rvert^2}\, h_{p_4}$
5	$p_5 \notin M_3 = \{x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$	$q_5 = q_3^+$
6	$p_6 \notin M_4 = \{x \mid f(x) \le 0,\ x \ge 0\}$	$q_6 = q_4^+$

(5)

З а м е ч а н и е 1. В табл. (5): $l(x) = (a, x) - \alpha$; $\lambda \in (0, 2)$; $\lambda_i \in (0, 2)$; $\alpha_i > 0$; $\sum\limits_{(i)} \alpha_i = 1$; $f(x)$ — выпуклая функция; h_x — субградиент функции $f(x)$.

Выпишем отображения $\varphi_1(x)$–$\varphi_4(x)$, вытекающие из выше приведенной таблицы:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x - \lambda \frac{l(x)}{|a|^2}\, a; \\
\varphi_2(x) &= x - \lambda \sum_{(i)} \alpha_i \frac{l_i(x)}{|a_i|^2}\, a_i; \\
\varphi_3(x) &= x - \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^+(x)}{|a_i|^2}\, a_i; \qquad (6) \\
\varphi_4(x) &= x - \lambda \frac{f^+(x)}{|h_x|^2}\, h_x. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Каждому из отображений $\{\varphi_i(\cdot)\}_1^4$ соответствует постулат (3).

Приведем (для примера) доказательство постулата (3) для $\varphi_3(x)$, т. е. для (6). Отображение $\varphi_3(x)$ для простоты обозначим как $\varphi(x)$. Итак, докажем

$$|\varphi(x) - y| < |x - y|, \qquad \forall\, y \in M, \qquad \forall\, x \notin M$$

(постулат Фейера):

$$|\varphi(x) - y|^2 = \Bigl(x - \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^+(x)}{|a_i|^2}\, a_i - y, \ x - \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^+(x)}{|a_i|^2}\, a_i - y\Bigr)$$

$$= |x - y|^2 + \sum_{(i)} \lambda_i^2 \, \alpha_i^2 \frac{l_i^{+^2}(x)}{|a_i|^2} - 2 \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^+(x)}{|a_i|^2}\, (a_i, x - y)$$

$$= |x - y|^2 + \sum_{(i)} \lambda_i^2 \, \alpha_i^2 \frac{l_i^{+^2}(x)}{|a_i|^2} - 2 \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^+(x)}{|a_i|^2}\, (l_i(x) - l_i(y))$$

$$= |x - y|^2 + \sum_{(i)} \lambda_i^2 \, \alpha_i^2 \frac{l_i^{+^2}(x)}{|a_i|^2} - 2 \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^{+^2}(x)}{|a_i|^2} + 2 \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \frac{l_i^+(x)\, l_i(y)}{|a_i|^2}$$

$$\le |x - y|^2 - \sum_{(i)} \lambda_i \, \alpha_i \, (2 - \lambda_i \, \alpha_i) \frac{l_i^{+^2}(x)}{|a_i|^2} < |x - y|^2,$$

т. е. $|\varphi(x) - y| < |x - y|$ для $\forall\, y \in M$.

Приведем еще один аналогичный пример, имеющий отношение к (7) (здесь $x \notin M = \{x \,|\, f(x) \le 0\}$). Имеем

$$|\varphi_4(x) - y|^2 = \Bigl(x - \lambda \frac{f^+(x)}{|h_x|^2}\, h_x - y, \ x - \lambda \frac{f^+(x)}{|h_x|^2}\, h_x - y\Bigr)$$

$$= |x - y|^2 + \lambda^2 \frac{f^{+^2}(x)}{|h_x|^2} - 2\, \lambda \frac{f^+(x)}{|h_x|^2}\, (h_x, x - y) = |x - y|^2 + \lambda^2 \frac{f^{+^2}(x)}{|h_x|^2} + 2\, \lambda \frac{f^+(x)}{|h_x|^2}\, (f(y) - f(x))$$

$$= |x - y|^2 - \lambda\, (2 - \lambda) \frac{f^{+^2}(x)}{|h_x|^2} + 2\, \lambda \frac{f^+(x)\, f(y)}{|h_x|^2} \le |x - y|^2 - \lambda\, (2 - \lambda) \frac{f^{+^2}(x)}{|h_x|^2} < |x - y|^2,$$

отсюда $|\varphi_4(x) - y| < |x - y|$, что и требовалось.

3. Неединственность точек q в фейеровском *шаге* “$p \to q$”

Выделим класс точек q, определяющих корректность (выполнимость) системы (1). Совокупность таких точек определяется следующим условием:

$$Q_p := \{q \mid |q-y| < |p-y|,\ \forall\, y \in M\}.$$

Утверждение 3. *Имеет место импликация*

$$\{q_1, \dots, q_N\} \subset Q_p \Rightarrow \operatorname{conv}\{q_1, \dots, q_N\} \subset Q_p$$

(*при произвольном наборе* $\{q_i\}_1^N$ *и номера* N).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $q' := \sum\limits_{(i)} \alpha_i\, q_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{(i)} \alpha_i = 1$. Имеем

$$|q'-y| = \Big|\sum_{(i)} \alpha_i\, q_i - \sum_{(i)} \alpha_i\, y\Big| = \Big|\sum_{(i)} \alpha_i\, (q_i - y)\Big|$$

$$\leq \sum_{(i)} \alpha_i\, |q_i - y| < \sum_{(i)} \alpha_i\, |p-y| = |p-y|,$$

т. е. $q' \in Q_p$.

Следствие 1. *Множество Q_p является выпуклым.*

4. Схема взаимодействия *шага* “$p \to q$” и M-фейеровского отображения

Динамическим вариантом фейеровского шага является M-фейеровское отображение, определяемое позициями

$$|\varphi(x) - y| < |x-y|, \quad \varphi(y) = y, \quad \forall\, y \in M, \quad \forall\, x \notin M$$

и

$$|\varphi(x_k) - y| < |x_k - y|, \quad \forall\, y \in M, \quad \{x_k\} \cap M = \varnothing, \quad \forall\, k. \tag{8}$$

На рис. 2 приведена схема взаимодействия.

$$\begin{array}{ccc} |p-y| & > & |q-y|,\ \forall\, y \in M \\ \nwarrow & & \nearrow \\ \text{“}\,p & \longrightarrow & q\text{”} \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & \varphi(x) \\ \swarrow & & \searrow \\ |x-y| & > & |\varphi(x)-y|,\ \forall\, y \in M \\ \searrow & & \swarrow \\ & (8) & \end{array}$$

Рис. 2.

Имеют место следующие утверждения [2,3].

Утверждение 4. *Если M-фейеровское отображение $\lambda(\cdot) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ непрерывно, то*

$$\{\lambda^k(x_0)\}_k \to x' \in M.$$

Утверждение 5. *Если M-фейеровское отображение $\lambda(\cdot) \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ многозначно и замкнуто, то*

$$\{x_{k+1} \in \lambda(x_k)\}_k \to x' \in M.$$

Утверждение 6. *Пусть $M = \{x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$ и*

$$q(x) := \left[x - \frac{\lambda}{2\delta} \bigtriangledown d(x)\right]^+.$$

Тогда $\{q^k(x_0)\}_k \to x' \in M$; здесь $\lambda \in (0,2)$, $\delta = \sum\limits_{(j)} a_j^2$, $d(x) = \sum\limits_{(j)} e_j^{+^2}(x)$.

Приведем также пример сводимости взаимно двойственных задач линейного программирования

$$L : \max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$$

и

$$L^* : \min\{(b,u) \mid A^T u \ge c,\ u \ge 0\}$$

к системе

$$Dz \le d, \qquad d \ge 0 \tag{9}$$

с информацией

$$D := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \\ -c^T & b^T \end{bmatrix}, \qquad d := \begin{bmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad z := \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \ge 0.$$

Справедливо

Утверждение 7. *Если задача L (или L^*) разрешима, то*

$$\mathrm{Arg}(9) = \mathrm{Arg}L \times \mathrm{Arg}L^* \qquad (\ne \varnothing).$$

5. Распараллеливание *шага* “$p \to q$”

На рис. 3 приведен демонстрационный пример M-фейеровского *шага* “$p \to q$” для случая $M = \{x \,|\, l_j(x) := (a_j, x) - b_j \le 0,\ j = 1, \ldots, m\}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & q_1 = p - \lambda_1 \dfrac{l_1^+(p)}{|a_1|^2} a_1 \arrow[dr] & \\ p \arrow[ur] \arrow[dr] & \vdots & q = \underbrace{p - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \dfrac{l_j^+(p)}{|a_j|^2} a_j}_{\varphi(p)} \\ & q_m = p - \lambda_m \dfrac{l_m^+(p)}{|a_m|^2} a_m \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Рис. 3.

Здесь $\lambda_j \in (0,2)$, $\sum\limits_{(j)} \alpha_j = 1$, $\alpha_j \ge 0$, $\forall\, j$; $\varphi(\cdot)$ — M-фейеровское отображение.

В схеме меняются ролями p и q.

6. Частично фейеровский *шаг*

Рассмотрим ситуацию, когда $M \not\subset H_<$ (см. рис. 4). Можно ввести множество $M' = M \cap H_<$ с условием $M' \neq \varnothing$. Система (1) здесь заменяется на систему

$$|q - y| < |p - y|, \qquad \forall\, y \in M'.$$

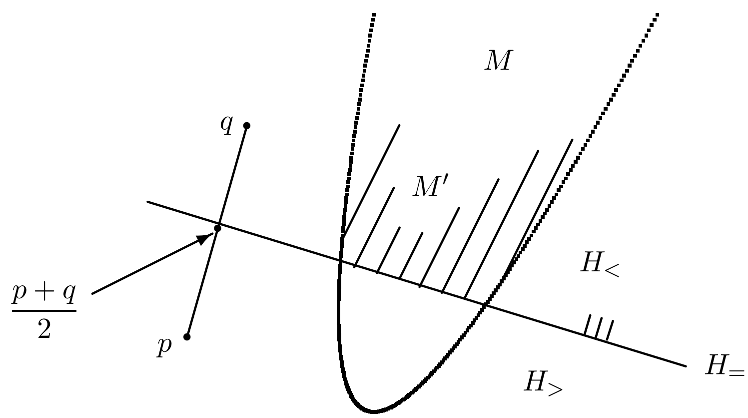


Рис. 4.

7. Нестрогий *шаг*

Нестрогий M-фейеровский шаг "$p \to q$" формирует нестрогую систему неравенств

$$|q - y| \le |p - y| \quad \forall\, y \in M$$

(в отличие от строгого шага, а именно: $|q - y| < |p - y|\ \forall\, y \in M$). Нестрогий шаг соответствует логическому эквиваленту системы

$$M \subset \Big\{ x \;\Big|\; \Big(x - \frac{p+q}{2},\, p - q \Big) \le 0 \Big\}.$$

8. Пополнение M-фейеровских отображений

Ниже приводятся несколько примеров, дополняющих виды M-фейеровских отображений.

8.1. Конкретный пример

Пусть $M = \{x \,|\, l_i(x) \le 0,\ i = 1, \dots, m\} \neq \varnothing$ и $p \notin M$. Без труда можно выбрать $i' : l_{i'}(p) > 0$. Гиперплоскость $\{x \,|\, l_{i'}(x) = 0\}$ будет разделять множество M и точку p. Как и в предыдущих вариантах, отображение $\varphi(x)$ в этом случае будет иметь вид

$$\varphi(x) = x - \lambda \frac{l_{i'}(p)}{|a_{i'}|^2}\, a_{i'}, \qquad \lambda \in (0, 2).$$

8.2. Пополнение на основе отделимости точки $p \notin M$ и множества $M = \{x \,|\, l_i(x) = (a_i, x) - b_i \le 0,\ i = 1, \dots, m\}$

Вопрос о строгой разделимости полиэдрального множества $M = \{x \,|\, l_i(x) \le 0,\ i, \dots, m\}$ и $p \notin M$ является хорошо отработанным. Можно использовать алгоритмы отделимости M

и p, получая разделяющую гиперплоскость $H(x)$. Способы разделимости многочисленны. Их использование в построении M-фейеровских отображений эффективно.

П р и м е р ы.

$$\varphi_H(x) = x - \lambda \sum_{(i)} \alpha_i \frac{l_i^+(x)}{|a_i|^2} a_i, \quad \lambda \in (0,2), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{(i)} \alpha_i = 1;$$

$$\{\varphi_H(x_k) = x_{k+1}\}_k \to x' \in M.$$

8.3. M-фейеровское отображение при $M = \{x \mid f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m\}$

Здесь $\{f_i(x)\}_i$ — выпуклые функции и $p \notin M$. Как и в п. 8.1, находим индекс i' такой, что $f_{i'}(p) > 0$. Пусть h_p — субградиент функции $f_{i'}(x)$ в точке p. Известно соотношение

$$(h_p,\, x - p) \leq f_{i'}(x) - f_{i'}(p)$$

или

$$\underbrace{(h_p,\, x - p) + f_{i'}(p)}_{H(x)} \leq f_{i'}(x).$$

Гиперплоскость $\{x \mid H(x) = 0\}$ разделяет множество M и точку $p \notin M$: $H(p) > 0$; $H(x) \leq 0$, $x \in M$. Завершение выкладок здесь является стандартным.

8.4. Реализация *шага* “$p \to q$” при ситуации $M := \mathrm{conv}\{q_i\}_1^m$

Данную ситуацию можно записать в форме

$$|q - q_i| < |p - q_i|, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Этому соответствует следующий алгоритм.

(1) Строится $M := \mathrm{conv}\{q_i\}_i$.

(2) Фиксируется точка $p \notin M$.

(3) Точка p и множество M отделяются гиперплоскостью $H_=$ $(p \notin H_=)$.

(4) Фиксируется точка q, симметричная точке p относительно гиперплоскости $H_=$ (относительно “зеркала” $H_=$).

8.5. Слабый M-фейеровский *шаг* “$p \to q$”

На рис. 5 приведен еще один пример нестрогого шага:

$$|q - y| \leq |p - y|, \qquad \forall\, y \in M.$$

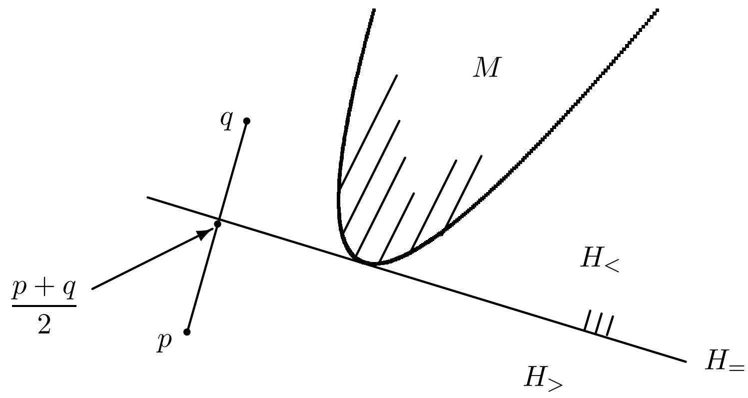


Рис. 5.

9. Применение фейеровского процесса для задачи проектирования точки $p \in \mathbb{R}^n$ на алгебраический многогранник

Пусть $M := \{x \mid Ax \le b\}$. Задачу проектирования можно записать в виде

$$\min\{|x-p|^2 \mid x \in M\}.$$

По S-технологии [4] эта задача сводится к решению системы

$$\left.\begin{array}{lll} -(AA^T)u \le b - Ap, & u \ge 0, & (10)' \\ u^T(AA^T)u - (Ap-b,u) \le 0, & & (10)'' \end{array}\right\}, \qquad (10)$$

состоящей из подсистемы линейных неравенств $(10)'$ с переменным вектором $u \in \mathbb{R}^n$ и одного выпуклого неравенства $(10)''$.

Для системы (10) можно тем или иным способом построить N-фейеровский оператор ($T \in \{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\}$), где N — множество решений системы (10). Если $\tilde{u}$ — решение этой системы, полученное как предел $\lim\limits_{t\to+\infty} T^t(u_0)$, то $\tilde{x} := p - A^T\tilde{u}$ является вектор-проекцией точки p на многогранник M. Если вместо $\tilde{u}$ берем $\tilde{u}_\varepsilon$ — приближенное решение системы (10), то $\tilde{x}_\varepsilon := p - A^T\tilde{u}_\varepsilon$ — приближенное проектирование точки p на M.

10. Отделимость выпуклых множеств

Речь идет об итеративной отделимости двух непересекающихся выпуклых замкнутых множеств. Пусть это будут M_1 и M_2, при этом $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

Если $\varphi_1(\cdot) \in \mathcal{F}_{M_1}$ и $\varphi_2(\cdot) \in \mathcal{F}_{M_2}$, то при тех или иных условиях уравнение $\varphi_2\varphi_1(x) = x$ будет разрешимо, т.е. $\exists\, p : \varphi_2\varphi_1(p) = p$. Положив $\varphi_1(p) =: q$, будем иметь

$$\varphi_1(p) = q, \qquad \varphi_2(q) = p,$$

т. е. получается замкнутый цикл: $\{p \to q \to p\}$.

Далее понадобится

Лемма 1. *Пусть $p \notin M$ и $q \in \mathbb{R}^n$ таковы, что*

$$|q-y| < |p-y|, \qquad \forall\, y \in M.$$

Положим $l(x) := \big(x - (p+q)/2,\, p-q\big)$. Тогда для любого $y \in M$ справедливо строгое неравенство $l(y) < 0$.

Доказательство леммы чисто выкладочное:

$$2\,l(y) = 2\Big(y - \frac{p+q}{2},\, p-q\Big) = ([y-p]+[y-q],\, [p-y]+[y-q])$$
$$= |q-y|^2 - |p-y|^2 < |p-y|^2 - |p-y|^2 = 0,$$

т. е. $l(y) < 0$.

Если положить $\varphi(p) =: q$, то лемме можно придать простой геометрический смысл (см. рис. 6):

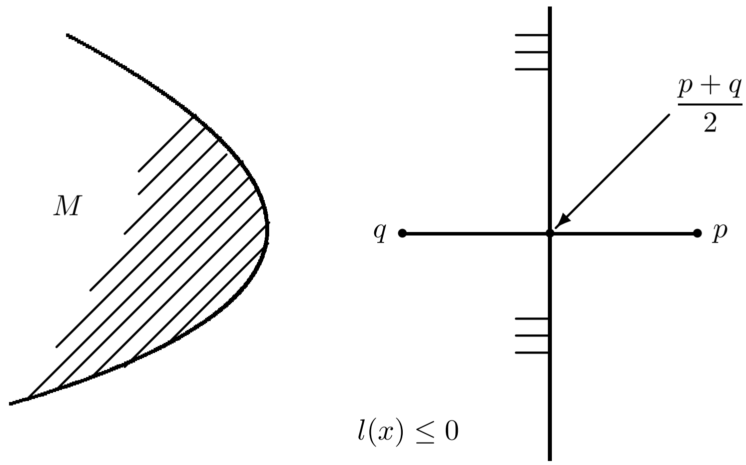


Рис. 6.

Применив сформулированную выше лемму 1, получим следующее утверждение.

Утверждение 8. *Пусть операторное уравнение $\varphi(x) := \varphi_2\varphi_1(x)$ разрешимо, т. е. $\exists\, p : \varphi(p) = p$. Положив $\varphi_1(p) =: q$, получим замкнутый цикл $\{p \to q \to p\}$. Пусть $H := \{x \mid l(x) := \{x \mid (x-(p+q)/2, p-q) = 0\}\}$. Тогда гиперплоскость H строго разделяет множества M_1 и M_2, а именно, верны включения $M_1 \subset \{x \mid l(x) < 0\}$ и $M_2 \subset \{x \mid l(x) > 0\}$.*

Утверждение 8 иллюстрирует рис. 7.

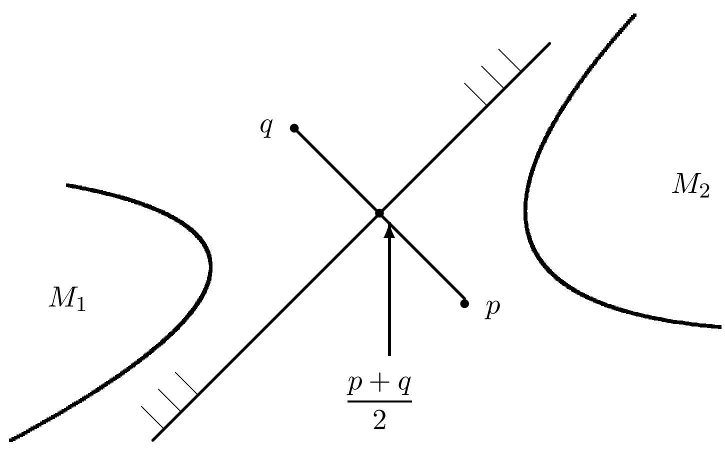


Рис. 7.

Замечание 2. Если в утверждении 8 положить $\varphi_1(x) = \mathrm{Pr}_{M_1}(x)$ и $\varphi_2(x) = \mathrm{Pr}_{M_2}(x)$, то (рис. 8)

$$\mathrm{Pr}_{M_1}\Big(\frac{p+q}{2}\Big) = p \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Pr}_{M_2}\Big(\frac{p+q}{2}\Big) = q. \tag{11}$$

Из этого, в частности, следует: $p = \mathrm{Pr}_{M_1}(q)$ и $q = \mathrm{Pr}_{M_2}(p)$.

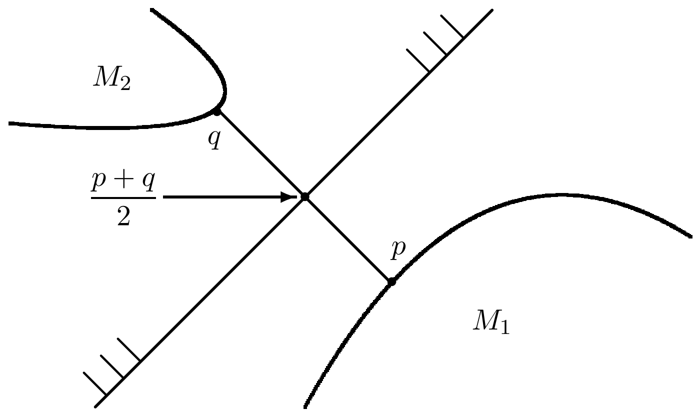


Рис. 8.

З а м е ч а н и е 3. В соответствии с соотношениями (11) можно аналитически определить слой S *максимальной толщины*, разделяющий множества M_1 и M_2. Запишем касательные гиперплоскости к множествам M_1 и M_2 в точках p и q с нормалями $\pm(p-q)$

$$\begin{aligned} H_1 &:= \{x \mid (x-p,\, q-p) = 0\}, \\ H_2 &:= \{x \mid (x-q,\, q-p) = 0\}. \end{aligned} \tag{12}$$

В соответствии с (12) слой S можно описать двумя линейными неравенствами

$$H_1^{\leq} := \{x \mid (x-p,\, q-p) \leq 0\},$$

$$H_2^{\geq} := \{x \mid (x-q,\ q-p) \geq 0\}.$$

Пересечение $H_1^{\leq} \cap H_2^{\geq}$ и есть слой S.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fejér L.** Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen // Math. Ann. 1922. 85(1). P. 41–48.
2. **Еремин И.И.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: изд-во “ Екатеринбург”, 1999. 312 с.
3. **Васин В.В., Еремин И.И.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). М.; Ижевск: НИЦ “ Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 199 с.
4. **Еремин И.И.** Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств // Изв. вузов. Математика. 2006. № 12. С. 33–43.

Еремин Иван Иванович
д-р физ.-мат. наук
академик РАН
гл. науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ermii@imm.uran.ru

Поступила 25.02.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ 4-ИЗОРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ[1]

А. Х. Журтов, А. А. Махнев, М. С. Нирова

Граф Γ называется t-изорегулярным, если для любого $i \leq t$ число соседей i-вершинного подграфа Δ зависит только от изоморфного типа Δ. Известна, что с точностью до перехода к дополнительному графу 4-изорегулярный граф является полным многодольным графом $K_{m\times n}$, пятиугольником, 3×3 решеткой или псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$. В работе найдены формулы для характеров автоморфизмов сильно регулярных подграфов псевдогеометрического графа для $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$. Изучен случай, когда подграф неподвижных точек автоморфизма простого порядка такого графа является пустым, кликой или кокликой.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизм графа.

A.H. Zhurtov, A.A. Makhnev, M.S. Nirova. On automorphisms of 4-isoregular graphs.

Graph Γ is called t-isoregular, if for each $i \leq t$ the number of common neighbours of i-vertex subgraph Δ depends only on the isomorphism type of Δ. It is known that 4-isoregular graph is a regular complete multipartite graph, pentagon, 3×3-grid or pseudo-geometric graph for $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$ (or the complement of such a graph). In this paper it is obtained formulas for the character values of automorphisms of strongly regular subgraphs of pseudo-geometric graph Γ for $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$. It is investigated the case, when a subgraph of fixed points of automorphism of prime order of Γ is empty, clique or coclique.

Keywords: strongly regular graph, automorphism of graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $[a] = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a. Для подмножества вершин S графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\cap_{a\in S}([a] - S)$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в λ треугольниках и для любых двух несмежных вершин a, b верно равенство $|[a] \cap [b]| = \mu$.

Через $K_{m\times n}$ обозначим полный двудольный граф с m долями порядка n. Граф на множестве пар $X \times Y$ называется *$p \times q$-решеткой*, если $|X| = p$, $|Y| = q$, а пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Система инцидентности $(X, \mathcal{L})$, где X — множество точек и $\mathcal{L}$ — множество прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. *Точечным графом* геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00009, 10-01-00026).

Заметим, что обобщенный четырехугольник определяется по своему точечному графу, поэтому мы будем обозначать через $GQ(s,t)$ и точечный граф обобщенного четырехугольника. Обобщенный четырехугольник в случае $s=1$ является графом $K_{t+1,t+1}$, а в случае $t=1$ является $(s+1)\times(s+1)$-решеткой.

Граф Γ называется t-однородным, если для любого $i\le t$ и для любых двух изоморфных i-вершинных подграфов Φ и Ψ найдется такой автоморфизм g графа Γ, что $\Phi^g=\Psi$. Граф Γ на v вершинах называется абсолютно однородным, если он является $(v-1)$-однородным. Гардинер [1] доказал, что каждый 5-однородный граф Γ является абсолютно однородным, и с точностью до перехода к дополнительному графу, Γ является полным многодольным графом $K_{m\times n}$, пятиугольником, или 3×3-решеткой.

Граф Γ называется t-изорегулярным, если для любого $i\le t$ и любого i-вершинного подмножества S число $|\Gamma(S)|$ зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного S. Как и выше, определяется абсолютно изорегулярный граф, t-изорегулярный граф Γ называется точно t-изорегулярным, если он не является $(t{+}1)$-изорегулярным. Камерон [2, теорема 8.21] доказал, что каждый 5-изорегулярный граф Γ является абсолютно изорегулярным и принадлежит списку графов в заключении теоремы Гардинера, а каждый точно 4-изорегулярный граф является экстремальным графом Смит (с точностью до перехода к дополнительному графу, Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$). При $r=1$ получим точечный граф единственного обобщенного четырехугольника порядка $(2,4)$, а при $r=2$ получим граф Маклафлина. А.А. Махнев [3] доказал, что псевдогеометрический граф для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$ не существует в случае $r=3$. В данной статье найдены формулы для характеров автоморфизмов сильно регулярных подграфов псевдогеометрического графа для $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$. Изучен случай, когда подграф неподвижных точек автоморфизма простого порядка такого графа является пустым, кликой или кокликой.

Теорема. *Пусть Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r,(2r-1)(r+1)^2)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Если Ω не содержит геодезических 2-путей, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *Ω — пустой граф, p делит $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$, и если $p=3$, то $r\equiv 1 \pmod 3$, $\alpha_1(g)=wr(2r+1)$ и $w+1$ делится на $r+1$;*

(2) *Ω является 1-кликой и либо $p=37$, $r=37u+17$, либо $p=2$;*

(3) *Ω является m-кокликой, $3\le m\le 4r^2+4r-2$, p делит r и $m+1$.*

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ), Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1,\ldots,d_N$. Тогда $(v-N)-(kN-2M)+\lambda M+\mu(\binom{N}{2}-M)-\sum\binom{d_i}{2}=x_0+\sum\binom{i-1}{2}x_i$ и $(\sum ix_i)^2\le\sum x_i\sum i^2x_i$, где x_i — число вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.*

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma-\Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$ и число 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma-\Delta$, получим равенства $v-N=\sum x_i$, $kN-2M=\sum ix_i$ и $\lambda M+\mu(\binom{N}{2}-M)-\sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}=\sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим равенство из заключения леммы.

Квадратный трехчлен $\sum(i-x)^2x_i=\sum i^2x_i-2x\sum ix_i+x^2\sum x_i$ неотрицателен. Поэтому дискриминант этого трехчлена $(\sum ix_i)^2-\sum x_i\sum i^2x_i$ неположителен. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ) и неглавными собственными значениями $r,s,$ $s<0$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma-\Delta$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, [4, §2]).

Лемма 1.3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с собственными значениями $k,r>0,s<-1$ кратностей $1,f,g$ соответственно и $l=v-k-1$. Допустим, что для некоторой вершины a подграф $[a]$ сильно регулярен с матрицей смежности A_1, собственными значениями $k_1,r_1,s_1<0$ кратностей $1,f_1,g_1$ соответственно и $\Gamma_2(a)$ сильно регулярен с матрицей смежности A_2, собственными значениями $k,r_2,s_2<0$ кратностей $1,f_2,g_2$ соответственно. Тогда выполняется одно из утверждений*:

(1) $r_2=r=r_1$, $s_1+s_2=r+s$, $g_1=g_2=g-1<f-1$ *или* $s_2=s=s_1$, $r_1+r_2=r+s$, $f_1=f_2=f-1<g-1$;

(2) $r_2=r$, $A_1=O$, $s_2=r+s$, $1+g_2=g=k<l=f$ *или* $s=s_1$, $A_2=J-I$, $r_1=r+s+1$, $1+f_1=f=l<k=g$;

(3) $r_2=r,s_1=s$, $r_1+s_2=r+s$, $g_2=f_1,k=g,l=f$;

(4) $s_2=s,r_1=r$, $r_2+s_1=r+s$, $f_2=g_1,k=f,l=g$;

(5) $r_2\ne r\ne r_1$, $s_2\ne s\ne s_1$, $k=l=f=g$ *и* Γ *— пятиугольник.*

Доказательство. Лемма следует из [5, теоремы 6.2 и 6.4].

Лемма 1.4. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$. Тогда он имеет $v=8r^4+16r^3+6r^2-2r-1$ вершин и собственные значения $k=4r^4+6r^3,r,-(2r^3+3r^2)$ кратностей $1,f=8r^4+16r^3+2r^2-6r,g=4r^2+4r-2$ соответственно. Далее, для любой вершины a*

(1) *подграф $\Sigma=[a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-1}(2r-1,r^3+r^2-r-1)$, имеет $v_1=4r^4+6r^3$ вершин и собственные значения $k_1=2r^4+r^3-3r^2+r,r_1=r,s_1=-(r^3+r^2-r)$ кратностей $1,f_1=4r^4+6r^3-4r^2-4r+2,g_1=4r^2+4r-3$ соответственно*;

(2) *подграф $\Delta=\Gamma_2(a)$ сильно регулярен, имеет $v_2=4r^4+10r^3+6r^2-2r-2$ вершин и собственные значения $k_2=2r^4+3r^3,r_2=r,s_2=-(r^3+2r^2)$ кратностей $1,f_2=4r^4+10r^3+2r^2-6r,g_2=4r^2+4r-3$ соответственно.*

Доказательство. Лемма следует из леммы 1.3.

Лемма 1.5. *Пусть Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{r-1}(2r-1,r^3+r^2-r-1)$. Тогда он имеет $v=4r^4+6r^3$ вершин и собственные значения $k=2r^4+r^3-3r^2+r,r,-(r^3+r^2-r)$ кратностей $1,f=4r^4+6r^3-4r^2-4r+2,g=4r^2+4r-3$ соответственно. Далее, для любой вершины a*

(1) *подграф $\Sigma'=[a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-2}(2r-2,(r^3-3r-2)/2)$, имеет $v_1=2r^4+r^3-3r^2+r$ вершин и собственные значения $r^4-r^3-3r^2+3r,r,-(r^3-3r)/2$ кратностей $1,f_1=2r^4+r^3-7r^2-3r+3,g_1=4r^2+4r-4$ соответственно*;

(2) *подграф $\Delta'=\Gamma_2(a)$ сильно регулярен с параметрами $(2r^4+5r^3+3r^2-r-1,r^4+r^3-r^2,(r^4-r^3-3r^2+3r)/2,(r^4-r^2)/2)$ и собственными значениями $r^4+r^3-r^2,r,-(r^3+2r^2-r)/2$ кратностей $1,2r^4+5r^3-r^2-5r+2,4r^2+4r-4$ соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемма следует из леммы 1.3, примененной к псевдогеометрическому графу для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$.

Лемма 1.6. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$ *и собственными значениями* $k=2r^4+3r^3, r, -(r^3+2r^2)$ *кратностей* $1, 4r^4+10r^3+2r^2-6r, 4r^2+4r-3$ *соответственно. Если* $r \geq 2$, *то для любой вершины* a

(1) *подграф* $\Sigma'' = [a]$ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$ *и собственными значениями* $r^4-2r^2+r, r, -(r^3+r^2-2r)/2$ *кратностей* $1, 2r^4+3r^3-4r^2-4r+3, 4r^2+4r-4$ *соответственно*;

(2) *подграф* $\Delta'' = \Gamma_2(a)$ *сильно регулярен с параметрами* $(2r^4+7r^3+6r^2-2r-3, r^4+2r^3, (r^4-3r^2+2r)/2, (r^4+r^3)/2)$, *собственными значениями* $r^4+2r^3, r, -(r^3+3r^2)/2$ *кратностей* $1, 2r^4+7r^3+2r^2-6r, 4r^2+4r-4$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лемму 1.3 применим к сильно регулярному графу с параметрами $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$, $r \geq 2$ и собственными значениями $k=2r^4+3r^3, r, -(r^3+2r^2)$ кратностей $1, f=4r^4+10r^3+2r^2-6r, g=4r^2+4r-3$ соответственно. Тогда $g_1 = 4r^2+4r-4$, $r-s_1 = (v_1 r+k_1-r)/g_1 = r^2(r+1)/2$. Поэтому $s_1 = -(r^3+r^2-2r)/2$, $\mu_1 = k_1+rs_1 = (r^4-r^3-2r^2+2r)/2$ и $\lambda_1 = \mu_1+r+s_1 = (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2$.

Далее, $g_2 = 4r^2+4r-4$, $r-s_2 = (v_2 r+k_2-r)/g_2 = r(r^2+3r+2)/2$. Поэтому $s_2 = -(r^3+3r^2)/2$, $\mu_2 = k_2+rs_2 = (r^4+r^3)/2$ и $\lambda_2 = \mu_2+r+s_2 = (r^4-3r^2+2r)/2$. Лемма доказана.

Лемма 1.7. *Пусть* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_r(2r, 2r^3+3r^2-1)$. *Тогда выполняются следующте утверждения*:

(1) *каждый* μ*-подграф сильно регулярен с параметрами* $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$;

(2) *для вершин* $a \in \Gamma, b \in \Gamma_2(a)$ *подграф* $[b]$ *разбивается двумя сильно регулярными подграфами* $[a] \cap [b]$ *и* $[b]-[a]$ *с одинаковыми параметрами* $(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вершины a, b не смежны, $\Lambda = [a] \cap [b]$. Тогда $|\Lambda| = 2r^4+3r^3$. Так как степень вершины в μ-подграфе равна значению параметра μ в окрестности вершины, то $k_\Lambda = r^4-2r^2+r$. Так как значение параметра λ в μ-подграфе равно значению параметра μ в λ-подграфе, то $\lambda_\Lambda = (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2$. Наконец, граф Λ сильно регулярен и из прямоугольного соотношения следует, что $\mu_\Lambda = (r^4-r^3-2r^2+2r)/2$. Лемма доказана.

2. Метод Хигмена

Доказательство теоремы опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. При этом графу Γ соответствует симметричная схема отношений $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$, где R_0 — отношение равенства на множестве вершин X графа Γ, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\overline{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пусть π_i — ортогональное проектирование $\mathbf{C}^v$ на i-ое собственное подпространство W_i матрицы смежности A графа Γ. Так как A перестановочна с любой матрицей из $\psi(G)$, то подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления группы G, полученного при проектировании π_i. Тогда для любого $g\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$ верно равенство

$$\chi_i(g)=v^{-1}\sum_{j=0}^{2}Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x,x^g)\in R_j$.

Если Γ является сильно регулярным графом с целыми собственными значениями, g — автоморфизм графа Γ простого порядка p и χ — характер представления группы G, полученного при проектировании π_i, то из леммы 3 и [3, предложение 2], примененного к циклической группе $\langle g\rangle$, следует, что

$\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и

$\chi(1)-\chi(g)$ делится на p.

Если p не делит ни v/Q_{i1}, ни v/Q_{i2}, то условие делимости $\chi(1)-\chi(g)$ на p выполняется тривиально.

Лемма 2.1. *Пусть Γ является псевдогеометрическим графом для частичной геометрии $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-2$, на элементе $g\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно*

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1))+(2r^2+2r-1)/(r+1).$$

Доказательство. По условию леммы Γ имеет параметры $v=8r^4+16r^3+6r^2-2r-1$, $k=4r^4+6r^3$, $\lambda=2r^4+r^3-3r^2+r$, $\mu=2r^4+3r^3$ и собственные значения $k,r,-r^2(2r+3)$ кратностей 1, $8r^4+16r^3+2r^2-6r$, $4r^2+4r-2$ соответственно. Отсюда

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\4r^4+6r^3&r&-2r^3-3r^2\\4r^4+10r^3+9r^2-3r-2&-r-1&2r^3+3r^2-1\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\8r^4+16r^3+2r^2-6r&\dfrac{2r^2+r-1}{r}&-\dfrac{2r^2+r}{r+1}\\4r^2+4r-2&-\dfrac{2r^2+2r-1}{r}&\dfrac{2r^2+2r-1}{r+1}\end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-2$ равно

$$\chi_2(g)=\frac{1}{(2r+1)^2}\Big(2\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r+\alpha_2(g)/(r+1)\Big).$$

Подставляя $\alpha_2(g)=v-\alpha_0(g)/r-\alpha_1(g)$, получим

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1))+(2r^2+2r-1)/(r+1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть Σ является псевдогеометрическим графом для частичной геометрии $pG_{r-1}(2r-1,r^3+r^2-r-1)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$, на элементе $g\in\mathrm{Aut}(\Sigma)$ равно*

$$\varphi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r^2+r)+(2r^2+r-3)/(r+1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Σ имеет собственные значения $2r^4+r^3-3r^2+r, r, -(r^3+r^2-r)$ кратностей 1, $r^4+6r^3-4r^2-4r+2$, $4r^2+4r-3$ соответственно. Отсюда

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+r^3-3r^2+r & r & -r^3-r^2+r \\ 2r^4+5r^3+3r^2-r-1 & -r-1 & r^3+r^2-r-1 \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4r^4+6r^3-4r^2-4r+2 & 2r+2 & -\dfrac{2r^2+2r-2}{r+1} \\ 4r^2+4r-3 & -2r-3 & \dfrac{2r^2+r-3}{r+1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$ равно

$$\varphi_2(g)=\frac{1}{4r^4+6r^3}\Big(\big(4r^2+4r-3\big)\alpha_0(g)-(2r+3)\alpha_1(g)+\big(2r^2+r-3\big)\alpha_2(g)/(r+1)\Big).$$

Подставляя $\alpha_2(g)=v-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\varphi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r^2+r)+(2r^2+r-3)/(r+1)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(4r^4+10r^3+6r^2-2r-2, 2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, r^4+r^3)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$, на элементе $g\in \mathrm{Aut}(\Delta)$ равно*

$$\psi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r+1)^2+2r-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Δ имеет собственные значения $2r^4+3r^3, r, -(r^3+2r^2)$ кратностей 1, $4r^4+10r^3+2r^2-6r+2$, $4r^2+4r-3$ соответственно. Отсюда

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+3r^3 & r & -r^3-2r^2 \\ 2r^4+7r^3+6r^2-2r-3 & -r-1 & r^3+2r^2-1 \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4r^4+6r^3-4r^2-4r+2 & \dfrac{2r^2+2r-2}{r} & -2r \\ 4r^2+4r-3 & -\dfrac{2r^2+3r-2}{r} & 2r-1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$ равно

$$\psi_2(g)=\Big(\big(4r^2+4r-3\big)\alpha_0(g)-\big(2r^2+3r-2\big)\alpha_1(g)/r+(2r-1)\alpha_2(g)\Big)/v.$$

Подставляя $\alpha_2(g)=v-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим

$$\psi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r+1)^2+2r-1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть Σ' — псевдогеометрический граф для $pG_{r-2}(2r-2,(r^3-3r-2)/2)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g\in \mathrm{Aut}(\Sigma')$ равно $\varphi_2'(g)=2\big(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r+r^3-r^2-3r+2\big)/(r^2-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Σ' имеет собственные значения $r^4-r^3-3r^2+3r, r, -(r^3-3r)/2$ кратностей 1, $2r^4+r^3-7r^2-3r+3$, $4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4-r^3-3r^2+3r & r & -(r^3-3r)/2 \\ r^4+2r^3-2r-1 & -r-1 & (r^3-3r-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+r^3-7r^2-3r+3 & \dfrac{2r^2+r-1}{r-1} & -\dfrac{2r^3-r^2-6r+3}{r^2-1} \\ 4r^2+4r-4 & -\dfrac{2r^2+2r-2}{r-1} & \dfrac{2r^3-2r^2-6r+4}{r^2-1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-3$ равно

$$\varphi_2'(g)=\frac{2}{2r^2-r}\Big(2\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/(r-1)+(r-2)\alpha_2(g)/(r^2-1)\Big).$$

Подставляя $\alpha_2(g)=v-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\varphi_2'(g)=2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r+r^3-r^2-3r+2)/(r^2-1)$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть Δ' является сильно регулярным графом с параметрами $\big(2r^4+5r^3+3r^2-r-1, r^4+r^3-r^2, (r^4-r^3-3r^2+3r)/2, (r^4-r^2)/2\big)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g\in \mathrm{Aut}(\Delta')$ равно $\psi_2'(g)=2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r+1)^2+2r-2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Δ' имеет собственные значения $r^4+r^3-r^2, r, -(r^3+2r^2-r)/2$ кратностей 1, $2r^4+5r^3-r^2-5r+2$, $4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4+r^3-r^2 & r & -(r^3+2r^2-r)/2 \\ r^4+4r^3+4r^2-r-2 & -r-1 & (r^3+2r^2-r-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+5r^3-r^2-5r+2 & \dfrac{2r^2+3r-2}{r} & -(2r-1) \\ 4r^2+4r-4 & -\dfrac{2r^2+4r-2}{r} & 2r-2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$ равно $\psi_2'(g)=2(2r^2+2r-2)\alpha_0(g)-(r^2+2r-1)\alpha_1(g)/r+(r-1)\alpha_2(g))/v$. Подставляя $\alpha_2(g)=v-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим

$$\psi_2'(g)=2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r+1)^2+2r-2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть Σ'' является сильно регулярным графом с параметрами $\big(2r^4+3r^3, r^4-2r^2+r, (r^4-2r^3-3r^2+6r)/2, (r^4-r^3-2r^2+2r)/2\big)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g\in \mathrm{Aut}(\Sigma'')$ равно $\varphi_2''(g)=2(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/(r^2+r)+(2r^2-4)/(r+1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию леммы Σ'' имеет собственные значения $r^4-2r^2+r, r, -(r^3+r^2-2r)/2$ кратностей 1, $2r^4+3r^3-4r^2-4r+3$, $4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4-2r^2+r & r & -(r^3+r^2-2r)/2 \\ r^4+3r^3+2r^2-r-1 & -r-1 & (r^3+r^2-2r-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+3r^3-4r^2-4r+3 & 2r+3 & -\dfrac{2r^2+r-3}{r+1} \\ 4r^2+4r-4 & -2r-4 & \dfrac{2r^2-4}{r+1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$ равно

$$\varphi_2''(g) = \frac{1}{2r^4+3r^3}\Big(\big(4r^2+4r-4\big)\alpha_0(g) - (2r+4)\alpha_1(g) + \big(2r^2-4\big)\alpha_2(g)/(r+1)\Big).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\varphi_2''(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/(r^2+r) + (2r^2-4)/(r+1).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Пусть Δ'' является сильно регулярным графом с параметрами $(2r^4+7r^3+6r^2-2r-3, r^4+2r^3, (r^4-3r^2+2r)/2, (r^4+r^3)/2)$. Тогда значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Delta'')$ равно*

$$\psi_2''(g) = 2(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r)/((r+2)(r+1)) + (2r^2+2r-2)/(r+2).$$

Доказательство. По условию леммы Δ'' имеет собственные значения $r^4+2r^3, r, -(r^3+3r^2)/2$ кратностей 1, $2r^4+7r^3+2r^2-6r$, $4r^2+4r-4$ соответственно. Отсюда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r^4+2r^3 & r & -(r^3+3r^2)/2 \\ r^4+5r^3+6r^2-2r-4 & -r-1 & (r^3+3r^2-2)/2 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2r^4+7r^3+2r^2-6r & \dfrac{2r^3+7r^2+2r-6}{r^2+2r} & -\dfrac{2r^2+3r}{r+2} \\ 4r^2+4r-4 & -\dfrac{2r^3+8r^2+4r-6}{r^2+2r} & \dfrac{2r^2+2r-2}{r+2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-4$ равно

$$\psi_2''(g) = 2\Big(2\alpha_0(g) - (r+3)\alpha_1(g)/(r^2+2r) + \alpha_2(g)/(r+2)\Big)/\big((r+1)(2r+3)\big).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим

$$\psi_2''(g) = 2\big(\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/r\big)/\big((r+2)(r+1)\big) + (2r^2+2r-2)/(r+2).$$

Лемма доказана.

3. Автоморфизмы 4-изорегулярных графов

В этом разделе предполагается, что Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r, (2r-1)(r+1)^2)$, $r \geq 3$. Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 3.1. *Если Ω — пустой граф, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *p делит $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$, в частности, $p \neq 2$;*

(2) *если $p=3$, то $r \equiv 1 \pmod 3$, $\alpha_1(g) = wr(2r+1)$ и $w+1$ делится на $r+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω — пустой граф. Тогда p делит число вершин графа Γ, равное $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$.

Если $p=3$, то $r \equiv 1 \pmod 3$, и по целочисленности $\chi_2(g)$ имеем $\alpha_1(g) = wr(2r+1)$, причем $w-(2r^2+2r-1)$ делится на $r+1$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если Ω является n-кликой, то $n=1$ и либо $p=37$, $r=37u+17$, либо $p=2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $n \le 2r+1$ следует из границы Хофмана для клик.

Пусть Ω — одновершинный подграф. Тогда ввиду леммы 1.4 p делит $4r^4+6r^3$ и $4r^4+10r^3+9r^2-3r-2$. Если p делит r, то $p=2$. Если же p делит $2r+3$, то p делит $r-17$, поэтому $p=37$ и $r=37u+17$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой, $n \ge 2$. Тогда ввиду леммы 1.5 p делит $4r^4+10r^3+9r^2-3r-2$ и $2r^4+5r^3+3r^2-r-1$. Поэтому p делит $3r^2-r$, r^4+2r^3+r-2, r^3-2r+3 и r^2-6r+9. Отсюда p делит $(2r, r-3)$ и p делит 6. Значит, либо $p=3$ и r делится на 3, либо $p=2$ и r нечетно. Но в первом случае 3 не делит $2r^4+5r^3+3r^2-r-1$, противоречие.

Итак, $p=2$ и число n нечетно. Для $a \in \Omega$ по лемме 1.4 подграф $\Sigma = [a]$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{r-1}(2r-1, r^3+r^2-r-1)$ и число $\lambda_\Sigma = 2r-2+(r-2)(r^3+r^2-r-1)$ нечетно, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если Ω является m-кокликой, $m \ge 2$, то $3 \le m \le 4r^2+4r-2$, p делит r и $m+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω является m-кокликой, $m \ge 2$. Тогда ввиду леммы 1.7 p делит $2r^4+3r^3$ и $2r^4+7r^3+6r^2-2r-3-(m-2)$. Из границы Цветковича для коклик получим $m \le 4r^+4r-2$.

Пусть $m=2$ и $\Omega = \{a,b\}$. Если p делит r, то $p=3$. Допустим, что $[a] \cap [b]$ содержит треугольную $\langle g \rangle$-орбиту. Тогда 3 делит $(2r-2)+(r-2)(r^3+r^2-r-1)-2$, противоречие. Поэтому $\alpha_0(g) = \alpha_1(g) = 0$ в графе $[a] \cap [b]$, противоречие с леммой 2.6. Значит, p не делит r и p делит $2r+3$. Противоречие с тем, что p не делит $|\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)| = r^4+2r^3$.

Пусть $m \ge 3$. Тогда ввиду леммы 1.4 число p делит r^4+r^3, поэтому p делит r и $m+1$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Если Ω является объединением m изолированных клик, $m \ge 2$, то Ω — коклика.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Ω является объединением m изолированных клик, $m \ge 2$. Тогда ввиду леммы 1.7 p делит $2r^4+3r^3$. Если a, b — смежные вершины из Ω, $\Sigma = [a]$, то g действует без неподвижных точек на $\Sigma - b^\perp$, поэтому p делит $2r^4+5r^3+3r^2-r-1$. Отсюда p не делит r, p делит $2r+3$ и p делит $r+1$, противоречие.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gardiner A.** Homogeneous graphs // J. Comb. Theory 1976. Vol. 20. P. 94–102.
2. **Cameron P., Van Lint J.** Designs, graphs, codes and their links. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. 240 p. (London Math. Soc. Student Texts 22.)
3. **Махнев А.А.** О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486,165,36,66) // Украин. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 941–949.
4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.

5. **Cameron P., Goethals J., Seidel J.** Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents // J. Algebra. 1978. Vol. 55. P. 257–280.
6. **Cameron P.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts 45.)

Поступила 25.12.2009

Журтов Арчил Хазешович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Кабардино-Балкарский гос. ун-т

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Нирова Марина Сефовна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-Балкарский гос. ун-т
e-mail: nirova_m@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАНИЕ ПО СПЕКТРУ ПРОСТЫХ ГРУПП $C_p(3)$[1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа и $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. Доказывается, что если $\omega(G) = \omega(C_p(3))$, где p — нечетное простое число, то $G \cong C_p(3)$.

Ключевые слова: конечная простая группа, спектр группы, граф простых чисел, распознавание по спектру, симплектическая группа.

M. R. Zinov'eva. Recognizability by spectrum of simple groups $C_p(3)$.

Let G be a simple group, and let $\omega(G)$ be the set of orders of its elements. It is proved that, if $\omega(G) = \omega(C_p(3))$, where p is an odd prime, then $G \cong C_p(3)$.

Keywords: finite simple group, spectrum of a group, prime graph, recognition by spectrum, symplectic group.

Введение

Для конечной группы G через $\omega(G)$ обозначается *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. Для произвольного подмножества ω множества натуральных чисел через $h(\omega)$ обозначим число попарно не изоморфных конечных групп G таких, что $\omega(G) = \omega$. Если k — натуральное число, то говорят, что группа G является *k-распознаваемой по спектру* (коротко, *k-распознаваемой*), если $h(\omega(G)) = k$. В частности, говорят, что G *распознаваема*, если $h(\omega(G)) = 1$, и *нераспознаваема*, если число $h(\omega(G))$ бесконечно. Проблема распознаваемости для конечной группы G считается решенной, если определено число $h(\omega(G))$. Так как конечная группа с нетривиальной разрешимой нормальной подгруппой нераспознаваема, то в проблеме распознаваемости рассматриваются, главным образом, почти простые группы.

К настоящему времени имеется большой список конечных простых и почти простых групп, для которых проблема распознавания решена (см., например, обзор Мазурова [1]). Большинство таких групп являются группами с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп с несвязным графом простых чисел заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. По [2] конечная неабелева простая группа P *квазираспознаваема*, если каждая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

Среди конечных простых групп группы с несвязными графами простых чисел являются довольно редкими. Теорема Грюнберга — Кегеля позволяет изучать только группы с несвязными графами простых чисел. В статье А. В. Васильева [3] доказана структурная теорема, которая при исследовании распознаваемости группы дает дополнительные ограничения. В частности, теорема А. В. Васильева может быть применена к простым группам лиева типа с несвязным графом простых чисел. Уточнение этой теоремы можно найти в [4].

Распознаваемость по спектру простой группы $C_3(3)$ была доказана в [5]. В данной статье мы доказываем распознаваемость для бесконечной серии конечных симплектических простых групп над полем порядка 3, существенно используя классификацию конечных простых групп.

Теорема. *Группы $C_p(3)$, где p — нечетное простое число, распознаваемы по спектру.*

В дальнейшем p обозначает простое число, $p > 3$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00324).

1. Предварительные результаты

Пусть G — конечная группа. Множество $\omega(G)$ частично упорядочено относительно делимости. Обозначим через $\mu(G)$ множество элементов из $\omega(G)$, максимальных относительно этого отношения. Пусть $\pi(n)$ — множество простых делителей натурального числа n. Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$. На множестве $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: вершины r и s в $\pi(G)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля, или графом простых чисел группы* G, и обозначается через $GK(G)$. Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \cdots, s(G)\}$, где $s(G)$ — количество связных компонент в графе $GK(G)$. Если порядок G четен, то считаем, что $2 \in \pi_1$. Также положим $\mu_i(G) = \{a \in \mu(G) \mid \pi(a) \subseteq \pi_i(G)\}$. В [6, 7] описаны связные компоненты всех конечных простых групп. В [8, лемма 4] доказано, что $\mu_i(G)$ — одноэлементное множество для каждой простой неабелевой группы G и $i \geq 2$. Обозначим через $n_i = n_i(G)$ единственный элемент из $\mu_i(G)$ при $i \geq 2$. Далее в [9] был получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Множество вершин графа называется *кокликой*, если его вершины попарно не смежны. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(q, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число q.

Для удобства доказательства теоремы разобьем класс конечных простых групп лиева типа характеристики r с несвязным графом Грюнберга — Кегеля на два подкласса N_1 и N_2. Используя результаты работ [6–8] и атлас конечных групп [10], составим табл. 1 и 2, описывающие параметры $t(r, S)$, $t(S)$ и n_i при $i \geq 2$ для групп S из подклассов N_1 и N_2 соответственно. В табл. 3 укажем множество $\pi_1(S)$ и числа n_i при $i \geq 2$ для спорадических и знакопеременных групп S с несвязным графом простых чисел.

В табл. 1–3 число p' — нечетное простое число и f — натуральное число.

Общая структура конечной группы с несвязным графом простых чисел описывается следующей теоремой Грюнберга — Кегеля.

Теорема 1 [6, теорема A]. *Если конечная группа G имеет несвязный граф простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(a) *$s(G) = 2$ и G — группа Фробениуса или двойная группа Фробениуса*;

(б) *существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq Aut(S)$, где $F(G)$ — максимальная нормальная нильпотентная подгруппа группы G; более того, $F(G)$ и $\overline{G}/S$ являются $\pi_1(G)$-подгруппами, $s(S) \geq s(G)$, и для каждого i с условием $2 \leq i \leq s(G)$ существует j с условием $2 \leq j \leq s(S)$ такое, что $\mu_i(G) = \mu_j(S)$.*

В [3] Васильев обобщил теорему Грюнберга — Кегеля.

Теорема 2 [3, теорема]. *Пусть G — конечная группа, удовлетворяющая двум условиям: $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда существует конечная простая неабелева группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/N \leq Aut(S)$, где N — максимальная разрешимая нормальная подгруппа группы G; более того, $t(S) \geq t(G) - 1$, и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *$S \cong A_7$ или $L_2(q)$ для некоторого нечетного q, и $t(S) = t(2, S) = 3$;*

(2) *для каждого простого числа $p \in \pi(G)$, не смежного с 2 в $GK(G)$, силовская p-подгруппа группы G изоморфна силовской p-подгруппе группы S, в частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.*

Теорема 2 является важным инструментом в доказательстве распознаваемости неабелевых простых групп.

Таблица 1

Параметры групп S из N_1

S	Условия на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S)=n_i\ (i\geq 2)$
$A_2(r^f)$	$(r^f-1)_3\neq 3, r^f+1=2^k$	2	2	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
${}^2A_2(r^f)$	$(r^f+1)_3\neq 3, r^f-1=2^k$	2	2	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2A_3(2)$		2	2	5
$C_2(r^f)$	$r^f>2$	2	2	$(r^{2f}+1)/(2,r^f-1)$
$C_3(2)$		2	2	7
$D_4(2)$		2	2	7
${}^3D_4(2)$		2	2	13
$A_5(2)$		2	3	31
$A_6(2)$		2	3	127
$C_4(2)$		2	3	17
${}^3D_4(r^f)$	$r^f>2$	2	3	$r^{4f}-r^{2f}+1$
${}^2F_4(2)'$		2	3	13
$A_1(r^f)$	$3<r^f\equiv\epsilon \pmod 4), \epsilon=\pm1$	3	3	$r,(r^f+\epsilon)/2$
$A_1(2^f)$	$f\geq 2$	3	3	$2^f\pm1$
$A_2(2)$		3	3	3,7
$A_2(r^f)$	$r^f\neq 2,\ (r^f-1)_3\neq 3,$ $r^f+1\neq 2^k$	3	3	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
$A_2(r^f)$	$(r^f-1)_3=3, r^f+1=2^k$	3	3	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
$A_3(r)$	$r=2,3,5$	3	3	7,13,31
$A_4(2)$		3	3	31
$A_7(2)$		3	3	127
${}^2A_2(r^f)$	$(r^f+1)_3\neq 3, r^f-1\neq 2^k$	3	3	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2A_2(r^f)$	$(r^f+1)_3=3, r^f-1=2^k$	3	3	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2A_4(2)$		3	3	11
${}^2A_5(2)$		3	3	7,11
${}^2D_4(2)$		3	3	17
${}^2D_5(2)$		3	3	17
$G_2(r^f)$	$2<r^f\equiv\epsilon \pmod 3), \epsilon=\pm1$	3	3	$r^{2f}-\epsilon r^f+1$
$G_2(3^f)$		3	3	$3^{2f}\pm3^f+1$
$C_5(2)$		3	4	31
$D_5(2)$		3	4	31
$D_6(2)$		3	4	31
$F_4(2)$		3	4	13,17
$A_{10}(2)$		3	5	2047
$F_4(r^f)$	r нечетно	3	5	$r^{4f}-r^{2f}+1$
$F_4(2^f)$	$f\geq 2$	3	5	$2^{4f}+1, 2^{4f}-2^{2f}+1$
$A_2(4)$		4	4	3,5,7
$A_2(r^f)$	$r^f\neq 4, (r^f-1)_3=3,$ $r^f+1\neq 2^k$	4	4	$(r^{3f}-1)/(r^f-1)(3,r^f-1)$
${}^2A_2(r^f)$	$r^f\neq 2, (r^f+1)_3=3,$ $r^f-1\neq 2^k$	4	4	$(r^{3f}+1)/(r^f+1)(3,r^f+1)$
${}^2B_2(2^{2f+1})$		4	4	$2^{2f+1}-1, 2^{2f+1}\pm2^{f+1}+1$
${}^2E_6(r^f)$	$r^f>2$	4	5	$(r^{6f}-r^{3f}+1)/(3,r^f+1)$
$E_6(r^f)$		4	5	$(r^{6f}+r^{3f}+1)/(3,r^f-1)$
${}^2E_6(2)$		4	5	13,17,19
${}^2G_2(3^{2f+1})$		5	5	$3^{2f+1}\pm3^{f+1}+1$
$E_7(2)$		5	8	73,127
$E_7(3)$		5	8	757,1093
S	условия на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S)=n_i\ (i\geq 2)$
${}^2F_4(8)$		4	4	37,109
${}^2F_4(2^{2f+1})$	$f>1$	4	5	$2^{4f+2}\pm2^{3f+2}+2^{2f+1}\pm2^{f+1}+1$

Таблица 2

Параметры групп S из N_2

S	Условия на S	$t(r,S)$	$t(S)$	$n_i(S)=n_i\ (i\geq 2)$
$B_n(r^f)$	$n=2^m\geq 4,\ r$ нечетно	2	$\left[\dfrac{3n+5}{4}\right]$	$(r^{nf}+1)/2$
$C_n(r^f)$	$n=2^m\geq 4,\ (n,r^f)\neq(4,2)$	2	$\left[\dfrac{3n+5}{4}\right]$	$(r^{nf}+1)/(2,r^f-1)$
$A_{p'-1}(r^f)$	$(p',r^f)\neq(5,2),$ $(7,2),(11,2),\ p'\geq 5$	3	$\dfrac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}-1)/((r^f-1)(p',r^f-1))$
$A_{p'}(r^f)$	$(r^f-1)\mid(p'+1),p'\geq 5,$ $(p',r^f)\neq(5,2),(7,2)$	3	$\dfrac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}-1)/(r^f-1)$
${}^2A_{p'-1}(r^f)$	$(p',r^f)\neq(5,2),\ p'\geq 5,$	3	$\dfrac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}+1)/((r^f+1)(p',r^f+1))$
${}^2A_{p'}(r^f)$	$(r^f+1)\mid(p'+1),p'\geq 5,$ $(p',r^f)\neq(5,2)$	3	$\dfrac{p'+1}{2}$	$(r^{p'f}+1)/(r^f+1)$
$B_{p'}(3)$		3	$\left[\dfrac{3p'+5}{4}\right]$	$(3^{p'}-1)/2$
$C_{p'}(r)$	$r=2,3,\ (p',r)\neq(3,2),(5,2)$	3	$\left[\dfrac{3p'+5}{4}\right]$	$(r^{p'}-1)/(2,r-1)$
$D_{p'}(r)$	$p'\geq 5,\ r=2,3,5,$ $(p',r)\neq(5,2),p'\equiv 1\pmod 4$	3	$\dfrac{3p'+1}{4}$	$(r^{p'}-1)/(r-1)$
	$p'\geq 5,\ r=2,3,5,p'\equiv 3\pmod 4$	3	$\dfrac{3p'+3}{4}$	$(r^{p'}-1)/(r-1)$
$D_{p'+1}(r)$	$r=2,3,\ (p',r)\neq(3,2),(5,2)$	3	$\left[\dfrac{3p'+4}{4}\right]$	$(r^{p'}-1)/(2,r-1)$
${}^2D_n(2)$	$n=2^m+1,\ m\geq 3$	3	$\left[\dfrac{3n+4}{4}\right]$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_{p'}(3)$	$5\leq p'\neq 2^m+1$	3	$\left[\dfrac{3p'+4}{4}\right]$	$(3^{p'}+1)/4$
${}^2D_n(3)$	$9\leq n=2^m+1\neq p'$	3	$\left[\dfrac{3n+4}{4}\right]$	$(3^{n-1}+1)/2$
${}^2D_{p'}(3)$	$p'=2^m+1,\ m\geq 2$	3	$\left[\dfrac{3p'+4}{4}\right]$	$(3^{p'-1}+1)/2,(3^{p'}+1)/4$
${}^2D_n(r^f)$	$n=2^m\geq 4,\ (n,r^f)\neq(4,2)$	4	$\left[\dfrac{3n+4}{4}\right]$	$(r^{nf}+1)/(2,r^f+1)$
$E_8(r^f)$	$r^f\equiv 2,3\pmod 5$	5	12	$(r^{10f}-r^{5f}+1)/(r^{2f}-r^f+1),$ $(r^{10f}+r^{5f}+1)/(r^{2f}+r^f+1),$ $r^{8f}-r^{4f}+1$
$E_8(r^f)$	$r^f\equiv 0,1,4\pmod 5$	5	12	$(r^{10f}-r^{5f}+1)/(r^{2f}-r^f+1),$ $(r^{10f}+r^{5f}+1)/(r^{2f}+r^f+1),$ $(r^{10f}+1)/(r^{2f}+1),$ $r^{8f}-r^{4f}+1$

Следуя [9], введем обозначение: если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r,q)=1$, то через $e(r,q)$ обозначим минимальное натуральное число n с условием $q^n\equiv 1\pmod r$. Если $r=2$, то пусть $e(2,q)=1$ при $q\equiv 1\pmod 4$ и $e(2,q)=2$ при $q\equiv 3\pmod 4$. Говорят, что простое число r с условием $e(r,q)=n$ является *примитивным простым делителем* числа q^n-1. Обозначим через $r_i(3)$ примитивный простой делитель числа 3^i-1, т. е. $r_i(3)$ делит 3^i-1 и не делит 3^j-1 для каждого $j<i$. По теореме Жигмонди [11] в случае $i\neq 2$ число $r_i(3)$ всегда существует. Нам понадобится несколько предварительных лемм.

Т а б л и ц а 3

Параметры спорадических и знакопеременных групп с несвязным графом простых чисел

S	$\pi_1(S)$	$n_i(S) = n_i$ $(i \geq 2)$
A_n	$6 < n = p', p'+1, p'+2$; одно из чисел $n, n-2$ не просто	p'
A_n	$n > 6, n = p', p'-2-$ простые числа	$p', p'-2$
M_{11}	$\{2,3\}$	5,11
M_{12}	$\{2,3,5\}$	11
M_{22}	$\{2,3\}$	5,7,11
M_{23}	$\{2,3,5,7\}$	11,23
M_{24}	$\{2,3,5,7\}$	11,23
J_1	$\{2,3,5\}$	7,11,19
J_2	$\{2,3,5\}$	7
J_3	$\{2,3,5\}$	17,19
J_4	$\{2,3,5,7,11\}$	23,29,31,37,43
Ru	$\{2,3,5,7,13\}$	29
He	$\{2,3,5,7\}$	17
McL	$\{2,3,5,7\}$	11
HN	$\{2,3,5,7,11\}$	19
HiS	$\{2,3,5\}$	7,11
Suz	$\{2,3,5,7\}$	11,13
Co_1	$\{2,3,5,7,11,13\}$	23
Co_2	$\{2,3,5,7\}$	11,23
Co_3	$\{2,3,5,7,11\}$	23
Fi_{22}	$\{2,3,5,7,11\}$	13
Fi_{23}	$\{2,3,5,7,11,13\}$	17,23
Fi'_{24}	$\{2,3,5,7,11,13\}$	17,23,29
$O'N$	$\{2,3,5,7\}$	11,19,31
LyS	$\{2,3,5,7,11\}$	31,37,67
F_1	$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,47\}$	41,59,71
F_2	$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$	31,47
F_3	$\{2,3,5,7,13\}$	19,31

Лемма 1. *Если $\omega(G) = \omega(C_p(3))$, то существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq Aut(S)$ и $\pi(F(G)) \bigcup \pi(\overline{G}/S) \subseteq \pi_1(G)$, причем S удовлетворяет системе неравенств*

$$\begin{cases} \dfrac{3^p - 1}{2} = n_i(S) \text{ для некоторого } i \geq 2, \\ t(S) \geq \Big[\dfrac{3p+5}{4}\Big] - 1, \end{cases} \tag{1}$$

где $t(S)$, $n_i(S)$ $(i \geq 2)$ взяты из табл. $1-3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $t(G) = t(C_p(3)) = [(3p+5)/4] \geq 3$ и $t(2, C_p(3)) = 2$ (см. табл. 2), то лемма 1 верна ввиду теорем 1 и 2. Лемма доказана.

Лемма 2 [12, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N есть группа Фробениуса с ядром Фробениуса F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s \cdot |C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Лемма 3. *Предположим, что* (1) *— это система неравенств из леммы* 1, *S — конечная простая неабелева группа лиева типа над полем характеристики r. Тогда*

(а) если $r \neq 3$, то (1) не имеет решений;

(б) если $r = 3$, то (1) имеет в точности следующие решения: $S \cong B_p(3)$, $C_p(3)$, $D_{p+1}(3)$, $D_p(3)$ для любого p; $E_7(3)$ для $p = 7$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $t(G) = t(C_p(3)) = t(B_p(3))$, $n_2(G) = n_2(C_p(3)) = n_2(B_p(3))$ и $p > 3$, то доказательство повторяет доказательство [13, лемма 6]. Лемма доказана.

Лемма 4 [13, лемма 7]. *Группы $B_p(3)$ и $D_p(3)$ содержат подгруппу, изоморфную группе Фробениуса $U : Z_{(3^p-1)/2}$, где U — нетривиальная 3-группа.*

Лемма 5. *Группа $C_p(3)$ содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса $U : Z_{(3^p-1)/2}$, где U — нетривиальная 3-группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — группа, изоморфная $C_p(3)$. По [14, 4.1.19] группа G содержит подгруппу, изоморфную $U : SL_p(3)$, где U — нетривиальная 3-группа. В $SL_p(3)$ возьмем циклическую подгруппу Z порядка $(3^p - 1)/2$. Ввиду табл. 2 группа $U : Z$ — искомая группа. Лемма доказана.

Определим, как в [9] функцию $\eta(x)$ на множестве натуральных чисел: $\eta(x) = x$ при нечетном x и $\eta(x) = x/2$ при четном x.

Лемма 6. *Пусть $r, s \in \pi(C_p(3)) \setminus \{2, 3\}$, $k = e(r, 3)$, $l = e(s, 3)$ и $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. Тогда r, s несмежны в $GK(C_p(3))$ тогда и только тогда, когда $\eta(k)+\eta(l) > p$ и k, l удовлетворяют условию: l/k не является нечетным натуральным числом. В частности, $\{r_3(3), r_{2p}(3), r_{2(p-1)}(3)\}$ является кокликой в $GK(C_p(3))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. См. доказательство [9, предложение 2.3] или [15, предложение 2.4]. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(C_p(3))$. Тогда по лемме 1 существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/F(G) \leq Aut(S)$, $\pi(F(G)) \bigcup \pi(\overline{G}/S) \subseteq \pi_1(G)$ и $s(S) \geq 2$. Мы используем классификацию конечных простых групп. Далее рассмотрим все возможности для S из табл. 1–3.

Лемма 7. *S не изоморфна спорадической группе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как графы простых чисел групп $C_p(3)$ и $B_p(3)$ одинаковы, то доказательство повторяет доказательство [13, лемма 9]. Лемма доказана.

Лемма 8. *S не изоморфна A_n при $n \geq 5$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как графы простых чисел групп $C_p(3)$ и $B_p(3)$ одинаковы, то доказательство повторяет доказательство [13, лемма 10]. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если S — простая группа лиева типа характеристики r, то $S \cong B_p(3)$ или $S \cong C_p(3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 $r = 3$ и S изоморфна одной из следующих групп: $B_p(3)$, $C_p(3)$, $D_{p+1}(3)$, $D_p(3)$ для любого p; $E_7(3)$ при $p = 7$.

Пусть $S \cong E_7(3)$ и $p = 7$. Тогда $\pi(C_7(3)) = \pi(3(3^7 + 1)\prod_{i=1}^{6}(3^{2i} - 1)) \cup \{1093\}$. Значит, $r_{18}(3) = 19 \notin \pi(C_7(3))$. Ввиду [10] $19 \in \pi(E_7(3))$; противоречие.

Предположим, что $S \cong D_p(3)$. Так как $r_{2p}(3) \notin \pi(D_p(3))$, то $O_{r_{2p}(3)}(F(G)) \neq 1$. С другой стороны, по лемме 4 существует подгруппа Фробениуса $U : Z_m$, где U — нетривиальная 3-группа и $m = (3^p - 1)/2$. Таким образом, $r_{2p}(3) \cdot (3^p - 1)/2 \in \omega(C_p(3))$; противоречие.

Пусть $S \cong D_{p+1}(3)$. Тогда по лемме 6 вершины $r_{p+3}(3)$ и $r_{p-1}(3)$ графа $GK(C_p(3))$ несмежны, а по [15, предложение 2.5] эти же вершины смежны в $GK(D_{p+1}(3))$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. *$G/F(G) \cong B_p(3)$ или $G/F(G) \cong C_p(3)$.*

Доказательство. Если $G/F(G) \neq S$, то по [16] граф простых чисел группы $G/F(G)$ связен. Поэтому $G/F(G) \cong S$. Лемма доказана.

Лемма 11. *$G \cong C_p(3)$.*

Доказательство. Предположим, что $G/F(G) \cong B_p(3)$. Докажем, что $\omega(G) \neq \omega(C_p(3))$. Пусть $F(G) \neq 1$. Можно предполагать, что $F(G)$ — нетривиальная элементарная абелева q-группа и $B_p(3)$ действует на $F(G)$ точно и неприводимо. Если $q = 3$, то ввиду [17, теорема 1.3] любой элемент из $B_p(3)$ централизует нетривиальный элемент из $F(G)$, поэтому 3 и $r_p(3)$ смежны, т. е. $\omega(G) \neq \omega(C_p(3))$. Пусть $q \neq 3$. По лемме 4 существует подгруппа Фробениуса $U : Z_m$ группы $B_p(3)$, где U — нетривиальная 3-группа и $m = (3^p - 1)/2$. Поэтому $q \cdot r_p(3) \in \omega(G)$ по лемме 2 и, следовательно, $\omega(G) \neq \omega(C_p(3))$. Значит, $F(G) = 1$. Тогда $G \cong B_p(3)$. Но по [18] $\omega(B_p(3)) \neq \omega(C_p(3))$; противоречие.

Таким образом, $G/F(G) \cong C_p(3)$. Аналогично предыдущему абзацу, используя лемму 5 и [17, теорема 1.3], доказываем, что $F(G) = 1$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В. Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. Математика и механика. 2005. Т. 36, вып. 7. С. 119–138.
2. **Алексеева О. А., Кондратьев А. С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 998–1003.
3. **Васильев А. В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 315–324.
4. **Васильев А. В., Горшков И. Б.** О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.
5. **Мазуров В. Д.** Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
6. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, № 2. P. 487–513.
7. **Кондратьев А. С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
8. **Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
9. **Васильев А. В., Вдовин Е. П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
10. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 250 p.
11. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, № 1. S. 265–284.
12. **Мазуров В. Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
13. **Зиновьева М. Р., Шен Р., Ши В.** Распознавание простых групп $B_p(3)$ по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 303–315.
14. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
15. **Васильев А. В., Вдовин Е. П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы: препринт / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2009. 34 с.

16. **Lucido M. S.** : 1) Prime graph components in finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; 2) Addendum to “Prime graph components in finite almost simple groups” // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
17. **Guralnick R. M., Tiep P. H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, № 3. P. 271–310.
18. **Shi W. J.** Pure quantitative characterization of finite simple groups // Front. Math. China. 2007. Vol. 2, № 1. P. 123–125.

Зиновьева Марианна Рифхатовна
Поступила 19.03.2010
канд. физ.-мат. наук, доцент
Урал. гос. техн. ун-т — УПИ
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (64,35,18,20)[1]

М. М. Исакова, А. А. Махнев

Выяснены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(64,35,18,20)$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизмы графов.

M. M. Isakova, A. A. Makhnev. On automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(64,35,18,20)$.

The possible orders and structure of the fixed point subgraphs of automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(64,35,18,20)$ is found.

Keywords: strongly regular graph, automorphisms of graphs.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a)=\Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$-графом, если $[a]\in\mathcal{F}$ для любой вершины $a\in\Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b)=2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (соотв. $\mu(a,b)$), если $d(a,b)=1$ (соотв. $d(a,b)=2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\dots,m_n$. Если $m_1=\ldots=m_n=m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m\ge 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X|=m$ и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X\times Y$ называется *$m\times n$-решеткой*, если $|X|=m$, $|Y|=n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma-\Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Частичной геометрией $pG_\alpha(s,t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00009).

прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия называется *сетью. Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α, s, t называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

В [1, теорема 2] найдены параметры сильно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x,t)$, где $x \le 3$. В случае $x = 2$ граф имеет параметры $(210, 95, 40, 45)$, и возможные автоморфизмы такого графа изучались в [2]. В случае $x = 3$ имеется много возможностей для параметров графа. Но если $t = 2$, то возможны лишь параметры (64,35,18,20) и (76,35,18,14). В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (64,35,18,20) и определены подграфы их неподвижных точек. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u, u^g) таких, что $d(u, u^g) = i$.

Теорема. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(64, 35, 18, 20)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g)$ *делится на* 8;

(2) Ω *является* n*-кликой,* $p = 7$, $n = 1$ *и* $\alpha_1(g) = 35$ *или* $p = 2$ *и либо*

(*i*) $n = 4$, $x_0 = 4, x_2 = 48, x_4 = 8$, 8 *делит* $\alpha_1(g) - 2$, *и если вершина из* X_0 *смежна с* y_i *вершинами из* X_i, *то* $y_2 = 40 - 2y_4$ *и* $y_0 = y_4 - 5$, *либо*

(*ii*) $n = 6$, 8 *делит* $\alpha_1(g) - 2$, $x_2 = 210 - 6x_4 - 15x_6$ *и* $x_0 = 5x_4 + 14x_6 - 152$, *либо*

(*iii*) $n = 8$, 8 *делит* $\alpha_1(g)$ *и* $x_4 = 56$;

(3) Ω *является* 4*-кокликой,* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) \in \{20, 60\}$;

(4) Ω *является объединением* m $(m \ge 2)$ *изолированных клик порядков* $n_1, \dots, n_m$, $p = 2$ *и* n_i *четно для любого* i;

(5) Ω *содержит* 2*-лапу и либо*

(*i*) $p = 5$ *и* Ω *является объединением двух изолированных вершин и полного многодольного графа* $K_{6\times 2}$, *либо*

(*ii*) $p = 3$ *и* $|\Omega| \in \{4, 7, 10, 13, 16\}$, *либо*

(*iii*) $p = 2$ *и* $|\Omega| \in \{6, 8, \dots, 28\}$ *или* $\alpha_1(g) = 0$, $|\Omega| = 32$ *и* $\Gamma - \Omega$ *— граф Тэйлора, в котором окрестности вершин изоморфны точечному графу обобщенного четырехугольника* $GQ(2, 2)$.

2. Предварительные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение хорошо известно (см., например, [3, §2]).

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(64,35,18,20)$ и неглавными собственными значениями $3,-5$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$-5 \le d - \frac{w(35-d)}{64-w} \le 3.$$

Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 8 (не больше 8). Если C является 8-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 5 вершинами из C. Если L является 8-кликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - L$ смежна точно с 4 вершинами из L.

Лемма 2.2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v,k,λ,μ). Тогда либо $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ и кратность $n-m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m-1$ делит $k-\lambda-1$ и*

$$\mu = \lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n = m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Это [4, лемма 3.1].

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X,\{R_0,\ldots,R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ=QP=vI$. Здесь v — число вершин, k,r,s — собственные значения графа Γ кратностей $1,f,v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств W_0,W_1,W_2 матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g\in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{2} Q_{ij}\alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x,x^g)\in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2.3. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(64,35,18,20)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g\in G$ и χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 28. Тогда $\chi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/8+4$.*

Доказательство. Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(64,35,18,20)$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n-m=3$, $-m=-5$ кратностей 35, 28,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 3 & -5 \\ 28 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 3 & -5 \\ 28 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 28, равно $\chi_2(g) = (28\alpha_0(g) - 4\alpha_1(g) + 4\alpha_2(g))/64$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/8 + 4$.

Лемма 2.4. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1, \ldots, d_N$. Тогда*

$$(v-N) - (kN - 2M) + \left(\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right) = x_0 + \sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i = x_i(\Delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства:
$v - N = \sum x_i$,
$kN - 2M = \sum i x_i$ и
$\lambda M + \mu\left(\binom{N}{2} - M\right) - \sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2} = \sum \binom{i}{2}x_i$.
Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое. Лемма доказана.

3. Автоморфизмы графа с параметрами (64,35,18,20)

В этом разделе Γ — сильно регулярный граф с параметрами (64,35,18,20), g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 3.1. *Если Ω — пустой граф, то $p = 2$ и $\alpha_1(g)$ делится на 8.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $v = 64$, то $p = 2$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что 8 делит $\alpha_1(g)$. Лемма доказана.

В леммах 3.2–3.10 предполагается, что g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит вершину a. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 3.2. *Пусть Ω является n-кликой. Тогда либо $n = 1$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 35$, либо $p = 2$ и выполняется одно из утверждений:*
(1) *$n = 4$, $x_0 = 4, x_2 = 48, x_4 = 8$, 8 делит $\alpha_1(g) - 2$, и если вершина из X_0 смежна с y_i вершинами из X_i, то $y_2 = 40 - 2y_4$ и $y_0 = y_4 - 5$;*
(2) *$n = 6$, 8 делит $\alpha_1(g) - 2$, $x_2 = 210 - 6x_4 - 15x_6$ и $x_0 = 5x_4 + 14x_6 - 152$;*
(3) *$n = 8$, 8 делит $\alpha_1(g)$ и $x_4 = 56$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитав число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, а также число треугольников с основанием в Ω и вершиной в $\Gamma - \Omega$, получим равенства

$$\sum x_i = 64 - n, \quad \sum i x_i = n(36 - n), \quad \sum \binom{i}{2}x_i = \binom{n}{2}(20 - n).$$

Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \leq 8$.
Пусть $n = 1$. Тогда p делит 35 и 28, поэтому $p = 7$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 3$ делится на 8, поэтому $\alpha_1(g) = 35$.
Пусть $n \geq 2$. Тогда p делит $k - \lambda - 1 = 16$, поэтому $p = 2$ и $x_i = 0$ для нечетного i.
Пусть $n = 2$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 6$ делится на 8. Далее, $x_0 = 12, x_1 = 32, x_2 = 18$, противоречие с тем, что $x_1 = 0$.
Пусть $n \geq 3$ нечетно. Тогда 2 делит $35 - (n - 1)$, противоречие.

Пусть $n=4$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g)-12$ делится на 8. Далее, $x_0+x_2+x_4=60$, $x_2+2x_4=64$, $x_2+6x_4=96$, поэтому $x_0=4, x_2=48, x_4=8$. Если вершина из X_0 смежна с y_i вершинами из X_i, то $y_0+y_2+y_4=35$, $2y_2+4y_4=80$, $y_2=40-2y_4$ и $y_0=y_4-5$.

Пусть $n=6$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что 8 делит $\alpha_1(g)-2$. Далее, $x_0+x_2+x_4+x_6=58$, $2x_2+4x_4+6x_6=180$, $x_2=210-6x_4-15x_6$, $x_0=5x_4+14x_6-152$.

Пусть $n=8$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 8 делит $\alpha_1(g)$. Так как для Ω достигается равенство в границе Хофмана для клик, то каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω, т. е. $x_4=56$.

Лемма 3.3. *Пусть Ω является m-кокликой, $m>1$. Тогда $m=4$, $p=5$ и $\alpha_1(g)\in\{20,60\}$.*

Доказательство. Уравнения для x_i получим, как и в лемме 3.2:

$$\sum x_i=64-m,\quad \sum ix_i=35m,\quad \sum\binom{i}{2}x_i=20\binom{m}{2}.$$

Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $m\le 8$.

Для различных вершин $a,b\in\Omega$ элемент g действует полурегулярно на $[a]\cap[b]$, $[a]-b^\perp$ и на $\Gamma_2(a)\cap\Gamma_2(b)-\Omega$, поэтому p делит 20, 15 и $12-(m-2)$. Отсюда $p=5$, m сравнимо с 4 по модулю 5 и $m=4$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g)-4$ делится на 8. Отсюда $\alpha_1(g)\in\{20,60\}$.

Имеем $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=60$, $x_1+2x_2+3x_3+4x_4=140$ и $x_2+3x_3+6x_4=120$. Поэтому $x_1=3x_3+8x_4-100$, $x_2=120-3x_3-6x_4$ и $x_0=40-x_3-3x_4$. Отсюда $x_4\le 13$ и в случае $x_4=10$ имеем $x_0=10-x_3, x_1=3x_3-20, x_2=60-3x_3$. Поэтому $x_0=0, x_1=10, x_2=30, x_3=10$.

В случае $x_4=5$ имеем $x_0=25-x_3, x_1=3x_3-60, x_2=90-3x_3$. Поэтому либо $x_0=5, x_1=0, x_2=30, x_3=20$, либо $x_0=0, x_1=15, x_2=15, x_3=25$.

В случае $x_4=0$ имеем $x_0=40-x_3, x_1=3x_3-100, x_2=120-3x_3$. Поэтому либо $x_0=5, x_1=5, x_2=15, x_3=35$, либо $x_0=0, x_1=20, x_2=0, x_3=40$.

Лемма 3.4. *Если Ω является объединением m $(m\ge 2)$ изолированных клик порядков $n_1,\dots,n_m$, то $p=2$ и n_i четно для любого i.*

Доказательство. Пусть Ω — объединение m $(m\ge 2)$ изолированных клик порядков $n_1,\dots,n_m$, $n_1\ge 2$. Если a,c — смежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a]\cap[c]$ и на $[a]-c^\perp$, поэтому p делит $18-(n_i-2)$ и 16. Отсюда $p=2$ и n_i четно для любого i.

Лемма 3.5. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если Γ содержит полный двудольный подграф $K_{m,n}$, то $mn\le 25$;*

(2) *если $x\in\Omega, u\in\Gamma-(\Omega\cup[x])$, то $[x]\cap[u]$ не содержится в Ω;*

(3) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v',k',18,20)$ и $p\le 19$;*

(4) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v',k',18,20-p)$ или $(v',k',18-p,20)$.*

Доказательство. Если Γ содержит полный двудольный подграф $\Delta=K_{m,n}$, то наименьшее собственное значение графа Δ равно $-\sqrt{mn}$ и не меньше -5, поэтому $mn\le 25$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $x\in\Omega$ и $u\in\Gamma-(\Omega\cup[x])$. Если $[x]\cap[u]\subset\Omega$, то $|\Omega\cap[u]|\ge 20$ и подграф $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой. Отсюда $|\Omega\cap[u]|=|\Omega\cap[u^g]|=20$ и $[u]\cap\Omega=[u^g]\cap\Omega$. Заметим, что $|\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)|=12$ и степень x в графе $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$ равна 15, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',18,20)$. Тогда $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k'-\mu)=4k'-76$ и 20 делит $k'(k'-19)$. Поэтому $k'=20$ и $n=2$. Но в этом случае $\Omega=K_{11\cdot 2}$. Противоречие с тем, что порядок максимальной клики в Γ не больше 8.

Допустим, что $p\ge 23$. Тогда $\lambda_\Omega=18$, $\mu_\Omega=20$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',18,20)$, противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18, 20-p)$. Тогда $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k'-\mu) = 4k' + p^2 - 76$ и $20-p$ делит $k'(k'-19)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a\times b}$. Тогда $(a-1)b = 20-p = k'$ и $(a-2)b = 18$, поэтому $b = 2-p$, противоречие.

В случае $p = 19$ имеем $\mu_\Omega = 1$, противоречие.

В случае $p = 17$ имеем $n^2 = 4k' + 213$ и $21 \le (n^2-213)/4 \le 35$, n нечетно. Отсюда $n = 19$, $k' = 27$, противоречие с тем, что Ω имеет собственное значение -2.

В случае $p = 13$ имеем $n^2 = 4k' + 93$ и $21 \le (n^2-93)/4 \le 35$, n нечетно. Отсюда $n = 15$, $k' = 33$ и Ω имеет собственные значения $12, -3$, противоречие с тем, что 12 больше 3.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' + 45$. Отсюда $n = 13, k' = 31$ и 9 не делит $31 \cdot 12$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' - 27$, $n = 9$, $k' = 9$, противоречие.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' - 51$, $n \in \{7, 9\}$, $k' \in \{25, 33\}$. При $n = 9$ число 15 не делит $33 \cdot 14$. При $n = 7$ граф Ω имеет собственные значения 5 и -2, противоречие с тем, что 5 больше 3.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' - 67$. Тогда $n \in \{5, 7\}$, противоречие с тем, что 17 делит $k'(k'-19)$.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' - 72$, тогда $n \in \{4, 6, 8\}$, $k' \in \{22, 27, 34\}$. Так как 18 делит $k'(k'-19)$, то $n = 6, k' = 27$ и Ω — граф с параметрами (40,27,18,18) и собственными значениями 3 и -3. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $40 \cdot 8$, поэтому некоторая вершина w из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 14 вершинами из Ω. Так как $\lambda_\Omega = 18$, то $[w] \cap \Omega$ является кокликой. Противоречие с тем, что максимальный порядок коклики в Γ не больше 8.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18-p, 20)$. Тогда $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k'-\mu) = 4k' + p^2 + 4p - 76$ и 20 делит $k'(k'-19+p)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a\times b}$. Тогда $(a-1)b = 20$ и $(a-2)b = 12-p$, поэтому $b = p+8$ делит 20, откуда $p = 2$ и $\Omega = K_{3\times 10}$. Противоречие с тем, что ввиду границы Хофмана для коклик имеем $b \le 8$.

В случае $p = 17$ имеем $n^2 = 4k' + 231$, противоречие с тем, что $4k' + 231$ сравнимо с 3 по модулю 4.

В случае $p = 13$ имеем $n^2 = 4k' + 145$, 20 делит $k'(k'-6)$ и $21 \le (n^2-145)/4 \le 34$, противоречие.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' + 89$, 20 делит $k'(k'-8)$ и $21 \le (n^2-89)/4 \le 34$, поэтому $n = 15, k' = 34$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' + 1$, 20 делит $k'(k'-12)$ и $21 \le (n^2-1)/4 \le 34$, поэтому $n = 11, k' = 30$, противоречие с тем, что Ω имеет параметры (58,30,11,20) и нарушается условие целочисленности.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' - 31$, 20 делит $k'(k'-14)$ и $21 \le (n^2+31)/4 \le 34$, поэтому $n = 9, k' = 28$, противоречие.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' - 55$, 20 делит $k'(k'-16)$ и $21 \le (n^2+55)/4 \le 34$, поэтому $n = 9, k' = 34$ или $n = 7, k' = 26$. В первом случае имеем противоречие, а во втором Ω имеет параметры (40,26,15,20) и нарушается условие целочисленности.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' - 64$, 20 делит $k'(k'-17)$ и $21 \le (n^2+64)/4 \le 34$, поэтому $n = 8, k' = 32$ или $n = 6, k' = 25$. В первом случае Ω имеет параметры (57,32,16,20) и собственные значения 2 и -6, противоречие с тем, что $-6 < -5$. Во втором случае Ω имеет параметры $(36, 25, 16, 20)$ и Ω — дополнительный граф к 6×6-решетке. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $36 \cdot 10$, поэтому некоторая вершина w из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с 13 вершинами из Ω. Так как $\mu_\Omega = 20$, то $[w] \cap \Omega$ является кликой. Противоречие с тем, что максимальный порядок клики в Γ не больше 8.

Итак, Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 18-p, 20)$. Лемма доказана.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Отметим следующее свойство:

($*$) если u смежна с u^g, то $|\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp| = 12$ и $|\Omega|$ не больше 30; если же u не смежна с u^g, то $|\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)| = 12$ и $|\Omega|$ не больше 32.

Аналогично получается свойство:

($**$) если $p \geq 3$ и $u^{\langle g \rangle}$ содержит 3-клику (3-коклику, 2-путь), то $|\Omega| \leq 13$ (соответственно $|\Omega| \leq 16$, $|\Omega| \leq 15$).

Докажем это свойство для 2-пути u, w, y. Положим $Z_i = X_i(\{u, w, y)$, $z_i = |Z_i|$. Тогда X_2 содержит по $18 - z_3$ вершин из $[u] \cap [w]$ и из $[w] \cap [y]$ и $19 - z_3$ вершин из $[u] \cap [y]$. Далее, X_1 содержит по $z_3 - 3$ вершин из $[u], [w]$ и из $[y]$. Поэтому $z_0 = 15 - z_3$. Так как Ω содержится в $Z_0 \cup Z_3$, то $|\Omega| \leq 15$.

Лемма 3.6. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) $p \neq 19$;
(2) $p \neq 17$ *и* $p \neq 13$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 19$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 1 или 20 вершин, причем ввиду леммы 3.5 обе возможности встречаются. Заметим, что вершина из Ω смежна с 19 вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому Ω — регулярный граф степени 16, противоречие.

Пусть $p = 17$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 1 или 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 3 или 20 вершин. Далее, любая вершина из Ω смежна с 17 вершинами из $\Gamma - \Omega$ и $|\Gamma - \Omega| = 17t$, $t = 2$. Таким образом, Ω — регулярный граф степени 18 на 30 вершинах. Если a, c — смежные вершины из Ω и $|\Omega(a) \cap [c]| = 1$, то Ω содержит a, c, вершину из $[a] \cap [c]$ и по 16 вершин из $[a] - c^\perp$ и из $[c] - a^\perp$, противоречие. Итак Ω — реберно регулярный граф с параметрами (32,18,18), противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 7 или 20 вершин. Для смежных вершин $a, c \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(c)$ содержит 5 или 18 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 13 или 26 вершинами из $\Gamma - \Omega$ и ее степень в Ω равна 22 или 9 соответственно. Если степень вершины a в Ω равна 9, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 5 на 9 вершинах, противоречие. Поэтому Ω — регулярный граф степени 22, и $|\Gamma - \Omega| = 13t$, $3 \leq t$ по свойству ($*$). Отсюда $|\Omega| = 25$, противоречие с тем, что для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит не менее 21 вершины.

Лемма 3.7. *Верно неравенство* $p \neq 11$, *и если* $p = 7$, *то* Ω *является одновершинным подграфом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 11$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 7 или в 18 треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 9 или 20 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 11 или 22 вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с 24 или 13 вершинами из Ω). Если степень вершины a в Ω равна 13, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 7 на 13 вершинах, противоречие. Поэтому Ω — регулярный граф степени 24, и $|\Gamma - \Omega| = 11t$, $3 \leq t$ по свойству ($*$). Отсюда $|\Omega| = 31$, и ввиду свойства ($*$) имеем $\alpha_1(g) = 0$, противоречие с тем, что в силу целочисленности $\chi_2(g)$ число $3\alpha_0(g) = 93$ должно делиться на 8.

Пусть $p = 7$ и $|\Omega| > 1$. Тогда любая $\langle g \rangle$-орбита длины 7 является кликой, кокликой, семиугольником или дополнительным графом к семиугольнику. По свойству ($**$) имеем $|\Omega| \leq 16$. Если $|\Omega| = 15$, то ввиду свойства ($**$) любая $\langle g \rangle$-орбита длины 7 является кокликой или семиугольником. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 3$ должно делиться на 8. Поэтому $\alpha_1(g) = \alpha_1(g^2) = \alpha_1(g^3) = 21$, противоречие с тем, что число семиугольных $\langle g \rangle$-орбит не больше 7.

Итак, $|\Omega| = 8$ и Ω является кликой или кокликой, противоречие.

Лемма 3.8. *Если* $p = 5$, *то* Ω *является кокликой или объединением двух изолированных вершин и полного многодольного графа* $K_{6 \times 2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 5$ и Ω не является кокликой. Тогда любая $\langle g\rangle$-орбита длины 5 является кликой, кокликой или пятиугольником. Далее, любое ребро графа Ω лежит в 3, 8, 13 или в 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $5j$ вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 5t$, и ввиду свойства $(**)$ имеем $10 \leq t \leq 12$.

Так как Ω содержит смежные вершины a, b, то степень a в Ω не меньше 5 и $t \neq 12$.

Если $t = 11$, то $|\Omega| = 9$, и степень любой вершины в графе Ω равна 0 или 5. Противоречие с тем, что $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 3 на 5 вершинах.

Если $t = 10$, то $|\Omega| = 14$ и ввиду свойства $(**)$ в Γ нет 5-кликовых $\langle g\rangle$-орбит. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 2$ делится на 8. Поэтому $\alpha_1(g) = \alpha_1(g^2) = 10$. Как и выше доказывается, что Ω не содержит вершин степени 5. Через Ω_0 обозначим связную компоненту графа Ω, содержащую a. Тогда Ω_0 — реберно регулярный граф с параметрами $(v', 10, 8)$, поэтому Ω_0 — полный многодольный граф $K_{6\times 2}$.

Лемма 3.9. *Если $p = 3$, то верно одно из утверждений*:

(1) Ω *является четырехугольником, и* $\alpha_1(g) - 4$ *делится на* 8;

(2) Ω *является полным многодольным графом* $K_{2,5}$, *и* $\alpha_1(g) + 3$ *делится на* 8;

(3) Ω *является полным многодольным графом* $K_{2,8}$, $K_{5,5}$ *или* $K_{5\times 2}$, *и* $\alpha_1(g) + 2$ *делится на* 8;

(4) $|\Omega| = 13$, *и* $\alpha_1(g) + 1$ *делится на* 8 *или* $|\Omega| = 16$, *и* $\alpha_1(g) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 3$. Тогда число $|\Omega|$ сравнимо с 1 по модулю 3, и любое ребро графа Ω лежит в $3i$ треугольниках из Ω, $i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2 + 3j$ вершин, $j \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 3t$, и ввиду свойства $(**)$ имеем $16 \leq t \leq 20$. Заметим, что вершина из Ω смежна с $3i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с $35 - 3i$ вершинами из Ω). Если Ω содержит вершину a степени $|\Omega| - 2$, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp} = \{a^*\}$ равно $|\Omega(a)|$, поэтому степень вершины a^* в Ω равна $|\Omega| - 2$. Если вершина a имеет степень 2 в Ω, то любая вершина из $\Omega - a^{\perp}$ смежна с обеими вершинами c, e из $\Omega(a)$.

Пусть $t = 20$. Тогда Ω является четырехугольником и по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) - 4$ делится на 8. Пусть $t = 19$. Тогда Ω является полным многодольным графом $K_{2,5}$ и по целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 3$ делится на 8.

Пусть $t = 18$. Тогда $|\Omega| = 10$ и степень любой вершины в Ω равна 2, 5 или 8. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 2$ делится на 8. Если вершина a имеет степень 2 в Ω, то либо Ω содержит еще одну вершину b степени 2 и Ω является полным многодольным графом $K_{2,8}$, либо $\Omega - \{c, e\}$ содержит вершину d степени 8 и $\Omega - \{a, c, d, e\}$ является 6-кликой. В последнем случае получим противоречие с тем, что вершина e смежна точно с 7 вершинами 8-клики $\{c\} \cup (\Omega - a^{\perp})$. Если же Ω не содержит вершин степени 2, то Ω является полным многодольным графом $K_{5\times 2}$ или регулярным графом степени 5.

Если Ω — регулярный граф степени 5, то Ω является полным многодольным графом $K_{5,5}$ или содержит треугольник. Пусть a, c — смежные вершины из Ω и $\Omega(a) \cap [c]$ содержит 3 вершины e_1, e_2, e_3. Тогда $\Omega(a) - c^{\perp}$ содержит вершину d, и $\Omega(c) - a^{\perp}$ содержит вершину b. Если вершины b, d несмежны, то можно считать, что вершина b смежна с e_1, вершина d смежна с e_2 и e_3 смежна с e_1, e_2. В этом случае $\Omega(e_3) \cap [e_1]$ содержит a, c и еще одну вершину f. Аналогично, $\Omega(e_3) \cap [e_2]$ содержит a, c, f. Противоречие с тем, что $\Omega(e_1) \cap [e_2] = \{a, c, e_3, f\}$. Значит, вершины b, d смежны, противоречие с тем, что $\{e_1, e_2, e_3\}$ — регулярный граф степени 1.

Пусть $t = 17$. Тогда $|\Omega| = 13$ и степень любой вершины в Ω равна 2, 5, 8 или 11. По целочисленности $\chi_2(g)$ число $\alpha_1(g) + 1$ делится на 8.

Пусть $t = 16$. Тогда $|\Omega| = 16$, и ввиду условия $(**)$ имеем $\alpha_1(g) = 0$.

Лемма 3.10. *Если $p = 2$ и Ω содержит геодезический 2-путь, то либо $|\Omega| \in \{6, 8, \ldots, 28\}$, либо $\alpha_1(g) = 0$, $|\Omega| = 32$ и $\Gamma - \Omega$ — граф Тэйлора, в котором окрестности вершин изоморфны точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 2$ и Ω содержит геодезический 2-путь. Тогда любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках из Ω, $i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2j$ вершин, $j \in \{0, 1, \ldots, 10\}$.

Далее, $|\Gamma - \Omega| = 2t$, и ввиду свойства $(*)$ имеем $16 \le t \le 29$. Заметим, что любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω, а любая вершина из Ω смежна с нечетным числом вершин из Ω.

Пусть $t = 29$. Тогда $|\Omega| = 6$ и $\alpha_1(g) - 2$ делится на 8. Далее, степень любой вершины в Ω равна 3 или 5. Если a — вершина степени 5 в Ω, то либо Ω — пятиугольная пирамида, либо Ω содержит две вершины a, c степени 5 и $\Omega - \{a, c\}$ является объединением изолированных ребер. Но в первом случае ребро из основания пирамиды лежит в единственном треугольнике из Ω, противоречие.

Допустим, что Ω — регулярный граф степени 3 на 6 вершинах. Тогда Ω является 3-призмой или полным многодольным графом $K_{3,3}$. В первом случае ребро из основания призмы лежит в единственном треугольнике из Ω, а во втором пара несмежных вершин из Ω имеет точно трех общих соседей в Ω. В обоих случаях получили противоречие.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Если вершины u, u^g несмежны, то Γ содержит 20 вершин из $[u] \cap [u^g]$, по 15 вершин из $[u] - [u^g]$, $[u^g] - [u]$ и 12 вершин из $\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)$. Если же вершины u, u^g смежны, то Γ содержит 18 вершин из $[u] \cap [u^g]$, по 16 вершин из $[u] - (u^g)^\perp$, $[u^g] - u^\perp$ и 12 вершин из $\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)$. Пусть $w \in [u^g] - u^\perp$ и $[w]$ содержит β вершин из $[u] \cap [u^g]$.

Допустим, что $\alpha_1(g) = 0$. По лемме 1.5 число $\chi_2(1) - \chi_2(g)$ делится на 2, поэтому $|\Omega| \in \{16, 32\}$. В случае $|\Omega| = 32$ имеем $X_0(\{u, u^g\}) \cup X_2(\{u, u^g\}) = \Omega$, поэтому $\Gamma - \Omega$ — регулярный граф степени 15. Далее, $[w]$ содержит $18 - \beta$ вершин из $[u^g] - [u]$, $20 - \beta$ вершин из $[u] - [u^g]$ и $\beta - 4$ вершин из $\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)$, поэтому $\beta = 12$. Отсюда Δ — граф Тэйлора с параметрами (32,15,6,8) и $\Delta(u)$ — сильно регулярный граф с параметрами (15,6,1,3). Поэтому окрестность каждой вершины в Δ — точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(2, 2)$.

Допустим, что $|\Omega| = 30$. Ввиду леммы 1.5 получим, что $\alpha_1(g) - 10$ делится на 16. По лемме 1.6 получим $X_0(\{u, u^g\}) \cup X_2(\{u, u^g\}) = \Omega$ для любых смежных вершин u, u^g. Далее, $[w]$ содержит $18 - \beta$ вершин из $[u^g] - u^\perp$, $19 - \beta$ вершин из $[u] - (u^g)^\perp$ и $\beta - 3$ вершин из $\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)$. Противоречие с тем, что число $[w] \cap \Omega$ должно быть четным.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
2. **Махнев А.А., Чуксина Н.В.** Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (210,95,40,45) // Тез. сообщений VII Междунар. школы-конференции по теории групп. Челябинск: ЮУрГУ, 2008. С. 78–80.
3. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
4. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискр. анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
5. **Cameron P.** Permutation Groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts 45.)
6. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.

Поступила 25.12.2009

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Исакова Марианна Малиловна
аспирант
Ин-т математики и механики УрО РАН

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.17

О СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ 2 И ИХ РАСШИРЕНИЯХ[1]

В. В. Кабанов, А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Пусть $\mathcal{F}$ —- некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$ графом*, если окрестность любой вершины a графа Γ лежит в $\mathcal{F}$. В работе изучаются класс $\mathcal{Q}$ сильно регулярных графов с собственным значением 2 и графы, в которых окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу с параметрами $(81, 20, 1, 6)$ из $\mathcal{Q}$.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, спектр графа, локально $\mathcal{F}$ графы.

V.V. Kabanov, A.A. Makhnev, D.V. Paduchikh. On strongly regular graphs with eigenvalue 2 and their extensions.

Let $\mathcal{F}$ be a class of graphs. A graph Γ is called locally $\mathcal{F}$-graph, if the neighbourhood of each vertex a of Γ belongs $\mathcal{F}$. In the paper it is described the class $\mathcal{Q}$ of strongly regular graphs with eigenvalue 2 and classified graphs in which the neighbourhood of each vertex is strongly regular with parameters $(81, 20, 1, 6)$.

Keywords: strongly regular graph, graph spectrum, locally $\mathcal{F}$ graphs.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается $[a]$, если граф Γ фиксирован. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. Для множества вершин X графа Γ через $X^\perp$ обозначим $\bigcap_{x\in X} x^\perp$. Если не оговорено противное, то слово "подграф" будет означать "индуцированный подграф".

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс графов. Граф Γ назовем *локально $\mathcal{F}$-графом*, если $[a]$ лежит в $\mathcal{F}$ для любой вершины a графа Γ.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, $[a] \cap [b]$ называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным* степени k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным* с параметрами (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный многодольный граф $\{M_1, \dots, M_n\}$ с долями M_i порядка m_i. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то указанный граф обозначается $K_{n\times m}$. Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф диаметра 3 на $2k + 2$ вершинах. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и положим $x_i(\Delta) = |X_i(\Delta)|$.

Система инцидентности с множеством точек P, и множеством прямых $\mathcal{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00009), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

лежит на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a, L) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$ или pG_α). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s-1+t(\alpha-1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Пусть связный граф Γ является локально $\mathcal{F}$-графом, где $\mathcal{F}$ состоит из точечных графов геометрий pG_α. По связности графа порядок (s,t) не зависит от выбора точки и такой граф обозначается как $EpG_\alpha(s,t)$.

В работе [1] изучались графы, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s,t)$. В частности, там доказано, что либо диаметр Γ не больше 3, либо $s=3, t=1$ и Γ — граф Джонсона $J(8,4)$.

Заметим, что псевдогеометрический граф для $pG_{s-2}(s,t)$ имеет собственное значение 2. Поэтому представляет интерес задача описания класса $\mathcal{Q}$ сильно регулярных графов с собственным значением 2. Пусть $\Gamma \in \mathcal{Q}$. Если степень графа Γ равна 2, то Γ — объединение изолированных треугольников, четырехугольник или пятиугольник. Если же степень Γ больше 2, то Γ имеет собственные значения $k, 2, -m$ и дополнительный граф $\bar{\Gamma}$ имеет собственные значения $v-k-1, m-1, -3$.

Зейдель в [2] классифицировал сильно регулярные графы с собственным значением -2. Зейделев граф является полным многодольным графом $K_{n\times 2}$, квадратной решеткой $n \times n$, треугольным графом $T(n)$, графом Петерсена, Шрикханде, Клебша, Шлефли или одним из трех графов Чанга. Класс $\bar{\mathcal{Q}}$ сильно регулярных графов с собственным значением -3 пока не изучен.Ноймайер в [3] показал, что за исключением полных многодольных графов $K_{n\times 3}$ и точечных графов для $pG_3(s,2)$ и $pG_2(s,2)$ класс $\bar{\mathcal{Q}}$ содержит лишь конечное число графов.

В данной работе получено описание графов из $\mathcal{Q}$ и найдены некоторые расширения этих графов.

Предложение 1. *Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин изоморфны сильно регулярному графу Δ с собственным значением 2. Тогда либо диаметр Γ не больше 3, либо выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ — *объединение изолированных треугольников;*

(2) Δ — *граф Хофмана — Синглтона и диаметр Γ не больше 7;*

(3) Δ — *граф Гевиртца и диаметр Γ не больше 5;*

(4) Δ *является 4×4-решеткой и Γ — граф Джонсона $J(8,4)$;*

(5) Δ — *граф Шрикханде и Γ — антиподальный граф диаметра 4 на 80 вершинах.*

Теорема 1. *Если $\Gamma \in \mathcal{Q}$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Γ — *объединение изолированных треугольников, четырехугольник или пятиугольник;*

(2) Γ — *псевдогеометрический граф для $pG_{(2s-6)/3}(2s/3, s-3)$, s делится на 3 или псевдогеометрический граф для $pG_{s-2}(s, s-2)$;*

(3) Γ *имеет параметры $v = (2s^2+5s+3)/3$, $k = (2s^2-4s)/3$, $\lambda = (2s^2-13s+24)/3$, $\mu = (2s^2-10s+12)/3$, и $s \equiv -1 \pmod 3$;*

(4) Γ — *псевдогеометрический граф для $pG_{s-2}(s,t)$, где (s,t) принадлежит либо*

(*i*) $\{(3,3),(3,5),(3,9)\}$, *либо*

(*ii*) $\{(4,1),(4,7),(4,9),(4,12),(4,17),(4,27)\}$, *либо*

(*iii*) $\{(5,1),(5,7),(5,9),(5,12),(5,17),(5,27)\}$, *либо*

(*iv*) $\{(6,18),(7,25),(8,3),(8,5),(8,15),(8,21),(9,42)\}$, *либо*

(*v*) $\{(14,2),(14,4),(14,32),(32,5)\}$;

(5) Γ *имеет параметры либо*

(*i*) $(26,15,8,9)$, $(36,14,4,6)$, $(45,32,22,24)$, $(36,14,4,6)$, $(50,7,0,1)$, $(56,10,0,2)$, $(76,30,8,14)$, $(77,16,0,4)$, *либо*

(*ii*) $(81,20,1,6)$, $(99,56,28,36)$, $(100,22,0,6)$, $(105,52,21,30)$, $(105,32,4,12)$, $(120,42,8,18)$, $(126,100,80,84)$, *либо*

(*iii*) $(126,50,13,24)$, $(154,72,26,40)$, $(162,56,10,24)$, $(162,92,46,60)$, $(176,70,18,34)$, $(225,128,64,84)$, $(232,154,96,114)$, $(243,110,37,60)$, *либо*

(*iv*) $(253,112,36,60)$, $(300,182,100.126)$, $(351,210,113,144)$, $(375,272,190.216)$, $(441,352,276,300)$, $(476,342,236,270)$, $(540,392,274,312)$, $(703,520,372,420)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ — *вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу* $\Delta \in \mathcal{Q}$ *с параметрами* $(81,20,1,6)$. *Тогда* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{81,60,1;1,20,81\}$ *и спектром* $81^1, 9^{126}, -1^{75}, -9^{126}$.

В разд. 1 приведены некоторые вспомогательные результаты и доказано предложение. В разд. 2 рассмотрен сильно регулярный случай, и в разд. 3 исследованы графы диаметра, большего 2.

1. Предварительные результаты

Лемма 1.1. *Пусть* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(s,t)$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $v=(s+1)(1+st/\alpha)$, $k=s(t+1)$, $\lambda=s-1+(\alpha-1)t$ *и* $\mu=\alpha(t+1)$;

(2) Γ *имеет собственные значения* $s-\alpha$ *и* $-(t+1)$ *кратностей* $f=s(s+1)t(t+1)/(\alpha(s+t+1-\alpha))$ *и* $v-f-1$;

(3) *если* $s \geqslant 2\alpha$, *то* $(s+1-2\alpha)t \leqslant (s-1)(s+1-\alpha)^2$;

(4) *если* $s>\alpha$, *то* $t \leqslant (2\alpha-1)(s+1-\alpha)^2$.

Доказательство. Утверждения (1), (2) хорошо известны. Утверждение (3) следует из границы Крейна для псевдогеометрических графов. Утверждение (4) следует из доказательства [3, теорема 4.5].

Лемма 1.2. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ). *Тогда либо* $k=2\mu$, $\lambda=\mu-1$ (*так называемый половинный случай*), *либо неглавные собственные значения* $n-m$, $-m$ *графа* Γ — *целые числа, где* $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$, $n-\lambda+\mu=2m$ *и кратность* $n-m$ *равна* $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. *Далее, если* m — *целое число, большее* 1, *то* $m-1$ *делит* $k-\lambda-1$ *и*

$$\mu=\lambda+2+(m-1)-\frac{k-\lambda-1}{m-1},\ n=m-1+\frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Лемма следует из [4, теорема 0.1].

В [5] было замечено, что сильно регулярный граф с $k=2\mu$ является псевдогеометрическим графом для $pG_x(2x,y)$, а дополнительный к нему граф является псевдогеометрическим для $pG_y(2y,x)$. Более того, если Γ является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(s,t)$, $s>\alpha$ и α делит st, то дополнительный граф к Γ также является псевдогеометрическим. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть граф* Γ *является псевдогеометрическим для* $pG_\alpha(s,t)$, $s>\alpha$ *и* α *делит* st. *Тогда дополнительный граф* Δ *является псевдогеометрическим для* $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$.

Доказательство. Заметим, что собственные значения Γ равны $s-\alpha$ и $-(t+1)$, и собственные значения Δ равны t и $-(s-\alpha+1)$, поэтому Δ может быть псевдогеометрическим для $pG_\beta(t+\beta, s-\alpha)$. Теперь степень вершины в графе Δ равна $(t+\beta)(s-\alpha+1) = k(k-\lambda-1)/\mu = s(st-\alpha t+t)/\alpha$ и $\beta = st/\alpha - t$.

Наконец, число вершин в $pG_\alpha(s,t)$ равно числу вершин в $pG_{t(s-\alpha)/\alpha}(st/\alpha, s-\alpha)$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ), Δ — индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1,\dots,d_N$. Тогда*

$$(v-N)-(kN-2M)+\left(\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right) = x_0+\sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i = x_i(\Delta)$.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma-\Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$ и число троек вида $(a,\{b,c\})$, где $a\in\Gamma-\Delta, b,c\in\Delta\cap[a]$, получим равенства
$v-N=\sum x_i$,
$kN-2M=\sum ix_i$ и
$\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}=\sum\binom{i}{2}x_i$.
Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое. Лемма доказана.

2. Класс графов $\mathcal{Q}$

В леммах 2.1, 2.2 предполагается, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v,k,λ,μ) и собственными значениями $(k,2,-m)$.

Лемма 2.1. *Если Γ — граф в половинном случае, то он имеет параметры* $(5,2,0,1)$ *или* $(25,12,5,6)$.

Доказательство. Пусть Γ — граф в половинном случае. Если Γ имеет степень 2, то Γ — пятиугольник. Если Γ имеет второе собственное значение 2, то $4\mu+1=25$, поэтому $\mu=6$. Лемма доказана.

Если Γ имеет степень 2, то Γ — объединение изолированных треугольников, четырехугольник или пятиугольник.

Лемма 2.2. *Если Γ имеет степень, большую 2, и не является графом в половинном случае, то выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $\bar\Gamma$ — псевдогеометрический граф для $pG_3(s,2)$, то Γ имеет параметры $v=(2s^2+5s+3)/3$, $k=(2s^2-4s)/3$, $\lambda=(2s^2-13s+24)/3$, $\mu=(2s^2-10s+12)/3$, и если s делится на 3, то Γ — псевдогеометрический граф для $pG_{(2s-6)/3}(2s/3,s-3)$;*

(2) *если $\bar\Gamma$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(s,2)$, то граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_{s-2}(s,s-2)$.*

Доказательство. Пусть $\bar\Gamma$ — псевдогеометрический граф для $pG_3(s,2)$. Тогда Γ имеет параметры $v=(s+1)(1+2s/3)=(2s^2+5s+3)/3$, $k=(2s^2-4s)/3$, $\lambda=(2s^2-13s+24)/3$, $\mu=(2s^2-10s+12)/3$.

Если s делится на 3, то по лемме 1.3 граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_{(2s-6)/3}(2s/3,s-3)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\bar\Gamma$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(s,2)$. Тогда по лемме 1.3 граф Γ является псевдогеометрическим для $pG_{s-2}(s,s-2)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ) *и собственным значением* -3. *Тогда либо* Γ — *полный многодольный граф* $K_{r\times 3}$, *либо верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\mu=6$ *и* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_2(s,2)$, $s>2$, *или* $\mu=9$ *и* Γ — *псевдогеометрический граф для* $pG_3(s,2)$, $s>3$;

(2) *имеется* 58 *наборов параметров для сильно регулярных графов с собственным значением* -3 *и* $\mu\notin\{k,6,9\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1.2 имеем $n=2+(k-\lambda-1)/2$, $\mu=\lambda+4-(k-\lambda-1)/2$. Если $k=\mu$, то Γ — полный многодольный граф $K_{r\times 3}$.

Пусть $\mu<k$. Если $\mu=6$, то $k=3\lambda-3$, $n=\lambda$, и кратность собственного значения $\lambda-3$ равна $3\lambda-3$. Поэтому Γ — псевдогеометрический граф для $pG_2(s,2)$, $s=\lambda-1>2$.

Если $\mu=9$, то $k=3\lambda-9$, $n=\lambda-3$, и кратность собственного значения $\lambda-6$ равна $2\lambda-4$. Поэтому Γ — псевдогеометрический граф для $pG_3(s,2)$, $s=\lambda-3>3$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $\mu\notin\{6,9\}$. По [3, теорема 4.7] имеем $n\leqslant 3\mu+5$, а по [3, теорема 3.1] имеем $\mu\leqslant 81$, причем в случае $\mu=81$ имеем $n=30$. Кроме того, по [3, лемма 2.1] имеем $(n-6)\mu\leqslant 2(n-3)(n+6)$.

Ноймайер [3] отметил, что имеется 64 набора параметров сильно регулярных графов с собственным значением -3 и $\mu\notin\{k,6,9\}$. Такие параметры назовем исключительными. Один из авторов этой статьи (В.В. Кабанов) с помощью компьютерного перебора нашел эти параметры:

(1—10) $(50,7,0,1)$, $(209,16,3,1)$, $(16,5,0,2)$, $(85,14,3,2)$, $(15,6,1,3)$, $(45,12,3,3)$, $(231,30,9,3)$, $(26,10,3,4)$, $(126,25,8,4)$, $(69,20,7,5)$;

(11—20) $(36,21,12,12)$, $(441,88,35,13)$, $(76,35,18,14)$, $(99,42,21,15)$, $(189,60,27,15)$, $(575,112,45,16)$, $(40,27,18,18)$, $(96,45,24,18)$, $(49,32,21,20)$, $(232,77,36,20)$;

(21—31) $(75,42,25,21)$, $(261,84,39,21)$, $(375,102,45,21)$, $(105,52,29,22)$, $(76,45,28,24)$, $(126,60,33,24)$, $(162,69,36,24)$, $(1344,221,88,26)$, $(95,54,33,27)$, $(196,81,42,27)$, $(1911,270,105,27)$;

(32—42) $(476,133,60,28)$, $(57,42,31,30)$, $(64,45,32,30)$, $(96,57,36,30)$, $(288,105,52,30)$, $(540,147,66,30)$, $(225,96,51,33)$, $(405,132,63,33)$, $(176,85,48,34)$, $(703,182,81,35)$, $(841,200,87,35)$;

(43—53) $(50,42,35,36)$, $(56,45,36,36)$, $(76,54,39,36)$, $(125,72,45,36)$, $(154,81,48,36)$, $(300,117,60,36)$, $(550,162,75,36)$, $(126,75,48,39)$, $(81,60,45,42)$, $(120,77,52,44)$, $(351,140,73,44)$;

(54—64) $(77,60,47,45)$, $(105,72,51,45)$, $(175,102,65,51)$, $(112,81,60,54)$, $(176,105,68,54)$, $(276,135,78,54)$, $(100,77,60,56)$, $(162,105,72,60)$, $(243,132,81,60)$, $(253,140,87,65)$, $(275,162,105,81)$.

Обсудим указанные параметры. В случаях (1—10) известны существование и единственность графов с параметрами $(50,7,0,1)$ (граф Хофмана — Синглтона), $(16,5,0,2)$ (дополнение к графу Клебша) и $(15,6,1,3)$ ($GQ(2,2)$). Известно существование графов с параметрами $(45,12,3,3)$ ($GQ(4,2)$), $(231,30,9,3)$ (граф Камерона), $(26,10,3,4)$ (графы Паулюса — Зейделя), $(126,25,8,4)$ (антиподальное частное графа Джонсона $J(10,5)$). Наконец, в графе с параметрами $(189,16,3,1)$ число 5-клик равно $4\cdot 189/5$, противоречие. Итак, неизвестно лишь существование графов с параметрами $(85,14,3,2)$ и $(69,20,7,5)$.

В случаях (11—20) известно существование графов с параметрами $(36,21,12,12)$, $(40,27,18,18)$ (графы инцидентности симметричных 2-схем с полярностями). Граф с параметрами $(49,32,21,20)$ не существует (см. [6, § 3H]).

В случаях (21—31) известно существование графа с параметрами $(126,60,33,24)$ (граф Мэтона — Бюкенхаута — Юбо). Графы с параметрами $(1344,221,88,26)$ и $(1911,270,105,27)$ не существуют (нарушается абсолютная граница). Граф с параметрами $(75,42,25,21)$ является псевдогеометрическим для $pG_7(14,2)$.

В случаях (32—42) известно существование графов с параметрами $(64, 45, 32, 30)$ (дополнительный граф для $GQ(3, 5)$) и $(176, 85, 48, 34)$ (дополнительный граф для $pG_2(4, 17)$). Графы с параметрами $(57, 42, 31, 30)$, $(96, 57, 36, 30)$ и $(841, 200, 87, 35)$ не существуют ([6, § 3H], сообщение Деграера и абсолютная граница, соответственно).

В случаях (43—53) известны существование и единственность графов с параметрами $(81, 60, 45, 42)$ (дополнение для графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$) и $(120, 77, 52, 44)$ (граф Бэровских подплоскостей в проективной плоскости порядка 4). Существуют графы с параметрами $(50, 42, 35, 36)$ (дополнение для графа Хофмана — Синглтона), $(56, 45, 36, 36)$ (дополнение для графа Гевиртца), $(126, 75, 48, 39)$ (граф Геталса) и $(125, 72, 45, 36)$ (граф Годсила). Граф с параметрами $(76, 54, 39, 36)$ не существует (см. замечание перед теоремой 1.11 в [4]).

В случаях (54—64) известны существование и единственность графов с параметрами $(100, 77, 60, 56)$ (дополнение для графа Хигмена — Симса), $(77, 60, 47, 45)$ (окрестность вершины в предыдущем графе), $(275, 162, 105, 81)$ (дополнение для графа Маклафлина), $(162, 105, 72, 60)$ (окрестность вершины в предыдущем графе), $(105, 72, 51, 45)$ (окрестность вершины в предыдущем графе), $(112, 81, 60, 54)$ (дополнение для $GQ(3, 9)$). Известно существование графов с параметрами $(175, 102, 65, 51)$ (дополнение для точечного графа частичной геометрии $pG_2(4, 17)$), $(176, 105, 68, 54)$ (дополнения к блочному графу системы Штейнера $S(3, 6, 22)$), $(276, 135, 78, 54)$ (граф Геталса — Зейделя), $(243, 132, 81, 60)$ (граф Дельсарта), $(253, 140, 87, 65)$ (дополнение к блочному графу системы Штейнера $S(4, 7, 23)$).

Итак, имеется не более 58 наборов исключительных параметров для сильно регулярных графов с собственным значением -3. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Пусть Γ удовлетворяет условиям теоремы 1. Если степень графа Γ равна 2, то Γ — объединение изолированных треугольников, четырехугольник или пятиугольник. Если $\bar{\Gamma}$ — псевдогеометрический граф для $pG_2(s, 2)$, то по лемме 2.2 граф Γ — псевдогеометрический для $pG_{s-2}(s, s-2)$.

Пусть $\bar{\Gamma}$ — псевдогеометрический граф для $pG_3(s, 2)$. Если s делится на 3, то ввиду леммы 2.2 Γ — граф из утверждения (2) заключения теоремы 1. Если же s не делится на 3, то Γ — граф из утверждения (3) заключения теоремы 1.

Пусть $\bar{\Gamma}$ не является псевдогеометрическим графом для $pG_2(s, 2)$ или $pG_3(s, 2)$. Тогда из леммы 2.3 следует, что Γ — граф из утверждения (4) или из утверждения (5) заключения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1. Пусть Γ — связный граф, в котором окрестности вершин принадлежат $\mathcal{Q}$.

Допустим, что диаметр Γ не меньше 4. Пусть $d(u, w) = 4$, $w \in \Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)$, $C = [u] \cap [w]$, $B = [w] \cap [z]$. Тогда B и C — регулярные графы степени $(s-2)(t+1)$, и между B и C нет ребер. Далее, собственные значения подграфа $B \cup C$ переплетают спектр графа $[w]$. Если $\mu([w]) > 2$, то один из графов B или C является графом Смита (см. теорему 3.2.5 [7]), противоречие.

Итак, $\mu([w]) \leqslant 2$ и ввиду теоремы 1 граф $[w]$ является объединением изолированных треугольников, четырехугольником, пятиугольником, графом Хофмана — Синглтона, 4×4-решеткой, графом Шрикханде или графом Гевиртца. Если $[w]$ — четырехугольник или пятиугольник, то диаметр Γ не больше 3. Если $[w]$ — граф Хофмана — Синглтона, то по [8] $d(\Gamma) \leqslant 7$. Если $[w]$ — граф Гевиртца, то по [9] $d(\Gamma) \leqslant 5$. Если $[w]$ является 4×4-решеткой, то по [10] Γ является графом Джонсона $J(8, 4)$. Если $[w]$ — граф Шрикханде, то по [11] Γ является антиподальным графом диаметра 4 на 80 вершинах. Предложение доказано.

3. Регулярные овалы в $GQ(3, 9)$

Овалом в обобщенном четырехугольнике называется множество точек, пересекающее любую прямую не более чем по двум точкам.

В леммах 3.1–3.5 предполагается, что Γ — точечный граф обобщенного четырехугольника $GQ(3,9)$. Так как для любой вершины a графа Γ подграф $\Gamma - a^\perp$ сильно регулярен с параметрами (81,20,1,6), то пересечение окрестностей вершин любой 3-коклики из Γ содержит точно 4 вершины.

Лемма 3.1. *Выполняются следующие утверждения*:
(1) *любая 3-коклика из Γ содержится в единственном $K_{4,4}$-подграфе*;
(2) *для $K_{4,4}$-подграфа Φ любая вершина из $\Gamma - \Phi$ смежна точно с 2 вершинами из Φ.*

Доказательство. Пусть задана 3-коклика. Тогда она является долей единственного $K_{3,4}$-подграфа Δ из Γ. Обозначим через x_i число вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами Δ. Очевидно, что если $i > 4$, то x_i равно нулю. Таким образом значения x_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = |\Gamma - \Delta| = 105, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \cdot (k-4) + 4 \cdot (k-3) = 186, \\ x_2 + 3x_3 + 6x_4 = \dbinom{3}{2}(\mu - 4) + \dbinom{4}{2} \cdot (\mu - 3) + 3 \cdot 4 \cdot \lambda = 84. \end{cases}$$

Складывая первое уравнение с третьим и вычитая второе, получим равенство $x_0 = 3 - 3x_4 - x_3$. Следовательно, $x_4 \leqslant 1$ и $x_3 \leqslant 3$. Если $x_4 = 1$, то Δ однозначно достраивается до $K_{4,4}$-подграфа добавлением вершины, смежной с 4 вершинами Δ.

Предположим, что x_4 равно нулю. Тогда для каждой 3-коклики T, содержащейся в 4-коклике из Δ, существует ровно одна вершина, смежная со всеми вершинами T и не лежащая в Δ, причем для различных 3-коклик эти вершины различны. Таким образом имеем $x_3 \geqslant 4$, противоречие.

Единственность $K_{4,4}$-подграфа, содержащего данную 3-коклику, очевидна. Утверждение (1) доказано.

Пусть Φ является $K_{4,4}$-подграфом из Γ. Обозначим через Z_i множество вершин из $\Gamma - \Phi$, смежных точно с i вершинами Φ, и положим $z_i = |Z_i|$. Как показано выше, $z_i = 0$ для $i \geqslant 3$. Далее, Z_2 содержит 32 вершины, смежных с ребрами подграфа Φ и 72 вершины, смежных с 2-кокликами подграфа Φ. Лемма доказана.

Прямую L графа Γ назовем секущей, касательной или внешней, если число $|L \cap \Delta|$ равно 2, 1 или 0 соответственно. Пусть X_i — множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$. Пусть Y_i — множество вершин из $\Gamma - X_0$, смежных точно с i вершинами из X_0, $y_i = |Y_i|$.

Лемма 3.2. *Пусть Δ — овал из Γ степени* 6 *на w вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $16 \leqslant w \leqslant 44$, $x_0 \leqslant 18(112 - w)/(5w + 18)$, *и если $a \in X_i$, то $i \leqslant 6|\Delta|/11$*;

(2) *если $b \in X_l$ и $b^\perp$ содержит две секущие, то $X_0 - [b]$ является кокликой, если же $b^\perp$ содержит не менее* 5 *секущих, то $|X_0 - [b]| \leqslant 1$*;

(3) *если u, u' — различные несмежные вершины из X_0, то число ребер между $[u] \cap [u']$ и Δ равно $4w$.*

(4) *если X_0 содержит 4-коклику W, Φ является $K_{4,4}$-подграфом, содержащим 3-коклику U из W, то либо $W \subset \Phi$ и $|\Delta| \leqslant 24$, либо $W - U$ содержит вершину, смежную с ребром Φ и $|\Delta| \leqslant 27$, либо $W - U$ содержит вершину, смежную с 2-кокликой из $\Phi - U$ и $|\Delta| \leqslant 19$.*

Доказательство. По [1, лемма 2] имеем $1 \leqslant 6w/(112 - w) \leqslant 4$. Поэтому $16 \leqslant w \leqslant 44$.

По лемме 1.4 имеем $\sum x_i = 112 - w$, $\sum i x_i = 24w$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 6w + 10(\binom{w}{2} - 3w) - 15w = 5w^2 - 44w$.

Так как между Δ и X_0 нет ребер, то по [12, предложение 4.6.1] имеем $x_0 w \leqslant (112-w)(112-x_0)(\theta_2-\theta_1)^2/(2k-\theta_2-\theta_1)^2$, где $\theta_2=-10, \theta_1=2$ — неглавные собственные значения графа Γ. Поэтому $x_0 w \leqslant 9(112-w)(112-x_0)/17^2$ и $x_0 \leqslant 18(112-w)/(5w+18)$.

Пусть $a \in X_i$ и $[a]\cap\Delta$ содержит $n/2$ ребер и m изолированных вершин. Тогда число ребер между $[a]\cap\Delta$ и $\Delta-[a]$ равно $5n+6m$, но не больше $6(|\Delta|-(n+m))$. Отсюда $n+m \leqslant 6w/11$. Утверждение (1) доказано.

Заметим, что число секущих равно $3w$, число касательных равно $4w$, поэтому число внешних прямых равно $7(40-w)$. Если $x_0>0$, то $w \leqslant 38$. Если $b \in X_l$ и $b^\perp$ содержит 2 секущие L, L', то $X_0-[b]$ является кокликой. Иначе для ребра $\{p,q\}$ из $X_0-[b]$ подграф $[p]\cap[q]$ содержит точки c, c' из $L-(\Delta\cup\{b\})$, $L'-(\Delta\cup\{b'\})$ соответственно, противоречие. Если $b^\perp$ содержит не менее 5 секущих, то для различных вершин $\{p,q\}$ из $X_0-[b]$ и секущей L из $b^\perp$ подграф $[p]\cap[q]$ содержит точку из $L-(\Delta\cup\{b\})$, противоречие с тем, что $|[p]\cap[q]\cap[b]| \geqslant 5$. Утверждение (2) доказано.

Пусть u, u' — различные несмежные вершины из X_0, $a\in\Delta$. Тогда $|[u]\cap[u']\cap[a]|=4$, поэтому вершина из $[u]\cap[u']$ смежна в среднем с $4w/10$ вершинами из Δ. Утверждение (3) доказано.

Пусть X_0 содержит 4-коклику W, Φ — $K_{4,4}$-подграф, содержащий 3-коклику U из W. Тогда $X_0(U)$ содержит вершину $w\in\Phi$, 8 вершин, смежных с ребрами Φ, и 36 вершин, смежных с 2-кокликами из Φ.

Если $W\subset\Phi$, то $X_0(W)$ содержит 24 треугольника, причем каждая вершина из $X_0(W)$ лежит в двух таких треугольниках. Так как Δ не содержит треугольников, то $|\Delta|\leqslant 24$.

Если $X_0(U)$ содержит вершину w, смежную с ребром $\{a,u\}$ из Φ, a смежна с вершиной из U, то $X_0(W)$ содержит 6 вершин, смежных с ребрами Φ, 6 треугольников из $a^\perp$ и 9 вершин, смежных с 2-кокликами из $\Phi(u)-\{a\}$. Так как Δ не содержит треугольников, то $|\Delta|\leqslant 27$.

Если $X_0(U)$ содержит вершину w, смежную с 2-кокликой $\{a,a'\}$ из Φ, $u\in\Phi(a)-U$, то $X_0(W)$ содержит u, 2 вершины, смежные с ребрами Φ, 5 вершин из $[a]\cap[a']$, по 5 ребер из $[a]-[a']$, $[a']-[a]$ и 2 вершины вне $[a]\cup[a']$. Так как Δ не содержит треугольников, то $|\Delta|\leqslant 25$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Если $|\Delta|=36$, то $x_0\leqslant 3$, причем в случае $x_0=3$ подграф Δ является геодезическим 2-путем.*

Доказательство. Пусть $|\Delta|=36$. Если X_0 содержит ребро $\{u,u'\}$, то прямая, проходящая через это ребро, содержит две точки из X_{18} и $X_0-\{u,u'\}$ содержится в $[u]\cup[u']$. Если wuu' — геодезический 2-путь в X_0, то $[w]\cap[u']$ содержит 9 вершин из X_{16}, и по утверждению (2) леммы 3.2 имеем $x_0=3$.

Если X_0 содержит 3-коклику U, то X_0 содержит 45 точек и 24 треугольника, поэтому $|\Delta|\leqslant 33$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $|\Delta|=30$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a\in X_i$, то $i\leqslant 16$;*

(2) *если X_0 содержит ребро $\{u,y\}$ и $x_0=4$, то X_0 — объединение двух изолированных ребер;*

(3) *если X_0 — коклика, то $x_0\leqslant 3$.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 3.1.

Пусть L — прямая. Если L является секущей и содержит точки из X_i, X_j, то $i+j=22$. Если L является касательной и содержит точки из X_i, X_j, X_l, то $i+j+l=26$. Если же L является внешней прямой и содержит точки из X_i, X_j, X_p, X_q, то $i+j+p+q=30$.

Пусть прямая L содержит ребро $\{u,u'\}$ из X_0 и точки $a\in X_i$, $b\in X_j$. Если $i=16$, то $a^\perp$ содержит 8 секущих и число ребер между $[a]\cap\Delta$ и $[b]\cap\Delta$ не меньше $16\cdot 5$. С другой стороны, число ребер между $[a]\cap\Delta$ и $[b]\cap\Delta$ равно $10x+6(14-2x)$, где x — число секущих в $b^\perp$. Поэтому

$x = 2$, противоречие. Значит, $i = j = 15$, и по лемме 3.2 имеем $|X_0 - [a]| \leqslant 1$ и $|X_0 - [b]| \leqslant 1$, поэтому $x_0 \leqslant 4$. Пусть $x_0 = 4$, $X_0 - [a] = \{z\}$, $X_0 - [b] = \{z'\}$ и вершины z, z' не смежны.

Пусть $c \in [z] \cap [z'] \cap Y_2$. Если $c^{\perp}$ содержит секущую, то она пересекает $\{a, b\}$, противоречие. Значит, $c^{\perp}$ не содержит секущих, и $|[c] \cap \Delta| \leqslant 8$. Далее, c смежна с вершиной из $\{a, b\}$, скажем, с b. Тогда имеется прямая $\{b, c, c', z\}$ и $|[a] \cap [c'] \cap \Delta| \geqslant 7$, противоречие с тем, что $|[a] \cap [c'] \cap [z]| = 4$. Утверждение (2) доказано.

Если X_0 является кокликой, то по лемме 3.2 имеем $x_0 \geqslant 3$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* $|\Delta| = 27$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:
(1) *если* $a \in X_i$, *то* $i \leqslant 14$;
(2) *если* X_0 *содержит ребро, то* $x_0 \leqslant 3$;
(3) *если* X_0 *является кокликой, то* $x_0 \leqslant 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) следует из леммы 3.1.

Пусть L — прямая. Если L является секущей и содержит точки из X_i, X_j, то $i + j = 18$. Если L является касательной и содержит точки из X_i, X_j, X_l, то $i + j + l = 23$. Если же L является внешней прямой и содержит точки из X_i, X_j, X_p, X_q, то $i + j + p + q = 27$.

Пусть прямая L содержит ребро $\{u, u'\}$ из X_0 и точки $a \in X_i$, $b \in X_j$. Тогда $i + j = 27$, и если $j \leqslant 12$, то $i \geqslant 15$ и число ребер между $[a] \cap \Delta$ и $[b] \cap \Delta$ не больше 72, но не меньше $14 \cdot 5 + 6$, противоречие. Значит, можно считать, что $i = 14, j = 13$. По лемме 3.2 получим $|X_0 - [a]| \leqslant 1$, число ребер между $[a] \cap \Delta$ и $[b] \cap \Delta$ не больше $8 \cdot 5 + 5 \cdot 6$, но не меньше $14 \cdot 5$, поэтому $b^{\perp}$ содержит 4 секущих и 5 касательных, и $a^{\perp}$ содержит 7 секущих.

Пусть $x_0 = 4$, $X_0 - \{u, u'\} = \{z, z'\}$. Если $z, z' \in [a]$, то $[b] \cap [z] \cap [z']$ содержит a и 4 вершины с секущих из $b^{\perp}$, противоречие. Итак, можно считать, что $z' \in [a]$, $z \in [u]$. Снова $[b] \cap [z] \cap [z']$ содержит 4 вершины с секущих из $b^{\perp}$. Далее, число ребер между $[a] \cap \Delta$ и $[b] \cap [z]$ равно 56, причем вершина с секущей из $b^{\perp}$ смежна с 4 вершинами из $[a] \cap \Delta$. Поэтому число ребер между множеством точек из $[b] \cap [z]$, лежащих на касательных из $b^{\perp}$ и $[a] \cap \Delta$, равно 40. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[b] - \{a\}$ смежна с 8 вершинами из $[a] \cap \Delta$. Утверждение (1) доказано.

Допустим, что X_0 является кокликой. По лемме 3.2 имеем $x_0 \leqslant 4$. Более того, для 3-коклики U из X_0 и $K_{4,4}$-подграфа Φ, содержащего U, вершина из $X_0 - U$ смежна с ребром графа Φ. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(81, 20, 1, 6)$, Δ — *его регулярный подграф степени* 6 *без треугольников,* x_i — *число вершин из* $\Gamma - \Delta$, *смежных точно с* i *вершинами из* Δ. *Если* $|\Delta| \in \{20, 27, 30, 36\}$, *то выполняется одно из следующих утверждений*:
(1) $|\Delta| = 20$, $x_0 = 1, x_4 = 40, x_6 = 20$;
(2) $|\Delta| = 20$, $x_2 = 2, x_3 = 14, x_4 = 1, x_5 = 34, x_6 = 10$;
(3) $|\Delta| = 20$, $x_2 = 3, x_3 = 8, x_4 = 13, x_5 = 24, x_6 = 13$;
(4) $|\Delta| = 30$, $x_4 = 15, x_{10} = 36$;
(5) $|\Delta| = 36$, $x_0 = 1, x_{10} = 18, x_{12} = 24, x_{18} = 2$;
(6) $|\Delta| = 36$, $x_{10} = 36, x_{16} = 9$;
(7) $|\Delta| = 36$, $x_8 = 9, x_{10} = 18, x_{14} = 18$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Компьютерные вычисления в GAP [13].

4. Локально $\mathcal{Q}$-графы с $\lambda' = 1$

Пусть Γ является вполне регулярным локально $\mathcal{Q}$-графом с $\lambda' \leqslant 2$ (здесь λ' — число треугольников в окрестности вершины графа Γ, содержащей данное ребро). Случай $\lambda' = 2$ рассмотрен в [1], изучение случая $\lambda' = 0$ начато в [8, 9].

В этом разделе мы будем предполагать, что Γ — связный вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу из $\mathcal{Q}$ с $\lambda' = 1$. По теореме 1 граф Γ является локально Σ-графом, где Σ — единственный сильно регулярный граф с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

Лемма 4.1. Γ *имеет диаметр* 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению диаметр Γ не больше 3.

Пусть Γ имеет диаметр 2 и отрицательное собственное значение $-m$. Тогда $m-1$ делит 60, $n = (m-1) + 60/(m-1)$, $\mu = 22 + (m-1) - 60/(m-1)$, и μ делит $81 \cdot 60$. Так как собственные значения $2, -7$ окрестности вершины в Γ переплетают собственные значения Γ, то $n - m \geqslant 2$ и $-m \leqslant -7$, поэтому $6 \leqslant m - 1 \leqslant 20$ и $m - 1 \in \{6, 10, 12, 15, 20\}$.

Если $m - 1 = 6$, то $\mu = 18, n = 16$ и $18 \cdot 16$ делит $6 \cdot 81 \cdot 88$, противоречие.

Если $m - 1 = 10$, то $\mu = 26$; если $m - 1 = 12$, то $\mu = 29$; если $m - 1 = 15$, то $\mu = 33$, и если $m - 1 = 20$, то $\mu = 39$. В любом случае μ не делит $81 \cdot 60$. Лемма доказана.

До конца раздела будем предполагать, что Γ содержит геодезический 3-путь u, w, y, z. Положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $\Delta = [u] \cap [y]$, X_i — множество вершин из $[y] - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, $x_i = |X_i|$, $\Phi = [u] \cap \Gamma_2(z)$ и $\Psi = [z] \cap \Gamma_2(u)$.

Лемма 4.2. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $\mu \in \{20, 27, 30, 36\}$;

(2) $\sum x_i = 81 - \mu$, $\sum i x_i = 14\mu$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 3\mu^2 - 33\mu$;

(3) $x_0 \leqslant 27(81 - \mu)/(27 + 8\mu)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из прямоугольного соотношения $k_2\mu = k(k - \lambda - 1)$ следует, что μ делит $81 \cdot 60$.

Пусть Γ — сильно регулярный граф с с собственными значениями $k, r, s < 0$ на v вершинах, и Ω — регулярный подграф графа Γ степени k' на v' вершинах. В [1, лемма 2] доказано, что $s \leqslant k' - v'(k - k')/(v - v') \leqslant r$. Если одно из равенств достигается, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с $v'(k - k')/(v - v')$ вершинами из Ω.

Применив это утверждение к подграфу $\Omega = [u] \cap [y]$ графа $[u]$, получим неравенства $-7 \leqslant 6 - 14\mu/(81 - \mu) \leqslant 2$. Отсюда $18 \leqslant \mu \leqslant 39$. Так как μ делит $81 \cdot 60$, то $\mu \leqslant 36$. Заметим, что вершина $z \in [y]$ не смежна с вершинами из Ω.

Если $\mu = 18$, то каждая вершина из $[y] - \Omega$ смежна точно с 4 вершинами из Ω, противоречие. Значит, $\mu \in \{20, 27, 30, 36\}$. Утверждение (1) доказано.

Заметим, что окрестность каждого ребра в графе Γ — объединение 10 изолированных ребер. Поэтому $[u] \cap [y] \cap [a]$ является объединением изолированных вершин и ребер для любой вершины $a \in [y] - [u]$. Утверждение (2) следует из леммы 1.4.

Так как между $[u] \cap [y]$ и X_0 нет ребер, то по предложению 4.6.1 из [12] имеем $x_0\mu \leqslant (v - \mu)(v - x_0)(\theta_2 - \theta_1)^2/(2k - \theta_2 - \theta_1)^2$, где $v = 81$, $\theta_2 = -7, \theta_1 = 2$ — неглавные собственные значения графа $[y]$. Поэтому $x_0\mu \leqslant (81 - \mu)(81 - x_0)/25^2$ и $x_0 \leqslant 27(81 - \mu)/(27 + 8\mu)$.

Лемма 4.3. *Параметр* μ *не равен* 36.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 36$. Тогда $k_2 = 135$, и по лемме 3.3 имеем $x_0 \leqslant 2$, поэтому $b_2(u, y) \leqslant 2$.

Если w, w' — смежные вершины из Φ, то $[w] \cap [w']$ содержит точно одну вершину из $[u]$ и не более 18 вершин из Ψ. Отсюда $|\Psi| \geqslant 54$. Таким образом, число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $135 \cdot 2$, но не меньше $54k_3$. Отсюда $k_3 \leqslant 5$. Так как v четно, то k_3 нечетно, поэтому $k_3 \in \{1, 3, 5\}$.

Пусть $3 \leqslant k_3 \leqslant 5$. Если $\Gamma_3(u)$ содержит ребро $\{z, z'\}$, то $|\Gamma_2(u) \cup \Gamma_3(u)| \geqslant |z^\perp \cup (z')^\perp| = 2 + 20 + 120$, противоречие. Значит, $\Gamma_3(u)$ является кокликой. Для $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma_3(u)$ подграф $\Gamma_2(u)$ содержит 36 вершин из $[z_1] \cap [z_2]$ и по 45 вершин из $[z_1] - [z_2]$ и из $[z_2] - [z_1]$. Далее,

$\Gamma_2(u) \cap [z_3]$ содержит по 36 вершин из $[z_1] - [z_2]$, $[z_2] - [z_1]$ и 9 вершин вне $[z_1] \cup [z_2]$. Отсюда $k_3 = 3$.

Заметим, что $\Gamma_2(u)$ содержит вершину w из $\Gamma_3(z_1)$. Если $w \in [z_2] \cap [z_3]$, то $[w]$ содержит не более 42 вершин из $\Gamma_2(u) \cup \Gamma_3(u)$, противоречие. Если $w \in [z_2] - [z_3]$, то $[w]$ содержит z_2, γ вершин из $[z_2] \cap [z_3]$, $20 - \gamma$ вершин из $[z_2] - [z_3]$, $36 - \gamma$ вершин из $[z_3] - [z_2]$ и 36 вершин из $[u]$. Отсюда $1 + \gamma + 20 - \gamma + 36 - \gamma + 36 = 81$ и $\gamma = 12$, противоречие с тем, что $36 - \gamma \leqslant 9$.

Итак, $k_3 = 1$ и $\Gamma_3(u) = \{z\}$. В этом случае $|\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(z)| = 54$ и антиподальное частное графа Γ является сильно регулярным графом с параметрами (109,81,56,72). Противоречие с тем, что $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 292$ не является квадратом целого числа.

Лемма 4.4. *Параметр μ равен* 20, *и Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$ *и спектром* $\{81^1, 9^{126}, -1^{75}, -9^{126}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu \in \{20, 27, 30\}$. По лемме 3.6 имеем $|\Delta| = 20$, $x_0 = 1, x_4 = 40, x_6 = 20$. Таким образом, $b_2(u, y) \leqslant 1$ для любых двух вершин u, y на расстоянии 2 в Γ.

Заметим, что $[z] \subset \Gamma_2(u)$ для любой вершины $z \in \Gamma_3(u)$, иначе для вершин $y \in [z] \cap \Gamma_2(u)$, и $z' \in [z] \cap \Gamma_3(u)$ подграф $[y] \cap [z'] \cap [z]$ содержит 6 вершин из $\Gamma_2(u)$ и для вершины $y' \in [y] \cap [z'] \cap [z]$ получим $|[y'] \cap \Gamma_3(u)| \geqslant 2$, противоречие. Далее, различные вершины из $\Gamma_3(u)$ находятся на расстоянии 3 в Γ.

Так как число вершин в Γ четно, то k_3 нечетно. Если $k_3 = 1$, то антиподальное частное графа Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(163, 81, 40, 40)$. Противоречие с тем, что $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 164$ не является квадратом целого числа.

Значит, $k_3 = 3$ и Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{81, 60, 1; 1, 20, 81\}$ и спектром $\{81^1, 9^{126}, -1^{75}, -9^{126}\}$.

Лемма, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гутнова А.К., Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_{s-2}(s,t)$ // Докл. РАН. Математика. 2010. Т. 431, № 3. С. 301–305.
2. **Seidel J.** Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // Lin. Algebra and Appl. 1968. Vol. 1. P. 281–298.
3. **Neumaier A.** Strongly regular graphs with smallest eigenvalue $-m$ // Arch. Math. 1979. Vol. 33. P. 392–400.
4. **Махнев А.А.** Частичные геометрии и их расширения // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 25–76.
5. **Махнев А.А.** О сильно регулярных графах с $k = 2\mu$ и их расширениях // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 3. С. 609–619.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
7. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
8. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. РАН. Математика. 2009. Т. 428, № 2. С. 157–160.
9. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Докл. РАН. Математика. 2009. Т. 428, № 3. С. 300–304.
10. **Blokhuis A., Brouwer A.E.** Locally 4-by-4 grid graphs // J. Graph Theory. 1989. Vol. 13. P. 229–244.
11. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Локально Шрикханде графы и их автоморфизмы // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1085–1097.

12. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** Spectra of graphs (course notes).
URL: http://www.win.tue.nl/~aeb/! .
13. The GAP Group, GAP — groups, algorithms, and programming. Ver. 4.4.12. 2008.
URL: http://www.gap-system.org.

Поступила 25.12.2009

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зам. директора
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ax-g@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: paduch@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.174

О ГРАФАХ ДЕЗА С ПАРАМЕТРАМИ РЕШЕТЧАТЫХ ГРАФОВ

В. В. Кабанов, Л. В. Шалагинов

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a), где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две вершины имеют a или b общих смежных. Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k, любые две смежные вершины имеют точно λ общих смежных с ними и две несмежные вершины имеют μ общих смежных. Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, не являющийся сильно регулярным. Известно, что если сильно регулярный граф имеет инволютивный автоморфизм, который переставляет только несмежные вершины, то с его помощью можно получить граф Деза с параметрами исходного сильно регулярного графа. В работе найдены все автоморфизмы сильно регулярных решетчатых $n \times n$ графов, $n \geq 3$, удовлетворяющие вышеупомянутому условию. Оказалось, что для нечетных n существует в точности один такой автоморфизм, а для четных n ровно два. Один из типов автоморфизмов имеет место при любом $n \geq 3$. Найдены окрестности точных графов Деза, полученных с помощью этого автоморфизма, и получена характеризация такого точного графа Деза по параметрам и структуре окрестностей.

Ключевые слова: реберный граф, сильно регулярный граф, граф Деза, точный граф Деза, инволютивный автоморфизм.

V. V. Kabanov, L. V. Shalaginov. On Deza graphs with parameters of lattice graphs.

A Deza graph with parameters (v, k, b, a), where $b \geq a$, is a k-regular graph on v vertices in which any two vertices have either a or b common neighbors. A strongly regular graph with parameters (v, k, λ, μ) is a k-regular graph on v vertices in which any two adjacent vertices have exactly λ common neighbors and any two nonadjacent vertices have μ common neighbors. An strictly Deza graph is a Deza graph of diameter 2 that is not strongly regular. If a strongly regular graph has an involutive automorphism that transposes nonadjacent vertices only, then it is known that this automorphism can be used to obtain a Deza graph with the parameters of the initial strongly regular graph. We find all the automorphisms of strongly regular lattice $n \times n$ graphs with $n \geq 3$ that satisfy the above condition. It turns out that there is exactly one such automorphism for odd n and exactly two automorphisms for even n. Neighborhoods of exact Deza graphs obtained by means of this automorphism are found and a characterization of such strictly Deza graph with respect to its parameters and the structure of neighborhoods is obtained.

Keywords: line graph, strongly regular graph, Deza graph, strictly Deza graph, involutive automorphism.

1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Будем обозначать окрестность вершины x через $[x]$. Множество вершин вне окрестности x, отличных от x, назовем антиокрестностью вершины x.

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a), где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две вершины имеют a или b общих соседей. Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k, любые две смежные вершины имеют точно λ общих соседей и две несмежные вершины имеют точно μ общих соседей. Все графы Деза можно разбить на три основных класса: сильно регулярные графы, графы диаметра больше 2, точные графы Деза. Точным графом Деза называется граф Деза диаметра 2, не являющийся сильно регулярным.

Реберным графом графа G называется граф $L(G)$, множество вершин которого является множеством ребер исходного графа, и две вершины смежны, если соответствующие ребра в исходном графе имеют общую вершину.

Полным двудольным графом называется граф, множество вершин которого можно разбить на два подмножества, так что две вершины смежны тогда и только тогда, когда они лежат в разных подмножествах. Эти подмножества называются долями. Если одна из долей состоит из единственной вершины, а другая из m вершин, то такой граф называется m-лапой.

Решетчатым графом называется реберный граф полного двудольного графа. В случае равных долей исходного графа, равных n, решетчатый граф является сильно регулярным с параметрами $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ и обозначается $L(n)$.

Теорию сильно регулярных графов начал развивать Боуз в 1963 г. [1]. Важными вопросами теории являются нахождение необходимых условий существования и построение сильно регулярных графов с заданным набором параметров см. [2]. Например, в работе [4] было доказано, что сильно регулярные решетчатые графы определяются набором своих параметров при $n \neq 4$. Естественно решать аналогичные задачи и для точных графов Деза.

В статье [3] Эриксона, Фернандо, Хэмерса, Харди и Хеммитера было предложено несколько способов построения точных графов Деза и были описаны все точные графы Деза с числом вершин не более 13. Также предложен способ построения точного графа Деза из сильно регулярного графа с помощью инволютивного автоморфизма, переставляющего только несмежные вершины. Автоморфизм называется инволютивным, если он обратен самому себе.

Утверждение. *Пусть G — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), с $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$ и с матрицей смежности M. Пусть P — перестановочная матрица, тогда PM — матрица смежности графа Деза, тогда и только тогда, когда P задает инволютивный автоморфизм графа G, переставляющий только несмежные вершины.*

2. Инволютивные автоморфизмы $L(n)$

Теорема 1. *Для решетчатого графа $L(n)$ при четном n существует ровно два типа автоморфизмов, удовлетворяющих условию утверждения. Автоморфизм типа* I *оставляет на месте n попарно несмежных вершин и при подходящей нумерации вершин соответствует симметрии решетки относительно главной диагонали. Автоморфизм типа* II *не имеет неподвижных точек и при подходящей нумерации вершин соответствует центральной симметрии решетки* (*суперпозиция симметрий относительно главной и побочной диагоналей решетки*). *При нечетном n существует только автоморфизм типа* I.

Доказательство. Так как автоморфизм инволютивный, то он переставляет местами пары вершин и по условию утверждения эти вершины несмежны. В графе $L(n)$ вершины смежны, если они лежат в одной строке или в одном столбце. Так как смежные вершины переходят в смежные, то полный подграф переходит в полный подграф. Следовательно, строка и столбец переходит в строку или в столбец. Рассмотрим несколько случаев:

1. Строка (столбец) переходит сама в себя. Тогда все вершины этой строки остаются на месте, так как переставляются только несмежные вершины. А значит, и все столбцы остаются на месте, т. е. это тождественный автоморфизм. Заметим, что для этого достаточно, чтобы хотя бы две вершины из строки оставались на месте.

2. Строка переходит в другую строку. Обозначим вершины (i, j) — пересечение i-й строки и j-го столбца. С точностью до нумерации строк можно считать, что первая строка переходит в последнюю и вершина (1,1) переходит в вершину (n, n). Тогда вершина $(1, n)$ является для них общей и переходит в другую общую вершину $(n, 1)$. Таким образом все вершины строки разбиваются на пары, а это возможно только при четном n. Первый столбец в этом случае перейдет в последний столбец. Аналогично, при соответствующей нумерации вторая строка перейдет в $(n-1)$-ю и т.д. Заметим, что этот автоморфизм является центральной симметрией и не имеет неподвижных вершин.

3. Строка переходит в столбец. Будем считать, что первая строка переходит в первый столбец. Тогда вершина $(1, 1)$ останется неподвижной. Будем считать, что вершина $(1, i)$ переставляется с вершиной $(i, 1)$, тогда вершина (i, i) тоже остается неподвижной, так как она общая

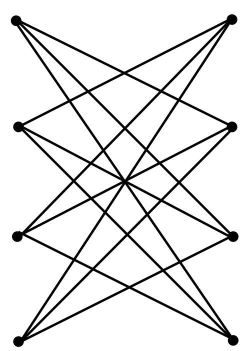
для них. Таким образом, можно считать, что вершина (i, j) переставляется с вершиной (j, i), а вершины на главной диагонали остаются неподвижными. Заметим, что этот автоморфизм является симметрией относительно главной диагонали. Теорема 1 доказана.

3. Графы Деза

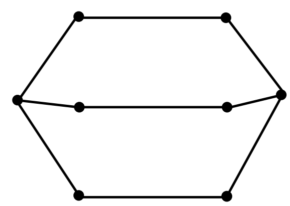
В теореме 1 автоморфизмы типов I и II дают неизоморфные графы. В этой статье будем называть их квазирешетчатыми графами Деза типов I и II соответственно. Рассмотрим квазирешетчатый граф Деза типа I и определим строение окрестностей его вершин.

О п р е д е л е н и е. Пусть F — некоторое множество графов, тогда граф G называется локально F-графом, если окрестность каждой его вершины изоморфна некоторому графу из множества F, причем для каждого графа H из F существует вершина графа G, окрестность которой изоморфна H.

Лемма. *Пусть G — квазирешетчатый граф Деза типа* I *с параметрами* $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$*, тогда G — локально F-граф, $F = \{F_1, F_2\}$, где F_1, F_2 — графы на* $2(n-1)$ *вершинах, причем вершины, неподвижные под действием автоморфизма, имеют окрестность F_1, а все остальные — F_2. Граф F_1 — это полный двудольный граф с долями порядка $n-1$ с удаленным паросочетанием. Граф F_2 — это две $(n-2)$-лапы, причем существует инъекция вершин степени* 1 *одной лапы на вершины степени* 1 *другой лапы, так что смежны только соответственные вершины* (*см. рис.*).



F_1 при $n = 5$.



F_2 при $n = 5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — квазирешетчатый граф Деза типа I с параметрами $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. Расположим вершины графа G в решетку в соответствии с вершинами исходного решетчатого графа. Занумеруем вершины в решетке и вершину в i-й строке и j-м столбце обозначим через (i, j). Рассмотрим вершину $(1, 1)$. Так как первая строка переходит в первый столбец в ее окрестности, то вершины $(1, i)$ будут смежны со всеми вершинами $(j, 1)$ при $j \neq i$, т. е. окрестность $(1, 1)$ изоморфна графу F_1. Аналогично для всех вершин вида (i, i). Теперь рассмотрим вершину $(1, 2)$. В ее окрестности есть две особые вершины $(1, 1)$ и $(2, 2)$, которые неподвижны при автоморфизме и имеют в окрестности вершины $(1, 2)$ ровно $(n-2)$ общих смежных с ней. Рассмотрим другие вершины окрестности $(1, 2)$. Каждая вершина $(1, i)$, $i > 2$, переходит в $(i, 1)$ и смежна в окрестности $(1, 2)$ только с $(i, 2)$, аналогично и вершины $(i, 2)$. Следовательно, окрестность $(1, 2)$ изоморфна графу F_2, аналогично для всех вершин вида (i, j), где $j \neq i$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — точный граф Деза с параметрами* $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$ *и G является локально F-графом, где F — из леммы, тогда G — квазирешетчатый граф Деза типа* I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, в графе G найдется ребро xy такое, что окрестности вершин x и y изоморфны F_1. Тогда $|[x] \backslash [y]| = |[y] \backslash [x]| = n-1$, а $|[x] \cap [y]| = n-2$.

Любые две вершины из $[x] \cap [y]$ имеют $n-4$ общих смежных в $[x] \backslash [y]$ и столько же в $[y] \backslash [x]$, а также сами вершины x и y, значит, всего $2(n-3)$. Но они не могут иметь более чем $n-2$ общих смежных: если $n-2 \geq 2(n-3)$, то $n \leq 4$. При $n=4$ параметры a и b совпадают, а значит, граф сильно регулярный. При $n=2$ степень каждой вершины равна 2, поэтому G — это цикл, т. е. сильно регулярный граф. При $n=3$ в $[x] \cap [y]$ всего одна вершина, и она не смежна с вершинами из $[x] \backslash [y]$ и $[y] \backslash [x]$, следовательно, ее окрестность тоже изоморфна F_1. Из-за связности графа G окрестности всех вершин изоморфны F_1, противоречие с определением локально F-графа. Поэтому такого ребра xy в G быть не может.

Рассмотрим вершину (1,1) с окрестностью типа F_1. Поскольку F_1 является полным двудольным графом с удаленным паросочетанием, то обозначим вершины первой доли через $(1,2), (1,3), \dots, (1,n)$, а вершины второй доли через $(2,1), (3,1), \dots, (n,1)$, где $(1,i)$ не смежна $(i,1)$ для всех i. Рассмотрим произвольную вершину x, лежащую вне [(1,1)], она должна иметь с (1,1) хотя бы две общих. Любые две вершины $(1,i)$ и $(1,j)$ при $i \neq j$ уже имеют $n-3$ общих смежных внутри $[(1,1)]$ и саму (1,1). Значит, x смежна с $(1,i)$ и с $(j,1)$ для некоторых i и j, причем получаем $(n-1)^2$ различных вершин, которые исчерпывают всю антиокрестность вершины (1,1). Обозначим вершину, смежную с $(1,i)$ и $(j,1)$ и отличную от $(1,1)$, через (j,i). Рассмотрим вершину $(1,k)$, как было показано. Так как она смежна с (1,1), то имеет окрестность, изоморфную F_2, причем вершина $(1,1)$ является вершиной $(n-2)$-лапы, вершиной второй $(n-2)$-лапы будет вершина (k,k), поскольку она не смежна ни с одной вершиной из $(i,1)$, где $i \neq 1$. Следовательно, вершина (k,k) смежна со всеми вершинами $(2,i)$ и $(j,2)$, где $i,j \neq k$. По [3, предложение 1.1] вершина (k,k) должна иметь $2(n-1)$ вершину, имеющую с ней $n-2$ общих смежных, в частности такими вершинами являются вершины $(1,k)$ и $(k,1)$. Предположим $[(k,k)]$ изоморфна F_2, тогда остальные вершины лежат вне $[(k,k)]$. Предположим, вершина x имеет с (k,k) ровно $n-2$ общих смежных. Но тогда x имеет $n-2$ общих смежных с $(1,k)$ или с $(k,1)$, но для $(1,k)$ и $(k,1)$ все такие вершины уже исчерпаны. Значит, $[(k,k)]$ изоморфна F_1. Следовательно, G — квазирешетчатый граф Деза типа I.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bose R.C. Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13. P. 389–419.
2. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. // Distance regular graphs. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989. P. 495.
3. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson, S. Fernando, W.H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
4. Shrikhande S.S. The uniqueness of the L_2 association scheme // Ann. Math. Statist. 1959. Vol. 30. P. 781-798.

Поступила 25.05.2010

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
зам. директора
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: vvk@imm.uran.ru

Шалагинов Леонид Викторович
аспирант
Челябинский гос. ун-т
e-mail: leonidshalaginov@rambler.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.2+621.391

NP-ПОЛНОТА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА ПОДМНОЖЕСТВ ВЕКТОРОВ[1]

А. В. Кельманов

Доказана NP-полнота дискретных оптимизационных задач, к которым сводятся некоторые актуальные проблемы, возникающие в рамках анализа данных при поиске подмножеств векторов.

Ключевые слова: экстремальная задача, сложность, NP-полнота, поиск подмножеств, евклидово пространство, анализ данных.

A. V. Kel'manov. The NP-completeness of some problems of searching for vector subsets.

We prove the NP-completeness of discrete optimization problems, to which some important problems appearing in data analysis involving a search for a vector subset are reduced.

Keywords: extremal problem, complexity, NP-completeness, search for subsets, Euclidean space, data analysis.

Введение

Объект исследования в работе — проблемы оптимизации в задачах анализа данных и распознавания образов. Предмет исследования — дискретные экстремальные задачи, к которым сводятся некоторые варианты проблемы поиска подмножеств во множестве векторов евклидова пространства. Цель работы — исследование сложности этих ранее не изученных задач.

Как известно, конструктивная модель какой-либо содержательной проблемы анализа данных и распознавания образов формулируется в форме задачи оптимизации подходящего критерия или функционала (максимума правдоподобия, минимума суммы квадратов уклонений, максимума апостериорной вероятности и т. п.), адекватно отражающего эту проблему. Оптимизация этого критерия в комбинации с многообразием объективно существующих структур (моделей) анализируемых данных и распознаваемых объектов порождает разнообразие редуцированных экстремальных задач, к которым сводится поиск оптимального решения. При этом сходные в содержательном плане проблемы сводятся к отличающимся экстремальным задачам. Зачастую простейшие и давно известные содержательные проблемы анализа структурированных данных и распознавания образов, типичные для актуальных приложений, сводятся к решению экстремальных задач, статус сложности которых неизвестен. Одна из таких проблем анализируется в настоящей работе.

В известной NP-трудной [1–4] задаче MSSC (Minimum-Sum-of-Squares Clustering) — кластеризации по критерию минимума суммы квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров — требуется разбить множество векторов евклидова пространства на подмножества (кластеры), включающие "близкие" или "похожие" по указанному критерию векторы. Центр кластера в этой задаче определяется как среднее значение вектора в кластере. Поэтому в некоторых публикациях эта задача фигурирует под названием k-Means (k-средних), которое соответствует названию одного из ранних алгоритмов [5], предложенных для ее решения.

К другим NP-трудным задачам [6–10] сводятся задачи поиска во множестве векторов евклидова пространства семейства непересекающихся подмножеств, включающих "близкие"

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00032 и 10-07-00195), целевой программы АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект 44).

между собой векторы. При постановке этих задач используется тот же критерий, что и при формулировке задачи MSSC — минимум суммы квадратов уклонений. Однако, в отличие от задачи MSSC, предполагается, что объединение элементов из искомого семейства может не совпадать с исходным множеством. При этом подмножество, дополняющее объединение семейства искомых подмножеств до всего множества, может быть как пустым, так и содержащим некоторые векторы, не вошедшие в искомое семейство.

В данной работе анализируются сходные в содержательном плане задачи. В этих задачах наряду с поиском семейства подмножеств, включающих "близкие" между собой векторы, требуется найти еще и семейство таких подмножеств векторов, где элементы каждого из подмножеств этого семейства "похожи" на вектор из заданного множества (алфавита) векторов. Предполагается, что объединение подмножеств из искомого семейства, как и в задачах, рассмотренных в [6–10], может не покрывать исходное множество.

Перечисленные задачи актуальны в широком спектре приложений (см., например, [3, 5, 6, 11–16] и цитированные там работы), связанных с компьютерным анализом и распознаванием массивов зашумленных структурированных данных (числовых последовательностей, временных рядов, сигналов), включающих повторяющиеся, чередующиеся или перемежающиеся информационно значимые векторы (или фрагменты одинаковой размерности), в случае, когда места расположения этих векторов (фрагментов) в массиве неизвестны.

Одна из возможных содержательных трактовок рассматриваемой ниже проблемы анализа данных состоит в следующем. Имеется совокупность, включающая несколько результатов измерения набора (вектора) каких-либо характеристик для каждого элемента из некоторого множества материальных объектов. Каждый объект этого множества может находиться в двух состояниях: активном и пассивном. В пассивном состоянии значения всех измеряемых характеристик из набора равны нулю, а в активном значение хотя бы одной характеристики не равно нулю. Для активных состояний одной части объектов из множества известен алфавит эталонных наборов значений всех характеристик. Для активных состояний другой, оставшейся, части объектов этого множества аналогичные данные отсутствуют (неизвестны). В каждом результате измерения имеется ошибка, причем соответствие между объектом и результатом измерения его характеристик неизвестно. Требуется, используя адекватный измеряемым характеристикам критерий, найти семейство подмножеств наборов, соответствующих активному состоянию каждого объекта из множества (или найти подмножества "похожих" объектов), и оценить неизвестные характеристики для части объектов в активном состоянии.

Гипотеза о труднорешаемости редуцированных оптимизационных задач, к которым сводятся возможные варианты сформулированной содержательной проблемы, была высказана в [17]. Ниже эта гипотеза доказана.

1. Модель анализа данных

Рассмотрим следующую структуру данных, представленных в виде совокупности векторов евклидова пространства. Пусть векторная последовательность $x_n \in \mathbb{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$, обладает свойством

$$x_n = \begin{cases} w_k, & \textit{если} \quad n \in \mathcal{M}_k, \quad k = 1, \ldots, K, \\ v_j, & \textit{если} \quad n \in \mathcal{N}_j, \quad j = 1, \ldots, J, \\ 0, & \textit{если} \quad n \in \mathcal{N} \backslash \{\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_K \cup \mathcal{N}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_J\}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_K \cup \mathcal{N}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{N}_J \subseteq \mathcal{N}$, причем все множества из семейства $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_K, \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_J\}$ непусты и не пересекаются, а среди векторов из множеств $\{w_1, \ldots, w_K\}$ и $\{v_1, \ldots, v_J\}$ нет ни одного нулевого вектора.

Допустим, что для обработки доступна последовательность

$$y_n = x_n + e_n, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{1.2}$$

где e_n — вектор помехи (ошибки), независимый от вектора x_n. Учитывая зависимость элементов последовательности от множеств, положим

$$S(\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_K,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_J,w_1,\ldots,w_K,v_1,\ldots,v_J)=\sum_{n\in\mathcal{N}}\|y_n-x_n\|^2 \tag{1.3}$$

и рассмотрим модель анализа данных в виде следующей оптимизационной задачи.

Д а н о: последовательность y_n, $n\in\mathcal{N}$, и алфавит $\{v_1,\ldots,v_J\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$.

Н а й т и: семейство $\{\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_K,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_J\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{N}$ и совокупность $\{w_1,\ldots,w_K\}$ векторов, которые доставляют минимум функционалу $S(\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_K,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_J,w_1,\ldots,w_K|\,v_1,\ldots,v_J)$, при условии, что структура последовательности описывается формулами (1.1) и (1.2).

Эта задача соответствует сформулированной во введении содержательной проблеме поиска семейства непустых непересекающихся подмножеств векторов. В модели анализа данных ненулевые векторы из множества $\{w_1,\ldots,w_K\}$ и алфавита $\{v_1,\ldots,v_J\}$ можно интерпретировать как информационно значимые векторы, компоненты которых соответствуют измеряемым характеристикам объектов в активном состоянии, причем векторы $v_1,\ldots,v_J$ из алфавита известны, а векторы $w_1,\ldots,w_K$ неизвестны. Мощности подмножеств $\mathcal{M}_k$, $k=1,\ldots,K$, и $\mathcal{N}_j$, $j=1,\ldots,J$, соответствуют числу активных состояний этих объектов. Оптимизационную задачу можно трактовать как поиск наилучшего варианта приближения по критерию минимума суммы квадратов уклонений последовательности (1.2) от последовательности (1.1), которая включает повторяющиеся ненулевые векторы, перемежающиеся с нуль-вектором. Нетрудно установить, что к аналогичной формулировке можно прийти, если считать, что вектор e_n есть выборка единичного объема из q-мерного нормального распределения с параметрами $(0,\sigma^2\mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, а в качестве критерия решения использовать традиционный для статистики максимум функционала правдоподобия.

Рассмотрим возможные варианты редуцированных задач, к которым сводится эта задача.

2. Редуцированные оптимизационные задачи

Раскрывая сумму квадратов в правой части (1.3) с учетом (1.1), получим

$$S=\sum_{n\in\mathcal{N}}\|y_n\|^2-\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\{2(y_i,w_k)-\|w_k\|^2\}-\sum_{j=1}^{J}\sum_{i\in\mathcal{N}_j}\{2(y_i,v_j)-\|v_j\|^2\}. \tag{2.1}$$

Минимум функционала $S(\cdot)$ по неизвестным векторам $w_1,\ldots,w_K$ находится аналитически. Используя (2.1), нетрудно убедиться, что для любых непустых непересекающихся подмножеств $\mathcal{M}_1\subset\mathcal{N},\ldots,\mathcal{M}_K\subset\mathcal{N}$ (строгие включения следуют из (1.1)) этот минимум доставляется векторами $\overline{w}_k=\sum\limits_{i\in\mathcal{M}_k}y_i\,/\,|\mathcal{M}_k|$, $k=1,\ldots,K$, и равен

$$\begin{aligned}&S_{\min}(\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_K,\mathcal{N}_1,\ldots,\mathcal{N}_J|\,v_1,\ldots,v_J)\\&=\sum_{n\in\mathcal{N}}\|y_n\|^2-\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{|\mathcal{M}_k|}\Big\|\sum_{i\in\mathcal{M}_k}y_i\Big\|^2-\sum_{j=1}^{J}\sum_{i\in\mathcal{N}_j}\{2(y_i,v_j)-\|v_j\|^2\}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Заметим, что первый член в правой части этого равенства является константой. Следовательно, задача минимизации функционала $S(\cdot)$, сформулированная в разд. 1, сводится к максимизации суммы двух последних членов в правой части выражения (2.2). Кроме того, заметим, что мощности искомых подмножеств $\mathcal{M}_k$, $k=1,\ldots,K$, и $\mathcal{N}_j$, $j=1,\ldots,J$, могут быть как фиксированными (известными), так и нефиксированными (неизвестными или оптимизируемыми) величинами. Поэтому возможны четыре варианта задачи. Наконец, заметим, что $\sum_{j=1}^{J}\sum_{i\in\mathcal{N}_j}\|v_j\|^2=\sum_{j=1}^{J}|\mathcal{N}_j|\cdot\|v_j\|^2$. Следовательно, эта сумма, входящая в последний член правой части равенства (2.2), также является константой в случае, когда мощности множеств $\mathcal{N}_j$, $j=1,\dots,J$, фиксированы. Заменив в выражении (2.2) суммирование по индексам на суммирование по элементам множеств, с учетом сделанных замечаний получим четыре редуцированные экстремальные задачи.

Перед формулировкой задач поясним их краткие символьные обозначения, введенные ниже. Первые три символа — SVS — одинаковы во всех кратких названиях задач и образованы от английского словосочетания Search for Vector Subsets. Вторые два символа образованы от слов Fixed и Nonfixed для обозначения четырех комбинаций — FF, NF, FN и NN, соответствующих возможным вариантам, которые индуцируются наличием или отсутствием ограничений на мощности множеств из пары совокупностей $\{\mathcal{M}_1,\dots,\mathcal{M}_K\}$ и $\{\mathcal{N}_1,\dots,\mathcal{N}_J\}$ на входе задачи. Сформулируем редуцированные задачи в форме верификации свойств.

Задача SVS-FF. Д а н о: множество $\mathcal{Y}=\{y_1,\dots,y_N\}$ и алфавит $\{v_1,\dots,v_J\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $M_1,\dots,M_K$, $N_1,\dots,N_J$ и положительное число A. В о п р о с: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_k^1\subset\mathcal{Y}$, $k=1,\dots,K$, и $\mathcal{Y}_j^2\subset\mathcal{Y}$, $j=1,\dots,J$, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{M_k}\Big\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_k^1}y\Big\|^2+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{y\in\mathcal{Y}_j^2}(y,v_j)\ge A \tag{2.3}$$

при ограничениях $|\mathcal{Y}_k^1|=M_k$, $k=1,\dots,K$, и $|\mathcal{Y}_j^2|=N_j$, $j=1,\dots,J$, на мощности подмножеств?

Задача SVS-NF. Д а н о: множество $\mathcal{Y}=\{y_1,\dots,y_N\}$ и алфавит $\{v_1,\dots,v_J\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $N_1,\dots,N_J$ и положительное число A. В о п р о с: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_k^1\subset\mathcal{Y}$, $k=1,\dots,K$, и $\mathcal{Y}_j^2\subset\mathcal{Y}$, $j=1,\dots,J$, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|}\Big\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_k^1}y\Big\|^2+2\sum_{j=1}^{J}\sum_{y\in\mathcal{Y}_j^2}(y,v_j)\ge A \tag{2.4}$$

при ограничениях $|\mathcal{Y}_j^2|=N_j$, $j=1,\dots,J$, на мощности подмножеств?

Задача SVS-FN. Д а н о: множество $\mathcal{Y}=\{y_1,\dots,y_N\}$ и алфавит $\{v_1,\dots,v_J\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $M_1,\dots,M_K$ и положительное число A. В о п р о с: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_k^1\subset\mathcal{Y}$, $k=1,\dots,K$, и $\mathcal{Y}_j^2\subset\mathcal{Y}$, $j=1,\dots,J$, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{M_k}\Big\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_k^1}y\Big\|^2+\sum_{j=1}^{J}\sum_{y\in\mathcal{Y}_j^2}\{2(y,v_j)-\|v_j\|^2\}\ge A$$

при ограничениях $|\mathcal{Y}_k^1|=M_k$, $k=1,\dots,K$, на мощности подмножеств?

Задача SVS-NN. Д а н о: множество $\mathcal{Y}=\{y_1,\dots,y_N\}$ и алфавит $\{v_1,\dots,v_J\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, положительное число A. В о п р о с: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_k^1\subset\mathcal{Y}$, $k=1,\dots,K$, и $\mathcal{Y}_j^2\subset\mathcal{Y}$, $j=1,\dots,J$, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|}\Big\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_k^1}y\Big\|^2+\sum_{j=1}^{J}\sum_{y\in\mathcal{Y}_j^2}\{2(y,v_j)-\|v_j\|^2\}\ge A? \tag{2.5}$$

Основным результатом настоящей работы является установление статуса NP-полноты сформулированных выше задач.

3. Анализ сложности

Для доказательства факта трудноразрешаемости редуцированных задач приведем следующие вспомогательные NP-полные [10] задачи.

Задача SSAF. Д а н о: множество $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_L\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $I_1, \dots, I_K$ и положительное число B. В о п р о с: существует ли такое семейство $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_K\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{U}$, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{I_k} \Big\| \sum_{u \in \mathcal{U}_k} u \Big\|^2 \geq B \tag{3.1}$$

при ограничениях $|\mathcal{U}_k| = I_k$, $k = 1, \dots, K$, на мощности подмножеств?

Задача SSANF. Д а н о: множество $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_L\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и положительное число B. В о п р о с: существует ли такое семейство $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_K\}$ непустых непересекающихся подмножеств множества $\mathcal{U}$, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{U}_k|} \Big\| \sum_{u \in \mathcal{U}_k} u \Big\|^2 \geq B? \tag{3.2}$$

Напомним, что к задачам SSAF и SSANF сводится поиск во множестве векторов евклидова пространства семейства таких подмножеств векторов, что элементы этих подмножеств "похожи" между собой по критерию минимума суммы квадратов расстояний в случаях, когда мощности искомых подмножеств известны и неизвестны соответственно [10].

Чтобы избежать повторений в изложении доказательств сформулированных ниже утверждений, заметим сразу, что все редуцированные задачи, приведенные в разд. 2, очевидно, принадлежат к классу NP. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Задача* SVS-FF *NP-полна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем NP-полноту задачи SVS-FF путем полиномиального сведения задачи SSAF к частному случаю задачи SVS-FF.

По произвольной индивидуальной задаче SSAF построим следующий пример задачи SVS-FF. Обозначим через a наибольшую по модулю координату векторов из множества $\mathcal{U}$. Без ограничения общности будем считать, что $a > 0$. Для частного случая задачи SVS-FF положим $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \{z\}$, $M_k = I_k$, $k = 1, \dots, K$, $J = 1$, $N_1 = 1$, $v_1 = z/2$, где $z = (a+1, \dots, a+1) \in \mathbb{R}^q$, и $A = B + \|z\|^2$.

Покажем, что для того, чтобы в задаче SSAF существовало семейство $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_K\}$ подмножеств, мощности которых равны $I_1, \dots, I_K$, удовлетворяющее условию (3.1), необходимо и достаточно, чтобы в частном случае задачи SVS-FF существовали такие подмножества $\mathcal{Y}_k^1 \subset \mathcal{Y}$, $k = 1, \dots, K$, и $\mathcal{Y}_1^2 \subset \mathcal{Y}$ мощности $M_1 = I_1, \dots, M_K = I_K$ и $N_1 = 1$ соответственно, что имеет место неравенство (2.3).

Необходимость. Если в задаче SSAF во множестве $\mathcal{U}$ существует семейство $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_K\}$ подмножеств, мощности которых равны $I_1, \dots, I_K$, такое, что справедливо (3.1), то и в задаче SVS-FF во множестве $\mathcal{Y}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1^1 = \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{Y}_K^1 = \mathcal{U}_K$ и $\mathcal{Y}_1^2 = \{z\}$ мощности $M_1 = I_1, \dots, M_K = I_K$ и $N_1 = 1$ соответственно, удовлетворяющие неравенству (2.3). В самом деле, опираясь на (3.1), для задачи SVS-FF имеем

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{M_k} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + 2 \sum_{j=1}^{J} \sum_{y \in \mathcal{Y}_j^2} (y, v_j) = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{M_k} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + 2 \sum_{y \in \mathcal{Y}_1^2} (y, v_1)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{I_k} \Big\| \sum_{u \in \mathcal{U}_k} u \Big\|^2 + 2(z, \frac{z}{2}) \geq B + \|z\|^2 = A.$$

Достаточность. Заметим сначала, что для всякого подмножества $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ такого, что $|\mathcal{X}| = 1$, и фиксированного $v_1 = z/2$ имеет место неравенство

$$2 \sum_{y \in \mathcal{X}} (y, v_1) \leq \|z\|^2. \qquad (3.3)$$

Действительно, если $\mathcal{X} = \{z\}$, то

$$2 \sum_{y \in \mathcal{X}} (y, v_1) = 2(z, \frac{z}{2}) = \|z\|^2.$$

Если же $\mathcal{X} \neq \{z\}$, то $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$. Поэтому, учитывая, что максимальная длина вектора в $\mathcal{U}$ не превосходит $a\sqrt{q}$, получим

$$2 \sum_{y \in \mathcal{X}} (y, v_1) \leq 2\, a\, \sqrt{q}\, \frac{\|z\|}{2} < (a+1)\, \sqrt{q}\, \|z\| = \|z\|^2.$$

Допустим теперь, что в задаче SVS-FF во множестве $\mathcal{Y}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1^1, \ldots, \mathcal{Y}_K^1$ и $\mathcal{Y}_1^2$ мощности $M_1, \ldots, M_K$ и $N_1 = 1$ соответственно, удовлетворяющие неравенству (2.3). Тогда из (3.3) и (2.3) следует, что в задаче SSAF во множестве $\mathcal{U}$ существуют подмножества $\mathcal{U}_1 = \mathcal{Y}_1^1, \ldots, \mathcal{U}_K = \mathcal{Y}_K^1$ мощности $I_1 = M_1, \ldots, I_K = M_K$ такие, что выполнено (3.1). В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{I_k} \Big\| \sum_{u \in \mathcal{U}_k} u \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{M_k} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{M_k} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + 2 \sum_{y \in \mathcal{Y}_1^2} (y, v_1) - \|z\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{M_k} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + 2 \sum_{j=1}^{1} \sum_{y \in \mathcal{Y}_j^2} (y, v_j) - \|z\|^2 \geq A - \|z\|^2 = B.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Задача* SVS-NF *NP-полна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При доказательстве устанавливается полиномиальная сводимость второй вспомогательной NP-полной задачи SSANF к частному случаю задачи SVS-NF, в которой, как и ранее, a — наибольшая по модулю координата векторов из множества $\mathcal{U}$ (считаем, что $a > 0$), $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \{z\}$, $J = 1$, $N_1 = 1$, $v_1 = z/2$, где $z = (a+1, \ldots, a+1) \in \mathbb{R}^q$, и $A = B + \|z\|^2$.

При этом устанавливается, что для того, чтобы в задаче SSANF существовало семейство $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_K\}$ подмножеств, удовлетворяющее условию (3.2), необходимо и достаточно, чтобы в частном случае задачи SVS-NF при $A = B + \|z\|^2$ существовали такие подмножества $\mathcal{Y}_k^1 \subset \mathcal{Y}$, $k = 1, \ldots, K$, мощности которых не фиксированы, и подмножество $\mathcal{Y}_1^2 \subset \mathcal{Y}$, мощность которого равна 1, что имеет место неравенство (2.4).

Теорема 3. *Задача* SVS-FN *NP-полна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично приведенному ниже доказательству теоремы 4. Устанавливается полиномиальная сводимость задачи SSAF к частному случаю задачи SVS-FN.

Теорема 4. *Задача* SVS-NN *NP-полна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем справедливость утверждения путем полиномиального сведения задачи SSANF к частному случаю задачи SVS-NN.

По произвольной индивидуальной задаче SSANF построим следующий пример задачи SVS-NN. Как и ранее, обозначим через a наибольшую по модулю координату векторов из множества $\mathcal{U}$ и, не ограничивая общность, будем считать, что $a > 0$. В примере задачи SVS-NN положим $J = 1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \{z\}$, где $z = (2a+1, \ldots, 2a+1) \in \mathbb{R}^q$, $A = B + \|z\|^2$ и $v_1 = z$.

Утверждается, что для того, чтобы в задаче SSANF во множестве $\mathcal{U}$ существовало семейство $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_K\}$ подмножеств, удовлетворяющее условию (3.2), необходимо и достаточно, чтобы в частном случае задачи SVS-NN при $A = B + \|z\|^2$ существовали такие подмножества $\mathcal{Y}_k^1 \subset \mathcal{Y}$, $k = 1, \ldots, K$, и $\mathcal{Y}_1^2 \subset \mathcal{Y}$, мощности которых не фиксированы, что имеет место неравенство (2.5).

Необходимость. Если в задаче SSANF во множестве $\mathcal{U}$ существует семейство $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_K\}$ непересекающихся подмножеств такое, что выполнено (3.2), то и в задаче SVS-NN во множестве $\mathcal{Y}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1^1 = \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{Y}_k^1 = \mathcal{U}_K$ и $\mathcal{Y}_1^2 = \{z\}$, удовлетворяющие неравенству (2.5). Действительно, опираясь на (3.2), для задачи SVS-NN имеем

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + \sum_{j=1}^{J} \sum_{y \in \mathcal{Y}_j^2} \{2(y, v_j) - \|v_j\|^2\} = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y}_1^2} \{2(y, v_1) - \|v_1\|^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{U}_k|} \Big\| \sum_{u \in \mathcal{U}_k} u \Big\|^2 + 2(z, z) - \|z\|^2 \geq B + \|z\|^2 = A.$$

Достаточность. Покажем сначала, что для всякого непустого подмножества $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ и фиксированного $v_1 = z$ имеет место неравенство

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} \{2(y, v_1) - \|v_1\|^2\} \leq \|z\|^2. \tag{3.4}$$

В самом деле, если $\mathcal{X} = \{z\}$, то

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} \{2(y, v_1) - \|v_1\|^2\} = 2(z, z) - \|z\|^2 = \|z\|^2.$$

Если $z \notin \mathcal{X}$, то, учитывая, что максимальная длина вектора в $\mathcal{X}$ не превосходит $a\sqrt{q}$, имеем

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} \{2(y, v_1) - \|v_1\|^2\} = \sum_{y \in \mathcal{X}} \{2(y, z) - \|z\|^2\} \leq |\mathcal{X}| \, \{2\, a \sqrt{q}\, \|z\| - \|z\|^2\}$$

$$= |\mathcal{X}| \, \{2\, a\, q\, (2a+1) - q\, (2a+1)^2\} < 0 < \|z\|^2.$$

Если же $z \in \mathcal{X}$ и $|\mathcal{X}| \geq 2$, то, используя оценки для двух рассмотренных случаев, получим

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} \{2(y, v_1) - \|v_1\|^2\} = \sum_{y \in \mathcal{X}} \{2(y, z) - \|z\|^2\} = \sum_{y \in \mathcal{X} \setminus \{z\}} \{2(y, z) - \|z\|^2\} + \sum_{y \in \{z\}} \{2(y, z) - \|z\|^2\}$$

$$\leq (|\mathcal{X}| - 1)\, \{2\, a \sqrt{q}\, \|z\| - \|z\|^2\} + \|z\|^2 < \|z\|^2.$$

Допустим теперь, что в задаче SVS-NN во множестве $\mathcal{Y}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1^1, \ldots, \mathcal{Y}_K^1$ и $\mathcal{Y}_1^2$, удовлетворяющие неравенству (2.5). Тогда из (3.4) и (2.5) следует, что в задаче SSANF во множестве $\mathcal{U}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{U}_1 = \mathcal{Y}_1^1, \ldots, \mathcal{U}_K = \mathcal{Y}_K^1$ такие, что выполнено (3.2). Действительно,

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{U}_k|} \Big\| \sum_{u \in \mathcal{U}_k} u \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 \geq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y}_1^2} \{2(y, v_1) - \|v_1\|^2\} - \|z\|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{|\mathcal{Y}_k^1|} \Big\| \sum_{y \in \mathcal{Y}_k^1} y \Big\|^2 + \sum_{j=1}^{1} \sum_{y \in \mathcal{Y}_j^2} \{2(y, v_j) - \|v_j\|^2\} - \|z\|^2 \geq A - \|z\|^2 = B.$$

Теорема доказана.

Заключение

Показана NP-полнота экстремальных задач, к которым сводится поиск по критерию минимума суммы квадратов расстояний во множестве векторов евклидова пространства таких двух семейств непустых непересекающихся подмножеств, что одно из этих семейств включает совокупность подмножеств, каждое из которых содержит “близкие” между собой векторы, а другое — совокупность подмножеств векторов, каждое из которых содержит элементы, “похожие” на вектор из заданного алфавита. Из полученного результата следует труднорешаемость соответствующих задач анализа данных и распознавания образов. Остается заметить, что эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для решения рассмотренных задач на сегодняшний день неизвестны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. NP-hardness of euclidean sum-of-squares clustering / D. Aloise, A. Deshpande, P. Hansen, P. Popat // Les Cahiers du GERAD. 2008. G-2008-33. 4 p.
2. **Dasgupta S.** The hardness of k-means clustering // Technical Report. CS2007-0890. San Diego: University of California, 2007. 6 p.
3. **Mahajan M., Nimbhorkar P., Varadarajan K.** The planar k-means problem is NP-hard // Lecture Notes Comput. Sci. 2009. Vol. 5431. P. 274–285.
4. **Долгушев А.В., Кельманов А.В.** К вопросу об алгоритмической сложности одной задачи кластерного анализа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 2. С. 39–45.
5. **MacQueen J.B.** Some methods for classification and analysis of multivariate observations // Proc. 5-th Berkeley Symp. of Mathematical Statistics and Probability. 1967. Vol. 1. P. 281–297.
6. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов / Э.Х. Гимади, А.В. Кельманов, М.А. Кельманова, С.А. Хамидуллин // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55–74.
7. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом / А.Е. Бабурин, Э.Х. Гимади, Н.И. Глебов, А.В. Пяткин // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2007. Сер. 2. Т. 14, № 1. С. 32–42.
8. **Кельманов А.В., Пяткин А.В.** О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества “похожих” векторов // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 5. С. 590–592.
9. **Кельманов А.В., Пяткин А.В.** Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 5. С. 25–40.
10. **Кельманов А.В., Пяткин А.В.** О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 11. С. 2059–2067.
11. **Aloise D., Hansen P.** On the complexity of minimum sum-of-squares clustering // Les Cahiers du GERAD. 2007. G-2007-50. 12 p.
12. **Kel’manov A.V., Jeon B.** A posteriori joint detection and discrimination of pulses in a quasiperiodic pulse train // IEEE Trans. Signal Process. 2004. Vol. 52, no. 3. P. 645–656.
13. **Кельманов А.В., Хамидуллин С.А.** Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 5. С. 807–820.
14. **Кельманов А.В., Михайлова Л.В.** Совместное обнаружение в квазипериодической последовательности заданного числа фрагментов из эталонного набора и ее разбиение на участки, включающие серии одинаковых фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 1. С. 172–189.
15. **Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А.** Апостериорное обнаружение в квазипериодической последовательности повторяющегося набора эталонных фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 12. С. 2247–2260.

16. **Кельманов А.В.** Проблема обнаружения квазипериодически повторяющегося фрагмента в числовой последовательности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 81–88.
17. **Кельманов А.В.** Полиномиально разрешимые и NP-трудные варианты задачи оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента // Дискретная оптимизация и исследование операций: электрон. материалы Рос. конф. / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2007. С. 46–50. URL: http://math.nsc.ru/conference/door07/DOOR_abstracts.pdf.

Кельманов Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Поступила 20.03.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА[1]

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Устанавливаются признаки p-разрешимости конечной группы с условием перестановочности силовской p-подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта. Получены также признаки разрешимости конечной группы, в которой некоторые подгруппы Шмидта перестановочны.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, перестановочные подгруппы.

V. N. Knyagina, V. S. Monakhov. On permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups.

A Schmidt group is a non-nilpotent group whose every proper subgroup is nilpotent. Sufficient conditions for p-solvability of finite group in which Sylow p-subgroup permutes with some Schmidt subgroups are established. Sufficient conditions for solvability of finite group whose some Schmidt subgroups are permutable are obtained.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучению таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится на два различных числа), одна из силовских подгрупп нормальная, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в статье В. С. Монахова [2].

Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами конечных групп. Естественно поэтому, что свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Группы с некоторыми ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались в работах [3–6].

По мнению авторов, первой работой, посвященной перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [7]. В этой работе наряду с другими результатами получены следующие четыре утверждения.

Теорема (Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик). 1. *Пусть каждая не лежащая в $S(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта H четного порядка перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G, порядки которых взаимно просты с H. Тогда группа G разрешима* [7, теорема 2].

2. *Пусть все силовские p-подгруппы группы G перестановочны со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта. Тогда группа G p-разрешима* [7, теорема 6].

3. *Пусть каждая силовская 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка. Тогда группа G разрешима* [7, теорема 7].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ-БРФФИ (проект Ф 08Р-230).

4. *Если каждая p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта порядка $p^\alpha q^\beta$ перестановочна со всеми силовскими q-подгруппами группы G, то G p-разрешима* [7, теорема 8].

Здесь $S(G)$ — разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Группа G называется p-нильпотентной, если в ней существует нормальная подгруппа H, порядок которой не делится на p, такая, что $G = PH$, где P — силовская p-подгруппа группы G. Если порядок подгруппы X делится на простое число p, то говорят, что X — pd-подгруппа. Для простого r через $S_r(G)$ обозначается наибольшая нормальная r-разрешимая подгруппа группы G.

В связи с теоремой Берковича — Пальчика вполне естественно возникает следующий вопрос:

Будет ли группа G r-разрешимой, если в ней некоторая силовская r-подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта?

В общем случае существуют простые группы, в которых для некоторого простого r каждая силовская r-подгруппа перестановочна с r'-подгруппами Шмидта. Например, в группе $PSL(2,7)$ каждая силовская 2-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка. В группе $SL(2,8)$ каждая силовская 3-подгруппа перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. В группе $SL(2,4)$ каждая силовская 5-подгруппа перестановочна с каждой 2-замкнутой подгруппой Шмидта четного порядка. В следующих группах вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка: $PSL(2,p)$, p — простое число Ферма, $PSL(2,9)$, $SL(2,2^n)$, $n > 2$, $Sz(2^{2k+1}$, $k \geq 1$, $PSU(5,4)$, $PSU(4,2)$, $PSp(4,2^n)$. Поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка.

Тем не менее при некотором выборе подгрупп Шмидта для каждого простого r можно получить r-разрешимость группы G.

Одним из основных результатов настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 1. 1. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа G r-разрешима.*

2. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и $r \notin \{3,5\}$, то G r-разрешима.*

3. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ r-замкнутыми rd-подгруппами Шмидта, то G r-разрешима.*

4. *Если каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ r-замкнутая rd-подгруппа Шмидта порядка $r^\alpha q^\beta$ перестановочна с некоторой силовской q-подгруппой группы G, то G r-разрешима.*

Ограничение $r \notin \{3,5\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2,8)$ и $SL(2,4)$. В простой группе $PSL(2,7)$ нет 7-нильпотентных $7d$-подгрупп Шмидта. Поэтому группа, в которой силовская r-подгруппа перестановочна со всеми r-нильпотентными rd-подгруппами Шмидта, не обязана быть r-разрешимой.

При $r = 2$ из теоремы вытекают следующие новые признаки разрешимости группы.

Следствие 1. 1. *Если некоторая силовская 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S(G)$ 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа G разрешима.*

2. *Если некоторая силовская 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S(G)$ 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка, то G разрешима.*

Другие признаки разрешимости группы получены в следующей теореме.

Теорема 2. 1. *Если в группе G каждая не содержащаяся в $S(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта A четного порядка перестановочна с некоторой не содержащейся в $S(G)$ силовской r-подгруппой для каждого r, не делящего $|A|$, то G разрешима.*

2. *Если в группе G каждая не содержащаяся в $S(G)$ 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой не содержащейся в $S(G)$ силовской подгруппой нечетного порядка, то группа G разрешима.*

В группе $SL(2,4)$ каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой силовской подгруппой взаимно простого с ней порядка. Следовательно, в утверждении 2 нельзя ограничиться только силовскими подгруппами взаимно простого с подгруппами Шмидта порядка.

Разработанная методика позволяет получить новые признаки r-разрешимости группы с условием перестановочности некоторых ее подгрупп Шмидта.

Теорема 3. 1. *Если в группе G каждая не содержащаяся в $S(G)$ 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка, то группа G разрешима.*

2. *Зафиксируем простое число $r \notin \{5, 11\}$. Если в группе G каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой не содержащейся в $S_r(G)$ r-замкнутой rd-подгруппой Шмидта, то группа G r-разрешима.*

3. *Зафиксируем простое число r. Если в группе G каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой не содержащейся в $S_r(G)$ r-замкнутой rd-подгруппой Шмидта, то группа G r-разрешима.*

Ограничение $r \notin \{5, 11\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2,4)$ и $PSL(2,11)$.

1. Вспомогательные результаты

Будем придерживаться обозначениям и определениям, принятым в [10, 11].

Лемма 1 [12, лемма 1.5]. *Если в группе G нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то G p-нильпотентна.*

Лемма 2 [12, лемма 3.1]. *Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G 2-замкнута.*

Условимся называть $S_{\langle p,q\rangle}$-группой $\{p,q\}$-группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой. Если X и Y — подгруппы группы G, то $X^Y = \langle X^y \mid y \in Y\rangle$.

Лемма 3 [4, лемма 2]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами*:

(1) *L — p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа*;

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны*;

(3) *L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в подгруппе D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.*

Лемма 4. *Зафиксируем различные простые числа p и q. Пусть H — подгруппа группы G, порожденная всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами из G. Тогда в факторгруппе G/H нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное, пусть A/H — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G/H. По лемме 3 в A существует $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа S такая, что $S^AH = A$. Однако по построению подгруппы H имеем: $S^A \subseteq H$, т. е. $A = H$ и A/H единична, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. 1. *Если подгруппа H порождена всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка группы G, то G/H 2-замкнута.*

2. *Если подгруппа H порождена всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта группы G, то G/H p-нильпотентна.*

3. *Если подгруппа H порождена всеми подгруппами Шмидта группы G, то G/H нильпотентна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. По условию подгруппа H порождена всеми $S_{\langle p,2\rangle}$-подгруппами, $p \in \pi(G)$. По лемме 4 в G/H нет $S_{\langle p,2\rangle}$-подгрупп для каждого $p \in \pi(G)$. Теперь G/H 2-замкнута по лемме 2.

2. По условию подгруппа H порождена всеми $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппами, $q \in \pi(G)$. По лемме 4 в G/H нет $S_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп для каждого $q \in \pi(G)$. Теперь G/H p-нильпотентна по лемме 1.

3. По условию подгруппа H порождена всеми подгруппами Шмидта группы G. По лемме 4 в G/H нет подгрупп Шмидта, значит, G/H нильпотентна. Лемма доказана.

Лемма 6 [6, лемма 5]. *Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами B_1, $B_2, \dots, B_n$. Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1, B_2, \dots, B_n\rangle$, порожденной ими.*

Лемма 7. *Зафиксируем простые числа p, q, r и силовскую p-подгруппу P в группе G. Если подгруппа P перестановочна со всеми $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппами группы G, то каждая силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппами из G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть P^g — произвольная силовская p-подгруппа группы G, $g \in G$, а S — произвольная $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппа в G. По условию подгруппы P и $S^{g^{-1}}$ перестановочны, т. е. $PS^{g^{-1}} = S^{g^{-1}}P$. Поэтому $(PS^{g^{-1}})^g = P^gS = (S^{g^{-1}}P)^g = SP^g$, т. е. подгруппы P^g и S перестановочны. Лемма доказана.

Лемма 8. *Зафиксируем простые числа p, q и r. Пусть в группе G каждая силовская p-подгруппа перестановочна со всеми $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппами группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если H — подгруппа группы G, то каждая силовская p-подгруппа из H перестановочна со всеми $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппами из H.*

2. *Если N — нормальная в G подгруппа, то в факторгруппе G/N каждая силовская p-подгруппа перестановочна со всеми $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппами из G/N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть S — $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппа в H и P_1 — силовская p-подгруппа из H. По теореме Силова существует силовская p-подгруппа P в группе G такая, что P_1 содержится в P. По условию леммы подгруппы P и S перестановочны, т. е. $A = PS$ является подгруппой группы G. Теперь по тождеству Дедекинда $A \cap H = (P \cap H)S$. Поскольку P_1 содержится в $P \cap H$ и является силовской p-подгруппой в H, то $P_1 = P \cap H$ и $P_1S = A \cap H$ — подгруппа группы G. Поэтому подгруппы P_1 и S перестановочны.

2. Пусть A/N — $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппа группы G/N, а P_1/N — силовская p-подгруппа из G/N. Ясно, что $P_1 = PN$, где P — некоторая силовская p-подгруппа группы G. По лемме 3 минимальное добавление L к подгруппе N в A содержит $S_{\langle q,r\rangle}$-подгруппу S такую, что $S^L = L$, поэтому $S^LN = A$. По условию леммы подгруппы P и S^l перестановочны для любого $l \in L$.

Теперь из леммы 6 следует, что подгруппы P и L перестановочны. Так как N нормальна в G, то подгруппы $P_1 = PN$ и $A = LN$ перестановочны. Таким образом, подгруппы A/N и P_1/N перестановочны. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если G — минимальная не r-разрешимая группа, то $G/\Phi(G)$ простая.*

Доказательство. Пусть N — собственная нормальная подгруппа группы G. Тогда N r-разрешима. Предположим, что N не содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$. Тогда существует максимальная подгруппа M такая, что N не содержится в M. Поэтому $G = MN$. Так как M по условию r-разрешима и $G/N \simeq M/M \cap N$, то G/N — r-разрешимая группа. Поэтому группа G r-разрешима, противоречие. Следовательно, все собственные нормальные в G подгруппы содержатся в $\Phi(G)$ и $G/\Phi(G)$ — простая группа. Лемма доказана.

Лемма 10 [11, лемма VI.4.10]. *Пусть A и B — подгруппы группы G и $G \neq AB$. Если $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$, то либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Конкретные группы обозначаются следующим образом:

D_n — диэдральная группа порядка n;
Z_n — циклическая группа порядка n;
E_{p^n} — элементарная абелева p-группа порядка p^n;
A_n, S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n;
$[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Лемма 11. *Если простая группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта S, то справедливо одно из следующих утверждений*:

(1) $p = 2$, $G \simeq PSL(2,7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq [Z_7]Z_3$;

(2) $p = 3$, $G \simeq SL(2,8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq [E_8]Z_7$;

(3) $p = 5$, $G \simeq PSL(2,5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq [E_4]Z_3$.

Доказательство. В теореме 3 работы В. С. Монахова [13] перечислены неразрешимые группы $G = AB$, где A — группа Шмидта, а B — нильпотентная группа. При такой факторизации $G/S(G)$ изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,7)$, $PGL(2,7)$, $SL(2,2^n)$ и $(2^n - 1)$ — простое число, $P\Gamma L(2,2^n)$ для некоторого простого числа n. Так как в нашем случае группа G простая и $|\pi(G)| = 3$, то для группы $SL(2,2^n)$ возможны только ситуации, когда $n \in \{2,3\}$. Таким образом, группа $G \in \{PSL(2,7),\ PSL(2,5) \simeq SL(2,4),\ SL(2,8)\}$. Факторизации этих групп известны, требуемые факторизации указаны в пп. (1)–(3) заключения доказываемой леммы. Лемма доказана.

Лемма 12 [15, лемма 4]. *Если простая группа является произведением двух своих подгрупп Шмидта, то либо $G \simeq PSL(2,5)$, либо $G \simeq PSL(2,11)$.*

Нам понадобится понятие X-перестановочности подгрупп, которое предложил в 2003 г. А. Н. Скиба [8], см. также [9]. Пусть X — непустое подмножество группы G. Подгруппы A и B называются X-перестановочными, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X = 1$ — единичная подгруппа, то 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. Ясно, что перестановочные подгруппы будут X-перестановочными для любого непустого множества X.

Лемма 13. *Пусть A, B и X — подгруппы группы G, а N — нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A.*
2. *Если A X-перестановочна с B, то AN/N XN/N-перестановочна с BN/N.*

3. *Если A X-перестановочна с B и X — нормальная подгруппа группы G, то AX/X перестановочна с BX/X.*

4. *Если A X-перестановочна с B и $X \subseteq Y \subseteq G$, то A Y-перестановочна с B.*

5. *Если A X-перестановочна с B и $X \subseteq A$, либо $X \subseteq B$, то A перестановочна с B.*

Доказательство. Все утверждения непосредственно вытекают из определения X-перестановочночных подгрупп. Проверим, например, утверждение 5. По условию существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X \subseteq B$, то $B^x = B$ и $AB = BA$. Если $X \subseteq A$, то из равенства $Ax^{-1}Bx = x^{-1}BxA$ следует, что $ABx = x^{-1}BA$, $xAB = BAx^{-1}$ и $AB = BA$. Лемма доказана.

2. Признаки r-разрешимости группы с условием перестановочности силовской r-подгруппы с подгруппами Шмидта

Предложение 1. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если факторгруппа G/X не содержит 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то она 2-замкнута по лемме 2, а значит, разрешима. В этом случае группа G r-разрешима, и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-нильпотентная подгруппа Шмидта A/X.

По лемме 3 минимальное добавление L к X в A содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта S такую, что $S^L = L$. Если подгруппа S^l для некоторого $l \in L$ содержится в X, то $A = LX = S^LX$ содержится в X и $A/X = 1$, противоречие. Поэтому S^l не содержится в X для каждого $l \in L$. Обозначим через R силовскую r-подгруппу, X-перестановочную со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка группы G, не содержащимися в X. Ясно, что RX/X — силовская r-подгруппа факторгруппы G/X. По условию R X-перестановочна со всеми подгруппами S^l для каждого $l \in L$, а по утверждению 3 леммы 13 подгруппа RX/X перестановочна с подгруппой S^lX/X. По лемме 6 подгруппа RX/X перестановочна с подгруппой $\langle S^lX/X \mid l \in L\rangle$, порожденной подгруппами S^lX/X для всех $l \in L$. Поскольку $\langle S^lX/X \mid l \in L\rangle = LX/X = A/X$, то RX/X перестановочна с 2-нильпотентной подгруппой Шмидта A/X и условия предложения наследуются факторгруппой G/X. По индукции факторгруппа G/X r-разрешима, а значит, r-разрешима и группа G.

Поэтому будем считать, что $S_r(G) = 1$. Теперь силовская r-подгруппа R группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка. По лемме 7 каждая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, а по лемме 8 этим свойством обладает каждая подгруппа и каждая факторгруппа группы G. По индукции группа G простая. Если $G \neq RS$, где S — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка, то ввиду леммы 10 группа G непроста, противоречие. Значит, $G = RS$, и применима лемма 11. Но ни одна из трех указанных в этой лемме групп не является произведением примарной подгруппы и 2-нильпотентной подгруппы Шмидта четного порядка. Вновь имеем противоречие, предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, и $r \notin \{3, 5\}$, то G r-разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если факторгруппа G/X не содержит 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка, то она 2-нильпотентна по лемме 1, а значит, разрешима. В этом случае группа G

r-разрешима, и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-замкнутая подгруппа Шмидта A/X. Теперь повторяя соответствующий раздел доказательства предложения 1, заменив в нем только 2-нильпотентность подгруппы Шмидта на 2-замкнутость, получаем, что группа G простая и $G = RS$, где S — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка, а R — силовская r-подгруппа группы G. По лемме 11 группа G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,7)$, $SL(2,8)$, $PSL(2,5)$. Поскольку S имеет четный порядок, то изоморфизм $G \simeq PSL(2,7)$ исключается, а так как $r \notin \{3,5\}$, то изоморфизмы $G \simeq SL(2,8)$ и $G \simeq PSL(2,5)$ также исключаются. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми r-замкнутыми rd-подгруппами Шмидта, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Повторяя доказательство предложения 1 с очевидными изменениями, приходим к случаю, когда группа G простая и $G = RS$, где S — r-замкнутая rd-подгруппа, а R — силовская r-подгруппа группы G. Но теперь группа G бипримарна и поэтому разрешима. Предложение 3 доказано.

Следствие 2. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми r-замкнутыми rd-подгруппами Шмидта, то G r-разрешима и $l_r(G) \le 2$.*

Доказательство. Из предложения 3 следует r-разрешимость группы G. Для доказательства оценки $l_r(G) \le 2$ воспользуемся индукцией по порядку группы G. По [11, лемма VI.6.9] можно считать, что $O_{r'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная r-подгруппа, обладающая дополнением M в группе G, и $O_r(M) = 1$. Предположим, что подгруппа M не r-нильпотентна. По лемме 1 она содержит r-замкнутую rd-подгруппу Шмидта. Зафиксируем такую подгруппу $S = [R]Q$, здесь R — силовская r-подгруппа в S, а Q — силовская q-подгруппа, q — простое число. Пусть Y — произвольная силовская r-подгруппа из M. Ввиду леммы 8 подгруппы Y и S перестановочны, а поскольку подгруппа Q циклическая, то $l_q(YS) \le 1$ по [11, теореме VI.6.6]. Отсюда следует, что подгруппа $[O_r(YS)]Q$ нормальна в YS и $[O_r(YS)]Q \cap S$ — нормальная в S подгруппа, содержащая подгруппу Q. По свойствам групп Шмидта $[O_r(YS)]Q \cap S = S$ и $R \subseteq O_r(YS) \subseteq Y$. Итак, мы доказали, что подгруппа R содержится в каждой силовской r-подгруппе из M. Поэтому $R \subseteq O_r(M) \ne 1$, противоречие. Значит, предположение неверно, подгруппа M r-нильпотентна, и $l_r(G) \le 2$. Следствие доказано.

Заметим, что в любой группе порядка $r^a q$ силовская r-подгруппа перестановочна со всеми r-замкнутыми rd-подгруппами Шмидта. Поэтому оценка r-длины является точной. Например, симметрическая группа S_4 степени 4 имеет 2-длину, равную 2, в ней имеется единственная 2-замкнутая подгруппа Шмидта, изоморфная A_4, поэтому любая силовская 2-подгруппа перестановочна с ней.

Предложение 4. *Если каждая не содержащаяся в подгруппе $S_p(G)$ p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта порядка $p^\alpha q^\beta$ $S_p(G)$-перестановочна со всеми силовскими q-подгруппами группы G, то G p-разрешима.*

Доказательство. Применяя индукцию к порядку группы G и повторяя рассуждения доказательства предложения 1 с очевидными изменениями, приходим к тому, что группа бипримарна, а значит, и p-разрешима. Предложение 4 доказано.

Поскольку перестановочные подгруппы являются X-перестановочными для любого непустого множества X, то утверждения предложений 1–4 остаются справедливыми, если в них условие $S_r(G)$-перестановочности заменить на перестановочность. В этом случае получаются четыре утверждения теоремы 1.

3. Признаки разрешимости группы с условием перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта

Предложение 5. *Если в группе G каждая не содержащаяся в $S(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта A четного порядка $S(G)$-перестановочна с некоторой не содержащейся в $S(G)$ силовской r-подгруппой для каждого r, не делящего $|A|$, то G разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Предположим, что $X = S(G) \neq 1$. Пусть A/X — произвольная 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка, а R_1/X — произвольная силовская r-подгруппа, r не делит порядок A/X. Ясно, что $R_1 = RX$, где R — некоторая силовская r-подгруппа группы G, и что подгруппа R не содержится в X. По лемме 3 минимальное добавление L к подгруппе X в группе A содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта S такую, что $S^L = L$, т.е. $A = S^L X$. Понятно, что S^l не содержится в X для любого $l \in L$. По условию подгруппы S^l и R X-перестановочны для каждого $l \in L$. По лемме 13 подгруппы $S^l X/X$ и RX/X перестановочны для каждого $l \in L$, а из леммы 6 следует, что подгруппы $R_1/X = RX/X$ и $S^L X/X = LX/X = A/X$ перестановочны. Итак, в факторгруппе G/X каждая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта A/X четного порядка перестановочна с каждой силовской r-подгруппой R_1/X для любого r, не делящего порядок A/X. По индукции факторгруппа G/X разрешима, поэтому группа G разрешима.

Итак, можно считать, что $X = S(G) = 1$. В этом случае по лемме 7 каждая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта A четного порядка перестановочна с каждой силовской r-подгруппой R группы G для любого r, не делящего $|A|$, а по лемме 8 этим свойством обладает каждая подгруппа группы G и каждая факторгруппа. Поэтому группа G простая. Теперь из леммы 10 получаем, что $G = AR$. Но в этом случае силовская 2-подгруппа в G циклическая и G 2-нильпотентна. Предложение 5 доказано.

В простой группе $PSL(2,5)$ каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка изоморфна A_4 и $PSL(2,5) = A_4 Z_5$. Поэтому в этой группе каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой силовской подгруппой взаимно простого с ней порядка. Следовательно, в предложении 5 нельзя заменить 2-нильпотентность подгрупп Шмидта на 2-замкнутость.

Предложение 6. *Если в группе G каждая не содержащаяся в $S(G)$ 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка $S(G)$-перестановочна с каждой не содержащейся в $S(G)$ силовской подгруппой нечетного порядка, то группа G разрешима.*

Доказательство. Применяя индукцию к порядку группы G и повторяя рассуждения доказательства предложения 5 с очевидными изменениями, приходим к тому, что группа $G = AR$, где A — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка, а R — силовская r-подгруппа нечетного порядка, не содержащаяся в A. Теперь группа G будет бипримарной при $r \in \pi(A)$. Предложение 6 доказано.

Поскольку перестановочные подгруппы являются X-перестановочными для любого непустого множества X, то утверждения предложений 5 и 6 остаются справедливыми, если в них условие $S(G)$-перестановочности заменить на перестановочность. В этом случае получаются два утверждения теоремы 2.

4. Признаки r-разрешимости группы с условием перестановочности rd-подгрупп Шмидта с подгруппами Шмидта четного порядка

Предложение 7. *Если в группе G каждая не содержащаяся в $S(G)$ 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка $S(G)$-перестановочна с каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка, то группа G разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Предположим сначала, что $X = S(G) \neq 1$. Пусть A/X — произвольная 2-замкнутая, а B/X — произвольная 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка. Обозначим через L минимальное добавление к подгруппе X в группе A, а через T — минимальное добавление к подгруппе X в группе B. По лемме 3 подгруппа L содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта S такую, что $S^L = L$, а T содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта R такую, что $R^T = T$. Ясно, что обе подгруппы S^l и R^t не содержатся в X для любых $l \in L$ и $t \in T$. По условию подгруппы S^l и R^t X-перестановочны. Тогда S^lX/X перестановочна с R^tX/X по утверждению 3 леммы 13, а по лемме 6 подгруппы $S^LX/X = LX/X = A/X$ и $R^TX/X = TX/X = B/X$ перестановочны. Следовательно, условия предложения наследуются факторгруппой G/X. По индукции G/X разрешима, отсюда следует, что группа G разрешима.

Далее будем считать, что $S(G) = 1$. В этом случае каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка. Ясно, что условия предложения наследуются собственными подгруппами группы G, поэтому все собственные подгруппы разрешимы. По лемме 9 G — простая группа. Если в ней нет 2-замкнутой либо 2-нильпотентной подгруппы Шмидта, то группа G разрешима по лемме 1 либо по лемме 2, и утверждение верно. Поэтому надо рассмотреть случай, когда в группе G имеются 2-замкнутые и 2-нильпотентные подгруппы Шмидта четного порядка. Пусть A — 2-замкнутая, а B — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта. Если $AB \neq G$, то по лемме 10 группа G непроста. Противоречие. Значит, $AB = G$ для любой 2-замкнутой подгруппы Шмидта A и любой 2-нильпотентной подгруппы Шмидта B. Тогда по лемме 12 группа $G \simeq PSL(2,5)$ либо $G \simeq PSL(2,11)$. Но в группе $PSL(2,5)$ имеются подгруппы Шмидта $A \simeq A_4$ и $B \simeq S_3$, причем $AB \neq G$. В группе $PSL(2,11)$ имеются подгруппы Шмидта $A \simeq A_4$ и $B \simeq [Z_5]Z_2$, причем $AB \neq G$. Получили противоречие. Значит, группа G разрешима. Предложение 7 доказано.

Предложение 8. *Зафиксируем простое число $r \notin \{5, 11\}$. Если в группе G каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка $S_r(G)$-перестановочна с каждой не содержащейся в $S_r(G)$ r-замкнутой rd-подгруппой Шмидта, то группа G r-разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя индукцию и повторяя доказательство предложения 7 с очевидными изменениями, получаем, что группа G простая и каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой r-замкнутой rd-подгруппой Шмидта. По лемме 1 в ней имеются 2-замкнутая подгруппа Шмидта A четного порядка и r-замкнутая rd-подгруппа Шмидта B. По лемме 10 $AB = G$, а по лемме 12 группа $G \simeq PSL(2,5)$ либо $G \simeq PSL(2,11)$. В виде произведения двух своих подгрупп Шмидта эти группы допускают единственные факторизации:

$$PSL(2,5) = A_4([Z_5]Z_2),\ PSL(2,11) = A_4([Z_{11}]Z_5).$$

Обе исключаются условием $r \notin \{5, 11\}$. Предложение 8 доказано.

Предложение 9. *Зафиксируем простое число r. Если в группе G каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка $S_r(G)$-перестановочна с каждой не содержащейся в $S_r(G)$ r-замкнутой rd-подгруппой Шмидта, то группа G r-разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя индукцию и повторяя доказательство предложения 7 с очевидными изменениями, получаем, что группа G простая и каждая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой r-замкнутой rd-подгруппой Шмидта. По леммам 1 и 2 в ней имеются 2-нильпотентная подгруппа Шмидта A четного порядка и r-замкнутая rd-подгруппа Шмидта B. По лемме 10 $AB = G$, а по лемме 12 группа

$G \simeq PSL(2,5)$, либо $G \simeq PSL(2,11)$. В виде произведения двух своих подгрупп Шмидта эти группы допускают единственные факторизации:

$$PSL(2,5) = A_4([Z_5]Z_2),\ PSL(2,11) = A_4([Z_{11}]Z_5).$$

Если $G \simeq PSL(2,5)$, то $A \simeq [Z_5]Z_2$, $B \simeq A_4$, $r = 2$. В этом случае группа разрешима по предложению 7. У факторизации $PSL(2,11) = A_4([Z_{11}]Z_5)$ нет сомножителя, который является 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка. Поэтому эта группа исключается. Предложение 9 доказано.

Поскольку перестановочные подгруппы являются X-перестановочными для любого непустого множества X, то утверждения предложений 7–9 остаются справедливыми, если в них условие $S_r(G)$-перестановочности заменить на перестановочность. В этом случае получаются три утверждения теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. **Монахов В.С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Праці Украін. мат. конгресу–2001. Ін-т математики НАН Украіни, Київ. 2002. Секц.1. С. 81–90.
3. **Монахов В.С.** О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.
4. **Княгина В.Н., Монахов В.С.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
5. **Ведерников В.А.** Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.
6. **Княгина В.Н., Монахов В.С.** Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
7. **Беркович Я.Г., Пальчик Э.М.** О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741-753.
8. **Скиба А.Н.** H-permutable subgroups // Изв. Гомельского гос. ун-та. 2003. № 4. С. 37–39.
9. **Го В., Скиба А.Н., Шам К.П.** X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
10. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
11. **Huppert B.** Endliche Gruppen, I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967. 793 p.
12. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопр. алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
13. **Монахов В.С.** О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта // Докл. АН БССР. 1974. Т. 18, № 10. С 871–874.
14. **Lennox J.C., Stonehewer S.E.** Subnormal subgroups of groups. Oxford: Clarendon Press, 1987. 253 p.
15. **Монахов В.С.** Произведение двух групп Шмидта // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 1. С. 8–11.

Княгина Виктория Николаевна
Поступила 25.12.2009
канд. физ.-мат. наук
Гомельский инженерный ин-т МЧС Республики Беларусь
e-mail: knyagina@inbox.ru

Монахов Виктор Степанович
д-р. физ.-мат. наук, проф.
Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины
e-mail: monakhov@gsu.by

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.854.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. А. Колоколов, Т. Г. Орловская

Проведено исследование одного из известных алгоритмов решения задач целочисленного линейного программирования на основе метода регулярных разбиений. В частности, показана регулярность алгоритма относительно некоторых таких разбиений в случае задач, упрощающих его применение. Приведен подкласс матриц, порождающих подобные задачи. Построено семейство задач специального вида, при решении которых алгоритм является экспоненциальным от длины входа.

Ключевые слова: целочисленное программирование, унимодулярные преобразования, регулярные разбиения.

A. A. Kolokolov, T. G. Orlovskaya. Investigation of one algorithm for solving problems of integer linear programming.

A famous algorithm for solving problems of integer linear programming based on the method of regular partitions is investigated. In particular, it is shown that the algorithm is regular with respect to some of such partitions in the case of problems that simplify its application. A subclass of matrices generating such problems is given. A family of problems of special form is constructed for which the algorithm is exponential with respect to the length of the input.

Keywords: integer programming, unimodular transformations, regular partitions.

Введение

Для исследования задач целочисленного программирования (ЦП), построения и анализа алгоритмов, основанных на релаксации условия целочисленности, достаточно продуктивным является метод регулярных разбиений [7]. С использованием этого метода изучена сложность ряда задач, структура некоторых классов выпуклых многогранников, введены новые классы отсечений, построены оценки числа итераций для известных алгоритмов ЦП, разработаны алгоритмы, выполнены исследования устойчивости некоторых задач и алгоритмов [4].

В данной работе на основе метода регулярных разбиений проводится исследование алгоритма А. А. Вотякова для решения задач целочисленного линейного программирования [1, 2] (далее z-алгоритма), анализируется вопрос о регулярности этого алгоритма при решении инвариантных задач [2] относительно кубических и других разбиений [7], изучается известная верхняя оценка числа итераций алгоритма. Рассматриваются задачи, упрощающие применение алгоритма, приведен подкласс матриц, порождающих подобные задачи. Построено семейство задач специального вида, при решении которых алгоритм является экспоненциальным от длины входа. Краткие сообщения об этих результатах содержатся в [8, 9]. Ранее исследование z-алгоритма проводились А. А. Колоколовым и Л. А. Заозерской [6]. Следует отметить, что в алгоритме используются унимодулярные преобразования [11], которые позволяют в ряде случаев улучшить структуру задачи и ускорить процесс ее решения. Возможность применения унимодулярных преобразований в алгоритмах решения задач целочисленного линейного программирования рассматривалась также в работах [3, 5, 12].

1. Предварительные сведения

Рассматривается задача целочисленного линейного программирования (ЦЛП)

$$(c,x) \to \max, \qquad x \in (M \cap \mathbb{Z}^n), \tag{1}$$

где $M = \{x \in \mathbb{R}^n: \ Ax \le b\}$, c — вектор размерности n, b — вектор размерности m, A — матрица размерности $(m \times n)$, $n \le m$. Будем говорить, что задача (1) имеет вид, удобный для полного округления, если существует точка $x^0 \in M$ такая, что

$$\max_{x \in M} x_i = x_i^0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\max_{x \in M}(c,x) = (c,x^0).$$

Вопросы приводимости задачи ЦЛП к виду, удобному для полного округления, изложены в [1]. Из (2) можно получить задачу, эквивалентную (1)

$$(c,x) \to \max, \qquad x \in (M_1 \cap \mathbb{Z}^n), \tag{3}$$

где $M_1 = M \cap \left\{x_i \le \lfloor x_i^0 \rfloor, \ i \in \overline{1,n}\right\}$. Следовательно, любое допустимое решение задачи (1) является таковым для (3) и наоборот.

Напомним, что унимодулярному преобразованию соответствует квадратная целочисленная матрица, определитель которой равен ± 1.

Для решения задачи (1) будем применять z-алгоритм, каждая итерация которого состоит из следующих шагов:

• приведение задачи с помощью унимодулярных преобразований к виду, удобному для полного округления;

• построение и использование дополнительных линейных ограничений.

Для задачи, имеющей вид, удобный для полного округления, переход от множества M к M_1 назовем итерацией z-алгоритма. Задачи, сохраняющие подобный вид на каждой итерации, получили название целочисленных, инвариантных относительно z-алгоритма [2].

Введем некоторые обозначения из работы [2]. Пусть A — квадратная невырожденная матрица размера $(n \times n)$, $b = Ax^0$, $A^{-1} \ge 0$. Матрицу D, которая является подматрицей для A, назовем *главной подматрицей* порядка p, если она имеет размерность $p \times p$ и ее элементы удовлетворяют условиям: $d_{i,i} > 0, \ d_{i,j} \le 0, \ i \ne j, \ i,j = \overline{1,p}$. Последовательность главных подматриц матрицы A, если каждая последующая матрица содержит подматрицей предыдущую, будем называть возрастающей. Возрастающую последовательность главных подматриц матрицы A назовем максимальной, если она состоит из n различных элементов, а соответствующую последовательность миноров назовем максимальной связанной последовательностью главных миноров.

Будем говорить, что для матрицы A выполняется условие Сильвестра, если существует хотя бы одна максимальная последовательность связанных миноров, каждый из которых строго положителен. В [2] предложен следующий критерий инвариантности задачи ЦЛП.

Теорема 1. *Задача* (1) *инвариантна относительно z-алгоритма тогда и только тогда, когда для матрицы A выполняется условие Сильвестра, ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям $a_{i,i} > 0, \ a_{i,j} \le 0, \ i \ne j, \ i,j = \overline{1,n}$ и вектор $c \ge 0$.*

Приведем подкласс матриц, порождающих такие задачи. Рассмотрим модель межотраслевого баланса [10]:

$$x = Ax + y,$$

где A — матрица коэффициентов прямых затрат, причем $A \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ — вектор валового продукта, $y \geqslant 0$ — вектор конечного продукта. Нетрудно показать, что если A продуктивна, то матрица $(E - A)$ удобна для полного округления.

2. О регулярности z-алгоритма

Для анализа алгоритмов решения задач ЦЛП целесообразно использовать классы регулярных разбиений [7]. Алгоритм считается регулярным относительно разбиения, если порождаемая им последовательность приближений обладает следующим свойством: в каждый класс разбиения попадает не более одного ее элемента. Исследование регулярности алгоритма играет важную роль при построении оценок числа итераций. Представляет интерес исследование случаев, когда алгоритм не является регулярным, но существует верхняя граница для числа порождаемых им приближений, попадающих в один класс регулярного разбиения. Например, для метода ветвей и границ (типа Лэнд и Дойг) эта верхняя граница равна n.

Рассмотрим следующие регулярные разбиения. Класс кубических разбиений тесно связан с округлениями нецелочисленных точек. Округлением точки x в соответствии с булевым вектором δ называется вектор $\delta(x) = (\delta_1(x_1), \ldots, \delta_n(x_n))^T$ такой, что для всех $j \in \overline{1,n}$ выполняются условия

$$\delta_j(x_j) = \begin{cases} \lfloor x_j \rfloor, & \text{если} \quad \delta_j = 0, \\ \lceil x_j \rceil, & \text{если} \quad \delta_j = 1. \end{cases}$$

Кубическое разбиение, отвечающее округлению δ, определяется условиями: каждая точка $z \in \mathbb{Z}^n$ образует отдельный класс разбиения, а нецелочисленные точки x и y принадлежат одному классу, если они δ-эквивалентны, т. е. $\delta(x) = \delta(y)$.

Пусть δ и δ^* — взаимные округления, тогда для соответствующих им векторов выполняется $\delta + \delta^* = e_n$, где $e_n = (1, \ldots, 1)^T$. Точки x и y принадлежат одному классу канонического разбиения, если одновременно выполняются соотношения: $\delta(x) = \delta(y)$, $\delta^*(x) = \delta^*(y)$.

Точки $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x \neq y)$ принадлежат одному классу L-разбиения, если не существует отделяющей их точки $z \in \mathbb{Z}^n$, для которой выполняется $y \preceq z \preceq x$.

Рассмотрим вопрос о регулярности z-алгоритма при решении инвариантных задач относительно рассматриваемых разбиений.

Теорема 2. *Для L-разбиения, верхнего и нижнего кубического разбиения z-алгоритм является регулярным.*

Доказательство. Рассмотрим его идею. Для этого начнем рассуждения с более общего случая, а затем выделим подслучаи.

Пусть $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ — произвольное кубическое разбиение. Решаем задачу линейного программирования (ЛП) и находим точку x^0:

$$\max_{x \in M} x_i = x_i^0, \qquad i = \overline{1,n},$$
$$\max_{x \in M} (c, x) = (c, x^0).$$

Если $x^0 \in \mathbb{Z}^n$, то оптимальное решение задачи (1) получено. Далее считаем, что $x^0 \notin \mathbb{Z}^n$. Положим $M_1 = M \cap \left\{x_i \leq \lfloor x_i^0 \rfloor, \ i \in \overline{1,n}\right\}$.

Решаем задачу ЛП и находим точку x^1:

$$\max_{x \in M_1} x_i = x_i^1, \qquad i = \overline{1,n},$$
$$\max_{x \in M_1} (c, x) = (c, x^1).$$

Если $x^1 \in \mathbb{Z}^n$, то по определению x^0 и x^1 принадлежат различным классам кубического разбиения. Пусть далее $x^1 \notin \mathbb{Z}^n$.

Если выписать неравенства, характеризующие данные точки относительно верхнего кубического разбиения, то в итоге получим следующее:

$$\lceil x_i^0 \rceil = \begin{cases} x_i^0, & x_i^0 \in \mathbb{Z}^n, \\ \lfloor x_i^0 \rfloor + 1, & x_i^0 \notin \mathbb{Z}^n; \end{cases} \qquad \lceil x_i^1 \rceil \leq \begin{cases} \lfloor x_i^0 \rfloor, & x_i^1 \in \mathbb{Z}^n, \\ \lfloor x_i^0 \rfloor, & x_i^1 \notin \mathbb{Z}^n. \end{cases}$$

Аналогичные неравенства можно выписать и для нижнего кубического разбиения. Следовательно, если взять верхнее или нижнее кубическое разбиение, то точки не могут принадлежать одному классу разбиения. В случае других кубических разбиений можно привести пример, когда попадание в один класс возможно.

П р и м е р 1.

$$f = x_1 + x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leqslant & 5/2, \\ -x_1 + x_2 & \leqslant & -1/2, \end{array}$$

где $x_i \geqslant 0,\ x_i \in \mathbb{Z},\ i \in \overline{1,2}$. Выберем $\delta = (0,1)$. Нетрудно проверить, что данная задача инвариантна относительно z-алгоритма. Находим $x^0 = \left(\frac{5}{2}, 2\right),\ x^1 = \left(2, \frac{3}{2}\right),\ \delta(x^0) = \delta(x^1) = (2,2)$. Следовательно, x^0 и x^1 принадлежат одному классу разбиения.

Из неравенств, выписанных для кубического разбиения, можно также сделать вывод о регулярности z-алгоритма относительно L-разбиения, поскольку точки x^0 и x^1 отделены целочисленной точкой $\lfloor x^0 \rfloor$ в отношении лексикографического порядка.

Следствие 1. *В случае канонического разбиения z-алгоритм регулярен, поскольку равенства $\delta(x) = \delta(y)$ и $\delta^*(x) = \delta^*(y)$, где x, y — две соседние точки последовательности приближений, не могут выполняться одновременно.*

В общем случае при решении задач, не являющихся инвариантными, построен пример, показывающий отсутствие регулярности алгоритма относительно рассматриваемых разбиений.

П р и м е р 2.

$$f = 2x_1 + x_2 \to \max$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & \leqslant & -1, \\ -x_2 & \leqslant & 1/2, \end{array}$$

где $x_i \in \mathbb{Z},\ i \in \overline{1,2}$. Выберем $\delta = (0,0)$. Первые три точки последовательности, построенные при решении данной задачи: $x^0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $x^1 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $x^2 = \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$, тогда $\lfloor x^0 \rfloor = \lfloor x^1 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor = (0,-1)$. Следовательно все эти нецелочисленные точки принадлежат одному классу кубического, канонического и L-разбиения.

3. Некоторые оценки числа итераций

Из свойства регулярности алгоритма относительно нижнего кубического разбиения можно сделать вывод о верхней оценке числа итераций в случае существования оптимального решения задачи, инвариантной относительно z-алгоритма. Пусть z^* — оптимальное решение названной задачи, $\tilde{x}$ — соответствующее непрерывное решение. Введем обозначения: $P = \left\{x \in \mathbb{R}^n : z_j^* \leqslant x_j \leqslant \tilde{x}_j,\ j \in \overline{1,n}\right\}$, δ^- — нижнее кубическое разбиение. Тогда число итераций алгоритма не превосходит мощности фактор-множества $\widetilde{M}/\delta^-$, где $\widetilde{M} = M \cap P$. Данная оценка носит структурный характер и вытекает из описания алгоритма, в то время как оценка из [2], приведенная ниже, выражена через параметры задачи.

В работе [2] получена следующая верхняя оценка числа итераций z-алгоритма.

Теорема 3. *Для решения задачи ЦЛП, инвариантной относительно z-алгоритма, требуется не более $\sum_{i=1}^{n}(\lfloor \tilde{x}_i \rfloor - z_i^*) + 1$ итераций, где z^* — оптимальное решение этой задачи, $\tilde{x}$ — соответствующее непрерывное решение.*

Нами предложено семейство задач ЦЛП, для которого указанная оценка достижима.

П р и м е р 3.

$$f = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \to \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} (2\alpha - 1)x_1 - 2(\alpha - 1)x_2 &\leqslant (2\alpha - 1), \\ -(2\alpha - 1)x_1 + 2\,\alpha\, x_2 &\leqslant 0, \\ x_i &\leqslant d_i, \quad i \in \overline{3, n}, \end{aligned}$$

где $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geqslant 0$, $i \in \overline{1, n}$, $d_i \geqslant 0$, $i \in \overline{3, n}$, $\alpha \geq 2$ — целочисленный параметр.

Нетрудно проверить, что любая задача из данного семейства инвариантна относительно z-алгоритма и число итераций для таких задач равно $2\alpha - 1$. Это следует из того, что разность суммы координат двух округлений точек построенной последовательности приближений равна единице, а это приводит к оценке числа итераций, полученной по теореме 3. Кроме того, данное семейство задач показывает, что алгоритм может быть экспоненциальным от длины входа.

Исследование показало, что алгоритм А. А. Вотякова (как и некоторые другие алгоритмы непрерывной оптимизации) является регулярным. Это позволяет анализировать возможности его модификации с точки зрения повышения эффективности и строить различные оценки числа итераций. Представляют интерес реализация данного алгоритма и проведение экспериментальных исследований для сравнения с другими алгоритмами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вотяков А.А.** Некоторые вопросы целочисленного программирования // Экономика и математические методы. 1968. Т. 4, вып. 4. С. 611–621.
2. **Вотяков А.А.** О задачах, инвариантных относительно z-округления // Экономика и математические методы. 1971. Т. 7, вып. 2. С. 259–264.
3. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Унимодулярные преобразования и некоторые алгоритмы целочисленного программирования // Дискрет. оптимизация и исслед. операций: материалы Рос. конф. / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск, 2007. С. 124.
4. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Об одном подходе к решению дискретной задачи планирования производства с интервальными данными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 48–57.
5. **Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П.** Исследование некоторых алгоритмов целочисленного программирования с использованием L-разбиения и унимодулярных преобразований. Омск: ОмГУ, 2009. 20 с.
6. **Заозерская Л.А.** Исследование и решение некоторых классов задач целочисленного программирования на основе регулярных разбиений: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Омск, 1998. С. 16.
7. **Колоколов А.А.** Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. № 2. С. 18–39.
8. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г.** Исследование z-алгоритма для решения некоторых задач целочисленного программирования // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы IV всеросс. конф. / Омск: Полиграфический центр КАН, 2009. С. 137.
9. **Колоколов А.А., Орловская Т.Г.** О регулярности одного алгоритма решения задач целочисленного программирования // Динамика систем, механизмов и машин: материалы VII междунар. науч.-техн. конф. / Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. Кн. 3. С. 51–55.

10. **Лотов А.В.** Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука, 1984. 392 с.
11. **Схрейвер А.** Теория линейного и целочисленного программирования: в 2 т. М.: Мир, 1991. Т. 1. 360 с.
12. **Krishnamoorthy B., Pataki G.** Column basis reduction and decomposable knapsack problems // Discrete Optimization. No. 6(3). P. 242–270.

Колоколов Александр Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лаб.
Омский филиал Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru

Поступила 28.04.2010

Орловская Татьяна Геннадьевна
аспирант
Омский филиал Ин-та математики им. С.Л. Соболева СО РАН
e-mail: torlovskaya@gmail.com

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ПО СПЕКТРУ ГРУПП $E_8(q)$[1]

А. С. Кондратьев

Доказана распознаваемость по спектру групп $E_8(q)$.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шевалле, спектр, граф простых чисел, распознавание по спектру.

A. S. Kondrat'ev. Recognizability by spectrum of groups $E_8(q)$.

The recognizability by spectrum of groups $E_8(q)$ is proved.

Keywords: finite group, Chevalley group, spectrum, prime graph, recognition by spectrum.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [22, теорема A]). Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в [7, 22].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, обзор В. Д. Мазурова [11]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P.

В работах [1, 2] была доказана квазираспознаваемость конечных простых групп, граф Грюнберга — Кегеля которых имеет по крайней мере три компоненты связности, за исключением группы A_6. В своем обзоре [11] В. Д. Мазуров поставил следующий нерешенный вопрос: *верно ли, что любая конечная простая группа G с условием $s(G) \geq 3$ либо распознаваема, либо изоморфна A_6?*

В ряде работ различных авторов (см. [3, 11]) был получен положительный ответ на этот вопрос для всех конечных простых групп G с условием $s(G) \geq 3$, кроме исключительных групп $E_8(q)$, $E_7(2)$ и $E_7(3)$.

Кроме того, А. В. Васильев записал в "Коуровскую тетрадь" [8] следующий вопрос 16.24: *существует ли конечная группа G, спектр которой совпадает со спектром конечной простой исключительной группы L, но G не изоморфна L?*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00342), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

В настоящей работе дан частичный ответ на эти вопросы В. Д. Мазурова и А. В. Васильева. Доказана

Теорема. *Группа $E_8(q)$ распознаваема по спектру.*

Заметим, что граф Грюнберга — Кегеля группы $E_8(q)$ имеет при $q \equiv 2, 3 \pmod 5$ четыре, а при $q \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ — пять компонент связности (см. [7, 22]).

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [9, 12, 13, 15, 16, 20].

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Лемма 1.1 [10, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Пусть L — конечная простая группа лиева типа над полем характеристики p, действующая на нетривиальной абелевой p-группе A. Элемент $g \in L$ называется *унисингулярным* на A, если $C_A(g) \neq 1$. Группа L называется *унисингулярной*, если каждый ее элемент унисингулярен на любой нетривиальной абелевой p-группе, на которой действует L.

Лемма 1.2 [19, теорема 1.3]. *Группа $E_8(q)$ унисингулярна для любого q.*

Лемма 1.3 [23, теорема Жигмонди]. *Пусть q и n — натуральные числа, $q \geq 2$. Если $(q, n) \neq (2, 6)$, то существует простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$.*

В обозначениях леммы 1.3 простое число, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$ и обозначается через $r_n(q)$.

Лемма 1.4 [17]. *Каждый максимальный тор T группы $E_8(q)$ имеет один из следующих порядков*: $(q^{n_1} \pm 1) \cdot \ldots \cdot (q^{n_k} \pm 1)$, $n_1 + \ldots + n_k = 8$ *и* $|T| \neq q^8 + 1$; $(q - \epsilon 1) \cdot (q^2 + \epsilon q + 1)^3 \cdot (q \pm 1)$; $(q^5 - \epsilon 1) \cdot (q^2 + \epsilon q + 1) \cdot (q \pm 1)$; $(q^3 \pm 1) \cdot (q^4 - q^2 + 1) \cdot (q \pm 1)$; $(q - \epsilon 1) \cdot (q^6 + \epsilon q^3 + 1) \cdot (q \pm 1)$; $(q^3 - \epsilon 1) \cdot (q^2 - \epsilon q + 1)^2 \cdot (q \pm 1)$; $q^8 - q^4 + 1$; $q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1$; $q^8 + q^6 + q^4 - q^2 + 1$; $(q^4 - q^2 + 1)^2$; $(q^6 + \epsilon q^3 + 1) \cdot (q^2 + \epsilon q + 1)$; $q^8 - q^4 + 1$; $q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1$; $(q^4 + \epsilon q^3 + \epsilon q + 1)^2$; $(q^4 - q^2 + 1) \cdot (q^2 \pm q + 1)^2$; $(q^2 - q + 1)^2 \cdot (q^2 + q + 1)^2$; $(q^2 \pm q + 1)^4$, *где* $\epsilon = \pm$.

2. Доказательство теоремы

Пусть $L = E_8(q)$, где q — некоторая степень простого числа p. Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(L)$ и $N = F(G)$. Положим $\overline{G} = G/N$. В силу теоремы Грюнберга — Кегеля (см. [22, теорема A]) и результата [1] можно считать, что $\mathrm{Inn}(L) \trianglelefteq \overline{G} \leq \mathrm{Aut}(L)$.

Предположим, что $N \neq 1$. Можно считать, что N — элементарная абелева t-группа для некоторого простого числа t из $\pi_1(G)$ и L действует точно и неприводимо на N.

Предположим, что $t = p$. Тогда по лемме 1.2 каждый элемент из L фиксирует некоторый неединичный элемент из N, что противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$.

Таким образом, $t \neq p$.

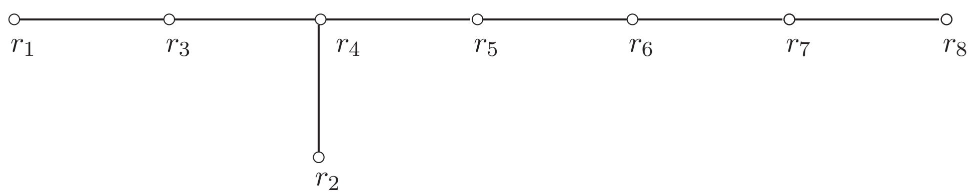
Приведем некоторые необходимые нам сведения о группе L из [16]. Пусть $K = GF(q)$, K^* — мультипликативная группа поля K, Φ — система корней типа E_8 в 8-мерном евклидовом пространстве со скалярным произведением $(,)$, $\Sigma = \{r_1, \ldots, r_8\}$ — множество фундаментальных корней в Φ и Φ^+ — соответствующее множество всех положительных корней в Φ. Тогда L — группа Шевалле типа Φ над полем K, порожденная корневыми элементами $x_r(k)$, где $r \in \Phi$ и $k \in K$. Положим $h_r(k) = x_{-r}(k^{-1} - 1)\, x_r(1)\, x_{-r}(k-1)\, x_r(-k^{-1})$ для $r \in \Phi$ и $k \in K^*$. Тогда

$$h_r(k)x_s(u)h_r(k)^{-1} = x_s(k^{\langle s,r\rangle}u)$$

для всех $r, s \in \Phi$, $u \in K$ и $k \in K^*$, где $\langle s, r\rangle = 2(s,r)/(r,r)$ (см. [16, разд. 7.1]).

Обозначения некоторых подгрупп в L: $X_r = \{x_r(k) \mid k \in K\}$ и $H_r = \{h_r(k) \mid k \in K^*\}$ — соответственно корневая и диагональная подгруппы, отвечающие корню r, $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$ — унипотентная подгруппа (силовская p-подгруппа в L), $H = \prod_{i=1}^{8} H_{r_i}$ — подгруппа Картана, нормализующая U. Подгруппы X_r и H_r для всех $r \in \Phi$ изоморфны соответственно аддитивной и мультипликативной группам поля K, так как $x_r(k_1)\cdot x_r(k_2) = x_r(k_1+k_2)$ для всех $k_1, k_2 \in K$ (см. [16, разд. 5.1]) и $h_r(k_1)\cdot h_r(k_2) = h_r(k_1k_2)$ для всех $k_1, k_2 \in K^*$ (см. [16, разд. 7.1]).

Рассмотрим параболическую максимальную подгруппу M в L, содержащую подгруппу Бореля UH и полученную выбрасыванием корня r_2 из следующей диаграммы Дынкина для системы корней Φ (см. [4]):



Тогда $M = Q \rtimes P$, где $Q = O_p(M)$ — унипотентный радикал и P — дополнение Леви в M. При этом $Q = \prod X_r$, где r пробегает множество $\{r \mid r = \sum_{i=1}^{8} k_i r_i \in \Phi^+, k_2 > 0\}$, и $P = \langle H, X_{\pm r_i} \mid r_i \in \Sigma \setminus \{r_2\}\rangle$. Ясно, что $P = P_0 \rtimes H_{r_2}$, где $P_0 = \langle X_{\pm r_i} \mid r_i \in \Sigma \setminus \{r_2\}\rangle$. Так как группа L — универсальная группа Шевалле типа E_8, то ввиду [18, p. 30] группа P_0 — универсальная группа Шевалле типа A_7, т. е. $P_0 \cong SL_8(q)$.

Положим $Z = [Q, Q']$. Ввиду [4; 14, лемма 4] $Z \le Z(Q)$ и $Z = \prod_{i=1}^{8} X_{s_i}$, где координатные столбцы корней $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ в базисе $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8)$ имеют соответственно следующий вид: $(1,3,3,5,4,3,2,1)^t$, $(2,3,3,5,4,3,2,1)^t$, $(2,3,4,5,4,3,2,1)^t$, $(2,3,4,6,4,3,2,1)^t$, $(2,3,4,6,5,3,2,1)^t$, $(2,3,4,6,5,4,2,1)^t$, $(2,3,4,6,5,4,3,1)^t$, $(2,3,4,6,5,4,3,2)^t$. Ввиду [14, теорема 2] Z есть неприводимый 8-мерный KP-модуль при действии группы P на Z сопряжением.

Покажем, что $P \cong GL_8(q)$ и Z является естественным неприводимым 8-мерным KP-модулем. Ясно, что $b = (x_{s_1}(1), x_{s_2}(1), \ldots, x_{s_8}(1))$ является K-базисом в Z. По коммутаторной формуле Шевалле (см. [16, теорема 5.2.2]) в базисе b матрицы порождающих группу P_0 корневых элементов вида $x_{\pm r_i}(k)$ $(i \ne 2,\ k \in K^*)$ являются трансвекциями. С помощью матрицы Картана $(\langle r_i, r_j\rangle)$ системы Φ (см. [4, табл. VII]) и приведенной выше формулы для элемента, сопряженного с элементом $x_s(u)$ посредством элемента $h_r(k)$, непосредственно вычисляется, что в базисе b матрица элемента $h_{r_1}(k)\cdot h_{r_2}(k)\cdot h_{r_3}(k)$ для $k \in K^*$ является диагональной матрицей $diag(1,k,1,1,1,1,1,1)$. Хорошо известно (см., например, [6, гл. 1, § 2]), что трансвекции и диагональные матрицы указанного вида порождают группу $GL_8(K)$. Поэтому $P \cong GL_8(q)$ и Z является естественным неприводимым 8-мерным KP-модулем.

Ввиду [20, теорема II.7.3] в P найдется циклическая подгруппа $\langle x\rangle$ порядка $q^8 - 1$ (цикл Зингера) такая, что $Z \rtimes \langle x\rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя лемму 1.1 к полному прообразу в G этой группы Фробениуса, получим, что $t(q^8-1) \in \omega(L)$. Элемент порядка $t(q^8-1)$ из L принадлежит некоторому максимальному тору T группы L, поэтому $t(q^8-1)$ делит $|T|$, что противоречит лемме 1.4.

Итак, $N = 1$ и $\mathrm{Inn}(L) \trianglelefteq G \le \mathrm{Aut}(L)$.

Покажем, что $G = \mathrm{Inn}(L)$. Предположим, что $\mathrm{Inn}(L) < G$. Тогда можно считать, что $G = L \rtimes \langle\varphi\rangle$, где φ индуцирует на L полевой автоморфизм простого порядка s. Поскольку

$\omega(G) = \omega(L)$, то ввиду [7,21,22] $s(G) = s(L) = 4$ и, следовательно, $s \in \{2,3\}$ и $q \equiv 2,3\ (mod\ 5)$. Но $q = q_0^2 \equiv 0,1,4\ (mod\ 5)$ при $s = 2$, поэтому $s = 3$ и $q = q_0^3$.

По лемме 1.3 числа 3 и $r_{20}(q_0)$ взаимно просты. Ввиду [18, теорема (9-1)] $C_L(\varphi) \cong E_8(q_0)$ и, следовательно, $3r_{20}(q_0) \in \omega(L)$. Но любой примитивный делитель r числа $q_0^{20} - 1$ является примитивным делителем числа $q^{20} - 1$. Действительно, если r делит $q^i - 1$ для некоторого натурального числа i, меньшего 20, то r делит $(q_0^{20} - 1, q_0^{3i} - 1) = q_0^{(20,3i)} - 1 = q_0^{(20,i)} - 1$, где $(20, i) < 20$; противоречие. Таким образом, $3r_{20}(q) \in \omega(L)$ в противоречие с тем, что числа 3 и $r_{20}(q)$ не смежны в графе $\Gamma(L)$ (см. [5, предложения 2.5 и 3.2]).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность М. А. Гречкосеевой за ценное замечание.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 1003–1008.
2. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
3. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Распознаваемость по спектру групп $^2D_p(3)$ для нечетного простого числа p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 3–11.
4. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972. 334 с.
5. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
6. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 240 с.
7. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
8. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с.
9. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
10. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
11. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
12. Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. 315 с.
13. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
14. **Azad H., Barry M., Seitz G.** On the structure of parabolic subgroups // Commun. Algebra. 1990. Vol. 18, no. 2. P. 551–562.
15. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
16. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 332 p.
17. **Carter R.W.** Conjugacy classes in the Weil group // Compositio Math. 1972. Vol. 25, no. 1. P. 1–59.
18. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2 type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1983. 731 p. (Mem. Amer. Math. Soc. Vol. 42, no. 276.)
19. **Guralnick R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, no. 3. P. 271–310.
20. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 p.
21. **Lucido M.S.**: 1) Prime graph components in finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; 2) Addendum to "Prime graph components in finite almost simple groups" // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
22. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
23. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 30.04.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ТРИПРИМАРНЫХ ГРУППАХ[1]

А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов

Описаны конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет точно три вершины.

Ключевые слова: конечная группа, трипримарная группа, граф простых чисел, распознавание по графу простых чисел.

A. S. Kondrat'ev, I. V. Khramtsov. On finite triprimary groups.

Finite groups whose prime graph is disconnected and has exactly three vertices are described.

Keywords: finite group, triprimary group, prime graph, recognition by prime graph.

Введение

В теории конечных групп интерес многих исследователей вызывают различные проблемы распознаваемости — характеризации группы по некоторому набору ее параметров с точностью до изоморфизма. Примерами таких проблем являются проблемы распознаваемости конечных групп по спектру или по графу простых чисел.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество простых делителей порядка группы G, а через $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G, в котором множество вершин есть $\pi(G)$ и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \le i \le s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Группа G называется *распознаваемой* (*по спектру*), если любая конечная группа H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ изоморфна G. С уже устоявшимся направлением исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [6]) тесно связано новое перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу простых чисел. Группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если для любой конечной группы H равенство $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ графов влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Здесь под равенством графов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ понимается совпадение их множеств вершин и множеств ребер соответственно. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

История изучения распознаваемости конечных групп по графу простых чисел насчитывает совсем немного времени. В 2003 г. в работе Хаги [13] были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу простых чисел, а именно, некоторые спорадические простые группы, а также получено некоторое описание (но не полная классификация) конечных групп G таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. В дальнейшем в работах [2, 7, 8, 18–22] была установлена распознаваемость по графу простых чисел групп $G_2(7)$, ${}^2G_2(q)$ и $L_2(q)$ для некоторых q. В работах [22, 29] была доказана распознаваемость по графу простых чисел группы $L_{16}(2)$, что дало первый пример распознаваемой по графу простых чисел группы, для которой этот граф связен.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00342), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Возникает также интересная общая задача: описать все конечные группы, графы простых чисел которых изоморфны графу с заданным свойством. Авторы исследуют конечные группы, граф простых чисел которых несвязен и имеет небольшое число вершин. При этом можно пользоваться имеющимися результатами о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. [3, 28]), но возникают весьма нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных простых групп.

Рассмотрим сначала тривиальные случаи, когда граф простых чисел конечной группы имеет одну или две вершины.

Пусть G — конечная группа и граф $\Gamma(G)$ имеет в точности одну вершину p. Тогда, очевидно, G принадлежит (необозримому) классу всех конечных p-групп.

Пусть теперь граф $\Gamma(G)$ имеет точно две вершины (в этом случае группа G называется *бипримарной*). Используя теорему Грюнберга — Кегеля (см. лемму 1.1 ниже) и свойства разрешимых дополнительных множителей групп Фробениуса [17, теоремы 8.3 и 8.7], нетрудно увидеть, что справедливо следующее

Предложение. *Пусть G — конечная бипримарная группа с несвязным графом простых чисел. Тогда выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) *$G = P \rtimes Q$ — группа Фробениуса, где P и Q — силовские подгруппы из G, причем Q — либо циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов;*

(2) *$G = A \rtimes (B \rtimes C)$, где $A \rtimes B$ и $B \rtimes C$ — группы Фробениуса, $A \rtimes C$ и B — силовские подгруппы в G, причем B и C — циклические группы, $|B|$ делит $|A| - 1$ и $|C|$ делит $|B| - 1$.*

Основным результатом данной работы является описание конечных групп G, граф простых чисел которых имеет точно три вершины (в этом случае группа G называется *трипримарной*) и несвязен. Доказана следующая теорема, в формулировке которой используются обозначения и терминология из разд. 1.

Теорема. *Пусть G — конечная трипримарная группа с несвязным графом простых чисел и $\overline{G} = G/F(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений* (1)–(5):

(1) *G — группа Фробениуса.*

(2) *G — двойная группа Фробениуса, т. е. в G существуют такие подгруппы A, B и C, что $G = ABC$, A и AB — нормальные подгруппы в G, AB и BC — группы Фробениуса с ядрами A и B и дополнениями B и C соответственно.*

(3) *$s(G) = 3$ и либо G изоморфна $A_5, A_6, L_2(7), L_2(8), M_{10}$ или $L_2(17)$, либо $G/O_2(G) \cong L_2(2^n)$, где $n \in \{2,3\}$ и $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как $\overline{G}$-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю.*

(4) *$s(G) = 2$, $\pi_1(G) = \{2,5\}$ и $G \cong PGL_2(9)$.*

(5) *$s(G) = 2$, $\pi_1(G) = \{2,3\}$, $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$, и выполнено одно из следующих утверждений* (*i*)–(*viii*).

(*i*) *$\overline{G} \cong A_5$ или S_5, $G' = F(G) \rtimes L$, где $L \cong A_5$. Если $O_2(G) \neq 1$ (это так при $\overline{G} \cong A_5$), то $O_2(G)$ есть произведение L-инвариантных подгрупп V_i, каждая из которых изоморфна либо гомоциклической группе ранга 4, либо группе Q_P, причем ступень нильпотентности группы $O_2(G)$ не превосходит 3. Кроме того, если V_i — элементарная абелева 2-группа, то она как $GF(2)L$-модуль изоморфна естественному модулю M или ортогональному модулю N; если V_i — неэлементарная гомоциклическая 2-группа, то все 2-главные факторы в $V_i \rtimes L$ как $GF(2)L$-модули изоморфны N; если V_i изоморфна группе Q_P, то $V_i/Z(V_i)$ и $Z(V_i)$ как $GF(2)L$-модули изоморфны M и N соответственно. Группа $O_3(G)$ абелева и, если $O_3(G) \neq 1$, то каждый 3-главный фактор в G как $GF(3)\overline{G}$-модуль изоморфен 4-мерному неприводимому подстановочному $GF(3)\overline{G}$-модулю.*

(*ii*) *$\overline{G} \cong A_6$, S_6 или M_{10}, $F(G)$ — прямое произведение элементарной абелевой 2-группы и абелевой 3-группы, $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong A_6$ или M_{10}, и $G' = F(G) \rtimes L$, где $L \cong A_6$. Если $O_2(G) \neq 1$, то $O_2(G)$ является прямым произведением L-инвариантных подгрупп порядка 16, каждая* *из которых как $GF(2)L$-модуль изоморфна либо 4-мерному неприводимому подстановочному $GF(2)A_6$-модулю, либо сопряженному с ним модулю посредством внешнего автоморфизма группы S_6. Если $O_3(G) \neq 1$, то каждый 3-главный фактор в G как $GF(3)\overline{G}$-модуль изоморфен 4-мерному неприводимому $GF(3)\overline{G}$-модулю, который является подстановочным $GF(3))\overline{G}$-модулем при $\overline{G} \cong A_6$ или S_6.*

(iii) $\overline{G} \cong U_4(2)$ и $F(G) = O_2(G)$ — элементарная абелева 2-группа. Если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор группы G как $GF(4)\overline{G}$-модуль изоморфен естественному унитарному 4-мерному $GF(4)SU_4(2)$-модулю порядка 2^8.

(iv) $\overline{G} \cong L_2(8)$ или $Aut(L_2(8))$, $F(G) = O_2(G)$, $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(8)$ и $G' = F(G) \leftthreetimes L$, где $L \cong L_2(8)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор группы G' как $GF(8)L$-модуль изоморфен естественному 2-мерному $GF(8)SL_2(8)$-модулю порядка 2^8 или 4-мерному неприводимому $GF(8)L_2(8)$-модулю порядка 2^{12}.

(v) $\overline{G} \cong L_2(7)$ или $PGL_2(7)$ и $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(7)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор группы G' как $GF(2)\overline{G}'$-модуль изоморфен естественному 3-мерному $GF(2)SL_3(2)$-модулю или сопряженному с ним модулю посредством внешнего инволютивного автоморфизма группы $SL_3(2)$. Если $O_3(G) \neq 1$, то каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 3-мерному неприводимому $GF(9)L_2(7)$-модулю или 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(3)L_2(7)$-модулю.

(vi) $\overline{G} \cong U_3(3)$ или $Aut(U_3(3))(\cong G_2(2))$. Если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор группы G как $GF(2)\overline{G}$-модуль изоморфен 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)\overline{G}$-модулю. Если $O_3(G) \neq 1$, то каждый 3-главный фактор группы G' как $GF(9)\overline{G}'$-модуль изоморфен естественному унитарному 3-мерному $GF(9)U_3(3)$-модулю или 6-мерному $GF(9)U_3(3)$-модулю.

(vii) $\overline{G} \cong L_3(3)$ или $Aut(L_3(3))$. Если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор группы G' как $GF(2)\overline{G}'$-модуль изоморфен 12-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)L_3(3)$-модулю. Если $O_3(G) \neq 1$, то каждый 3-главный фактор группы G' как $GF(3)\overline{G}'$-модуль изоморфен одному из абсолютно неприводимых $GF(3)L_3(3)$-модулей размерностей 3, 6 или 15; для каждой из этих размерностей с точностью до изоморфизма существует ровно два $GF(3)L_3(3)$-модуля, которые сопряжены посредством внешнего инволютивного автоморфизма группы $L_3(3)$.

(viii) $\overline{G} \cong L_2(17)$ или $PGL_2(17)$ и $F(G) \neq 1$ при $\overline{G} \cong L_2(17)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо 8-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)L_2(17)$-модулю или сопряженному с ним модулю посредством внешнего инволютивного автоморфизма группы $L_2(17)$, либо 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)L_2(17)$-модулю, либо 16-мерному неприводимому $GF(8)L_2(17)$-модулю. Если $O_3(G) \neq 1$, то каждый 3-главный фактор группы G как $GF(3)\overline{G}$-модуль изоморфен 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(3)\overline{G}$-модулю.

Каждый из пунктов теоремы реализуется.

С учетом того, что группа $PGL_2(9)$ не распознаваема даже по спектру (см. [26]), из теоремы легко извлекается

Следствие. *Конечная трипримарная почти простая группа с несвязным графом простых чисел распознаваема по этому графу тогда и только, когда она изоморфна $L_2(17)$.*

З а м е ч а н и е. В работе [16] показано, что существует 2-группа Q ступени нильпотентности 3 и порядка 2^{28}, на которой A_5 действует как группа автоморфизмов, причем элемент порядка 5 из этой группы действует на Q свободно. В работе [9] показано существование нерасщепляемого расширения гомоциклической абелевой 2-группы ранга 3 посредством группы $L_2(7)$, в котором подгруппа порядка 7 самоцентрализуема. Такого вида группы встречаются, например, в качестве 2-локальных подгрупп в простых спорадических группах Матье M_{12} (см. [12]) и О'Нэна — Симса $O'N$ (см. [23]). Кроме того, в [16] доказано, что существует бесконечная серия 2-групп Q_i, на которых $L_2(7)$ действует как группа автоморфизмов, причем элемент порядка 7 действует на Q_i свободно и ступень нильпотентности группы Q_i стремится к бесконечности при i, стремящемся к бесконечности.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [4,10–12,17]. Если группа G действует на группе H, то мы будем говорить, что неединичный элемент $g \in G$ действует на H *свободно* (или *без неподвижных точек*), если $C_H(g) = 1$.

Если V — нормальная элементарная абелева p-подгруппа порядка p^n группы G, где p — простое число $n \in \mathbb{N}$ и $H \leq G$, то H естественным образом действует на V и относительно этого действия V можно рассматривать как $GF(p)H$-модуль размерности n. Если $n = km$, где $k, m \in \mathbb{N}$, то иногда оказывается возможным истолковать V и как $GF(p^m)H$-модуль размерности k. В каждом из этих двух случаев мы говорим о V как о H-модуле.

Если F — поле, а G и H — группы, то FG-модуль V назовем *изоморфным* FH-модулю W, если существуют изоморфизм φ группы G на группу H и линейное взаимно однозначное отображение ψ пространства V на пространство W такие, что $\psi(gv) = \varphi(g)\psi(v)$ для всех $g \in G$ и $v \in V$.

Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Лемма 1.1 (теорема Грюнберга — Кегеля [28, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа Фробениуса*;

(2) *G — двойная группа Фробениуса*;

(3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq Aut(P)$, P — простая неабелева группа с $s(G) \leq s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 1.2 [14]. *Если G — конечная простая трипримарная группа, то G изоморфна одной из следующих групп*: $A_5, L_2(7), A_6, L_2(8), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)$.

Лемма 1.3 [5, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Следующий полезный результат хорошо известен (см., например, [1, лемма 4]).

Лемма 1.4. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$dim\ C_V(g) = (\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 1.5 [27, предложение 3.2]. *Пусть G — конечная группа, $H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong L_2(q)$, где q нечетно, $q > 5$ и $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из $G \setminus H$. Тогда $H = 1$.*

Лемма 1.6 [15, теорема 8.2; 27, предложение 4.2]. *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong L_2(2^n)$, где $n \geq 2$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из G. Тогда $H = O_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)SL_2(2^n)$-модулю.*

Пусть $K \in \{A_5, S_5\}$. Хорошо известно, что существует с точностью до изоморфизма точно два неприводимых $GF(2)K$-модуля размерности 4. Первый модуль возникает из вложений

$$SL_2(4) \cong A_5 < S_5 < (A_5 \times 3) \leftthreetimes 2 \cong \Gamma L_2(4) < GL_4(2),$$

мы будем называть его *естественным* $GF(2)K$-модулем и обозначать через M. Все элементы порядка 3 или 5 из K действуют на M свободно, а сама группа K действует транзитивно на $M \setminus \{0\}$. Второй модуль возникает из вложений

$$\Omega_4^-(2) \cong A_5 < S_5 \cong GO_4^-(2) < Sp_4(2) < GL_4(2),$$

мы будем называть его *ортогональным* $GF(2)K$-модулем и обозначать через N. Элементы порядка 5 из K действуют на N свободно, однако $dim\ C_N(g) = 2$ для любого элемента g порядка 3 из K и длины K-орбит на N равны 1, 5, 10. Если V — 5-мерное векторное пространство над полем F порядка 2 или 3 с базисом $(v_1, \ldots, v_5)$ и элементы из K рассматриваются как линейные преобразования пространства V, индуцирующие соответствующие подстановки базисных векторов, то V становится точным FK-модулем. При этом подпространство V_0, порожденное вектором $v_1 + \cdots + v_5$, является K-инвариантным, а фактор-пространство V/V_0 является неприводимым FK-модулем размерности 4, который называется *подстановочным* FK-модулем. Этот модуль изоморфен N при $|F| = 2$, а при $|F| = 3$ является единственным точным неприводимым FK-модулем, на котором элементы порядка 5 из K действуют свободно (это легко видеть из леммы 1.4 и соответствующих таблиц характеров Брауэра группы K из [10]).

Рассмотрим простую группу $H = U_5(2)$, естественным образом действующую на унитарном пространстве размерности 5 над $GF(4)$, и параболическую максимальную подгруппу P в ней, стабилизирующую 2-мерное вполне изотропное подпространство этого пространства. Обозначим $O_2(P)$ через Q_P. Ввиду [12] и [24, теорема 1 и замечание] $P \cong Q_P \leftthreetimes GL_2(4)$, $N_{Aut(H)}(P) \cong Q_P \leftthreetimes \Gamma L_2(4)$, $|Q_P| = 2^8$, $Z(Q_P) = Q'_P = \Phi(Q_P) = \Omega_1(Q_P) \cong 2^4$, и действие подгруппы из $N_{Aut(H)}(P)$, изоморфной A_5 или S_5, на $Q_P/Z(Q_P)$ естественное, а на $Z(Q_P)$ — ортогональное.

Лемма 1.7 [24, теорема 1, леммы 3.1 и 4.1; 30, следствие 2, лемма 1.3; 16]. *Пусть G — конечная группа, $O_2(G) \neq 1$, $G/O_2(G) \cong A_5$ и $C_{O_2(G)}(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 5 из G. Тогда $G = O_2(G) \leftthreetimes L$, где $L \cong A_5$ и $O_2(G)$ есть произведение L-инвариантных подгрупп V_i, каждая из которых изоморфна либо гомоциклической абелевой группе ранга 4, либо группе Q_P, причем ступень нильпотентности группы $O_2(G)$ не превосходит 3. Кроме того, если V_i — элементарная абелева 2-группа, то она как $GF(2)L$-модуль изоморфна M или N; если V_i — неэлементарная гомоциклическая 2-группа, то все 2-главные факторы в $V_i \leftthreetimes L$ как $GF(2)L$-модули изоморфны N; если V_i изоморфна группе Q_P, то $V_i/Z(V_i)$ и $Z(V_i)$ как $GF(2)L$-модули изоморфны M и N соответственно.*

Пусть $K \in \{A_6, S_6\}$. Если V — 6-мерное векторное пространство над полем F порядка 2 или 3 с базисом $(v_1, \ldots, v_6)$ и элементы из K рассматриваются как линейные преобразования пространства V, индуцирующие соответствующие подстановки базисных векторов, то V становится точным FK-модулем. При этом подпространство V_0, порожденное вектором $v_1 + \cdots + v_6$, и подпространство U, порожденное всеми векторами вида $v_i + v_j$ для $i \neq j$, являются K-инвариантными, а фактор-пространство U/V_0 является неприводимым FK-модулем размерности 4, который называется *подстановочным* FK-модулем и обозначается через E. Если α — автоморфизм группы K, индуцируемый внешним автоморфизмом группы S_6, то точные неприводимые FK-модули, на которых элементы порядка 5 из K действуют свободно, исчерпываются двумя неизоморфными модулями E и E^α при $|F| = 2$ и одним модулем E при $|F| = 3$ (это легко проверить, используя лемму 1.4 и соответствующие таблицы характеров Брауэра из [10]).

Лемма 1.8 [24, теорема 2; 25, теорема 2]. *Пусть G — конечная группа, $O_2(G) \neq 1$, $G/O_2(G) \cong A_6$ и $C_{O_2(G)}(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 5 из G. Тогда $G = O_2(G) \leftthreetimes L$, где $L \cong A_6$ и $O_2(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 16 в G, каждая из которых как $GF(2)L$-модуль изоморфна E или E^{α}.*

2. Доказательство теоремы

Пусть граф простых чисел конечной группы G несвязен и имеет точно три вершины. По лемме 1.1 возможны три случая. Понятно, что как группа Фробениуса (случай (1)), так и двойная группа Фробениуса (случай (2)) имеют несвязные графы простых чисел. Поэтому можно считать, что выполнен случай (3) леммы 1.1, т. е.

$$Inn(P) \leq \overline{G} = G/F(G) \leq Aut(P),$$

где P — простая неабелева группа с $s(G) \leq s(P)$, причем $\pi(F(G)) \bigcup \pi(\overline{G}/Inn(P)) \subseteq \pi_1(G)$. Из [12] и леммы 1.2 следует, что группа P принадлежит множеству

$$\{A_5, L_2(7), A_6, L_2(8), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)\}.$$

Ввиду [12] легко находятся графы простых чисел почти простых трипримарных групп. Эти графы даны в приведенной ниже таблице.

Далее, пользуясь этой таблицей, мы будем исследовать возможные типы несвязных графов простых чисел группы G.

Предположим сначала, что $s(G) = 3$. Тогда $s(\overline{G}) = 3$ и по таблице $\overline{G} \cong A_5$, $L_2(7)$, A_6, M_{10}, $L_2(8)$ или $L_2(17)$. Ясно, что $\pi_1(G) = \{2\}$, поэтому $F(G) = O_2(G)$. Из лемм 1.4–1.6 и таблиц 2-модулярных характеров Брауэра групп $A_5 \cong L_2(4)$ и $L_2(8)$ из [10] следует, что $F(G) = 1$, т. е. выполняется утверждение (3) теоремы.

Пусть $s(G) = 2$. Тогда $s(\overline{G}) \geq 2$ и группа $\overline{G}$ изоморфна одной из групп, указанных в первом столбце таблицы (см. ниже), кроме групп $Aut(A_6)$ и $Aut(U_4(2))$.

Предположим, что $\pi_1(G)$ не содержит 3. Ввиду таблицы $\overline{G} \cong PGL_2(9)$. Но тогда $F(G) = 1$ по лемме 1.5 и, следовательно, $G \cong PGL_2(9)$, т. е. выполняется утверждение (4) теоремы.

Таким образом, можно считать, что $\pi_1(G) = \{2, 3\}$ и $\pi_2(G) = \{p\}$ для некоторого $p \in \{5, 7, 13, 17\}$, откуда $F(G) = O_2(G) \times O_3(G)$ и элементы порядка p из G действуют свободно на $F(G)$.

Если $\overline{G} \cong A_5$ или S_5, то ввиду леммы 1.7 и [1, теорема 1] выполняется утверждение (5i) теоремы.

Если $\overline{G} \cong A_6$, S_6 или M_{10}, то ввиду леммы 1.8 и [1, теорема 1] выполняется утверждение (5ii) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong U_4(2)$. Ввиду [12] в $\overline{G}$ есть подгруппа, изоморфная группе Фробениуса порядка 80. Пусть R — полный прообраз в G этой подгруппы. Тогда группа $R/O_2(G)$ содержит подгруппу, изоморфную $O_3(G) \leftthreetimes F$, где F — группа Фробениуса порядка 80. Если $O_3(G) \neq 1$, то по лемме 1.3 группа R содержит элемент порядка 15, что невозможно. Поэтому $O_3(G) = 1$. Ввиду [12] в $\overline{G}$ есть подгруппа, изоморфная группе A_6. Поэтому из леммы 1.8 следует, что $O_2(G)$ — элементарная абелева 2-группа. Если $O_2(G) \neq 1$, то ввиду леммы 1.4 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы $U_4(2)$ из [10] легко заметить, что каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен естественному унитарному 4-мерному $GF(4)U_4(2)$-модулю порядка 2^8, т. е. выполняется утверждение (5iii) теоремы.

Графы простых чисел почти простых трипримарных групп

Группа L	Граф $\Gamma(L)$
$A_5 \cong L_2(4) \cong P\Omega_4^-(2)$	$2 \quad 3 \quad 5$
$Aut(A_5) \cong S_5 \cong PGL_2(5) \cong GO_4^-(2)$	$2 - 3 \quad 5$
$A_6 \cong L_2(9) \cong Sp_4(2)' \cong PSO_4^-(3)$	$2 \quad 3 \quad 5$
$S_6 \cong Sp_4(2) \cong PGO_4^-(3)$	$2 - 3 \quad 5$
$PGL_2(9)$	$2 - 5 \quad 3$
M_{10}	$2 \quad 3 \quad 5$
$Aut(A_6) \cong P\Gamma L_2(9) \cong P\Gamma O_3(9)$	$2 - 3 - 5$
$L_3(3)$	$2 - 3 \quad 13$
$Aut(L_3(3))$	$2 - 3 \quad 13$
$U_4(2) \cong PSp_4(3) \cong P\Omega_6^-(2)$	$2 - 3 \quad 5$
$Aut(U_4(2)) \cong PGO_6^-(2)$	$2 - 3 - 5$
$U_3(3) \cong G_2(2)'$	$2 - 3 \quad 7$
$Aut(U_3(3)) \cong G_2(2)$	$2 - 3 \quad 7$
$L_2(7) \cong GL_3(2)$	$2 \quad 3 \quad 7$
$Aut(L_2(7)) \cong PGL_2(7)$	$2 - 3 \quad 7$
$L_2(8) \cong {}^2G_2(3)'$	$2 \quad 3 \quad 7$
$Aut(L_2(8)) \cong {}^2G_2(3)$	$2 - 3 \quad 7$
$L_2(17)$	$2 \quad 3 \quad 17$
$Aut(L_2(17)) \cong PGL_2(17)$	$2 - 3 \quad 17$

Предположим, что $\overline{G} \cong L_2(8)$ или $Aut(L_2(8))$. Ввиду [12] в $\overline{G}$ есть подгруппа, изоморфная группе Фробениуса порядка 56. Поэтому ввиду леммы 1.3 имеем $O_3(G) = 1$ и, следовательно, $F(G) = O_2(G)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то ввиду леммы 1.4 и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы $L_2(8)$ из [10] легко заметить, что каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен естественному 2-мерному $GF(8)L_2(8)$-модулю порядка 2^8 или 4-мерному $GF(8)L_2(8)$-модулю порядка 2^{12}, т. е. выполняется утверждение (5iv) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong L_2(7)$ или $PGL_2(7)$. Ввиду леммы 1.4 и таблиц 2-модулярных и 3-модулярных характеров Брауэра группы $L_2(7)$ из [10] легко заметить, что каждый 2-

главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен естественному 3-мерному неприводимому $GF(2)GL_3(2)$-модулю или сопряженному с ним модулю посредством внешнего инволютивного автоморфизма группы $GL_3(2)$ и каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 3-мерному неприводимому $GF(9)L_2(7)$-модулю или 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(3)L_2(7)$-модулю, т. е. выполняется утверждение (5v) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong U_3(3)$ или $G_2(2)$. Ввиду леммы 1.4 и таблиц 2-модулярных и 3-модулярных характеров Брауэра группы $U_3(3)$ из [10] легко заметить, что каждый 2-главный фактор группы G как $\overline{G}$-модуль изоморфен 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)U_3(3)$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен естественному 3-мерному унитарному $GF(9)SU_3(3)$-модулю или 6-мерному неприводимому $GF(9)U_3(3)$-модулю, т. е. выполняется утверждение (5vi) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong L_3(3)$ или $Aut(L_3(3)$. Ввиду леммы 1.4 и 2-модулярных и 3-модулярных характеров Брауэра группы $L_3(3)$ из [10] легко заметить, что каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен 12-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)L_3(3)$-модулю и каждый 3-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен одному из неприводимых $GF(3)L_3(3)$-модулей размерностей 3, 6 или 15; для каждой из этих размерностей существует точно два неизоморфных $GF(3)L_3(3)$-модуля, которые сопряжены посредством внешнего инволютивного автоморфизма группы $L_3(3)$, т. е. выполняется утверждение (5vii) теоремы.

Предположим, что $\overline{G} \cong L_2(17)$ или $PGL_2(17)$. Ввиду леммы 1.4 и таблиц 2-модулярных и 3-модулярных характеров Брауэра группы $L_2(17)$ из [10] легко заметить, что каждый 2-главный фактор группы G' как $\overline{G}'$-модуль изоморфен либо 8-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)L_2(17)$-модулю или сопряженному с ним модулю посредством внешнего инволютивного автоморфизма группы $L_2(17)$, либо 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(2)L_2(17)$-модулю, либо 16-мерному неприводимому $GF(8)L_2(17)$-модулю, а каждый 3-главный фактор группы G изоморфен 16-мерному абсолютно неприводимому $GF(3)\overline{G}$-модулю, т. е. выполняется утверждение (5viii) теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М.С.** $C55$-группы // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
2. **Заварницин А.В.** О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
3. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
4. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
5. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
6. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
7. **Хосрави А., Хосрави Б.** Квазираспознавание простой группы ${}^2G_2(q)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 707–715.
8. **Хосрави А., Хосрави Б.** 2-распознаваемость $PSL(2, p^2)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 934–944.
9. **Alperin J.L.** Sylow 2-subgroups of 2-rank three // North-Holland Math. Studies. 1973. Vol. 7. P. 3–5.
10. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
11. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
12. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
13. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424.

14. **Herzog M.** On finite simple groups of order divisible by three primes only // J. Algebra. 1968. Vol. 10. no. 3. P. 383–388.
15. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.
16. **Holt D.F., Plesken W.** A_5-invariant 2-groups with no trivial sections // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1986. Vol. 37, no. 145. P. 39–47.
17. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlag, 1967. 793 S.
18. **Khosravi B.** n-recognition by prime graph of the simple group $PSL(2, q)$ // J. Algebra Appl. 2008. Vol. 7, no. 6. P. 735–748.
19. **Khosravi B., Amiri S.S.S.** Groups with the same prime graph as $L_2(q)$ where $q = p^\alpha < 100$ // Hadronic J. 2007. Vol. 30, no. 3. P. 343–354.
20. **Khosravi Bahman, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** On the prime graph of $PSL(2, p)$ where $p > 3$ is a prime number // Acta Math. Hungar. 2007. Vol. 116, no. 4. P. 295–307.
21. **Khosravi Bahnam, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** Groups with the same prime graph as a CIT simple group // Houston J. Math. 2007. Vol. 33, no. 4. P. 967–977 (electronic).
22. **Khosravi Bahnam, Khosravi Behnam, Khosravi Behrooz.** A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph // Manuscripta math. 2008. Vol. 126. P. 49–58.
23. **O'Nan M.E.** Some evidence for the existence of a new simple group // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1976. Vol. 32, no. 3. P. 421–479.
24. **Prince A.R.** On 2-groups admitting A_5 or A_6 with an element of order 5 acting fixed point freely // J. Algebra. 1977. Vol. 49, no. 2. P. 374–386.
25. **Prince A.R.** An analogue of Maschke's theorem for certain representations of A_6 over $GF(2)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect A. 1982. Vol. 91, no. 3-4. P. 175–177.
26. Recognition of the finite simple groups $PGL_2(q)$ by their spectrum / G.Y. Chen, V.D. Mazurov, W.J. Schi, A.V. Vasil'ev, A.Kh. Zhurtov // J. Group Theory. 2007. Vol. 10, no. 1. P. 71–85.
27. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 426, no. 4. P. 653–680.
28. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
29. **Zavarnitsine A.V.** Uniqueness of the prime graph of $L_{16}(2)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2010. Т. 7. С. 119–121.
30. **Zurek G.** Über A_5-invariante 2-Gruppen // Mitt. Math. Sem. Giessen. 1982. H. 155. 92 S.

Поступила 30.04.2010

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Храмцов Игорь Владимирович
магистрант
Урал. гос. ун-т
e-mail: goga-kms@r66.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542.7

О ПРИМИТИВНЫХ ГРУППАХ ПОДСТАНОВОК СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДВУХ ТОЧЕК, НОРМАЛЬНЫМ В СТАБИЛИЗАТОРЕ ОДНОЙ ИЗ НИХ: СЛУЧАЙ, КОГДА ЦОКОЛЬ ЕСТЬ СТЕПЕНЬ СПОРАДИЧЕСКОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ[1]

А. В. Коныгин

Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. П. Камероном был поставлен вопрос о справедливости в этом случае равенства $G_{x,y} = 1$. Доказано, что если группа G имеет (в классификации О'Нэна — Скотта) тип I, тип III(a), тип III(c) или G имеет тип II и $\mathrm{soc}(G)$ не является исключительной группой лиева типа, то $G_{x,y} = 1$. Кроме того, доказано, что если группа G имеет тип III(b) и $\mathrm{soc}(G)$ не является прямым произведением исключительных групп лиева типа, то $G_{x,y} = 1$.

Ключевые слова: примитивная группа подстановок, классификация О'Нэна — Скотта.

A. V. Konygin. On primitive permutation groups with a stabilizer of two points that is normal in the stabilizer of one of them: case when the socle is a power of sporadic simple group.

Assume that G is a primitive permutation group on a finite set X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, and $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. P. Cameron has raised the question about realization of an equality $G_{x,y} = 1$ in this case. It is proved that, if (according to the O'Nan–Scott classification) the group G is of type I, type III(a), or type III(c) or G is of type II and $\mathrm{soc}(G)$ is not an exceptional group of Lie type, then $G_{x,y} = 1$. In addition, it is proved that, if the group G is of type III(b) and $\mathrm{soc}(G)$ is not a direct product of exceptional groups of Lie type, then $G_{x,y} = 1$.

Keywords: primitive permutation group, O'Nan–Scott classification.

Введение

П. Камероном был сформулирован следующий вопрос (см. [3 и 17, вопрос 9.69]). Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и G_x действует регулярно на орбите $G_x(y)$ (т. е. индуцирует на $G_x(y)$ регулярную группу подстановок). Верно ли, что это действие точное, т. е. что $|G_x| = |G_x(y)|$? Отметим, что вопрос о точности действия стабилизатора G_x на регулярной подорбите $G_x(y)$ изучался и ранее (см. [10, 12, 13]).

Можно показать, что регулярность действия группы G_x на $G_x(y)$ эквивалентна свойству $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$, а равенство $|G_x| = |G_x(y)|$ при условии $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ эквивалентно равенству $G_{x,y} = 1$. Таким образом, вопрос П. Камерона эквивалентен вопросу о выполнении для произвольной примитивной группы подстановок G на конечном множестве X следующего свойства:

(Pr) если $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$, то $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ влечет $G_{x,y} = 1$.

Очевидно, вопрос П. Камерона эквивалентен также вопросу о выполнении для произвольной абстрактной конечной группы G следующего свойства:

(Pr*) если M_1 и M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы группы G, то $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq M_1$ влечет $M_1 \cap M_2 \trianglelefteq G$.

Согласно теореме О'Нэна — Скотта (см. [6]) любая конечная примитивная группа подстановок подстановочно изоморфна группе одного из перечисленных ниже типов.

I. Примитивные группы с абелевой регулярной нормальной подгруппой.

II. Примитивные почти простые группы. Напомним, что группа G называется почти простой, если $\mathrm{Inn}(T) \trianglelefteq G \leq \mathrm{Aut}(T)$ для некоторой конечной простой неабелевой группы T.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00349).

III. Примитивные группы с неабелевым не простым цоколем. Среди групп этого типа различают группы типов III(a), III(b) и III(c).

III(a) (simple diagonal action). Пусть S_k — симметрическая группа степени $k \geq 2$, T — простая неабелева группа и $W = \{(a_1, \ \ldots, \ a_k).\pi \mid a_i \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k, \ a_i a_j^{-1} \in \mathrm{Inn}(T), \ i, j \in \{1, \ldots, k\}\} \leq \mathrm{Aut}(T)\mathrm{wr}S_k$. Тогда представление группы W левыми сдвигами на множестве левых смежных классов W по $W_x = \{(a, \ \ldots, \ a).\pi \mid a \in \mathrm{Aut}(T), \ \pi \in S_k\}$ является примитивным представлением степени $|T|^{k-1}$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(a), если $\mathrm{soc}(W) \leq G \leq W$.

III(b) (product action). Пусть S_m — симметрическая группа степени $m \geq 2$ и H — примитивная группа типа II или III(a) на конечном множестве Y. Положим $W = H\mathrm{wr}S_m$. Группа W естественным образом действует на $X = Y^m$. Конечная примитивная группа G имеет тип III(b), если $K^m \leq G \leq W$, где $K = \mathrm{soc}(H)$, и G транзитивно переставляет m множителей группы K^m.

III(c) (twisted wreath action). Конечная примитивная группа G имеет тип III(c), если она обладает единственной неабелевой регулярной нормальной подгруппой.

Ранее в работе [18] было доказано, что если G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X и либо G — группа типа I, III(a) или III(c), либо G — группа типа II с цоколем, не являющимся исключительной группой лиева типа или спорадической простой группой, то для G имеет место свойство **(Pr)**. Там же доказано, что если $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b), $m \geq 2$ и цоколь группы H не является исключительной группой лиева типа или спорадической простой группой, то для G также имеет место свойство **(Pr)**. Таким образом, для всех таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что цоколь группы G является спорадической простой группой. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**). *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Теорема 2. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа* III(b), *$m \geq 2$ и цоколь группы H является спорадической простой группой. Тогда для G имеет место свойство* **(Pr)**. *В частности, для таких примитивных групп подстановок G ответ на вопрос П. Камерона положителен.*

Таким образом, для доказательства справедливости свойства **(Pr)** для примитивной группы подстановок G на конечном множестве X (и для получения ответа на вопрос П. Камерона) остается рассмотреть случай, когда G — почти простая исключительная группа лиева типа или $G \leq H\mathrm{wr}S_m$ — группа типа III(b), $m \geq 2$ и цоколь группы H является исключительной группой лиева типа.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Для произвольной конечной группы G в работе используются следующие обозначения: $\mathrm{soc}(G)$ — цоколь группы G, $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G для простого числа p, $[H_1, H_2]$ — коммутатор подгрупп H_1 и H_2 группы G.

Нам понадобятся следующие результаты, доказанные ранее в [18].

Предложение 1 [18, предложение 8]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$ и $y \in X \setminus \{x\}$. Пусть p — простое число. Предположим, что $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Тогда $O_p(G_{x,y}) = 1$. В частности, $O_p(G_x) \cap G_{x,y} = 1$, $O_p(G_y) \cap G_{x,y} = 1$ и $[O_p(G_x), G_{x,y}] = 1$.*

Предложение 2 [18, предложение 9]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$. Предположим, что $G_x \cong A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Предложение 3 [18, предложение 12]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X, $x \in X$. Предположим, что $G_x \cong A.T^k.B.S$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, $k \geq 2$ и $S \in \{A_k, S_k\}$, $S \neq A_2$ и S действует точно на изоморфных T множителях группы $\mathrm{soc}(A.T^k/A)$. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Пусть H — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве Y и $T = \mathrm{soc}(H)$. Будем говорить, что для группы подстановок H выполняется *свойство* (**Pr+**), если для произвольных $x \in Y$ и $y \in Y \setminus \{x\}$ из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $O_r(T_{x,y}) = 1$ для произвольного простого числа r следует $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$. Заметим, что если T действует примитивно на Y (другими словами, если для $x \in Y$ подгруппа T_x является максимальной), то из справедливости для группы T свойства (**Pr**) следует справедливость для групп T и H свойства (**Pr**+).

Свойство (**Pr**+) интересует нас в связи со следующим утверждением.

Предложение 4 [18, предложение 17]. *Пусть G — примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что $G \leq H \mathrm{wr} S_m$ — группа типа* III(b), *$m \geq 2$ и H — примитивная группа подстановок типа* II. *Предположим, кроме того, что для группы H выполняется свойство* (**Pr**+). *Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

В [18] было доказано следующее предложение.

Предложение 5 [18, предложение 18]. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X с цоколем T, $x \in X$. Предположим, что $T_x \cong A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, F — простая неабелева группа. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**+).

2. Доказательство основных результатов

Предложение 6. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что для $\mathrm{soc}(G)$ выполняется свойство* (**Pr**). *Тогда для G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Покажем, что $G_{x,y} = 1$. Положим $T = \mathrm{soc}(G)$. Из $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ следует $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ Поэтому $T_{x,y} = 1$. Следовательно, $G_{x,y} \cap T = 1$ и равенство $G_{x,y} = 1$ следует из предложения 1. Предложение доказано.

Предложение 7. *Пусть G — примитивная почти простая группа подстановок на конечном множестве X и стабилизатор точки множества X в группе G имеет вид $R.(A \times B).Q$, где R, Q — разрешимые группы, A, B — почти простые группы. Предположим, что $\mathrm{soc}(A)$ не вкладывается изоморфно в B и $\mathrm{soc}(B)$ не вкладывается изоморфно в A. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in X \setminus \{x\}$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$. Покажем, что $G_{x,y} = 1$. Предположим противное. В силу предложения 1 либо $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(A) \times \mathrm{soc}(B)$, либо $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(A)$, либо $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(B)$. Пусть g — элемент из G со свойством $g(y) = x$, $D = \mathrm{soc}(G_{x,y}) \cap \mathrm{soc}(G^g_{x,y}) \trianglelefteq \mathrm{soc}(G_{x,y})$ и $F = G_y/\mathrm{soc}(G^g_{x,y})$.

Предположим, что $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(A) \times \mathrm{soc}(B)$. Тогда либо $D = 1$, либо $D \cong \mathrm{soc}(A)$, либо $D \cong \mathrm{soc}(B)$, либо $D \cong \mathrm{soc}(A) \times \mathrm{soc}(B)$. Если $D = 1$, то группа $\mathrm{soc}(G_{x,y})\mathrm{soc}(G^g_{x,y})/\mathrm{soc}(G^g_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(G_{x,y})$. Противоречие с тем, что группа F является разрешимой. Если $D \cong \mathrm{soc}(A)$, то, поскольку $\mathrm{soc}(A)$ не вкладывается изоморфно в группу B, имеем $D \trianglelefteq \mathrm{soc}(G^g_{x,y})$. Тогда $D \trianglelefteq G_x$ и $D \trianglelefteq G_y$. Противоречие. Аналогично рассматривается случай $D \cong \mathrm{soc}(B)$. Если $D \cong \mathrm{soc}(A) \times \mathrm{soc}(B)$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = \mathrm{soc}(G^g_{x,y})$. Следовательно, $D \trianglelefteq G_x$ и $D \trianglelefteq G_y$. Противоречие.

Предположим, что $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(A)$. Тогда либо $D = 1$, либо $D \cong \mathrm{soc}(A)$. Если $D = 1$, то группа F содержит подгруппу $\mathrm{soc}(G_{x,y})\mathrm{soc}(G^g_{x,y})/\mathrm{soc}(G^g_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(A)$. Противоречие с тем, что $\mathrm{soc}(A)$ не вкладывается изоморфно в группу B. Если $D \cong \mathrm{soc}(A)$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) = \mathrm{soc}(G^g_{x,y})$. Следовательно, $D \trianglelefteq G_x$ и $D \trianglelefteq G_y$. Противоречие.

Случай $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(B)$ рассматривается аналогично случаю $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong \mathrm{soc}(A)$.

Предложение полностью доказано.

Предложение 8. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что* $\mathrm{soc}(G)$ *изоморфен одной из следующих спорадических простых групп: M_{11}, M_{12}, J_1, M_{22}, J_2, M_{23}, HS, J_3, M_{24}, McL, He, Ru, $O'N$, Co_3, Co_2, Fi_{22}, Ly, Th или Fi_{23}. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [1,4,5] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо $\mathrm{soc}(G) \cong He$ и $G_x \cong (S_5 \times S_5) : 2$ (множители S_5 и S_5 сопряжены в G_x). Теперь, свойство (**Pr**) следует из предложений 1, 2 и 3. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что* $\mathrm{soc}(G)$ *изоморфен спорадической простой группе Suz. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [1] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 1$ и $G_x \cong (A_5 \times A_6) : 2$;

(2) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 2$ и $G_x \cong (A_5 \times PGL_2(9)).2$.

Если G_x является разрешимой группой, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 2. Если $G_x \cong (A_5 \times A_6) : 2$, то выполнение свойства (**Pr**) проверяется напрямую с помощью программы GAP (см. [11]). Для доказательства предложения в случае $G_x \cong (A_5 \times PGL_2(9)).2$ используем предложение 6.

Предложение 10. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что* $\mathrm{soc}(G)$ *изоморфен спорадической простой группе HN. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [1] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо выполняется одно из следующих утверждений:

(1) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 1$ и $G_x \cong 2^{1+8}_{+}.(A_5 \times A_5).2$;

(2) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 2$ и $G_x \cong 2^{1+8}_{+}.(A_5 \times A_5).2^2$;

(3) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 1$ и $G_x \cong (A_6 \times A_6).D_8$;

(4) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 2$ и $G_x \cong (S_6 \times S_6).2^2$.

Если G_x является разрешимой группой, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 2. Если для группы G_x выполняется одно из утверждений (1)–(4), то доказательство предложения следует из предложения 3.

Пусть A и B — подгруппы некоторой группы со свойством $[A, B] = 1$. Пусть, кроме того, группа A изоморфно вкладывается в группу B или группа B изоморфно вкладывается в группу A. В случае, если группа A изоморфно вкладывается в группу B, положим $C = A$. Если же группа B изоморфно вкладывается в группу A, положим $C = B$. Будем говорить, что подгруппа D группы $A \times B$, изоморфная группе C, является *диагональной*, если $A \cap D = 1$ и $B \cap D = 1$.

Предложение 11. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G изоморфна спорадической простой группе Co_1. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [1] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо выполняется одно из следующих утверждений:
(1) $G_x \cong (A_5 \times J_2) : 2$;
(2) $G_x \cong (A_6 \times U_3(3)) : 2$;
(3) $G_x \cong (A_7 \times L_2(7)) : 2$;
(4) $G_x \cong (D_{10} \times (A_5 \times A_5).2).2$.

Если G_x является разрешимой группой, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 2.

Пусть теперь для группы G_x выполняется одно из утверждений (1)–(4). Предположим, что для группы G не выполняется свойство (**Pr**), т. е. $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \neq 1$ для некоторого $y \in X \setminus \{x\}$.

Если $G_x \cong (A_6 \times U_3(3)) : 2$, то справедливость свойства (**Pr**) для группы G следует из предложения 7.

Предположим, что $G_x \cong (A_5 \times J_2) : 2$. Если $G_{x,y} \ncong A_5$, то рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предложения 7, дают противоречие. Следовательно, $G_{x,y} \cong A_5$. Можно проверить (например, с помощью программы GAP [11]), что $N_{G_y}(G_{x,y}) > G_{x,y}$. Тогда $N_G(G_{x,y}) > G_x$. Противоречие.

Предположим, что $G_x \cong (A_7 \times L_2(7)) : 2$. Если $G_{x,y} \ncong L_2(7)$, то рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предложения 7, дают противоречие. Следовательно, $G_{x,y} \cong L_2(7)$. Поскольку $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то $G_{x,y}$ сопряжен в G с некоторой диагональной подгруппой в $G_{x,y} \times C_{G_x}(G_{x,y})$. Из [15, section 4] следует, что в группе G есть ровно три класса сопряженных подгрупп, изоморфных $L_2(7)$, таких, что все минимальные характеристические подгруппы централизатора этой подгруппы в группе G являются прямыми произведениями неабелевых простых групп: один класс с централизатором, изоморфным A_7, и два класса с централизаторами, изоморфными $L_2(7)$. Кроме того, нормализатор подгруппы из любого из перечисленных классов имеет вид $(A_7 \times L_2(7)).2$. Из [15, section 4] следует, что в группе G есть ровно один класс сопряженных подгрупп, изоморфных A_7. Таким образом, в G_x есть ровно три класса сопряженных подгрупп в G, изоморфных $L_2(7)$. Представителями этих классов являются, например, $G_{x,y}$, подгруппа, изоморфная $L_2(7)$ из $C_{G_x}(G_{x,y})$, и диагональная подгруппа в $G_{x,y} \times C_{G_x}(G_{x,y})$. В частности, $G_{x,y}$ и произвольная диагональная подгруппа в $G_{x,y} \times C_{G_x}(G_{x,y})$ принадлежат различным классам сопряженных подгрупп в G. Противоречие.

Если $G_x \cong (D_{10} \times (A_5 \times A_5).2).2$, то $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong A_5 \times A_5$ и $N_{G_y}(\mathrm{soc}(G_{x,y})) > G_{x,y}$. Следовательно, $N_G(\mathrm{soc}(G_{x,y})) > G_x$. Противоречие.

Предложение доказано.

Предложение 12. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G изоморфна спорадической простой группе J_4. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [1] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо $G_x \cong 2^{3+12} \cdot (S_5 \times L_3(2))$.

Если G_x является разрешимой группой, то справедливость свойства (**Pr**) следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то справедливость свойства (**Pr**) следует из предложения 2. Для доказательства предложения в случае $G_x \cong 2^{3+12} \cdot (S_5 \times L_3(2))$ используем предложение 7. Предложение полностью доказано.

Предложение 13. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что* $\mathrm{soc}(G)$ *изоморфен спорадической простой группе Fi_{24}'. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [7] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо выполняется одно из следующих утверждений:
(1) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 1$ и $G_x \cong 2^{3+12}(L_3(2) \times A_6)$;
(2) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 2$ и $G_x \cong 2^{3+12}(L_3(2) \times S_6)$;
(3) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 1$ и $G_x \cong (A_5 \times A_9) : 2$;
(4) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 2$ и $G_x \cong S_5 \times S_9$;
(5) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 1$ и $G_x \cong A_6 \times L_2(8) : 3$;
(6) $|G : \mathrm{soc}(G)| = 2$ и $G_x \cong S_6 \times L_2(8) : 3$.

Если G_x является разрешимой группой, то справедливость свойства (**Pr**) следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то справедливость свойства (**Pr**) следует из предложения 2.

Пусть теперь для группы G_x выполняется одно из утверждений (1)–(6). Если $G_x \cong 2^{3+12} \times (L_3(2) \times A_6)$, то предложение следует из предложения 7. Аналогично рассматривается случай, когда $G_x \cong A_6 \times L_2(8) : 3$. Если $G_x \cong 2^{3+12}(L_3(2) \times S_6)$ или $G_x \cong S_6 \times L_2(8) : 3$, то доказательство предложения следует из предложения 6.

Предположим, что $G_x \cong (A_5 \times A_9) : 2$ и для группы G не выполняется свойство (**Pr**), т. е. $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \neq 1$ для некоторого $y \in X \setminus \{x\}$. Поскольку $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то $G_y \cong A_5$. Но тогда $C_{G_y}(G_{x,y}) \neq 1$ и, следовательно, $N_G(G_{x,y}) > G_x$. Противоречие. Наконец, справедливость свойства (**Pr**) для группы G в случае $G_x \cong S_5 \times S_9$ следует из предложения 6.

Предложение полностью доказано.

Будем говорить, что для группы G выполняется *свойство* (**A**), если для произвольных подгрупп H_1 и H_2 из G из того, что $H_1 \cong A_5$, $H_2 \cong A_5$ и $[H_1, H_2] = 1$, следует, что H_1 не сопряжена в G с диагональной подгруппой группы $H_1 \times H_2$.

Предложение 14. *Для спорадических простых групп B и M выполняется свойство* (**A**).

Доказательство. Из [9] следует, что свойство (**A**) выполняется для группы M. Поскольку группа M содержит в качестве подгруппы группу $2.B$, то свойство (**A**) выполнено для группы $2.B$. Из [14, theorem 5.1] следует, что при естественном гомоморфизме из $2.B$ в M полный прообраз группы A_5 изоморфен группе $2 \times A_5$. Следовательно, свойство (**A**) выполнено и для группы B.

Предложение 15. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G изоморфна спорадической простой группе B. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [16] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо выполняется одно из следующих утверждений:
(1) $G_x \cong 2^3.[2^{32}].(S_5 \times L_3(2))$;
(2) $G_x \cong S_5 \times M_{22} : 2$;
(3) $G_x \cong (S_6 \times L_3(4) : 2).2$;
(4) $G_x \cong (S_6 \times S_6) : 4$.

Если G_x является разрешимой группой, то справедливость свойства (**Pr**) следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то справедливость свойства (**Pr**) следует из предложения 2.

Пусть теперь для группы G_x выполняется одно из утверждений (1)–(4). Если $G_x \cong (S_6 \times S_6) : 4$, то для группы G свойство (**Pr**) выполняется в силу предложения 3.

Если $G_x \cong 2^3.[2^{32}].(S_5 \times L_3(2))$, то предложение следует из предложения 7.

Предположим, что для группы G не выполняется свойство (**Pr**), т. е. $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ и $G_{x,y} \neq 1$ для некоторого $y \in X \setminus \{x\}$. Пусть g — элемент из G со свойством $g(y) = x$.

Если $G_x \cong (S_6 \times L_3(4) : 2).2$, то в силу $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$ имеем $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong A_6$ (см. предложение 7). Пусть H_1 — подгруппа из $\mathrm{soc}(G_{x,y})$, изоморфная группе A_5. Поскольку $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то H_1 является диагональной подгруппой в $H_2 \times H_3 \leq G_y$, где $H_2 \leq \mathrm{soc}(G_{x,y})^g$, $H_2 \cong A_5$, $H_3 \cong A_5$ и $[H_2, H_3] = 1$. Так как все подгруппы группы из $\mathrm{soc}(G_{x,y})$, изоморфные A_5, сопряжены в группе G_x, то получаем, что H_1^g сопряжена с H_2 в G_x. Противоречие с предложением 14.

Если $G_x \cong S_5 \times M_{22} : 2$, то в силу $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$ имеем $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong A_5$ (см. предложение 7). Пусть $F_1 = \mathrm{soc}(G_{x,y})$. Поскольку $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то F_1 является диагональной подгруппой в $F_2 \times F_3 \leq G_y$, где $F_2 \leq \mathrm{soc}(G_{x,y})^g$, $F_2 \cong A_5$, $F_3 \cong A_5$ и $[F_2, F_3] = 1$. Так как $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong A_5$, то получаем, что F_1^g сопряжена с F_2 в G_x. Противоречие с предложением 14.

Предложение полностью доказано.

Предложение 16. *Пусть G — почти простая примитивная группа подстановок на конечном множестве X. Предположим, что G изоморфна спорадической простой группе M. Тогда для группы G выполняется свойство* (**Pr**).

Доказательство. Пусть $x \in X$. Поскольку G — примитивная группа, то G_x — максимальная подгруппа из G. Из [2] следует, что либо G_x является разрешимой группой, либо G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, либо выполняется одно из следующих утверждений:
(1) $G_x \cong 2^3.2^6.2^{12}.2^{18}(L_3(2) \times 3S_6)$;
(2) $G_x \cong (L_2(11) \times M_{12}) : 2$;
(3) $G_x \cong (A_5 \times A_{12}) : 2$;
(4) $G_x \cong M_{11} \times A_6.2^2$;
(5) $G_x \cong (L_3(2) \times S_4(4) : 2).2$;
(6) $G_x \cong (A_5 \times U_3(8) : 3) : 2$;
(7) $G_x \cong A_6^3(2 \times S_4)$;
(8) $G_x \cong (A_7 \times (A_5 \times A_5) : 2^2) : 2$;
(9) $G_x \cong S_5^3 : S_3$;
(10) $G_x \cong L_2(11)^2 : 4$.

Если G_x является разрешимой группой, то доказательство предложения следует из предложения 1. Если G_x является группой вида $A.T.B$, где A, B — разрешимые группы, T — простая неабелева группа, то доказательство предложения следует из предложения 2.

Пусть теперь для группы G_x выполняется одно из утверждений (1)–(10). Если $G_x \cong A_6^3(2\times S_4)$, $G_x \cong S_5^3 : S_3$ или $G_x \cong L_2(11)^2 : 4$, то для группы G свойство $(\mathbf{Pr})$ выполняется в силу предложения 3.

Предположим, что для группы G не выполняется свойство $(\mathbf{Pr})$, т. е. $G_{x,y} \neq 1$ и $G_{x,y} \trianglelefteq G_x$ для некоторого $y \in X \setminus \{x\}$. Положим g — элемент из G со свойством $g(y) = x$.

Если $G_x \cong 2^3.2^6.2^{12}.2^{18}(L_3(2) \times 3S_6)$, то в силу предложения 1 имеем $[G_{x,y}, O_2(G_x)] = 1$. Из [8] следует, что $C_{G_x}(O_2(G_x)) \leq O_2(G_x)$. Противоречие.

Если $G_x \cong (L_3(2) \times S_4(4) : 2).2$ или $G_x \cong (A_5 \times U_3(8) : 3) : 2$, то справедливость свойства $(\mathbf{Pr})$ для группы G следует из предложения 7.

Если $G_x \cong (L_2(11) \times M_{12}) : 2$, то в силу $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$ имеем $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong L_2(11)$. Пусть H_1 — подгруппа из $\mathrm{soc}(G_{x,y})$, изоморфная группе A_5. Поскольку $G_{x,y} \ntrianglelefteq G_y$, то H_1 является диагональной подгруппой в $H_2 \times H_3 \leq G_y$, где $H_2 \leq \mathrm{soc}(G_{x,y})^g$, $H_2 \cong H_3 \cong A_5$ и $[H_2, H_3] = 1$. Так как все подгруппы группы из $\mathrm{soc}(G_{x,y})$, изоморфные A_5, сопряжены в группе G_x, то получаем, что H_1^g сопряжена с H_2. Противоречие с предложением 14. Аналогично рассматриваются случаи $G_x \cong (A_5 \times A_{12}) : 2$ и $G_x \cong M_{11} \times A_6.2^2$.

Если, наконец, $G_x \cong (A_7 \times (A_5 \times A_5) : 2^2) : 2$, то либо $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong A_7$, либо $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \cong A_5 \times A_5$. Но тогда $\mathrm{soc}(G_{x,y}) \trianglelefteq G_y$. Противоречие.

Предложение доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Справедливость теоремы 1 следует из предложений 8–13 и 15–16.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. В силу предложения 4 для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любой почти простой группы H, цоколь которой является спорадической простой группой, выполняется свойство $(\mathbf{Pr+})$. Пусть группа H действует на конечном множестве Y и $T = \mathrm{soc}(H)$. Покажем, что для группы H выполняется свойство $(\mathbf{Pr+})$, т. е. для произвольных $x \in Y$ и $y \in Y \setminus \{x\}$ из $T_{x,y} \trianglelefteq T_x$ и $O_r(T_{x,y}) = 1$ для произвольного простого числа r следует $N_T(T_{x,y}) \neq T_x$. Если T_x является максимальной подгруппой в группе T, свойство $(\mathbf{Pr+})$ для группы H следует из свойства $(\mathbf{Pr})$ для группы H (см. теорему 1). Если T_x не является максимальной подгруппой в группе T, то из [1] следует, что либо T_x является разрешимой группой, либо $T_x \cong A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, F — простая неабелева группа, либо $H \cong He.2$ и $H_x \cong (S_5 \times S_5) : 2$. Если T_x является разрешимой группой, то для группы H выполняется свойство $(\mathbf{Pr+})$. Если $T_x \cong A.F.B$, где A, B — разрешимые группы, F — простая неабелева группа, то справедливость свойства $(\mathbf{Pr+})$ для группы H следует из предложения 5. Если, наконец, $H \cong He.2$ и $H_x \cong (S_5 \times S_5) : 2$, то имеем $T_x \trianglelefteq H_x$. Из [1] получаем справедливость свойства $(\mathbf{Pr})$ для группы H.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 250 p.
2. **Bray J.N., Wilson R.A.** Explicit representations of maximal subgroups of the Monster // J. Algebra. 2006. Vol. 300. № 2. P. 834–857.
3. **Cameron P.J.** Suborbits in transitive permutation groups // Combinatorics. Part 3: Combinatorial group theory. Math. Centre Tracts no. 57. Amsterdam: Math. Centrum, 1974. P. 98–129.
4. **Kleidman P.B., Parker R.A., Wilson R.A.** The maximal subgroups of the Fischer group Fi_{23} // J. London Math. Soc. 1989. Vol. 39. P. 89–101.
5. **Kleidman P.B., Wilson R.A.** The maximal subgroups of Fi_{22} // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1987. Vol. 102. P. 17–23.
6. **Liebeck M.W., Praeger Ch.E., Saxl J.** On the O'Nan — Scott theorem for finite primitive permutation groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1988. Vol. 44. P. 389–396.
7. **Linton S.A., Wilson R.A.** The maximal subgroups of the Fischer groups Fi_{24} and Fi'_{24} // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1991. Vol. 63. P. 113–164.

8. **Meierfrankenfeld U., Shpectorov S.** Maximal 2-local subgroups of the Monster and Baby Monster: preprint. 2002. 49 p.
9. **Norton S.P.** Anatomy of the Monster: I // The Atlas of Finite Groups Ten Years On / R. T. Curtis, R. A. Wilson, eds. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 198–214.
10. **Reitz H.L.** On primitive groups of odd order // Amer. J. Math. 1904. Vol. 26. P. 1–30.
11. The GAP Group. GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.6. URL: http://www.gap-system.org.
12. **Weiss M.J.** On simply transitive groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40. P. 401–405.
13. **Wielandt H.** Finite permutation groups. New York: Acad. Press, 1964. 114 p.
14. **Wilson R.A.** More on maximal subgroups of the Baby Monster // Arch. Math. 1993. Vol. 61. P. 497–507.
15. **Wilson R.A.** The maximal subgroups of Conway's group Co_1 // J. Algebra. 1983. Vol. 85, № 1. P. 144–165.
16. **Wilson R.A.** The maximal subgroups of the Baby Monster. I // J. Algebra. 1999. Vol. 211, № 1. P. 1–14.
17. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. 16-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2006. 193 с.
18. **Коныгин А.В.** О примитивных группах подстановок со стабилизатором двух точек, нормальным в стабилизаторе одной из них // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 387–406.

Коныгин Антон Владимирович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: konygin@imm.uran.ru

Поступила 31.04.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542.5

ПРИМИТИВНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

В. В. Кораблева

Определены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений групп $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам.

Ключевые слова: примитивное подстановочное представление, параболическая подгруппа, ортогональная группа, изотропное подпространство.

V. V. Korableva. Primitive parabolic permutation representations of the groups $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$.

The ranks, degrees, subdegrees, and double stabilizers of permutation representations of the groups $P\Omega^{\pm}_{2m}(q)$ on cosets of parabolic maximal subgroups are found.

Keywords: permutation representation, parabolic subgroup, classical group, isotropic subspace.

Введение

Достаточно полную информацию о подстановочном представлении конечной группы дают следующие параметры: степень, ранг, подстепени, строение стабилизатора точки и двойных стабилизаторов. К настоящему времени эти параметры получены для точных подстановочных представлений минимальной степени всех конечных простых групп лиева типа (см. [1–6]). Важный класс подстановочных представлений конечных групп лиева типа составляют их параболические представления, т. е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам. Группы лиева типа подразделяются на классические, т. е. имеющие естественные представления группами автоморфизмов векторных пространств, и исключительные группы.

В работах автора [7–12] и [14–17] вычислены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы примитивных параболических подстановочных представлений для всех конечных простых исключительных групп лиева типа, для конечных специальных линейных, унитарных, симплектических групп и ортогональных групп нечетной размерности. В работе [13] вычислены ранги подстановочных представлений классических групп $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам. В данной работе определяются параметры примитивных параболических подстановочных представлений для конечных ортогональных групп четной размерности. Доказательство проводится в терминах линейных преобразований и квадратичных форм.

1. Предварительные сведения

Пусть V — векторное пространство размерности $l = 2m$ над конечным полем $GF(q)$ и f — *билинейная невырожденная симметрическая форма* на V, т. е. отображение из $V \times V$ в поле $GF(q)$ такое, что $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z)$, $\{v \in V \mid f(v,x) = 0$ при всех $x \in V\} = \{0\}$ и $f(x,z) = f(z,x)$ при всех α, $\beta \in GF(q)$ и x, y, $z \in V$. Обозначим через $GL(V)$ группу всех невырожденных линейных преобразований пространства V. Подгруппа группы $GL(V)$,

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10–01–00324).

состоящая из элементов φ, для которых $f(x^\varphi, y^\varphi) = f(x,y)$ при всех x,y из V, называется группой *изометрий формы* f и обозначается через $I(f)$. Матрицы элементов из $GL(V)$ в произвольном фиксированном базисе пространства V образуют группу $GL_l(q)$ всех невырожденных матриц порядка l над полем $GF(q)$, изоморфную $GL(V)$. Порядок этой группы $GL_l(q)$ равен $q^{(l^2-l)/2}(q^l-1)(q^{l-1}-1)\dots(q-1)$. *Квадратичной формой* F на пространстве V называется отображение из V в поле $GF(q)$ такое, что $F(\lambda x) = \lambda^2 F(x)$ и $F(x+y) = F(x)+f(x,y)+F(y)$ при всех $\lambda \in GF(q)$, $x,y \in V$, где f — некоторая симметрическая билинейная форма на V. Заметим, что симметрическая билинейная форма f определяется квадратичной формой F. С другой стороны, если характеристика поля $GF(q)$ нечетна, то $2\cdot F(x) = f(x,x)$ и квадратичная форма F также однозначно определяется билинейной симметрической формой f. Последнее неверно для полей четной характеристики. Квадратичная форма F называется *невырожденной*, если соответствующая ей симметрическая билинейная форма f невырожденная. Далее значение $f(x,y)$ формы f на паре $(x,y) \in V \times V$ будем обозначать через (x,y) и предполагать, что F — невырожденная квадратичная форма. Подпространство пространства V, на котором ограничение формы F есть нулевая форма, называется *изотропным относительно* F.

Ортогональной группой квадратичной формы F называется группа

$$I(F) = \{\varphi \in GL(V) \mid F(x^\varphi) = F(x) \text{ при всех } x \in V\}.$$

В случае, когда характеристика поля $GF(q)$ нечетна, имеет место равенство $I(F) = I(f)$. Если же характеристика поля четна, то $I(F) < I(f)$.

Лемма 1 [18, предложение 2.5.3]. *В пространстве V размерности $l = 2m$ с невырожденной квадратичной формой F существует либо базис*

(1) $(e_1,e_2,\dots,e_m,f_1,f_2,\dots,f_m)$ *такой, что выполняются равенства* $F(e_i) = F(f_i) = 0$, $(e_i,f_j) = \delta_{ij}$ *для всех* $1 \leqslant i,j \leqslant m$; *либо базис*

(2) $(e_1,e_2,\dots,e_{m-1},f_1,f_2,\dots,f_{m-1},x,y)$ *такой, что выполняются равенства* $F(e_i) = F(f_i) = 0$, $(e_i,f_j) = \delta_{ij}$, $(e_i,x) = (f_i,x) = (e_i,y) = (f_i,y) = 0$ *для всех* $1 \leqslant i,j \leqslant m-1$, $F(x) = 1$, $(x,y) = 1$, $F(y) = \zeta$, *где многочлен* $x^2+x+\zeta$ *не имеет корней в поле* $GF(q)$.

Для пространства V четной размерности $l = 2m$ над полем $GF(q)$ и для всех квадратичных форм F на V существуют два класса изоморфных групп $I(F)$ в зависимости от того, какой из случаев леммы 1 имеет место (см. [18, предложение 2.5.4]). Любой представитель класса, отвечающий случаю (1) леммы, будем обозначать через $O^+(V)$, а соответствующую матричную группу — через $O_l^+(q)$. Группы, отвечающие случаю (2), будем обозначать через $O^-(V)$ и $O_l^-(q)$. В общем случае будем использовать обозначения типа $O^\varepsilon(V)$ и $O_l^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$. Изотропные относительно квадратичной формы F подпространства будем называть *изотропными*, опуская, относительно какой формы.

Рассматривая элементы ортогональной группы $O^\varepsilon(V)$, имеющие равный единице определитель, получим *специальную ортогональную группу* $SO^\varepsilon(V)$. *Проективная специальная ортогональная группа* $PSO^\varepsilon(V)$ — это факторгруппа группы $SO^\varepsilon(V)$ по ее центру. За конечным числом исключений, она содержит определенную подгруппу, которая является простой. Эта простая подгруппа будет обозначаться через $P\Omega^\varepsilon(V)$ или через $P\Omega_l^\varepsilon(q)$ — в матричном варианте. Дадим точное определение группы $P\Omega^\varepsilon(V)$, следуя [18, § 2.5].

Пусть $v \in V$ и $F(v) \neq 0$. Преобразование r_v пространства V, определяемое формулой

$$x^{r_v} = x - (v,x)\cdot v/F(v),$$

имеет определитель, равный -1, лежит в $O^\varepsilon(V)$ и называется *отражением, порожденным вектором* v. Такие отражения порождают группу $O^\varepsilon(V)$ [18, предложение 2.5.6]. Согласно [18, предложение 2.5.7], за одним исключением, группа $SO^\varepsilon(q)$ содержит единственную подгруппу индекса 2, которая и есть $\Omega^\varepsilon(q)$. Группа $P\Omega^\varepsilon(V)$ является факторгруппой группы $\Omega^\varepsilon(V)$ по ее центру.

Пусть q нечетно, $g \in SO^\varepsilon(V)$ и $GF(q)^*$ — мультипликативная группа поля $GF(q)$. Тогда факторгруппа $GF(q)^*/(GF(q)^*)^2$ имеет порядок 2 и $g = r_{v_1} r_{v_2} \dots r_{v_{2s}}$ для некоторых $v_1, v_2, \dots, v_{2s} \in V$. Определим *спинорную норму* $\Theta(g)$ элемента g формулой

$$\Theta(g) = (v_1, v_1)(v_2, v_2) \dots (v_{2s}, v_{2s})(\mathrm{mod}(GF(q)^*)^2).$$

Тогда Θ — корректно определенная функция из $SO^\varepsilon(V)$ в $GF(q)^*/(GF(q)^*)^2$ и $\Omega^\varepsilon(V) = Ker(\Theta)$ при нечетном q.

Пусть q четно. Тогда группа $SO^\varepsilon(V)$ совпадает с группой $O^\varepsilon(V)$. Ее подгруппа $\Omega^\varepsilon(V)$ состоит из произведений четного числа отражений пространства V.

Группа $O^+(V)$ действует транзитивно на множестве $\mathcal{U}_m$ максимальных изотропных подпространств размерности $m = l/2$ пространства V. Любое отражение пространства V действует как нечетная подстановка на $\mathcal{U}_m$. Подгруппой из $O^+(V)$, индуцирующей четные подстановки, является $\Omega^+(V)$. Для любого q определим на $\mathcal{U}_m$ отношение эквивалентности $\sim$. Положим $U \sim W$ тогда и только тогда, когда $m - \dim(U \cap W)$ четное число. Группа $O^+(V)$ сохраняет это отношение $\sim$. Имеем в точности два класса $\mathcal{U}_m^1$ и $\mathcal{U}_m^2$ эквивалентности $\sim$. Существует сюрьективный гомоморфизм γ группы $O^+(V)$ в группу симметрий множества $\{\mathcal{U}_m^1, \mathcal{U}_m^2\}$, причем $\Omega^+(V) = Ker(\gamma)$ при четном q.

Пусть $G = \Omega^\varepsilon(V)$ и W — ненулевое изотропное подпространство пространства V. Известно (см. [18, § 3.1]), что стабилизатор G_W подпространства W в группе G почти всегда является параболической максимальной подгруппой в G, причем так получаются все параболические максимальные подгруппы в G. Исключением является стабилизатор G_W подпространства W размерности $l/2 - 1$ при $\varepsilon = +$.

Лемма 2 [18, лемма 2.5.8]. (1) *Для любого q классы эквивалентности $\mathcal{U}_m^1$ и $\mathcal{U}_m^2$ являются $\Omega_{2m}^+(q)$-орбитами на $\mathcal{U}_m$.*

(2) *Если $U \in \mathcal{U}_{m-1}$, то U содержится в точности в двух подпространствах из $\mathcal{U}_m$, более точно, в одном из класса $\mathcal{U}_m^1$ и в одном из класса $\mathcal{U}_m^2$.*

При $\varepsilon = +$ и $U = \langle e_1, e_2, \dots, e_{m-1} \rangle$ рассмотрим подпространства $W_1 = \langle U, e_m \rangle$ и $W_2 = \langle U, f_m \rangle$. Ясно, что $U = W_1 \cap W_2$ и W_1, W_2 лежат в разных класссах $\mathcal{U}_m^i$, $i = 1, 2$. Можно считать, что $W_1 \in \mathcal{U}_m^1$, $W_2 \in \mathcal{U}_m^2$. По лемме 2 подпространства W_1 и W_2 являются единственными членами в $\mathcal{U}_m^1$ и $\mathcal{U}_m^2$ соответственно, которые содержат изотропное подпространство U. Из [18, предложение 6.1.1] следует, что $G_U < G_{W_1}$ и $G_U < G_{W_2}$, поэтому стабилизатор G_U изотропного подпространства U размерности $m - 1$ не является максимальной подгруппой в G.

Рассмотрим представление (G, Γ) группы $G = \Omega^\varepsilon(V)$ подстановками множества Γ левых смежных классов группы G по подгруппе G_W, в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс xG_W в gxG_W. Подгруппа G_W является стабилизатором точки G_W из Γ в данном представлении, и стабилизатор каждой точки сопряжен в G с G_W. Число орбит стабилизатора G_W на Γ называется *(подстановочным) рангом* подстановочного представления (G, Γ). Орбиты подгруппы G_W на Γ называются *подорбитами* группы G, а мощности этих подорбит, называемые *подстепенями* подстановочного представления (G, Γ), могут быть вычислены как индексы *двойных стабилизаторов* $G_W \cap G_{W_i}$ в группе G_W, где W_i является изотропным подпространством из V той же размерности, что и размерность W, а G_{W_i} — стабилизатор подпространства W_i в группе G. Тривиальной подорбитой является G_W, и ее подстепень равна 1.

Если $\dim W = 1$, то подстановочное представление группы G на Γ имеет минимальную степень и рассмотрено в [2].

Для любого подмножества J из V положим $J^\perp = \{v \in V \mid (v, x) = 0$ для всех $x \in J\}$. Элементы матрицы (φ_{ij}) преобразования φ в базисе $(v_1, v_2, \dots, v_l)$ пространства V задаются правилом $v_i^\varphi = \sum_{j=1}^{l} \varphi_{ij} v_j$, $i = 1, 2, \dots, l$. Обозначим через $X.Y$ (соответственно $X : Y$) расширение (соответственно расщепляемое расширение) группы X посредством группы Y, через

Z_a — циклическую группу порядка a ($a \in \mathbb{N}$), через $[c]$ — целую часть рационального числа c. Диагональная матрица с элементом a_i, расположенным на пересечении строки и столбца с номером i, $i = 1, 2, \ldots, l$, обозначается через $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, E_j обозначает единичную матрицу порядка j и A^t — транспонированную к A матрицу. Если $V = \bigoplus V_i$ — разложение пространства V в прямую сумму подпространств V_i, то базис $(v_{11}, \ldots, v_{1m_1}, v_{21}, \ldots, v_{2m_2}, \ldots)$ пространства V такой, что $(v_{i1}, \ldots, v_{im_i})$ — базис пространства V_i, называется *базисом, согласованным с этим разложением.* Если верхний индекс j в произведении $\prod_1^j$ равен нулю, то считаем, что это произведение равно единице.

2. Ортогональные группы $\Omega^\varepsilon(V)$

Пусть V — векторное пространство размерности $l = 2m$ над полем порядка q. Порядок ортогональной группы $G = \Omega^\varepsilon(V)$ равен $q^{l(l-2)/4}(q^{l/2} - \varepsilon 1)\prod_{s=1}^{l/2-1}(q^{2s} - 1)/(2, q-1)$.

Лемма 3 [18, предложение 4.1.12]. *Пусть $O = O^\varepsilon(V)$, W — изотропное подпространство пространства V и $\dim W = k$. Тогда*

(1) *в пространстве V существует подпространство Y такое, что $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^\perp$;*

(2) *$O_W = C\colon S$, группа C действует тождественно на факторах ряда $0 < W < W^\perp < V$, $S = K \times O^\varepsilon(W \oplus Y)^\perp$, а группа K изоморфна $GL(W)$;*

(3) *группа C является подгруппой группы $\Omega^\varepsilon(V)$.*

Лемма 4. *Пусть $O = O^+(V)$. Тогда матрицы преобразований из подгруппы C группы O_W в некотором базисе, согласованном с разложением $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^\perp$, имеют вид*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} E_k & 0 & 0 & 0 \\ \hline A & E_k & U & R \\ \hline B & 0 & E_{m-k} & 0 \\ \hline Q & 0 & 0 & E_{m-k} \end{array}\right),$$

где для матриц A, B, Q, R, U справедливы равенства

$$(A + UR^t)^t + (A + UR^t) = 0, \quad U = -Q^t, \quad R = -B^t.$$

Доказательство. Из стандартного базиса пространства V, указанного в п. (1) леммы 1, построим новый базис, согласованный с разложением $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^\perp$. Пусть W — подпространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$, Y — подпространство, натянутое на векторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$. Тогда подпространство $(W \oplus Y)^\perp$ есть линейная оболочка векторов $e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_m, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_m$. Заметим, что подпространство $W^\perp$ есть линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_m$. Матрица преобразования φ из C в полученном базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_k, f_1, f_2, \ldots, f_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_m, f_{k+1}, f_{k+2}, \ldots, f_m)$ имеет вид, указанный в формулировке леммы, где $A = (a_{ij})_{k,k}$, $B = (b_{ij})_{m-k,k}$, $Q = (q_{ij})_{m-k,k}$, $U = (u_{ij})_{k,m-k}$, $R = (r_{ij})_{k,m-k}$.

Для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $t = 1, 2, \ldots, m-k$ пусть

$$e_i^\varphi = e_i, \quad f_i^\varphi = f_i + \sum_{d=1}^{k} a_{id}e_d + \sum_{d=1}^{m-k} u_{id}e_{k+d} + \sum_{d=1}^{m-k} r_{id}f_{k+d},$$

$$e_{k+t}^\varphi = e_{k+t} + \sum_{d=1}^{k} b_{td}e_d, \quad f_{k+t}^\varphi = f_{k+t} + \sum_{d=1}^{k} q_{td}e_d.$$

Вычислим значение формы f на базисных векторах. Любая матрица преобразования из C сохраняет невырожденную симметрическую форму f, соответствующую квадратичной форме F. Имеем

$$0=(f_i,e_{k+t})=(f_i^\varphi,e_{k+t}^\varphi)=b_{ti}+r_{it},\quad 0=(f_i,f_{k+t})=(f_i^\varphi,f_{k+t}^\varphi)=q_{ti}+u_{it},$$

поэтому $R=-B^t$, $U=-Q^t$. Далее, соотношение $(A+UR^t)^t+(A+UR^t)=0$ следует из равенства

$$0=(f_i,f_j)=(f_i^\varphi,f_j^\varphi)=a_{ij}+a_{ji}+\sum_{d=1}^{m-k}u_{id}r_{jd}+\sum_{d=1}^{m-k}u_{jd}r_{id}.$$

Значения формы f на остальных базисных векторах дают тривиальные соотношения.

Если характеристика поля $GF(q)$ четна, то согласно [18, лемма 2.1.8] для любого базисного вектора v дополнительно должно выполняться равенство $F(v^\varphi)=F(v)$.

Для $i=1,2,\dots,k$ выполняется равенство $F(e_i^\varphi)=F(e_i)$, так как $e_i^\varphi=e_i$. Используя соотношение $F(u+w)=(u,w)+F(u)+F(w)$, получим $F(f_i^\varphi)=a_{ii}+\sum_{d=1}^{m-k}u_{id}r_{id}$, поэтому имеем равенство $a_{ii}+\sum_{d=1}^{m-k}u_{id}r_{id}=0$.

Для $t=1,2,\dots,m-k$ выполняется равенство $F(e_{k+t}^\varphi)=F(f_{k+t}^\varphi)=0$, поэтому получаем $F(e_{k+t}^\varphi)=F(e_{k+t})$ и $F(f_{k+t}^\varphi)=F(f_{k+t})$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $O=O^-(V)$. Тогда матрицы преобразований из подгруппы C группы O_W в некотором базисе, согласованном с разложением $V=(W\oplus Y)\perp(W\oplus Y)^\perp$, имеют вид*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
E_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
A & E_k & U & R & X & Y\\ \hline
B & 0 & E_{m-k-1} & 0 & 0 & 0\\ \hline
Q & 0 & 0 & E_{m-k-1} & 0 & 0\\ \hline
Z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline
\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right),$$

где для матриц A,B,Q,R,U,X,Y,Z,Δ справедливы равенства

$$(A+RU^t+YX^t+XX^t+\zeta YY^t)^t+(A+RU^t+YX^t+XX^t+\zeta YY^t)=0,$$

$$U=-Q^t,\quad R=-B^t,\quad X+2\zeta Y+\Delta^t=0,\quad 2X+Y+Z^t=0.$$

Доказательство. Из стандартного базиса пространства V, указанного в п. (2) леммы 1, построим новый базис, согласованный с разложением $V=(W\oplus Y)\perp(W\oplus Y)^\perp$. Пусть W — подпространство, натянутое на векторы $e_1,e_2,\dots,e_k$, Y — подпространство, натянутое на $f_1,f_2,\dots,f_k$. Тогда подпространство $(W\oplus Y)^\perp$ есть линейная оболочка векторов $e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_{m-1},f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_{m-1},x,y$. Подпространство $W^\perp$ есть линейная оболочка векторов $e_1,e_2,\dots,e_{m-1},f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_{m-1},x,y$. Матрица преобразования φ из C в полученном базисе $(e_1,e_2,\dots,e_k,f_1,f_2,\dots,f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_{m-1},f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_{m-1},x,y)$ имеет вид, указанный в формулировке леммы, где $A=(a_{ij})_{k,k}$, $B=(b_{ij})_{m-k-1,k}$, $Q=(q_{ij})_{m-k-1,k}$, $U=(u_{ij})_{k,m-k-1}$, $R=(r_{ij})_{k,m-k-1}$, $X=(x_i)_{k,1}$, $Y=(y_i)_{k,1}$, $Z=(z_i)_{1,k}$, $\Delta=(\delta_i)_{1,k}$.

Для $i=1,2,\dots,k$ и $t=1,2,\dots,m-k-1$ имеем

$$e_i^\varphi=e_i,\quad f_i^\varphi=f_i+\sum_{d=1}^{k}a_{id}e_d+\sum_{d=1}^{m-k-1}u_{id}e_{k+d}+\sum_{d=1}^{m-k-1}r_{id}f_{k+d}+x_ix+y_iy,$$

$$e_{k+t}^\varphi=e_{k+t}+\sum_{d=1}^{k}b_{td}e_d,\quad f_{k+t}^\varphi=f_{k+t}+\sum_{d=1}^{k}q_{td}e_d,$$

$$x^\varphi = x + \sum_{d=1}^{k} z_d e_d, \quad y^\varphi = y + \sum_{d=1}^{k} \delta_d e_d.$$

Вычислим значение формы f на базисных векторах. Равенства $R = -B^t$, $U = -Q^t$ устанавливаются так же, как и в предыдущей лемме. Далее,

$$0 = (f_i, x) = (f_i^\varphi, x^\varphi) = 2x_i + y_i + z_i, \quad 0 = (f_i, y) = (f_i^\varphi, y^\varphi) = x_i + 2\zeta y_i + \delta_i,$$

поэтому $2X + Y + Z^t = 0$ и $X + 2\zeta Y + \Delta^t = 0$. Имеем

$$0 = (f_i, f_j) = (f_i^\varphi, f_j^\varphi) = a_{ij} + a_{ji} + \sum_{d=1}^{m-k-1} u_{id} r_{jd} + \sum_{d=1}^{m-k-1} u_{jd} r_{id} + 2x_i x_j + y_i x_j + x_i y_j + 2\zeta y_i y_j.$$

Это равенство означает, что

$$(A + RU^t + YX^t + XX^t + \zeta YY^t)^t + (A + RU^t + YX^t + XX^t + \zeta YY^t) = 0.$$

Значения формы f на остальных базисных векторах дают тривиальные соотношения.

Для четной характеристики поля $GF(q)$ и для любого базисного вектора v проверяем выполнимость равенства $F(v^\varphi) = F(v)$.

Для $i = 1, 2, \ldots, k$ равенство $F(e_i^\varphi) = F(e_i)$ выполняется, так как $e_i^\varphi = e_i$. Используя равенство $F(u + w) = (u, w) + F(u) + F(w)$, получим

$$F(f_i^\varphi) = a_{ii} + \sum_{d=1}^{m-k-1} u_{id} r_{id} + x_i^2 + \zeta y_i^2 + x_i y_i,$$

поэтому $0 = F(f_i) = a_{ii} + \sum_{d=1}^{m-k-1} u_{id} r_{id} + x_i^2 + \zeta y_i^2 + x_i y_i$.

Для $t = 1, 2, \ldots, m-k-1$ получаем $F(e_{k+t}^\varphi) = F(f_{k+t}^\varphi) = 0$, поэтому равенства $F(e_{k+t}^\varphi) = F(e_{k+t})$ и $F(f_{k+t}^\varphi) = F(f_{k+t})$ выполняются. Имеем $F(x^\varphi) = 1 = F(x)$ и $F(y^\varphi) = \zeta = F(y)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G = \Omega^\varepsilon(V)$, V — векторное пространство размерности $l = 2m$ над полем $GF(q)$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Тогда $G_W = C\colon L$, где группа C действует тождественно на факторах ряда $0 < W < W^\perp < V$, группа L при $k < m$ изоморфна группе $GL_k(q) \times \Omega^\varepsilon_{l-2k}(q)$ при четном q и группе $(SL_k(q).\, Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega^\varepsilon_{l-2k}(q)).\, Z_2$ при нечетном q, а при $m = k$ группа L изоморфна группе $SL_k(q).\, Z_{\frac{q-1}{2}}$ при нечетном q и группе $GL_k(q)$ при четном q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим (см. [18, предложение 2.5.4]), что в случае $\varepsilon = +$ размерность d максимального изотропного подпространства равна m, а в случае $\varepsilon = -$ эта размерность d равна $m-1$. Как при доказательстве леммы 4 и леммы 5, выберем базис пространства V, согласованный с разложением $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^\perp$. Пусть группы O, C, S, K, взяты как в лемме 3. Тогда $O_W = C\colon S$, $G_W = C\colon (S \cap G)$ и $K \leqslant SO^\varepsilon(V)$. Более точно (см. [18, лемма 4.1.9]) преобразования из подгруппы K имеют матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & E_{l-2k} \end{pmatrix},$$

где $A \in GL_k(q)$, $A^{-1t} = (A^{-1})^t$.

Пусть сначала q четно. Тогда $K \leqslant \Omega^\varepsilon(V)$ (см. [18, лемма 4.1.9]), и поэтому

$$S \cap G = K \times (O^\varepsilon(W \oplus Y)^\perp \cap G) = K \times \Omega^\varepsilon(W \oplus Y)^\perp \cong GL_k(q) \times \Omega^\varepsilon_{l-2k}(q).$$

Таким образом, матрицы из подгруппы $L \equiv S \cap G$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix},$$

где $A \in GL_k(q)$, $B \in \Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q)$. В частности, при $l = 2k$ имеем $S \cap G \cong GL_k(q)$.

Пусть q нечетно. Тогда

$$S \cap SO^{\varepsilon}(V) = K \times SO^{\varepsilon}(W \oplus Y)^{\perp} \cong GL_k(q) \times SO^{\varepsilon}_{l-2k}(q).$$

Если $l = 2k$, то $S \cap G = K \cap G$. В группе $K \cap G$ лежат элементы, для которых $\det A$ является квадратом в $GF(q)^*$ (см. [18, лемма 4.1.9]), и матрицы имеют вид

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0^{-1t} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\mu^{2\alpha}, 1, \dots, 1, \mu^{-2\alpha}, 1, \dots, 1),$$

где μ — порождающий элемент мультипликативной группы $GF(q)^*$, $A_0 \in SL_k(q)$, $\alpha \in \{1, 2. \dots, (q-1)/2\}$ и неединичные элементы в диагональной матрице стоят на первом и $(k+1)$-м местах.

Если $k < m$ и q нечетно, то и K, и $SO^{\varepsilon}(W \oplus Y)^{\perp}$ содержат элементы, спинорная норма которых не является квадратом в $GF(q)^*$, а спинорная норма произведения двух таких элементов является квадратом в $GF(q)^*$. Укажем такие элементы.

Если $\varepsilon = +$ и $k < m = d$ или $\varepsilon = -$ и $k < m - 1 = d$, то рассмотрим, например, отражения $r_{e_1+f_1}$, $r_{e_1+\beta f_1}$, $r_{e_{k+1}+f_{k+1}}$, $r_{e_{k+1}+\beta f_{k+1}}$, порожденные векторами $e_1 + f_1$, $e_1 + \beta f_1$, $e_{k+1} + f_{k+1}$, $e_{k+1} + \beta f_{k+1}$ соответственно, где $\beta \in GF(q)^*$, но $\beta \notin (GF(q)^*)^2$. Положим $h_1 = r_{e_1+f_1} \cdot r_{e_1+\beta f_1}$ и $h_2 = r_{e_{k+1}+f_{k+1}} \cdot r_{e_{k+1}+\beta f_{k+1}}$. Тогда $h_1 \in K \leqslant SO^{\varepsilon}(V)$, $h_2 \in SO^{\varepsilon}(W \oplus Y)^{\perp} \leqslant SO^{\varepsilon}(V)$. Вычислим спинорную норму этих элементов. Получаем

$$\Theta(h_1) = (e_1 + f_1, e_1 + f_1)(e_1 + \beta f_1, e_1 + \beta f_1) = 2 \cdot 2\beta$$

и

$$\Theta(h_2) = (e_{k+1} + f_{k+1}, e_{k+1} + f_{k+1})(e_{k+1} + \beta f_{k+1}, e_{k+1} + \beta f_{k+1}) = 2 \cdot 2\beta.$$

Поэтому $h_1, h_2 \notin G$, но $\Theta(h_1 \cdot h_2) \in (GF(q)^*)^2$, следовательно, $h_1 \cdot h_2 \in G$. Имеем $L \equiv S \cap G = ((K \cap G) \times \Omega^{\varepsilon}(W \oplus Y)^{\perp}).\, Z_2 \cong (SL_k(q).\, Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q)).\, Z_2$. Таким образом, элементы из подгруппы L имеют матрицы вида $a \cdot b \cdot c^{\lambda}$, где a — матрица вида

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad A_0 \in SL_k(q), \quad B \in \Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q),$$

$b = \operatorname{diag}(\mu^{2\alpha}, 1, \dots, 1, \mu^{-2\alpha}, 1, \dots, 1)$, $c = \operatorname{diag}(\beta^{-1}, 1, \dots, 1, \beta, 1, \dots, 1, \beta^{-1}, 1, \dots, 1, \beta, 1, \dots, 1)$ и $\lambda \in \{0, 1\}$. В матрице b неединичные элементы стоят на первом и $(k+1)$-м местах и $\alpha \in \{1, 2. \dots, (q-1)/2\}$, а в матрице c неединичные элементы стоят на первом, $(k+1)$-м, $(2k+1)$-м и $(d+k+1)$-м местах.

Если $\varepsilon = -$ и $k = m - 1$, то $\dim(W \oplus Y)^{\perp} = 2$. Так же, как в предыдущем случае, K и $SO^{-}(W \oplus Y)^{\perp}$ содержат элементы, спинорная норма которых не является квадратом в $GF(q)^*$, а спинорная норма произведения двух таких элементов является квадратом в $GF(q)^*$. Укажем здесь такие элементы. Для этого рассмотрим отражения $r_{e_1+f_1}$, $r_{e_1+\zeta f_1}$, r_x, r_y, порожденные векторами $e_1 + f_1$, $e_1 + \zeta f_1$, x, y соответственно, где x, y — из стандартного базиса (см. лемму 1), $F(y) = \zeta$ и $\zeta \in GF(q)^*$, но $\zeta \notin (GF(q)^*)^2$. Положим $h_3 = r_{e_1+f_1} \cdot r_{e_1+\zeta f_1}$ и $h_4 = r_x \cdot r_y$. Тогда $h_1 \in K \leqslant SO^{-}(V)$, $h_2 \in SO^{-}(W \oplus Y)^{\perp} \leqslant SO^{-}(V)$. Имеем $\Theta(h_3) = 2 \cdot 2\zeta$ и $\Theta(h_4) = (x, x)(y, y) = \Theta(h_3)$. Поэтому $h_3, h_4 \notin \Omega^{-}(V)$, но $h_3 \cdot h_4 \in \Omega^{-}(V)$. Получаем

$$L \equiv S \cap G = ((K \cap G) \times \Omega^{-}(W \oplus Y)^{\perp}).\, Z_2 \cong (SL_k(q).\, Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega_2^{-}(q)).\, Z_2.$$

Таким образом, элементы из подгруппы L имеют матрицы вида $a \cdot b \cdot c^{\lambda}$, где a и c — матрицы вида

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0^{-1t} & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|cc} \mathrm{diag}(\zeta^{-1}, 1, \ldots, 1, \zeta, 1 \ldots, 1) & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multirow{2}{*}{0} & -1 & \zeta^{-1} \\ & -1 & \zeta^{-1} - 1 \end{array}\right),$$

соответственно, $A_0 \in SL_{m-1}(q)$, $B \in \Omega_2^-(q)$, $b = \mathrm{diag}(\mu^{2\alpha}, 1, \ldots, 1, \mu^{-2\alpha}, 1, \ldots, 1)$ и $\lambda \in \{0, 1\}$. В матрице b неединичные элементы стоят на первом и m-м местах, в диагональной подматрице из c неединичные элементы стоят на первом и m-м местах и $\alpha \in \{1, 2. \ldots, (q-1)/2\}$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть V — векторное пространство размерности $l = 2m$ над полем $GF(q)$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Тогда порядок подгруппы C из леммы* 6 *равен $q^{lk-k(3k+1)/2}$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon = +$. Нужно вычислить количество матриц вида A, B, Q из леммы 4. Элементами матриц B и Q могут быть любые элементы поля $GF(q)$, поэтому существует точно $q^{k(l-2k)}$ упорядоченных пар (B, Q). Положим $A + UR^t = T$. Тогда первое матричное равенство из заключения леммы 4 примет вид $T^t + T = 0$. При нечетном q матрица T кососимметрическая с нулевой диагональю, поэтому таких матриц T в точности $q^{k(k-1)/2}$ штук. При фиксированных парах (B, Q) каждой T соответствует одна матрица A. Таким образом, при нечетном q имеем $q^{k(l-2k)+k(k-1)/2}$ упорядоченных троек (B, Q, A). Равенство $a_{ii} + \sum_{d=1}^{m-k} u_{id} r_{id} = 0$ из доказательства леммы 4 при четном q говорит о том, что диагональ матрицы T и в этом случае нулевая.

Пусть $\varepsilon = -$. Рассуждаем аналогично. Используем лемму 5 и полагаем $A + RU^t + YX^t + XX^t + \zeta YY^t = T$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G = \Omega^\varepsilon(V)$, V — векторное пространство четной размерности l над полем $GF(q)$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Тогда порядок стабилизатора G_W равен*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(2, q-1)} q^{(l^2-2l)/4} \prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1) & \text{при } l = 2k, \\ \dfrac{1}{(2, q-1)} q^{(l^2-2l)/4} (q^{l/2-k} - \varepsilon 1) \prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{l/2-k-1} (q^{2s} - 1) & \text{при } l > 2k. \end{cases}$$

Доказательство. В лемме 6 показано, что $G_W = C \colon L$, и там же указано строение подгруппы L, поэтому ее порядок легко вычисляется, а порядок подгруппы C из G_W указан в лемме 7. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть V — векторное пространство четной размерности l над полем $GF(q)$, W — изотропное подпространство размерности k в V. Степень подстановочного представления группы $G = \Omega^\varepsilon(V)$ на левых смежных классах по параболической подгруппе G_W равна*

$$\begin{cases} (q^{k-1} + 1) \ldots (q^2 + 1)(q + 1) & \text{при } l = 2k, \\ \prod\limits_{s=0}^{k-1} (q^{l/2-s-1} + \varepsilon 1)(q^{l/2-s} - \varepsilon 1) / \prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1) & \text{при } l > 2k. \end{cases}$$

Доказательство. Заключение леммы непосредственно следует из леммы 8, так как степень нашего представления равна индексу $\mid G \colon G_W \mid$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть векторное пространство V над полем $GF(q)$ имеет размерность $l = 2m$, W — изотропное подпространство размерности k в V, d — размерность максимального изотропного подпространства в V и $G = \Omega^\varepsilon(V)$. Тогда в V найдутся такие изотропные подпространства $W_{i,k-i-j,j}$ размерности k, $0 \leqslant i \leqslant k - j$ и $0 \leqslant j \leqslant d - k$ при $2k \geqslant d$, $0 \leqslant j \leqslant k$ при $2k < d$, что*

$$G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = C_{i,k-i-j,j} \colon (N_{i,k-i-j,j} \colon R_{i,k-i-j,j}).$$

Подгруппа $C_{i,k-i-j,j}$ *имеет порядок* $q^{(i+j)(l-k)-(i+j)(i+j+1)/2-j^2}$, *подгруппа* $N_{i,k-i-j,j}$ — $q^{(k-i)(i+j)-j^2}$. *Подгруппа* $R_{i,k-i-j,j}$ *при четном* q, $m > k$ *изоморфна группе* $GL_i(q) \times GL_j(q) \times GL_{k-i-j}(q) \times G_j$ *и при* $m = k$ *группе* $GL_i(q) \times GL_{k-i}(q)$; *подгруппа* $R_{i,k-i-j,j}$ *при нечетном* q, $m > k$ *изоморфна группе* $(M_{i,k-i-j,j} \times G_j).Z_2$ *и при* $m = k$ *группе* $M_{i,k-i,0}$. *Подгруппа* $M_{i,k-i-j,j}$ *имеет индекс* 2 *в группе* $GL_i(q) \times GL_j(q) \times GL_{k-i-j}(q)$, *а* G_j — *стабилизатор изотропного подпространства размерности* j *в* $\Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3, зафиксируем в пространстве V при $\varepsilon = +$ базис $(e_1,e_2,\dots,e_k,f_1,f_2,\dots,f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m,f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_m)$, при $\varepsilon = -$ базис $(e_1,e_2,\dots,e_k,f_1,f_2,\dots,f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_{m-1},f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_{m-1},x,\ y)$, согласованный с разложением $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^{\perp}$. Для любого $k \leqslant d$ рассмотрим стабилизатор $G_{W_{i,k-i-j,j}}$ фиксированного изотропного подпространства

$$W_{i,k-i-j,j} = \langle e_1, e_2, \dots, e_i, f_{i+j+1}, f_{i+j+2}, \dots, f_k, e_{d-j+1}, e_{d-j+2}, \dots, e_d \rangle,$$

где i и j указаны в формулировке теоремы. Выясним строение пересечения $G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}$ стабилизаторов подпространств W и $W_{i,k-i-j,j}$. Отметим, что

$$G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = (C\colon L) \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = (C \cap G_{W_{i,k-i-j,j}})\colon (L \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}),$$

где C и L взяты из леммы 6. Выясним строение матриц из подгруппы $C_{i,k-i-j,j} \equiv C \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}$. Матрицы из подгруппы C описаны в леммах 4 и 5. Те из них, которые стабилизируют подпространство $W_{i,k-i-j,j}$, имеют вид, указанный на рис. 1 ниже. Последние две строки и два столбца в этой матрице отсутствуют при $\varepsilon = +$. Символом $*$ отмечены прямоугольные матрицы с произвольными элементами из поля $GF(q)$, размер которых легко усматривается. Используя доказательство леммы 7, вычисляем количество элементов в подгруппе $C_{i,k-i-j,j}$. Получаем, что

$$\mid C_{i,k-i-j,j} \mid = q^{(i+j)(l-k)-(i+j)(i+j+1)/2-j^2}.$$

Выясним вид матриц из подгруппы $L_{i,k-i-j,j} \equiv L \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}$. Из матриц, лежащих в L и описанных в лемме 6, выберем те, которые централизуют подпространство, натянутое на векторы $e_1,e_2,\dots,e_i$, и подпространство, натянутое на $f_{i+j+1},f_{i+j+2},\dots,f_k$, а подпространство $\langle e_{d-j+1}, e_{d-j+2}, \dots, e_d \rangle$ стабилизируют. Для того чтобы матрица $A \in GL_k(q)$ централизовала подпространство $\langle e_1, e_2, \dots, e_i \rangle$, она должна иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline * & A_2 \end{array}\right),$$

где $A_1 \in GL_i(q)$, $A_2 \in GL_{k-i}(q)$. С другой стороны, для того чтобы матрица $M \equiv A^{-1t}$ централизовала подпространство $\langle f_{i+j+1}, f_{i+j+2}, \dots, f_k \rangle$, она должна иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & * & * \\ \hline 0 & M_2 & * \\ \hline 0 & 0 & M_3 \end{array}\right),$$

где $M_1 \in GL_i(q)$, $M_2 \in GL_j(q)$, $M_3 \in GL_{k-i-j}(q)$ и символом $*$ отмечены прямоугольные матрицы с произвольными элементами из поля $GF(q)$, размер которых легко усматривается. Матрицу B выберем из стабилизатора подпространства $\langle e_{d-j+1}, e_{d-j+2}, \dots, e_d \rangle$ (оно изотропно размерности j) в группе $\Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q)$. Такие стабилизаторы описаны в лемме 6.

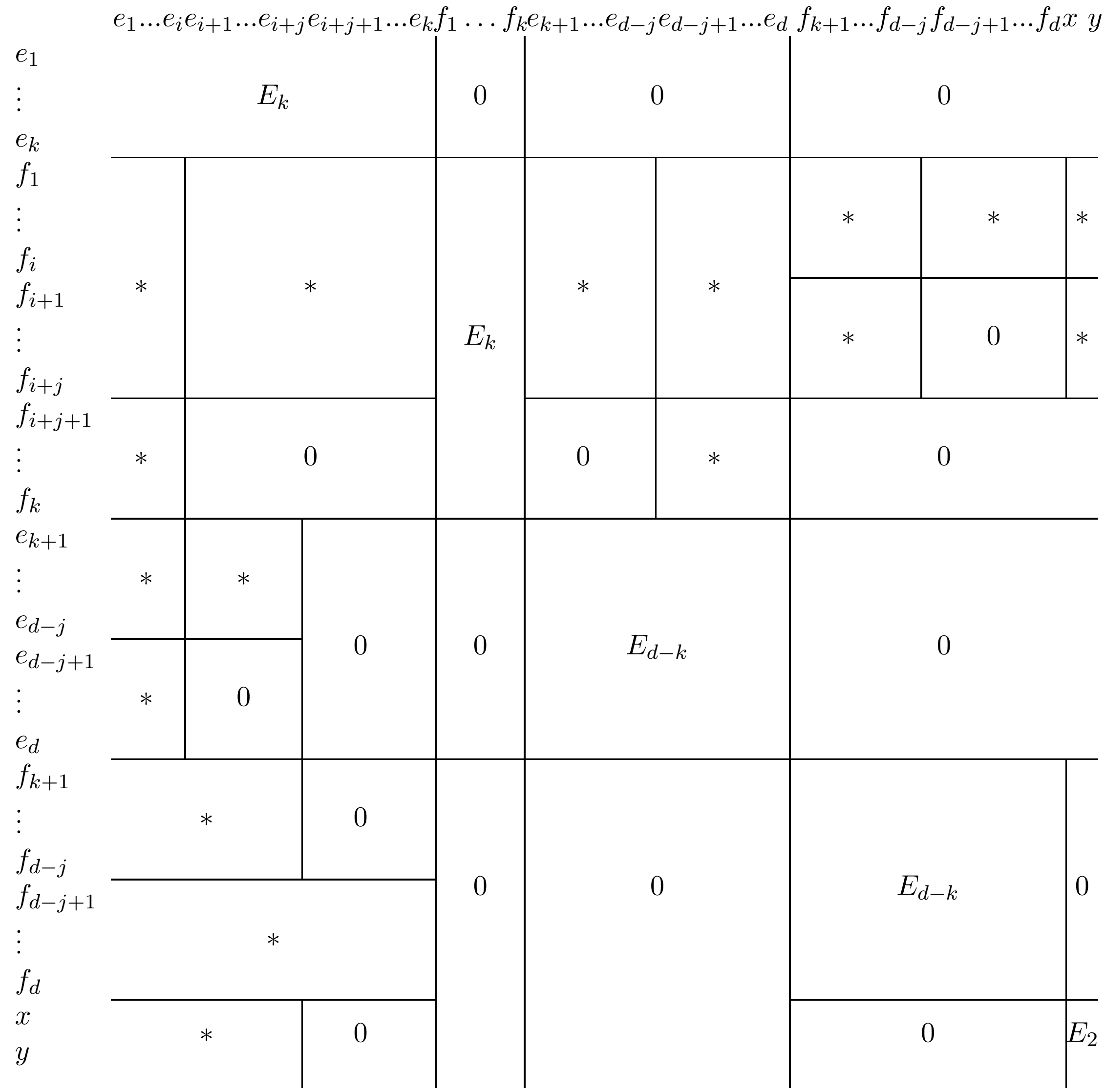


Рис. 1. Матрица из $C_{i,k-i-j,j}$.

Таким образом, при $k < m$ и четном q подгруппа $L_{i,k-i-j,j}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} M^{-1t} & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \qquad \text{где } M = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & * & * \\ \hline 0 & M_2 & * \\ \hline 0 & 0 & M_3 \end{array}\right)$$

и $M \in GL_k(q)$, а B — матрица из стабилизатора изотропного подпространства размерности j в $\Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q)$. Если же $k < m$ и q нечетно, то матрицы из подгруппы $L_{i,k-i-j,j}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} M^{-1t} & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \cdot b \cdot c^{\lambda}$$

и $M \in SL_k(q)$, B — из стабилизатора изотропного подпространства размерности j в $\Omega^{\varepsilon}_{l-2k}(q)$, диагональные матрицы b, c^{λ} указаны в доказательстве леммы 6, а для подматриц M_1, M_2, M_3 матрицы M выполняется дополнительно равенство $\det M_1 M_2 M_3 = 1$. Строение группы $L_{i,k-i-j,j}$ при $k < m$ установлено.

Пусть $k = m$. Тогда $\varepsilon = +$ и $j = 0$. Рассматриваем подпространства вида $W_{i,k-i,0} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \ldots, f_k \rangle$. Рассуждая, как в случае $m < k$, получаем, что при нечетном q подгруппа $L_{i,k-i,0}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} M^{-1t} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(\mu^{2\alpha}, 1, \ldots, 1, \mu^{-2\alpha}, 1, \ldots, 1), \qquad \text{где } M = \left(\begin{array}{c|c} M_1 & * \\ \hline 0 & M_3 \end{array}\right),$$

$M \in SL_k(q)$, $M_1 \in GL_i(q)$, $M_3 \in GL_{k-i}(q)$. При четном q и $m = k$ подгруппа $L_{i,k-i-j,j}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} M^{-1t} & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица M того же вида, что и при нечетном q, но $M \in GL_k(q)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *В обозначениях теоремы подстепени*

$$n_{i,k-i-j,j} \equiv \mid G_W : G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} \mid$$

подстановочного представления группы $G = \Omega^+(V)$ на левых смежных классах по подгруппе G_W равны

(1) *при $k < m$ и $j < m - k$*

$$q^a \cdot \frac{(q^{l/2-k} - 1) \prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{l/2-k-1} (q^{2s} - 1)}{(q^{l/2-k-j} - 1) \prod\limits_{s=1}^{i} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{j} (q^s - 1)^2 \prod\limits_{s=1}^{k-i-j} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{l/2-k-j-1} (q^{2s} - 1)},$$

(2) *при $k < m$ и $j = m - k$*

$$q^a \cdot \frac{(q^{l/2-k} - 1) \prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{l/2-k-1} (q^{2s} - 1)}{\prod\limits_{s=1}^{i} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{j} (q^s - 1)^2 \prod\limits_{s=1}^{k-i-j} (q^s - 1)},$$

(3) *при $k = m$*

$$q^b \cdot \frac{\prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1)}{\prod\limits_{s=1}^{i} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{k-i} (q^s - 1)},$$

где $a = (k - i - j)(l - k) + j^2 - (k - i - j)(k + i + j + 1)/2$, $b = (k - i)(k - i - 1)/2$.

Следствие 2. *В обозначениях теоремы подстепени*

$$n_{i,k-i-j,j} \equiv \mid G_W : G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} \mid$$

подстановочного представления группы $G = \Omega^-(V)$ на левых смежных классах по подгруппе G_W равны

$$q^a \cdot \frac{(q^{l/2-k} + 1) \prod\limits_{s=1}^{k} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{l/2-k-1} (q^{2s} - 1)}{(q^{l/2-k-j} + 1) \prod\limits_{s=1}^{i} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{j} (q^s - 1)^2 \prod\limits_{s=1}^{k-i-j} (q^s - 1) \prod\limits_{s=1}^{l/2-k-j-1} (q^{2s} - 1)},$$

где $a = (k - i - j)(l - k) + j^2 - (k - i - j)(k + i + j + 1)/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Порядок группы $C_{i,k-i-j,j}$ и строение группы $L_{i,k-i-j,j}$ указаны в теореме. Порядок подгруппы G_j из $L_{i,k-i-j,j}$ находим с помощью леммы 8. Следствие 1 и следствие 2 доказаны.

Следствие 3. *Пусть векторное пространство V над полем $GF(q)$ имеет размерность $l = 2m$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Ранг подстановочного представления группы $G = \Omega^+(V)$ на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе G_W равен $(k+1)(k+2)/2$ при $k < m/2$, $(3k-m+1)(m-k+2)/2+1$ при $m/2 \leqslant k \leqslant m-2$ и $[m/2]+1$ при $k = m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С л у ч а й 1. Пусть $k < m/2$. Тогда выполняется равенство

$$n = \sum_{j=0}^{k} \Bigl(\sum_{i=0}^{k-j} n_{i,k-i-j,j} \Bigr),$$

где через n обозначена степень рассматриваемого представления, вычисленная в лемме 9. Поэтому для доказательства в этом случае достаточно вычислить количество подпространств вида $W_{i,k-i-j,j}$, указанных в теореме. Получаем в точности $(k+1)(k+2)/2$ подпространств.

С л у ч а й 2. Пусть $k = m$. Рассмотрим изотропные подпространства вида $W_{i,k-i,0}$, $0 \leqslant i \leqslant k$, указанные в теореме. Пусть $W_{k,0,0} \in \mathcal{U}_m^1$. Тогда при четном k подпространства $W_{k,0,0}$, $W_{k-2,2,0}$,…,$W_{0,k,0}$ лежат в $\mathcal{U}_m^1$, а при нечетном k в класс $\mathcal{U}_m^1$ попадают подпространства $W_{k,0,0}$, $W_{k-2,2,0}$,…,$W_{1,k-1,0}$. Имеем подстановочное представление группы $\Omega^+(V)$ на множестве $\mathcal{U}_m^1$, образующим одну орбиту изотропных подпространств размерности m. Выполняется равенство $n = \sum_{i=0}^{[k/2]} n_{k-2i,2i,0}$. Для доказательства в этом случае достаточно вычислить количество подпространств вида $W_{k-2i,2i,0}$, $0 \leqslant i \leqslant [k/2]$, указанных в теореме. Получаем в точности $[k/2]+1$ подпространств, поэтому ранг этого представления равен $[m/2]+1$.

С л у ч а й 3. Пусть $m/2 \leqslant k \leqslant m-2$. Тогда выполняется равенство

$$n = \sum_{j=0}^{m-k-1} \Bigl(\sum_{i=0}^{k-j} n_{i,k-i-j,j} \Bigr) + \sum_{i=0}^{2k-m} 2n_{i,k-i-(m-k),m-k}.$$

Для доказательства, как и в случае 1, достаточно вычислить количество подпространств вида $W_{i,k-i-j,j}$, указанных в теореме. Есть существенное отличие от случая 1. Согласно случаю 2 при всех $j = m-k$ имеем по две подорбиты мощности $n_{i,k-i-(m-k),m-k}$.

Отметим, что стабилизатор G_W при $\dim W = m-1$ не является параболической максимальной подгруппой. Следствие доказано.

Следствие 4. *Пусть векторное пространство V над полем $GF(q)$ имеет размерность $l = 2m$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Ранг подстановочного представления группы $G = \Omega^-(V)$ на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе G_W равен $(3k-m+3)(m-k)/2$ при $k \geqslant (m-1)/2$ и $(k+1)(k+2)/2$ при $k \leqslant (m-1)/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $k \leqslant (m-1)/2$ и при $(m-1)/2 \leqslant k \leqslant m-1$ выполняются соответственно равенства

$$n = \sum_{j=0}^{k} \Bigl(\sum_{i=0}^{k-j} n_{i,k-i-j,j} \Bigr) \text{ и } n = \sum_{j=0}^{m-k-1} \Bigl(\sum_{i=0}^{k-j} n_{i,k-i-j,j} \Bigr),$$

где через n обозначена степень рассматриваемого представления, вычисленная в лемме 9. Поэтому вычисляем количество подпространств вида $W_{i,k-i-j,j}$, указанных в теореме. Следствие доказано.

Проективной ортогональной группой $P\Omega^\varepsilon(V)$ называется факторгруппа группы $\Omega^\varepsilon(V)$ по ее центру, порядок которого равен 1 или 2 (см. [18, предложение 2.9.3]). Степень, ранг и подстепени подстановочного представления группы $P\Omega^\varepsilon(V)$ по параболической максимальной подгруппе совпадают с соответствующими степенью, рангом и подстепенями подстановочного представления группы $\Omega^\varepsilon(V)$. Из строения двойного стабилизатора

$$G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = C_{i,k-i-j,j} : L_{i,k-i-j,j}$$

в группе $\Omega^\varepsilon(V)$ $(0 \leqslant i \leqslant k-j,\ 0 \leqslant j \leqslant d-k$ или $0 \leqslant j \leqslant k)$ следует, что при естественном гомоморфизме группы $\Omega^\varepsilon(V)$ на $P\Omega^\varepsilon(V)$ подгруппа $C_{i,k-i-j,j}$ отображается изоморфно, а подгруппа $L_{i,k-i-j,j}$ содержит центр группы $\Omega^\varepsilon(V)$ и поэтому отображается на свою факторгруппу по этому центру.

Посмотрим на полученные выше результаты для ортогональных групп четной размерности и $\varepsilon = +$ с точки зрения групп лиева типа. Известно, что присоединенная группа лиева типа $D_m(q)$ с диаграммой Дынкина (см. рис. 2) изоморфна ортогональной группе $P\Omega^+_{2m}(q)$.

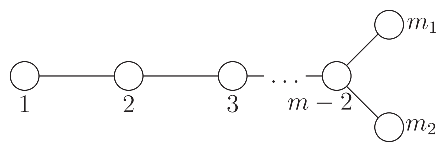


Рис. 2

Следствие 5. *Пусть P_s — параболическая максимальная подгруппа группы $D_m(q)$, полученная удалением s-й вершины диаграммы Дынкина типа D_m. Тогда ранг подстановочного представления группы $D_m(q)$ на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе P_s равен $(s+1)(s+2)/2$ при $s < m/2$, $(3s-m+1)(m-s+2)/2+1$ при $m/2 \leqslant s \leqslant m-2$ и $[m/2]+1$ при $s = m_1$ или $s = m_2$.*

Доказательство. Номер вершины s при $1 \leqslant s \leqslant m-2$ равен размерности изотропного подпространства W, и параболическая максимальная подгруппа P_s изоморфна стабилизатору этого подпространства W в группе $P\Omega^+_{2m}(q)$. Если $s = m_1$ или $s = m_2$, то параболическая максимальная подгруппа P_s изоморфна стабилизатору максимального изотропного подпространства из класса $\mathcal{U}^1_m$ или $\mathcal{U}^2_m$ соответственно. Следствие доказано.

Заметим, что подстановочные представления группы $D_m(q)$ на смежных классах по подгруппам P_{m_1} и P_{m_2} подобны, так как существует автоморфизм группы $D_m(q)$, отображающий P_{m_1} на P_{m_2}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.
2. **Васильев А.В., Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 6. С. 603–627.
3. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.
4. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа E_6, E_7 и E_8 // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 518–530.
5. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 1. С. 17–35.
6. **Гречкосеева М.А.** О минимальных подстановочных представлениях классических простых групп // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 3. С. 560–586.
7. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления группы $F_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 39–59.

8. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $E_6(q)$ и $E_7(q)$ // Комбинаторные и вычислительные методы в математике. Омск: Изд-во ОмГУ, 1999. С. 160–189.
9. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $E_8(q)$ / Челяб. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 29.10.99, № 3224–В99. 221 с.
10. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$ // Мат. заметки. 2000, Т. 67, № 1. С. 69–76.
11. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп ${}^2E_6(q)$ // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 899–912.
12. **Кораблева В.В.** Ранги примитивных параболических подстановочных представлений классических групп лиевского типа $A_l(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7. С. 188–193.
13. **Кораблева В.В.** Ранги примитивных параболических подстановочных представлений простых групп $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 340–356.
14. **Кораблева В.В.** Примитивные параболические подстановочные представления простых групп $A_l(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 70–81.
15. **Кораблева В.В.** Примитивные параболические подстановочные представления конечных специальных линейных и унитарных групп // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 114–124.
16. **Кораблева В.В.** Примитивные параболические подстановочные представления конечных симплектических групп // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 366–378.
17. **Кораблева В.В.** Примитивные параболические подстановочные представления конечных простых ортогональных групп нечетной размерности // Междунар. конф. “Мальцевские чтения”: тез. докл. Новосибирск: ИМ и НГУ, 2009. С. 62.
18. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990. 303 p.

Кораблева Вера Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Челябинский гос. ун-т
e-mail: vvk@csu.ru

Поступила 12.04.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.542

КЛАССИФИКАЦИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НЕЧЕТНОГО ИНДЕКСА В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМ ЦОКОЛЕМ[1]

Н. В. Маслова

Получена классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем.

Ключевые слова: знакопеременная группа, симметрическая группа, максимальная подгруппа, нечетный индекс.

N. V. Maslova. Classification of maximal subgroups of odd index in finite groups with alternating socle.

Classification of maximal subgroups of odd index in finite groups with alternating socle is obtained.

Keywords: alternating group, symmetric group, maximal subgroup, odd index.

1. Введение

Подгруппа конечной группы G, порожденная всеми ее минимальными неединичными нормальными подгруппами, называется *цоколем* группы G и обозначается через $soc(G)$. Конечная группа называется *почти простой*, если ее цоколь — неабелева простая группа. Известно, что конечная группа G почти проста тогда и только тогда, когда существует неабелева конечная простая группа L такая, что $L \cong Inn(L) \trianglelefteq G \leq Aut(L)$. В этом случае $L \cong Inn(L) = soc(G)$. В дальнейшем мы будем отождествлять простые группы L и $Inn(L)$.

После получения классификации конечных простых групп одной из наиболее важных проблем в теории конечных групп является изучение максимальных подгрупп почти простых групп. М. Либеком и Я. Саксломом в [1] и независимо В. Кантором в [2] было получено описание конечных примитивных групп подстановок нечетной степени. Изучение таких групп в [1, 2] во многом сведено к исследованию максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных почти простых группах. Более того, для каждой конечной почти простой группы G в [1, 2] приведены типы тех подгрупп, которые могут быть максимальными подгруппами нечетного индекса в группе G. Однако в случае, когда цоколь группы G является конечной простой классической или знакопеременной группой, не каждая подгруппа указанных типов имеет нечетный индекс в группе G. Так что классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных почти простых группах остается незавершенной.

Для случая, когда G является конечной простой классической группой, классификация максимальных подгрупп нечетного индекса группы G получена автором в [3]. Для случая, когда $soc(G)$ изоморфен одной из групп $PSL_n(q)$, $PSU_n(q)$ или $PSp_n(q)$ при $n \geq 13$, подобная классификация анонсирована автором в [4, 5]. Для случая, когда $soc(G)$ изоморфен одной из простых ортогональных групп, в [3, 6] автором получено улучшение результата Либека — Саксла и Кантора, касающееся индексов подгрупп типов, указанных в [1, 2].

Цель данной работы — получить аналогичную [3–6] классификацию максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00324) и гранта УрО РАН для молодых ученых за 2010 год (проект 80).

2. Основной результат работы

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7,8].

Наибольшая степень двойки, делящая натуральное число j, называется 2-*частью* числа j и обозначается через j_2.

В соответствии с результатами [1,2], если G имеет простой цоколь A_n и H — максимальная подгруппа нечетного индекса в G, то либо H — подгруппа вида $(S_m \times S_{n-m}) \cap G$ $(1 \leq m < n/2)$, либо H — подгруппа вида $(S_m \wr S_t) \cap G$ $(n = mt,\ m > 1,\ t > 1)$, либо $G \cong A_7$ и $H \cong PSL_2(7)$.

Известны следующие изоморфизмы конечных простых групп: $A_5 \cong PSL_2(4) \cong PSL_2(5)$, $A_6 \cong PSL_2(9)$ и $A_8 \cong PSL_4(2)$. Также хорошо известно, что другие знакопеременные группы не изоморфны никаким простым группам другого типа. Заметим, что в силу указанных изоморфизмов некоторые максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах со знакопеременным цоколем рассмотрены в [1, 2] как подгруппы почти простых групп других типов. Например, действие A_8 на 15 точках представлено в списке возможных примитивных подстановочных действий почти простых групп на множествах нечетных мощностей как действие $SL_4(2)$.

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех последовательностей $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, где $x_i \in \{0, 1\}$ для всех i и число ненулевых компонент конечно. Введем на $\mathcal{M}$ порядок $\geq$, считая $1 \geq 0$, а для $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ полагая $u \geq v$ тогда и только тогда, когда $u_i \geq v_i$ для всех i. Через ψ обозначим функцию, которая ставит в соответствие каждому целому неотрицательному числу s последовательность $(s_0, s_1, \ldots, s_k, \ldots)$ из $\mathcal{M}$ такую, что $\overline{s_k s_{k-1} \ldots s_0}$ — запись числа s в двоичной системе счисления и $s_n = 0$ для всех $n > k$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть G — конечная группа, $soc(G) \cong A_n$, $n \geq 5$. Подгруппа H является максимальной подгруппой нечетного индекса в G тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $G \leq S_n$, H *— подгруппа вида* $(S_m \times S_{n-m}) \cap G$, *где* $1 \leq m < n/2$ *и* $\psi(n) \geq \psi(m)$;

(2) $G \leq S_n$, H *— подгруппа вида* $(S_m \wr S_t) \cap G$, *где* $n = mt$, $t > 1$ *и* $m = 2^w \geq 2$, *за исключением случая, когда* $H \cong (S_2 \wr S_4) \cap A_8 \cong 2^3 : S_4 < 2^3 : PSL_3(2) < A_8 \cong G$;

(3) $G \cong A_7$ *и* $H \cong PSL_2(7)$;

(4) $G \leq Aut(A_6)$, $G \not\leq S_6$ *и* $H \in Syl_2(G)$;

(5) $G \cong A_8$ *и* $H \cong 2^3 : PSL_3(2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду [6] можно считать, что $n \geq 9$. Поэтому $A_n \trianglelefteq G \leq S_n$.

Пусть H — подгруппа вида $(S_m \times S_{n-m}) \cap G$, где $1 \leq m < n/2$.

Если $G = S_n$, то в соответствии с [9] подгруппа H всегда будет максимальной подгруппой в G. Так как $|S_n| = n!$, имеем

$$|G : H| = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \binom{n}{m}.$$

По [3, лемма 3] биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$ является нечетным числом тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$.

Если $G = A_n$, то ввиду [9] подгруппа H также всегда максимальна в G. Поскольку $A_n \trianglelefteq S_n$, произведение подгрупп $A_n \cdot (S_m \times S_{n-m})$ является подгруппой в S_n, строго содержащей максимальную в S_n подгруппу $S_m \times S_{n-m}$. Поэтому $A_n \cdot (S_m \times S_{n-m}) = S_n$, откуда по соответствующей теореме о гомоморфизме получаем, что $|A_n : (S_m \times S_{n-m}) \cap A_n| = |S_n : (S_m \times S_{n-m})|$. Как уже было отмечено выше, этот индекс будет нечетен тогда и только тогда, когда $\psi(n) \geq \psi(m)$.

Пусть H — подгруппа вида $(S_m \wr S_t) \cap G$, где $n = mt$, $m > 1$ и $t > 1$.

Если $G = S_n$, то в соответствии с [9] подгруппа H всегда будет максимальной подгруппой в G. Так как $|S_n| = n!$, то имеем

$$|G : H| = \frac{n!}{(m!)^t \cdot t!}.$$

Пусть $\{G_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}_{i=1}^{\infty}$ — набор функций таких, что G_i ставит в соответствие каждому натуральному числу n его неполное частное $[n/2^i]$ при делении на 2^i. Тогда $(k!)_2 = 2^{\sum_{i=1}^{\infty} G_i(k)}$. Поэтому

$$|G : H|_2 = 2^{\sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i(m)}.$$

По [3, лемма 5] имеем $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(mt) - \sum_{i=1}^{\infty} G_i(t) - t \sum_{i=1}^{\infty} G_i(m) = 0$ тогда и только тогда, когда $m = 2^w$ для некоторого целого неотрицательного числа w. Но $m > 1$, поэтому w — натуральное число.

Если $G = A_n$, то в соответствии с [9] подгруппа H является максимальной подгруппой в G всегда, за исключением случая, когда $G = A_8$ и $H \cong 2^3.S_4$. Как и раньше, из того, что $A_n \trianglelefteq S_n$ и подгруппа вида $S_m \wr S_t$, где $n = mt$, $m > 1$ и $t > 1$, всегда максимальна в S_n, получаем, что $A_n \cdot (S_m \wr S_t) = S_n$ и $|A_n : (S_m \wr S_t) \cap A_n| = |S_n : (S_m \wr S_t)|$. Как уже было отмечено выше, этот индекс будет нечетен тогда и только тогда, когда $m = 2^w$, где w — натуральное число. Теорема доказана.

Автор благодарит В. Д. Мазурова за ценные замечания, послужившие постановке задачи для знакопеременного цоколя, и А. С. Кондратьева за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
2. **Kantor W.M.** Primitive permutation groups of odd degree, and an application to the finite projective planes // J. Algebra. 1987. Vol. 106, no. 1. P. 15–45.
3. **Маслова Н. В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Том 14, № 4. С. 100–118.
4. **Маслова Н. В.** Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым линейным или унитарным цоколем степени не менее 13 // Тр. Междунар. алгебр. конф. “Алгебра и ее приложения”. Нальчик: Кабардино-Балкарский ун-т, 2009. С. 80–82.
5. **Маслова Н.В.** Максимальные подгруппы нечетного индекса в конечных группах с простым симплектическим цоколем степени не менее 13 // Тез. докл. Междунар. конф. “Мальцевские чтения”. Новосибирск: ИМ и НГУ, 2009. С. 69.
6. **Маслова Н. В.** О максимальных подгруппах нечетного индекса в конечных группах с простым ортогональным цоколем // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. 41-й Всерос. молодеж. конф. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2010. С. 48–52 .
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
9. **Liebeck M.W., Praeger C.E., Saxl J.** A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383.

Маслова Наталья Владимировна
старший математик
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: butterson@mail.ru

Поступила 24.05.2010

Том 16 № 3 2010

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (76,35,18,14)[1]

А. А. Махнев, А. А. Токбаева

Выяснено строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов простых порядков сильно регулярного графа с параметрами $(76, 35, 18, 14)$

Ключевые слова: сильно регулярный граф, автоморфизм графа.

A. A. Makhnev, A. A. Tokbaeva. On automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(76, 35, 18, 14)$.

The structure of the fixed point subgraphs of prime-order automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(76, 35, 18, 14)$ is found.

Keywords: strongly regular graph, automorphism of graph.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство графов. Граф Γ называется локально $\mathcal{F}$-графом, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (соотв. $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (соотв. $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Через $K_{m_1,\dots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m \times n$-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин, а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Частичной геометрией $pG_\alpha(s, t)$ называется система инцидентности, состоящая из точек и прямых, в которой каждая прямая содержит $s+1$ точку, каждая точка лежит на $t+1$ прямой (две прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00009).

прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Если $\alpha = t$, то геометрия называется *сетью. Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на одной прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Любой сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых α, s, t называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

В [1, теорема 2] найдены параметры сильно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графами для $pG_x(2x,t)$, где $x \le 3$. В случае $x = 2$ граф имеет параметры $(210, 95, 40, 45)$, и возможные автоморфизмы такого графа изучались в [2]. В случае $x = 3$ имеется много возможностей для параметров графа. Но если $t = 2$, то возможны лишь параметры (64,35,18,20) или (76,35,18,14). В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (76,35,18,14) и определены подграфы их неподвижных точек. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u, u^g) таких, что $d(u,u^g) = i$.

Теорема. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(76,35,18,14)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда верно одно из утверждений*:

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) \in \{8,28,48,68\}$ *или* $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 38$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) \in \{25,75\}$, *либо* $p = 2$ *и* $n \in \{4,6,8,10\}$;

(3) Ω *является* 6*-кокликой,* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 70$ *и любая вершина из* $\Gamma - \Omega$ *смежна точно с* 3 *вершинами из* Ω;

(4) Ω *является объединением* m *изолированных клик порядков* $n_1, \dots, n_m$, $m \ge 2$, $p = 2$ *и любое число* n_i *четно*;

(5) Ω *содержит* 2*-лапу,* $p = 3$ *и либо*

  (*i*) Ω *— четырехугольник и* $\alpha_1(g) \in \{6,36,66\}$, *либо*

  (*ii*) $|\Omega| = 10$, $\alpha_1(g) \in \{18,48\}$ *и* Ω *является* $K_{5\times 2}$*-подграфом или* 5×2*-решеткой, либо*

  (*iii*) $|\Omega| = 13$ *и* $\alpha_1(g) \in \{9,39\}$, *либо*

  (*iv*) $|\Omega| = 16$ *и* $\alpha_1(g) \in \{0,30,60\}$;

(6) Ω *содержит* 2*-лапу,* $p = 3$ *и либо*

  (*i*) Ω *— прямая сумма* 2*-коклики и* $2K_2$, $\alpha_1(g) \in \{10,30,50,70\}$, *либо*

  (*ii*) $|\Omega| \in \{8,10,\dots,32\}$, *либо*

  (*iii*) $|\Omega| = 36$ *и* $\alpha_1(g) = 40$.

2. Предварительные результаты

В этом раделе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 2.1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \le d - \frac{w(k-d)}{v-w} \le r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение хорошо известно (см., например, [3, § 2]).

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(76,35,18,14)$ и неглавными собственными значениями $7, -3$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ

степени d на w вершинах, то

$$-3 \le d - \frac{w(35-d)}{76-w} \le 7.$$

Поэтому число вершин в коклике (клике) не больше 6 (не больше 8). Если C является 6-кокликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с 3 вершинами из C. Если L является 8-кликой из Γ, то любая вершина из $\Gamma - L$ смежна точно с 4 вершинами из L.

Лемма 2.2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ). Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - m$, $-m$ графа Γ — целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ и кратность $n - m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m — целое число, большее 1, то $m - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1}, \; n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Это [4, лемма 3.1].

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \{R_0, \ldots, R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v - f - 1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$-инвариантных подпространств $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2.3. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(76, 35, 18, 14)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g \in G$ и χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 19. Тогда $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 38)/10$.*

Доказательство. Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(76, 35, 18, 14)$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n - m = 7$ и $-m = -3$ кратностей 19 и 56,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 7 & -3 \\ 40 & -8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 19 & 19/5 & -19/5 \\ 56 & -24/5 & 14/5 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 19, равно $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/5 - \alpha_2(g)/5)/4$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 38)/10$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), Δ *— индуцированный подграф с* N *вершинами,* M *ребрами и степенями вершин* $d_1,\dots,d_N$*. Тогда*

$$(v-N)-(kN-2M)+\left(\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}\right)=x_0+\sum_{i=3}^{N}\binom{i-1}{2}x_i,$$

где $x_i=x_i(\Delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитав число вершин в $\Gamma-\Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma-\Delta$, и число троек вида $(a,\{b,c\})$, где $a\in\Gamma-\Delta, b,c\in\Delta\cap[a]$, получим равенства:

$v-N=\sum x_i$,

$kN-2M=\sum ix_i$ и

$\lambda M+\mu\left(\binom{N}{2}-M\right)-\sum_{i=1}^{N}\binom{d_i}{2}=\sum\binom{i}{2}x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом,* g *— автоморфизм графа* Γ *простого порядка* p *и* χ *— характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* m *собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого* l*, не кратного* p *и* $m-\chi(g)$ *делится на* p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 3 и предложения 2 [6], примененного к циклической группе $\langle g\rangle$, следует, что $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и система уравнений

$$\begin{cases} n_1+(p-1)n_2=m,\\ n_1-n_2=\chi(g)\end{cases}$$

имеет решение в неотрицательных целых числах. Вычитая из первого уравнения второе, получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(76,35,18,14)$, U *— трехвершинный подграф из* Γ, Y_i *— множество вершин из* $\Gamma-U$*, смежных точно с* i *вершинами из* U, $y_i=|Y_i|$*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $y_0+y_3=10$*, если* U *является кокликой;*

(2) $y_0+y_3=25$*, если* U *является кликой;*

(3) y_0+y_3 *равно* 21*, если* U *является* 2*-путем, равно* 16*, если* U *является объединением изолированной вершины и ребра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для двух несмежных вершин u,w граф Γ содержит 14 вершин из $[u]\cap[w]$, по 21 вершин из $[u]-[w]$, $[w]-[u]$ и 18 вершин из $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(14-y_3)$ вершин из Y_2, $3(y_3+7)$ вершин из Y_1 и $10-y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0+y_3=10$. Аналогично доказывается, что $y_0+y_3=25$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1u_2u_3$, то Y_2 содержит $13-y_3$ вершин из $[u_1]\cap[u_3]$, и по $18-y_3$ вершин из $[u_1]\cap[u_2]$, $[u_2]\cap[u_3]$, Y_1 содержит по y_3+3 вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, и y_3-3 вершин из $[u_2]$, и Y_0 содержит $21-y_3$ вершин, поэтому $y_0+y_3=21$.

Если U является объединением изолированной вершины u_1 и ребра $\{u_2,u_3\}$, то Y_2 содержит $18-y_3$ вершин из $[u_2]\cap[u_3]$, и по $14-y_3$ вершин из $[u_1]\cap[u_2]$, $[u_1]\cap[u_3]$, Y_1 содержит по y_3+2 вершин из $[u_2]$, $[u_3]$, и y_3+7 вершин из $[u_2]$, и Y_0 содержит $16-y_3$ вершин, поэтому $y_0+y_3=16$. Лемма доказана.

3. Автоморфизмы графа с параметрами (76,35,18,14)

В этом разделе Γ — сильно регулярный граф с параметрами (76,35,18,14), g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Γ содержит полный двудольный подграф $\Delta = K_{m,n}$, то наименьшее собственное значение графа Δ равно $-\sqrt{mn}$ и не меньше -3, поэтому $mn \le 9$. В частности, Γ не содержит $K_{2,5}$-подграфов.

Лемма 3.1. *Если Ω — пустой граф, то выполняется одно из утверждений*:
(1) $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) \in \{8, 28, 48, 68\}$*;*
(2) $p = 19$ *и* $\alpha_1(g) = 38$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $76 = 4 \cdot 19$, то $p \in \{2, 19\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 38)/10$, поэтому $\alpha_1(g) = 10w + 38$. По лемме 2.5 число $19 - \chi_1(g)$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) \in \{8, 28, 48, 68\}$.

Пусть $p = 19$. Тогда $\alpha_1(g) = 19w$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 10 делит $w - 2$, откуда $w = 2$ и $\alpha_1(g) = 38$. Лемма доказана.

В леммах 3.2–3.9 предполагается, что g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит вершину a. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 3.2. *Пусть Ω является n-кликой. Тогда выполняется одно из утверждений*:
(1) $n = 1$*,* $p = 5$ *и* $\alpha_1(g)$ *— нечетное число, кратное* 5;
(2) *если* $n \ge 2$*, то* $p = 2$ *и либо*

(*i*) $n = 4$*,* $\alpha_1(g) \in \{16, 36, 56\}$*,* $x_0 = 16, x_2 = 48, x_4 = 8$ *и если вершина из* X_0 *смежна с* y_i *вершинами из* X_i*, то* $y_0 = 7 + y_4$*,* $y_2 = 28 - 2y_4$*, либо*

(*ii*) $n = 6$*,* $\alpha_1(g) \in \{10, 30, 50, 70\}$*,* $x_0 = 10 - x_6$*,* $x_2 = 30 + 3x_6$*,* $x_4 = 30 - 3x_6$*, и если вершина из* X_0 *смежна с* y_i *вершинами из* X_i*, то* $y_0 = y_4 + 2y_6 - 7$ *и* $y_2 = 42 - 2y_4 - 3y_6$;

(*iii*) $n = 8$*,* $\alpha_1(g) \in \{4, 24, 44, 64\}$*,* $x_0 = 12 - x_6 - 3x_8$*,* $x_2 = 3x_6 + 8x_8$*,* $x_4 = 56 - 3x_6 - 6x_8$;

(*iv*) $n = 10$*,* $\alpha_1(g) \in \{18, 38, 58\}$*,* $x_0 = 16 - x_6 - 3x_8 - 6x_{10}$*,* $x_2 = 3x_6 + 8x_8 + 15x_{10} - 30$*,* $x_4 = 80 - 3x_6 - 6x_8 - 10x_{10}$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитав число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, а также число треугольников с основанием в Ω и вершиной в $\Gamma - \Omega$, получим равенства

$$\sum x_i = 76 - n, \quad \sum i x_i = n(36 - n), \quad \sum \binom{i}{2} x_i = \binom{n}{2}(20 - n).$$

Ввиду границы Хофмана для клик имеем $n \le 11$.

Пусть $n = 1$. Тогда p делит 35 и 40, поэтому $p = 5$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ — нечетное число, кратное 5. По лемме 2.5 число $19 - \chi_1(g)$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) \in \{25, 75\}$.

Пусть $n \ge 2$. Тогда p делит $k - \lambda - 1 = 16$, поэтому $p = 2$ и $x_i = 0$ для нечетного i. Если $n \ge 3$ нечетно, то p делит $35 - (n - 1)$, противоречие.

Пусть $n = 2$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 32$ делится на 10. Далее, $x_0 = 24, x_1 = 32, x_2 = 18$, противоречие.

Пусть $n = 4$. Из леммы 2.5 следует, что число $(\alpha_1(g) - 26)/10$ нечетно. Далее, $x_0 + x_2 + x_4 = 72$, $x_2 + 2x_4 = 64$, $x_2 + 6x_4 = 96$, поэтому $x_2 = 96 - 6x_4 = 64 - 2x_4$, $x_4 = 8$, $x_0 = 16$, $x_2 = 48$. Если вершина из X_0 смежна с y_i вершинами из X_i, то $y_0 + y_2 + y_4 = 35$, $2y_2 + 4y_4 = 56$, поэтому $y_0 = 7 + y_4$, $y_2 = 28 - 2y_4$.

Пусть $n = 6$. Из леммы 2.5 следует, что число $(\alpha_1(g) - 20)/10$ нечетно. Далее, $x_0 + x_2 + x_4 + x_6 = 70$, $x_2 + 2x_4 + 3x_6 = 90$, $x_2 + 6x_4 + 15x_6 = 210$, поэтому $x_2 = 210 - 6x_4 - 15x_6 = 90 - 2x_4 - 3x_6$, $x_4 = 30 - 3x_6$, $x_0 = 10 - x_6$, $x_2 = 30 + 3x_6$. Если вершина из X_0 смежна с y_i вершинами из X_i, то $y_0 + y_2 + y_4 + y_6 = 35$, $y_2 = 42 - 2y_4 - 3y_6$ и $y_0 = y_4 + 2y_6 - 7$.

Пусть $n=8$. Из леммы 2.5 следует, что число $(\alpha_1(g)-14)/10$ нечетно. Далее, $x_0+x_2+x_4+x_6+x_8=68$, $x_2+2x_4+3x_6+4x_8=112$, $x_2+6x_4+15x_6+28x_8=336$, поэтому $x_2=3x_6+8x_8$, $x_4=56-3x_6-6x_8$, $x_0=12-x_6-3x_8$.

Пусть $n=10$. Из леммы 2.5 следует, что число $(\alpha_1(g)-8)/10$ нечетно. Далее, $x_0+x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}=66$, $x_2+2x_4+3x_6+4x_8+5x_{10}=130$, $x_2+6x_4+15x_6+28x_8+45x_{10}=450$, поэтому $x_2=3x_6+8x_8+15x_{10}-30$, $x_4=80-3x_6-6x_8-10x_{10}$, $x_0=16-x_6-3x_8-6x_{10}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть Ω является m-кокликой, $(m\geq 2)$. Тогда $m=6$, $p=7$, $\alpha_1(g)=70$ и любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна точно с 3 вершинами из Ω.*

Доказательство. Для различных вершин $a,b\in\Omega$ элемент g действует полурегулярно на $[a]\cap[b]$, $[a]-b^{\perp}$ и на $\Gamma_2(a)\cap\Gamma_2(b)-\Omega$, поэтому p делит $14, 21$ и $18-(m-2)$. Отсюда $p=7$, $20-m$ делится на 7 и $m=6$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 10. Ввиду границы Хофмана для коклик любая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна точно с 3 вершинами из Ω.

Если $\alpha_1(g)=0$, то Γ содержит $K_{3,7}$-подграф, противоречие. Поэтому $\alpha_1(g)=70$ и любая $\langle g\rangle$-орбита длины 7 является кликой.

Лемма 3.4. *Если Ω является объединением m $(m\geq 2)$ изолированных клик порядков $n_1,\dots,n_m$ и $n_1\geq 2$, то $p=2$ и любое число n_i четно.*

Доказательство. Пусть $n_1\geq 2$ и a,b — смежные вершины из n_1-клики, лежащей в Ω. Так как g действует полурегулярно на $[a]-b^{\perp}$ и на $[a]\cap[b]-\Omega$, то p делит 16 и $18-(n_1-2)$, поэтому $p=2$ и любое число n_i четно.

Лемма 3.5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $x\in\Omega, u\in\Gamma-(\Omega\cup[x])$ и $[x]\cap[u]$ содержится в Ω, то $p=2$ и вершины u,u^g смежны;*

(2) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v',k',18,14)$ и $p\leq 17$;*

(3) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v',k',18,14-p)$ или $(v',k',18-p,14)$.*

Доказательство. Пусть $x\in\Omega$ и $u\in\Gamma-(\Omega\cup[x])$. Если $[x]\cap[u]\subset\Omega$, то $|\Omega\cap[u]|\geq 14$. Если $u^{\langle g\rangle}$ не является кликой, то $|\Omega\cap[u]|=|\Omega\cap[u^{g^i}]|=14$ для двух несмежных вершин u,u^{g^i} и $[u]\cap\Omega=[u^{g^i}]\cap\Omega=[u]\cap[x]$. Заметим, что $|\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^{g^i})|=18$ и степень x в графе $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(u^g)$ равна 21, противоречие.

Значит, $u^{\langle g\rangle}$ является кликой, и $[u]\cap[u^g]$ содержит 14 вершин из Ω и $p-2$ вершин из $u^{\langle g\rangle}$, поэтому $p\leq 5$. Пусть $p=5$. Тогда для любого ребра $\{y_1,y_2\}$ из $[u]\cap[x]$ подграф $\{x,y_1,y_2\}\cup u^{\langle g\rangle}$ является 8-кликой, причем любая вершина из $[u]\cap[x]-\{y_1,y_2\}$ смежна по крайней мере с 6 вершинами этой 8-клики, противоречие.

Пусть $p=3$, Y_i — множество вершин из $\Gamma-u^{\langle g\rangle}$, смежных точно с i вершинами из $u^{\langle g\rangle}$, $y_i=|Y_i|$. Тогда $y_2=3(17-y_3)=51-3y_3$, $y_1=3(y_3-1)=3y_3-3$ и $y_0=73-y_1-y_2-y_3=25-y_3$. Поэтому либо $y_3=14, y_1=39, y_2=9, y_0=11$, либо $y_3=17, y_1=48, y_2=0, y_0=8$. Противоречие с тем, что $[x]$ содержит 21 вершину из Y_0. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',18,14)$. Тогда $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k'-\mu)=4k'-40$ и 14 делит $k'(k'-19)$. Поэтому $k'=26$ и $n=8$. Но в этом случае Ω имеет параметры $(40,26,18,14)$ и собственные значения 6 и -2. Противоречие с тем, что кратность 6 равна $26\cdot 28/(8\cdot 14)$.

Допустим, что $p\geq 19$. Тогда $\lambda_\Omega=18$, $\mu_\Omega=14$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',18,14)$, противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',18,14-p)$. Тогда $n^2=(\lambda-\mu)^2+4(k'-\mu)=4k'+p^2+12p-40$ и $14-p$ делит $k'(k'-19)$.

В случае $p = 13$ имеем $\mu' = 1$ и $k' = 19$, противоречие.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' + 213$ и $20 \le (n^2 - 213)/4 \le 34$, n нечетно, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' + 93$ и $20 \le (n^2 - 93)/4 \le 34$, n нечетно. Тогда $n = 15$, $k' = 33$ и Ω имеет собственное значение -2, противоречие.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' + 45$ и $20 \le (n^2 - 45)/4 \le 34$, n нечетно. Тогда $n = 13$, $k' = 31$ и $31 \cdot 12$ не делится на 9, противоречие.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' + 5$, 11 делит $k'(k' - 19)$ и $(n^2 - 5)/4 \le 34$, n нечетно. Тогда $n = 9$, $k' = 19$, противоречие.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' - 12$ и $20 \le (n^2 + 12)/4 \le 34$, n четно. Тогда $n = 10$, $k' = 28$ и Ω имеет собственное значение -2, противоречие.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18 - p, 14)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 + 8p - 40$ и 14 делит $k'(k' - 19 + p)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a\times b}$. Тогда $(a - 1)b = 14$ и $(a - 2)b = 18 - p$, поэтому $b = p - 4$ делит 14. Отсюда $p = 11$ и $\Omega = K_{3\times 11}$, противоречие с утверждением (1).

В случае $p = 17$ имеем $n^2 = 4k' + 285$, 14 делит $k'(k' - 2)$ и $15 \le (n^2 - 285)/4 \le 34$, поэтому $n = k' = 19$, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $n^2 = 4k' + 233$, 14 делит $k'(k' - 6)$ и $15 \le (n^2 - 233)/4 \le 34$, поэтому $n = 19, k' = 32$, противоречие.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' + 169$, 14 делит $k'(k' - 8)$ и $15 \le (n^2 - 169)/4 \le 34$, поэтому $n = 17, k' = 30$, противоречие.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' + 65$, 14 делит $k'(k' - 12)$ и $15 \le (n^2 - 65)/4 \le 34$, поэтому $n = 13, k' = 26$, Ω имеет параметры $(53, 26, 11, 14)$ и $vk\lambda$ не делится на 3, противоречие.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' + 25$, 14 делит $k'(k' - 14)$ и $15 \le (n^2 - 25)/4 \le 34$, поэтому $n = 11, k' = 24$, противоречие.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' - 7$, 14 делит $k'(k' - 16)$ и $15 \le (n^2 + 7)/4 \le 34$, поэтому $n = 11, k' = 32$ или $n = 9, k' = 22$. В любом случае имеем противоречие.

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' - 20$, 14 делит $k'(k' - 17)$ и $15 \le (n^2 + 20)/4 \le 34$, поэтому $n = 10, k' = 30$ или $n = 8, k' = 21$. В первом случае имеем противоречие, а во втором Ω имеет параметры $(28, 21, 16, 14)$, противоречие с тем, что $\bar{\Omega}$ имеет параметры $(28, 6, -2, 2)$.

Итак, Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 18 - p, 14)$. Лемма доказана.

Пусть $u \in \Gamma - \Omega$. Отметим следующее свойство:

$(*)$ если u смежна с u^g, то $|\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp| = 24$ и $|\Omega|$ не больше 42; если же u не смежна с u^g, то $|\Gamma - (u^\perp \cup (u^g)^\perp)| = 18$ и $|\Omega|$ не больше 32.

Лемма 3.6. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $p \ne 17$ *и* $p \ne 13$;

(2) $p \ne 11$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 17$. Тогда для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 14 вершин, а любое ребро графа Ω лежит в 18 или в 1 треугольнике из Ω. Заметим, что вершина из Ω смежна с 17 вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому Ω — регулярный граф степени 18. Отсюда Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', 18, 1, 14)$, противоречие с леммой 3.5.

Пусть $p = 13$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 5 или 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 1 или 14 вершин. Далее, $|\Gamma - \Omega| = 13t$, $1 \le t \le 5$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 13 или 26 вершинами из $\Gamma - \Omega$, поэтому ее степень в Ω равна 22 или 9 соответственно. Если вершина a имеет степень 9 в Ω, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 5 на 9 вершинах, противоречие. Таким образом, Ω — регулярный граф степени 22. С другой стороны, вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с 14 вершинами из Ω.

Ввиду леммы 2.6 имеем $|\Omega| = 24$ и Ω — полный многодольный граф с долями порядка 2. Противоречие с тем, что тогда $\lambda_\Omega = 20$.

Пусть $p = 11$. Тогда для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 3 или 14 вершин, а для смежных вершин $a, c \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(c)$ содержит 7 или 18 вершин. Заметим, что вершина из Ω смежна с 11 или 22 вершинами из $\Gamma - \Omega$ и ее степень в Ω равна 24 или 13 соответственно. Ввиду леммы 2.6 имеем $|\Omega| \leq 25$. Отсюда $|\Omega| = 21$, и Ω — регулярный граф степени 13 на 21 вершине, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Если $p = 7$, то Ω является кокликой, а если $p = 5$, то $|\Omega| = 1$.*

Доказательство. Пусть $p = 7$ и Ω не является кокликой. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 4, 11 или в 18 треугольниках из Ω, а для двух несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 0, 7 или 14 вершин. По лемме 2.6 имеем $|\Omega| \leq 25$.

Пусть $|\Omega| = 13$. Тогда степень каждой вершины в Ω равна 0 или 7. Противоречие с тем, что неодновершинная связная компонента графа Ω является полным многодольным графом, и $|\Omega| \geq 14$. Итак, $|\Omega| = 20$ и любая вершина из Ω смежна с 0, 7 или 14 вершинами из Ω. Из леммы 1.5 следует, что число $(\alpha_1(g) + 22)/10$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 28$. Допустим, что степень вершины a в Ω равна 14. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше 28. Если a —- единственная вершина в Ω степени 14, то $\Omega_2(a)$ является 4-кокликой, каждая вершина которой смежна с 7 вершинами из $\Omega(a)$. В этом случае $\Omega_2(a)$ содержит две пары вершин b_1, b_2 и e_1, e_2, смежных с общими семерками вершин из $\Omega(a)$. Если вершина $c \in \Omega(a) \cap [b_1]$ смежна с вершиной $d \in \Omega(a) \cap [e_1]$, то $[d] \cap [b_1]$ содержит 7 вершин из Ω. Тогда $\Omega(a) \cap [c]$ содержит 7 вершин из $\Omega(e_1)$ и 4 вершины из $\Omega(b_1)$. Аналогично, $\Omega(a) \cap [d]$ содержит 4 вершины из $\Omega(e_1)$, противоречие с тем, что $|\Omega(c) \cap [d]| = 9$. Итак, между $\Omega(a) \cap [b_1]$ и $\Omega(a) \cap [e_1]$ нет ребер. Противоречие с тем, что для $c \in \Omega(a) \cap [b_1]$ и $d \in \Omega(a) \cap [e_1]$ подграф $[c] \cap [d]$ содержит единственную вершину из Ω.

Итак, либо $\Omega_2(a)$ содержит вершину степени 14 и 2 вершины, смежные с непересекающимися семерками вершин из $\Omega(a)$, либо $\Omega_2(a)$ содержит точно две вершины d, e степени 14. В первом случае получим противоречие как и в предыдущем абзаце. Во втором случае степень каждой вершины в $\Omega(a)$ равна 4 или 11, каждое ребро графа $\Omega(a)$ лежит в одном или восьми треугольниках из $\Omega(a)$, и для любых двух несмежных вершин из $\Omega(a)$ пересечение их окрестностей содержит 4 или 11 вершин из $\Omega(a)$.

Если $\Omega(a)$ не является регулярным графом степени 4, то $\Omega(a)$ содержит две вершины c, d степени 11 и единственную вершину f вне $c^\perp \cup d^\perp$. Теперь вершины из $\Omega(a) - \{c, d\}$ имеют степень 4 в $\Omega(a)$, поэтому $\Omega(a) \cap [f]$ содержит вершины p_1, p_2, смежные с вершиной $r \in \Omega(a) - \{c, d, f\}$ и вершины q_1, q_2, смежные с вершиной $s \in \Omega(a) - \{c, d, f, r\}$. Отсюда $\Omega(a) - \{c, d, f, p_1, p_2, r, q_1, q_2, s\}$ является пятиугольником. Противоречие с тем, что для двух несмежных вершин из этого пятиугольника пересечение их окрестностей содержит ровно 3 вершины из $\Omega(a)$.

Итак, $\Omega(a)$ является регулярным графом степени 4. Так как $\mu(\Omega(a)) = 4$, то $\Omega(a)$ — полный многодольный граф, противоречие.

Таким образом, степень каждой вершины в графе Ω равна 0 или 7. Отсюда нетривиальная связная компонента графа Ω — вполне регулярный граф с параметрами $\lambda' = 4$ и $\mu' = 7$. Противоречие с тем, что указанная связная компонента является полным двудольным графом.

Пусть $p = 5$ и $|\Omega| \neq 1$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 3, 8, 13 или в 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 4, 9 или 14 вершин. Если $\alpha_2(g) = 0$, то все $\langle g \rangle$-орбиты кликовые и по лемме 2.6 имеем $|\Omega| \leq 23$. Далее, $\chi_1(g) = (2\alpha_0(g) + 38)/10$ и ввиду леммы 2.5 число $(152 - 2\alpha_0(g))/10$ делится на 5, противоречие.

Значит, $\alpha_2(g) \neq 0$ и по лемме 2.6 имеем $|\Omega| \leq 16$. Заметим, что вершина из Ω смежна с 5, 10, 15, 20 или 25 вершинами из $\Gamma - \Omega$ (если вершина из Ω смежна с 30 вершинами из $\Gamma - \Omega$, то ее окрестность является регулярным графом степени 3 на 5 вершинах, противоречие). Поэтому степень вершины в Ω равна 10 или 15. Итак, $|\Omega| = 16$ и $18 - \alpha_1(g)/10$ делится на 5. Отсюда $\alpha_1(g) = 30$ и все $\langle g \rangle$-орбиты длины 5 являются пятиугольниками.

Если Ω содержит две вершины a, c степени 15, то $|\Omega(a) \cap [c]| = 14$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 10. Далее, $\lambda_\Omega = 8$, иначе $|\Omega(a) \cap [c]| = 3$ для смежных вершин a, c и $|\Omega| \geq 17$, противоречие. Таким образом, Ω — реберно регулярный граф с параметрами (16,10,8), противоречие с тем, что $16 \cdot 10 \cdot 8$ не делится на 3. Лемма доказана.

Лемма 3.8. *Если $p = 3$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) Ω — *четырехугольник, и* $\alpha_1(g) \in \{6, 36, 66\}$;

(2) $|\Omega| = 10$, $\alpha_1(g) \in \{18, 48\}$, *и Ω является $K_{5\times2}$-подграфом или 5×2-решеткой*;

(3) $|\Omega| = 13$, *и* $\alpha_1(g) \in \{9, 39\}$;

(4) $|\Omega| = 16$, *и* $\alpha_1(g) \in \{0, 30, 60\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 3$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в $3t$ треугольниках, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит 2, 5, 8, 11 или 14 вершин. Далее, ввиду леммы 2.6 имеем $|\Omega| \leq 25$.

Если $\alpha_2(g) \neq 0$, то по лемме 2.6 имеем $|\Omega| \leq 16$. Если же $\alpha_2(g) = 0$, то $\chi_1(g) = (2\alpha_0(g) + 38)/10$ и $19 - \chi_1(g)$ делится на 3, поэтому $|\Omega| = 16$.

Заметим, что степень вершины в Ω равна 2, 5, 8, 11 или 14. Если степень вершины a в Ω равна $|\Omega| - 2$, то $\Omega - a^\perp$ содержит единственную вершину b, и для $c \in \Omega(a) - [b]$ число $|\Omega(c)|$ сравнимо с 1 по модулю 3. Поэтому $\Omega(a) = \Omega(b)$. Если степень вершины a в Ω равна 2, то любая вершина из $\Omega - a^\perp$ смежна с обеими вершинами из $\Omega(a)$.

Если $|\Omega| = 4$, то Ω — четырехугольник и $(\alpha_1(g) - 6)/10$ делится на 3, поэтому $\alpha_1(g) \in \{6, 36, 66\}$.

Пусть $|\Omega| = 7$. Тогда $\alpha_1(g) - 17$ делится на 10, поэтому $\alpha_1(g) \in \{27, 57\}$. Если степень некоторой вершины в Ω равна 5, то Ω является $K_{2,5}$-подграфом, противоречие с тем, что Γ не содержит $K_{2,5}$-подграфов. Если же Ω — регулярный граф степени 2, то Ω — семиугольник, противоречие с тем, что $\mu_\Omega = 2$.

Пусть $|\Omega| = 10$. Тогда $\alpha_1(g) - 8$ делится на 10, поэтому $\alpha_1(g) \in \{18, 48\}$. Если Ω — регулярный граф степени 8, то Ω является $K_{5\times2}$-подграфом. Если Ω содержит точно 4 вершины степени 8, то Ω — прямая сумма четырехугольника и двух изолированных ребер, противоречие. Если Ω содержит точно 2 вершины a, b степени 8, то степень каждой вершины в $\Omega(a)$ равна 0 или 3, и $\Omega(a)$ не содержит 5-коклик. В этом случае некоторое ребро из $\Omega(a)$ лежит точно в двух треугольниках из Ω.

Допустим, что в Ω нет вершин степени 8. Тогда для любой вершины $a \in \Omega$ подграф $\Omega(a)$ — коклика или объединение изолированной вершины и 4-клики. В последнем случае Ω является $2 \cdot 5$-решеткой. Если же $\Omega(a)$ — коклика, то каждая вершина из $\Omega - a^\perp$ смежна с 2 вершинами из $\Omega(a)$, поэтому $\Omega - a^\perp$ является 4-кликой, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 13$. Тогда $\alpha_1(g) + 1$ делится на 10, поэтому $\alpha_1(g) \in \{9, 39\}$.

Пусть $|\Omega| = 16$. Тогда $\alpha_1(g)$ делится на 10, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 30, 60\}$. Лемма доказана.

Лемма 3.9. *Если $p = 2$ и Ω содержит 2-лапу, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Ω — *прямая сумма 2-коклики, и* $2K_2$, $\alpha_1(g) \in \{10, 30, 50, 70\}$;

(2) $|\Omega| \in \{8, 10, \ldots, 32\}$;

(3) $|\Omega| = 36$ *и* $\alpha_1(g) = 40$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p = 2$ и Ω содержит 2-лапу. Тогда любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках из Ω, $i \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap \Omega(b)$ содержит $2j$ вершин, $j \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.

Положим $\Delta = \Gamma - \Omega$. Тогда $|\Delta| = 2t$, и ввиду свойства $(*)$ имеем $17 \leq t \leq 36$. Заметим, что любая вершина из Δ смежна с четным числом вершин из Ω. Пусть X_i — число вершин из Δ, смежных точно с i вершинами из Ω, $x_i = |X_i|$.

Заметим, что вершина из Ω смежна с $2i$ вершинами из $\Gamma - \Omega$ (соответственно с $35 - 2i$ вершинами из Ω). Если a — вершина степени 1 в Ω, $c \in \Omega(a)$, то $\{a, c\}$ — связная компонента графа Ω.

Допустим, что $\alpha_2(g) = 0$. Тогда по целочисленности $\chi_1(g)$ число $2\alpha_0(g) + 38$ делится на 10. Отсюда $|\Omega| \in \{6, 16, 26, 36\}$.

Пусть $|\Omega| = 6$. Тогда $\alpha_1(g) \in \{10, 30, 50, 70\}$. Далее, степень любой вершины в Ω равна 1, 3 или 5. Если a — вершина степени 5 в Ω, то либо Ω — пятиугольная пирамида, либо Ω содержит две вершины a, c степени 5 и $\Omega - \{a, c\}$ является объединением изолированных ребер. Но в первом случае ребро из основания пирамиды лежит в единственном треугольнике из Ω, противоречие.

Допустим, что Ω — регулярный граф степени 3 на 6 вершинах. Тогда Ω является 3-призмой или полным многодольным графом $K_{3,3}$. В первом случае ребро из основания призмы лежит в единственном треугольнике из Ω, а во втором пара несмежных вершин из Ω имеет точно трех общих соседей в Ω. В обоих случаях получили противоречие.

Пусть $|\Omega| > 6$. Если $\alpha_2(g) \neq 0$, то ввиду леммы 2.6 имеем $|\Omega| \in \{8, 10, \dots, 32\}$. Если же $|\Omega| > 32$, то $\alpha_2(g) = 0$ и $|\Omega| = 36$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Махнев А.А.** О графах, окрестности вершин которых сильно регулярны с $k = 2\mu$ // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 7. С. 89–104.
2. **Махнев А.А., Чуксина Н.В.** Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (210,95,40,45) // Тез. сообщений VII Междунар. школы-конференции по теории групп. Челябинск: ЮУрГУ, 2008. С. 78–80.
3. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14. P. 397–407.
4. **Махнев А.А.** О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 71–83.
5. **Cameron P.** Permutation Groups. Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts 45.)
6. **Mačaj M., Širáň J.** Search for properties of the missing Moore graph // Lin. Algebra and Appl. 2010. Vol. 432, iss. 9. P. 2381–2398.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 25.12.2009

Токбаева Альбина Аниуаровна
апирант
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: tok2506@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.554.2

ПОРОЖДАЮЩИЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ ИНВОЛЮЦИЙ ГРУПП $SL_n(\mathbb{Z})$ И $PSL_n(\mathbb{Z})$

Т. В. Моисеенкова

Для групп $PSL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 3$ и $SL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 3$ и $6 \neq n \neq 10$ найдено минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно единице.

Ключевые слова: кольцо целых чисел, линейная группа, порождающие тройки инволюций.

T. V. Moiseenkova. Generating multiplets of involution of the groups $SL_n(\mathbb{Z})$ and $PSL_n(\mathbb{Z})$.

For the groups $PSL_n(\mathbb{Z})$ for $n \geq 3$ and $SL_n(\mathbb{Z})$ for $n \geq 3$ and $6 \neq n \neq 10$, the minimal number of generating involutions is found such that their product is identity.

Keywords: ring of integers, linear group, generating triples of involutions.

Введение

Пусть $SL_n(\mathbb{Z})$ — специальная линейная группа над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, а $PSL_n(\mathbb{Z})$ — ее факторгруппа по подгруппе скалярных матриц. В 1997 г. М. С. Тамбурини и П. Цукка [1] показали, что группа $SL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Позднее Я. Н. Нужин [2] доказал, что проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$, над кольцом $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$.

В данной работе найдены порождающие тройки инволюций (без условия перестановочности двух из них) для $SL_n(\mathbb{Z})$, а стало быть, и для $PSL_n(\mathbb{Z})$ при $n = 3, 4$.

Через $i = i(G)$ обозначим минимальное число порождающих инволюций группы G, произведение которых равно единице. На основе результатов из [1, 2] доказано, что если $G = PSL_n(\mathbb{Z})$, то $i(G) = 6$ при $n = 3, 4$ и $i(G) = 5$ при $n \geq 5$, а если $G = SL_n(\mathbb{Z})$, где $n \geq 3$ и $6 \neq n \neq 10$, то $i(G) = 6$ при $n = 3, 4$ и $i(G) = 5$ при $n \geq 5$.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Зафиксируем некоторые элементы из специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом $\mathbb{Z}$. Для элементов $PSL_n(\mathbb{Z})$ будем также использовать матричную запись, считая при этом два элемента равными, если они различаются лишь умножением на скалярную матрицу из $SL_n(\mathbb{Z})$.

Как обычно, через $t_{ij}(k)$, $i \neq j$, $k \in \mathbb{Z}$, будем обозначать трансвекции, т. е. матрицы $E_n + ke_{ij}$, где E_n — единичная $(n \times n)$-матрица, а e_{ij} — матричные единицы.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [3, пример на с. 107]).

Лемма 1.1. *Группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями $t_{ij}(1)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Наряду с матричной записью элементов из групп $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ будем использовать терминологию групп Шевалле, рассматривая $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$ соответственно как универсальную и присоединенную группу Шевалле типа A_{n-1}.

Пусть Φ — система корней типа A_l с базой $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$, где $l = n-1$. Через $A_l(\mathbb{Z})$ обозначим группу Шевалле типа A_l над кольцом $\mathbb{Z}$, которая порождается своими корневыми элементами $x_r(1)$, $r \in \Phi$.

Для любых $r \in \Phi$ и $0 \neq t \in \mathbb{Z}$ положим

$$n_r(t) = x_r(t) x_{-r}(-t^{-1}) x_r(t),$$

$$n_r = n_r(1), \quad h_r(-1) = n_r^2.$$

Отображение

$$t_{i+1 i}(t) \to x_{r_i}(t), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad t \in \mathbb{Z},$$

продолжается до изоморфизма группы $SL_n(\mathbb{Z})$ на универсальную группу Шевалле $A_l(\mathbb{Z})$.

Далее приняты следующие сокращения:

$$a^b = bab^{-1}, \quad [a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

2. Группы $SL_n(\mathbb{Z})$ и $PSL_n(\mathbb{Z})$, $n \leq 4$

Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ имеет единственную инволюцию, а группа $PSL_2(\mathbb{Z})$ является свободным произведением групп порядка 2 и 3 (см. [4]). Поэтому группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $PSL_2(\mathbb{Z})$ не порождаются никаким множеством инволюций.

Лемма 2.1. *Группа $SL_3(\mathbb{Z}) \equiv PSL_3(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями.*

Доказательство. Группа $SL_3(\mathbb{Z})$ изоморфна группе Шевалле типа A_2 над $\mathbb{Z}$. Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней типа A_2. Покажем, что группа $A_2(\mathbb{Z})$ порождается следующими тремя инволюциями:

$$\alpha = x_a(1) h_b(-1),$$

$$\beta = x_b(1) h_a(-1),$$

$$\gamma = n_{a+b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Вычисления показывают, что

$$(\alpha\beta)^2 = x_{a+b}(\pm 1),$$

$$\left((\alpha\beta)^2\right)^\gamma = x_{-a-b}(\pm 1),$$

$$(\alpha x_{-a-b}(\pm 1))^2 = x_{-b}(\pm 1),$$

$$(x_{-b}(\pm 1))^\gamma = x_a(\pm 1).$$

Следовательно, элементы $x_a(\pm 1)$ и $h_b(-1) = x_a(-1)\alpha$ лежат в M. Далее,

$$(h_b(-1))^\gamma = h_a(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_b(1) = \beta h_a(-1)$ лежит в M. Наконец,

$$[x_{-a-b}(\pm 1), x_b(\pm 1)] = x_{-a}(\pm 1).$$

Таким образом, $x_r(1)$ лежит в M для любого корня r. Так как группа Шевалле типа Φ над кольцом $\mathbb{Z}$ порождается своими корневыми элементами $x_r(1)$, $r \in \Phi$, то $M = A_2(\mathbb{Z})$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Группы $SL_4(\mathbb{Z})$ и $PSL_4(\mathbb{Z})$ порождаются тремя инволюциями.*

Доказательство. Группа $SL_4(\mathbb{Z})$ изоморфна группе Шевалле типа A_3 над $\mathbb{Z}$. Пусть $\{a, b, c\}$ — база системы корней типа A_3, причем $a+b$ и $b+c$ являются корнями. Покажем, что группа $A_3(\mathbb{Z})$ порождается следующими тремя инволюциями:

$$\alpha = x_a(1)h_b(-1),$$

$$\beta = h_{a+b}(-1)n_a n_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = n_b h_b(-1)h_c(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $M = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$. Вычисления показывают, что

$$\alpha^\gamma = x_{a+b}(1)h_b(-1),$$

$$(\alpha^\gamma)^\beta = x_{b+c}(1)h_{a+b+c}(-1),$$

$$\alpha^\beta = x_{-a}(1)h_{a+b+c}(-1),$$

$$\alpha\alpha^\beta\alpha = n_a h_{a+b+c}(-1),$$

$$\left(\alpha\alpha^\beta\alpha\right)^2 = h_a(-1)h_{b+c}(-1)h_{a+b+c}(-1) = 1,$$

$$\beta\left(\alpha\alpha^\beta\alpha\right)^2 = h_{a+b}(-1)n_a n_c n_a h_{a+b+c}(-1)$$

$$= h_{a+b}(-1)h_a(-1)n_c h_{a+b+c}(-1) = h_a(-1)n_c,$$

$$\left(\beta\left(\alpha\alpha^\beta\alpha\right)^2\right)^2 = h_c(-1),$$

$$h_c(-1)\gamma = n_b h_b(-1),$$

$$(h_c(-1)\gamma)^2 = h_b(-1),$$

$$\beta\left(h_a(-1)n_c\right)^{-1} = h_{a+b}(-1)n_a h_a(-1) = n_a h_b(-1),$$

$$\alpha h_b(-1) = x_a(1).$$

Элементы $h_a(-1)n_c, n_b h_b(-1), n_a h_b(-1)$, порождают всю мономиальную подгруппу группы $A_3(\mathbb{Z})$, которая действует сопряжениями транзитивно на корневых подгруппах. Так как $x_a(1) \in M$, то получаем равенство $M = A_3(\mathbb{Z})$. Лемма доказана.

3. Порождающие мультиплеты инволюций

В [2] доказано, что группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, когда $n \geq 5$. Отсюда с учетом лемм 2.1 и 2.2 получаем

Следствие 3.1. *При $n \geq 3$ группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями.*

Лемма 3.1. *Пусть $n \geq 3$. Тогда $i(SL_n(\mathbb{Z})) \geq 5$ и $i(PSL_n(\mathbb{Z})) \geq 5$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если G — конечная простая неабелева группа, то несложно доказывается, что $i(G) \geq 5$ (подробное доказательство можно найти в [5]). Остается заметить, что существует гомоморфизм группы $SL_n(\mathbb{Z})$ на $PSL_n(\mathbb{Z}_p)$ для любого простого числа p. Лемма доказана.

Следствие 3.2. *Пусть* $G = PSL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$. *Тогда* $i(G) = 6$ *при* $n = 3, 4$ *и* $i(G) = 5$ *при* $n \geq 5$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа H порождается тремя инволюциями α, β, γ и $\alpha\beta = \beta\alpha$, то $i(h) \leq 5$, так как $\alpha\beta\gamma\gamma(\alpha\beta) = 1$. Поэтому в силу [2] и леммы 3.1 $i(G) = 5$ при $n \geq 5$. Если группа H изоморфна $SL_3(2)$ или $SL_4(2)$, то $i(H) = 6$ по [5]. Поэтому $i(G) = 6$ при $n = 3, 4$ с учетом лемм 2.1, 2.2 и существования гомоморфизма группы $SL_n(\mathbb{Z})$ на $PSL_n(\mathbb{Z}_p)$ для любого простого числа p. Следствие доказано.

В [1] показано, что группа $SL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, а в [2] порождающие инволюции, две из которых перестановочны, при $n \neq 2(2r+1)$ выбирались из $SL_n(\mathbb{Z})$. Поэтому из [1, 2] и лемм 2.1, 2.2 получаются такие два следствия.

Следствие 3.3. *При* $n \geq 3$ *и* $6 \neq n \neq 10$ *группа* $SL_n(\mathbb{Z})$ *порождается тремя инволюциями.*

Следствие 3.4. *Пусть* $G = SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ *и* $6 \neq n \neq 10$. *Тогда* $i(G) = 6$ *при* $n = 3, 4$ *и* $i(G) = 5$ *при* $n \geq 5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tamburini M. C., Zucca P.** Generation of certain matrix groups by three involutions, two of which commute // J. Algebra. 1997. Vol. 195, № 2. P. 650–661.
2. **Нужин Я. Н.** О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказ. мат. журн. 2008. Т. 10, вып. 1. С. 68–74.
3. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
4. **Fricke R., Klein F.** Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunktionen. B. I, II. Leipzig: Teubner, 1890, 1892.
5. **Дубинкина Т. В.** Об одном свойстве групп $PSL_3(2^n)$, $PSU_3(2^n)$ // Вест. Краснояр. гос. техн. ун-та. 2001. С. 19–34.

Моисеенкова Татьяна Владимировна
старший преподаватель
Сибирский федеральный университет
e-mail: mpi75@rambler.ru

Поступила 25.07.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 512.54 +519.17

О СИММЕТРИЧЕСКИХ q-РАСШИРЕНИЯХ 2-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ[1]

Е. А. Неганова, В. И. Трофимов

В работе исследуются свойства симметрических q-расширений решеток. Получен критерий конечности для множеств симметрических q-расширений 2-мерной решетки Λ^2. На его основе доказана, в частности, конечность множества всех $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2 для каждого простого числа q. Получен список всех $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических 3-расширений решетки Λ^2.

Ключевые слова: d-мерные решетки, симметрические q-расширения.

E.A.Neganova, V.I.Trofimov. On symmetrical q-extensions of the grid Λ^2.

In the paper, properties of symmetrical q-extensions of the grids are investigated. We obtain a criteria for sets of symmetrical q-extensions of the grid Λ^2 to be finite. Using this criteria we prove, in particular, that the set of all $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical q-extensions of the grid Λ^2 is finite for any prime q. In addition, we give a list of all $Aut_0(\Lambda^2)$-symmetrical 3-extensions of the grid Λ^2.

Keywords: d-dimensional grids, symmetrical q-extensions.

1. Введение

Пусть Γ и Δ — графы (под графом в настоящей работе понимается неориентированный граф без петель и без кратных ребер). Следуя [1], назовем связный граф $\widetilde{\Gamma}$ *симметрическим расширением графа* Γ *посредством графа* Δ, если существуют такая вершинно-транзитивная группа $\widetilde{G}$ автоморфизмов графа $\widetilde{\Gamma}$ и такая система импримитивности σ группы $\widetilde{G}$ на множестве $V(\widetilde{\Gamma})$ вершин графа $\widetilde{\Gamma}$, что фактор-граф $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ изоморфен графу Γ и блоки системы σ порождают в $\widetilde{\Gamma}$ подграфы, изоморфные Δ. В случае, если для вершинно-транзитивной группы автоморфизмов G графа Γ группа $\widetilde{G}$, система импримитивности σ и изоморфизм $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ на Γ могут быть выбраны так, что при этом изоморфизме индуцируемая $\widetilde{G}$ группа $\widetilde{G}^{\sigma}$ автоморфизмов графа $\widetilde{\Gamma}/\sigma$ переходит в G, то (следуя [1]) скажем, что $\widetilde{\Gamma}$ есть *G-симметрическое расширение графа* Γ *посредством графа* Δ. Для графа Γ, вершинно-транзитивной группы его автоморфизмов G и целого положительного числа q связный граф $\widetilde{\Gamma}$ назовем (следуя [1]) *G-симметрическим q-расширением графа* Γ, если $\widetilde{\Gamma}$ является G-симметрическим расширением графа Γ посредством некоторого графа Δ с $|V(\Delta)| = q$. Наконец, для графа Γ и целого положительного числа q связный граф $\widetilde{\Gamma}$ назовем *симметрическим q-расширением графа* Γ, если $\widetilde{\Gamma}$ является симметрическим расширением графа Γ посредством некоторого графа Δ с $|V(\Delta)| = q$.

Понятие симметрического расширения одного графа посредством другого графа аналогично понятию расширения одной группы посредством другой группы и находит применение в теории групп. В [2] показано, что для фиксированного графа Γ и целого фиксированного числа $q > 1$ множество симметрических q-расширений графа Γ может быть бесконечным. В настоящей работе нас интересуют симметрические q-расширения d-мерных решеток (определение см. ниже) и прежде всего $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрические q-расширения 2-мерной решетки Λ^2 (определение см. ниже). $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические q-расширения решеток Λ^d для $d \geq 1$ и $q > 1$ представляют интерес в связи с кристаллографией частиц (“молекул”) с внутренней структурой.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 10-01-00349).

Пусть d — целое положительное число. Под *d-мерной решеткой* Λ^d мы, как обычно, понимаем граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы $(a_1, \ldots, a_d)$ из d целых чисел, и две вершины $(a'_1, \ldots, a'_d)$ и $(a''_1, \ldots, a''_d)$ смежны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$|a'_1 - a''_1| + \ldots + |a'_d - a''_d| = 1.$$

Для $1 \leq j \leq d$ мы полагаем $\mathrm{Pr}_j : V(\Lambda^d) \to \mathbb{Z}$, $\mathrm{Pr}_j((a_1, a_2, \ldots, a_d)) = a_j$. *Сдвигом* решетки Λ^d называется ее автоморфизм, который переводит произвольную вершину $(a_1, \ldots, a_d)$ в вершину $(a_1 + k_1, \ldots, a_d + k_d)$ для некоторых фиксированных целых чисел $k_1, \ldots, k_d$. (Заметим, что сдвиги — это в точности ограниченные автоморфизмы решетки Λ^d, т. е. такие ее автоморфизмы g, что расстояния между x и $g(x)$, где x пробегает множество всех вершин решетки Λ^d, ограничены в совокупности.) Для каждого $1 \leq i \leq d$ определим t_i как сдвиг решетки Λ^d такой, что $k_i = 1$ и $k_j = 0$ для всех $j \in \{1, \ldots, d\} \backslash \{i\}$. Обозначим через $Aut_0(\Lambda^d)$ изоморфную $\mathbb{Z}^d$ подгруппу группы автоморфизмов решетки Λ^d, состоящую из всех ее сдвигов. Для произвольного целого положительного числа q таким образом связный граф Γ называется симметрическим (соответственно, $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическим) q-расширением решетки Λ^d, если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$ с блоками порядка q, что найдется изоморфизм φ графа Γ/σ на решетку Λ^d (соответственно, найдется изоморфизм φ графа Γ/σ на решетку Λ^d, для которого $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = Aut_0(\Lambda^d)$). При этом будем говорить, что Γ — симметрическое (соответственно, $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое) q-расширение решетки Λ^d, реализуемое G, σ, φ.

Легко показать (см. замечание 1 в разд. 2), что для любого целого положительного числа q имеется лишь конечное число $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрических q-расширений решеток Λ^1. В то же время открытым является следующий

Вопрос (В.И. Трофимов). *Верно ли, что для каждого целого положительного числа q существует лишь конечное число $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2?*

Цель настоящей работы — выяснить, что могут дать для исследования сформулированного вопроса, во-первых, анонсированные в [1] общие результаты о q-симметрических расширениях решеток (см. разд. 2) и, во-вторых (и в особенности), результат [3, предложение 2] (см. разд. 3). Из [1] следует, что имеется лишь счетное число $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2 при всевозможных целых положительных числах q. В разд. 3 настоящей работы с использованием [3, предложение 2] получен критерий конечности множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2 (см. теорему 3), и этот критерий используется для ответа на сформулированный вопрос в ряде представляющих интерес случаев (см. следствия 1 и 2 разд. 3). Например (см. следствие 2 разд. 3), доказана конечность множества $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2 для каждого простого числа q. Наконец, в разд. 4 перечисляются все $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 3-расширения решетки Λ^d для $d = 1$ (5 графов) и для $d = 2$ (31 граф). Отметим, что все $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 2-расширения решетки Λ^d для произвольного целого числа d перечислены в [4].

Используемые в работе обозначения стандартны. Для графа Γ и разбиения σ множества вершин графа Γ через x^σ, где x — вершина графа Γ, обозначается подмножество из σ, содержащее x. Через Γ/σ обозначается фактор-граф графа Γ по разбиению σ. Если g — автоморфизм графа Γ, сохраняющий σ, то g^σ — автоморфизм графа Γ/σ, индуцируемый g. Если g — автоморфизм графа Γ и X — g-инвариантное множество вершин графа Γ, то g^X — подстановка на X, индуцируемая g.

2. Свойства симметрических q-расширений решеток Λ^d

В настоящем разделе мы приводим те из полученных в [1] общих результатов, касающихся свойств симметрических q-расширений решеток Λ^d, которые представляют интерес в связи со сформулированным во введении вопросом. При этом, однако, мы опускаем те результаты из [1], которые в интересующем нас в настоящей работе случае $d = 2$ перекрываются результатами разд. 3 настоящей работы.

Предварительно напомним некоторые определения.

Пусть d и q — целые положительные числа, и пусть Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^d, реализуемое некоторыми G, σ, φ. Тогда $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов решетки Λ^d. Следовательно, для каждого $1 \le i \le d$ найдется целое положительное число s такое, что $t_i^s \in \varphi G^\sigma \varphi^{-1}$. Следуя [1], для каждого $1 \le i \le d$ обозначим через $s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ наименьшее из целых положительных чисел s с этим свойством. Легко показать (см. [1]), что $|s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)| \le 2^d d!$. Кроме того, легко видеть, что в случае $d = 2$ имеем

$$(s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi), s_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi)) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2)\}.$$

Наконец, если $Aut_0(\Lambda^d) \le \varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ (в частности, если Γ — $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d, реализуемое G, σ, φ), то, очевидно, $s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = \ldots = s_d(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 1$.

Пусть вновь Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^d, где d и q — целые положительные числа, реализуемое G, σ, φ. Следуя [1], скажем, что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяют *условию* $[n_1, \ldots, n_d]$*-периодичности*, где $n_1, \ldots, n_d$ — целые положительные числа, если существуют такие автоморфизмы $g_1, \ldots, g_d$ графа Γ, сохраняющие разбиение σ, что $[g_i, g_j] = 1$ для всех $1 \le i < j \le d$ и $\varphi g_i^\sigma \varphi^{-1} = t_i^{n_i}$ для всех $1 \le i \le d$.

Предложение 1. *Пусть Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^d для $d \ge 1$ и $q \ge 1$, реализуемое G, σ, φ. Предположим, что группа G имеет конечный стабилизатор G_x вершины x графа Γ. Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \ldots, n_d]$-периодичности, где $n_i \le s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)(q|G_x|)^{i-1}$ для всех $1 \le i \le d$.*

Предложение 2. *Для произвольных $d \ge 1$, $q \ge 1$, $n_1, \ldots, n_d \ge 1$ существует лишь конечное число графов Γ, являющихся симметрическими q-расширениями решетки Λ^d, реализуемыми такими G, σ, φ, что $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условию $[n_1, \ldots, n_d]$-периодичности.*

З а м е ч а н и е 1. Непосредственным следствием предложения 2 является конечность числа симметрических q-расширений решетки Λ^1 для произвольного целого положительного числа q.

Напомним, что для произвольного связного графа Γ через $Aut_0(\Gamma)$ обозначается группа его ограниченных автоморфизмов, т. е. таких автоморфизмов g, что расстояния в графе Γ между x и $g(x)$, где x пробегает множество всех вершин графа Γ, ограничены в совокупности. Из [5, следствие 2(i)] легко следует, что множество $T(Aut_0(\Gamma))$ ограниченных автоморфизмов конечного порядка графа Γ является (нормальной) подгруппой группы $Aut(\Gamma)$.

Предложение 3. *Пусть Γ — $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d для некоторых $d \ge 1$, $q \ge 1$ и G, σ — соответствующие этому расширению вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и система импримитивности группы G на $V(\Gamma)$. Тогда блоки σ являются $T(Aut_0(\Gamma))$-орбитами на $V(\Gamma)$.*

Если Γ — $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^d, d и q — целые положительные числа и G, σ — некоторые соответствующие этому расширению вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ и система импримитивности группы G на $V(\Gamma)$, то согласно предложению 3 разбиение σ однозначно определяется графом Γ. Разбиение σ будет в дальнейшем называться *соответствующей* Γ *системой блоков.*

3. Критерий конечности множества симметрических q-расширений решетки Λ^2

В настоящем разделе на основе [3, предложение 2] будет получен критерий конечности множества симметрических q-расширений решетки Λ^2 для произвольного целого положительного числа q (см. теорему 3 ниже).

Пусть Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^2 для некоторого целого положительного числа q, реализуемое G, σ, φ. Для каждого $i \in \{1,2\}$ следующим образом определим целое неотрицательное число $r_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi)$. Для произвольных целых чисел $l_1 \le l_2$ положим $X_{l_1,l_2} := \{x \in V(\Gamma) : l_1 s_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi) \le \mathrm{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) < (l_2+1)s_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi)$ и $0 \le \mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma)) < s_{3-i}(\Gamma,G,\sigma,\varphi)\}$, и пусть $S_{l_1,l_2} := G_{X_{l_1,l_2}}$ — поэлементный стабилизатор множества X_{l_1,l_2} в группе G. Тогда $r_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi)$ есть наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S_{-r,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-t,r}^{X_{r+1,r+1}}$ и $S_{-r,r}^{X_{-r-1,-r-1}} = S_{-r,t}^{X_{-r-1,-r-1}}$ для всех целых чисел $t \ge r$.

Отметим, что в приведенных выше обозначениях число $r_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi)$ может быть определено как наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S_{-r,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-t,r}^{X_{r+1,r+1}}$ для всех целых чисел $t \ge r$, а также как наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S_{-r,r}^{X_{-r-1,-r-1}} = S_{-r,t}^{X_{-r-1,-r-1}}$ для всех целых чисел $t \ge r$. Действительно, предположим, что r — целое положительное число такое, что $S_{-r,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-t,r}^{X_{r+1,r+1}}$ для всех целых чисел $t \ge r$, и покажем, что $S_{-r,r}^{X_{-r-1,-r-1}} = S_{-r,t}^{X_{-r-1,-r-1}}$ для всех целых чисел $t \ge r$. Пусть, напротив, $S_{-r,r}^{X_{-r-1,-r-1}} \ne S_{-r,t}^{X_{-r-1,-r-1}}$ для некоторого целого положительного числа $t > r$, т. е. для некоторого целого положительного числа $t' > r$ найдется элемент h группы $S_{-r,t'-1}$ такой, что

$$h^{X_{-r-1,-r-1}} \notin S_{-r,t'}^{X_{-r-1,-r-1}}.$$

По выбору $s_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi)$ в G содержится такой элемент a, что

$$\varphi a \varphi^{-1} = t_i^{s_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi)}$$

(при этом, как замечено в разд. 2, $s_i(\Gamma,G,\sigma,\varphi) \in \{1,2,4\}$). Имеем, очевидно,

$$a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r} \in S_{-t'+1,r}$$

и

$$(a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r})^{X_{-t',-t'}} \notin S_{-t'+1,r+1}^{X_{-t',-t'}}.$$

Из $a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r} \in S_{-t'+1,r}$ и $S_{-t'+1,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-r,r}^{X_{r+1,r+1}} = S_{-t',r}^{X_{r+1,r+1}}$ следует существование элемента $h_1 \in S_{-t',r}$ такого, что

$$h_1^{X_{r+1,r+1}} = (a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r})^{X_{r+1,r+1}}.$$

Но тогда

$$h_1^{-1}(a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r}) \in S_{-t'+1,r+1}$$

и

$$(h_1^{-1}(a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r}))^{X_{-t',-t'}} = (a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r})^{X_{-t',-t'}},$$

а потому

$$a^{t'-1-r}(h_1^{-1}(a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r}))a^{-t'+1+r} \in S_{-r,t'}$$

и

$$(a^{t'-1-r}(h_1^{-1}(a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r}))a^{-t'+1+r})^{X_{-r-1,-r-1}}$$
$$= (a^{t'-1-r}(a^{-t'+1+r} h a^{t'-1-r})a^{-t'+1+r})^{X_{-r-1,-r-1}} = h^{X_{-r-1,-r-1}},$$

вопреки $h^{X_{-r-1,-r-1}} \notin S^{X_{-r-1,-r-1}}_{-r,t'}$. Аналогично показывается, что если r — целое положительное число и $S^{X_{-r-1,-r-1}}_{-r,r} = S^{X_{-r-1,-r-1}}_{-r,t}$ для всех целых чисел $t \geq r$, то $S^{X_{r+1,r+1}}_{-r,r} = S^{X_{r+1,r+1}}_{-t,r}$ для всех целых чисел $t \geq r$.

Отметим, кроме того, что в случае, когда стабилизатор вершины x графа Γ в группе G конечен, имеем, очевидно, $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi) \leq (1 + \log_2(|G_x|))/2$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^2 для некоторого целого положительного числа q, реализуемое G, σ, φ. Более естественным, чем введенный выше параметр $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, представляется параметр $r_i^*(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, определяемый (во введенных выше обозначениях) как наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что для целого числа l имеем $S^{X_{l+r,l+r}}_{l,l+r-1} = S^{X_{l+r,l+r}}_{t,l+r-1}$ для всех целых чисел $t \leq l$ и $S^{X_{l-1,l-1}}_{l,l+r-1} = S^{X_{l-1,l-1}}_{l,t}$ для всех целых чисел $t \geq l+r-1$. (Ясно, что $r_i^*(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ не зависит от выбора l.) При этом, очевидно, $r_i^*(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ равно $2r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ или $2r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi) + 1$. Можно показать, что для $r_i^*(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ справедливы модифицированные аналоги полученных в этой работе результатов для $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$. В частности, число $r_i^*(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ может быть определено как наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S^{X_{l+r,l+r}}_{l,l+r-1} = S^{X_{l+r,l+r}}_{t,l+r-1}$ для всех целых чисел $t \leq l$, а также как наименьшее из неотрицательных целых чисел r таких, что $S^{X_{l-1,l-1}}_{l,l+r-1} = S^{X_{l-1,l-1}}_{l,t}$ для всех целых чисел $t \geq l+r-1$, где l — целое число (от выбора которого определение не зависит). В настоящей работе мы предпочитаем, однако, иметь дело с $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, поскольку это облегчает использование результатов из [3].

Следующая теорема получается из доказательства [3, предложение 2].

Теорема 1. *Пусть Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^2 для некоторого целого положительного числа q, реализуемое некоторыми G, σ, φ. Тогда $(\Gamma, \sigma, \varphi)$ удовлетворяет условиям $[n_1 s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi), s_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi)]$-периодичности и $[s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi), n_2 s_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi)]$-периодичности для некоторых $n_1 \leq (q!)^{(2r_1+1)s_1 s_2}$ и $n_2 \leq (q!)^{(2r_2+1)s_1 s_2}$, где $r_i = r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ и $s_i = s_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ для каждого $i \in \{1, 2\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, прежде всего, что рассуждения из доказательства [3, предложение 2] сохраняют силу, если в качестве G там взять произвольную замкнутую в топологии поточечной сходимости подгруппу группы $Aut(\Gamma)$, сохраняющую разбиение σ и индуцирующую на σ группу $\langle a, b\rangle^\sigma$.

Для произвольного $i \in \{1, 2\}$ так модифицированное доказательство [3, предложение 2] применимо к рассматриваемым в теореме 1 графу Γ, замыканию $\overline{G}$ группы G (в качестве G в доказательстве [3, предложение 2]), разбиению τ, состоящему из множеств $\{z \in V(\Gamma) : l's_i \leq \mathrm{Pr}_i(\varphi(z^\sigma)) < (l'+1)s_i$ и $l''s_{3-i} \leq \mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(z^\sigma)) < (l''+1)s_{3-i}\}$ для всевозможных $l', l'' \in \mathbb{Z}$ (в качестве σ в доказательстве [3, предложение 2]) и элементам $a, b \in G$ таким, что $\varphi a^\sigma \varphi^{-1} = t_i^{s_i}$ и $\varphi b^\sigma \varphi^{-1} = t_{3-i}^{s_{3-i}}$. Поэтому найдутся сохраняющие разбиение τ элементы a', b' группы $Aut(\Gamma)$, для которых $[a', b'] = 1$, $(a')^\tau = (a^n)^\tau$ и $(b')^\tau = (b)^\tau$. Заметим, что при этом элементы a', b' сохраняют разбиение σ и, следовательно, $(a')^\sigma = \varphi^{-1} t_i^{ns_i} \varphi$, $(b')^\sigma = \varphi^{-1} t_{3-i}^{s_{3-i}} \varphi$. Действительно, поскольку граф Γ/σ изоморфен Λ^2, то группа $T(Aut_0(\Gamma))$ ограниченных автоморфизмов конечного порядка графа Γ оставляет на месте каждый блок разбиения σ. Кроме того, поскольку, очевидно, $a, b, a', b' \in Aut_0(\Gamma)$ и элементы $a'a^{-n}$ и $b'b^{-1}$ оставляют на месте каждый блок разбиения τ, то $a'a^{-n}, b'b^{-1} \in T(Aut_0(\Gamma))$. Таким образом, получаем, что элементы $a' = (a'a^{-n})a^n$ и $b' = (b'b^{-1})b$ сохраняют разбиение σ, что и утверждалось.

Далее, можно положить (см. доказательство [3, предложение 2]) $n = mk$, где в рассматриваемом нами случае $m = 1$, а k — целое положительное число такое, что для некоторого $x \in V(\Gamma)$ элемент $[a^k, b]$ стабилизирует каждую вершину множества

$$\left\{y : s_i \left(\left\lfloor \frac{\mathrm{Pr}_i(\varphi(x^\sigma))}{s_i} \right\rfloor - r_i \right) \leq \mathrm{Pr}_i(\varphi(y^\sigma)) < s_i \left(\left\lfloor \frac{\mathrm{Pr}_i(\varphi(x^\sigma))}{s_i} \right\rfloor + r_i + 1 \right)\right.$$

и

$$s_{3-i}\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma))}{s_{3-i}}\right\rfloor \le \mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(y^\sigma)) < s_{3-i}\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma))}{s_{3-i}}\right\rfloor + 1\right)\right\},$$

где $\lfloor\ \rfloor$ означает целую часть числа. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что k может быть выбрано не превосходящим $(q!)^{(2r_i+1)s_1s_2}$. Но для произвольного целого положительного числа k' элемент $[a^{k'}, b]$ оставляет на месте каждый блок разбиения σ. Следовательно, для произвольной вершины x' графа Γ найдутся такие целые числа $0 < k_1 < k_2 \le (q!)^{(2r_i+1)s_1s_2} + 1$, что $[a^{k_1}, b](y') = [a^{k_2}, b](y')$ для каждой вершины y' с

$$s_i\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_i(\varphi((x')^\sigma))}{s_i}\right\rfloor - r_i\right) \le \mathrm{Pr}_i(\varphi((y')^\sigma)) < s_i\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_i(\varphi((x')^\sigma))}{s_i}\right\rfloor + r_i + 1\right)$$

и

$$s_{3-i}\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi((x')^\sigma))}{s_{3-i}}\right\rfloor \le \mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi((y')^\sigma)) < s_{3-i}\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi((x')^\sigma))}{s_{3-i}}\right\rfloor + 1\right).$$

Для произвольной вершины $x \in a^{k_1}(x')$ элемент $[a^{k_2-k_1}, b]$ таким образом стабилизирует каждую вершину множества

$$\left\{y : s_i\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_i(\varphi(x^\sigma))}{s_i}\right\rfloor - r_i\right) \le \mathrm{Pr}_i(\varphi(y^\sigma)) < s_i\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_i(\varphi(x^\sigma))}{s_i}\right\rfloor + r_i + 1\right) r_i\right.$$

и

$$s_{3-i}\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma))}{s_{3-i}}\right\rfloor \le \mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(y^\sigma)) < s_{3-i}\left(\left\lfloor\frac{\mathrm{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma))}{s_{3-i}}\right\rfloor + 1\right)\right\},$$

и мы можем положить $k = k_2 - k_1$. Поскольку $0 < k_2 - k_1 \le (q!)^{(2r_i+1)s_1s_2}$, теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 1, в которой $(s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi), s_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi)) \in \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,4), (4,2)\}$ (см. разд. 2), и предложения 2 разд. 2 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть q — произвольное целое положительное число. Тогда для любого целого положительного числа r и любого $i \in \{1,2\}$ имеется лишь конечное число графов Γ, удовлетворяющих следующему условию: Γ — симметрическое q-расширение решетки Λ^2, которое может быть реализовано такими G, σ, φ, что $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi) \le r$.*

Последнюю теорему удобно переформулировать следующим образом.

Теорема 3 (критерий конечности множества симметрических q-расширений 2-мерной решетки). *Пусть $\mathcal{G} = \{\Gamma_j : j \in J\}$ — некоторое множество симметрических q-расширений решетки Λ^2, где q — целое положительное число. Тогда $\mathcal{G}$ конечно в том и только том случае, когда для некоторого целого неотрицательного числа r и каждого $j \in J$ симметрическое q-расширение Γ_j решетки Λ^2 может быть реализовано такими G_j, σ_j, φ_j, что $r_1(\Gamma_j, G_j, \sigma_j, \varphi_j) \le r$ или $r_2(\Gamma_j, G_j, \sigma_j, \varphi_j) \le r$.*

В связи со сформулированным во введении вопросом в оставшейся части настоящего раздела рассматриваются $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрические q-расширения решетки Λ^2. Для применения в этом случае теорем 1-3 настоящего раздела напомним, что если Γ — $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^2, где q — целое положительное число, реализуемое G, σ, φ, то $s_1(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = s_2(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 1$.

Следствие 1. *Для произвольного целого положительного числа q имеется лишь конечное множество таких графов Γ, являющихся $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическими q-расширениями решетки Λ^2, что для соответствующей системы блоков σ и для некоторых $x \in V(\Gamma)$ и $y \in V(\Gamma)\backslash x^\sigma$ справедливо $|\{z \in y^\sigma : \{x, z\} \in E(\Gamma)\}| = 1$.*

Доказательство. Пусть Γ — $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^2, реализуемое G, σ, φ. Предположим, что для некоторых $x \in V(\Gamma)$ и $y \in V(\Gamma)\backslash x^\sigma$ справедливо $|\{z \in y^\sigma : \{x, z\} \in E(\Gamma)\}| = 1$. В этом случае для некоторого $i \in \{1, 2\}$ имеем

$$|\operatorname{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) - \operatorname{Pr}_i(\varphi(y^\sigma))| = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma)) = \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi(y^\sigma)).$$

Но тогда, очевидно, для произвольных $x' \in V(\Gamma)$, $y' \in V(\Gamma)$ таких, что

$$|\operatorname{Pr}_i(\varphi((x')^\sigma)) - \operatorname{Pr}_i(\varphi((y')^\sigma))| = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi((x')^\sigma)) = \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi((y')^\sigma)),$$

также имеем $|\{z \in (y')^\sigma : \{x', z\} \in E(\Gamma)\}| = 1$. Отсюда следует, что $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$ (поскольку поэлементный стабилизатор $(x')^\sigma$ в G действует тривиально на $(y')^\sigma$ для произвольных $x' \in V(\Gamma)$, $y' \in V(\Gamma)$ таких, что

$$|\operatorname{Pr}_i(\varphi((x')^\sigma)) - \operatorname{Pr}_i(\varphi((y')^\sigma))| = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi((x')^\sigma)) = \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi((y')^\sigma))).$$

Справедливость следствия 1 вытекает теперь из теоремы 3 настоящего раздела.

Напомним, что группа подстановок называется *квазипримитивной*, если каждая ее неединичная нормальная подгруппа транзитивна. Ясно, что каждая транзитивная группа подстановок простой степени квазипримитивна. Теорема 3 настоящего раздела влечет следующий результат.

Следствие 2. *Для произвольного целого положительного числа q имеется лишь конечное множество графов Γ, являющихся $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическими q-расширениями решетки Λ^2 и удовлетворяющих следующему условию: реализующая расширение Γ вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов Γ может быть выбрана так, что стабилизатор в G блока из соответствующей расширению Γ системы блоков индуцирует на этом блоке квазипримитивную группу. В частности, для произвольного простого числа q имеется лишь конечное множество $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрических q-расширений решетки Λ^2.*

Доказательство. Пусть Γ — $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрическое q-расширение решетки Λ^2, $q > 1$, реализуемое G, σ, φ. Предположим, что для (произвольной) вершины z графа Γ стабилизатор в G блока z^σ индуцирует на z^σ квазипримитивную группу, и пусть $x \in V(\Gamma)$. Тогда для $z \in V(\Gamma)$ поэлементный стабилизатор x^σ в группе G, являясь нормальной подгруппой стабилизатора блока z^σ в группе G, действует на z^σ либо тривиально, либо транзитивно.

Предположим, что существует вершина $y \in V(\Gamma)\backslash x^\sigma$ такая, что $\{x, y\} \in E(\Gamma)$ и поэлементный стабилизатор x^σ в G действует на y^σ тривиально. В этом случае для некоторого $i \in \{1, 2\}$ имеем

$$|\operatorname{Pr}_i(\varphi(x^\sigma)) - \operatorname{Pr}_i(\varphi(y^\sigma))| = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi(x^\sigma)) = \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi(y^\sigma)).$$

Но тогда поэлементный стабилизатор $(x')^\sigma$ в G действует тривиально на $(y')^\sigma$ для произвольных вершин $x' \in V(\Gamma)$, $y' \in V(\Gamma)$ таких, что

$$|\operatorname{Pr}_i(\varphi((x')^\sigma)) - \operatorname{Pr}_i(\varphi((y')^\sigma))| = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi((x')^\sigma)) = \operatorname{Pr}_{3-i}(\varphi((y')^\sigma)).$$

Следовательно, $r_i(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = 0$, и конечность множества таких Γ вытекает из теоремы 3 настоящего раздела.

Предположим поэтому, что для каждой вершины $y \in V(\Gamma)\backslash x^\sigma$, смежной с x, поэлементный стабилизатор x^σ в G действует транзитивно на y^σ. Тогда для каждой такой вершины y вершина x, очевидно, смежна с каждой вершиной из y^σ. Но в этом случае, если $\{x', y'\} \in E(\Gamma)$ и $(x')^\sigma \neq (y')^\sigma$, то каждая вершина из $(x')^\sigma$ смежна с каждой вершиной из $(y')^\sigma$. Ясно, что граф Γ, удовлетворяющий последнему свойству, однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своим подграфом, порожденным блоком (порядка q) из σ. Множество таких Γ, следовательно, конечно. Следствие 2 доказано.

4. $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 3-расширения решетки Λ^d для $d=1$ и для $d=2$

Ниже дается описание $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрических 3-расширений решетки Λ^d для $d=1$ и для $d=2$.

Легко видеть, что $Aut_0(\Lambda^1)$-симметрические 3-расширения решетки Λ^1 исчерпываются следующими графами $\Gamma_n^{1,3}, 1 \le n \le 5$ (верхний индекс 1 означает, что $d=1$, а верхний индекс 3 — что рассматриваются 3-расширения решетки Λ^1).

Для каждого $1 \le n \le 5$

$$V(\Gamma_n^{1,3}) = \{(i,k) : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3\}\}.$$

Для каждого $1 \le n \le 5$

$$E(\Gamma_n^{1,3}) = E_0(\Gamma_n^{1,3}) \cup E_1(\Gamma_n^{1,3}),$$

где для

$$D_0 = \Big\{\{(i,k),(i,l)\} : i \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3\}, k \neq l\Big\}$$

и

$$D_1 = \Big\{\{(i,k),(i+1,l)\} : i \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3\}\Big\}$$

множества $E_0(\Gamma_n^{1,3}) = E(\Gamma_n^{1,3}) \cap D_0$ и $E_1(\Gamma_n^{1,3}) = E(\Gamma_n^{1,3}) \cap D_1$ задаются следующим образом:

$n=1:$ $\quad E_0(\Gamma_1^{1,3}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_1^{1,3}) = \Big\{\{(i,k),(i+1,k)\} : i \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3\}\Big\}.$

$n=2:$ $\quad E_0(\Gamma_2^{1,3}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_2^{1,3}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_1^{1,3}).$

$n=3:$ $\quad E_0(\Gamma_3^{1,3}) = D_0, \quad E_1(\Gamma_3^{1,3}) = D_1.$

$n=4:$ $\quad E_0(\Gamma_4^{1,3}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_4^{1,3}) = E_1(\Gamma_2^{1,3}).$

$n=5:$ $\quad E_0(\Gamma_5^{1,3}) = \varnothing, \quad E_1(\Gamma_5^{1,3}) = D_1.$

Далее, несложно показать, что $Aut_0(\Lambda^2)$-симметрические 3-расширения решетки Λ^2 исчерпываются следующими графами $\Gamma_n^{2,3}, 1 \le n \le 31$ (верхний индекс 2 означает, что $d=2$, а верхний индекс 3 — что рассматриваются 3-расширения решетки Λ^2).

Для каждого $1 \le n \le 31$

$$V(\Gamma_n^{2,3}) = \{(i,j,k) : i,j \in \mathbb{Z}, k \in \{1,2,3\}\}.$$

Для каждого $1 \le n \le 31$

$$E(\Gamma_n^{2,3}) = E_0(\Gamma_n^{2,3}) \cup E_1(\Gamma_n^{2,3}) \cup E_2(\Gamma_n^{2,3}),$$

где для

$$D_0 = \Big\{\{(i,j,k),(i,j,l)\} : i,j \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3\}, k \neq l\Big\},$$

$$D_1 = \Big\{\{(i,j,k),(i+1,j,l)\} : i,j \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3\}\Big\}$$

и

$$D_2 = \Big\{\{(i,j,k),(i,j+1,l)\} : i,j \in \mathbb{Z}, k,l \in \{1,2,3\}\Big\}$$

множества $E_0(\Gamma_n^{2,3}) = E(\Gamma_n^{2,3}) \cap D_0$, $E_1(\Gamma_n^{2,3}) = E(\Gamma_n^{2,3}) \cap D_1$ и $E_2(\Gamma_n^{2,3}) = E(\Gamma_n^{2,3}) \cap D_2$ задаются следующим образом:

$$n=1: \qquad E_0(\Gamma_1^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_1^{2,3})=\Big\{\{(i,j,k),(i+1,j,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3\}\Big\},$$

$$E_2(\Gamma_1^{2,3})=\Big\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ k\in\{1,2,3\}\Big\}.$$

$$n=2: \qquad E_0(\Gamma_2^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_2^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}),$$

$$E_2(\Gamma_2^{2,3})=\Big\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 0 \pmod 2,\ k\in\{1,2,3\}\Big\}$$

$$\cup\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 1 \pmod 2\Big\}.$$

$$n=3: \qquad E_0(\Gamma_3^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_3^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}),$$

$$E_2(\Gamma_3^{2,3})=\Big\{\{(i,j,k),(i,j+1,k)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 0 \pmod 3,\ k\in\{1,2,3\}\Big\}$$

$$\cup\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,1)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 1 \pmod 3\Big\}$$

$$\cup\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 2 \pmod 3\Big\}.$$

$$n=4: \qquad E_0(\Gamma_4^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_4^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}),$$

$$E_2(\Gamma_4^{2,3})=\Big\{\{(i,j,1),(i,j{+}1,1)\},\{(i,j,2),(i,j{+}1,3)\},\{(i,j,3),(i,j,2)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ i\equiv 0 \pmod 2\Big\}$$

$$\cup\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 1 \pmod 2\Big\}.$$

$$n=5: \qquad E_0(\Gamma_5^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_5^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}), \quad E_2(\Gamma_5^{2,3})=D_2\setminus E_2(\Gamma_1^{2,3}).$$

$$n=6: \qquad E_0(\Gamma_6^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_6^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}), \quad E_2(\Gamma_6^{2,3})=D_2\setminus E_2(\Gamma_3^{2,3}).$$

$$n=7: \qquad E_0(\Gamma_7^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_7^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}), \quad E_2(\Gamma_7^{2,3})=D_2\setminus E_2(\Gamma_4^{2,3}).$$

$$n=8: \qquad E_0(\Gamma_8^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_8^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}),$$

$$E_2(\Gamma_8^{2,3})=\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},$$

$$\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 0 \pmod 3\Big\}$$

$$\cup\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,1)\},$$

$$\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\},\{(i,j,3),(i,j+1,3)\}:\ i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 1 \pmod 3\Big\}$$

$$\cup\Big\{\{(i,j,1),(i,j+1,1)\},\{(i,j,1),(i,j+1,3)\},\{(i,j,2),(i,j+1,2)\},\{(i,j,2),(i,j+1,3)\},$$

$$\{(i,j,3),(i,j+1,1)\},\{(i,j,3),(i,j+1,2)\}:i,j\in\mathbb{Z},\ \ i\equiv 2 \pmod 3\Big\}.$$

$$n=9: \qquad E_0(\Gamma_9^{2,3})=D_0, \quad E_1(\Gamma_9^{2,3})=E_1(\Gamma_1^{2,3}), \quad E_2(\Gamma_9^{2,3})=D_2\setminus E_2(\Gamma_2^{2,3}).$$

$n = 10:$ $E_0(\Gamma_{10}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{10}^{2,3}) = D_1 \setminus E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{10}^{2,3}) = D_2 \setminus E_2(\Gamma_1^{2,3}).$

$n = 11:$ $E_0(\Gamma_{11}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{11}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{11}^{2,3}) = D_2 \setminus E_2(\Gamma_2^{2,3}).$

$n = 12:$ $E_0(\Gamma_{12}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{12}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{12}^{2,3}) = D_2 \setminus E_2(\Gamma_3^{2,3}).$

$n = 13:$ $E_0(\Gamma_{13}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{13}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{13}^{2,3}) = D_2 \setminus E_2(\Gamma_4^{2,3}).$

$n = 14:$ $E_0(\Gamma_{14}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{14}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{14}^{2,3}) = D_2.$

$n = 15:$ $E_0(\Gamma_{15}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{15}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{15}^{2,3}) = D_2.$

$n = 16:$ $E_0(\Gamma_{16}^{2,3}) = D_0,\quad E_1(\Gamma_{16}^{2,3}) = D_1,\qquad E_2(\Gamma_{16}^{2,3}) = D_2.$

$n = 17:$ $E_0(\Gamma_{17}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{17}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{17}^{2,3}) = E_2(\Gamma_2^{2,3}).$

$n = 18:$ $E_0(\Gamma_{18}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{18}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{18}^{2,3}) = E_2(\Gamma_3^{2,3}).$

$n = 19:$ $E_0(\Gamma_{19}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{19}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{19}^{2,3}) = E_2(\Gamma_4^{2,3}).$

$n = 20:$ $E_0(\Gamma_{20}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{20}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{20}^{2,3}) = E_2(\Gamma_5^{2,3}).$

$n = 21:$ $E_0(\Gamma_{21}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{21}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{21}^{2,3}) = E_2(\Gamma_6^{2,3}).$

$n = 22:$ $E_0(\Gamma_{22}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{22}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{22}^{2,3}) = E_2(\Gamma_7^{2,3}).$

$n = 23:$ $E_0(\Gamma_{23}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{23}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{23}^{2,3}) = E_2(\Gamma_8^{2,3}).$

$n = 24:$ $E_0(\Gamma_{24}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{24}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{24}^{2,3}) = E_2(\Gamma_9^{2,3}).$

$n = 25:$ $E_0(\Gamma_{25}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{25}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{25}^{2,3}) = E_2(\Gamma_{10}^{2,3}).$

$n = 26:$ $E_0(\Gamma_{26}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{26}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{26}^{2,3}) = E_2(\Gamma_{11}^{2,3}).$

$n = 27:$ $E_0(\Gamma_{27}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{27}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{27}^{2,3}) = E_2(\Gamma_{12}^{2,3}).$

$n = 28:$ $E_0(\Gamma_{28}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{28}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{28}^{2,3}) = E_2(\Gamma_{13}^{2,3}).$

$n = 29:$ $E_0(\Gamma_{29}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{29}^{2,3}) = E_1(\Gamma_1^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{29}^{2,3}) = D_2.$

$n = 30:$ $E_0(\Gamma_{30}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{30}^{2,3}) = E_1(\Gamma_{10}^{2,3}),\quad E_2(\Gamma_{30}^{2,3}) = D_2.$

$n = 31:$ $E_0(\Gamma_{31}^{2,3}) = \varnothing,\quad E_1(\Gamma_{31}^{2,3}) = D_1,\qquad E_2(\Gamma_{31}^{2,3}) = D_2.$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** О симметрических q-расширениях решеток // Теория групп и ее приложения: тр. 8-й Междунар. шк.-конф. по теории групп, посвященной 75-летию В.А.Белоногова. Нальчик, 2010. С. 186–189.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Междунар. алгебр. конф., посвященная 70-летию А.В.Яковлева: тез.докл. СПб., 2010. С. 51–53.
3. **Seifter N., Trofimov V.I.** Automorphism Groups of Graphs with Quadratic Growth // J. Comb. Theory. Ser. B. 1997. Vol. 71, № 2. P. 205–210.

4. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** $Aut_0(\Lambda^d)$-симметрические 2-расширения решеток Λ^d // Проблемы теоретической и прикладной математики: тез. докл. 41-й Всерос. мол. шк.-конф. Екатеринбург, 2010. С. 64–70.
5. **Трофимов В.И.** Ограниченные автоморфизмы графов и одна характеризация решеток // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1983. Т. 47, № 2. С. 407–420.

Поступила 03.02.2010

Неганова Елена Александровна
аспирант
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: nega-le@yandex.ru

Трофимов Владимир Иванович
д-р. физ-мат. наук,
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.6

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ MAX-SNP-ТРУДНЫХ ЗАДАЧ MIN-PC и MASC-GP(n)[1]

М. И. Поберий

Известно, что задача о минимальном покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (MIN-PC) и задача о минимальном аффинном разделяющем комитете, сформулированная в пространстве фиксированной размерности (MASC-GP(n)), являются NP-трудными в сильном смысле. В настоящей работе показано, что данные задачи MAX-SNP-трудны.

Ключевые слова: вычислительная сложность, NP-трудность в сильном смысле, покрытие точек, аффинный комитет.

M. I. Poberii. On the belonging of the problems MIN-PC and MASC-GP(n) to the class of MAX-SNP-hard problems.

It is known that the problem on the minimal covering of a finite number of points in a plane by a set of straight lines (MIN-PC) and the problem on the minimal affine separating committee formulated in a space of fixed dimension (MASC-GP(n)) are NP-hard in the strong sense. We show that these problems are MAX-SNP-hard.

Keywords: computational complexity, strong NP-hardness, covering of points, affine committee.

Введение

Известно, что задача о минимальном покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (MIN-PC) и задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC) являются NP-трудными. Исследованием вопроса о вычислительной сложности задачи MIN-PC занимались в своих работах Н. Мегиддо и А. Тамир. Путем полиномиального сведения к данной задаче известной NP-трудной задачи о 3-выполнимости (MAX-3SAT) они показали, что задача MIN-PC является NP-трудной в сильном смысле [1]. Что касается вычислительной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC), то она остается труднорешаемой и при дополнительных ограничениях: будучи сформулированной в пространстве фиксированной размерности, большей единицы, — задача MASC(n) [2], а также при условии общности положения разделяемых множеств — MASC-GP(n) [3].

Класс задач MAX-SNP является подклассом NP и был впервые определен в совместной работе Х. Пападимитриу и М. Яннакакиса [4]. В этой же работе было введено понятие MAX-SNP-полноты и доказано, что задача 3-выполнимости при дополнительном условии, что каждая переменная может входить в булеву формулу не более t раз (MAX-3SAT(t)), является MAX-SNP-полной.

В данной работе показано, что задачи о минимальном покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (MIN-PC) и о минимальном аффинном разделяющем комитете в пространстве фиксированной размерности при условии общности положения разделяемых множеств MASC-GP(n) MAX-SNP-трудны.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-07-00134) и Президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1001 и 09-С-1-1010).

1. Определения, постановка задач и известные результаты

Данный раздел содержит основные определения и постановку исследуемых в работе задач комбинаторной оптимизации. Кроме того, в разделе приведены известные результаты и сформулированы теоремы, касающиеся вопроса о вычислительной сложности задачи о минимальном покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (MIN-PC) и задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC), а также их модификаций. Воспользуемся символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ для обозначения множества натуральных чисел, кольца целых, поля рациональных и вещественных чисел, соответственно, и $\mathbb{N}_k$ для обозначения конечного подмножества натурального ряда $\{1, \ldots, k\}$.

1.1. Задача о минимальном покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (MIN-PC)

Определение 1. Множество прямых $L = \{l_1, \ldots, l_r\}$, где $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 : c_j^T x = d_j\}$ и $c_j \neq 0$, называется *покрытием множества точек* $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, если для каждой точки $p_i \in P$ найдется прямая $l = l(p_i) \in L$ такая, что $p_i \in l$.

Задача 1: "Минимальное покрытие конечного множества точек плоскости множеством прямых" (MIN-PC). Задано конечное множество точек на плоскости $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$, $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, p$. Требуется найти набор прямых $\{l_1, \ldots, l_r\}$ минимальной мощности такой, что каждая точка (x_i, y_i) принадлежит по крайней мере одной прямой l_j.

Очевидно, что если никакие три точки не лежат на одной прямой, то задача MIN-PC имеет тривиальное решение, а именно, искомое покрытие состоит из $\lceil p/2 \rceil$ прямых.

Исследованием задачи MIN-PC занимались Н. Мегиддо и А. Тамир, и ими была доказана следующая теорема, характеризующая вычислительную сложность задачи MIN-PC.

Теорема 1 [1]. *Задача* MIN-PC *является NP-трудной в сильном смысле.*

Как обычно [5], называем задачу комбинаторной оптимизации NP-трудной в сильном смысле, если соответствующая ей задача верификации свойства NP-полна в сильном смысле, т. е. существование псевдополиномиального алгоритма для этой задачи влечет равенство $P = NP$.

1.2. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC)

Возникновение комитетных конструкций обусловлено необходимостью обобщения классического понятия решения на случай несовместных систем. Данный подход активно применяется в теории голосования, оптимизации и распознавании образов. Введем понятие аффинного комитета.

Определение 2. Конечная последовательность функций $Q = (f_1, \ldots, f_q)$, $f_i(x) = c_i^T x - d_i$, называется *аффинным комитетом*, разделяющим множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено условие

$$\begin{aligned} |\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(a) > 0\}| &> q/2 \qquad (a \in A), \\ |\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(b) < 0\}| &> q/2 \qquad (b \in B), \end{aligned}$$

при этом q называется числом элементов (членов) комитета Q.

Как известно [6], множества A и B отделимы аффинным комитетом тогда и только тогда, когда $A \cap B = \varnothing$. Тем не менее по ряду причин особый интерес представляют разделяющие комитеты с наименьшим (для данных множеств) числом элементов, называемые *минимальными*.

З а д а ч а 2: "Минимальный аффинный разделяющий комитет" (MASC). Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$. Требуется указать аффинный комитет с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Если рассмотреть задачу MASC в одномерном пространстве, то она может быть решена за полиномиальное время. Далее перейдем к рассмотрению задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете в пространстве фиксированной размерности, большей единицы.

З а д а ч а 3: "Минимальный аффинный разделяющий комитет в пространстве фиксированной размерности" (MASC(n)). Заданы множества точек $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, n фиксировано. Требуется указать аффинный комитет, разделяющий множества A и B, содержащий наименьшее число элементов.

Задачи MASC и MASC(n) при произвольном фиксированном $n > 1$ являются NP-трудными [2, 7]. Следует отметить, что при доказательстве труднорешаемости данных задач существенно использовалась вырожденность разделяемых множеств. Аналогичный результат может быть получен и при дополнительном условии общности положения разделяемых множеств.

О п р е д е л е н и е 3. Говорят, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$, $|D| > n$, находится в общем положении, если для каждого подмножества $D' \subseteq D$ мощности $n+1$ справедливо соотношение $\dim \operatorname{aff}(D') = n$.

З а д а ч а 4: "Минимальный аффинный разделяющий комитет в пространстве фиксированной размерности для множеств, находящихся в общем положении" (MASC-GP(n)). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, n фиксировано, и множество $A \cup B$ находится в общем положении. Требуется указать аффинный комитет с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Теорема 2 [3]. *Множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ имеет покрытие из s прямых в том и только в том случае, когда множества $A = \{p \pm \varepsilon(p)\tau/M : p \in P\}$ и $B = \{p \pm \varepsilon(p)\sigma : p \in P\}$ разделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элементов, где $\varepsilon(p)$ и $M > 0$ выбраны так, что выполняется неравенство*

$$\max_{p \in P} \varepsilon(p)/M < \min_{p \in P} \varepsilon(p)$$

и множество $A \cup B$ находится в общем положении.

Последняя теорема устанавливает связь между задачами PC и ASC-GP(n)[2], которая будет использована далее, а также позволяет сделать вывод о вычислительной сложности задач MASC-GP(n) и MASC-GP.

Следствие 1. *Задачи* MASC-GP(n) *и* MASC-GP *являются NP-трудными в сильном смысле.*

2. Полиномиальное сведение задачи MAX-3SAT(t) к задачам MIN-PC и MASC-GP(n)

Данный раздел посвящен построению схемы полиномиального сведения задачи MAX-3SAT(t), являющейся специальным случаем задачи о 3-выполнимости, к задаче MIN-PC. Также приводится понятие класса задач MAX-SNP, введенное Х. Пападимитриу и М. Яннакакисом [4], и обосновывается принадлежность данному классу задач MIN-PC и MASC-GP(n).

[2] PC и ASC-GP(n) — это сформулированные в виде задач распознавания свойств задачи MIN-PC и MASC-GP(n) соответственно.

2.1. Задача о выполнимости

З а д а ч а 5: "3-выполнимость" (MAX-3SAT). Задана булева формула, записанная в виде конъюнктивной нормальной формы, в которой каждая дизъюнкция содержит ровно 3 литерала. Требуется назначить всем переменным, встречающимся в формуле, значения "ложь" и "истина" так, чтобы число выполненных дизъюнкций было максимально.

Как известно [5], задача MAX-3SAT является NP-трудной.

З а д а ч а 6: Задача MAX-3SAT(t) — это задача MAX-3SAT при дополнительном ограничении, что каждая переменная может входить в булеву формулу не более t раз.

Поскольку исходное определение класса задач MAX-SNP, данное Х. Пападимитриу и М. Яннакакисом, является громоздким и требует введения ряда дополнительных определений, то зачастую в качестве определения данного класса используется свойство, характеризующее задачи из класса MAX-SNP. Этой же логике будем следовать и мы.

О п р е д е л е н и е 4. Класс MAX-SNP — это класс оптимизационных задач, имеющих аппроксимационный алгоритм с постоянной точностью, но не имеющих аппроксимационной схемы, если $P \neq NP$.

В работе [4] показано, что задача MAX-3SAT(t) является MAX-SNP-полной. В следующем подразделе будет предложена схема полиномиального сведения данной задачи к исследуемой нами задаче MIN-PC.

2.2. Схема сведения задачи MAX-3SAT(t) к задаче MIN-PC

В данном разделе обосновывается полиномиальная сводимость задачи MAX-3SAT(t) к задаче MIN-PC. Пусть φ — 3-КНФ, определяющая условие задачи MAX-3SAT(t). Обозначим через m количество дизъюнктов φ, а через $OPT(\varphi)$ — оптимальное значение задачи (максимальное количество одновременно разрешимых дизъюнктов). По аналогии введем обозначение $OPT(PC)$ для оптимального значения задачи MIN-PC (мощности наименьшего покрытия). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Существует схема полиномиального сведения задачи* MAX-3SAT(t) *к задаче* MIN-PC, *преобразующая булеву формулу φ к частной постановке задачи* MIN-PC *так, что*

- *если $OPT(\varphi) = m$, то $OPT(\mathrm{PC}) = nt$,*
- *если $OPT(\varphi) = m' < (1-\epsilon)m$, то $OPT(\mathrm{PC}) > nt + \lceil \epsilon n/6 \rceil$,*

где $\varphi = E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ — булева формула от n переменных, $\epsilon > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о использует идею, изложенную в [9]. Пусть $\varphi = E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ — частная постановка задачи MAX-3SAT(t), где $E_j = x_j \vee y_j \vee z_j$, $\{x_j, y_j, z_j\} \in \{v_1, \bar{v}_1, \ldots, v_n, \bar{v}_n\}$, $j = 1, \ldots, m$. По определению задачи MAX-3SAT(t) $m = \vartheta(n)$. Число скобок и переменных связано неравенством $m \leq tn$. Также предположим, что $|\{v_i, \bar{v}_i\} \bigcap \{x_j, y_j, z_j\}| \leq 1$. Для того чтобы свести задачу MAX-3SAT(t) к задаче MIN-PC, построим множество из $m + nt^2$ точек, из которых m точек соответствуют предикатам $E_1, \ldots, E_m$ и t^2 точек соответствуют каждой паре переменных $(v_i, \bar{v}_i)$. Также построим множество из $2nt$ прямых, обладающих следующими свойствами:

1. Каждый предикат E_j представлен точкой P_j.

2. Каждая пара переменных $(v_i, \bar{v}_i)$ представлена сеткой из t^2 точек P^i_{kl} $(1 \leq k,\ l \leq m)$. При этом здесь и всюду далее каждый из индексов k, l принимает не более чем t необязательно последовательных значений.

3. Для каждого i $(i = 1, \ldots, n)$ и j $(j = 1, \ldots, m)$ точки $P^i_{j1}, \ldots, P^i_{jm}$ лежат на прямой, обозначаемой L_{ij}, а точки $P^i_{1j}, \ldots, P^i_{mj}$ — на прямой, обозначаемой $\bar{L}_{ij}$.

4. Ни одна прямая на плоскости, за исключением L_{ij} и $\bar{L}_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$, не содержит более двух точек множества

$$\{P^i_{kl} : i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m;\ l = 1, \dots, m\} \bigcup \{P_1, \dots, P_m\}.$$

5. Для каждого j ($j = 1, \dots, m$) точка P_j принадлежит прямой L_{ik} в том и только в том случае, если $j = k$ и $v_i \in \{x_j, y_j, z_j\}$, и P_j принадлежит прямой $\bar{L}_{ik}$ в том и только в том случае, если $j = k$ и $\bar{v}_i \in \{x_j, y_j, z_j\}$.

Сформулированные выше свойства определяют схему сведения задачи MAX-3SAT(t) к задаче MIN-PC. Действительно, точки вида P^i_{kl} не могут быть покрыты менее чем nt прямыми, поскольку ни одна прямая на плоскости не содержит более чем t из них, а общее число точек такого вида составляет nt^2. Более того, чтобы указанные точки можно было покрыть в точности nt прямыми, для каждого i ($i = 1, \dots, n$) точки P^i_{kl} ($1 \le k,\ l \le m$) должны покрываться либо прямыми L_{ij} ($1 \le j \le m$), либо прямыми $\bar{L}_{ij}$ ($1 \le j \le m$). Ни один другой набор из t прямых не может покрыть набор из t^2 точек P^i_{kl} ($1 \le k,\ l \le m$).

Предположим, что булева формула $E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ выполнима. Покажем, что в этом случае построенный набор точек

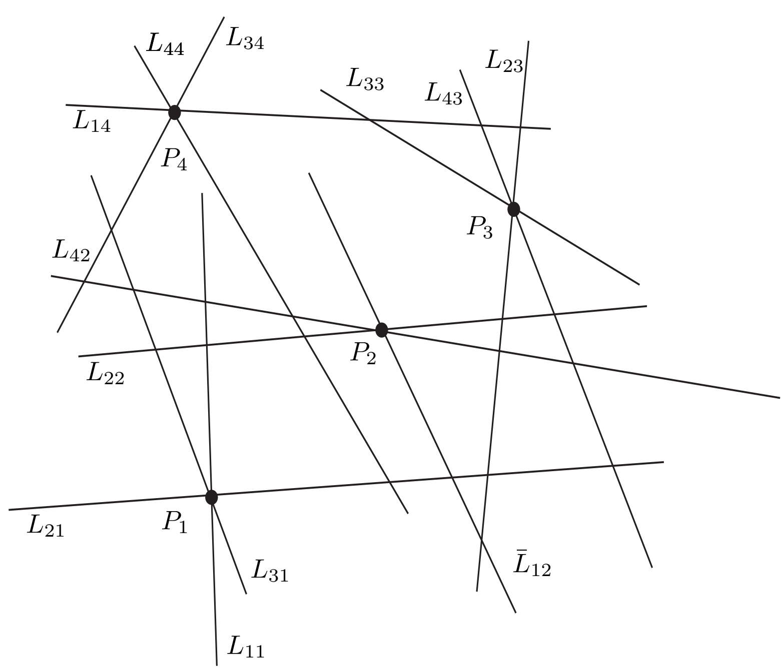
$$\{P^i_{kl} : i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m;\ l = 1, \dots, m\} \bigcup \{P_1, \dots, P_m\}$$

может быть покрыт nt прямыми. При выборе между $\{L_{ij}\}$ и $\{\bar{L}_{ij}\}$ для заданного i необходимо руководствоваться набором значений истинности для $(v_i, \bar{v}_i)$. А именно, для каждого i, если v_i — истина, то для покрытия t^2 точек P^i_{kl} выбирается $\{L_{ij}\}$ и, наоборот, если $\bar{v}_i$ — истина, то t^2 точек P^i_{kl} покрываются прямыми $\{\bar{L}_{ij}\}$.

Далее рассмотрим случай, когда булева формула $\varphi = E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ невыполнима. Пусть $OPT(\varphi) = m' < (1-\epsilon)m \le (1-\epsilon)nt$. В этом случае указанным выше способом можно покрыть nt^2 точек вида P^i_{kl} и только m' точек вида P_j. Тогда непокрытыми останутся $m - m'$ точек, обладающих тем свойством, что никакие три из них не лежат на одной прямой и, следовательно, для их покрытия необходимо $\lceil (m - m')/2 \rceil$ прямых. Тогда покрытие будет состоять из s прямых

$$s = nt + \lceil (m - m')/2 \rceil, \qquad s > nt + \lceil (m - (1-\epsilon)m)/2 \rceil = nt + \lceil \epsilon n/6 \rceil.$$

Последняя оценка справедлива в силу того, что для любой задачи 3SAT выполнено неравенство $m \ge n/3$.



Пример: $E_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$, $E_2 = \bar{v}_1 \vee v_2 \vee v_4$, $E_3 = v_2 \vee v_3 \vee v_4$, $E_4 = v_1 \vee v_3 \vee v_4$.

Обратимся к схеме построения точек P_j и P^i_{kl} с рациональными координатами. При этом численные значения числителей и знаменателей координат строящихся точек будут ограничены полиномом от n. Полагаем $P_j = (j, j^2)$, $j = 1, \dots, m$. Тогда никакие три точки из $P_1, \dots, P_m$ не лежат на одной прямой. Для каждого i $(i = 1, \dots, n)$ P^i_{kl} получается как точка пересечения L_{ik} и $\bar{L}_{il}$. Прямые L_{ij}, $\bar{L}_{ij}$ строятся последовательно в следующем порядке:

$$L_{11}, \dots, L_{1m}, \bar{L}_{11}, \dots, \bar{L}_{1m}, L_{21}, \dots, L_{2m}, \bar{L}_{21}, \dots$$

так, чтобы выполнялись свойства $3, 4, 5$ (каждый индекс принимает не более t значений). На рисунке приведен пример построения точек P_j и прямых, проходящих через данные точки, для булевой формулы, состоящей из четырех предикатов.

При построении прямой L_{ij} должны быть выполнены следующие условия:

a) L_{ij} содержит P_j тогда и только тогда, когда $v_i \in \{x_j, y_j, z_j\}$;

b) L_{ij} не содержит ни одну из ранее построенных точек вида P_k (за исключением, возможно, точки P_j, как это объясняется выше) или P^i_{kl};

c) L_{ij} не совпадает ни с одной ранее построенной прямой.

При построении прямой $\bar{L}_{ij}$ должны быть выполнены следующие условия:

a) $\bar{L}_{ij}$ содержит P_j тогда и только тогда, когда $\bar{v}_i \in \{x_j, y_j, z_j\}$;

b) $\bar{L}_{ij}$ не содержит ни одну из ранее построенных точек (за исключением, возможно, точки P_j, как это объясняется выше);

c) $\bar{L}_{ij}$ не содержит точку пересечения двух прямых вида L_{ik}, L_{il} (чтобы две точки P^i_{kj} и P^i_{lj} были различны);

d) $\bar{L}_{ij}$ не содержит точку пересечения некоторой прямой L_{ik} и другой прямой, содержащей по крайней мере две ранее построенные точки (это требуется для выполнения условия 4; пересечение $\bar{L}_{ij}$ и L_{ik} дает точку P^i_{kj});

e) $\bar{L}_{ij}$ не параллельна ни одной прямой L_{ik}, чтобы обеспечить существование точки P^i_{kj}.

Следовательно, на каждом шаге прямая должна быть построена так, чтобы, возможно, содержать одну конкретную точку вида P_j и не содержать ни одну из так называемых “запрещенных точек” и также чтобы не быть параллельной ни одной прямой из конечного набора прямых. Для этого на каждом шаге будем строить прямую, угловой коэффициент наклона которой является целым числом, наименьшим по модулю среди всех допустимых коэффициентов. Заметим, что все строящиеся указанным способом прямые будут иметь целые коэффициенты, ограниченные полиномом от n (см. [1]), поэтому координаты всех точек P^i_{kl} будут рациональными с ограниченными полиномом от n числителями и знаменателями.

Теорема доказана.

Поскольку задача MAX-3SAT(t) является MAX-SNP-полной [4], то последняя теорема доказывает, что задача MIN-PC MAX-SNP-трудна.

2.3. Принадлежность классу MAX-SNP-трудных задач задачи MASC-GP(n)

Ввиду справедливости теорем 2 и 3 схема полиномиального сведения задачи MAX-3SAT(t) к задаче MASC-GP(n) получается как следствие из них. По аналогии с OPT(PC) введем обозначение OPT(MASC-GP(2)) для оптимального значения задачи MASC-GP(2).

Теорема 4. *Существует схема полиномиального сведения задачи* MAX-3SAT(t) *к задаче* MASC-GP(2)*, преобразующая булеву формулу* φ *к частной постановке задачи* MASC-GP(2) *так, что*

- *если* $OPT(\varphi) = m$, *то* OPT(MASC-GP(2)) $= 2nt + 1$,
- *если* $OPT(\varphi) = m' < (1 - \epsilon)m$, *то* OPT(MASC-GP(2)) $> 2nt + \lceil \epsilon n/3 \rceil + 1$,

где $\varphi = E_1 \wedge \ldots \wedge E_m$ *— булева формула от* n *переменных.*

Последняя теорема доказывает MAX-SNP-трудность задачи MASC-GP(2), а следовательно, и задачи MASC-GP(n).

3. Заключение

Как показано в данной работе, задача о минимальном покрытии конечного множества точек плоскости множеством прямых (MIN-PC) MAX-SNP-трудна. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете, сформулированная в пространстве фиксированной размерности, при условии общности положения разделяемых множеств MASC-GP(n) также MAX-SNP-трудна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Megiddo N., Tamir A.** On the complexity of locating linear facilities in the plane // Oper. Res. Lett. 1982. Vol. 1, no 5. P. 194–197.
2. **Khachai M.Yu.** Computational and approximational complexity of combinatorial problems related to the committee polyhedral separability of finite sets // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, no 2. P. 237–242.
3. **Khachay M., Poberii M.** Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. 2009. Vol. 20, no 2. P. 217–234.
4. **Papadimitriou C., Yannakakis M.** Optimization, approximation, and complexity classes // J. Comput. System Sci. 1991. Vol. 43, no. 3. P. 425–440.
5. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 439 с.
6. **Мазуров Вл. Д.** Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.
7. **Хачай М.Ю.** О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 6. С. 742–745.
8. **Vazirani V.** Approximation algorithms. Berlin: Springer, 2001. 378 p.
9. **Kumar Anil V.S., Arya Sunil, Ramesh H.** Hardness of set cover with intersection 1 // Proc. 27-th International Colloquium on Automata, Languages and Programming. LNCS. 2000. Vol. 1853. P. 624-635.

Поберий Мария Ивановна
аспирант
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: maschas_briefen@mail.ru

Поступила 22.03.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.658.4

КОМБИНИРОВАННЫЕ ШТРАФЫ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 1-ГО РОДА[1]

Л. Д. Попов

Исследуются возможности комбинированного применения внутренних и внешних штрафных функций для отыскания обобщенных (аппроксимационных) решений несобственных задач линейного и выпуклого программирования 1-го рода. Приводятся схемы алгоритмов, теоремы сходимости, результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: несобственные задачи математического программирования, процедуры оптимальной коррекции, метод штрафных функций, центральный путь.

L. D. Popov. Combined penalties and generalized solutions for improper problems of linear and convex programming of the first kind.

The potential of the combined application of interior and exterior penalty functions in finding generalized (approximation) solutions to improper problems of linear and convex programming of the first kind is investigated. Algorithm schemes, convergence theorems, and results of numerical experiments are presented.

Keywords: improper problems of mathematical programming, optimal correction procedures, penalty function method, central pass.

Введение

Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования — это задачи, для которых не выполняются основные соотношения теории двойственности [1], главным образом, условия обоюдной разрешимости прямой и двойственной задач и совпадения их оптимальных значений. В частности, к несобственным относятся задачи с противоречивыми ограничениями [2]. Причины таких противоречий могут лежать как в ошибках самой математической модели и ее информационного обеспечения, так и в реальных противоречиях моделируемого объекта, которые несобственная модель просто адекватно отражает [3]. Разумеется, противоречивая модель не имеет решения в привычном значении этого термина. Необходимо искать ее обобщенное (компромиссное, аппроксимационное) решение.

Одним из способов получения компромиссного решения несобственной задачи является корректировка ее исходных данных (не затрагивающая собственно структуры модели) до того состояния, при котором задача становится собственной и, следовательно, имеющей решение. Это решение и выбирается в качестве обобщенного решения исходной постановки при условии, что проведенная корректировка в том или ином смысле минимальна среди всех возможных [1–6]. С этой точки зрения наиболее простым, но важным для приложений способом корректировки задачи является исправление правых частей ее ограничений по принципу минимальной невязки. Задачи, которые таким образом приводятся к собственному типу, принято называть несобственными 1-го рода (точные определения можно найти в [2]).

К настоящему времени накоплен значительный математический инструментарий поиска обобщенных решений несобственных задач математического программирования (см., например, [2–4, 7–11] и др.), в том числе задач 1-го рода. Для численного построения таких решений

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00273) и Президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1003, 09-П-1-1001 и 09-С-1-1010).

широко применялись внешние штрафные функции, оригинальные схемы двойственности, лексикографические модели, фейеровские отображения и др. В последнее время возник интерес к применению для означенных целей и внутренних штрафных функций [12,13]. В частности, ниже будет предложено комбинированное применение методов внешних и внутренних штрафных функций для поиска одного класса обобщенных решений, связанных с минимальной по норме коррекцией правых частей ограничений исходной задачи. Приводятся схемы алгоритмов, теоремы сходимости, результаты численных экспериментов.

1. Постановка задачи и исходные предположения

Рассмотрим несобственную (противоречивую, не имеющую решения в обычном смысле) задачу выпуклого программирования 1-го рода

$$\inf\{f_0(x):\ f_j(x) \le 0\ (j=1,...,m),\ x\in\mathbb{R}^n,\ x\ge 0\}. \tag{1.1}$$

Здесь функции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ всюду конечны, выпуклы и дважды непрерывно дифференцируемы (последнее условие является необязательным и введено для простоты построения решающих правил и алгоритмов). Требования неотрицательности переменных включены в задачу как простой пример так называемых “директивных” ограничений (ограничений, не подлежащих коррекции).

Введем параметры коррекции $u=(u_1,\ldots,u_m)\in\mathbb{R}^m$ и обозначим

$$M(u)=\{x:\ f_j(x)\le u_j\ (j=1,\ldots,m),\ x\in\mathbb{R}^n,\ x\ge 0\}, \tag{1.2}$$

$$v(u)=\inf\{f_0(x):\ x\in M(u)\}. \tag{1.3}$$

Напомним, что задача (1.1) называется несобственной 1-го рода, если ее ограничения противоречивы (т. е. $M(0)=\varnothing$), но при этом она может быть трансформирована в собственную, т. е. разрешимую путем коррекции одних лишь правых частей ее ограничений. В действительности мы потребуем большего и будем рассматривать лишь класс задач, в которых множества $M(u)$ либо пусты, либо ограничены (не обязательно равномерно). Как известно, для этого достаточно, чтобы было ограничено хотя бы одно из этих множеств (в силу выпуклости описывающих их функций [14]). Обозначим этот класс символом $\mathbb{Q}$.

В соответствии с общим принципом минимальной невязки введем вектор оптимальной коррекции

$$\bar u=\arg\inf_{u\in\Omega}\|u\|,\quad \text{где}\quad \Omega=\{u:\ M(u)\ne\varnothing\}, \tag{1.4}$$

и в качестве обобщенного (аппроксимационного) решения исходной задачи рассмотрим оптимальный вектор(ы) задачи

$$v(\bar u)=\inf\{f_0(x):\ f_j(x)\le\bar u_j\ (j=1,\ldots,m),\ x\ge 0,\ x\in\mathbb{R}^n\}. \tag{1.5}$$

Подчеркнем, что сделанное выше предположение об ограниченности множеств (1.2) и выпуклости (а следовательно, и непрерывности) всех входящих в исходную задачу функций гарантирует нам конечность и достижимость точных нижних граней в задачах (1.4), (1.5). Более того, при сделанных предположениях

$$M(\bar u)=\operatorname{Arg}\min_{x\ge 0}\Phi(x),\quad \text{где}\quad \Phi(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \max\{0,f_j(x)\}^2,$$

и задача (1.5) v-устойчива по правым частям ограничений в следующем смысле:

$$\Big(u_\epsilon\in\Omega,\ \|u_\epsilon-\bar u\|<\epsilon,\quad 0<\epsilon\to 0\Big)\quad\Longrightarrow\quad v(u_\epsilon)\to v(\bar u).$$

Цель данной работы — предложить численные методы одновременного отыскания вектора оптимальной коррекции $\bar u$, оптимального значения $v(\bar u)$ и обобщенного решения исходной задачи (хотя бы одного оптимального вектора $\bar x$ задачи (1.5)).

2. Новые штрафные конструкции

Для решения поставленной выше задачи будем использовать две штрафные функции комбинированного типа

$$B^1_\epsilon(x,u) = f_0(x) - \epsilon_1 \sum_{j=1}^{m} \ln(u_j - f_j(x)) - \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \frac{1}{2\epsilon_2}||u||^2, \tag{2.1}$$

$$B^2_\epsilon(x,u) = f_0(x) + \epsilon_1 \sum_{j=1}^{m} (u_j - f_j(x))^{-1} + \epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1} + \frac{1}{2\epsilon_2}||u||^2, \tag{2.2}$$

где $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ — штрафной параметр. Первая функция использует логарифмические барьеры, а вторая — обратные. В обеих функциях условие минимальности вектора коррекции реализуется на основе идеологии метода внешних штрафов. Для краткости последующих обозначений и ссылок на известные факты выпуклого анализа [14] нам будет удобнее считать эти функции заданными на всем пространстве, хотя и принимающими вне своей естественной области определения[2] несобственное значение[3] $+\infty$.

Постараемся выяснить условия, при которых точки минимума $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ функций $B^1_\epsilon(x,u)$ и $B^2_\epsilon(x,u)$ существуют[4] и в асимптотике (при $0 < \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to 0$) доставляют обобщенное решение задачи (1.1) в следующем смысле:

$$\bar{u}_\epsilon \to \bar{u} = \operatorname{argmin}\{||u|| : \ M(u) \neq \varnothing\},$$

$$f_0(\bar{x}_\epsilon) \to v(\bar{u}) = \min\{f_0(x) : \ f_j(x) \le \bar{u}_j \ (j = 1, \ldots, m), \ x \ge 0, \ x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$\max\{0, f_j(\bar{x}_\epsilon) - \bar{u}_j\} \to 0 \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Подчеркнем, что при наших предположениях обе штрафные функции являются гладкими, и при их минимизации можно применять методы второго порядка.

Начнем с вопросов существования точек $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$.

Утверждение 1. *Пусть задача* (1.1) *принадлежит классу* $\mathbb{Q}$. *Тогда точки* (*конечного*) *минимума функций* (2.1), (2.2) *существуют для всех* $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно [14] показать, что для обеих рассматриваемых функций

$$\lim_{\gamma \to +\infty} B^k_\epsilon(x + \gamma\Delta x, \ u + \gamma\Delta u) = +\infty \qquad (k = 1, 2)$$

при всех $(x,u) \in D$ и ненулевых направлениях $s = (\Delta x, \Delta u)$.

Рассмотрим функцию (2.1). Пусть $||\Delta u|| > 0$. В силу предположений о выпуклости функций $f_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ и свойств логарифмической функции имеем неравенства[5]

$$f_0(x + \gamma\Delta x) \ge f_0(x) + \gamma\langle\nabla f_0(x), \Delta x\rangle,$$

[2] Речь идет о непустой выпуклой области $D = \{(x,u) : \ f_j(x) < u_j \ (j = 1, \ldots, m), \ x > 0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

[3] Будем считать, что функции (2.1), (2.2) отображают $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ в расширенную числовую прямую $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. В терминологии [14] обе они являются собственными замкнутыми выпуклыми функциями с общей эффективной областью D.

[4] Для простоты в работе применяется одно и то же обозначение $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ для точек минимума обеих рассматриваемых функций, хотя эти точки обязательно не совпадают.

[5] Всюду ниже угловые скобки означают скалярное произведение векторов в пространстве соответствующей размерности.

$$\ln\left(u_j+\gamma\Delta u_j-f_j(x+\gamma\Delta x)\right)\le \ln(u_j-f_j(x))+\gamma\,\frac{\Delta u_j-\langle\nabla f_j(x),\Delta x\rangle}{u_j-f_j(x)},$$

$$\ln(x_i+\gamma\Delta x_i)\le \ln x_i+\gamma\,\frac{\Delta x_i}{x_i}.$$

Отсюда

$$B^1_\epsilon(x+\gamma\Delta x,u+\gamma\Delta u)$$

$$=f_0(x+\gamma\Delta x)-\epsilon_1\sum_{j=1}^m\ln\left(u_j+\gamma\Delta u_j-f_j(x+\gamma\Delta x)\right)-\epsilon_1\sum_{i=1}^n\ln(x_i+\gamma\Delta x_i)+\frac{1}{2\epsilon_2}||u+\gamma\Delta u||^2$$

$$\ge f_0(x)+\gamma\langle\nabla f_0(x),\Delta x\rangle-\epsilon_1\sum_{j=1}^m\Big[\ln(u_j-f_j(x))+\gamma\frac{\Delta u_j-\langle\nabla f_j(x),\Delta x\rangle}{u_j-f_j(x)}\Big]$$

$$-\epsilon_1\sum_{i=1}^n\Big[\ln x_i+\gamma\frac{\Delta x_i}{x_i}\Big]+\frac{1}{2\epsilon_2}\left(||u||^2+2\gamma\langle u,\Delta u\rangle+\gamma^2||\Delta u||^2\right).$$

Это значит, что в рассматриваемом случае

$$B^1_\epsilon(x+\gamma\Delta x,u+\gamma\Delta u)\ \ge\ K_1+K_2\gamma+K_3\gamma^2\ \to\ +\infty\quad\text{при}\quad\gamma\to+\infty,$$

так как $K_3=||\Delta u||^2/(2\epsilon_2)>0$; смысл прочих констант очевиден.

Случай $||\Delta u||=0$ вытекает из общей теории логарифмических барьерных функций [13], поскольку в этом случае функция (2.1) отличается от обычной логарифмической штрафной функции скорректированной задачи (1.3) лишь постоянным слагаемым $||u||^2/(2\epsilon_2)$.

Функция (2.2) рассматривается аналогично.

Утверждение доказано.

Следующее утверждение обосновывает совокупную ограниченность точек минимума функций (2.1), (2.2) при всех достаточно малых значениях штрафного параметра.

Утверждение 2. *Пусть* $\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2)>0$ *таково, что* $0<\epsilon_1,\epsilon_2<\bar\epsilon$. *Тогда найдется такое* $K=K(\bar\epsilon)>0$, *что для всех точек минимума* $(\bar x_\epsilon,\bar u_\epsilon)$ *функций* (2.1), (2.2) *верно неравенство* $||\bar u_\epsilon||<K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию (2.2) и зафиксируем точку $(x',u')\in D$. С одной стороны,

$$B^2_\epsilon(x',u')=f_0(x')+\epsilon_1\sum_{j=1}^m(u'_j-f_j(x'))^{-1}+\epsilon_1\sum_{i=1}^n(x'_i)^{-1}+\frac{1}{2\epsilon_2}||u'||^2=K_4+\epsilon_1K_5+\frac{K_6}{\epsilon_2},$$

где смысл констант $K_4>v(u')$, $K_5>0$, $K_6>0$ очевиден (они зависят от выбора (x',u')).

С другой стороны, в силу выпуклости функции оптимума $v(u)$

$$B^2_\epsilon(x',u')\ge\min_{x,u}B^2_\epsilon(x,u)=B^2_\epsilon(\bar x_\epsilon,\bar u_\epsilon)=\min_x B^2_\epsilon(x,\bar u_\epsilon)\ge v(\bar u_\epsilon)+\frac{1}{2\epsilon_2}||\bar u_\epsilon||^2$$

$$\ge K_7+K_8||\bar u_\epsilon||+\frac{1}{2\epsilon_2}||\bar u_\epsilon||^2$$

при некоторых константах K_7, K_8 (их значение и знак в данном случае несущественны). В итоге имеем неравенство

$$||\bar u_\epsilon||^2\le K_9+\bar\epsilon K_{10}||\bar u_\epsilon||,$$

где

$$K_9=2[(|K_4|+K_5)\bar\epsilon+K_5\bar\epsilon^2+K_6],\qquad K_{10}=2|K_8|\bar\epsilon.$$

Отсюда и вытекает искомая ограниченность компонент $\bar u_\epsilon$.

Случай функции (2.1) рассматривается аналогично.

Утверждение доказано.

Следствие 1. *Пусть задача* (1.1) *принадлежит классу* $\mathbb{Q}$. *Тогда для всех* $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ *таких, что* $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < \bar{\epsilon}$, *существуют точки конечного минимума функций* (2.1), (2.2), *причем эти точки ограничены в совокупности.*

Перейдем к обсуждению аппроксимационных свойств точек $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$.

Утверждение 3. *Пусть задача* (1.1) *принадлежит классу* $\mathbb{Q}$ *и* $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ — *точки минимума функций* (2.1), (2.2). *Тогда* $\bar{u}_\epsilon \to \bar{u}$ *при* $0 < \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию (2.1) (для функции (2.2) рассуждения аналогичны). В обсуждаемых нами точках выполнены необходимые условия минимума

$$\nabla_x B^1_\epsilon(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon) = \nabla f_0(\bar{x}_\epsilon) + \epsilon_1 \sum_{j=1}^m \frac{\nabla f_j(\bar{x}_\epsilon)}{\bar{u}^\epsilon_j - f_j(\bar{x}_\epsilon)} - \epsilon_1 \begin{pmatrix} (\bar{x}^\epsilon_1)^{-1} \\ (\bar{x}^\epsilon_2)^{-1} \\ \vdots \\ (\bar{x}^\epsilon_n)^{-1} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

и

$$\nabla_u B^1_\epsilon(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon) = -\epsilon_1 \begin{pmatrix} (\bar{u}^\epsilon_1 - f_1(\bar{x}_\epsilon))^{-1} \\ (\bar{u}^\epsilon_2 - f_2(\bar{x}_\epsilon))^{-1} \\ \vdots \\ (\bar{u}^\epsilon_m - f_m(\bar{x}_\epsilon))^{-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\epsilon_2}\, \bar{u}_\epsilon = 0.$$

Отсюда

$$\nabla f_0(\bar{x}_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon_2} \sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j \nabla f_j(\bar{x}_\epsilon) - \epsilon_1 \begin{pmatrix} (\bar{x}^\epsilon_1)^{-1} \\ (\bar{x}^\epsilon_2)^{-1} \\ \vdots \\ (\bar{x}^\epsilon_n)^{-1} \end{pmatrix} = 0$$

или, что то же,

$$\sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j \nabla f_j(\bar{x}_\epsilon) = \epsilon_1 \epsilon_2 \begin{pmatrix} (\bar{x}^\epsilon_1)^{-1} \\ (\bar{x}^\epsilon_2)^{-1} \\ \vdots \\ (\bar{x}^\epsilon_n)^{-1} \end{pmatrix} - \epsilon_2 \nabla f_0(\bar{x}_\epsilon). \tag{2.4}$$

Выберем теперь произвольные $u \in \Omega$, $x \in M(u)$ так, что $f_j(x) \le u_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, $x \ge 0$. Оценим скалярное произведение

$$\langle \bar{u}^\epsilon, \bar{u}^\epsilon - u \rangle = \sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j (\bar{u}^\epsilon_j - u_j) \le \sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j (\bar{u}^\epsilon_j - f_j(x)) = \sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j (\bar{u}^\epsilon_j - f_j(\bar{x}^\epsilon))$$

$$+ \sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j (f_j(\bar{x}^\epsilon) - f_j(x)) \le m\epsilon_1\epsilon_2 + \sum_{j=1}^m \bar{u}^\epsilon_j \langle \nabla f_j(\bar{x}_\epsilon), \bar{x}_\epsilon - x \rangle.$$

Подставляя сюда формулу (2.4), получаем (с учетом неотрицательности x и $\bar{x}_\epsilon$)

$$\langle \bar{u}^\epsilon, \bar{u}^\epsilon - u \rangle \le (m+n)\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2 \langle \nabla f_0(\bar{x}_\epsilon), x - \bar{x}_\epsilon \rangle - \epsilon_1\epsilon_2 \sum_{i=1}^n (\bar{x}^\epsilon_i)^{-1} x_i$$

$$\le (m+n)\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2 \langle \nabla f_0(\bar{x}_\epsilon), x - \bar{x}_\epsilon \rangle.$$

В силу следствия 1 это означает, что любая предельная точка $\hat{u}$ ограниченной совокупности точек $\bar{u}_\epsilon$ при $0 < \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to 0$ обладает свойством

$$\langle \hat{u}, \hat{u} - u \rangle \le 0 \qquad \forall u \in \Omega.$$

Это свойство однозначно определяет проекцию нуля на множество Ω, т. е. точку $\bar{u}$. В силу единственности такой проекции имеем сходимость $\bar{u}_\epsilon \to \bar{u}$ при $0 < \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to 0$.

Утверждение доказано.

Следствие 2. *Пусть задача* (1.1) *принадлежит классу* $\mathbb{Q}$ *и* $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ *— точки минимума функций* (2.1), (2.2). *Тогда* $\max\{0, f_j(\bar{x}_\epsilon) - \bar{u}_j\} \to 0$ $(j = 1, \dots, m)$ *при* $0 < \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to 0$.

Вытекает из последнего утверждения в силу неравенств $\bar{u}_j^\epsilon - f_j(\bar{x}_\epsilon) > 0$ $(j = 1, \dots, m)$.

Наконец, приведем заключительное

Утверждение 4. *Пусть задача* (1.1) *принадлежит классу* $\mathbb{Q}$ *и* $(\bar{x}_\epsilon, \bar{u}_\epsilon)$ *— точки минимума функций* (2.1), (2.2). *Тогда*

$$f_0(\bar{x}_\epsilon) \to v(\bar{u}) = \min\{f_0(x) : \ f_j(x) \le \bar{u}_j \ (j = 1, \dots, m), \ x \ge 0, \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

при $0 < \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2) \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось, $\bar{x}_\epsilon$ является допустимой точкой для задачи

$$v(\bar{u}_j^\epsilon) = \inf\{f_0(x) : \ x \in M(\bar{u}_j^\epsilon)\}, \tag{2.5}$$

так что $f_0(\bar{x}_\epsilon) \ge v(\bar{u}_j^\epsilon)$. Но $\bar{x}_\epsilon$ является также и ее точкой Слейтера. Поэтому задача (2.5) не просто разрешима, но разрешима одновременно со своей двойственной задачей

$$\sup_{(w,s) \ge 0} \inf_x \mathcal{L}(x, w, s),$$

где $\mathcal{L}(x, w, s) = f_0(x) + \sum_{j=1}^m w_j(f_j(x) - \bar{u}_j^\epsilon) - \sum_{i=1}^n s_i x_i$ — функция Лагранжа задачи (2.5), причем по теореме слабой двойственности

$$v(\bar{u}_j^\epsilon) \ge \inf_x \mathcal{L}(x, w, s), \tag{2.6}$$

каковы бы ни были $w \ge 0$, $s \ge 0$. Дальнейшие рассуждения проведем для функции (2.1). Положим $w_j = \epsilon_1(\bar{u}_j^\epsilon - f_j(\bar{x}^\epsilon))^{-1} > 0$, $s_i = \epsilon_1(\bar{x}_i^\epsilon)^{-1} > 0$. В силу соотношений (2.3) для этой функции имеем

$$\inf_x \mathcal{L}(x, w, s) = \mathcal{L}(\bar{x}_\epsilon, w, s)$$

$$= f_0(\bar{x}_\epsilon) + \epsilon_1 \sum_{j=1}^m (\bar{u}_j^\epsilon - f_j(\bar{x}^\epsilon))^{-1}(f_j(\bar{x}_\epsilon) - \bar{u}_j^\epsilon) - \epsilon_1 \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i^\epsilon)^{-1} \bar{x}_i^\epsilon = f_0(\bar{x}_\epsilon) - (m+n)\epsilon_1,$$

так что следствием (2.6) является неравенство

$$v(\bar{u}_j^\epsilon) \ge f_0(\bar{x}_\epsilon) - (m+n)\epsilon_1.$$

Таким образом,

$$v(\bar{u}_j^\epsilon) \le f_0(\bar{x}_\epsilon) \le v(\bar{u}_j^\epsilon) + (m+n)\epsilon_1.$$

Доказательство утверждения завершает ссылка на свойство v-устойчивости задачи (1.5).

Случай функции (2.2) рассматривается аналогично.

З а м е ч а н и е. Как видно из приведенных доказательств, штрафные параметры ϵ_1, ϵ_2 работают независимо друг от друга. Первый из них отвечает за точность, с которой компонента $\bar{x}_\epsilon$ дает решение задачи (1.3) при $u = \bar{u}_\epsilon$, а второй — за близость компоненты $\bar{u}_\epsilon$ к вектору оптимальной коррекции $\bar{u}$.

3. Случай задачи линейного программирования

В качестве частной, но важной для приложений постановки рассмотрим задачу линейного программирования

$$\min\{\langle c,x\rangle:\ Ax=b,\ x\geq 0\};\tag{3.1}$$

здесь числовая матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и векторы c и b соответствующей размерности заданы, x — вектор неизвестных. Как и ранее, будем предполагать, что задача (3.1) — несобственная 1-го рода [2]. Это означает, что ее ограничения несовместны, но совместны ограничения двойственной к ней задачи

$$\max\{\langle b,w\rangle:\ A^Tw\leq c\}.$$

Вследствие этого задача с откорректированными правыми частями ограничений

$$\min\{\langle c,x\rangle:\ Ax=b-u,\ x\geq 0\}\qquad(=\upsilon(u)),$$

где $u=(u_1,\ldots,u_m)$ — вектор параметров коррекции, автоматически становится разрешимой, как только система ее ограничений становится совместной.

Как и выше, обозначим

$$M(u)=\{x:\ \ Ax=b-u,\ \ x\geq 0\}$$

и введем вектор оптимальной коррекции

$$\bar u=\arg\min\{\,||u||:\ M(u)\neq\varnothing\}.$$

В качестве обобщенного решения исходной задачи будем рассматривать решения (в обычном смысле этого термина) задачи

$$\upsilon(\bar u)=\min\{\langle c,x\rangle:\ Ax=b-\bar u,\ x\geq 0\}.\tag{3.2}$$

Применим основные идеи разд. 1, 2 для поиска оптимального вектора коррекции $\bar u$ и решения скорректированной задачи (3.2). Придавая этим идеям несколько иной формат, введем аффинное многообразие

$$\mathbb{H}=\{(x,u):\ Ax-u=b\}\subset\mathbb{R}^{n+m}$$

и комбинированную штрафную функцию

$$B^3_\epsilon(x,u)=\langle c,x\rangle-\epsilon_1\sum_{i=1}^n\ln x_i+\frac{1}{2\epsilon_2}||u||^2,\qquad \epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2)>0.$$

Обозначим через $(\bar x_\epsilon,\bar u_\epsilon)$ точку минимума функции $B^3_\epsilon(x,u)$ относительно многообразия $\mathbb{H}$.

Утверждение 5. *Пусть допустимое множество задачи* (3.2) *ограничено. Тогда для каждого* $\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2)>0$ *существует* $(\bar x_\epsilon,\bar u_\epsilon)$ *— единственная точка минимума функции* $B^3_\epsilon(x,u)$ *относительно многообразия* $\mathbb{H}$*, и для нее выполнены условия оптимальности*

$$Ax+u-b=0,\qquad A^Ty+\epsilon_1\begin{pmatrix}(x_1)^{-1}\\(x_2)^{-1}\\\vdots\\(x_n)^{-1}\end{pmatrix}-c=0,\qquad y-\frac{1}{\epsilon_2}\,u=0;\tag{3.3}$$

здесь $y=(y_1,\ldots,y_m)$ *— соответствующие множители Лагранжа. При этом* $\bar x_\epsilon>0$ *и имеет место сходимость* $\bar u_\epsilon\to\bar u,\ \langle c,\bar x_\epsilon\rangle\to\langle c,\bar x\rangle,\ A\bar x_\epsilon+\bar u_\epsilon\to b$ *при* $0<\epsilon=(\epsilon_1,\epsilon_2)\to 0.$

З а м е ч а н и е. Рассмотрим частный случай $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon > 0$. В уравнениях (3.3) сделаем замену переменных $y = \dfrac{1}{\epsilon}\, u$ и введем дополнительные переменные $q^T = \epsilon^2 \big((x_1)^{-1}, \ldots, (x_n)^{-1}\big)$. Получим систему нелинейных уравнений с (числовым) параметром

$$\Phi(x, u, q; \epsilon) = \begin{pmatrix} Ax + u - b \\ A^T u + q - \epsilon c \\ q * x - \epsilon^2 e \end{pmatrix} = 0; \tag{3.4}$$

здесь “ $*$ ” обозначает покомпонентное произведение векторов (по Адамару), $e = (1, \ldots, 1)^T$, $\epsilon > 0$ — параметр. Изучим поведение решения этой системы при $\epsilon \to +0$.

При фиксированном $\epsilon > 0$ решение системы (3.4) можно получить как предел итерационной последовательности $\{x^s, u^s, q^s\}$, элементы которой пересчитываются по правилу

$$x^{s+1} = x^s + \alpha\Delta x, \qquad u^{s+1} = u^s + \alpha\Delta u, \qquad q^{s+1} = q^s + \alpha\Delta q,$$

где направление спуска находится по формуле Ньютона

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta u \\ \Delta q \end{pmatrix} = -\Big(\nabla\Phi(x_s, u_s, q_s; \epsilon)\Big)^{-1} \Phi(x_s, u_s, q_s; \epsilon).$$

Матрица Якоби отображения $\Phi : \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathbb{R}^{2n+m}$ имеет вид

$$\nabla\Phi(x, u, q; \epsilon) = \begin{pmatrix} A & E_{m\times m} & 0 \\ 0 & A^T & E_{n\times n} \\ Q_{n\times n} & 0 & X_{n\times n} \end{pmatrix},$$

где $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$, $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ — диагональные матрицы. Эта матрица не вырождена при всех $q > 0$, $x > 0$ и имеет обратную матрицу

$$\Big(\nabla\Phi(x, u, q; \epsilon)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} DA^T H & (DM - E)D & (E - DM)Q^{-1} \\ H & HAD & -HAQ^{-1} \\ -A^T H & E - MD & MQ^{-1} \end{pmatrix},$$

где $D = XQ^{-1}$, $H = (E + ADA^T)^{-1}$, $M = A^T H A$ (легко проверяется непосредственным перемножением выписанных матриц). Начальные приближения $x > 0$, $q > 0$, u — произвольные. Что касается шагового параметра $\alpha > 0$, то в малой окрестности решения его можно полагать равным 1. Для повышения робастности алгоритма можно подключать различные процедуры корректировки этого параметра (типа дробления пополам) с тем, чтобы исключить попадание в отрицательную область и обеспечить строгое убывание значений минимизируемой функции.

Рассмотрим теперь зависимость решения нашей системы от параметра $\epsilon > 0$. В силу известной теоремы о неявной функции[6] уравнения (3.4) на любом открытом интервале $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ неявно определяют три гладкие траектории $x = x(\epsilon)$, $u = u(\epsilon)$, $q = q(\epsilon)$. При этом

[6] **Теорема** (о неявной функции). Пусть векторная функция $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ такова, что

(а) при некоторых $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство $F(\bar{w}, \bar{z}) = 0$;

(б) функция F непрерывна и в любой точке некоторой окрестности $O(\bar{w}, \bar{z})$ имеет непрерывный якобиан по z, причем последний не вырожден.

Тогда существует непрерывная функция $z = \phi(w)$ такая, что $F(w, \phi(w)) = 0$.

Более того, если $F(\cdot, \cdot)$ есть l раз непрерывно дифференцируемая функция, то же самое можно сказать и про функцию $z = \phi(w)$. В частности,

$$\nabla\phi(w) = -\Big(\nabla_z F(w, \phi(w))\Big)^{-1} \nabla_w F(w, \phi(w)).$$

$$\nabla x(\epsilon) = (DM - E)Dc + 2\epsilon(E - DM)Q^{-1}e, \qquad \nabla u(\epsilon) = HADc - 2\epsilon HAQ^{-1}e,$$

$$\nabla q(\epsilon) = (E - MD)c + 2\epsilon MQ^{-1}e.$$

Эти траектории описывают некоторый обобщенный *центральный путь* несобственной задачи (3.1), который при $\epsilon \to +0$ ведет нас к искомому решению.

Заметим, что оба представленных подхода можно совмещать аналогично тому, как это делается в современных методах типа "предиктор-корректор" [15], где на каждом шаге итерационного процесса комбинируются два направления спуска, одно из которых отвечает за решение системы вида (3.4), а другое отслеживает уменьшение штрафного параметра $\epsilon > 0$.

4. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент проводился как на разрешимых, так и на несобственных задачах линейного программирования средней размерности в каноническом формате в среде MATLAB. Разреженные матрицы коэффициентов тестовых задач генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от -1 до 1. Заполненность матриц ненулевыми элементами составляла 3–8%. Правые части ограничений и коэффициенты целевой функции подбирались таким образом, чтобы решение задачи совпадало с некоторым заданным заранее. Изучалось поведение решения систем (3.4) в зависимости от изменения параметра $\epsilon > 0$. Формулы расчетов соответствуют приведенным в конце предыдущего раздела. Средние результаты представлены ниже в таблице.

Точность получаемого решения в зависимости от значения штрафного параметра

Размерность задачи	Значение $\epsilon > 0$	Точность по ограничениям	Точность по функционалу	Точность по переменным	Число итераций
50×150	1.0000	2.5656	45.621	4.8122	15
	0.1000	0.6452	3.9850	2.3614	16
	0.0100	0.0698	0.4902	0.3017	18
	0.0010	0.0074	0.0510	0.0283	17
	0.0001	0.0008	0.0067	0.0032	19
100×300	1.0000	7.3956	5.5722	6.6382	21
	0.1000	0.9644	6.8018	3.7336	22
	0.0100	0.0998	0.9790	0.8550	20
	0.0010	0.0099	0.1061	0.0786	18
	0.0001	0.0010	0.0682	0.0029	19
300×900	1.0000	12.476	21.932	11.518	32
	0.1000	1.6781	19.520	6.6897	29
	0.0100	0.1730	2.8901	2.5301	28
	0.0010	0.0174	0.3162	1.3018	31
	0.0001	0.0018	0.0223	0.5953	27

Как видно, точность решения *линейно* зависит от значения штрафного параметра $\epsilon > 0$. Число итераций (оно показывает, сколько раз решалась система типа (3.4)) сравнительно невелико. Отметим, что при очень малых значениях штрафного параметра на результат начинают заметно влиять ошибки округления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного и выпуклого программирования // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 272–276.
2. **Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
3. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
4. Исследования по несобственным задачам оптимизации: Сб. статей. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. 78 с.
5. **Морозов В.А.** О псевдорешениях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 1387–1391.
6. **Кочиков И.В., Матвиенко А.Н., Ягола А.Г.** Обобщенный принцип невязки для решения несовместных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 7. С. 1087–1090.
7. Параметрическая оптимизация и методы аппроксимации несобственных задач математического программирования: Сб. статей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 136 с.
8. Нерегулярная двойственность в математическом программировании: Сб. статей. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 78 с.
9. **Попов Л.Д.** Применение модифицированного prox-метода для оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 3. С. 261–266.
10. **Попов Л.Д.** Симметрические системы и фейеровские процессы для несобственных задач линейного программирования // Методы оптимизации и их приложения: тр. XIII междунар. Байкальской шк.-семинара / ИСЭМ СО РАН. Иркутск, 2005. Т. 1. С.141–146.
11. **Жадан В.Г.** Численные методы линейного и нелинейного программирования. Вспомогательные функции в условной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 2002. 160 с.
12. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
13. **Фиакко А., Мак–Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
14. **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
15. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. Chichester: John Wiley & Sons, 1997. 484 p.

Попов Леонид Денисович
д-р. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 31.03.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 514.75

О СВЯЗИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРИВЫХ СО СВОЙСТВАМИ ИХ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ

Е. А. Рогозинников

В работе устанавливаются связи между геометрическими свойствами кривых и свойствами их групп движений. Для кривых определяются движения двух видов — положительные и отрицательные и дается необходимое и достаточное условие того, что гладкая кривая обладает движением того или иного вида. Приводятся различные определения понятия группы движений кривой и указываются классы кривых, для которых эти понятия совпадают. Исследуются замкнутые кривые в терминах их групп движений, и дается необходимое и достаточное условие того, что гладкая кривая является замкнутой.

Ключевые слова: кривая, образ кривой, движение, группа движений, кривизны кривой, замкнутость кривой.

E. A. Rogozinnikov. On the connection of geometric properties of curves and properties of their motion groups.

Connections between geometric properties of curves and properties of their motion groups are established. Motions of two types, namely, positive and negative motions, are defined for curves. A necessary and sufficient condition for a smooth curve to possess a motion of one of these types is given. The notion of a motion group of a curve is defined in different ways, and classes of curves are specified for which these notions coincide. Closed curves are investigated in terms of their motion groups, and a necessary and sufficient condition for a smooth curve to be closed is presented.

Keywords: curve, image of a curve, motion, group of motions, curvatures of a curve, closedness of a curve.

Кривые в аффинных пространствах являются классическим объектом исследований [1–3]. Группы движений геометрических объектов являются важнейшими и классическими производными структурами, в терминах которых осуществляется классификация геометрических объектов и проводится исследование их различных свойств [5].

В настоящей работе устанавливаются некоторые связи между геометрическими свойствами кривых и свойствами их групп движений. Для кривых определяются движения двух видов — положительные и отрицательные, и дается необходимое и достаточное условие того, что гладкая кривая обладает движением того или иного вида. Приводятся различные определения понятия группы движений кривой и указываются классы кривых, для которых эти понятия совпадают.

Одним из важных вопросов теории кривых, берущим свое начало из небесной механики, является вопрос о замкнутости данной кривой [4]. В настоящей работе исследуются замкнутые кривые в терминах их групп движений, и дается необходимое и достаточное условие того, что гладкая кривая является замкнутой.

Кривой назовем гладкое отображение $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Без ограничения общности положим, что все кривые имеют постоянную абсолютную скорость, т. е. $|\dot{\alpha}| \equiv \mathrm{const}$. В данной работе мы не будем уточнять класс гладкости этого отображения, считая, что он достаточно высок для того, чтобы все выполняемые операции имели смысл.

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$. *Движением* M назовем аффинное изометрическое преобразование A пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что $A(M) = M$. Если в качестве M взять образ кривой $\alpha(\mathbb{R})$, то соответствующее преобразование будем называть *движением образа кривой* α.

Положительным движением кривой α назовем такое аффинное изометрическое преобразование A пространства $\mathbb{R}^n$, что $A(\alpha(t)) = \alpha(t+t_0)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ и для всех $t \in \mathbb{R}$, при этом t_0 будем называть *сдвигом* данного положительного движения. Множество всех положительных движений кривой назовем *полной положительной группой движений* этой кривой, а любую ее подгруппу — *положительной группой движений*.

Отрицательным движением кривой α назовем такое аффинное изометрическое преобразование A пространства $\mathbb{R}^n$, что $A(\alpha(t+t_0)) = \alpha(-t+t_0)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$ и для всех $t \in \mathbb{R}$, при этом t_0 будем называть *центром* данного отрицательного движения. *Ориентированным движением кривой* α назовем положительное или отрицательное движение кривой α. Множество всех ориентированных движений кривой назовем *полной ориентированной группой движений* этой кривой, а любую ее подгруппу — *ориентированной группой движений.*

Параметром ориентированного движения будем называть сдвиг для положительного движения и центр для отрицательного.

Положительное движение кривой α назовем *тривиальным*, если оно обладает нулевым сдвигом. Положительную группу движений назовем *тривиальной*, если все ее элементы тривиальны.

Кривую α назовем замкнутой, если существует $L > 0$ такое, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\alpha(t) = \alpha(t+L)$. При этом наименьшее L с таким свойством будем называть периодом кривой α. Очевидно, что замкнутость гладкой кривой эквивалентна тому, что тождественное отображение имеет ненулевой сдвиг.

Говорим, что кривая α является *k-регулярной* (обозначение $\operatorname{rk}\alpha = k$), если $\alpha(t)$ дифференцируема по крайней мере $k+1$ раз и при этом для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\operatorname{rk}(\dot\alpha(t),\dots,\alpha^{(k+1)}(t)) = \operatorname{rk}(\dot\alpha(t),\dots,\alpha^{(k)}(t)) = k$.

Легко показать, что репер Френе k-регулярной кривой состоит из k векторов. Каждая такая кривая вкладывается в некоторое k-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$ и не вкладывается ни в какое подпространство меньшей размерности. Далее под кривой будем предполагать k-регулярную кривую для некоторого k.

Приведем сначала формулировки основных результатов работы, а затем дадим их доказательства. Первый результат характеризует кривые, обладающие ориентированным движением на языке их геометрических инвариантов — кривизн кривой.

Теорема 1. *Пусть α — кривая, ω — ее матрица кривизн* [6].

1. *Кривая α допускает положительное движение, обладающее сдвигом t_0 тогда и только тогда, когда $\omega(t) = \omega(t+t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

2. *Кривая α допускает отрицательное движение с центром t_0 тогда и только тогда, когда $\omega(t+t_0) = \omega(-t+t_0)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.*

Следующие две теоремы описывают достаточно широкий класс кривых, для которых понятия ориентированного движения и движения образа кривой совпадают.

Теорема 2. *Пусть кривая α является гомеоморфизмом на свой образ и A — движение образа $\alpha(\mathbb{R})$. Тогда A является элементом ориентированной группы движений.*

Теорема 3. *Пусть S — единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ и f — ее натуральная параметризация, $\alpha\colon S \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм на свой образ такой, что композиция $\alpha\circ f$ — гладкая кривая постоянной абсолютной скорости. Тогда, если A — движение образа $\alpha(S)$, то A является элементом ориентированной группы движений кривой $\alpha \circ f$.*

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие замкнутости кривой в терминах свойств ее положительной группы движений.

Теорема 4. *Пусть кривая α обладает нетривиальной полной положительной группой движений. Эта группа содержит нетривиальный элемент конечного порядка тогда и только тогда, когда кривая α является замкнутой.*

Приведем доказательства сформулированных выше теорем, при этом нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения, сформулированные в виде лемм.

Лемма 1. *Пусть α_1 и α_2 — кривые в $\mathbb{R}^n$ с матрицами кривизн ω_1 и ω_2 соответственно, $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — аффинное изометрическое преобразование. Тогда $A(\alpha_1(t)) = \alpha_2(t)$ тогда и только тогда, когда $\omega_1(t) = \omega_2(t)$ и $|\dot{\alpha_1}| = |\dot{\alpha_2}|$.*

Справедливость леммы 1 следует из теорем об инвариантности кривизн относительно движения и об изометричности кривых с одинаковыми абсолютными скоростями [6]. Более того, в лемме 1 можно считать, что $A(x) = \alpha_2(\tau) + U(x - \alpha_1(\tau))$ для произвольного $\tau \in \mathbb{R}$, где U — ортогональный оператор, не зависящий от τ, со свойством $U\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$, где $\varepsilon_i(t)$ — матрица, столбцами которой являются векторы репера Френе кривой α_i в момент t. Действительно, по определению изометрического преобразования $A = y_0 + U(x - x_0)$, где U — некоторый ортогональный оператор. Положим $x = \alpha_1(\tau)$, тогда $y_0 = \alpha_2(\tau) - U(\alpha_1(\tau) - x_0$. Отсюда $A(x) = \alpha_2(\tau) + U(x - \alpha_1(\tau))$.

Равенство $U\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t)$ следует из инвариантности кривизн относительно движения [6].

Следствие 1. *Если A — положительное движение кривой α сдвига t_0, то $A(x) = \alpha(t_0) + U(x - \alpha(0))$, где U — ортогональный оператор со свойством $U\vec{E}_i(t) = \vec{E}_i(t+t_0)$, $\vec{E}_i(t)$ — вектор репера Френе кривой α. Если A — отрицательное движение кривой α с центром t_0, то $A(x) = \alpha(t_0) + U(x - \alpha(t_0))$, где U — ортогональный оператор со свойством $U\vec{E}_i(t) = (-1)^i\vec{E}_i(t + t_0)$.*

Доказательство. В первом случае в равенстве $A(x) = \alpha_2(\tau) + U(x - \alpha_1(\tau)$ нужно положить $\alpha_1(t) = \alpha(t)$, $\alpha_2(t) = \alpha(t + t_0)$, $\tau = 0$. Во втором случае $\alpha_1(t) = \alpha(t + t_0)$, $\alpha_2(t) = \alpha(-t + t_0)$, $\tau = 0$.

Доказательство теоремы 1 очевидно, поскольку ее первое утверждение следует из леммы 1 при $\alpha_1(t) = \alpha(t)$, $\alpha_2(t) = \alpha(t+t_0)$, а второе — при $\alpha_1(t) = \alpha(t+t_0)$, $\alpha_2(t) = \alpha(-t+t_0)$.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $t_0 \in \mathbb{R}$, тогда $A(\alpha(t_0)) \in \alpha(\mathbb{R})$. Поскольку α — биекция, существует единственное $t_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $A(\alpha(t_0)) = \alpha(t_1)$, т. е. определена функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $A(\alpha(t)) = \alpha(f(t))$. Поскольку α — гомеоморфизм на свой образ, функция $f(t) = \alpha^{-1}(A(\alpha(t)))$ является гомеоморфизмом. Покажем, что f дифференцируема. Отображение A можно представить в виде $A(x) = y_0 + U(x - x_0)$, где x_0, y_0 — некоторые точки $\mathbb{R}^n$, а U — ортогональный оператор. Имеем

$$\frac{d}{dt}A(\alpha(t)) = U(\dot{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}\alpha(f(t)).$$

Зафиксируем $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $t \neq t_0$. Так как f — биекция, $f(t) \neq f(t_0)$ и

$$\frac{\alpha(f(t)) - \alpha(f(t_0))}{t - t_0} = \frac{\alpha(f(t)) - \alpha(f(t_0))}{f(t) - f(t_0)} \cdot \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{A(\alpha(t)) - A(\alpha(t_0))}{t - t_0}.$$

Поскольку $\dot{\alpha}(f(t_0)) \neq \vec{0}$, существуют окрестность U точки $f(t_0)$ и координата i такие, что для всех $\tau \in U$ выполнено $\alpha_i(\tau) - \alpha_i(f(t_0)) \neq \vec{0}$. Поскольку функция f непрерывна, существует окрестность V точки t_0 такая, что для всех $t \in V$ имеем $f(t) \in U$. Следовательно, для всех $t \in V$ справедливо

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{A(\alpha(t))_i - A(\alpha(t_0))_i}{t - t_0} \cdot \frac{f(t) - f(t_0)}{\alpha(f(t))_i - \alpha(f(t_0))_i}.$$

При $t \to t_0$ имеем

$$\dot{f}(t_0) = U(\dot{\alpha}(t_0))_i \, \frac{1}{\dot{\alpha}(f(t_0))_i},$$

т. е. f непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, и $U\dot{\alpha}(t) = \dot{\alpha}(f(t))\dot{f}(t)$. Из этого тождества следует, что $|\dot{\alpha}| = |\dot{\alpha}||\dot{f}(t)|$, т. е. $|\dot{f}(t)| \equiv 1$. Функция $\dot{f}(t)$ непрерывна, и $|\dot{f}(t)| \equiv 1$, следовательно, существует две возможности:

1. $\dot{f}(t) \equiv 1$. Тогда $f(t) = t + t_0$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$. Следовательно, $A(\alpha(t)) = \alpha(t + t_0)$, т. е. A — положительное движение кривой α.

2. $\dot{f}(t) \equiv -1$. Тогда $f(t) = -t + t_0$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$. Следовательно, $A(\alpha(t)) = \alpha(-t + t_0)$, т. е. A — отрицательное движение кривой α.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем $s_0 \in S$, тогда $A(\alpha(s_0)) \in \alpha(S)$. Так как α — биекция, существует единственное $s_1 \in S$ такое, что $A(\alpha(s_0)) = \alpha(s_1)$. Следовательно, определена функция $\phi\colon S \to S$ такая, что $A(\alpha(s)) = \alpha(\phi(s))$. Ясно, что $\phi(s) = \alpha^{-1}(A(\alpha(s)))$ — гомеоморфизм.

Зафиксируем $s_0 \in S\backslash\{f(\pi)\}$. В окрестности $S\backslash\{f(\pi)\}$ допустима параметризация $f_1\colon (-\pi, \pi) \to S\backslash\{f(\pi)\}$ (как сужение f), являющаяся гомеоморфизмом. Точке s_0 однозначно соответствует точка $t_0 = f_1^{-1}(s_0)$. Зафиксируем $t \in (-\pi, \pi)\backslash\{t_0\}$, тогда

$$\frac{\alpha(\phi(f(t))) - \alpha(\phi(f(t_0)))}{t - t_0} = \frac{A(\alpha(f(t))) - A(\alpha(f(t_0)))}{t - t_0}$$

$$= \frac{U\left(\alpha(f(t)) - \alpha(f(t_0))\right)}{t - t_0} = U\left(\frac{\alpha(f(t)) - \alpha(f(t_0))}{t - t_0}\right).$$

Рассмотрим множество $S\backslash\{\phi(f(\pi))\}$. На нем допустима параметризация $f_2\colon (w, w + 2\pi) \to S\backslash\{\phi(f(\pi))\}$ (как сужение f для некоторого w, в качестве w подойдет любой элемент множества $f^{-1}(\phi(f(\pi))))$. Ясно, что f_2 — гомеоморфизм.

Пусть $\psi = f_2^{-1} \circ \phi \circ f\colon (-\pi, \pi) \to (w, w + 2\pi)$. Поскольку определены значения $\psi(t)$ и $\psi(t_0)$, имеем

$$\frac{\alpha(\phi(f(t))) - \alpha(\phi(f(t_0)))}{t - t_0} = \frac{\alpha(f(\psi(t))) - \alpha(f(\psi((t_0)))}{t - t_0}.$$

Обозначим $u = \psi(t)$, $u_0 = \psi(t_0)$, при этом $u \neq u_0$ в силу биективности ψ. Тогда

$$\frac{\alpha(\phi(f(t))) - \alpha(\phi(f(t_0)))}{t - t_0} = \frac{\alpha(f(u)) - \alpha(f(u_0))}{u - u_0}\,\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0}.$$

Отображение ψ является гомеоморфизмом и, в частности, непрерывно, поэтому $u \to u_0$ при $t \to t_0$. Поскольку $\dot{\alpha}(\phi(t(t_0))) \neq \vec{0}$, существуют окрестность U точки $\phi(f(t_0))$ и координата i такие, что для всех s из этой окрестности $\alpha_i(s) - \alpha_i(\phi(f(t_0))) \neq 0$. Так как функция $\phi \circ f$ непрерывна, существует окрестность V точки t_0 такая, что для всех t из этой окрестности $\phi(f(t)) \in U$. Тогда для всех $t \in V$ справедливо

$$\frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} = U\left(\frac{\alpha(f(t)) - \alpha(f(t_0))}{t - t_0}\right)_i \frac{u - u_0}{\alpha(f(u))_i - \alpha(f(u_0))_i}.$$

Обозначим $\beta = \alpha \circ f$, тогда при $t \to t_0$ имеем

$$\dot{\psi}(t_0) = U\left(\dot{\beta}(t_0)\right)_i \frac{1}{\dot{\beta}(u_0)_i}.$$

Таким образом, ψ непрерывно дифференцируема, и для всех $t \in (-\pi, \pi)$ выполнено

$$U\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}(u)\dot{\psi}(t).$$

Из последнего вытекает, что $|\dot{\beta}| = |\dot{\beta}||\dot{\psi}(t)|$, т. е. $|\dot{\psi}(t)| \equiv 1$. Поскольку функция $\dot{\psi}(t)$ непрерывна, то существует две возможности:

1. $\dot{\psi}(t) \equiv 1$. Тогда $\psi(t) = t + t_0$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, и $\phi(f(t)) = f(t + t_0)$. Следовательно, для всех $t \in (-\pi, \pi)$ выполнено $A(\alpha(f(t))) = \alpha(f(t + t_0))$. Поскольку отображение f непрерывно на $\mathbb{R}$, то это тождество выполнено и при $t = \pi$, а в силу периодичности отображения f получаем, что тождество справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. A — положительное движение кривой $\alpha \circ f$.

2. $\dot{\psi}(t) \equiv -1$. Тогда $\psi(t) = -t + t_0$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, и $\phi(f(t)) = f(-t + t_0)$. Следовательно, для всех $t \in (-\pi, \pi)$ выполнено $A(\alpha(f(t))) = \alpha(f(-t + t_0))$. Поскольку отображение f непрерывно на $\mathbb{R}$, то это тождество выполнено и при $t = \pi$, а в силу периодичности отображения f получаем, что тождество справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$, т. е. A — отрицательное движение кривой $\alpha \circ f$.

Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 4 потребуется

Лемма 2. *Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество, лежащее в некотором подпространстве E_k размерности k и не лежащее ни в каком подпространстве меньшей размерности. Пусть $A(x) = y_0 + U(x - p)$ — движение M, $p \in E_k$. Тогда существует ортогональный оператор V такой, что $B(x) = y_0 + V(x - p)$ является движением M, причем $A(x) = B(x)$ для $x \in M$, и кроме того $V|_{M^\perp} = id$.*

Доказательство. Зафиксируем репер $(p, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k)$ пространства E_k. Рассмотрим линейное пространство $L = \langle \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k \rangle$. Имеем $x - p \in L_k$ для всех $x \in M$. Поскольку M не вложимо в пространство меньшей размерности, векторы $\{x - p \mid x \in M\}$ порождают L_k. Следовательно, существуют $x_1, \ldots, x_k \in M$ такие, что векторы $\vec{f_i} = x_i - p$, $i \in \overline{1, k}$, образуют базис L_k. Пусть $\vec{b} = \sum_{i=1}^k b_i \vec{f_i}$ — произвольный вектор из L_k. Имеем

$$U\vec{b} = \sum_{i=1}^k b_i U(\vec{f_i}) = \sum_{i=1}^k b_i U(x_i - p) = \sum_{i=1}^k b_i (A(x_i) - A(p)).$$

Точки $A(x_i)$ и $A(p)$ лежат в E_k, отсюда $A(x_i) = p + \vec{u}_i$, $A(p) = p + \vec{u}_0$, где $u_i \in L_k$, $i \in \overline{0, k}$. Тогда $U\vec{b} = \sum_{i=1}^k b_i(\vec{u}_i - \vec{u}_0) \in L_k$, и подпространство L_k инвариантно относительно U. Поскольку U — ортогональный оператор, то $L_k^\perp = M^\perp$ также инвариантно относительно U. Следовательно, оператор U раскладывается в произведение $U = VW$, где V и W — ортогональные операторы, причем $V|_{L_k} = U|_{L_k}$, $V|_{M^\perp} = id$, $W|_{L_k} = id$, $W|_{M^\perp} = U|_{M^\perp}$.

Рассмотрим преобразование $B(x) = y_0 + V(x - p)$. Если $x \in M$, то $x - p \in L_k$. Тогда $B(x) = y_0 + V(x - p) = y_0 + U(x - p) = A(x)$. Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть α — k-регулярная кривая, $A(x) = y_0 + U(x - x_0)$ — ее ориентированное движение, $x_0 \in \alpha(\mathbb{R})$. Тогда существует ортогональный оператор V такой, что $B(x) = y_0 + V(x - x_0)$ является ориентированным движением кривой α с тем же параметром, что и A, причем $A(\alpha(t)) = B(\alpha(t))$, и кроме того $V|_{\alpha^\perp} = id$, где $\alpha^\perp = \left\langle \vec{E}_1(t), \ldots, \vec{E}_k(t) \right\rangle$.*

Пусть множество $M \subseteq \mathbb{R}^n$ лежит в некотором подпространстве E_k размерности k и не лежит ни в каком подпространстве меньшей размерности. Движение $B = y_0 + V(x - x_0)$ назовем *внутренним движением* M, если $V|_{M^\perp} = id$. Ориентированное движение $B = y_0 + V(x - x_0)$ k-регулярной кривой α назовем *внутренним*, если $V|_{\alpha^\perp} = id$, где $\alpha^\perp = \left\langle \vec{E}_1(t), \ldots, \vec{E}_k(t) \right\rangle$. Видно, что множество всех внутренних ориентированных (в частности, положительных) движений кривой образуют подгруппу в ее полной группе ориентированных (соответственно положительных) движений.

Следствие 3. *Пусть B — внутреннее положительное движение кривой α такое, что $B(\alpha(t)) = \alpha(t)$. Тогда $B = id$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. *Необходимость.* Пусть G — положительная группа движений кривой α и $A \in G$ — нетривиальный элемент конечного порядка. Это означает, что существуют $k \in \mathbb{N}$ и $t_0 > 0$ такие, что $A^k = id$ и $\alpha(t + t_0) = A(\alpha(t))$. Тогда $\alpha(t) = A^k(\alpha(t)) = \alpha(t + kt_0)$, причем $kt_0 > 0$, т. е. кривая замкнута.

Достаточность. Пусть α — замкнутая кривая периода L. Предположим, что в ее полной положительной группе движений G нет нетривиальных элементов конечного порядка. Для каждого элемента $A \in G$ рассмотрим множество $T_A = \{t_0 \in \mathbb{R} \mid A\alpha(t) = \alpha(t + t_0),\ t \in \mathbb{R}\}$, т. е. множество сдвигов положительного движения A. Далее рассмотрим объединение таких множеств $X_G = \bigcup_{A \in G} T_A$. Очевидно, это множество является группой по сложению.

1. Так как $id \in G$, имеем $0 \in X_G$.

2. Пусть $t_0 \in X_G$, следовательно, существует $A \in G$, для которого t_0 будет сдвигом. Отсюда $-t_0$ будет сдвигом для $A^{-1} \in G$, т. е. $-t_0 \in X_G$.

3. Пусть $t_1, t_2 \in X_G$, следовательно, существуют $A, B \in G$, для которых t_1, t_2 будут сдвигами соответственно. Тогда для элемента $AB \in G$ сдвигом будет являться величина $t_1 + t_2$, следовательно, $t_1 + t_2 \in X_G$.

Рассмотрим множество $X_G^+ = \{t \in X_G \mid t > 0\}$ и $T = \inf X_G^+$. Возможны два случая:

1. $T > 0$. Покажем тогда, что $T \in X_G^+$. Действительно, если это не так, то существует последовательность $\{t_i\} \subseteq X_G^+$, сходящаяся к T. Тогда из определения предела для любого $\varepsilon > 0$ существуют t_i, t_j ($t_i \neq t_j$) такие, что $0 < t_i - t_j < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = T$, тогда $0 < t_i - t_j < T$, но $t_i - t_j \in X_G^+$. Получили противоречие с определением $\inf X_G^+$.

Таким образом, $\{kT \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq X_G$. Предположим, что существует $t_0 \in X_G$ такой, что $t_0 \neq kT$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, тогда существуют $0 < b < T$ и $l \in \mathbb{Z}$ такие, что $t_0 = b + lT$. Отсюда $b = t_0 - lT \in X_G^+$. Снова получили противоречие с определением $\inf X_G^+$. Следовательно, $X_G = \{kT \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Так как α замкнута, то $L \in X_G$ и, следовательно, $L = lT$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольный нетривиальный элемент $A \in G$ и найдем соответствующий ему по лемме 2 элемент $B \in G$. Элемент B также нетривиальный, ему соответствует некоторый сдвиг $t_0 = bT$ ($b \neq 0$). Имеем

$$B^l(\alpha(t)) = \alpha(t + lbT) = \alpha(t + bL) = \alpha(t).$$

Отсюда по следствию 3 $B^l = id$, т. е. B — нетривиальный элемент конечного порядка.

2. $T = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$. По определению $\inf X_G^+$ существует $x_\varepsilon \in X_G$ такой, что $0 < x_\varepsilon < \varepsilon$. Введем следующие обозначения: $N_\varepsilon = [t_0/x_\varepsilon], y_\varepsilon = N_\varepsilon x_\varepsilon$. Тогда $t_0/x_\varepsilon = N_\varepsilon + \delta_\varepsilon$, где $0 \leq \delta_\varepsilon < 1$. Следовательно, $|t_0 - y_\varepsilon| \leq |\delta_\varepsilon x_\varepsilon| < \varepsilon$. Элемент $y_\varepsilon = N_\varepsilon x_\varepsilon \in X_G$, т. е. является сдвигом некоторого положительного движения, отсюда по теореме 1 $\omega(t + y_\varepsilon) = \omega(t)$. Рассмотрим последовательность $\varepsilon_n = 1/n$ и соответствующую ей последовательность $\{y_n\}$. $\lim_{n \to 0} |t_0 - y_n| = 0$, следовательно, $\lim_{n \to 0} y_n = t_0$, а в силу непрерывности матрицы кривизн $\omega(t) = \lim_{n \to 0} \omega(t + y_n) = \omega(t + t_0)$. Таким образом, $X_G = \mathbb{R}$. В частности, найдется положительное движение A сдвига $L/2$, которому по лемме 2 соответствует внутреннее положительное движение B, имеющее тот же сдвиг. Следовательно, $B^2(\alpha(t)) = \alpha(t + L) = \alpha(t)$, т. е. $B^2 = id$ и B — элемент порядка 2.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аминов Ю.А.** Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160 с.
2. **Витнер Ч.** Дифференциальная геометрия кривых в центроевклидовых пространствах // Чехослов. мат. журн. 1962. Т. 12, вып. 87. С. 119–143.
3. **Зайденберг М.Г.** Изотривиальные семейства кривых на аффинных поверхностях и характеризация аффинной плоскости // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1987. Т. 51, вып. 3. С. 534–567.
4. **Николаевский Ю.А.** О проблеме В. Фенхеля // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 5. С. 87–97.

5. **Розов Н.Х.** Феликс Клейн и его эрлангенская программа // Мат. просвящение. 1999. Сер. 3. Вып. 3. С. 49–55.
6. **Сизый С.В.** Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Физматлит, 2007. 376 с.

Рогозинников Евгений Алексеевич
магистрант
Урал. гос. ун-т им А. М. Горького
e-mail: locbox@bk.ru

Поступила 10.12.2008

Том 16 № 3 2010

УДК 512.54

О ГРУППАХ ШУНКОВА С СИЛЬНО ВЛОЖЕННОЙ ПОЧТИ СЛОЙНО КОНЕЧНОЙ ПОДГРУППОЙ[1]

В. И. Сенашов

Изучаются бесконечные группы Шункова с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Устанавливается почти слойная конечность периодической части группы Шункова с сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой при этом условии. Ранее автором была установлена почти слойная конечность группы Шункова с сильно вложенной подгруппой либо при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп, либо при условии периодичности группы. Исследовался также случай сильно вложенной подгруппы с черниковской периодической частью.

Ключевые слова: бесконечные группы, условия конечности, слойная конечность, периодичность.

V. I. Senashov. On Shunkov groups with a strongly embedded almost layer-finite subgroup.

Infinite Shunkov groups with the following condition are studied: the normalizer of any finite nontrivial subgroup has an almost layer-finite periodic part. Under this condition, the almost layer-finiteness of the periodic part of a Shunkov group with a strongly embedded almost layer-finite subgroup is established. Earlier, the author proved the almost layer-finiteness of a Shunkov group with a strongly embedded subgroup either under the condition that all proper subgroups are almost layer-finite or under the condition that the group is periodic. The case of a strongly embedded subgroup with a Chernikov almost layer-finite periodic part was also investigated earlier.

Keywords: infinite groups, finiteness conditions, layer-finiteness, periodicity.

Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. Этот класс групп введен в рассмотрение С.Н. Черниковым [1]. *Почти слойно конечные группы* — это расширения слойно конечных групп при помощи конечных групп.

В статье рассматривается классический вопрос: как свойства системы подгрупп влияют на свойства всей группы? Показывается, что почти слойная конечность распространяется на периодическую часть группы G с периодических частей нормализаторов нетривиальных конечных подгрупп группы G, когда G является группой Шункова, обладающей сильно вложенной почти слойно конечной подгруппой.

Группой Шункова называется такая группа G, в которой для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Напомним, что *сильно вложенной* называется такая собственная подгруппа H группы G, что H содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций. Бесконечные группы с сильно вложенной подгруппой изучались также в работах [2–9]. Ранее автором была установлена почти слойная конечность группы Шункова с сильно вложенной подгруппой либо при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [10], либо при условии периодичности группы [11]. Исследовался также случай сильно вложенной подгруппы с черниковской периодической частью [12]. В данной работе предполагается, что в группе имеется сильно вложенная почти слойно конечная подгруппа, причем рассматривается случай смешанных групп, и условие почти слойной конечности накладывается только на периодические части нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00395, 10-01-00509), гранта Сибирского федерального университета (проект “Элитное математическое образование в СФУ”).

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную почти слойно конечную подгруппу. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа G обладает почти слойно конечной периодической частью.*

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как в G есть сильно вложенная подгруппа, то G обладает инволюциями. Обозначим через i некоторую инволюцию из центра силовской 2-подгруппы S группы G (такая инволюция найдется в силу того, что силовские примарные подгруппы в G являются черниковскими [11, лемма 1], и того, что всякая черниковская примарная группа обладает нетривиальным центром по [13, теорема 1.6]).

Так как по [14, предложение 4.3] в группе с сильно вложенной подгруппой все инволюции сопряжены, то по условиям теоремы в группе G найдется сильно вложенная почти слойно конечная подгруппа H, содержащая $C_G(i)$.

Если группа H является черниковской, то утверждение теоремы доказано в [12], поэтому в дальнейшем будем предполагать, что группа H — нечерниковская. Вложим ее в максимальную почти слойно конечную подгруппу M группы G. Такая подгруппа найдется ввиду леммы Цорна и [16, теорема 1]. Обозначим через M_1 нормализатор подгруппы M в группе G.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где элемент a простого порядка p выбираем из H и $g \in G \setminus M_1$. Ввиду того, что G является группой Шункова, подгруппы L_g конечны.

Так как H — нечерниковская почти слойно конечная группа, то множество $\pi(H)$ бесконечно (напомним, что через $\pi(W)$ обозначают множество простых делителей порядков элементов группы W). Действительно, предположим, что множество $\pi(H)$ конечно. По [15, лемма 2.3] слойно конечный радикал $R(H)$ нечерниковской группы H является нечерниковской группой. По [13, теоремы 3.3, 3.7] $R(H)$ можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп A и B, где A — полная абелева группа, а B — локально нормальная группа с конечными силовскими подгруппами. Так как множество $\pi(H)$ предполагается конечным, то группа A является прямым произведением конечного числа квазициклических групп, а группа B — конечной группой. Но тогда $R(H)$ — черниковская группа. Полученное противоречие означает, что $\pi(H)$ бесконечно и для выбора порядка элемента a имеется бесконечно много возможностей.

Можем считать, не нарушая общности рассуждений, что множество $\mathfrak{M}$ бесконечно, так как иначе было бы конечным инвариантное множество элементов, сопряженных с элементом a, которое порождало бы по [18, лемма Дицмана] конечную нормальную подгруппу в группе G, и в этом случае теорема была бы доказана.

Ввиду бесконечности множества вариантов выбора порядка элемента a выберем его таким, что он не делит индекс $|M : R(M)|$, где $R(M)$ — слойно конечный радикал группы M (индекс $|M : R(M)|$ конечен ввиду почти слойной конечности группы M).

Зафиксируем в дальнейшем введенные обозначения i, S, M, M_1, H, $\mathfrak{M}$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть F, W — различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы G, $R(F)$ и $R(W)$ — их слойно конечные радикалы. Тогда пересечение $R(F) \cap R(W)$ единично.*

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству [16, лемма 10].

Лемма 2. *Если для некоторого элемента w конечного порядка и максимальной почти слойно конечной подгруппы W группы G пересечение $C_G(w) \cap W$ бесконечно, то периодическая часть группы $C_G(w)$ содержится в W.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 аналогично доказательству [16, лемма 11].

Лемма 3. *Пусть W — максимальная почти слойно конечная подгруппа группы G, b — элемент простого порядка и пересечения $C_G(b) \cap W$, $C_G(b) \cap W^g$ бесконечны. Тогда $W = W^g$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о По лемме 2 периодическая часть C_1 группы $C_G(b)$ содержится в W и аналогично, $C_1 \subseteq W^g$. Следовательно, $C_1 \subseteq W \cap W^g$. Так как $C_W(b)$ бесконечен, то $R(W) \cap C_G(b)$ — бесконечная группа и $|C_W(b) : R(W) \cap C_W(b)| < \infty$. Точно так же $|C_W(b) : R(W^g) \cap C_W(b)| < \infty$. Тогда пересечение $R(W) \cap R(W^g)$ обладает неединичным элементом, и ввиду леммы 1 получаем, что группы W и W^g не могут быть различными. Лемма доказана.

Лемма 4. *Никакая группа L_g из множества $\mathfrak{M}$ и никакая сопряженная с ней подгруппа группы G не содержатся в группе M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторых элемента b и группы L_g из множества $\mathfrak{M}$ группа L_g^b содержится в M. Тогда ввиду выбора числа p элементы a^b, a^{gb} содержатся в слойно конечном радикале группы M, и централизаторы $C_M(a^b)$ и $C_M(a^{gb})$ бесконечны. Таким образом, элемент a принадлежит группе $M^{b^{-1}}$, и пересечение $C_G(a) \cap M^{b^{-1}}$ бесконечно. Так как элемент a содержится в группе H, то $a \in M$, и снова по выбору числа p элемент a содержится в слойно конечном радикале группы M, что влечет бесконечность пересечения $C_G(a) \cap M$. Следовательно, по лемме 3 имеем $M = M^{b^{-1}}$. Аналогично, $a \in M^{b^{-1}g^{-1}}$, пересечение $C_G(a) \cap M^{b^{-1}}$ бесконечно, и снова по лемме 3 имеем $M = M^{b^{-1}g^{-1}}$. Окончательно, получаем $b^{-1}, b^{-1}g^{-1} \in N_G(M) = M_1$, что влечет $g \in M_1$, но это противоречит выбору элемента g. Лемма доказана.

Лемма 5. *Любая группа L_g четного порядка из множества $\mathfrak{M}$ обладает сильно вложенной подгруппой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из-за сильной вложенности подгруппы H все инволюции в группе G сопряжены. Подберем элемент d таким образом, чтобы группа L_g^d содержала инволюцию i. По лемме 4 группа L_g^d не содержится в M, и, значит, L_g^d не содержится в H. Ввиду сильной вложенности группы H в группу G подгруппа $L_g^d \cap H$ сильно вложена в L_g^d. Тогда сильно вложенная подгруппа найдется и в группе L_g. Лемма доказана.

Лемма 6. *Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что p выбрано настолько большим, что группы $V \in \mathfrak{M}$ не содержат инволюций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 6 с учетом леммы 5 аналогично доказательству [12, лемма 4].

Лемма 7. *В дополнение к выбору числа p можно предполагать, что оно не принадлежит $\pi(C_W(b))$, где b пробегает элементы простых порядков из W с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в W, и оно не является порядком регулярного автоморфизма никакой элементарной абелевой q-группы из W для всех простых чисел q, делящих $|W : R(W)|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 7 аналогично доказательству [12, лемма 6].

Лемма 8. *Можно считать, не нарушая общности рассуждений, что в множестве $\mathfrak{M}$ нет подгрупп L_g, для которых нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 8 аналогично доказательству [12, лемма 7].

Лемма 9. *Пусть T — максимальная почти слойно конечная подгруппа с сильно вложенным нормализатором в G, V — подгруппа, сопряженная с T в G, h — нетривиальный примарный элемент из $D = T \cap V$. Если централизатор $C_V(h)$ бесконечен, то и централизатор $C_T(h)$ бесконечен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству [17, лемма 9].

Лемма 10. *Если в группе M найдется почти регулярная инволюция, то группа M почти абелева. В этом случае можно считать, что число p выбрано так, что оно не делит индекс $|M : A|$, где A — нормальная абелева подгруппа группы M, имеющая в M конечный индекс.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 10 аналогично доказательству [12, лемма 5].

Лемма 11. *Если в группе M все инволюции имеют бесконечные централизаторы, то подгруппа M_1 сильно вложена в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11 аналогично доказательству [12, лемма 9].

Лемма 12. *Простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что во всех группах $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$ силовские p-подгруппы циклические.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$. Обозначим через P силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Так как P обладает нетривиальным центром, то выберем элемент b простого порядка из $Z(P)$. Ввиду выбора числа p, не делящего индекс $|M : R(M)|$, централизатор $C_M(a)$ бесконечен. Ввиду леммы 2 имеем $b \in M$, и, следовательно, $b \in R(M)$. Таким образом, пересечение $C_G(b) \cap M$ бесконечно, и по лемме 2 периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в M. Следовательно, P содержится в M.

Предположим, что P не является циклической подгруппой. Обозначим через R элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из P, содержащую элемент a. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ по леммам 4, 8 и теореме Файта — Томпсона). Согласно [14, теорема 1.21] имеем $O_{p'}(L_g) \leq \langle C_G(r) \mid r \in R^{\#} \rangle$. Как отмечалось выше, элементы из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в M, поэтому в силу леммы 2 периодические части централизаторов этих элементов, а значит, и группа $O_{p'}(L_g)$ содержатся в M.

Пусть в группе M все инволюции имеют бесконечные централизаторы. Проведя аналогичные рассуждения относительно подгруппы M^g вместо M и элемента a^g вместо a, видим, что $O_{p'}(L_g) < M^g$. Таким образом, $O_{p'}(L_g) < M \cap M^g$. Ввиду предположения и [14, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент h простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом из R. По лемме 7 централизатор в M элемента h бесконечен. Следовательно, по лемме 2 периодическая часть централизатора $C_G(h)$ содержится в M. Отсюда по леммам 9, 11 централизатор в M^g элемента h также бесконечен, и, следовательно, с учетом леммы 1 имеем $M = M^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus M_1$.

Таким образом, в группе M найдется почти регулярная инволюция. Тогда по лемме 10 группа M почти абелева, и ввиду выбора числа p подгруппа R содержится в нормальной абелевой подгруппе A группы M, имеющей в M конечный индекс. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$ для некоторого простого числа q. Используя [18, лемма Фраттини], выберем Q таким образом, чтобы Q нормализовалась подгруппой R. Если $Q < A$, то, очевидно, Q централизует R. Если q — делитель индекса $|M : A|$, то поскольку R содержится в нормальной абелевой в M подгруппе A и R является силовской погруппой в группе $Q \leftthreetimes R$ из M, подгруппа R нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем, что Q централизует R. Так как это рассуждение справедливо для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда и ввиду выбора числа p все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в M бесконечные централизаторы, так что по лемме 2 периодические части централизаторов этих элементов содержатся в M. По [14, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент c простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом r из элементарной абелевой p-подгруппы из L_g, содержащей элемент a^g. По лемме 7 централизатор $C_M(c)$ бесконечен, следовательно, по лемме 2 периодическая часть группы $C_G(c)$ содержится в M. Аналогично, периодическая часть группы $C_G(r)$ содержится в M. Отсюда получаем, что и элемент a^g содержится в M. Напомним, что элемент a принадлежит группе M. Снова по выбору числа p имеем $|C_G(a) \cap M| = \infty$ и $|C_G(a^g) \cap M| = \infty$, поэтому $|C_G(a^g) \cap M^g| = \infty$. Значит, по лемме 1 $M = M^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus M_1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы 12 считаем, что найдется элемент $a \in H$ порядка p такой, что во всех подгруппах $L_g = \langle a, a^g \rangle$ силовские p-подгруппы циклические для $g \in G \setminus M_1$. Поэтому ввиду лемм 6, 8 и теоремы Фейта — Томпсона нильпотентный радикал N_g группы L_g есть неединичная p'-группа.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ нашелся элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом c из N_g. По лемме 7 элемент b имеет бесконечный централизатор в M, значит, по лемме 2 периодическая часть централизатора элемента b содержится в M вместе с элементом c. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap M$ нетривиально, так как содержит элемент c. Поэтому подгруппа $O_q(D_g)$ нетривиальна для некоторого $q \in \pi(D_g)$. Рассмотрим нижний слой A_g центра группы $O_q(D_g)$. Тогда A_g — неединичная $\langle a \rangle$-допустимая характеристическая элементарная абелева q-подгруппа в D_g.

Обозначим через C периодическую часть группы $C_G(A_g)$ и покажем, что подгруппа C бесконечна и содержится в M. Если a действует регулярно на A_g, то по лемме 7 имеем $A_g < R(M)$ и, следовательно, по лемме 2 C содержится в M, а тогда по [19, теорема 2.5.6] группа C бесконечна.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом d из A_g. Снова по лемме 7 элемент d имеет бесконечный централизатор в M, а по лемме 2 периодическая часть централизатора элемента d содержится в M. Поэтому C тоже содержится в M. Кроме того, группа C также бесконечна. Действительно, группу A_g можно представить в виде $A_g = C_g \times B_g$, где $C_g = C_{A_g}(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Если подгруппа B_g неединична, то по лемме 7 $A_g < R(M)$, и снова, как и выше, получаем бесконечность группы C. Пусть теперь $B_g = 1$, т. е. $A_g = C_g$. Так как группа A_g конечна, а по лемме 7 централизатор $C_M(c)$ для любого элемента c из A_g имеет конечный индекс в M, то централизатор $C_M(A_g)$ также имеет конечный индекс в M. Таким образом, централизатор $C_M(A_g)$ бесконечен, и, значит, бесконечна его периодическая часть C.

Итак, в любом случае периодическая часть C группы $C_G(A_g)$ бесконечна и содержится в M. Отсюда вытекает, что группа C почти слойно конечна (напомним, что группа M почти слойно конечна). Ввиду конечности индекса $|N_G(A_g) : C_G(A_g)|$ периодическая часть F нормализатора $N_G(A_g)$ тоже почти слойно конечна (как расширение почти слойно конечной группы C с помощью конечной группы). Включая группу F в максимальную почти слойно конечную подгруппу W группы G, получаем, что две максимальные почти слойно конечные подгруппы M и W пересекаются по бесконечной подгруппе, содержащей C. По лемме 1 получаем совпадение подгрупп M и W и включение периодической части нормализатора $N_G(A_g)$ в M. Так как A_g является характеристической подгруппой в D_g, то периодическая часть группы $N_G(D_g)$ также содержится в M.

Если $N_g \neq D_g$, то ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному содержится в M, что противоречит построению подгруппы D_g. Поэтому $N_g = D_g$, откуда ввиду нормальности подгруппы N_g в L_g и доказанного выше включения периодической части нормализатора $N_G(D_g)$ в M получаем $L_g < M$ вопреки лемме 4.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Поэтому ввиду [14, лемма 4.27] и леммы 12 получаем, что L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$. По [20, теорема 1] и [18, лемма Дицмана] группа G либо обладает нетривиальной нормальной локально конечной подгруппой, либо имеет вид $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$, где $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса. В последнем случае ввиду теоремы Шмидта и [15, лемма 4.6] группа G обладает неединичным локально конечным радикалом. Итак, в любом случае в группе G найдется нормальная неединичная локально конечная подгруппа, которая по [16, теорема 1] почти слойно конечна, следовательно, в этой подгруппе имеется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условию теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черников С.Н.** К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 71–74.
2. **Измайлов А.Н., Шунков В.П.** Два признака непростоты группы с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 6. С. 647–669.
3. **Измайлов А.Н.** О сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппе в периодической группе // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 2. С. 128–137.
4. **Мазуров В.Д.** О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 102–104.
5. **Мазуров В.Д.** О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
6. **Созутов А.И.** О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 602–617.
7. **Созутов А.И., Сучков Н.М.** О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 2. С. 272–285.
8. **Созутов А.И.** Два признака непростоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией // Мат. заметки. 2001. Т. 69, вып. 3. С. 443–453.
9. **Сучков Н.М.** О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 153–160.
10. **Сенашов В.И.** Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 472–485.
11. **Сенашов В.И.** Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, № 4. С. 133–152.
12. **Сенашов В.И.** О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 203–210.
13. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
14. **Шунков В.П.** M_p-группы. М.: Наука, 1990. 160 с.
15. **Шунков В.П.** О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992. 148 с.
16. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. 2003. Т. 15, № 3. С. 91–104.
17. **Сенашов В.И.** Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 1002–1008.
18. **Курош А.Г.** Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 648 с.
19. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982. 288 с.
20. **Созутов А.И., Шунков В.П.** О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. Ч. 2 // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 206–223.

Сенашов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, проф.
ведущий науч. сотрудник
Ин-т вычислительного моделирования СО РАН
e-mail: sen@icm.krasn.ru

Поступила 10.11.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.6

МАРШРУТИЗАЦИЯ С АБСТРАКТНОЙ ФУНКЦИЕЙ АГРЕГИРОВАНИЯ СТОИМОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ[1]

А. Н. Сесекин, А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов

Рассматривается задача экстремальной маршрутизации с критерием, отвечающим абстрактной функции агрегирования выигрышей на отдельных этапах перемещений.

Ключевые слова: маршрутизация, метод динамического программирования, условия предшествования.

A. N. Sesekin, A. A. Chentsov, A. G. Chentsov. Routing with an abstract function of travel cost aggregation.

An extremal routing problem with a criterion corresponding to an abstract function of payoff aggregation at individual travel stages is considered.

Keywords: routing, dynamic programming method, precedence conditions.

1. Содержательная постановка задачи

Задачи маршрутизации перемещений находят широкое применение в практической деятельности и, в частности, в инженерных приложениях. Это связано с необходимостью последовательного выполнения комплекса работ при наличии тех или иных ограничений, возникающих в соответствующей прикладной задаче. В идейном отношении многие задачи такого рода восходят к хорошо известной задаче коммивояжера (ЗК); см. [1–3] и библиографию [1–3]. В упомянутых работах указаны также многие близкие по смыслу (к ЗК) постановки, учитывающие различные особенности практических задач. Сейчас отметим задачу курьера и ЗК с выбором (см. [1]). Особенности, связанные с этими двумя задачами, присутствуют и в настоящей работе, где рассматривается посещение мегаполисов (см. в этой связи [4]) при наличии ограничений в виде условий предшествования. В этой статье представлен весьма абстрактный вариант агрегирования величин, оценивающих этапы перемещений; предполагается, что эти величины являются выигрышами, а потому будем говорить об агрегировании выигрышей. В качестве традиционных можно отметить аддитивный вариант агрегирования и вариант, соответствующий задаче “на узкие места” (имеется в виду постановка, в которой требуется, грубо говоря, минимизировать длину наибольшего ребра). В то же время в конструкциях метода динамического программирования (МДП) известен общий подход к проблеме агрегирования (см. [5, с. 347]), в рамках которого удается установить надлежащий аналог уравнения Беллмана. Данный подход был использован в [6] для решения задачи маршрутизации, являющейся по сути многозначной версией ЗК.

Потребность в использовании нетрадиционных вариантов агрегирования (затрат, выигрышей) возникает в приложениях. Отметим, в частности, задачу прокладки трубопроводов (см. [7]), когда выбор возможного маршрута имеет смысл связывать как с возможностями эксплуатации первой очереди предполагаемого трубопровода, так и с последующим его наращиванием; появляется необходимость агрегирования текущих и перспективных затрат. Отметим сейчас и несколько иную постановку, связанную на идейном уровне с проблемой демонтажа

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00436, 10-01-96020 и 10-08-00484), программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014).

энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. Речь идет об обеспечении надежного функционирования устройства (робота), осуществляющего ту или иную последовательность операций по (автоматизированной) разборке оборудования при воздействии радиации [8–10]; предполагается, что упомянутое воздействие оказывают элементы оборудования, не демонтированные на текущий момент времени (можно говорить о маршрутизации процесса “выключений” источников излучения). Можно принять, что события, связанные с нарушением нормальной работы устройства, независимы на различных этапах “совокупного” перемещения, что дает основание определять вероятность “успеха” посредством произведения элементарных (отвечающих этапу) вероятностей. Требуется так выбрать маршрут, чтобы максимизировать упомянутую “совокупную” вероятность. В данной постановке следует учитывать реально присутствующие ограничения в виде условий предшествования, что приводит в сочетании с необходимостью учета влияния не выполненных на текущий момент заданий (имеется в виду конкретный этап перемещений) к существенным особенностям упомянутой постановки в сравнении с [6]. Эти особенности в полной мере отражены в настоящей статье, учтены в постановке рассматриваемой задачи. В последующих построениях наряду с методами [6] используются конструкции [11–13]. Относительно функции агрегирования затрат предполагаются выполненными условия неотрицательности и изотонности по одной из переменных; это соответствует понятию разложимости в [5, с. 347]. Особенности рассматриваемых конструкций в сравнении с [5, с. 350–353] связаны прежде всего с учетом ограничений в виде условий предшествования, с наличием явной зависимости стоимости перемещений от списка оставшихся невыполненными заданий; кроме того, следует отметить и обстоятельства, связанные с особенностями применения МДП в ЗК и в других задачах маршрутизации (отметим работы [14] и [15], где использовались специализированные варианты МДП, ориентированные на решение ЗК; в [5, с. 350–353] подобная специализация отсутствует). В то же время рекурсивное определение агрегированных критериев, включая критерий основной задачи и ее укороченных аналогов (задачи с неполным списком заданий), допускает аналогию с [5, с. 351]. Настоящая статья посвящена вопросам теории, а пример, приводимый в ее заключительной части, является модельным. Развитие данного подхода в интересах решения прикладных задач, включая задачи атомной энергетики, требует дополнительных исследований с участием специалистов; в целом ряде подобных задач такое взаимодействие удалось осуществить [8–10].

2. Общие определения и обозначения

В дальнейшем используем кванторы, связки: def заменяет фразу “по определению”, $\triangleq$ — равенство по определению, п/м заменяет слово “подмножество”. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ — неупорядоченная пара (двоеточие) этих объектов [16], т. е. (двухэлементное) множество, содержащее x, y и не содержащее каких-либо других объектов. С учетом этого для каждого объекта z $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ есть одноэлементное множество, содержащее z. Разумеется, множества являются объектами. С учетом этого для произвольных объектов u и v в соответствии с классическим определением [16, с. 67] полагаем $(u,v) \triangleq \{\{u\};\{u;v\}\}$, получая упорядоченную пару объектов u, v с первым элементом u и вторым элементом v. Если же z — какая-либо упорядоченная пара, то через $pr_1(z)$ и $pr_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z. Если $z \in \tilde{P} \times \tilde{Q}$, где $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ — множества, то $pr_1(z) \in \tilde{P}$ и $pr_2(z) \in \tilde{Q}$.

Через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м множества X, $(\mathrm{FIN})[X] \triangleq \mathrm{Fin}(X) \cup \{\varnothing\}$, где $\varnothing$ — пустое множество. В связи с обозначениями для значений функции двух переменных условимся о следующем: если A, B и C — множества, D — п/м $A \times B$, $f : D \longrightarrow C$, $a \in A$, $b \in B$ и $z \triangleq (a,b) \in D$, то полагаем $f(a,b) \triangleq f(z)$, получая точку в C: $f(a,b) \in C$; это обычное правило экономии скобок. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$, $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0;1;2;\ldots\}$. Если $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$, то $\overline{p,q} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \,|\, (p \le i) \& (i \le q)\}$ (случай $q < p$ не исключается); в частности, при $m \in \mathbb{N}$ имеем $\overline{1,m} = \{i \in \mathbb{N} | i \le m\}$. Всюду в дальнейшем $[0,\infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \le \xi\}$.

3. Маршруты и трассы, условия предшествования, функционалы качества

В последующих построениях ориентируемся на формализацию [6], фиксируя непустое множество P и полагая $\mathcal{P} \triangleq \mathrm{Fin}(P)$. Пусть $N \in \mathbb{N},\ N \ge 2,\ p^0 \in P$,

$$(M)_{i \in \overline{1,N}} \,:\, \overline{1,N} \longrightarrow \mathcal{P}; \tag{3.1}$$

итак, согласно (3.1) мы имеем N непустых конечных п/м P. Полагаем в дальнейшем, что

$$\Big(p^0 \notin \bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \& \big(M_{i_1} \cap M_{i_2} = \varnothing \ \forall i_1 \in \overline{1,N}\ \forall i_2 \in \overline{1,N} \setminus \{i_1\}\big).$$

Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1,N}$, т. е. множество всех биекций $\overline{1,N}$ на себя. Мы рассматриваем процедуры построения перемещений вида

$$(p_0 = p^0) \longrightarrow (p_1 \in M_{\alpha(1)}) \longrightarrow \ \ldots\ \longrightarrow (p_N \in M_{\alpha(N)}), \tag{3.2}$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$ удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям, указанным ниже. Через $\mathbf{N}$ обозначаем семейство всех п/м множества $\overline{1,N}$; $\mathfrak{N} \triangleq \mathbf{N} \setminus \{\varnothing\}$. Итак,

$$(\mathbf{N} = (\mathrm{FIN})[\overline{1,N}]) \& (\mathfrak{N} = \mathrm{Fin}(\overline{1,N})).$$

Каждое перемещение в (3.2) оценивается посредством функции

$$\Pi \,:\, P \times P \times \mathfrak{N} \longrightarrow [0,\infty[. \tag{3.3}$$

Если $x \in P,\ y \in P$ и $K \in \mathfrak{N}$, то $\Pi(x,y,K)$ рассматривается как оценка качества перемещения из x в y при условии, что оставшиеся к моменту начала перемещения задания составляют множество K. Тогда агрегируемые выигрыши, связанные с (3.2), имеют вид $\Pi(p_0,p_1,\overline{1,N}),\ \Pi(p_1,p_2,\overline{1,N} \setminus \{\alpha(1)\}),\ldots,\Pi(p_{N-1},p_N,\{\alpha_N\})$. Что касается самого агрегирования упомянутых выигрышей, то оно реализуется с использованием конструкции [6]: предполагается заданной функция

$$\varphi \,:\, [0,\infty[\times [0,\infty[\longrightarrow [0,\infty[, \tag{3.4}$$

для которой полагаем (см. [5, гл. 9]), что $\forall y \in [0,\infty[\ \forall z \in [0,\infty[$

$$(y \le z) \Rightarrow (\varphi(x,y) \le \varphi(x,z)\ \forall x \in [0,\infty[). \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 3.1. Конкретный вариант агрегирования выигрышей соответствует [6, замечание 1]. Типичными примерами способов агрегирования на основе φ являются аддитивный вариант и вариант, соответствующий задаче “на узкие места”. Отметим еще один вариант (удовлетворяющий (3.5))

$$\varphi(x,y) = xy, \quad x \in [0,\infty[, \quad y \in [0,\infty[. \tag{3.6}$$

Располагая функциями (3.3) и (3.4), (3.6), мы можем сравнивать различные пары маршрут-трасса (см. (3.2)) по величине совокупных произведений значений Π. $\square$

В дальнейшем рассматриваются ограничения в виде условий предшествования, типичных для задачи курьера [1]. Для формулировки этих условий введем множество

$$\mathbf{K} \in (\mathrm{FIN})[\overline{1,N} \times \overline{1,N}]$$

(случай $\mathbf{K} = \varnothing$ не исключается и соответствует отсутствию ограничений в виде условий предшествования). Кроме того, условимся, что для каждой перестановки $\alpha \in \mathbb{P}$, именуемой далее (полным) маршрутом, через α^{-1} обозначается перестановка в $\overline{1,N}$, обратная к α, т. е. $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$:

$$\alpha(\alpha^{-1}(i)) = \alpha^{-1}(\alpha(i)) = i \quad \forall i \in \overline{1,N}.$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее

Условие 3.1. $\forall K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{K})\ \exists h \in K\ :\ pr_1(h) \neq pr_2(z) \quad \forall z \in K.$

Тогда получаем, что

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(pr_1(z)) < \alpha^{-1}(pr_2(z))\ \forall z \in \mathbf{K}\} \neq \varnothing \tag{3.7}$$

(см. [11, § 2.2; 12]). Мы полагаем, что в (3.2) допустимо использовать только маршруты $\alpha \in \mathbb{A}$. В этом и состоят условия предшествования. Что же касается возможного выбора $(p_i)_{i\in\overline{0,N}}$, то он проясняется уже в (3.2). Однако сейчас это будет сделано более строго: если $\alpha \in \mathbb{P}$, то через $\mathfrak{X}_\alpha$ обозначаем множество всех кортежей

$$(p_i)_{i\in\overline{0,N}}\ :\ \overline{0,N} \longrightarrow P \tag{3.8}$$

таких, что: 1) $p_0 = p^0$, 2) $p_j \in M_{\alpha(j)}\ \forall j \in \overline{1,N}$; в силу (3.1) $\mathfrak{X}_\alpha$ — непустое конечное множество. В (3.2) мы (при $\alpha \in \mathbb{A}$) можем использовать любой кортеж $(p_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha$. Ниже кортежи вида (3.8), согласующиеся с наперед выбранным маршрутом из $\mathbb{P}$, называем трассами. С учетом условия 3.1 получаем, что $\forall z \in \mathbf{K}$

$$pr_1(z) \neq pr_2(z). \tag{3.9}$$

П р и м е р. Допустим, что $N = 3$ и имеются три одноточечных (для простоты) множества $M_1 = \{p_1\}$, $M_2 = \{p_2\}$ и $M_3 = \{p_3\}$, где p_1, p_2 и p_3 — элементы P; $p_i \neq p_j\ \forall i \in \overline{1,3}\ \forall j \in \overline{1,3}\setminus\{i\}$. В данном случае мы имеем шесть вариантов перемещений: $p_0 \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_2 \longrightarrow p_3$, $p_0 \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_3 \longrightarrow p_2$, $p_0 \longrightarrow p_3 \longrightarrow p_2 \longrightarrow p_1$, $p_0 \longrightarrow p_2 \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_3$, $p_0 \longrightarrow p_2 \longrightarrow p_3 \longrightarrow p_1$, $p_0 \longrightarrow p_3 \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_2$. Этим перемещениям соответствуют маршруты $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$, $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2$, $3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1$, $2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 3$, $2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, $3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$. Выигрыши агрегируются следующим образом:

$$\varphi(\Pi(p_0, p_1, \overline{1,3}), \varphi(\Pi(p_1, p_2, \{2;3\}), \Pi(p_2, p_3, \{3\}))) \in [0, \infty[,$$

$$\varphi(\Pi(p_0, p_1, \overline{1,3}), \varphi(\Pi(p_1, p_3, \{2;3\}), \Pi(p_3, p_2, \{2\}))) \in [0, \infty[,$$

$$\varphi(\Pi(p_0, p_3, \overline{1,3}), \varphi(\Pi(p_3, p_2, \{1;2\}), \Pi(p_2, p_1, \{1\}))) \in [0, \infty[,$$

$$\varphi(\Pi(p_0, p_2, \overline{1,3}), \varphi(\Pi(p_2, p_1, \{1;3\}), \Pi(p_1, p_3, \{3\}))) \in [0, \infty[,$$

$$\varphi(\Pi(p_0, p_2, \overline{1,3}), \varphi(\Pi(p_2, p_3, \{1;3\}), \Pi(p_3, p_1, \{1\}))) \in [0, \infty[,$$

$$\varphi(\Pi(p_0, p_3, \overline{1,3}), \varphi(\Pi(p_3, p_1, \{1;2\}), \Pi(p_1, p_2, \{2\}))) \in [0, \infty[.$$

Среди этих величин выбираем наибольшую. Маршрут (перестановка в $\overline{1,3}$), реализующий это наибольшее значение, оптимален (трасса здесь полностью определяется маршрутом).

Система функционалов качества. Рассмотрим схему агрегирования выигрышей на основе функции φ, следуя в идейном отношении [6, разд. 2]. Эту схему, как и в [6], мы рассмотрим не только по отношению к основной задаче “длины” N, но и по отношению к укороченным задачам, в которых используются неполные, вообще говоря, списки заданий (в основной задаче мы имеем дело с полным списком в виде $\overline{1,N}$).

Если $k \in \mathbb{N}$, то, как и в [6], через Ω_k условимся обозначать множество всех кортежей

$$(p_i)_{i\in\overline{0,k}}\ :\ \overline{0,k} \longrightarrow P; \tag{3.10}$$

каждый кортеж (3.10) есть, строго говоря, отображение из $\overline{0,k}$ в P. Следуя [6], введем при $k \in \mathbb{N}$ множество Ξ_k всех неотрицательных функционалов на Ω_k, т. е. множество всех отображений из Ω_k в $[0,\infty[$. С использованием φ реализуется правило продолжения элементов Ξ_k до элементов Ξ_{k+1}, $k \in \mathbb{N}$. Для определения упомянутого правила введем при $m \in \overline{1,N}$ множество $(\mathrm{in})[m]$ всех инъективных отображений из $\overline{1,m}$ в $\overline{1,N}$. В частности,

$$(\mathrm{in})[N] = \mathbb{P}. \tag{3.11}$$

Если $m \in \overline{1,N}$, $\alpha : \overline{1,m} \longrightarrow \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,m}$ и $l \in \overline{1,m}$, то

$$\alpha^1(\overline{k,l}) \triangleq \{\alpha(i) \,:\, i \in \overline{k,l}\} \tag{3.12}$$

(образ множества $\overline{k,l}$ при действии отображения α). Заметим, что в качестве α можно использовать инъективные и, в частности, биективные отображения.

Если $m \in \overline{1,N-1}$ и $\alpha \in (\mathrm{in})[m+1]$, то, как легко видеть,

$$\vec{\alpha} \triangleq (\alpha(j+1))_{j\in\overline{1,m}} \in (\mathrm{in})[m]. \tag{3.13}$$

С учетом (3.12) и (3.13) полагаем при $s \in \overline{1,N-1}$, $\alpha \in (\mathrm{in})[s+1]$ и $h \in \Xi_s$, что отображение $(s-\mathrm{ext})[h|\alpha] \in \Xi_{s+1}$ определяется следующим правилом: $\forall (p_i)_{i\in\overline{0,s+1}} \in \Omega_{s+1}$

$$(s-\mathrm{ext})[h|\alpha]((p_i)_{i\in\overline{0,s+1}}) \triangleq \varphi\big(\Pi(p_0,p_1,\alpha^1(\overline{1,s+1})), h((p_{i+1})_{i\in\overline{0,s}})\big). \tag{3.14}$$

Далее, при $k \in \overline{1,N}$ введем множество $\mathbf{F}_k$ всевозможных отображений непустого множества $(\mathrm{in})[k]$ в Ξ_k, $\mathbf{F}_k = \{(\mathrm{in})[k] \longrightarrow \Xi_k\}$. Полагаем теперь, что при $\alpha \in (\mathrm{in})[1]$ отображение $\Lambda_0[\alpha] \in \Xi_1$ таково, что $\forall (p_i)_{i\in\overline{0,1}} \in \Omega_1$

$$\Lambda_0[\alpha]((p_i)_{i\in\overline{0,1}}) \triangleq \Pi(p_0,p_1,\{\alpha(1)\}).$$

Полагаем далее, что $\lambda_0 \in \mathbf{F}_1$ есть def отображение $\alpha \longrightarrow \Lambda_0[\alpha] \,:\, (\mathrm{in})[1] \longrightarrow \Xi_1$. Иными словами, $\lambda_0 \,:\, (\mathrm{in})[1] \longrightarrow \Xi_1$ определяется правилом: $\lambda_0(\alpha) \triangleq \Lambda_0[\alpha] \quad \forall \alpha \in (\mathrm{in})[1]$. Следовательно, при $\alpha \in (\mathrm{in})[1] \quad \lambda_0(\alpha) \,:\, \Omega_1 \longrightarrow [0,\infty[$ есть такое отображение, что

$$\lambda_0(\alpha)((p_i)_{i\in\overline{0,1}}) = \Lambda_0[\alpha]((p_i)_{i\in\overline{0,1}}) = \Pi(p_0,p_1,\{\alpha(1)\}). \tag{3.15}$$

Далее конструируется кортеж отображений $\lambda_s \in \mathbf{F}_{s+1}$, $s \in \overline{0,N-1}$, т. е. $(\lambda_s)_{s\in\overline{0,N-1}} \in \prod_{s=0}^{N-1} \mathbf{F}_{s+1}$ (см. [17, с. 29, 45]); этот кортеж определяется следующей рекурсивной процедурой: λ_0 определено в (3.15); если $s \in \overline{1,N-1}$, то $\lambda_s \in \mathbf{F}_{s+1}$ определяется условием

$$\lambda_s(\alpha) \triangleq (s-\mathrm{ext})[\lambda_{s-1}(\vec{\alpha})|\alpha] \quad \forall \alpha \in (\mathrm{in})[s+1]. \tag{3.16}$$

Разумеется, из (3.16) следует, что при $s \in \overline{1,N-1}$ отображение $\lambda_s \,:\, (\mathrm{in})[s+1] \longrightarrow \Xi_{s+1}$ реализует при $\alpha \in (\mathrm{in})[s+1]$ и $(p_i)_{i\in\overline{0,s+1}} \in \Omega_{s+1}$ значения $\lambda_s(\alpha)((p_i)_{i\in\overline{0,s+1}}) \in [0,\infty[$. Для этих значений согласно (3.14) и (3.16) имеем при $\forall s \in \overline{1,N-1}$ $\forall \alpha \in (\mathrm{in})[s+1]$ $\forall (p_i)_{i\in\overline{0,s+1}} \in \Omega_{s+1}$

$$\lambda_s(\alpha)((p_i)_{i\in\overline{0,s+1}}) = (s-\mathrm{ext})[\lambda_{s-1}(\vec{\alpha})|\alpha]((p_i)_{i\in\overline{0,s+1}})$$
$$= \varphi(\Pi(p_0,p_1,\alpha^1(\overline{1,s+1})), \lambda_{s-1}(\vec{\alpha})((p_{i+1})_{i\in\overline{0,s}})). \tag{3.17}$$

Каждое отображение $\tilde{\alpha} \in (\mathrm{in})[1]$ полностью определяется значением $\tilde{\alpha}(1)$,

$$\lambda_1(\alpha)((p_i)_{i\in\overline{0,2}}) = \varphi(\Pi(p_0,p_1,\alpha^1(\overline{1,2})), \lambda_0(\vec{\alpha})((p_{i+1})_{i\in\overline{0,1}}))$$
$$= \varphi(\Pi(p_0,p_1,\{\alpha(1);\alpha(2)\}),\ \Pi(p_1,p_2,\{\vec{\alpha}(1)\}))$$
$$= \varphi(\Pi(p_0,p_1,\{\alpha(1);\alpha(2)\}), \Pi(p_1,p_2,\{\alpha(2)\})) \quad \forall \alpha \in (\mathrm{in})[2] \quad \forall (p_i)_{i\in\overline{0,2}} \in \Omega_2. \tag{3.18}$$

Отметим, что посредством рекурсивной процедуры на основе (3.16) определяется, в частности, отображение $\lambda_{N-1} \in \mathbf{F}_N$, т. е. $\lambda_{N-1} : (\mathrm{in})[N] \longrightarrow \Xi_N$. При $\alpha \in (\mathrm{in})[N]$

$$\lambda_{N-1}(\alpha) : \Omega_N \longrightarrow [0, \infty[. \tag{3.19}$$

В (3.19) мы имеем правило оценивания “полных” трасс, реализующихся в сочетании с (полным) маршрутом α (см. (3.11)). Итак, при $\alpha \in \mathbb{P}$ имеем правило (3.19). Заметим, в частности, что согласно (3.7) и (3.11) $\mathbb{A} \subset (\mathrm{in})[N]$; точнее, $\mathbb{A}$ есть непустое п/м $(\mathrm{in})[N]$. Следовательно, для $\alpha \in \mathbb{A}$ посредством (3.19) определено правило $\lambda_{N-1}(\alpha)$. Это правило будем применять к оцениванию траекторий из непустых конечных множеств $\mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$. Согласно (3.7) $\mathbb{A}$ также является непустым конечным множеством. Рассмотрим задачу

$$\lambda_{N-1}(\alpha)((p_i)_{i \in \overline{0,N}}) \longrightarrow \max, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \quad (p_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha. \tag{3.20}$$

Через V условимся обозначать значение (экстремум) задачи (3.20)

$$V \triangleq \max_{\alpha \in \mathbb{A}} \max_{(p_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha} \lambda_{N-1}(\alpha)((p_i)_{i \in \overline{0,N}}), \tag{3.21}$$

$V \in [0, \infty[$. Для решения задачи (3.20) применяем вариант МДП.

4. Метод динамического программирования

Для применения МДП к решению задачи (3.20) рассматриваем преобразование ограничений в виде условий предшествования к ограничениям на текущие переходы с множества на множество, используемое в [11, 12, 18]. Это позволит построить систему укороченных задач, т. е. задач маршрутизации с неполным, вообще говоря, списком заданий.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $|K|$, $|K| \in \overline{1,N}$, обозначаем мощность множества K; полагаем также $|\varnothing| \triangleq 0$. Таким образом, $|K| \in \overline{0,N}$ $\forall K \in \mathbf{N}$. Если $K \in \mathfrak{N}$, то через $(\mathrm{bi})[K]$ обозначаем множество всех биекций $\alpha : \overline{1,|K|} \longrightarrow K$. Элементы $(\mathrm{bi})[K]$ являются [18, с. 138], в частности, отображениями из $\overline{1,|K|}$ в $\overline{1,N}$; все они инъективны, т. е.

$$(\mathrm{bi})[K] \subset (\mathrm{in})[|K|] \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{4.1}$$

Элементы $(\mathrm{bi})[K]$, где $K \in \mathfrak{N}$, рассматриваем в качестве частичных (при $K \neq \overline{1,N}$) маршрутов.

Для построения укороченных задач, “копирующих” (3.20), потребуются частичные маршруты со свойством допустимости по отношению к системе ограничений. Последние, однако, будут преобразованными в духе [11,12,18]. Если $K \in \mathfrak{N}$, то (см. [11,12,18]) полагаем, что

$$\Sigma[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (pr_1(z) \in K) \& (pr_2(z) \in K)\}. \tag{4.2}$$

Оператор $\mathbf{I} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$ определяем правилом (вычеркивания)

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{pr_2(z) : z \in \Sigma[K]\} \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{4.3}$$

В терминах правила (4.2), (4.3) вводим множества допустимых частичных маршрутов: если $K \in \mathfrak{N}$, то $(\mathbf{I} - bi)[K]$ есть def множество всех биекций $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$ таких, что

$$\alpha(m) \in \mathbf{I}(\alpha^1(\overline{m, |K|})) \quad \forall m \in \overline{1, |K|}. \tag{4.4}$$

Из [11, предложения 2.2.2, 2.2.3] вытекает, что

$$(\mathbf{I} - bi)[K] \neq \varnothing \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует, что $(\mathbf{I} - bi)[\overline{1,N}] \neq \varnothing$. При этом (см. [11, теорема 2.2.1, (2.2.32)])

$$\mathbb{A} = (\mathbf{I} - bi)[\overline{1,N}]. \tag{4.6}$$

Напоминаем в этой связи, что $\mathbb{A} \neq \varnothing$ (см. также (3.7)). Для решения задачи (3.20) будем использовать (4.6) и вариант МДП, ориентированный на "обработку" системы ограничений на основе правила (4.3). Для этого введем прежде всего надлежащее расширение задачи (3.20), использующее (4.6). Это потребует наряду с частичными маршрутами $\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]$, $K \in \mathfrak{N}$, также построения частичных трасс (траекторий). Если $x \in P$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то через $\mathfrak{X}[x; K; \alpha]$ обозначаем множество всех кортежей $(p_i)_{i \in \overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \longrightarrow P$ таких, что: 1) $p_0 = x$; 2) $p_j \in M_{\alpha(j)}$ $\forall j \in \overline{1,|K|}$. С учетом (3.1) имеем свойство $\mathfrak{X}[x; K; \alpha] \neq \varnothing$ $\forall x \in P$ $\forall K \in \mathfrak{N}$ $\forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K]$. При $K \in \mathfrak{N}$ непременно $(\mathrm{bi})[K] \subset (\mathrm{in})[|K|]$, где $|K| \in \overline{1,N}$, а потому (см. (4.1))

$$\lambda_{|K|-1}(\alpha) \in \Xi_{|K|} \quad \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K].$$

Согласно определениям разд. 3 имеем, что при $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$

$$\lambda_{|K|-1}(\alpha) : \Omega_{|K|} \longrightarrow [0, \infty[; \tag{4.7}$$

согласно (4.7) определены числовые значения $\lambda_{|K|-1}(\alpha)((p_i)_{i \in \overline{0,|K|}}) \in [0, \infty[$, $(p_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \Omega_{|K|}$. Здесь можно использовать при $K \in \mathfrak{N}$ маршруты $\alpha \in (\mathbf{I} - bi)[K]$. С учетом (4.5)

$$v(x, K) \triangleq \max_{\alpha \in (\mathbf{I}-bi)[K]} \ \max_{(p_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}[x;K;\alpha]} \lambda_{|K|-1}(\alpha)((p_i)_{i \in \overline{0,|K|}}) \in [0, \infty[\quad \forall x \in P \quad \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{4.8}$$

Полагаем, что функция $\mathbb{V} : P \times \mathbf{N} \longrightarrow [0, \infty[$ задается посредством условий

$$(\mathbb{V}(x, K) \triangleq v(x, K) \quad \forall x \in P \quad \forall K \in \mathfrak{N})\&(\mathbb{V}(x, \varnothing) \triangleq 0 \quad \forall x \in P). \tag{4.9}$$

Здесь же отметим, что из определений легко следует цепочка равенств (см. (3.11))

$$\mathbb{P} = (\mathrm{bi})[\overline{1,N}] = (\mathrm{in})[N]. \tag{4.10}$$

Если $\alpha \in \mathbb{P}$, то (см. (4.10)) определено, с одной стороны, множество $\mathfrak{X}_\alpha$, а с другой — множество $\mathfrak{X}[p^0; \overline{1,N}; \alpha]$; следует учитывать при этом, что $\overline{1,N} \in \mathfrak{N}$ и $|\overline{1,N}| = N$. Из определений вытекает равенство $\mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}[p^0; \overline{1,N}; \alpha]$. Далее, из (4.6), (4.8) следует (см. (3.21)), что

$$\mathbb{V}(p^0, \overline{1,N}) = v(p^0, \overline{1,N}) = \max_{\alpha \in \mathbb{A}} \ \max_{(p_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha} \lambda_{N-1}(\alpha)((p_i)_{i \in \overline{0,N}}) = V. \tag{4.11}$$

Предложение 1. *Если $x \in P$ и $j \in \overline{1,N}$, то*

$$v(x, \{j\}) = \max_{y \in M_j} \Pi(x, y, \{j\}).$$

Доказательство очевидно. Отметим свойство: если $K \in \mathfrak{N}$ и $|K| \geq 2$, то при $j \in \mathbf{I}(K)$ имеем $K \setminus \{j\} \in \mathfrak{N}$, а потому при $y \in M_j$ справедливо равенство (см. (4.8))

$$v(y, K \setminus \{j\}) = \max_{\alpha \in (\mathbf{I}-bi)[K \setminus \{j\}]} \ \max_{(p_i)_{i \in \overline{0,|K|-1}} \in \mathfrak{X}[y;K \setminus \{j\};\alpha]} \lambda_{|K|-2}(\alpha)((p_i)_{i \in \overline{0,|K|-1}}). \tag{4.12}$$

Теорема 1. *Если $x \in P$, $K \in \mathfrak{N}$ и при этом $|K| \geq 2$, то*

$$v(x, K) = \max_{j \in \mathbf{I}(K)} \max_{y \in M_j} \varphi(\Pi(x, y, K), v(y, K \setminus \{j\})).$$

Доказательство. С учетом (4.8) выберем и зафиксируем $\beta \in (\mathbf{I} - bi)[K]$ и

$$(x_i)_{i \in \overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}[x; K; \beta], \tag{4.13}$$

для которых реализуется равенство

$$v(x, K) = \lambda_{|K|-1}((x_i)_{i \in \overline{0,|K|}}). \tag{4.14}$$

Тогда, в частности, $\beta \in (\mathrm{bi})[K]$, а потому $\beta : \overline{1, |K|} \longrightarrow K$; при этом согласно (см. (4.4))

$$\beta(m) \in \mathbf{I}(\beta^1(\overline{m, |K|})) \quad \forall m \in \overline{1, |K|}. \tag{4.15}$$

Кроме того, из (4.13) вытекает, что $(x_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0, |K|} \longrightarrow P$ и при этом

$$(x_0 = x)\&(x_j \in M_{\beta(j)} \ \forall j \in \overline{1, |K|}). \tag{4.16}$$

Из (4.15) имеем, в частности, включение $\beta(1) \in \mathbf{I}\big(\beta^1(\overline{1, |K|}\,)\big)$, где в силу биективности β $\beta^1(\overline{1, |K|}) = K$. Как следствие получаем включение

$$\beta(1) \in \mathbf{I}(K). \tag{4.17}$$

Из (4.16) имеем, в частности, что

$$x_1 \in M_{\beta(1)}. \tag{4.18}$$

Коль скоро $|K| \geq 2$, то $K\backslash\{\beta(1)\} \in \mathfrak{N}$ и $|K\backslash\{\beta(1)\}| = |K| - 1$, причем (см. (4.12))

$$v(x_1, K\backslash\{\beta(1)\}) = \max_{\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K\backslash\{\beta(1)\}]} \ \max_{(p_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}} \in \mathfrak{X}[x_1;K\backslash\{\beta(1)\};\alpha]} \lambda_{|K|-2}(\alpha)((p_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}). \tag{4.19}$$

Из (4.1) вытекает, что $\beta \in (\mathrm{in})[|K|]$, а тогда согласно (3.13)

$$\vec{\beta} = (\beta(i+1))_{i\in\overline{1,|K|-1}} \in (\mathrm{in})[|K| - 1]. \tag{4.20}$$

На самом же деле, как легко видеть, отображение $\vec{\beta}$ биективно и, более того, допустимо:

$$\vec{\beta} \in (\mathbf{I} - bi)[K\backslash\{\beta(1)\}]. \tag{4.21}$$

Тогда из (4.19), (4.21) имеем оценку

$$\max_{(p_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}} \in \mathfrak{X}[x_1;K\backslash\{\beta(1)\};\vec{\beta}]} \lambda_{|K|-2}(\vec{\beta})((p_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}) \leq v(x_1, K\backslash\{\beta(1)\}). \tag{4.22}$$

Заметим, что согласно (4.16) справедлива система включений $x_{j+1} \in M_{\beta(j+1)}$ $\forall j \in \overline{1, |K| - 1}$. С учетом (4.20) получаем, следовательно, что

$$y_j \triangleq x_{j+1} \in M_{\vec{\beta}(j)} \quad \forall j \in \overline{1, |K| - 1}. \tag{4.23}$$

Пусть $y_0 \triangleq x_1$. С учетом (4.23) получаем, что $(y_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}} \in \mathfrak{X}[x_1; K\backslash\{\beta(1)\}; \vec{\beta}]$. Используя (4.22), получаем теперь неравенство

$$\lambda_{|K|-2}(\vec{\beta})((y_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}) \leq v(x_1, K\backslash\{\beta(1)\}). \tag{4.24}$$

Из (4.23) и определения y_0 вытекает равенство

$$(y_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}} = (x_{i+1})_{i\in\overline{0,|K|-1}}. \tag{4.25}$$

Напомним, что $\beta \in$ $(\mathrm{in})[|K|]$. Кроме того, $(x_i)_{i\in\,\overline{0,|K|}} \in \Omega_{|K|}$. Тогда согласно (3.17) и (4.25)

$$\lambda_{|K|-1}(\beta)((x_i)_{i\in\,\overline{0,|K|}}) = \varphi\big(\Pi(x_0, x_1, \beta^1(\overline{1, |K|})),\, \lambda_{|K|-2}(\vec{\beta})\big((x_{i+1})_{i\in\overline{0,|K|-1}}\big)\big)$$

$$= \varphi\big(\Pi(x_0, x_1, K),\, \lambda_{|K|-2}(\vec{\beta})((y_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}})\big).$$

С учетом (4.14), (4.25) получаем, что

$$v(x, K) = \varphi\big(\Pi(x_0, x_1, K),\, \lambda_{|K|-2}(\vec{\beta})((y_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}})\big). \tag{4.26}$$

Из (3.5), (4.24) и (4.26) получаем неравенство

$$v(x,K) \le \varphi(\Pi(x_0,x_1,K),\ v(x_1,K\backslash\{\beta(1)\})).$$

С учетом (4.17) и (4.18) последнее неравенство усиливается:

$$v(x,K) \le \max_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \max_{y\in M_j}\varphi(\Pi(x,y,K),\ v(y,K\backslash\{j\})). \tag{4.27}$$

Выберем и зафиксируем $n\in\mathbf{I}(K)$, для которого

$$\max_{y\in M_n}\varphi\big(\Pi(x,y,K),\ v(y,K\backslash\{n\})\big) = \max_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \max_{y\in M_j}\varphi\big(\Pi(x,y,K),\ v(y,K\backslash\{j\})\big). \tag{4.28}$$

Поскольку $|K|\ge 2$ и (см. (4.3)) $n\in K$, то $K\backslash\{n\}\in\mathfrak{N}$; при этом, конечно, справедливо равенство $|K\backslash\{n\}| = |K|-1$. Напомним, что M_n — непустое конечное п/м P. Выберем

$$\varpi\in M_n, \tag{4.29}$$

для которого $\varphi\big(\Pi(x,\varpi,K),v(\varpi,K\backslash\{n\})\big)= \max\limits_{y\in M_n}\varphi\big(\Pi(x,y,K),v(y,K\backslash\{n\})\big)$. С учетом (4.28)

$$\varphi\big(\Pi(x,\varpi,K),\ v(\varpi,K\backslash\{n\})\big)= \max_{j\in\mathbf{I}(K)}\ \max_{y\in M_j}\varphi\big(\Pi(x,y,K),\ v(y,K\backslash\{j\})\big). \tag{4.30}$$

Напомним, что (см. (4.29)) $(\varpi\in P)\&(K\backslash\{n\}\in\mathfrak{N})$. Поэтому согласно (4.8)

$$v(\varpi,K\backslash\{n\}) = \max_{\alpha\in(\mathbf{I}-bi)[K\backslash\{n\}]}\ \max_{(p_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}\in\mathfrak{X}[\varpi;K\backslash\{n\};\alpha]}\lambda_{|K|-2}(\alpha)((p_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}).$$

С учетом этого подберем $\gamma\in(\mathbf{I}-bi)[K\backslash\{n\}]$ и $(\varpi_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}\in\mathfrak{X}[\varpi;K\backslash\{n\};\gamma]$, для которых

$$v(\varpi,K\backslash\{n\}) = \lambda_{|K|-2}(\gamma)((\varpi_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}). \tag{4.31}$$

Из (4.4) вытекает, что биекция

$$\gamma\in(\mathrm{bi})[K\backslash\{n\}] \tag{4.32}$$

обладает (см. (4.4)) следующим свойством допустимости:

$$\gamma(m)\in\mathbf{I}(\gamma^1(\overline{m,|K|-1}))\quad\forall m\in\overline{1,|K|-1}. \tag{4.33}$$

Из (4.32), в частности, следует, что

$$\gamma:\overline{1,|K|-1}\longrightarrow K\backslash\{n\}. \tag{4.34}$$

Согласно (3.1) $M_{\gamma(j)}\in\mathcal{P}\quad\forall j\in\overline{1,|K|-1}$. При этом $(\varpi_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}:\overline{0,|K|-1}\longrightarrow P$, причем справедливы свойства

$$(\varpi_0=\varpi)\&(\varpi_j\in M_{\gamma(j)}\ \forall j\in\overline{1,|K|-1}\,). \tag{4.35}$$

Тогда, в частности, $(\varpi_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}\in\Omega_{|K|-1}$. В этих условиях определяем отображение

$$\eta:\overline{1,|K|}\longrightarrow K \tag{4.36}$$

посредством правила

$$(\eta(1)\triangleq n)\&\big(\eta(j)\triangleq\gamma(j-1)\ \forall j\in\overline{2,|K|}\,\big). \tag{4.37}$$

Из (4.32), (4.36) и (4.37) вытекает свойство биективности η

$$\eta \in (\mathrm{bi})[K]. \tag{4.38}$$

Напомним, что $n \in \mathbf{I}(K)$. Поэтому (см. (4.38)) $n \in \mathbf{I}\big(\eta^1(\overline{1,|K|})\big)$ и в силу (4.37)

$$\eta(1) \in \mathbf{I}\big(\eta^1(\overline{1,|K|})\big). \tag{4.39}$$

Пусть $\mathbf{i} \in \overline{2,|K|}$. Тогда $\mathbf{i}-1 \in \overline{1,|K|-1}$ и согласно (4.37) $\eta(\mathbf{i}) = \gamma(\mathbf{i}-1)$. При этом согласно (4.33) $\gamma(\mathbf{i}-1) \in \mathbf{I}\big(\gamma^1(\overline{\mathbf{i}-1,|K|-1})\big)$. Тогда

$$\eta(\mathbf{i}) \in \mathbf{I}\big(\gamma^1(\overline{\mathbf{i}-1,|K|-1})\big). \tag{4.40}$$

Из (4.37), (4.40) следует включение $\eta(\mathbf{i}) \in \mathbf{I}\big(\eta^1(\overline{\mathbf{i},|K|})\big)$. Поскольку выбор $\mathbf{i}$ был произвольным, установлено, что $\eta(j) \in \mathbf{I}\big(\eta^1(\overline{j,|K|})\big) \quad \forall j \in \overline{2,|K|}$. С учетом (4.39)

$$\eta(m) \in \mathbf{I}\big(\eta^1(\overline{m,|K|})\big) \quad \forall m \in \overline{1,|K|}. \tag{4.41}$$

Из (4.38) и (4.41) получаем (см. (4.4)), что

$$\eta \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]. \tag{4.42}$$

Напомним теперь, что при $j \in \overline{1,|K|}$ непременно $j-1 \in \overline{0,|K|-1}$, а потому определено $\varpi_{j-1} \in P$. Итак, $(x \in P)\,\&\,(\varpi_{j-1} \in P\ \forall j \in \overline{1,|K|})$. С учетом этого определяем кортеж

$$(\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \to P \tag{4.43}$$

по правилу

$$(\widetilde{\varpi}_0 \overset{\triangle}{=} x)\,\&\,(\widetilde{\varpi}_j \overset{\triangle}{=} \varpi_{j-1}\ \forall j \in \overline{1,|K|}). \tag{4.44}$$

Из (4.43) следует, что $(\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \Omega_{|K|}$. Согласно (4.35) $\varpi_{j-1} \in M_{\gamma(j-1)} \quad \forall j \in \overline{2,|K|}$. Поэтому (см. (4.37)) $\varpi_{j-1} \in M_{\eta(j)} \quad \forall j \in \overline{2,|K|}$. Учитывая (4.44), имеем $\widetilde{\varpi}_j = \varpi_{j-1} \quad \forall j \in \overline{2,|K|}$. Тогда

$$\widetilde{\varpi}_j \in M_{\eta(j)} \quad \forall j \in \overline{2,|K|}. \tag{4.45}$$

Заметим, что согласно (4.35) и (4.44) $\widetilde{\varpi}_1 = \varpi_0 = \varpi$. В силу (4.29) $\widetilde{\varpi}_1 \in M_n$, откуда из (4.37) имеем включение $\widetilde{\varpi}_1 \in M_{\eta(1)}$. С учетом (4.45) получаем систему включений $\widetilde{\varpi}_j \in M_{\eta(j)} \quad \forall j \in \overline{1,|K|}$. Тогда $(\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \Omega_{|K|}$ таково, что

$$(\widetilde{\varpi}_0 = x)\,\&\,(\widetilde{\varpi}_j \in M_{\eta(j)}\ \forall j \in \overline{1,|K|}). \tag{4.46}$$

Это означает (см. (4.43), (4.46)), что

$$(\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}[x;K;\eta]. \tag{4.47}$$

Тогда (см. (4.42), (4.47)) $\eta \in (\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K] : (\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathfrak{X}[x;K;\eta]$. С учетом (4.8) получаем, что

$$\lambda_{|K|-1}(\eta)\big((\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big) \leqslant v(x,K). \tag{4.48}$$

Напомним, что $\eta \in (\mathrm{in})[|K|]$ (см. (4.38)). Тогда согласно (3.13)

$$\overrightarrow{\eta} = \big(\eta(j+1)\big)_{j\in\overline{1,|K|-1}} \in (\mathrm{in})[|K|-1]. \tag{4.49}$$

В частности, $\overrightarrow{\eta} : \overline{1,|K|-1} \to \overline{1,N}$ и при этом

$$\overrightarrow{\eta}(j) = \eta(j+1) \quad \forall j \in \overline{1,|K|-1}. \tag{4.50}$$

Если $j \in \overline{1, |K|-1}$, то $j+1 \in \overline{2, |K|}$, и согласно (4.37) и (4.50) $\overrightarrow{\eta}(j) = \eta(j+1) = \gamma(j)$. Поскольку выбор j был произвольным, установлено (см. (4.34), (4.49)), что $\overrightarrow{\eta} = \gamma$. Согласно (3.17) и (4.38)

$$\lambda_{|K|-1}(\eta)\big((\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big) = \varphi\big(\Pi(\widetilde{\varpi}_0, \widetilde{\varpi}_1, \eta^1(\overline{1,|K|})),\ \lambda_{|K|-2}(\overrightarrow{\eta})\big((\widetilde{\varpi}_{i+1})_{i\in\overline{0,|K|-1}}\big)\big)$$

$$= \varphi\big(\Pi(x, \varpi, K), \lambda_{|K|-2}(\gamma)\big((\widetilde{\varpi}_{i+1})_{i\in\overline{0,|K|-1}}\big)\big). \qquad (4.51)$$

Если $i \in \overline{0, |K|-1}$, то $\widetilde{\varpi}_{i+1} = \varpi_i$. Поскольку выбор i был произвольным, установлено, что $(\widetilde{\varpi}_{i+1})_{i\in\overline{0,|K|-1}} = (\varpi_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}$. С учетом (4.51)

$$\lambda_{|K|-1}(\eta)\big((\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big) = \varphi\big(\Pi(x, \varpi, K),\ \lambda_{|K|-2}(\gamma)\big((\varpi_i)_{i\in\overline{0,|K|-1}}\big)\big). \qquad (4.52)$$

Из (4.31) и (4.52) вытекает, что $\lambda_{|K|-1}(\eta)\big((\widetilde{\varpi}_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\big) = \varphi\big(\Pi(x,\varpi,K), v(\varpi, K\setminus\{n\})\big)$. С учетом (4.48) получаем неравенство $\varphi\big(\Pi(x,\varpi,K), v(\varpi, K\setminus\{n\})\big) \leqslant v(x,K)$. Используя (4.30), получаем как следствие неравенство

$$\max_{j\in\mathbf{I}(K)} \max_{y\in M_j} \varphi\big(\Pi(x,y,K), v(y, K\setminus\{j\})\big) \leqslant v(x,K). \qquad (4.53)$$

Из (4.27) и (4.53) получаем равенство $v(x,K) = \max\limits_{j\in\mathbf{I}(K)} \max\limits_{y\in M_j} \varphi\big(\Pi(x,y,K), v(y, K\setminus\{j\})\big)$. □

5. Усеченный вариант функции Беллмана

В настоящем разделе процедура усеченной реализации функции Беллмана, предложенная в [11, § 4.9; 33], адаптируется к задаче с абстрактной версией агрегирования выигрышей, рассматриваемой в настоящей статье.

Полагаем, что $\mathfrak{N}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\} \quad \forall s \in \overline{1,N}$. Определено разбиение $\mathfrak{N}$ в сумму N непустых подмножеств. Удобно также принять, что $\mathbf{N}_k \triangleq \{K \in \mathbf{N} \mid k = |K|\} \quad \forall k \in \overline{0,N}$. Тогда $\mathfrak{N}_s = \mathbf{N}_s \quad \forall s \in \overline{1,N}, \quad \mathbf{N}_0 = \{\varnothing\}$. Для реализации требуемого (в целях экономии вычислений) массива значений функции Беллмана введем [11, § 4.9; 12, (3.1)] семейство

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K}\ (pr_1(z) \in K) \Rightarrow (pr_2(z) \in K)\}. \qquad (5.1)$$

При этом справедливо [11, с. 172] свойство $\forall K \in \mathcal{G} \ \ \forall k \in \mathbf{I}(K)$

$$(K\setminus\{k\} \in \mathfrak{N}) \Rightarrow (K\setminus\{k\} \in \mathcal{G}). \qquad (5.2)$$

Всюду в дальнейшем полагаем

$$\mathcal{G}_s \triangleq \mathcal{G} \cap \mathfrak{N}_s \quad \forall s \in \overline{1,N}.$$

Из (5.2) вытекает полезное следствие: если $s \in \overline{2,N}$, $K \in \mathcal{G}_s$ и $k \in \mathbf{I}(K)$, то $K\setminus\{k\} \in \mathcal{G}_{s-1}$. Множества из $\mathcal{G}$ имеют смысл существенных списков заданий. На их основе конструируются слои в пространстве позиций, т. е. в $P \times \mathbf{N}$. Для этого сначала введем множество $\mathbf{M}$ в виде объединения всех множеств M_i, $i \in \overline{1,N}\setminus\{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Полагаем, что

$$(D_0 \triangleq \mathbf{M} \times \{\varnothing\}) \& (D_N \triangleq \{(p^0, \overline{1,N})\}) \qquad (5.3)$$

(отметим очевидное свойство $\overline{1,N} \in \mathcal{G}_N$). Слои $D_1, \ldots, D_{N-1}$, конструируемые ниже, называем регулярными и для их построения полагаем сначала

$$\mathcal{I}_k(K) \triangleq \{i \in \overline{1,N}\setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{k+1}\} \quad \forall k \in \overline{1,N-1} \quad \forall K \in \mathcal{G}_k. \qquad (5.4)$$

С учетом (5.4) определяем регулярные слои

$$D_s \triangleq \bigcup_{K\in\mathcal{G}_s}\Big\{(x,K): x\in\bigcup_{i\in\mathcal{I}_s(K)} M_i\Big\} \quad \forall s\in\overline{1,N-1}. \tag{5.5}$$

Каждое из множеств D_s, $s\in\overline{0,N}$, непусто (см. [11, §4.9]). Точнее, при всяком выборе $s\in\overline{0,N}$ множество D_s является непустым п/м $P\times\mathbf{N}$. Поэтому определено сужение функции $\mathbb{V}$ на каждый из слоев $D_0, D_1,\dots,D_N$. Итак, полагаем при всяком выборе $s\in\overline{0,N}$, что

$$\mathcal{V}_s \triangleq (\mathbb{V}(x,K))_{(x,K)\in D_s}; \tag{5.6}$$

тогда $\mathcal{V}_s : D_s \longrightarrow [0,\infty[$ и при этом $\mathcal{V}_s(x,K)=\mathbb{V}(x,K) \quad \forall (x,K)\in D_s$. Отметим важное свойство системы слоев (см. [11, §4.9]): $\forall s\in\overline{1,N} \quad \forall (x,K)\in D_s \quad \forall k\in\mathbf{I}(K) \quad \forall y\in M_k$

$$(y, K\setminus\{k\})\in D_{s-1}. \tag{5.7}$$

Свойство (5.6) позволяет определять значения функций-сужений (5.6) для позиций вида (5.7): если $s\in\overline{1,N}$, $(x,K)\in D_s$, $k\in\mathbf{I}(K)$ и $y\in M_k$, то $s-1\in\overline{0,N-1}$, и согласно (5.6), (5.7)

$$\mathcal{V}_{s-1}(y,K\setminus\{k\}) = \mathbb{V}(y,K\setminus\{k\})\in[0,\infty[. \tag{5.8}$$

В частности, из (4.9) и (5.8) имеем при условиях, определяющих (5.8), в случае $s\in\overline{2,N}$ свойство $s-1\in\overline{1,N-1}$ и как следствие $K\setminus\{k\}\in\mathfrak{N}$, а потому (см. (5.7))

$$\mathcal{V}_{s-1}(y,K\setminus\{k\}) = v(y,K\setminus\{k\}),$$

где $v(y,K\setminus\{k\})$ определено в (4.10). Согласно (5.5)

$$D_1 = \bigcup_{K\in\mathcal{G}_1}\Big\{(x,K): x\in\bigcup_{i\in\mathcal{I}_1(K)} M_i\Big\}; \tag{5.9}$$

$\mathcal{G}_1=\mathcal{G}\cap\mathfrak{N}_1$, где $\mathfrak{N}_1=\{\{i\}: i\in\overline{1,N}\}$. Введем $J\triangleq\{j\in\overline{1,N}\,|\,\{j\}\in\mathcal{G}\}$. При этом

$$\mathcal{G}_1 = \{\{j\}: j\in J\}. \tag{5.10}$$

В самом деле, пусть J_0 — множество в правой части (5.10). Если $K\in\mathcal{G}_1$, то $K\in\mathcal{G}$ и $K\in\mathfrak{N}_1$, а тогда $K=\{j_0\}$, где $j_0\in\overline{1,N}$. В итоге $\{j_0\}\in\mathcal{G}$, а тогда $j_0\in J$ и $K=\{j_0\}\in J_0$, чем завершается проверка вложения

$$\mathcal{G}_1\subset J_0. \tag{5.11}$$

Пусть $\mathbb{K}\in J_0$. Тогда $\mathbb{K}=\{j^0\}$, где $j^0\in J$, а следовательно, (см. (5.11)) $\{j^0\}\in\mathcal{G}$ и $\mathbb{K}\in\mathcal{G}$. Так как $\mathbb{K}\in\mathfrak{N}_1$, то имеем свойство $\mathbb{K}\in\mathcal{G}_1$. Установлено вложение $J_0\subset\mathcal{G}_1$. С учетом (5.11) получаем равенство (5.10). Из (5.9) и (5.10) вытекает, что

$$D_1 = \bigcup_{j\in J}\Big\{(x,\{j\}): x\in\bigcup_{i\in\mathcal{I}_1(\{j\})} M_i\Big\}, \tag{5.12}$$

где $\mathcal{I}_1(\{l\})=\{i\in\overline{1,N}\setminus\{l\}\,|\,\{i;l\}\in\mathcal{G}_2\}$ $\forall l\in J$. Согласно (5.6) и (5.12) $\mathcal{V}_1$ полностью определяется системой значений

$$\mathcal{V}_1(x,\{j\}) = \mathbb{V}(x,\{j\}), \quad j\in J, \quad x\in\bigcup_{i\in\mathcal{I}_1(\{j\})} M_i.$$

Согласно (4.9) и предложению 1 имеем, следовательно, $\forall j\in J \quad \forall x\in\bigcup_{i\in\mathcal{I}_1(\{j\})} M_i$

$$\mathcal{V}_1(x,\{j\}) = v(x,\{j\}) = \max_{y\in M_j}\Pi(x,y,\{j\}). \tag{5.13}$$

Отметим в связи с (5.13), что

$$J = \overline{1,N} \setminus \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}. \tag{5.14}$$

В самом деле, пусть $\mu \in J$. Тогда $\mu \in \overline{1,N}$ и при этом $\{\mu\} \in \mathcal{G}$. С учетом (5.1) имеем для $\{\mu\} \in \mathfrak{N}$ свойство $\forall z \in \mathbf{K}$ $(pr_1(z) \in \{\mu\}) \Rightarrow (pr_2(z) \in \{\mu\})$. Это означает, в частности, что $\forall z \in \mathbf{K}$ $(pr_1(z) \in \{\mu\}) \Rightarrow (pr_1(z) = pr_2(z))$. С учетом (3.9) и последней импликации получаем, что $pr_1(z) \notin \{\mu\} \quad \forall z \in \mathbf{K}$. Иными словами, $\mu \neq pr_1(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}$, а тогда $\mu \in \overline{1,N} \setminus \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Поскольку выбор μ был произвольным, вложение

$$J \subset \overline{1,N} \setminus \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\} \tag{5.15}$$

установлено. Пусть $\nu \in \overline{1,N} \setminus \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Тогда $\nu \in \overline{1,N}$ и $\nu \notin \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$, поэтому $pr_1(z) \neq \nu \quad \forall z \in \mathbf{K}$. При этом $\{\nu\} \in \mathfrak{N}$. По выбору ν имеем, что $pr_1(z) \notin \{\nu\} \quad \forall z \in \mathbf{K}$. Это означает, в частности, что $\forall z \in \mathbf{K}$

$$(pr_1(z) \in \{\nu\}) \Rightarrow (pr_2(z) \in \{\nu\}). \tag{5.16}$$

С учетом (5.1) и (5.16) имеем $\{\nu\} \in \mathcal{G}$. Итак, $\nu \in \overline{1,N}$ и $\{\nu\} \in \mathcal{G}$. Тогда $\nu \in J$. Поскольку выбор ν был произвольным, установлено вложение $\overline{1,N} \setminus \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\} \subset J$. С учетом (5.15) получаем требуемое равенство (5.14). Следовательно, согласно (5.13) $\mathcal{V}_1$ определяется на D_1 условиями (см.(5.12)): $\forall j \in \overline{1,N} \setminus \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\} \quad \forall x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}_1(\{j\})} M_i$

$$\mathcal{V}_1(x, \{j\}) = \max_{y \in M_j} \Pi(x, y, \{j\}). \tag{5.17}$$

Посредством (5.13), (5.17) определяется функция $\mathcal{V}_1$. Пусть $m \in \overline{1,N}$ и уже построены функции $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m$, т. е. определен кортеж $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{1,m}}$, где (см. (5.6)) $\mathcal{V}_1 : D_1 \longrightarrow [0, \infty[, \ldots, \mathcal{V}_m : D_m \longrightarrow [0, \infty[$. Если $m = N$, то построение $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{1,N}}$ считаем завершенным. Пусть $m \neq N$, т. е. $m \in \overline{1, N-1}$. Тогда $m+1 \in \overline{2,N}$, и согласно (5.7) $\forall (x, K) \in D_{m+1} \quad \forall k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in M_k$

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_m \tag{5.18}$$

(используем в (5.7) соглашение $s = m+1$). Тогда при $(x, K) \in D_{m+1}$, $k \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_k$ определено значение $\mathcal{V}_m(y, K \setminus \{k\}) \in [0, \infty[$. При $(x, K) \in D_{m+1}$ определена величина

$$\max_{j \in \mathbf{I}(K)} \max_{y \in M_j} \varphi(\Pi(x, y, K),\, \mathcal{V}_m(y, K \setminus \{j\})) \in [0, \infty[;$$

напомним здесь же, что $|K| = m + 1 \geq 2$ (в самом деле, из (5.5) вытекает, что $K \in \mathcal{G}_{m+1}$ и, в частности, $K \in \mathfrak{N}_{m+1}$; см. (5.1)). При этом согласно (4.9), (5.6) и (5.18)

$$\mathcal{V}_m(y, K \setminus \{j\}) = v(y, K \setminus \{j\}) \quad \forall j \in \mathbf{I}(K) \quad \forall y \in M_j. \tag{5.19}$$

С учетом теоремы 1, (4.9), (5.6) и (5.19) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{m+1}(x, K) = v(x, K) &= \max_{j \in \mathbf{I}(K)} \max_{y \in M_j} \varphi(\Pi(x, y, K),\, v(y, K \setminus \{j\})) \\ &= \max_{j \in \mathbf{I}(K)} \max_{y \in M_j} \varphi(\Pi(x, y, K),\, \mathcal{V}_m(y, K \setminus \{j\})) \quad \forall (x, K) \in D_{m+1}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Посредством (5.20) определена функция $\mathcal{V}_{m+1}$. Итак, соотношение (5.20) определяет преобразование $\mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{V}_{m+1}$ в случае, когда $m < N$. После конечного числа шагов на основе (5.20) все функции $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_N$ будут построены. Заметим, в частности, что согласно (5.3) и (5.6) $\mathcal{V}_N(p^0, \overline{1,N}) = \mathbb{V}(p^0, \overline{1,N})$. С учетом (4.11) получаем представление глобального экстремума

$$V = \mathcal{V}_N(p^0, \overline{1,N}).$$

При построении кортежа $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{1,N}}$ не использовались значения функции Беллмана $\mathbb{V}$ для позиций, не принадлежащих слоям D_s, $s \in \overline{1,N}$. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\mathbf{S} \triangleq \big\{(\alpha, (p_i)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbb{A} \times \Omega_N \,|\, (p_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\alpha\big\}, \tag{5.21}$$

получая множество возможных (совокупных) решений задачи (3.20). Решение этой задачи отождествляем с поиском V и пары $(\alpha^0, (p_i^0)_{i \in \overline{0,N}}) \in \mathbf{S}$, для которой $\lambda_{N-1}(\alpha^0)((p_i^0)_{i \in \overline{0,N}}) = V$.

6. Оптимальность "беллмановского" решения

В настоящем разделе рассматривается одна вспомогательная конструкция, которая будет использована при нахождении оптимальной пары маршрут-трасса. Полагаем, что уже построено решение в виде пары маршрут-трасса, обладающее "беллмановским" (в некотором естественном с точки зрения функции φ) свойством. Это свойство базируется на усеченной версии уравнения Беллмана (см. (5.13), (5.20)). Однако весьма общий характер способа агрегирования на основе функции φ при отсутствии какого-либо аналога полугруппового свойства в условиях на выбор этой функции мотивирует специальное исследование оптимальности упомянутого "беллмановского" решения. В настоящем разделе полагаем, что $N \geq 3$.

Пусть построены кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,N},$$

$$(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \longrightarrow P,$$

для которых выполнены следующие свойства:

$$1^*)\,\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j,N}\}) \quad \forall j \in \overline{1,N};$$

$$2^*)\,(\mathbf{x}_0 = p^0)\,\&\,(\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \quad \forall j \in \overline{1,N});$$

$$3^*)\,\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l \quad \forall k \in \overline{1,N} \quad \forall l \in \overline{1,N}\setminus\{k\};$$

$$4^*)\,(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}) \in D_{N-j} \quad \forall j \in \overline{0,N-1}$$

(с учетом 4*) определены значения $\mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}), \quad j \in \overline{0,N-1});$

$$5^*)\,\mathbf{i}_N \in J \quad \text{(напомним, что} \quad J = \overline{1,N}\setminus\{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}) \quad \text{и при этом}$$

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_{N-1}, \{\mathbf{i}_N\}) = \Pi(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \{\mathbf{i}_N\});$$

$$6^*)\,\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\})$$

$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}\big),\, \mathcal{V}_{N-j}\big(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}\big)\Big) \quad \forall j \in \overline{1,N-1}.$$

Из 3*) вытекает, что

$$\eta \triangleq (\mathbf{i}_k)_{k\in\overline{1,N}} \in \mathbb{P}. \tag{6.1}$$

Тогда, кстати, имеем при $s \in \overline{1,N}$, что $\eta^1(\overline{s,N}) = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{s,N}\}$ и, кроме того, $\eta^1(\overline{1,s-1}) = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,s-1}\}$ (в случае $s = 1$ последнее множество пусто), $\eta^1(\overline{1,s-1}) \cap \eta^1(\overline{s,N}) = \varnothing$, $\eta^1(\overline{1,s-1}) \cup \eta^1(\overline{s,N}) = \eta^1(\overline{1,N}) = \overline{1,N}$. Из этих соотношений следует, конечно, что

$$\eta^1(\overline{s,N}) = \overline{1,N}\setminus\eta^1(\overline{1,s-1}) \quad \forall s \in \overline{1,N}.$$

При этом согласно 1*) справедлива система включений

$$\eta(j) \in \mathbf{I}(\eta^1(\overline{j,N})) \quad \forall j \in \overline{1,N}.$$

Поэтому (см. разд. 4) $\eta \in (\mathbf{I} - bi)[\overline{1,N}]$. Тогда согласно (4.6)

$$\eta \in \mathbb{A} \tag{6.2}$$

(допустимость η). Кроме того, (см. (3.8)) из 2*) вытекает, что $(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{X}_\eta$; в частности, $\mathbf{x}_j \in M_{\eta(j)} \quad \forall j \in \overline{1,N}$. Из (5.21) и (6.2) следует включение

$$(\eta, (\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}}) \in \mathbf{S}. \tag{6.3}$$

Итак, мы располагаем "беллмановской" (см. 6*)) парой маршрут-трасса.

Далее рассмотрим некоторые вспомогательные конструкции. Учтем прежде всего, что $\forall k \in \overline{1, N-1} \quad \forall i \in \overline{1, N-k+1} \quad (k-1)+i \in \overline{k, N}$. С учетом этого полагаем при $k \in \overline{1, N-1}$, что

$$\eta[k] \triangleq (\eta(k-1+i))_{i \in \overline{1, N-k+1}}; \tag{6.4}$$

при этом $\eta[k] : \overline{1, N-k+1} \longrightarrow \eta^1(\overline{k, N})$ и, кроме того,

$$\eta[k]^1(\overline{1, N-k+1}) = \eta^1(\overline{k, N}). \tag{6.5}$$

Из биективности η следует также, что

$$\eta[k] \in (\mathrm{in})[N-k+1] \quad \forall k \in \overline{1, N-1}. \tag{6.6}$$

Полезно отметить, что (см. (6.4)) справедливо равенство

$$\eta[1] = \eta. \tag{6.7}$$

В связи с (6.5), (6.7) добавим также, что $\eta[N-1] \in (\mathrm{in})[2]$, $\eta[N-1]^1(\overline{1, 2}) = \eta^1(\overline{N-1, N}) = \{\eta(N-1); \eta(N)\}$. Если $k \in \overline{2, N-1}$, то (см. (3.13)) определена инъекция $\overrightarrow{\eta[k-1]} \in (\mathrm{in})[N-k+1]$. Легко видеть, что при этом реализуется $\eta[k]$. Именно,

$$\overrightarrow{\eta[k-1]} = \eta[k] \quad \forall k \in \overline{2, N-1}. \tag{6.8}$$

Напомним (см. (3.16)), что при $k \in \overline{2, N-1}$ определено отображение

$$\lambda_{N-k} : (\mathrm{in})[N-k+1] \longrightarrow \Xi_{N-k+1};$$

с учетом (6.6) получаем, в частности, что $\lambda_{N-k}(\eta[k]) : \Omega_{N-k+1} \longrightarrow [0, \infty[$ реализует согласно (6.8) правило (см. (3.17))

$$\begin{gathered} \lambda_{N-k+1}(\eta[k-1])((p_i)_{i \in \overline{0, N-k+2}}) \\ = \varphi(\Pi(p_0, p_1, \eta[k-1]^1(\overline{1, N-k+2})), \ \lambda_{N-k}(\eta[k])((p_{i+1})_{i \in \overline{0, N-k+1}})) \\ \forall (p_i)_{i \in \overline{0, N-k+2}} \in \Omega_{N-k+2}; \end{gathered} \tag{6.9}$$

учитываем, что согласно (6.6) $\eta[k-1] \in (\mathrm{in})[N-k+2]$; кроме того,

$$N-k+1 \in \overline{2, N-1}. \tag{6.10}$$

Отметим в связи с (6.9) два крайних случая: при $k=2$

$$\begin{gathered} N-k+1 = N-1, \quad \lambda_{N-k+1} = \lambda_{N-1}, \quad \eta[k-1] = \eta[1], \\ \lambda_{N-k+1}(\eta[k-1])((p_i)_{i \in \overline{0, N-k+2}}) = \lambda_{N-1}(\eta[1])((p_i)_{i \in \overline{0, N}}) = \lambda_{N-1}(\eta)((p_i)_{i \in \overline{0, N}}) \\ \forall (p_i)_{i \in \overline{0, N}} \in \Omega_N \end{gathered} \tag{6.11}$$

(см. (6.7)); при $k = N-1$ имеем равенство $N-k+1 = 2$ и $\lambda_{N-k+1} = \lambda_2$, $\eta[k-1] = \eta[N-2]$; а тогда в случае $(p_i)_{i \in \overline{0, 3}} \in \Omega_3$

$$\lambda_{N-k+1}(\eta[k-1])\big((p_i)_{i \in \overline{0, N-k+2}}\big) = \lambda_2(\eta[N-2])\big((p_i)_{i \in \overline{0, 3}}\big). \tag{6.12}$$

В связи с (6.11) и (6.12) отметим (6.10), что позволяет использовать (3.17). Согласно (6.9)

$$\lambda_2(\eta[N-2])((p_i)_{i \in \overline{0, 3}}) = \varphi(\Pi(p_0, p_1, \eta[N-2]^1(\overline{1, 3})), \lambda_1(\eta[N-1])((p_{i+1})_{i \in \overline{0, 2}}))$$

$$\forall (p_i)_{i \in \overline{0, 3}} \in \Omega_3.$$

Поскольку $(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \Omega_N$, из (6.7) и (6.11) следует $\lambda_{N-1}(\eta[1])((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}) = \lambda_{N-1}(\eta)\big((\mathbf{x}_i)_{i\in\,\overline{0,N}}\big)\in$ $[0,\infty[$. Теперь легко видеть, что при $m \in \overline{0, N-1}$

$$(\mathbf{x}_{m+i})_{i\in\overline{0,N-m}} \in \Omega_{N-m}. \tag{6.13}$$

Случай $m = N-1$ приводит к соотношению $(\mathbf{x}_{N-1+i})_{i\in\overline{0,1}} \in \Omega_1$, дополняемому представлением $\Pi(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \{\mathbf{i}_N\})$ в 5*), т. е. к равенству

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_{N-1}, \{\eta(N)\}) = \Pi(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \{\eta(N)\}). \tag{6.14}$$

Отметим также случай, когда в (6.13) $m = N-2$; тогда $(\mathbf{x}_{m+i})_{i\in\overline{0,N-m}} = (\mathbf{x}_{(N-2)+i})_{i\in\overline{0,2}}$. В этой связи мы обращаемся к (3.18), учитывая, что (см. (6.6)) $\eta[N-1] \in (\mathrm{in})[2]$,

$$\lambda_1(\eta[N-1])((\mathbf{x}_{(N-2)+i})_{i\in\overline{0,2}})$$
$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{x}_{N-1}, \{\eta(N-1); \eta(N)\}\big), \Pi\big(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \{\eta(N)\}\big)\Big). \tag{6.15}$$

Учитываем, что $\eta[N-1] : \overline{1,2} \longrightarrow \eta^1(\overline{N-1,N})$ действует (см. (6.4)) по правилу $(\eta[N-1](1) = \eta(N-1))\&(\eta[N-1](2) = \eta(N))$. С использованием (6.14) и (6.15) мы получаем равенство

$$\lambda_1(\eta[N-1])((\mathbf{x}_{(N-2)+i})_{i\in\overline{0,2}}) = \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{x}_{N-1}, \{\eta(N-1); \eta(N)\}\big), \mathcal{V}_1\big(\mathbf{x}_{N-1}, \{\eta(N)\}\big)\Big). \tag{6.16}$$

Напомним, что согласно 4*) $(\mathbf{x}_{N-2}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-2}\}) \in D_2$; с учетом биективности η

$$\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-2}\} = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{N-1,N}\} = \{\eta(N-1); \eta(N)\}. \tag{6.17}$$

Стало быть, $(\mathbf{x}_{N-2}, \{\eta(N-1); \eta(N)\}) = (\mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-1,N})) \in D_2$, и, поскольку $N-1 \in \overline{1,N-1}$, имеем из 6*), что (см. (6.16), (6.17))

$$\mathcal{V}_2\big(\mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-1,N})\big) = \varphi\Big(\Pi(\mathbf{x}_{N-2}, \mathbf{x}_{N-1}, \eta^1(\overline{N-1,N})),\ \mathcal{V}_1\big(\mathbf{x}_{N-1}, \{\eta(N)\}\big)\Big)$$
$$= \lambda_1(\eta[N-1])\big((\mathbf{x}_{(N-2)+i})_{i\in\,\overline{0,2}}\big). \tag{6.18}$$

Коснемся также случая, когда в (6.13) $m = N-3$ (напомним, что в наших построениях $N \geq 3$). При этом (рассматриваем (6.9) при $k = N-1$) согласно (6.18)

$$\lambda_2(\eta[N-2])((\mathbf{x}_{(N-3)+i})_{i\in\overline{0,3}}) = \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-3}, \mathbf{x}_{N-2}, \eta[N-2]^1(\overline{1,3})\big),\ \lambda_1(\eta[N-1])\big((\mathbf{x}_{(N-2)+i})_{i\in\overline{0,2}}\big)\Big)$$
$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-3}, \mathbf{x}_{N-2}, \eta[N-2]^1(\overline{1,3})\big),\ \mathcal{V}_2\big(\mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-1,N})\big)\Big). \tag{6.19}$$

Заметим, что $N-2 \in \overline{1,N-1}$ в рассматриваемом (в данном разделе) случае; согласно 6*)

$$\mathcal{V}_3(\mathbf{x}_{N-3}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-3}\})$$
$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-3}, \mathbf{x}_{N-2}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-3}\}\big),\ \mathcal{V}_2\big(\mathbf{x}_{N-2}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-2}\}\big)\Big).$$

Вновь используя биективность η (см. (6.1)), получаем из последнего соотношения

$$\mathcal{V}_3(\mathbf{x}_{N-3}, \eta^1(\overline{N-2,N})) = \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-3}, \mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-2,N})\big), \mathcal{V}_2\big(\mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-1,N})\big)\Big). \tag{6.20}$$

Возвращаясь к (6.19), отметим, что $\eta[N-2]^1(\overline{1,3}) = \{\eta(N-3+i) : i \in \overline{1,3}\} = \eta^1(\overline{N-2,N})$, а потому справедливо равенство

$$\lambda_2(\eta[N-2])((\mathbf{x}_{(N-3)+i})_{i\in\overline{0,3}}) = \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-3}, \mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-2,N})\big),\ \mathcal{V}_2\big(\mathbf{x}_{N-2}, \eta^1(\overline{N-1,N})\big)\Big),$$

откуда и из (6.20) получаем, что

$$\mathcal{V}_3(\mathbf{x}_{N-3}, \eta^1(\overline{N-2, N})) = \lambda_2(\eta[N-2])((\mathbf{x}_{(N-3)+i})_{i\in\overline{0,3}}). \tag{6.21}$$

Отметим, что при $r \in \overline{2, N-1}$ у нас $N-(r+1) \in \overline{0, N-3}$, а потому согласно 4*)

$$(\mathbf{x}_{N-(r+1)}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-(r+1)}\}) \in D_{r+1}$$

и в силу биективности η $(\mathbf{x}_{N-(r+1)}, \eta^1(\overline{N-r, N})) \in D_{r+1}$; это свойство показывает, что (см. (5.6)) значение $\mathcal{V}_{r+1}(\mathbf{x}_{N-(r+1)}, \eta^1(\overline{N-r, N})) \in [0, \infty[$ определено корректно.

Предложение 2. *Решение* (6.3) *оптимально в исходной задаче*

$$\lambda_{N-1}(\eta)((\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}}) = V.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\lambda_r(\eta[N-r])((\mathbf{x}_{N-(r+1)+i})_{i\in\overline{0,r+1}}) = \mathcal{V}_{r+1}(\mathbf{x}_{N-(r+1)}, \eta^1(\overline{N-r, N})) \quad \forall r \in \overline{2, N-1}. \tag{6.22}$$

В самом деле, допустим противное, т. е.

$$\Xi \triangleq \Big\{r \in \overline{2, N-1} \mid \lambda_r(\eta[N-r])((\mathbf{x}_{N-(r+1)+i})_{i\in\overline{0,r+1}}) \neq \mathcal{V}_{r+1}(\mathbf{x}_{N-(r+1)}, \eta^1(\overline{N-r, N}))\Big\} \neq \varnothing. \tag{6.23}$$

Введем в рассмотрение число

$$q \triangleq \inf(\Xi) \in \Xi \tag{6.24}$$

(Ξ — непустое конечное п/м промежутка $\overline{2, N-1}$). Тогда, в частности, $q \in \overline{2, N-1}$. Однако в силу (6.21) $2 \notin \Xi$, а потому $q \in \overline{3, N-1}$ и согласно (6.24)

$$q-1 \in \overline{2, N-1}\backslash\Xi. \tag{6.25}$$

Из (6.23), (6.25) следует, что

$$\lambda_{q-1}(\eta[N-q+1])((\mathbf{x}_{N-q+i})_{i\in\overline{0,q}}) = \mathcal{V}_q(\mathbf{x}_{N-q}, \eta^1(\overline{N-q+1, N})). \tag{6.26}$$

Вместе с тем из (6.23) и (6.24) вытекает, что

$$\lambda_q(\eta[N-q])((\mathbf{x}_{N-(q+1)+i})_{i\in\overline{0,q+1}}) \neq \mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \eta^1(\overline{N-q, N})). \tag{6.27}$$

При этом $(\mathbf{x}_{N-q+i})_{i\in\overline{0,q}} \in \Omega_q$ и, кроме того, $(\mathbf{x}_{N-(q+1)+i})_{i\in\overline{0,q+1}} \in \Omega_{q+1}$. Отметим также, что $N-q+1 \in \overline{2, N-1}$, а тогда согласно (6.9) имеем

$$\lambda_q(\eta[N-q])((p_i)_{i\in\overline{0,q+1}}) = \varphi\Big(\Pi\big(p_0, p_1, \eta[N-q]^1(\overline{1, q+1})\big), \lambda_{q-1}(\eta[N-q+1])\big((p_{i+1})_{i\in\overline{0,q}}\big)\Big) \quad \forall (p_i)_{i\in\overline{0,q+1}} \in \Omega_{q+1}. \tag{6.28}$$

Тогда, в частности, из (6.28) вытекает, что

$$\lambda_q(\eta[N-q])((\mathbf{x}_{N-(q+1)+i})_{i\in\overline{0,q+1}}) = \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \mathbf{x}_{N-q}, \eta[N-q]^1(\overline{1, q+1})\big),\ \lambda_{q-1}(\eta[N-q+1])\big((\mathbf{x}_{N-q+i})_{i\in\overline{0,q}}\big)\Big). \tag{6.29}$$

Из (6.26), (6.29) получаем, что справедливо равенство

$$\lambda_q(\eta[N-q])((\mathbf{x}_{N-(q+1)+i})_{i\in\overline{0,q+1}})$$

$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \mathbf{x}_{N-q}, \eta[N-q]^1(\overline{1, q+1})\big),\ \mathcal{V}_q\big(\mathbf{x}_{N-q}, \eta^1(\overline{N-q+1, N})\big)\Big). \tag{6.30}$$

Теперь воспользуемся свойством 6*), откуда, в частности, следует, что

$$\mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-(q+1)}\})$$

$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \mathbf{x}_{N-q}, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-(q+1)}\}\big), \mathcal{V}_q\big(\mathbf{x}_{N-q}, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-q}\}\big)\Big). \tag{6.31}$$

В силу биективности η имеем цепочку равенств

$$\overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-(q+1)}\} = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{N-q, N}\} = \eta^1(\overline{N-q, N}). \tag{6.32}$$

Как следствие получаем равенство

$$\mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \eta^1(\overline{N-q, N})) = \mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k\ :\ k \in \overline{1, N-(q+1)}\}). \tag{6.33}$$

С учетом (6.31) и (6.33) получаем равенство

$$\mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \eta^1(\overline{N-q, N}))$$

$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \mathbf{x}_{N-q}, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-(q+1)}\}\big), \mathcal{V}_q\big(\mathbf{x}_{N-q}, \overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-q}\}\big)\Big). \tag{6.34}$$

Подобно (6.32) $\overline{1, N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1, N-q}\} = \{\mathbf{i}_k : k \in \overline{N-q+1, N}\} = \eta^1(\overline{N-q+1, N})$, а тогда с учетом (6.32) и (6.34) имеем равенство

$$\mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \eta^1(\overline{N-q, N}))$$

$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \mathbf{x}_{N-q}, \eta^1(\overline{N-q, N})\big), \mathcal{V}_q\big(\mathbf{x}_{N-q}, \eta^1(\overline{N-q+1, N})\big)\Big). \tag{6.35}$$

Напомним также одно из вышеупомянутых свойств отображения (6.4) в случае $k = N-q$ (здесь $k \in \overline{1, N-2}$). Именно, согласно (6.5) $\eta[N-q]^1(\overline{1, q+1}) = \eta^1(\overline{N-q, N})$, а тогда из (6.30) следует равенство

$$\lambda_q(\eta[N-q])((\mathbf{x}_{N-(q+1)+i})_{i\in\overline{0, q+1}})$$

$$= \varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \mathbf{x}_{N-q}, \eta^1(\overline{N-q, N})\big), \mathcal{V}_q\big(\mathbf{x}_{N-q}, \eta^1(\overline{N-q+1, N})\big)\Big).$$

С учетом (6.35) последнее выражение принимает вид

$$\lambda_q(\eta[N-q])((\mathbf{x}_{N-(q+1)+i})_{i\in\overline{0, q+1}}) = \mathcal{V}_{q+1}(\mathbf{x}_{N-(q+1)}, \eta^1(\overline{N-q, N})),$$

что невозможно в силу (6.27). Следовательно, (6.23) невозможно, а поэтому справедливо (6.22). В частности (при $r = N-1$), имеем равенство $\lambda_{N-1}(\eta[1])((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0, N}}) = \mathcal{V}_N(\mathbf{x}_0, \eta^1(\overline{1, N}))$, откуда с учетом (6.7) и биективности η (см. (6.1)) вытекает, что

$$\lambda_{N-1}(\eta)((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0, N}}) = \mathcal{V}_N(\mathbf{x}_0, \overline{1, N}). \tag{6.36}$$

С учетом 2*) и (6.36) $\mathcal{V}_N(\mathbf{x}_0, \overline{1, N}) = \mathcal{V}_N(p^0, \overline{1, N}) = V$, а тогда из (6.36) имеем равенство

$$\lambda_{N-1}(\eta)((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0, N}}) = V. \tag{6.37}$$

Из (3.21), (6.37) вытекает (см. (5.21)), что (6.3) есть оптимальное решение задачи (3.20). $\square$

7. Построение “беллмановских” решений

Сначала рассмотрим процедуру построения решений, удовлетворяющих условиям предыдущего раздела. Предварительно мы рассмотрим наиболее простой случай $N = 2$, в котором конструкции предыдущего раздела не используются. После этого вернемся к случаю $N \geq 3$, для которого будет последовательно проведено построение “беллмановского” решения; последнее, как показано в предложении 2, оптимально. В то же время начальный этап процедуры поиска оптимального решения будет одним и тем же.

Полагаем до конца настоящего раздела $\mathbf{x}_0 \triangleq p^0$. При этом $(p^0, \overline{1,N}) \in D_N$ и

$$V = \max_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \max_{y \in M_j} \varphi(\Pi(p^0, y, \overline{1,N}),\ \mathcal{V}_{N-1}(y, \overline{1,N} \setminus \{j\})). \tag{7.1}$$

Здесь мы учитываем, что согласно (5.3) и (5.7) при $k \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $y \in M_k$

$$(y, \overline{1,N} \setminus \{k\}) \in D_{N-1}, \tag{7.2}$$

а потому (см. (5.6)) определено значение $\mathcal{V}_{N-1}(y, \overline{1,N} \setminus \{k\})$, что и было использовано в (7.1). С учетом (7.1) выбираем $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$ и $\mathbf{x}_1 \in M_{\mathbf{i}_1}$, для которых

$$V = \varphi(\Pi(p^0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}),\ \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\})). \tag{7.3}$$

Согласно (7.2) справедливо включение

$$(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}. \tag{7.4}$$

З а м е ч а н и е 7.1. Отдельно рассмотрим случай $N = 2$, не используя построений предыдущего раздела. В этом случае $\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}$ есть одноэлементное множество, т. е. $\overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\} \in \mathfrak{N}_1$. Вместе с тем в соответствии с (7.4)

$$(\mathbf{x}_1, \overline{1,2} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = (\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) \in D_{N-1}.$$

Согласно (5.12) можно указать $\mathbf{i}_2 = J$, для которого $\overline{1,2} \setminus \{\mathbf{i}_1\} = \{\mathbf{i}_2\}$. По определению J имеем свойство $\{\mathbf{i}_2\} = \mathcal{G}$. С учетом (5.14) получаем, что

$$\mathbf{i}_2 \in \overline{1,N} : \mathbf{i}_2 \neq pr_1(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}. \tag{7.5}$$

Из (5.17) и (7.5) получаем, что

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_1, \{\mathbf{i}_2\}) = \mathcal{V}_1(\mathbf{x}_1, \overline{1,2} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \max_{y \in M_{\mathbf{i}_2}} \Pi(\mathbf{x}_1, y, \{\mathbf{i}_2\}). \tag{7.6}$$

С учетом (7.6) выбираем $\mathbf{x}_2 \in M_{\mathbf{i}_2}$ так, что при этом

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_1, \{\mathbf{i}_2\}) = \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\mathbf{i}_1\}) = \Pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \{\mathbf{i}_2\}).$$

С учетом (7.3) получаем равенство

$$V = \varphi(\Pi(p^0, \mathbf{x}_1, \overline{1,2}), \Pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \{\mathbf{i}_2\})) = \varphi(\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,2}), \Pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \{\mathbf{i}_2\})). \tag{7.7}$$

При этом $(\mathbf{x}_i)_{i \in \overline{0,2}} \in \Omega_2$. Напомним, что $\mathbf{i}_1 \neq \mathbf{i}_2$ по выбору $\mathbf{i}_2$, а тогда $\theta \triangleq (\mathbf{i}_j)_{j \in \overline{1,2}} \in (\mathrm{in})[2]$.

При этом согласно (3.13) имеем $\vec{\theta} = (\theta(j+1))_{j\in\overline{1,1}}$, т. е. $\vec{\theta}(1) = \theta(2) = \mathbf{i}_2$. Имеем равенство $\overline{1,2} = \{\mathbf{i}_1; \mathbf{i}_2\}$. Согласно (3.18) и (7.7) $\lambda_1(\theta)((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,2}}) = \varphi(\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,2}), \Pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \{\mathbf{i}_2\})) = V$. Тогда $\lambda_{N-1}(\theta)((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}) = \lambda_1(\theta)((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,2}}) = V$. При этом $\theta \in \mathbb{P}$ (в рассматриваемом случае $N = 2$). Заметим теперь, что $\mathbf{i}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1,2})$. Поэтому согласно (4.3)

$$\theta(1) = \mathbf{i}_1 \neq pr_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}. \tag{7.8}$$

Пусть $z_* \in \mathbf{K}$. Тогда согласно (7.8) $\theta(1) \neq pr_2(z_*)$. Следовательно,

$$pr_2(z_*) = \theta(2) = \mathbf{i}_2, \tag{7.9}$$

так как $pr_2(z_*) \in \overline{1,N}$ и $\overline{1,2} = \overline{1,N} = \{\theta(1); \theta(2)\}$. При этом $\{z_*\} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{K})$, а потому (см. (7.9)) $pr_1(z_*) \neq pr_2(z_*)$. С учетом (7.9) $pr_1(z_*) \neq \theta(2)$ и, коль скоро $pr_1(z_*) \in \overline{1,2}$, то $pr_1(z_*) = \theta(1)$. Тогда $1 = \theta^{-1}(pr_1(z_*)) < 2 = \theta^{-1}(pr_2(z_*))$. Итак, $\theta^{-1}(pr_1(z)) < \theta^{-1}(pr_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K}$. В этом случае согласно (3.7) $\theta \in \mathbb{A}$. При этом $\mathbf{x}_0 = p^0$, $\mathbf{x}_1 \in M_{\theta(1)}$ и $\mathbf{x}_2 \in M_{\theta(2)}$. Это означает (см. (3.8)), что $(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,2}} \in \mathfrak{X}_\theta$. Тогда

$$(\theta, (\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,2}}) \in \mathbf{S} \tag{7.10}$$

согласно (5.21), причем, как уже отмечалось, $\lambda_{N-1}(\theta)((\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}) = V$. Следовательно, (7.10) есть оптимальное решение задачи (3.20) (в этой связи см. (3.21), (5.21)). □

Всюду в дальнейшем полагаем, что $N \geq 3$. Напомним (7.4).

Пусть теперь $r \in \overline{1, N-1}$ и уже построены кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r}}) : \overline{1,r} \longrightarrow \overline{1,N}, \tag{7.11}$$

$$(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,r}}) : \overline{0,r} \longrightarrow P, \tag{7.12}$$

для которых выполнены следующие условия:

1') $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,r}$;

2') $(\mathbf{x}_0 = p^0) \,\&\, (\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j} \ \forall j \in \overline{1,r})$;

3') $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l \quad \forall k \in \overline{1,r} \quad \forall l \in \overline{1,r}\setminus\{k\}$;

4') $(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}) \in D_{N-j} \quad \forall j \in \overline{0,r}$.

5') $\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) =$
$\varphi(\Pi(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}), \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\})) \quad \forall j \in \overline{1,r}$.

З а м е ч а н и е 7.2. Напомним, что в соответствии с определениями разд. 2 справедливо равенство $\overline{1,0} = \varnothing$, а тогда $\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\} = \varnothing$ при $j = 1$. С учетом этого обстоятельства получаем, что при $r = 1$ ранее построенные тривиальные кортежи (7.11) и (7.12) удовлетворяют условиям 1')–5'). В самом деле, пусть $r = 1$. Тогда 1') выполнено по выбору $\mathbf{i}_1$ с учетом вышеупомянутого обстоятельства, связанного со свойством $\overline{1,0} = \varnothing$. Условие 2') выполняется по способу построения $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$. Условие 3') выполнено в силу равенства $\overline{1,r} = \{1\}$ при $r = 1$. Условие 4') следует из (7.4) и определения $\mathbf{x}_0$. Наконец, с учетом (7.3) справедливо равенство

$$\mathcal{V}_N(\mathbf{x}_0, \overline{1,N}) = \varphi(\Pi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}), \mathcal{V}_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_1\})). \tag{7.13}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\overline{1,r} = \{1\}$, из (7.13) вытекает 5'). Мы снова учли здесь равенство $\overline{1,0} = \varnothing$. □

Возвращаясь к общему случаю, отметим, что в силу 4') имеем, в частности, включение

$$(\mathbf{x}_r, \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,r}\}) \in D_{N-r}. \tag{7.14}$$

Возможны два случая: a) $r = N-1$; b) $r < N-1$. Оба этих случая мы рассмотрим отдельно.

a) Пусть $r = N-1$. Следовательно, имеем кортежи

$$(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N-1}} : \overline{1,N-1} \longrightarrow \overline{1,N}, \quad (\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N-1}} : \overline{0,N-1} \longrightarrow P \tag{7.15}$$

со следующими свойствами, конкретизирующими 1')–5'):

1^0) $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,N-1}$;

2^0) $(\mathbf{x}_0 = p^0)\,\&\,(\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j}\ \forall j \in \overline{1,N-1})$;

3^0) $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l \quad \forall k \in \overline{1,N-1} \quad \forall l \in \overline{1,N-1}\backslash\{k\}$;

4^0) $(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\}) \in D_{N-j} \quad \forall j \in \overline{0,N-1}$;

5^0) $\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) =$
$\varphi(\Pi(\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}), \mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j}\})) \quad \forall j \in \overline{1,N-1}$.

Заметим, что согласно (7.14) и 4^0) имеем в данном случае включение

$$(\mathbf{x}_{N-1}, \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-1}\}) \in D_1.$$

При этом согласно (5.12) для некоторого $\mathbf{j} \in J$ справедливо равенство

$$\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-1}\} = \{\mathbf{j}\}, \tag{7.16}$$

$\mathbf{x}_{N-1} \in \bigcup_{i\in\mathcal{I}_1(\{\mathbf{j}\})} M_i$. В этом случае согласно (5.13) и (7.16) имеем цепочку равенств

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_{N-1}, \{\mathbf{j}\}) = v(\mathbf{x}_{N-1}, \{\mathbf{j}\}) = \max_{y\in M_{\mathbf{j}}} \Pi(\mathbf{x}_{N-1}, y, \{\mathbf{j}\}). \tag{7.17}$$

С учетом (7.16) полагаем, что $\mathbf{i}_N \triangleq \mathbf{j}$. Тогда $\mathbf{i}_N \in J$ и согласно (7.17)

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_{N-1}, \{\mathbf{i}_N\}) = \max_{y\in M_{\mathbf{i}_N}} \Pi(\mathbf{x}_{N-1}, y, \{\mathbf{i}_N\}). \tag{7.18}$$

Здесь же заметим, что согласно (5.10) имеем по выбору $\mathbf{i}_N$ включение $\{\mathbf{i}_N\} \in \mathcal{G}_1$ и, в частности, $\{\mathbf{i}_N\} \in \mathcal{G}$. Последнее означает в силу (5.1), что при $z \in \mathbf{K}$ истинна импликация $(pr_1(z) = \mathbf{i}_N) \Rightarrow (pr_2(z) = \mathbf{i}_N)$, откуда вытекает, что (см. условие 3.1) $pr_1(z) \neq \mathbf{i}_N \quad \forall z \in \mathbf{K}$. При этом $\mathbf{i}_N \in \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-1}\}$. Поскольку согласно условию 3.1 $pr_1(z) \neq pr_2(z)$ при $z \in \mathbf{K}$, имеем равенство $\Sigma[\{\mathbf{i}_N\}] = \varnothing$ и $\mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-1}\}) = \{\mathbf{i}_N\}$. Поэтому $\mathbf{i}_N \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,N-1}\})$. Теперь 1^0) “превращается” в следующее свойство:

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\}) \quad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{7.19}$$

Далее, из (7.19) имеем, что $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_N \quad \forall k \in \overline{1,N-1}$. Тогда $\big($см. 3^0) и последнее свойство$\big)$

$$\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l \quad \forall k \in \overline{1,N} \quad \forall l \in \overline{1,N}\backslash\{k\}. \tag{7.20}$$

Следовательно, $(\mathbf{i}_k)_{k\in\overline{1,N}} \in \mathbb{P}$, а поэтому

$$\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j,N}\} = \overline{1,N}\backslash\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,j-1}\} \quad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{7.21}$$

Тогда из (7.19) и (7.21) вытекает, что

$$\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{j,N}\}) \quad \forall j \in \overline{1,N}. \tag{7.22}$$

Из (7.22) следует, что кортеж $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}} : \overline{1,N} \longrightarrow \overline{1,N}$ обладает свойством 1^*). С учетом (7.18) выберем точку $\mathbf{x}_N \in M_{\mathbf{i}_N}$, для которой

$$\mathcal{V}_1(\mathbf{x}_{N-1}, \{\mathbf{i}_N\}) = \Pi(\mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{x}_N, \{\mathbf{i}_N\}). \tag{7.23}$$

Мы получили, в частности, кортеж $(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \longrightarrow P$, для которого согласно 2^0)

$$(\mathbf{x}_0 = p^0)\,\&\,(\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j}\ \forall j \in \overline{1,N}). \tag{7.24}$$

Следовательно, кортеж $(\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}}$ обладает (см. (7.24)) свойством 2^*). Здесь же отметим, что согласно (7.20) имеем для кортежа $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}$ свойство 3^*). Свойство 4^*) вытекает из 4^0). Напомним также, что (см. (7.23)) $\mathbf{i}_N \in J : \mathcal{V}_1(\mathbf{x}_{N-1},\{\mathbf{i}_N\}) = \Pi(\mathbf{x}_{N-1},\mathbf{x}_N,\{\mathbf{i}_N\})$. Итак, кортежи $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,N}}$, $(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}}$ обладают свойством 5^*). Наконец, и свойство 6^*) также справедливо в данном случае (т. е. при $r = N-1$); оно вытекает из 5^0).

Таким образом, кортежи, продолжающие (7.15), являются "беллмановскими" в смысле 1^*)–6^*), а тогда согласно предложению 2 мы располагаем оптимальным решением в виде пары $((\mathbf{i})_{j\in\overline{1,N}}, (\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,N}})$; см. в этой связи (6.3). Итак, случай a) соответствует финальной части процедуры, реализующей оптимальное решение в виде (упорядоченной) пары (6.3).

b) Пусть теперь $r < N-1$, т. е. $r \in \overline{1,N-2}$. Учтем (7.14). Кроме того, отметим, что $N-r \in \overline{2,N-1}$. Тогда согласно (5.7) $\forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k \in \overline{1,r}\})\quad \forall y \in M_j$ имеем

$$(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})\setminus\{j\}) \in D_{N-(r+1)}, \tag{7.25}$$

где $N-(r+1) \in \overline{1,N-2}$. Из (7.25) мы имеем, что при $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})$ и $y \in M_j$ определено значение $\mathcal{V}_{N-(r+1)}(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})\setminus\{j\}) \in [0,\infty[$. Более того, согласно (5.20)

$$\mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})$$
$$= \max_{j\in\mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k:k\in\overline{1,r}\})}\ \max_{y\in M_j}\varphi\Big(\Pi\big(\mathbf{x}_r,y,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\}\big),\mathcal{V}_{N-(r+1)}\big(y,(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})\setminus\{j\}\big)\Big). \tag{7.26}$$

С учетом (7.26) выбираем индекс

$$\mathbf{i}_{r+1} \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\}), \tag{7.27}$$

а также точку

$$\mathbf{x}_{r+1} \in M_{\mathbf{i}_{r+1}}, \tag{7.28}$$

для которых справедливо следующее равенство:

$$\mathcal{V}_{N-r}(\mathbf{x}_r,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})$$
$$= \varphi(\Pi(\mathbf{x}_r,\mathbf{x}_{r+1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\}),\ \mathcal{V}_{N-(r+1)}(\mathbf{x}_{r+1},(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\})\setminus\{\mathbf{i}_{r+1}\})). \tag{7.29}$$

Мы получаем два кортежа $(\mathbf{i}_j)_{j\in\overline{1,r+1}} : \overline{1,r+1} \longrightarrow \overline{1,N}$, $\quad(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,r+1}} : \overline{0,r+1} \longrightarrow P$. Из 1') и (7.27) вытекает, что справедливо

1") $\mathbf{i}_j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,j-1}\})\quad \forall j \in \overline{1,r+1}$;

2") $(\mathbf{x}_0 = p^0)\,\&\,(\mathbf{x}_j \in M_{\mathbf{i}_j}\ \forall j \in \overline{1,r+1})$.

По выбору $\mathbf{i}_{r+1}$ имеем, в частности, что (см. (4.3)) $\mathbf{i}_{r+1} \in \overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,r}\}$. Тогда имеем с учетом 3') и последнего включения свойство

3") $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l\quad \forall k \in \overline{1,r+1}\quad \forall l \in \overline{1,r+1}\setminus\{k\}$.

Заметим, что согласно 4'), (7.25), (7.27) и (7.28) справедливо свойство

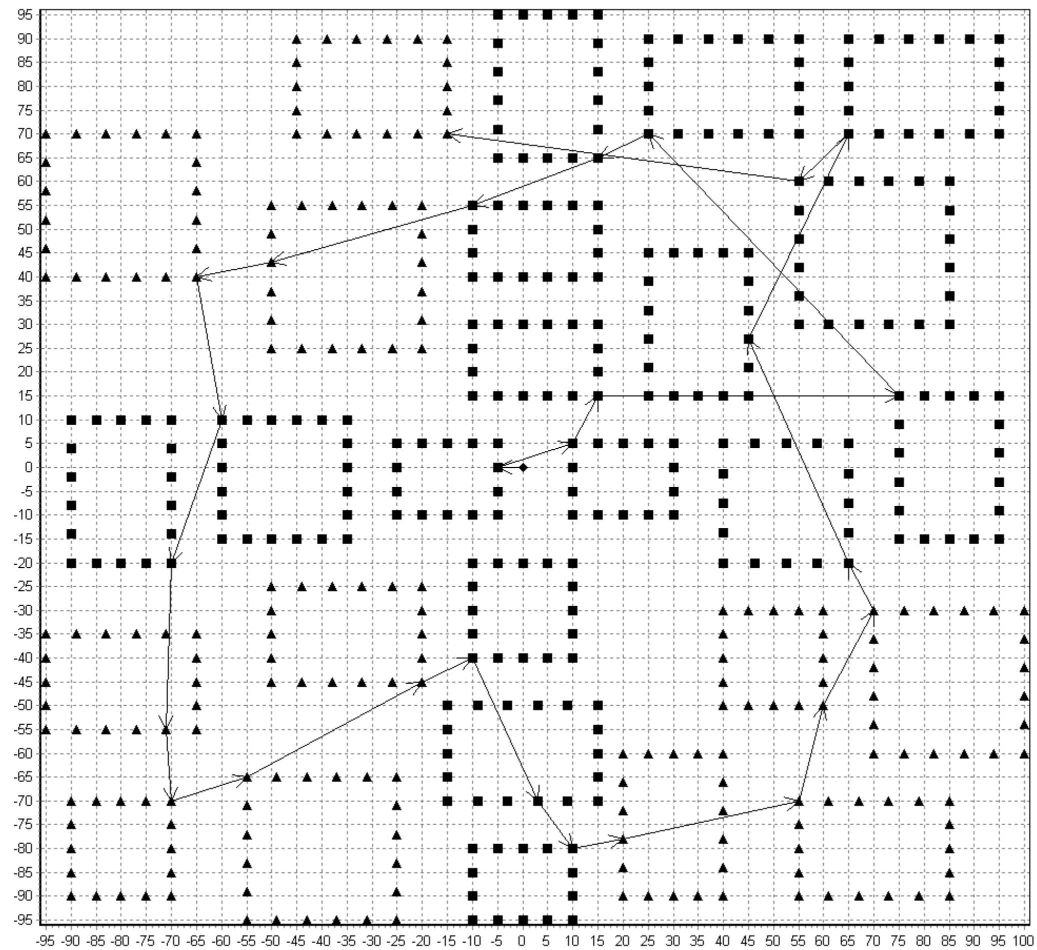
4") $(\mathbf{x}_j,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,j}\}) \in D_{N-j}\quad \forall j \in \overline{0,r+1}$.

Наконец, из 5') и (7.29) вытекает следующая система равенств:

5") $\mathcal{V}_{N-j+1}(\mathbf{x}_{j-1},\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,j-1}\}) =$
$\varphi(\Pi(\mathbf{x}_{j-1},\mathbf{x}_j,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,j-1}\}),\mathcal{V}_{N-j}(\mathbf{x}_j,\overline{1,N}\setminus\{\mathbf{i}_k : k\in\overline{1,j}\})\quad \forall j \in \overline{1,r+1}$.

Итак, в случае b) каждый из кортежей (7.11) и (7.12) удается продолжить на один шаг с сохранением всех основных свойств: свойства 1')–5') преобразуются в 1")–5").

После выполнения конечного числа этапов, соответствующих случаю b), мы получим ситуацию, отвечающую случаю a), после чего, применяя процедуру построения последнего шага в системе перемещений (выбор $\mathbf{i}_N$ и $\mathbf{x}_N$; см.(7.23)), завершим построение оптимальной в основной задаче пары маршрут-трасса (см.(6.3), (6.37)) в виде конкретного "беллмановского" решения.



Маршрут и трасса обхода множеств.

8. Вычислительный эксперимент

С целью практической проверки работы предложенных выше теоретических конструкций была написана программа для ПЭВМ на языке программирования C++ (был использован пакет CodeGear C++ Builder 2009), реализующая в одном частном случае алгоритм, описываемый в основной части настоящей статьи. Программа работает в среде 32-разрядной операционной системы семейства Windows, начиная с Windows XP. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случая решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления маршрута и трассы и увеличения отдельных участков графика, а также сохранения изображения в файле формата bmp. Вычислительный эксперимент проводился на портативном компьютере Notebook с центральным процессором Intel Core2Duo T7700, объемом ОЗУ 3 гБ с установленной операционной системой Windows Vista Business SP2.

Рассмотрим решение модельного примера с помощью вышеупомянутой программы для случая (3.6).

Будем для простоты и наглядности рассматривать решение задачи на плоскости: $P = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Пусть начальная точка $p^0 = (0,0)$, т. е. база, совпадает с началом координат; задана система из 27 множеств, имеющих вид “сеток”, т. е. систем точек, расположенных с определенным шагом на прямоугольниках. Будем задавать каждый i-й ($i \in \overline{1,27}$) прямоугольник как кортеж $(O_i, N_i^x, N_i^y, L_i^x, L_i^y)$, где O_i — левая нижняя вершина прямоугольника, N_i^x — число точек в “сетке” по горизонтали (включая угловые вершины), N_i^y — число точек в “сетке" по вертикали (включая угловые вершины), L_i^x — длина горизонтальной стороны прямоугольника, L_i^y — длина вертикальной стороны прямоугольника. Таким образом, каждое множество M_i однозначно представляется вышеупомянутым кортежем, а его мощность равна $2N_i^x + 2(N_i^y - 2) = 2(N_i^x - 2) + 2N_i^y$.

Итак, пусть функция П имеет следующий вид:

$$\Pi(x, y, K) = 1/(1 + 0.00004 \cdot \rho(x, y) + 0.0005 \cdot |K|), \tag{8.1}$$

где $\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x и y. По смыслу (8.1) является вероятностью успешного перемещения из x в y при наличии списка K оставшихся заданий.

Пусть в нашем примере условия предшествования определяются посредством

$$\mathbf{K} = \{(p_i, q_i) : i \in \overline{1, 25}\},$$

где p_i, q_i принимают следующие значения (см. табл. 1):

Т а б л и ц а 1

i	p_i	q_i	i	p_i	q_i	i	p_i	q_i	i	p_i	q_i	i	p_i	q_i
1	1	10	6	15	16	11	20	19	16	14	16	21	2	27
2	12	2	7	18	27	12	25	26	17	7	10	22	3	6
3	2	13	8	9	27	13	23	22	18	8	2	23	3	19
4	13	15	9	10	9	14	21	20	19	1	9	24	18	17
5	6	16	10	11	19	15	24	22	20	14	26	25	14	25

Пусть, наконец, множества M_i заданы следующим образом (см. табл. 2):

Т а б л и ц а 2

i	O_i	N_i^x	N_i^y	L_i^x	L_i^y	i	O_i	N_i^x	N_i^y	L_i^x	L_i^y
1	$(10, -10)$	5	4	20	15	15	$(65, 70)$	6	5	30	20
2	$(40, -20)$	5	5	25	25	16	$(55, 30)$	6	6	30	30
3	$(75, -15)$	5	6	20	30	17	$(40, -50)$	5	5	20	20
4	$(-10, -40)$	5	5	20	20	18	$(20, -90)$	5	6	20	30
5	$(-15, -70)$	6	5	30	20	19	$(70, -60)$	6	6	30	30
6	$(-10, -95)$	5	4	20	15	20	$(55, -90)$	6	5	30	20
7	$(-25, -10)$	5	4	20	15	21	$(-50, -45)$	6	5	30	20
8	$(-60, -15)$	6	6	30	30	22	$(-55, -95)$	6	6	30	30
9	$(-90, -20)$	5	6	20	30	23	$(-95, -55)$	6	5	30	20
10	$(-10, 15)$	6	4	25	15	24	$(-90, -90)$	5	5	20	20
11	$(-10, 40)$	6	4	25	15	25	$(-50, 25)$	6	6	30	30
12	$(-5, 65)$	5	6	20	30	26	$(-95, 40)$	6	6	30	30
13	$(25, 15)$	5	6	20	30	27	$(-45, 70)$	6	5	30	20
14	$(25, 70)$	6	5	30	20						

Получены следующие результаты. Значение задачи: $V = \mathcal{V}_N(p^0, \overline{1, 27}) = 0.80357$, маршрут и трасса имеют вид

$$\begin{gathered}
p^0 = (0, 0) \to (-5, 0) \in M_7 \to (10, 5) \in M_1 \to (15, 15) \in M_{10} \to (75, 15) \in M_3 \\
\to (25, 70) \in M_{14} \to (15, 65) \in M_{12} \to (-10, 55) \in M_{11} \to (-50, 43) \in M_{25} \\
\to (-65, 40) \in M_{26} \to (-60, 10) \in M_8 \to (-70, -20) \in M_9 \to (-71, -55) \in M_{23} \\
\to (-70, -70) \in M_{24} \to (-55, -65) \in M_{22} \to (-20, -45) \in M_{21} \to (-10, -40) \in M_4 \\
\to (3, -70) \in M_5 \to (10, -80) \in M_6 \to (20, -78) \in M_{18} \to (55, -70) \in M_{20} \\
\to (60, -50) \in M_{17} \to (70, -30) \in M_{19} \to (65, -20) \in M_2 \to (45, 27) \in M_{13} \\
\to (65, 70) \in M_{15} \to (55, 60) \in M_{16} \to (-15, 70) \in M_{27}.
\end{gathered}$$

Время счета составило 22 мин. 49 сек. График маршрута и трассы приведен на рисунке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. **Сергеев С.И.** Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 45–54.
5. **Мину М.** Математическое программирование. М.: Наука, 1990. 487 с.
6. **Маркелова Е.Ю., Рольщиков В.Е., Ченцов А.Г.** Задача маршрутизации конечного числа переходов системы с абстрактной функцией агрегирования затрат / Челяб. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 25.05.98, №1577-В98.
7. **Klaassen G., Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M.** Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects // J. Optim. Theory Appl. 2004. Vol. 120, no. 1. P. 147–179.
8. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения / А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, М.Ю. Куклин, А.Г. Ченцов, А.А. Кадников // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41–48.
9. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.
10. Возможности математических методов моделирования в решении проблемы снижения облучаемости персонала / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, Ф.А. Балушкин, А.Г. Ченцов, А.П. Хомяков // Вопросы радиационной безопасности. 2009. № 4. С. 39–49.
11. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 240 с.
12. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Экстремальная задача маршрутизации "на узкие места" с ограничениями в виде условий предшествования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 129–142.
13. **Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №2. С. 68–77.
14. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. 1964. Т. 9. С. 219–228.
15. **Хелд М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочивания // Кибернет. сб. 1964. Т. 9. С. 202–218.
16. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
17. **Ченцов А.Г.** Множества, события, вероятность (основные структуры). Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2006. 200 с.
18. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 3. С. 136–160.

Поступила 19.04.2010

Сесекин Александр Николаевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: sesekin@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
гл. программист
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич
чл.-кор. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.853

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

В. Д. Скарин

Предлагается метод оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования, основанный на применении регуляризованной по обеим переменным функции Лагранжа. Данный подход не зависит от рода несобственности исходной задачи. Формулируются условия и устанавливаются оценки сходимости метода.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, регуляризованная функция Лагранжа.

V. D.,Skarin. On one general approach to the optimal correction of improper convex programming problems.

A method of optimal correction of improper convex programming problems is suggested, which is based on using a Lagrange function regularized in both variables. This approach is independent of the kind of impropriety of the original problem. Conditions are formulated and estimates are established for the convergence of the method.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, regularized Lagrange function.

Введение

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые дифференцируемые на $\mathbb{R}^n$ функции ($i = 0, 1, \ldots, m$). Задача (1) называется *несобственной* [1], если нарушаются соотношения

$$-\infty < F^* = f^* < +\infty,$$

где f^* и F^* — оптимальные значения задачи (1) и задачи, двойственной (по Лагранжу) к (1)

$$F^* = \sup_{\lambda \ge 0} \inf_x L(x, \lambda), \tag{2}$$

$L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ — функция Лагранжа для задачи (1), $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. В зависимости от пустоты или непустоты допустимых множеств X в задаче (1) и

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \inf_x L(x, \lambda) > -\infty\}$$

в задаче (2) выделяют [1] три рода несобственности задач ВП:

$$1)\ X = \varnothing,\ \Lambda \ne \varnothing; \qquad 2)\ X \ne \varnothing,\ \Lambda = \varnothing; \qquad 3)\ X = \varnothing,\ \Lambda = \varnothing.$$

Таким образом, о несобственных задачах в более узком смысле можно говорить как о задачах ВП с противоречивыми ограничениями. Интерес к противоречивым моделям обусловлен как потребностями математической теории (анализ систем уравнений и неравенств, некорректные

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00273) и Президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1001, 09-С-1-1010).

задачи, задачи идентификации, распознавания образов и др.), так и необходимостью анализа прикладных задач с противоречивыми условиями, прежде всего экономических. Практика показывает, что появление несовместных моделей в сфере управления производственной деятельностью — обычное явление (о содержательной интерпретации несобственных задач см. [1]).

Распространенность и актуальность несобственных задач порождает острую необходимость разработки теории и методов их численной аппроксимации (коррекции), т. е. объективных процедур преобразования несобственной модели в одну или несколько разрешимых задач. В последнем случае возникает возможность выбора из множества задач одной определенной (оптимальной коррекции).

Наиболее исследованы несобственные задачи 1-го рода (см., например, [1–3]). Они характеризуются тем, что после корректировки системы ограничений по правым частям (т. е. после замены несовместной системы $f(x) \le 0$ на совместную $f(x) \le \xi$, $\xi \ge 0$, например, коррекция задачи производственного планирования по дефициту ресурсов) в задаче (1) будет $\inf f_0(x) > -\infty$. К задачам 2-го рода относятся задачи ВП, у которых $\inf\limits_{x\in X} f_0(x) = -\infty$. Интерес представляет проблема построения таких универсальных методов коррекции несобственных задач, которые бы не зависели от характера несобственности исходной задачи.

В работе ниже предлагается метод оптимальной коррекции несобственных задач ВП, основанный на применении регуляризованной по обеим переменным функции Лагранжа. Данный подход не зависит от рода несобственности исходной задачи. Излагается суть подхода, обсуждаются особенности его работы для задачи ВП с противоречивыми ограничениями. Далее исследуются задачи ВП с совместной системой ограничений. И в заключение рассматривается вопрос о связи предлагаемого подхода к оптимальной коррекции несобственных задач ВП и метода из работы [4], также имеющего универсальный характер по отношению к роду несобственности задач ВП.

1. Описание метода

Рассмотрим задачу, близкую к (1):

$$\min\{f_0(x) : x \in X \cap S_r\}, \tag{3}$$

где $S_r = \{x : \|x\|^2 \le r\}$, $r > 0$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Если (1) — разрешимая задача ВП, то при $r \ge \|x_0^*\|$, где x_0^* — минимальное по норме (нормальное) решение (1), задачи (1) и (3) эквивалентны в том смысле, что $f_r^* = f^*$, $X_r^* \subset X^*$. Здесь X^* и X_r^*, f^* и f_r^* — множества решений и оптимальные значения задач (1) и (3) соответственно. Если в (1) $X = \varnothing$, т. е. (1) — несобственная задача ВП 1-го или 3-го рода, то несобственной будет и задача (3), причем она будет несобственной лишь 1-го рода, поскольку $\inf\limits_{x\in S_r} L(x,\lambda) > -\infty$ для любых $\lambda \ge 0$ и $r > 0$.

Обозначим $X_\xi = \{x : f(x) \le \xi\}$, $E_r = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ : X_\xi \cap S_r \ne \varnothing\}$, $\bar\xi_r = \arg\min\{\|\xi\| : \xi \in E_r\}$. Легко проверить, что E_r — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$ ($\forall\, r > 0$). Поэтому вектор $\bar\xi_r$ определяется однозначно для любого $r > 0$.

Пусть $\tilde x_r = \arg\min\{\|f^+(x)\| : x \in S_r\}$, $\tilde\xi_r = f^+(\tilde x_r)$, $\bar x_r \in X_{\bar\xi_r} \cap S_r$. Здесь $f^+(\cdot) = [f_1^+(\cdot), \dots, f_m^+(\cdot)]$, $f_i^+(\cdot) = \max\{0, f_i(\cdot)\}$. Тогда $f(\bar x_r) \le f^+(\bar x_r) \le \bar\xi_r$ и $\|\tilde\xi_r\| = \|f^+(\tilde x_r)\| \le \|f^+(\bar x_r)\| \le \bar\xi_r$. Так как $\tilde\xi_r \in E_r$, то отсюда и из единственности $\bar\xi_r$ следует $\bar\xi_r = \tilde\xi_r$. Таким образом, справедливо представление

$$\bar\xi_r = f^+(\tilde x_r) = f^+(\bar x_r). \tag{4}$$

Из определения точки $\bar x_r$ следует, что

$$(G^T(\bar x_r)\,\bar\xi_r,\, x - \bar x_r) \ge 0 \qquad (\forall\, x \in S_r), \tag{5}$$

где $G(\cdot)$ — матрица размера $m \times n$, строками которой являются векторы $\bigtriangledown f_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, m$. В силу выпуклости функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, и соотношений (4), (5) получаем

$$\|\bar{\xi}_r\|^2 = \sum_{i=1}^m f_i^{+^2}(\bar{x}_r) = \sum_{i=1}^m (\bar{\xi}_r)_i f_i(\bar{x}_r) \le \sum_{i=1}^m (\bar{\xi}_r)_i f_i(x) - \sum_{i=1}^m (\bar{\xi}_r)_i \, (\bigtriangledown f_i(\bar{x}_r),\, x - \bar{x}_r) \le (\bar{\xi}_r,\, f(x)).$$

Таким образом, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\|\bar{\xi}_r\|^2 \le (\bar{\xi}_r,\, f(x)). \tag{6}$$

Сформулируем следующую задачу

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar{\xi}_r} \cap S_r\}. \tag{7}$$

Эта задача всегда разрешима и при $\bar{\xi}_r = 0$ совпадает с (3). При $\bar{\xi}_r \ne 0$ задача (7) является одной из возможных аппроксимаций для (3).

При определении вектора $\bar{\xi}_r$ возможны следующие случаи.

(1) Найдется значение r_0 параметра r такое, что $\bar{\xi}_r = 0$ для всех $r \ge r_0$. В этом случае $X \ne \varnothing$, и могут реализовываться ситуации:

(1a) задача (1) разрешима (т. е. $X^* \ne \varnothing$);

(1b) нижняя грань $\tilde{f}$ функции $f_0(x)$ на множестве X не достигается. При выполнении этого условия X — заведомо неограниченное множество, и либо $f_0(x) > \tilde{f} > -\infty$ $(\forall\, x \in X)$, либо $\tilde{f} = -\infty$. В последнем случае (1) — несобственная задача ВП 2-го рода.

(2) Для любого $r > 0$ справедливо $\bar{\xi}_r \ne 0$.

Построим для задачи (3) регуляризированную по обеим переменным функцию Лагранжа

$$L_\sigma(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \alpha\, \|x\|^2 - \beta\, \|\lambda\|^2,$$

где $\sigma = [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2$, $\sigma > 0$, $x \in S_r$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. В силу сильной выпуклости $L_\sigma(x, \lambda)$ по x и сильной вогнутости по λ будут определены функции

$$\varphi_\sigma(x) = \max_{\lambda \ge 0} L_\sigma(x, \lambda), \qquad \psi_\sigma(\lambda) = \min_{x \in S_r} L_\sigma(x, \lambda)$$

всюду на S_r и $\mathbb{R}^m_+$ соответственно. Нетрудно видеть, что $\varphi_\sigma(x) = L_\sigma(x, \lambda(x))$, где $\lambda(x) = (2\beta)^{-1} f^+(x)$. Для этого достаточно убедиться в выполнении неравенства

$$(\bigtriangledown_\lambda L_\sigma(x, \lambda(x)),\, \lambda - \lambda(x)) = (f(x) - f^+(x),\, \lambda - \frac{1}{2\beta}\, f^+(x)) \le 0$$

для всех $\lambda \ge 0$. Таким образом,

$$\varphi_\sigma(x) = f_0(x) + \frac{1}{4\beta}\, \|f^+(x)\|^2 + \alpha\, \|x\|^2.$$

Очевидно, что $\varphi_\sigma(x)$ — сильно выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Так же нетрудно доказать свойство сильной вогнутости функции $\psi_\sigma(\lambda)$ на $\mathbb{R}^m_+$. Поэтому существуют единственные точки

$$x_r^\sigma = \arg\min_{x \in S_r} \varphi_\sigma(x), \qquad \lambda_r^\sigma = \arg\max_{\lambda \ge 0} \psi_\sigma(\lambda)$$

такие, что

$$\varphi_\sigma(x_r^\sigma) = \psi_\sigma(\lambda_r^\sigma) = L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma)$$

(см., например, [5]), т. е. $[x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma]$ — единственная седловая точка функции $L_\sigma(x, \lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$. При этом $\lambda_r^\sigma = \lambda(x_r^\sigma) = (2\beta)^{-1} f^+(x_r^\sigma)$.

Таким образом, в общем случае предлагаемый подход состоит в анализе последовательности задач: (1) $\to$ (3) $\to$ (7) $\to$ (P_σ^r), где (P_σ^r) — задача нахождения седловых точек функции $L_\sigma(x, \lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$. При конкретизации исходной задачи некоторые звенья этой цепочки могут отсутствовать. Так, если (1) — разрешимая задача ВП, то задачи (1), (3), (7) совпадают (при достаточно большом r); если (1) — несобственная задача ВП 2-го рода, то из цепочки исключается задача (7).

2. Задача выпуклого программирования с противоречивыми ограничениями

Пусть вначале в (7) $\bar\xi_r \neq 0$ $(\forall\, r > 0)$, т. е. (3) — несобственная задача ВП 1-го рода. Предположим, что в точке $\bar x_r \in X_{\bar\xi_r} \cap S_r$ выполнены условия Куна—Таккера для задачи (7), т.е. существует вектор $\bar\lambda_r = [\bar\lambda_1^r, \ldots, \bar\lambda_m^r] \geq 0$ такой, что

$$\begin{aligned} &(\nabla_x L(\bar x_r, \bar\lambda_r),\, x - \bar x_r) \geq 0 \qquad (\forall\, x \in S_r), \\ &\bar\lambda_i^r\, [f_i(\bar x_r) - (\bar\xi_r)_i] = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{8}$$

Исследуем связь между решениями задач (7) и (P_σ^r).

Теорема 1. *Если в задаче* (7) $\bar\xi_r \neq 0$ *и выполнены условия* (8), *то для любых* $\sigma > 0$, $r > 0$ *справедливы оценки*

$$\|(f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r)^+\| \leq \sqrt{\beta}\, K_1(\sigma, r), \tag{9}$$

$$|f_0(x_r^\sigma) - \bar f_r| \leq K_2(\sigma, r), \tag{10}$$

где

$$K_1(\sigma, r) = 2\,[\sqrt{\beta}\, \|\bar\lambda_r\| + (\alpha\, \|\bar x_r\|^2 + \beta\, \|\bar\lambda_r\|^2)^{1/2}],$$
$$K_2(\sigma, r) = \max\,\{\alpha\, \|\bar x_r\|^2, \sqrt{\beta}\, K_1(\sigma, r)\, \|\bar\lambda_r\|\},$$

$\bar x_r, \bar\lambda_r$ — *из* (8), $\bar f_r = f_0(\bar x_r)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_r^\sigma = \arg\min\limits_{x \in S_r} \varphi_\sigma(x)$ и $\bar\xi_r = f^+(\bar x_r)$, то

$$f_0(x_r^\sigma) + \frac{1}{4\,\beta}\, \|f^+(x_r^\sigma)\|^2 + \alpha\, \|x_r^\sigma\|^2 \leq \bar f_r + \frac{1}{4\,\beta}\, \|\bar\xi_r\|^2 + \alpha\, \|\bar x_r\|^2.$$

Отсюда вытекают неравенства

$$\|f^+(x_r^\sigma)\|^2 - \|\bar\xi_r\|^2 \leq 4\,\beta\, (\bar f_r - f_0(x_r^\sigma) + \alpha\, \|\bar x_r\|^2), \tag{11}$$

$$f_0(x_r^\sigma) - \bar f_r \leq \alpha\, \|\bar x_r\|^2. \tag{12}$$

С учетом выпуклости функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, и соотношений (8) для произвольной точки $x' \in S_r$ получим

$$\begin{aligned} f_0(x') - \bar f_r = f_0(x') - f_0(\bar x_r) &\geq (\nabla f_0(\bar x_r),\, x' - \bar x_r) \\ &\geq -(G^T(\bar x_r)\bar\lambda_r,\, x' - \bar x_r) \geq -(\bar\lambda_r,\, f(x') - f(\bar x_r)) \\ = -(\bar\lambda_r,\, f(x') - \bar\xi_r) &\geq -(\bar\lambda_r,\, (f(x') - \bar\xi_r)^+) \geq -\|\bar\lambda_r\|\, \|(f(x') - \bar\xi_r)^+\|. \end{aligned} \tag{13}$$

Далее воспользуемся неравенством

$$(p - q)^{+^2} \leq (p^+ - q)^2,$$

справедливым для любых действительных чисел p и q. Принимая во внимание неравенство (6), получим

$$\begin{aligned} &\|(f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r)^+\|^2 \leq \|f^+(x_r^\sigma) - \bar\xi_r\|^2 \\ &= \|f^+(x_r^\sigma)\|^2 - 2\,(f^+(x_r^\sigma),\ \bar\xi_r) + \|\bar\xi_r\|^2 \leq \|f^+(x_r^\sigma)\|^2 - \|\bar\xi_r\|^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Поэтому из (11) и (13) следует

$$\|(f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r)^+\|^2 \leq 4\,\beta\, (\|\bar\lambda_r\|\, \|(f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r)^+\| + \alpha\, \|\bar x_r\|^2).$$

Отсюда

$$(\|(f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r)^+\| - 2\,\beta\, \|\bar\lambda_r\|)^2 \leq 4\,\beta\, (\alpha\, \|\bar x_r\|^2 + \beta\, \|\bar\lambda_r\|^2),$$

что и влечет справедливость неравенства (9).

Оценка (10) вытекает из (12), (13) и (9).

Теорема доказана.

Следствие 1. $\lim\limits_{\beta\to 0} f^+(x_r^\sigma) = \bar{\xi}_r$.

Вытекает из (14) с учетом (11), (13) и (9).

Следствие 2. $\lim\limits_{\sigma\to 0} f_0(x_r^\sigma) = \bar{f}_r$.

Следствие 3. *Пусть* $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. *Тогда*

$$\|f(x_r^\sigma) - \bar{\xi}_r)^+\| \le \gamma\, K_3(r), \qquad |f_0(x_r^\sigma) - \bar{f}_r| \le \gamma\, K_4(r),$$

где $K_3(r) = 2\,[\,\|\bar{\lambda}_r\| + (\|\bar{x}_r\|^2 + \|\bar{\lambda}_r\|^2)^{1/2}\,]$, $K_4(r) = \max\{\|\bar{x}_r\|^2, \|\bar{\lambda}_r\| K_3(r)\}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, $\sigma \to 0$, $\beta = o(\alpha)$. *Тогда* $x_r^\sigma \to (\bar{x}_r)_0$, *где* $(\bar{x}_r)_0 = \arg\min\{\|x\| : x \in \overline{X}_r\}$, $\overline{X}_r = \{x \in X_{\bar{\xi}_r} \cap S_r : f_0(x) = \bar{f}_r\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{x}_r \in \overline{X}_r$. Из неравенства $\varphi_\sigma(x_r^\sigma) \le \varphi_\sigma(\bar{x}_r)$ имеем

$$\alpha\,\|x_r^\sigma\|^2 \le \bar{f}_r - f_0(x_r^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\,[\,\|\bar{\xi}_r\|^2 - \|f^+(x_r^\sigma)\|^2] + \alpha\,\|\bar{x}_r\|^2 \le \bar{f}_r - f_0(x_r^\sigma) + \alpha\,\|\bar{x}_r\|^2.$$

Отсюда с учетом (13) и (9) для произвольных $\bar{x}_r$, $\bar{\lambda}_r$, удовлетворяющих (8), получим

$$\|x_r^\sigma\|^2 \le \|\bar{x}_r\|^2 + \frac{1}{\alpha}\,(\bar{f}_r - f_0(x_r^\sigma)) \le \|\bar{x}_r\|^2 + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\,\|\bar{\lambda}_r\|\,K_1(\sigma, r)$$
$$= \|\bar{x}_r\|^2 + 2\,\|\bar{\lambda}_r\|\,\Big(\frac{\beta}{\alpha}\,\|\bar{\lambda}_r\| + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\,\|\bar{x}_r\|^2 + \frac{\beta}{\alpha}\,\|\bar{\lambda}_r\|^2\Big)^{1/2}\Big),$$

где $K_1(\sigma, r)$ — из (9). Поэтому последовательность $\{x_r^\sigma\}$ ограничена при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, $\beta/\alpha \to 0$ $(\forall\, r > 0)$. Согласно (9), (10) все ее предельные точки лежат в $\overline{X}_r$. Полагая в последнем неравенстве $\bar{x}_r = (\bar{x}_r)_0$, в силу единственности нормального решения получим требуемое утверждение.

Теорема доказана.

Седловые точки $[x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma]$ функции $L_\sigma(x, \lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$ в пределе при $\sigma \to 0$ удовлетворяют условиям Куна — Таккера (8) (для каждого фиксированного $r > 0$).

Теорема 3. *Пусть для задачи* (7) *выполнены условия* (8). *Тогда*

$$(\triangledown_x L(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma),\, x - x_r^\sigma) \ge -4\,\alpha\, r^2 \qquad (\forall\, x \in S_r), \tag{15}$$

$$0 \le (\lambda_r^\sigma,\, f(x_r^\sigma) - \bar{\xi}_r) \le K_5(\sigma, r), \tag{16}$$

где $K_5(\sigma, r) = 2\,(\sqrt{\beta}\,\|\bar{\lambda}_r\|\,K_1(\sigma, r) + \alpha\,\|\bar{x}_r\|^2)$, $K_1(\sigma, r)$ — *из* (9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (15) практически очевидно, поскольку

$$(\triangledown_x L(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma),\, x - x_r^\sigma) = (\triangledown_x L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma),\, x - x_r^\sigma) + 2\,\alpha\,(x_r^\sigma,\, x - x_r^\sigma).$$

Далее, заметим, что

$$\|f^+(x)\|^2 \ge (\bar{\xi}_r, f^+(x)) \qquad (\forall\, x \in S_r)$$

(в противном случае нашелся бы вектор $x' \in S_r$, для которого $\|f^+(x')\| < \|\bar{\xi}_r\|$). Поэтому

$$(\lambda^\sigma,\, f(x_r^\sigma) - \bar{\xi}_r) = \frac{1}{2\,\beta}\,(f^+(x_r^\sigma),\, f(x_r^\sigma) - \bar{\xi}_r) = \frac{1}{2\,\beta}\,(\|f^+(x^\sigma)\|^2 - (\bar{\xi}_r,\, f^+(x_r^\sigma))) \ge 0.$$

С другой стороны,

$$(\lambda^\sigma,\, f(x_r^\sigma) - \bar{\xi}_r) = \frac{1}{2\,\beta}\,\|f^+(x_r^\sigma)\|^2 - \frac{1}{2\,\beta}\,(\bar{\xi}_r,\, f^+(x_r^\sigma)) \le \frac{1}{2\,\beta}\,(\|f^+(x_r^\sigma)\|^2 - \|\bar{\xi}_r\|^2).$$

Применяя теперь последовательно оценки (11) и (9), получим (16).

Теорема доказана.

Следствие 4. $\lim\limits_{\sigma\to 0} L(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = +\infty$.

Это утверждение вытекает из (13), (16), (6) и (9):

$$L(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = f_0(x_r^\sigma) + (\lambda_r^\sigma,\, f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r) + \frac{1}{2\,\beta}\,(f^+(x_r^\sigma),\, \bar\xi_r)$$

$$\ge \bar f_r - \|\bar\lambda_r\|\,\|(f(x_r^\sigma) - \bar\xi_r)^+\| + \frac{1}{2\,\beta}\,\|\bar\xi_r\|^2) \ge \bar f_r - \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda_r\|\,K_1(\sigma, r) + \frac{1}{2\,\beta}\,\|\bar\xi_r\|^2.$$

Следствие 5. $\lim\limits_{\sigma\to 0} L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = +\infty$.

Это следует из соотношений

$$L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = \varphi_\sigma(x_r^\sigma) = f_0(x_r^\sigma) + \frac{1}{4\,\beta}\,\|f^+(x_r^\sigma)\|^2 + \alpha\,\|x_r^\sigma\|^2 \ge \bar f_r - \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda_r\|\,K_1(\sigma, r) + \frac{1}{4\,\beta}\,\|\bar\xi_r\|^2.$$

Заметим, что если $\bar\xi_r = 0$, то

$$\bar f_r - \sqrt{\beta}\,\|\bar\lambda_r\|\,K_1(\sigma, r) \le L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) \le \varphi_\sigma(\bar x_r) = \bar f_r + \alpha\,\|\bar x_r\|^2.$$

Поэтому поведение $L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma)$ при $\sigma \to 0$ может служить индикатором несовместности системы ограничений задачи (3): если $\bar\xi_r = 0$, то $\lim\limits_{\sigma\to 0} L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = \bar f_r$, в противном случае работает следствие 5.

Пусть существует вектор $\bar\xi = \arg\min\{\|\xi\| : X_\xi \ne \varnothing\}$ (для этого достаточно, чтобы множество X_ξ было непусто и ограничено для некоторого $\xi = \xi_0$ — в этом случае замкнуто и ограничено множество $E = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ : X_\xi \ne \varnothing\}$). Тогда найдется параметр r_0 такой, что при $r \ge r_0$ будет $\bar\xi_r = \bar\xi$, и можно считать $\bar x_r = \bar x_{r_0} = \bar x_0$, $\bar\lambda_r = \bar\lambda_{r_0} = \lambda_0$. Поэтому справедливы следующие утверждения.

Следствие 6. $\lim\limits_{\substack{\sigma\to 0\\ r\to\infty}} f^+(x_r^\sigma) = \bar\xi$.

Следствие 7. $\lim\limits_{\substack{\sigma\to 0\\ r\to\infty}} f_0(x_r^\sigma) = \bar f = \min\{f_0(x) : x \in X_{\bar\xi}\}$.

Следствие 8. $\lim\limits_{\substack{\sigma\to 0\\ r\to\infty}} L_\sigma(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = \lim\limits_{\substack{\sigma\to 0\\ r\to\infty}} L(x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma) = +\infty$.

3. Задача выпуклого программирования с совместной системой ограничений

Пусть в задаче (1) $X \ne \varnothing$. Как отмечалось выше, при этом могут возникнуть два случая: (1a) задача (1) разрешима (т. е. $X^* \ne \varnothing$) и (1b) $\inf\limits_{x\in X} f_0(x) = \tilde f$ не достигается. Результаты для ситуации (1a) можно извлечь из анализа разд. 2. Для этого в полученных выше оценках достаточно положить r достаточно большим, так чтобы $\bar\xi_r = \bar\xi = 0$ ($r \ge \|x_0^*\|$, где $x_0^* = \arg\min\{\|x\| : x \in X^*\}$). При этом седловые точки $[x_r^\sigma, \lambda_r^\sigma]$, $[\bar x_r, \bar\lambda_r]$ и соответствующие оценки (9), (10), (15), (16) станут независимыми от r.

Далее остановимся на случае (1b), включающем возможность $\tilde f = -\infty$.

Пусть параметр $r > 0$ настолько большой, что $\bar\xi_r = 0$. Тогда задача (7) будет совпадать с (3). Обозначим решение задачи (3) через x_r^*, $f_r^* = f_0(x_r^*)$.

Пусть $x_k \in X$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_0(x_k) = \tilde f$. Понятно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty$. Если выбрать $r_k \ge \|x_k\|$, то $f_{r_k}^* \le f_0(x_k)$ и, следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} f_r^* = \tilde f$. При этом нетрудно видеть, что $f_{r_{k+1}}^* < f_{r_k}^*$ при $r_{k+1} > r_k$.

В самом деле, если $f^*_{r_{k+1}} = f^*_{r_k}$, то $f_0(x) \geq f^*_{r_k}$ для всех $x \in X_{r_{k+1}} \backslash X_{r_k}$, где $X_r = X \cap S_r$. Тогда выполнится и неравенство

$$f_0(x) \geq f^*_{r_k} \qquad (\forall\, r > r_{k+1},\ \forall\, x \in X_r \backslash X_{r_k}) \tag{17}$$

(в противном случае существовали бы $\bar r > r_{k+1}$ и $x' \in X_{\bar r}$, для которых $f_0(x') < f^*_{r_k}$, и, выбирая $\bar\alpha \in (0,1)$ так, чтобы $\bar x = \bar\alpha\, x' + (1-\bar\alpha)\, x^*_{r_k} \in X_{r_{k+1}} \backslash X_{r_k}$, получаем противоречие $f^*_{r_k} \leq f_0(\bar x) \leq \bar\alpha f_0(x') + (1-\bar\alpha) f_0(x^*_{r_k}) < f^*_{r_k}$).

С другой стороны, из (17) следует $f^*_{r_k} = \tilde f$, что невозможно.

Покажем, что $\|x^*_{r_k}\|^2 = r_k$ и $x^*_{r_k}$ — единственное решение задачи (3) при $r = r_k$. Так как $f^*_{r_{k+1}} < f^*_{r_k}$ $(r_{k+1} > r_k)$, то $x^*_{r_{k+1}} \neq x^*_{r_k}$. Пусть $\|x^*_{r_k}\|^2 < r_k$. Поскольку $\|x^*_{r_{k+1}}\|^2 > r_k$, то на отрезке $[x^*_{r_k}, x^*_{r_{k+1}}]$ найдется точка $\tilde x$, для которой $\|\tilde x\|^2 = r_k$, при этом $f_0(\tilde x) \leq \alpha f^*_{r_k} + (1-\alpha) f^*_{r_{k+1}} < f^*_{r_k}$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$. Последнее соотношение противоречит определению $f^*_{r_k}$. Таким образом,

$$\|x^*_{r_k}\|^2 = r_k. \tag{18}$$

Предположим, что существуют два различных решения (3): $x^*_1 \neq x^*_2$, $\|x^*_1\|^2 = \|x^*_2\|^2 = r_k$. Рассмотрим точку $x^* = (1/2)(x^*_1 + x^*_2)$, которая, очевидно, тоже будет решением (3). С другой стороны,

$$\|x^*\|^2 = \frac{1}{4}\, \|x^*_1 + x^*_2\|^2 = \frac{1}{4}\, (\|x^*_1\|^2 + \|x^*_2\|^2 + 2(x^*_1, x^*_2))$$

$$= \frac{1}{4}\, (2\, \|x^*_1\|^2 + 2\, \|x^*_2\|^2 - \|x^*_1 - x^*_2\|^2) = r_k - \frac{1}{4}\, \|x^*_1 - x^*_2\|^2 < r_k,$$

что противоречит (18).

Пусть для задачи (3) выполнено условие Слейтера: существует точка $x^0 \in S_r$, для которой $f_i(x^0) < 0$, $i = \overline{1,m}$. Тогда найдется вектор $\lambda^*_r \in \mathbb{R}^m_+$ такой, что пара $[x^*_r, \lambda^*_r]$ будет седловой точкой функции $L(x,\lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$. Другими словами, векторы x^*_r, λ^*_r удовлетворяют условиям Куна—Таккера (8) при $\bar\xi_r = 0$.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (1) $X \neq \varnothing$ *и точка* $[x^*_r, \lambda^*_r]$ *удовлетворяет условиям* (8) *при* $\bar\xi_r = 0$. *Тогда*

$$f^*_r - \beta\, \|\lambda^*_r\|^2 \leq L_\sigma(x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r) \leq f^*_r + \alpha\, r \tag{19}$$

для всех $\sigma = [\alpha, \beta] > 0$ *и достаточно больших* $r > 0$.

Доказательство. Так как $[x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r]$ и $[x^*_r, \lambda^*_r]$ — седловые точки соответственно функций $L_\sigma(x,\lambda)$ и $L(x,\lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$, то справедлива цепочка соотношений

$$f^*_r - \beta\, \|\lambda^*_r\|^2 = L(x^*_r, \lambda^*_r) - \beta\, \|\lambda^*_r\|^2 \leq L(x^\sigma_r, \lambda^*_r) + \alpha\, \|x^\sigma_r\|^2 - \beta\, \|\lambda^*_r\|^2 = L_\sigma(x^\sigma_r, \lambda^*_r) \leq L_\sigma(x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r)$$

$$\leq L_\sigma(x^*_r, \lambda^\sigma_r) = L(x^*_r, \lambda^\sigma_r) + \alpha\, \|x^*_r\|^2 - \beta\, \|\lambda^\sigma_r\|^2 \leq L(x^*_r, \lambda^*_r) + \alpha\, \|x^*_r\|^2 = f^*_r + \alpha\, \|x^*_r\|^2,$$

откуда с учетом (18) и следует (19).

Теорема доказана.

Следствие 9. $\lim\limits_{\sigma\to 0} L_\sigma(x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r) = f^*_r$.

Следствие 10. $\lim\limits_{r\to\infty} \lim\limits_{\sigma\to 0} L_\sigma(x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r) = \tilde f$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, $\sigma \to 0$, $r \to \infty$, $\alpha\, r \to 0$, $\beta\, r \to 0$. *Тогда*

$$L_\sigma(x^\sigma_r, \lambda^\sigma_r) \to \tilde f.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выясним поведение векторов λ_r^* при изменении r. Из определения точки $[x_r^*, \lambda_r^*]$ следует

$$f_0(x_r^*) \le f_0(x) + (\lambda_r^*, f(x)) \qquad (\forall\, x \in S_r).$$

Отсюда, полагая $x = x^0$ (x^0 — точка из условия Слейтера), получим

$$0 \le (\lambda_r^*)_i \le B(x^0)(f_0(x^0) - f_r^*) \le B(x^0)(\triangledown f_0(x^0), x^0 - x_r^*) \le B\sqrt{r},$$

где $B(x^0) = (\min\limits_{1\le i\le m} |f_i(x^0)|)^{-1}$, $B = 2B(x^0)\,\|\triangledown f_0(x^0)\|$. Окончательно, утверждение теоремы вытекает из неравенств (19).

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Справедливы оценки*

$$f_i^+(x_r^\sigma) \le \sqrt{\beta}\, C_i(\sigma, r), \qquad i = \overline{1,m}; \tag{20}$$

$$|f_r^* - f_0(x_r^\sigma)| \le \max\{\alpha\, r,\ \sqrt{\beta}\, C_0(\sigma, r)\}, \tag{21}$$

где $C_i(\sigma,r) = 2\,[(\lambda_r^*)_i\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha\, r + \beta\,\|\lambda_r^*\|^2}\,]$, $i = \overline{1,m}$, $C_0(\sigma,r) = \tilde\lambda_r \sum\limits_{i=1}^m C_i(\sigma,r)$, $\tilde\lambda_r = \max\limits_{1\le i\le m} (\lambda_r^*)_i$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведя выкладки, подобные тем, которые привели к неравенству (13), получаем

$$f_0(x') - f_r^* \ge -\sum_{i=1}^m (\lambda_r^*)_i f_i^+(x') \qquad (\forall\, x' \in S_r). \tag{22}$$

Поэтому

$$\varphi_\sigma(x_r^\sigma) \ge f_r^* - \sum_{i=1}^m (\lambda_r^*)_i\, f_i^+(x_r^\sigma) + \frac{1}{4\beta}\sum_{i=1}^m {f_i^+}^2(x_r^\sigma) + \alpha\,\|x_r^\sigma\|^2$$
$$\ge f_r^* + \sum_{i=1}^m \Big(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\, f_i^+(x_r^\sigma) - (\lambda_r^*)_i\sqrt{\beta}\,\Big)^2 - \beta\,\|\lambda_r^*\|^2.$$

Из этого неравенства и (19) вытекает

$$\sum_{i=1}^m \Big(\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\, f_i^+(x_r^\sigma) - (\lambda_r^*)_i\sqrt{\beta}\,\Big)^2 \le \alpha\, r + \beta\,\|\lambda_r^*\|^2,$$

откуда и следует (20).

Оценка (21) получается из (19) и (22) (при $x' = x_r^\sigma$) с последующим использованием (20).

Теорема доказана.

4. Связь с другими методами

Оставаясь в рамках случая (1b) из разд. 1, рассмотрим вопрос о связи между исследуемым подходом к оптимальной коррекции несобственных задач ВП и общим методом, изложенным в работе [4].

Упоминаемый метод состоит в следующем. Задаче (1) ставится в соответствие близкая задача

$$\min\{F_\gamma(x) = f_0(x) + \gamma\,\|x\|^2 : x \in X\}, \tag{23}$$

где γ — положительный числовой параметр. Если исходная задача (1) совместна ($X \ne \varnothing$), то задача (23) для любого $\gamma > 0$ разрешима в единственной точке x_γ^*, при этом справедливы [6] соотношения $f_0(x^*_\gamma) \searrow \tilde{f}$, $F^*_\gamma \searrow \tilde{f}$, где $\gamma \to 0$, $F^*_\gamma = F_\gamma(x^*_\gamma)$. Если задача (1) разрешима, то значения F^*_γ и $\tilde{f}$ связаны неравенствами $0 \le F^*_\gamma - \tilde{f} \le \gamma \|x^*_0\|^2$, где x^*_0 — нормальное решение задачи (1), а также имеет место сходимость $\lim\limits_{\gamma\to 0} x^*_\gamma = x^*_0$.

Предположим, что $X = \varnothing$, т. е. (1) является несобственной задачей ВП 1-го или 3-го рода. Двойственная функция $\psi^\gamma(\lambda) = \inf\limits_x \{L^\gamma(x,\lambda) = L(x,\lambda) + \gamma \|x\|^2\}$ задачи (23) определена для любого $\lambda \ge 0$. Поэтому в отличие от задачи (1) задача (23) так же, как и (3), может быть несобственной лишь 1-го рода.

Для задачи (23) вводится аналог аппроксимации (7)

$$\min\{F_\gamma(x) : x \in X_{\bar{\xi}}\}, \tag{24}$$

где $\bar{\xi}$ имеет тот же смысл, что и в (7) (при $S_r = \mathbb{R}^n$). Суть метода теперь можно условно представить цепочкой задач (1) $\to$ (23) $\to$ (24) $\to$ (P_σ), где (P_σ) — задача нахождения седловой точки $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ функции $L_\sigma(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$.

В случае (1b) задачи (23) и (24) совпадают, и сходимость этого метода характеризуется, в частности, равенством

$$\lim_{\gamma\to 0} \lim_{\substack{\alpha\to\gamma \\ \beta\to 0}} F_\gamma(x^\sigma) = \tilde{f},$$

причем сюда включается и ситуация, когда (1) — несобственная задача ВП 2-го рода ($\tilde{f} = -\infty$).

Для установления связи между подходом к оптимальной коррекции несобственных задач ВП из разд. 1 и 2 и только что изложенным методом сформулируем два утверждения.

Теорема 7. *Седловая точка $[x^\gamma, \lambda^\gamma]$ функции $L^\gamma(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ является седловой точкой и функции $L(x,\lambda)$ в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$ при $r = \|x^\gamma\|^2$.*

Доказательство. Очевидно, что если $L^\gamma(x^\gamma,\lambda) \le L^\gamma(x^\gamma,\lambda^\gamma)$, то и $L(x^\gamma,\lambda) \le L(x^\gamma,\lambda^\gamma)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Пусть теперь $L^\gamma(x^\gamma,\lambda^\gamma) \le L^\gamma(x,\lambda^\gamma)$ $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$. Отсюда следует

$$L(x^\gamma,\lambda^\gamma) \le L(x,\lambda^\gamma) + \gamma\,(\|x\|^2 - \|x^\gamma\|^2) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n),$$

и если $x \in S_r$ при $r = \|x^\gamma\|^2$, то $L(x^\gamma,\lambda^\gamma) \le L(x,\lambda^\gamma)$.

Теорема доказана.

Таким образом, если $x^{\bar{\gamma}}$ — решение задачи (23) при $\gamma = \bar{\gamma}$, то эта же точка будет решением и задачи (3) при $r = \|x^{\bar{\gamma}}\|^2$.

Запишем задачу (3) в виде

$$\min\{f_0(x) : f(x) \le 0,\ \|x\|^2 \le r\}. \tag{25}$$

Построим для (25) функцию Лагранжа

$$\widetilde{L}(x,\lambda,\lambda_0) = L(x,\lambda) + \lambda_0\,(\|x\|^2 - r),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1_+$.

Теорема 8. *Пусть $[x^*_r, \lambda^*_r, \lambda^*_{0r}]$ — седловая точка функции $\widetilde{L}(x,\lambda,\lambda_0)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^1_+$. Тогда пара $[x^*_r, \lambda^*_r]$ будет седловой точкой функции $L^\gamma(x,\lambda)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ при $\gamma = \lambda^*_{0r}$.*

Доказательство. Так как $\|x^*_r\|^2 = r$, то из определения седловой точки $[x^*_r, \lambda^*_r, \lambda^*_{0r}]$ следует $L^\gamma(x^*_r,\lambda) \le L^\gamma(x^*_r,\lambda^*_r)$ для любых $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ и $\gamma > 0$. С другой стороны, из неравенства $\widetilde{L}(x^*_r,\lambda^*_r,\lambda^*_{0r}) \le \widetilde{L}(x,\lambda^*_r,\lambda^*_{0r})$ следует

$$f_0(x^*_r) + \lambda^*_{0r}\,\|x^*_r\|^2 = f_0(x^*_r) + \lambda^*_{0r}\,r \le f_0(x) + (\lambda^*_r, f(x)) + \lambda^*_{0r}\,\|x\|^2 \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n),$$

т. е. при $\gamma = \lambda^*_{0r}$ имеет место неравенство

$$L^\gamma(x^*_r, \lambda^*_r) \le L^\gamma(x, \lambda^*_r) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Множитель Лагранжа λ^*_{0r}, соответствующий неравенству $\|x\|^2 \le r$ в задаче (25), можно считать положительным для любого $r > 0$.

В самом деле, пусть $x' \in X$, $x' \notin S_r$ и $f_0(x') < f^*_r = f_0(x^*_r)$. Тогда из неравенства $\widetilde{L}(x^*_r, \lambda^*_r, \lambda^*_{0r}) \le \widetilde{L}(x', \lambda^*_r, \lambda^*_{0r})$ получим

$$f_0(x^*_r) \le f_0(x') + \lambda^*_{0r}\,(\|x'\|^2 - r), \tag{26}$$

что при $\lambda^*_{0r} = 0$ ведет к противоречию с выбором точки x'.

Дополнительно можно показать, что

$$\lim_{r\to\infty} \lambda^*_{0r} = 0.$$

Пусть $\bar{x} \in \operatorname{int} X_r$. Тогда по аналогии с (26)

$$f_0(x^*_r) - f_0(\bar{x}) \le \lambda^*_{0r}\,(\|\bar{x}\|^2 - r),$$

откуда

$$0 < \lambda^*_{0r} \le \frac{f_0(\bar{x}) - f_0(x^*_r)}{r - \|\bar{x}\|^2} \le \frac{(\nabla f_0(\bar{x}), \bar{x} - x^*_r)}{\|x^*_r\|^2 - \|\bar{x}\|^2} \le \frac{\|\nabla f_0(\bar{x})\|\,\|\bar{x} - x^*_r\|}{\|x^*_r\|^2 - \|\bar{x}\|^2} \le \frac{\|\nabla f_0(\bar{x})\|}{\sqrt{r} - \|\bar{x}\|},$$

что при $r \to \infty$ и влечет нужную сходимость.

Последние рассуждения показывают, что существует тесная связь между двумя общими подходами к коррекции несобственных задач ВП, описанными в [4] и разд. 1. Идея первого из них близка к методу стабилизирующих функций Тихонова [7, 8], широко применяемому при регуляризации некорректных задач оптимизации. В то же время второй подход имеет сходство с другим известным методом регуляризации — методом квазирешений [7]. Более подробное исследование связи этих методов для отдельных классов некорректных задач можно найти, например, в [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Скарин В.Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
3. **Попов Л.Д.** Применение модифицированного prox-метода для оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1995. Т. 3. С. 261–266.
4. **Скарин В.Д.** Об одном универсальном подходе к оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Методы оптимизации и их приложения: тр. XI междунар. Байкальской шк.-семинара / СЭИ СО РАН. Иркутск, 1998. Т. 1. С. 56–59.
5. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
6. **Скарин В.Д.** О некоторых регуляризирующих и аппроксимирующих свойствах метода штрафных функций в выпуклом программировании // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 1(9). С. 107–128.
7. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач.М.: Наука, 1981. 400 с.

8. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
9. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.

Скарин Владимир Дмитриевич
канд. физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 1.03.2010

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

УДК 519.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ, ИНДУЦИРОВАННЫХ КОЛЛЕКТИВНЫМИ ПРОЦЕДУРАМИ ОБУЧЕНИЯ РАСПОЗНАВАНИЮ ОБРАЗОВ[1]

М. Ю. Хачай

В статье исследуется вычислительная сложность нового класса задач комбинаторной оптимизации, порожденных оптимальными процедурами обучения распознаванию образов в классе коллективных кусочно-линейных решающих правил комитетного типа.

Ключевые слова: минимизация эмпирического риска, комитетное решающее правило, вычислительная сложность.

M. Yu. Khachai. Computational complexity of combinatorial optimization problems induced by collective procedures in machine learning.

The computational complexity of a new class of combinatorial optimization problems that are induced by optimal machine learning procedures in the class of collective piecewise linear classifiers of committee type is studied.

Keywords: empirical risk minimization, committee decision rule, computational complexity.

Введение

Задача обучения распознаванию образов в простейшем случае двух классов эквивалентна вариационной задаче минимизации функционала среднего риска

$$\min\Big\{ \int\limits_{X\times\Omega} (\omega - f(x))^2 \, dP(x,\omega) \, : \, f \in F \Big\} \tag{1}$$

на множестве $F \subset \{X \to \Omega\}$ допустимых решающих правил. Здесь X — пространство результатов измерений, на основе которых классифицируются объекты, $\Omega = \{0,1\}$ — множество номеров (меток) классов. Вероятностная мера P считается [1], вообще говоря, неизвестной, сведения о ней задаются конечной выборкой

$$(x_1,\omega_1),\ldots,(x_m,\omega_m) \tag{2}$$

из генеральной совокупности с распределением, порождаемым этой мерой.

Традиционный ERM-подход [2] к обучению распознаванию образов связан с аппроксимацией неполностью формализованной задачи (1) задачей минимизации эмпирического риска

$$\min\Big\{ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\omega_i - f(x_i))^2 \, : \, f \in F \Big\}. \tag{3}$$

При этом точность аппроксимации (обобщающая способность результирующего решающего правила $f^* = \arg\min(3)$) монотонно убывает с ростом емкости $VCD(F)$ класса правил F. Поэтому наряду с задачей (3) часто рассматривается задача

$$\min\Big\{ \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\omega_i - f(x_i))^2 \, : \, f \in F',\ VCD(F') \le V,\ F' \subset F \Big\}. \tag{4}$$

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 07-07-00168 и 09-01-00139), Президиума УрО РАН (проекты 09-П-1-1001 и 09-С-1-1010).

С другой стороны, в рамках широко известного алгебраического подхода к решению задач распознавания исследуются классы F, содержащие корректные решающие правила (например, комитетного типа), для которых оптимальное значение задачи (3) равно нулю. Для таких классов повышение качества обучения непосредственно связано с решением задачи

$$\min\Big\{VCD(F')\,:\,\min\Big\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\omega_i - f(x_i))^2\,:\,f\in F'\Big\}=0,\ F'\subset F\Big\}. \tag{5}$$

К сожалению, задачи (4) и (5) являются труднорешаемыми задачами комбинаторной оптимизации. Труднорешаемы и многие их содержательные частные случаи [3–6]. Поэтому до сих пор актуальными остаются вопросы разработки приближенных полиномиальных алгоритмов решения этих задач и обоснования оценок порогов их эффективной аппроксимируемости.

В статье изучаются частные случаи задач (4), (5), в которых F является классом комитетных кусочно-линейных решающих правил. Приводятся новые результаты в области вычислительной и аппроксимационной сложности этих задач, полученные, в частности, с использованием современного комбинаторного аппарата [7], развитого при доказательстве PCP-теоремы.

1. Минимизация емкости класса комитетных кусочно-линейных правил

Исторически первые результаты в области вычислительной сложности описанных выше задач в классе комитетных правил были получены для задачи (5). Нам также удобнее начать изложение именно с этих результатов.

Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$, $f_1,\dots,f_q : X\to\mathbb{R}$ — аффинные функции. *Комитетным кусочно-линейным решающим правилом* с элементами $f_1,\dots,f_q$ называется частичная функция $\varphi : X\to\Omega$, задаваемая формулой

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } \sum_{i=1}^{q}\operatorname{sign}(f_i(x))>0,\\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{q}\operatorname{sign}(f_i(x))<0,\\ \Lambda & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Если $\varphi(x)=\Lambda$ для некоторого x, то считается, что функция φ при этом x не определена.

Комитетное правило φ называется *корректным* на выборке (2), если

$$\varphi(x_i)=\omega_i \qquad (i\in\mathbb{N}_m=\{1,2,\dots,m\}).$$

Сопоставим выборке множества

$$A=\{x_i : i\in\mathbb{N}_m,\ \omega_i=1\} \text{ и } B=\{x_i : i\in\mathbb{N}_m,\ \omega_i=0\}.$$

Известно [8], что класс комитетных кусочно-линейных решающих правил содержит корректное на выборке (2) правило тогда и только тогда, когда $A\cap B=\varnothing$. Обозначим через F_q класс комитетных решающих правил, состоящих из не более чем q элементов.

Теорема 1 [9]. *Емкость класса F_q, $VCD(F_q)$, удовлетворяет соотношениям*

$$VCD(F_q)\le q(n+1),\qquad q\le 2\left\lceil\frac{\lfloor (VCD(F_q)-n)/2\rfloor}{n}\right\rceil+1.$$

Таким образом, задача (5) в классе комитетных кусочно-линейных решающих правил эквивалентна задаче поиска корректного на выборке (2) правила с наименьшим возможным q, которую удобно формулировать в терминах аффинных разделяющих комитетов.

Определение 1. Пусть $f_1, \ldots, f_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — аффинные функции и A, B — конечные подмножества $\mathbb{R}^n$. Конечная последовательность $K = (f_1, \ldots, f_q)$ называется *аффинным комитетом, разделяющим A и B*, если

$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(a) > 0\}| > \frac{q}{2} \qquad (a \in A),$$

$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(b) < 0\}| > \frac{q}{2} \qquad (b \in B).$$

Число q называется *числом элементов комитета K*, а множества A и B — *отделимыми* этим комитетом.

Задача "Минимальный аффинный разделяющий комитет" (MASC). Для заданных конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$ требуется найти аффинный комитет K, разделяющий эти множества, с наименьшим числом элементов.

Здесь и ниже договоримся символом $\mathbb{Q}$ обозначать множество рациональных чисел. Сложность и аппроксимируемость задачи MASC в общем случае определяются в приведенной ниже теореме.

Теорема 2 [10]. 1. *Задача* MASC *NP-трудна и сохраняет труднорешаемость при дополнительном ограничении*

$$A \cup B \subset \{x \in \{0,1,2\}^n : \|x\|_2 \leq 2\}.$$

2. *Если $P \neq NP$, задача* MASC *не принадлежит классу Apx. Более того, если не выполнено условие*

$$NP \subset DTIME(2^{poly(\log n)}),$$

то существует константа $D > 0$ такая, что точность r произвольного полиномиального приближенного алгоритма задачи MASC *удовлетворяет неравенству $r \geq D \log\log\log m$.*

Договоримся использовать обозначение MASC(n) для задачи MASC, сформулированной в пространстве фиксированной размерности n. Известно [9], что задача MASC(n) полиномиально разрешима при $n = 1$. При произвольном $n > 1$ задача NP-трудна. Справедливость этого факта следует из труднорешаемости следующей задачи.

Задача "Аффинный разделяющий комитет на плоскости" (PASC). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, и натуральное число t. Существует ли аффинный комитет K с не более чем t элементами, разделяющий множества A и B?

Видно, что задача PASC является модификацией задачи MASC(2) в форме задачи верификации свойства и принадлежит NP. Доказательство ее труднорешаемости следует из полиномиальной сводимости (к ней) NP-полной задачи о покрытии конечного множества (точек) на плоскости множеством прямых линий, известной в литературе [11] как задача PC.

Задача "Покрытие прямыми множества на плоскости" (PC). Заданы конечное подмножество P плоскости, содержащее точки с целочисленными координатами, и натуральное число s. Существует ли такое покрытие L множества P прямыми, что $|L| \leq s$?

Если множество P находится в общем положении, т. е. никакие три точки из P не лежат на одной прямой, то ответ в задаче PC может быть получен тривиально ("да", если $s \geq \lceil |P|/2 \rceil$, и "нет", в противном случае) за полиномиальное от логарифма размера задачи время. Тем не менее в общем случае задача PC, как известно [11], NP-полна в сильном смысле.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 [10]. *Произвольному конечному целочисленному подмножеству P плоскости за полиномиальное время можно сопоставить число $\varepsilon > 0$, вектор σ и множества $A = P$ и $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ так, что P обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда A и B отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.*

Следствие 1. *Задача* PASC *NP-полна в сильном смысле. Задача* ASC(n) *при произвольном $n > 1$ также NP-полна в сильном смысле.*[2] *Задача* MASC(n) *NP-трудна при произвольном $n > 1$.*

Доказательство теоремы 3 существенно опиралось на неявное допущение о возможности рассмотрения "вырожденных" условий задачи PASC, задаваемых множеством $A \cup B$, не находящимся в общем положении. Ниже приводится аналогичный результат, полученный без этого допущения.

О п р е д е л е н и е 2. Множество $Z \subset \mathbb{R}^n$, $|Z| > n$, находится *в общем положении,* если для каждого его подмножества Z', $|Z'| = n + 1$, справедливо равенство $\dim \operatorname{aff}(Z') = n$.

З а д а ч а "PASC для множеств в общем положении" (PASC-GP). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, так, что множество $A \cup B$ находится в общем положении, и натуральное число t. Существует ли аффинный комитет K с не более чем t элементами, разделяющий множества A и B?

Труднорешаемость задачи PASC-GP также может быть обоснована полиномиальным сведением к ней задачи PC.

Теорема 4 [6]. *Произвольному конечному целочисленному подмножеству P плоскости за полиномиальное от его размера время могут быть сопоставлены положительные числа M, $\varepsilon(p)$, ортогональные векторы σ и τ и множества*

$$A = \left\{p \pm \frac{\varepsilon(p)}{M}\tau \,:\, p \in P\right\} \quad \text{и} \quad B = \{p \pm \varepsilon(p)\sigma \,:\, p \in P\}$$

так, что $A \cup B$ находится в общем положении и P обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества A и B отделимы аффинным комитетом из $2s+1$ элемента.

Следствие 2. *Задача* PASC-GP *NP-полна в сильном смысле. Задачи* MASC-GP(n) *и* MASC-GP *NP-трудны*[3].

Заметим, что из теорем 3 и 4 следует полиномиальная сводимость задачи MinPC к задачам MASC(2) и MASC-GP(2) соответственно,[4], *сохраняющая точность аппроксимации* (произвольный полиномиальный приближенный алгоритм задачи MASC(2) или MASC-GP(2) индуцирует полиномиальный приближенный алгоритм для задачи MinPC с такой же точностью аппроксимации).

В работе [11] доказательство труднорешаемости задачи PC было получено как следствие полиномиальной сводимости к ней известной задачи 3SAT. Проведя аналогичные рассуждения для задачи Gap-3SAT$(5)_{1,\rho}$, труднорешаемость которой следует из известной PCP-теоремы [4], получим результат, касающийся аппроксимируемости задачи MinPC.

З а д а ч а "Gap-3SAT$(5)_{1,\rho}$". Для заданной 3КНФ, в которой каждая переменная используется не более чем в 5 дизъюнктах, необходимо дать ответ "да", если найдется разрешающий ее набор истинности, ответ "нет", если для произвольного набора истинности доля разрешаемых им дизъюнктов меньше ρ. В противном случае ответ не определен.

Теорема 5. *Задача* MinPC *Max-SNP-трудна.*

Следствие 3. *Задача* MASC-GP(n) *Max-SNP-трудна при произвольном $n > 1$.*

---

[2] ASC(n) — версия задачи MASC(n) в виде задачи верификации свойства.

[3] Подобно PASC-GP, задачи MASC-GP(n) и MASC-GP являются модификациями задачи MASC и MASC(n) с дополнительным ограничением общности положения разделяемых множеств.

[4] MinPC — оптимизационная версия задачи PC.

Как известно, принадлежность NP-трудной задачи классу Max-SNP-трудных задач влечет невозможность (при условии $P \neq NP$) построения для такой задачи полиномиальной приближенной схемы (PTAS).

Наилучший (по гарантированной оценке точности) известный приближенный алгоритм (‘Greedy Committee’) для задачи MASC-GP(n) описан в работе [6] и обладает следующими свойствами.

Теорема 6. 1. *Пусть множество* $Z = A \cup B \subset \mathbb{Q}^n$, $|Z| = m$, *задает условие задачи* MASC-GP(n). *Сложность алгоритма ‘Greedy Committee’ составит* $O\big(\binom{m}{n}^3 + \Theta m\big)$, *где* Θ — *сложность подзадачи нахождения решения совместной системы из не более чем* m *линейных неравенств от* $n+1$ *переменной. Точность алгоритма* $O(m/n)$.

2. *Пусть для множества* Z *найдутся число* t *и максимальные по включению аффинно отделимые подмножества* $Z'_0, Z'_1, \ldots, Z'_{2t} \subset Z$ *(необязательно различные) такие, что*

$$Z'_{2j-1} \cup Z'_{2j} = Z \qquad (j \in \mathbb{N}_t),$$

и для произвольных пар (c_i, d_i) *таких, что*

$$\begin{aligned} c_i^T a - d_i > 0 \quad & (a \in A \cap Z'_i), \\ c_i^T b - d_i < 0 \quad & (a \in B \cap Z'_i), \end{aligned}$$

последовательность $K = (c_0^T x - d_0, c_1^T x - d_1, \ldots, c_{2t}^T x - d_{2t})$ *является минимальным аффинным комитетом, разделяющим множества* A *и* B. *Тогда точность алгоритма не превосходит* $O(\log m)$.

Условие, приведенное в пункте 2 теоремы 6, может показаться излишне строгим. Тем не менее согласно результатам численных экспериментов случайно выбранное условие задачи MASC-GP(n) с высокой вероятностью ему удовлетворяет. Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Формулировки задач* PASC *и* PASC-GP, *построенные на этапе полиномиального сведения задачи* PC *при доказательстве теорем* 3 *и* 4, *удовлетворяют условию п.* 2 *теоремы* 6.

Доказательство теоремы 6 и утверждения 1 приведены в [6].

2. Максимизация мощности комитетно-отделимых подмножеств

В этом разделе исследуются свойства задачи (4) в классе комитетных кусочно-линейных решающих правил.

Пусть q — произвольное нечетное натуральное число.

О п р е д е л е н и е 3. Подмножество $Z' = A' \cup B'$, $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ называется *q-отделимым подмножеством* множества $Z = A \cup B$, если найдется аффинный комитет

$$K = (c_1^T x - d_1, \ldots, c_q^T x - d_q),$$

состоящий из q элементов, разделяющий подмножества A' и B'.

Заметим, что произвольное q-отделимое подмножество, очевидно, является $(q+2t)$-отделимым для произвольного натурального t. Поэтому задача (4) легко может быть эквивалентным образом сформулирована в терминах q-отделимых множеств.

З а д а ч а “Максимальное (по мощности) подмножество, отделимое комитетом” (MACSS). Заданы конечные подмножества A, $B \subset \mathbb{Q}^n$ и натуральное число q. Требуется указать наибольшее по мощности q-отделимое подмножество $Z' \subseteq Z = A \cup B$.

По аналогии с задачей MASC введем в рассмотрение подклассы задачи MACSS, базовые подклассы перечислены в таблице. Все остальные подклассы могут быть получены путем пересечения базовых, например, класс MACSS-GP(n) содержит задачи, в которых разделяемое множество $A \cup B$ является подмножеством конечномерного числового пространства фиксированной размерности n.

Основные подклассы задачи MACSS

Название класса	Ограничение
q-MACSS	число элементов разделяющего комитета фиксировано и равно q
MACSS(n)	размерность пространства фиксирована и равна n
MACSS-GP	множество $A \cup B$ находится в общем положении

Пусть P — произвольная задача комбинаторной оптимизации. Договоримся задачу P называть NP-трудной *в сильном смысле,* если соответствующая ей задача верификации свойства NP-полна в сильном смысле. Статус вычислительной сложности перечисленных задач определяется в следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть n — произвольное натуральное число, большее единицы. Задачи* MACSS, MACSS(n), MACSS-GP *и* MACSS-GP(n) *NP-трудны в сильном смысле.*

Предпошлем доказательству теоремы некоторый, вообще говоря, более общий результат. Рассмотрим две взаимосвязанные задачи комбинаторной оптимизации

$$\begin{aligned} P_1:\ \alpha_1^* &= \max\{f(x) : g(x) \le g_0,\ x \in X\}, \\ P_2:\ \alpha_2^* &= \min\{g(x) : f(x) \ge f_0,\ x \in X\}, \end{aligned}$$

в которых f и g — вычислимые [12] функции.

Лемма 1. *Пусть функция $g : X \to \mathbb{Z}$ и существует алгоритм $\mathcal{A}$, сопоставляющий условию задачи P_2 пару рациональных чисел (e', e'') так, что*

$$e' \le \alpha_2^* \le e'',$$

и обладающий полиномиальной временной сложностью[5]*. Тогда задача P_2 сводима по Тьюрингу к задаче P_1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По выбору алгоритма $\mathcal{A}$ справедливо соотношение $[e', e''] \cap \mathbb{Z} \ne \emptyset$. Применим для условной минимизации функции $g(x)$ метод половинного деления. Для этого определим числа e'_1 и e''_1 равенствами

$$e'_1 = e', \qquad e''_1 = e''$$

и положим $k = 1$.

Пусть найдены e'_k и e''_k. Если

$$[e'_k, e''_k] \cap \mathbb{Z} = \{e\},$$

[5]По отношению к длине записи $LEN(P_2)$ условия задачи P_2.

оптимальным решением задачи P_2 является оптимальное решение задачи P_1 при $g_0 = e$. В противном случае найдем оптимальное решение задачи P_1 при $g_0 = (e''_k + e'_k)/2$. Определим e'_{k+1} и e''_{k+1} по формулам

$$(e'_{k+1}, e''_{k+1}) = \begin{cases} (g_0, e''_k), & \text{если задача } P_1 \text{ неразрешима или } \alpha_1^* < f_0, \\ (e'_k, g_0) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и продолжим вычисления, положив $k = k + 1$.

Описанный алгоритм, очевидно, конечношаговый, поскольку на каждой его итерации величина $e''_k - e'_k$ сокращается в два раза. Поскольку алгоритм $\mathcal{A}$ по условию имеет полиномиальную временную сложность, то

$$e'' - e' = O(2^{poly(LEN(P_2))}),$$

и число итераций метода половинного деления ограничено сверху полиномом от $LEN(P_2)$. Следовательно, решение задачи P_2 может быть получено путем не более чем полиномиального (от длины записи условия этой задачи) числа обращений к алгоритму решения подходящей постановки задачи P_1, получаемой из условия задачи P_2 также за полиномиальное время. Сводимость по Тьюрингу задачи P_2 к задаче P_1 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7. Справедливость утверждения теоремы следует из леммы 1, примененной к парам задач MACSS и MASC, MACSS(n) и MASC(n), MACSS-GP и MASC-GP, MACSS-GP(n) и MASC-GP(n) соответственно. Остановимся на обосновании первого случая, в остальных доказательство может быть получено по аналогии.

В самом деле, сопоставим подмножествам A и B, определяющим условие задачи MASC, множество $X = \mathcal{K}$ всевозможных комитетных решающих правил, на котором определим функции f и g по формулам: для каждого $K \in \mathcal{K}$ из q элементов

$$f(K) = \max\{|A' \cup B'| : A' \subseteq A,\ B' \subseteq B,\ A' \text{ и } B' \text{ разделяются комитетом } K\},$$

$$g(K) = q.$$

Задавшись константами

$$f_0 = e'' = |A \cup B| \quad \text{и} \quad e' = 1,$$

очевидно, вычисляемыми за полиномиальное от $|A \cup B| \leq LEN(\text{MASC})$ время, воспользуемся леммой 1. В силу следствия 2 задача MASC NP-трудна в сильном смысле, следовательно, задача MACSS также NP-трудна в сильном смысле.

Теорема доказана.

Заметим, что задачи MACSS(1) и MACSS-GP(1), очевидно, полиномиально разрешимы.

Теорема 8. 1. *Задача* q-MACSS-GP(n) *полиномиально разрешима при произвольных фиксированных натуральных* q *и* n.

2. *Задачи* 1-MACSS *и* 1-MACSS-GP NP*-трудны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Без ограничения общности, рассмотрим комитетные решающие правила, состоящие из аффинных функций, разделяющих максимальные по включению аффинно разделимые подмножества множества $A \cup B$. Выделим все такие подмножества, применив полиномиальный алгоритм [6] построения графа максимальных аффинно-разделимых подмножеств множества $A \cup B$. Задача q-MACSS-GP(n) может быть решена непосредственной проверкой всевозможных комбинаций из не более чем q подсистем.

2. Задачи 1-MACSS и 1-MACSS-GP полиномиально эквивалентны задаче о наибольшей по мощности максимальной совместной подсистеме подходящей системы линейных неравенств (DH), поэтому согласно результатам [13] обе задачи NP-трудны.

Теорема доказана.

Пусть далее параметр n удовлетворяет условию теоремы 7. Перейдем к обсуждению результатов, касающихся аппроксимируемости задачи MACSS (и ее подклассов) при условии $A \cap B = \varnothing$. Как известно [9], существует аффинный комитет из не более чем $M = 2\lfloor |A \cup B|/2 \rfloor + 1$ элемента, разделяющий множества A и B, следовательно, оптимальное значение в задаче M-MACSS (для выбранных множеств A и B) равно $|A \cup B|$. Пусть числа s и t подобраны так, что $M = 2s + 1$ и $q = 2t + 1$, где $q < M$. Через $\alpha^*(q)$ обозначим оптимальное значение задачи q-MACSS (для тех же разделяемых множеств). Воспользуемся стандартными обозначениями

$$b(i; n, p) = b(i; n, p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

— вероятности i успехов в схеме испытаний Бернулли и

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

— функции гауссовой плотности вероятности.

Теорема 9. 1. *Справедливо соотношение* $|A \cup B| \geq \alpha^*(q) \geq \delta_{M,q} \times |A \cup B|$, *где*

$$\delta_{M,q} = \frac{s}{M} \sum_{l=t-1}^{q-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(M-1)-l}{(s-1)-(t-1)}}{\binom{M-1}{s-1}} = \frac{q}{M} \sum_{l=t-1}^{s-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(M-1)-l}{(q-1)-(t-1)}}{\binom{M-1}{q-1}}.$$

2. *При* $M - q = 2\lambda$ *справедливо следующее предельное соотношение*:

$$\lim_{M\to\infty} \delta_{M,q} = \frac{1}{2}\left(1 + b(\lambda; 2\lambda - 1, 0.5)\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda - 1}}\, \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda - 1}}\right).$$

Доказательство теоремы непосредственно следует из результатов [14].

Заключение

В работе вводится новый класс комбинаторных задач, индуцированных оптимальными процедурами обучения в классе кусочно-линейных решающих правил комитетного типа и связанных с максимизацией мощности комитетно-отделимого подмножества обучающего множества (MACSS). Показано, что в общем случае задача MACSS является NP-трудной в сильном смысле и сохраняет это свойство при некоторых дополнительных ограничениях, например, при ограничении общности положения разделяемых множеств. Приведенные результаты, как правило, с легкостью следуют из полученных ранее для задачи "Минимальный аффинный разделяющий комитет" (MASC). Тем не менее достаточно большой круг вопросов по-прежнему остается открытым. Например, неизвестен статус вычислительной сложности задач q-MACSS и q-MACSS-GP. Несмотря на наличие полиномиальных приближенных алгоритмов для задач MACSS и MACSS(n), какие-либо гарантированные оценки точности этих алгоритмов не известны до сих пор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боровков А.А.** Математическая статистика. Новосибирск: Наука, 1997. 772 с.
2. **Vapnik V.N.** Statistical learning theory. New York: Wiley, 1998. 740 p.
3. **Blum A., Rivest R.L.** Training a 3-node neural network is NP-complete // Advances in neural information processing systems / Ed. D.S.Touretzky. San Mateo: M. Kaufmann, 1988. 830 p.
4. **Lin J. H., and Vitter J. S.** Complexity results on learning by neural nets // Machine Learning. 1991. Vol. 6. P. 211–230.

5. **Khachay M.** On the computational complexity of the minimum committee problem // J. Math. Model. Algor. 2007. Vol. 6, no. 4. P. 547–561.
6. **Khachai M, Poberii M.** Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. 2009. Vol. 20, no. 2. P. 217–234.
7. **Dinur I.** The PCP theorem by gap amplification // J. of the ACM. 2007. Vol. 54, no. 3.
8. **Мазуров Вл. Д.** Комитеты систем неравенств и задача распознавания образов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.
9. **Khachai M., Mazurov V., Rybin A.** Committee construction for solving problems of selection, diagnostics, and prediction // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S67-S101.
10. **Khachai M.** Computational and approximational complexity of combinatorial problems related to the committee polyhedral separability of finite sets // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, no. 2. P. 237–242.
11. **Megiddo N., Tamir A.** On the complexity of locating linear facilities in the plane // Oper. Res. Let. 1982. Vol. 1, no. 5. P. 194–197.
12. **Яблонский С.В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
13. **Johnson D.S., Preparata F.P.** The densest hemisphere problem // Theor. Comput. Sci. 1978. № 6. P. 93–107.
14. **Хачай М.Ю.** Об одной игре с природой, связанной с принятием решений большинством голосов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 10. С. 1609–1616.

Хачай Михаил Юрьевич
д-р. физ.-мат. наук
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Поступила 02.04.2010

Том 16 № 3 2010

ИЗ ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

А. Л. Казаков

В томе 16, № 2 опубликована моя статья “Применение обобщенного метода характеристических рядов при построении решения одной начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений”.

(1) На с. 92 статьи в последней строке имеется опечатка.
Вместо $u(t,x,y)|_{x=t} = u(t,x,y)|_{y=t} = 1$ должно быть $u(t,x,y)|_{x=t,y=t} = 1$.

(2) В формулах (6.1.) (на с. 99) имеются опечатки. Данная формула должна выглядеть следующим образом:

$$
\begin{aligned}
u(t,x,y,z) &= \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ u_+(t,x,y,z), \text{ если } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0; \end{cases} \\
v(t,x,y,z) &= \begin{cases} 0, \text{ если } y \le 0, \\ v_+(t,x,y,z), \text{ если } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0; \end{cases} \\
w(t,x,y,z) &= \begin{cases} 0, \text{ если } z \le 0, \\ w_+(t,x,y,z), \text{ если } x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

(3) Следует исправить приведенные на с. 99 (второй абзац снизу) формулы для кусочно-аналитического решения задачи (1.9), (1.10) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
u(t,x,y,z) &= \begin{cases} c_1, \text{ если } x \le c_1 t, \\ u_+(t,x,y,z), \text{ если } x \ge c_1 t,\ y \ge c_1 t,\ z \ge c_1 t; \end{cases} \\
v(t,x,y,z) &= \begin{cases} c_2, \text{ если } y \le c_2 t, \\ v_+(t,x,y,z), \text{ если } x \ge c_2 t,\ y \ge c_2 t,\ z \ge c_2 t; \end{cases} \\
w(t,x,y,z) &= \begin{cases} c_3, \text{ если } z \le c_3 t, \\ w_+(t,x,y,z), \text{ если } x \ge c_3 t,\ y \ge c_3 t,\ z \ge c_3 t. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(4) На с. 100 в 13-й и 14-й строках речь идет не о координатных осях Ox и Oy, а о координатных плоскостях Oxt и Oyt.

(5) На рисунке (с. 102) символы Ω_1 и Ω_2 следует поменять местами.

(6) В формулировке теоремы 2 при редактировании статьи были потеряны условия совместности системы (7.1) на координатных гиперплоскостях $a_{k,ik}|_{x_i=0,u_i=0} = 0$, $\quad b_i|_{x_i=0,u_i=0} = 0$; $\quad i,k = 1,\ldots,n,\ k \ne i$, которые неявно используются при доказательстве теоремы 2.

Поступило 20.07.2010

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 16 № 3 2010

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
TEX-редактор Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск Г. Ф. Корнилова, И. Н. Белоусов

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 27.08.10. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 36. Уч.-изд. л. 31. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226